Regla de Boole

La regla de Boole es una de las fórmulas de Newton-Cotes (como la regla del trapecio o la regla de Simpson), utilizadas para aproximar integrales definidas dentro de un intervalo cerrado. Estos métodos calculan la integral de un polinomio de grado n obtenido tras interpolar la función original:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b P_n(x)\,dx$$

Para aplicar la regla de Boole, se divide el intervalo de integración en 5 puntos, separados por un distancia $h = \frac{b-a}{4}$ y se calcula un polinomio de interpolación de Lagrange de grado 4, utilizando los puntos $(x_i, f(x_i))$, donde $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 4$:

$$P_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} f(x_3) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} f(x_4)$$

Tras obtener el polinomio anterior, se integra sobre el intervalo $[x_0, x_4]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \int_{x_0}^{x_4} P_4(x)\,dx$$

Finalmente, se simplifica el resultado, obteniendo la regla de Boole:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{2h}{45}\left[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)\right]$$

Cota de error

Para calcular la cota de error del método, se utiliza la fórmula:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_4(x)\,dx\right| \le -\frac{8}{945} h^7 \alpha_{máx}$$

Donde $\alpha_{máx} = \max_{x \in [a, b]} f^{(6)}(x)$

Ejemplo numérico

Se aproximará la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} x^2 e^{-x} dx = 1.871901667$$

- Se divide el intervalo en cinco puntos separados por $h = \frac{b-a}{4} = \frac{3-(-1)}{4} = 1$:

$$x_i = a + ih$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow f\left(x_0\right) = e$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow f\left(x_1\right) = 0$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow f\left(x_2\right) = e^{-1}$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow f\left(x_0\right) = 4e^{-2}$$

$$x_4 = 3 \Rightarrow f\left(x_0\right) = 9e^{-3}$$

- Aplicando la fórmula:

$$\int_{-1}^{3} x^2 e^{-x} dx \cong \frac{2}{45}\left[7(e) + 32(0) + 12\left(e^{-1}\right) + 32\left(4e^{-2}\right) + 7\left(9e^{-3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{3} x^2 e^{-x} dx \cong 1.951201229$$

Cálculo de la cota de error:

$$\alpha_{máx} = \max_{x \in [a,\, b]} f^{(6)}(x) = \max_{x \in [a,\, b]} e^{-x}\left(x^2 - 12x + 30\right)$$

- Puntos críticos de $f^{(6)}(x)$:

$$f^{(7)}(x) = -e^{-x}\left(x^2 - 14x + 42\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 7 + \sqrt{7} \\ 7 - \sqrt{7} \end{cases} = \begin{cases} 4.35425 \\ 9.64575 \end{cases}$$

Como ambos valores se encuentran fuera del intervalo de integración, no se tomarán en cuenta.

- Evaluación de los extremos del intervalo

$$f^{(6)}(-1) = 116.886119$$

$$f^{(6)}(3) = 0.149361$$

- Finalmente, tomando $\alpha_{máx} = 116.886119$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_4(x)\,dx\right| \leq -\frac{8}{945}(1)^7(116.886119) = -0.989512$$

Referencias

[1] Weisstein, Eric W. "Newton-Cotes Formulas." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html

[2] Weisstein, Eric W. "Boole's Rule." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/BoolesRule.html