Movidas para Helga

De mí para tú

Versión 2, a jueves 25/01/2024

Hooolas jajaja :D Bueno, no estoy muy seguro de cuántas versiones habrá de esto, o qué incluirán, así que voy a poner aquí algo genérico. Como por ejemplo unpopular opinions que tengo. La primera que me viene siempre a la cabeza es que Shrek está sobrevalorada. A mí me mola, pero tanto taaaanto... En plan la he visto una vez o dos. Y pues suficiente sabes. Otra unpopular opinion, esta vez entre los científicos. No estoy yo tan seguro del Big Bang... Aquí la peña ha tenido que inventarse la materia y la energía oscura para que toda esa movida funcione, y a mí eso me convence más bien poco. Pero de momento es lo mejor que tenemos así que me tendré que joder jajajaj. Y pues no sé, creo que ya está bien de hablar. Demos paso aaaa... Lo que viene debajo!! Jajaja. Aguuur ;)

Nota: Todos los vectores se asume que son vectores columna. Se considerará todo el rato un espacio tridimensional, es decir que los vectores tendrán 3 componentes indicadas con subíndices x, y, z respectivamente, y las matrices serán siempre de 3×3. Como soy ingeniero y todo eso me da igual, voy a usar las palabras "tensor" y "matriz" como sinónimos, para horror de toda la gente de mates y física.

Cambios con respecto a la versión anterior

- Cambio del párrafo inicial, que se ha convertido en una especie de preludio jajaja.
- Arreglo de erratas aquí y allí.
- Adición de alguna cosilla a la sección *Cosas que saber antes de empezar*, principlamente la parte sobre notación del producto vector-matriz-vector.
- Adición de las sección *Energías cinéticas.*

1. Cosas que saber antes de empezar

Antes de empezar, hay un par de operaciones/propiedades que deberías manejar, ambas relativas a los vectores. Considera dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Asumo que conoces las operaciones básicas entre ellos, léase el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (que produce un escalar) y el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ (que produce un vector). En cualquier caso te los pongo en la Ecuación 1. Bien, pues ahora vamos a introducir el **producto diádico**, $\vec{a} \otimes \vec{b}$. El resultado es una matriz (técnicamente, una díada, pero son movidas en las que no me voy a meter ahora), y está definido como se ve en la Ecuación 2. Nótese que $\vec{b} \otimes \vec{a} = (\vec{a} \otimes \vec{b})^T$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \tag{2}$$

Otra cosa (básica) que hay que saber son las propiedades de estos productos, algunas de las cuales son interesantes. Te las dejo por aquí abajo, donde uso $\circ$ como símbolo genérico de cualquiera de los tres productos de arriba. Mira que para productos con vectores no hay asociativa que valga.

- Distributiva: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$
- Conmutativa del producto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Anticonmutativa del producto vectorial: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Producto mixto: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$
- Y esta que te la pongo yo: $(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \otimes \vec{c})\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$
- Y la famosa *BAC CAB rule*: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \otimes \vec{c} - \vec{c} \otimes \vec{b})\vec{a}$

Otra cosa que tienes que saber va con integrales. Considera una región Ω sobre la cual definimos la integral de la Ecuación 3, donde $\circ$ representa una operación genérica entre los dos vectores (es decir puede ser un producto escalar, vectorial o diádico). Bien pues si uno de los dos vectores es constante, se puede sacar de la integral igual que si estuviésemos trabajando con escalares. Esto es básicamente lo que sale en la parte derecha de la Ecuación 3. Esto también acepta tener escalares (o incluso matrices) de por medio, que si son constantes pueden salir de la integral y si no pues se quedan dentro. En cualquier caso, cuando dos vectores operan entre sí, el orden en el que lo hacen es importante y hay que mantenerlo al meterlos/sacarlos de una integral.

$$\int_\Omega \vec{a} \circ \vec{b}\; dV = \begin{cases} \vec{a} \circ \left(\displaystyle\int_\Omega \vec{b}\; dV \right) & \text{si } \vec{a} \text{ es constante en } \Omega. \\ \left(\displaystyle\int_\Omega \vec{a}\; dV \right) \circ \vec{b} & \text{si } \vec{b} \text{ es constante en } \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Por último, y aunque asumo que lo sabes, recordemos la definición del centro de masas. Supón un cuerpo (sólido) que ocupa una región Ω del espacio. La posición de su centro de masas, llamémosla $\vec{r}_c$, viene dada por la Ecuación 4, donde $dm = \rho dV$ es un diferencial de masa del cuerpo, $\vec{r}$ es el vector posición de dicho diferencial de masa y M es la masa total del cuerpo. De esto se desprende lo que he puesto a la derecha, que sale simplemente de considerar que M es simplemente la integral de dm sobre Ω, traer $\vec{r}_c$ dentro de esa integral y pasarlo todo al mismo sitio. Lo de la derecha es importante, porque el vector $\vec{r} - \vec{r}_c$ es un vector que va desde el centro de masas del cuerpo hasta la posición del diferencial dm. Esta integral de la derecha sería como intentar calcular la posición del centro de masas con respecto a sí mismo (es decir, 0).

$$M\vec{r}_c = \int_\Omega \vec{r} dm \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega (\vec{r} - \vec{r}_c) dm = 0 \tag{4}$$

Esta integral va a salir mucho en lo que viene luego, así que es conveniente entenderla.

Por último, un apunte de notación. En la Sección 4 va a aparecer una operación del tipo $\vec{a} \cdot (\boldsymbol{A}\vec{b})$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores y $\boldsymbol{A}$ es una matriz (como dice la nota del principio, los vectores son tridimensionales y la matriz es de 3×3). Aquí aparece una pequeña dicotomía en cuanto cómo escribir eso para que sea "bonito". Están las dos versiones que te pongo en la Ecuación 5. Hay gente que prefiere una, y gente que prefiere otra. Y según que libro/página web mires, verás una o la otra. Si nos ponemos finos filipinos, las dos son igual de incorrectas. Técnicamente, el producto escalar entre dos vectores (entendidos recuerda como vectores columna), se define como $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$, donde $\vec{a}^T$ es por tanto un vector fila y el producto matricial tradicional entre un vector fila (dimensión $1 \times n$) y un vector columna (dimensión $n \times 1$) produce un escalar (dimensión 1×1). Por otra parte, se sabe que los productos matriciales son asociativos, es decir que el producto de tres matrices cumple $\boldsymbol{ABC} = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$. De esta manera, la primera de las notaciones se podría escribir como $\vec{a} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{b} = (\vec{a}^T \boldsymbol{A})^T \vec{b}$, lo cual no estaría definido porque $\vec{a}^T \boldsymbol{A}$ es un vector fila y por tanto $(\vec{a}^T \boldsymbol{A})^T$ es un vector columna, no multiplicable matricialmente por otro vector columna. Por otra parte, la segunda notación se podría escribir como $\vec{a}(\boldsymbol{A}\vec{b})$, lo cual no está definido al ser $\boldsymbol{A}\vec{b}$ un vector columna y por tanto no multiplicable matricialmente por el otro vector columna $\vec{a}$. La notación técnicamente correcta sería esta que te pongo en la Ecuación 6, pero tener esa transposición ahí parece que no gusta.

$$\vec{a} \cdot (\boldsymbol{A}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{b} \qquad\qquad \vec{a} \cdot (\boldsymbol{A}\vec{b}) = \vec{a}\boldsymbol{A}\vec{b} \tag{5}$$

$$\vec{a} \cdot (\boldsymbol{A}\vec{b}) = \vec{a}^T \boldsymbol{A}\vec{b} \tag{6}$$

Y teniendo todo esto en mente, yo he de decir que uso ambas versiones incorrectas jajajaj. Como es una cuestión de pura estética y nada más, hay veces que uso letras que me parecen más bonitas estando junticas y uso la segunda notación, y hay veces que no lo veo y las separo con la primera notación.

2. Momento angular (pero en plan tocho)

Vale. Vamos a ello. Empecemos por lo básico. Considera un cuerpo de masa M cuyo centro de masas se encuentra, en un instante del tiempo, en la posición $\vec{r}_c$ y se mueve a una velocidad $\vec{v}_c$ (estas dos cantidades son constantes sobre todo el cuerpo). El cuerpo además está girando sobre sí mismo con una velocidad angular $\vec{\omega}$ (que también es obviamente constante sobre todo el cuerpo). El momento angular del cuerpo con respecto a un punto O (recuerda que un momento angular siempre necesita un punto de referencia), llámalo $\vec{L}_o$, es simplemente la suma de los momentos angulares de cada diferencial de masa dm del cuerpo. Esto es básicamente lo que pongo en la Ecuación 7. Aquí, $\mathcal{B}$ indica que la integral se calcula sobre el volumen del cuerpo, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son la posición y velocidad del diferencial de masa dm **con respecto al punto** O y $\vec{v}dm$ es realmente el momento lineal del diferencial de masa.

$$\vec{L}_o = \int_\mathcal{B} \vec{r} \times (\vec{v}dm) = \int_\mathcal{B} \vec{r} \times \vec{v}dm \tag{7}$$

Ahora vamos a desmontar esto. Por una parte, la posición de dm con respecto a O se puede escribir como la posición del centro de masas con respecto a O (que recuerdo que es $\vec{r}_c$) más la posición de dm con respecto al centro de masas (llámala $\vec{\rho}$), es decir $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{\rho}$. Por otra parte, la velocidad de dm es la combinación de la velocidad del centro de masas del cuerpo con respecto a O (que recuerdo que es $\vec{v}_c$) más la velocidad de dm con respecto al centro de masas, que viene dada por $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ al estar el cuerpo girando sobre sí mismo. Bien, pues ahora toca ponerlo todo junto en la Ecuación 7 y separarlo todo, como he hecho en la Ecuación 8. He quitado el $\mathcal{B}$ porque era un coñazo y se sobreentiende.

$$\vec{L}_o = \int (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \times (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int \vec{r}_c \times \vec{v}_c dm + \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm + \int \vec{\rho} \times \vec{v}_c dm + \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \tag{8}$$

Vale. Como son muchas integrales, vamos a ir una por una. Y ya lo digo desde ahora, fíjate que $\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm = \vec{0}$ porque es el equivalente a la parte derecha de la Ecuación 4. Vale. Integral por integral.

- $\int \vec{r}_c \times \vec{v}_c dm = (\vec{r}_c \times \vec{v}_c) \int dm = M \vec{r}_c \times \vec{v}_c = \vec{r}_c \times (M \vec{v}_c)$. Fíjate que es el momento angular del centro de masas.
- $\int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \vec{r}_c \times \left(\int \vec{\omega} \times \vec{\rho} dm \right) = \vec{r}_c \times \left(\vec{\omega} \times \int \vec{\rho} dm \right) = \vec{0}$ porque $\int \vec{\rho} dm = \vec{0}$
- $\int \vec{\rho} \times \vec{v}_c dm = \left(\int \vec{\rho} dm \right) \times \vec{v}_c = \vec{0}$ porque $\int \vec{\rho} dm = \vec{0}$

La útlima integral es donde está la chicha así que le voy a dar trato especial. Para procesarla empezamos por aplicar la BAC CAB rule y escribir $\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) \vec{\rho}$. Y de ahí tiramos con la Ecuación 9, donde $\boldsymbol{I}_{3\times 3}$ es la matriz identidad de 3×3.

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int [(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) \vec{\rho}] \, dm \tag{9a}$$

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int \left[\rho^2 \vec{\omega} - (\vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) \vec{\omega} \right] dm \tag{9b}$$

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int \left(\rho^2 \boldsymbol{I}_{3\times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} \right) \vec{\omega} dm \tag{9c}$$

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \left(\int \left(\rho^2 \boldsymbol{I}_{3\times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} \right) dm \right) \vec{\omega} \tag{9d}$$

Y aquí al final de todo llegamos a esa integral tan fea, que fíjate que es una matriz. Bueno, pues esa es la definición de la matriz de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas, $\boldsymbol{I}$. Poniendo todas las cosas juntas, nos queda como resultado final la Ecuación 10. En esta expresión tenemos dos componentes muy claras del momento angular. Vamos a mirarlas un poco más de cerca.

$$\vec{L}_o = \vec{r}_c \times (M \vec{v}_c) + \boldsymbol{I} \vec{\omega} \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathcal{B}} \left(\rho^2 \boldsymbol{I}_{3\times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} \right) dm \tag{10b}$$

La primera surge del momento lineal del cuerpo, la componente $\vec{r}_c \times (M \vec{v}_c)$. Es la que llaman "orbital" en tu libro, aplicado a mecánica orbital. Esta componente tiene dos propiedades. La primera es que, si el cuerpo no está acelerado de ninguna forma, esta componente es constante. Por una parte es fácil de ver que en esta situación $\vec{v}_c$ es constante, pero me puedes argumentar que $\vec{r}_c$ cambia con el tiempo. Y la respuesta es sí, pero no de una manera en la que importe. Por una parte, se justifica con la definición geométrica el producto vectorial $\vec{r}_c \times \vec{v}_c = r_c v_c |\sin\theta|$, donde θ es el ángulo entre $\vec{r}_c$ y $\vec{v}_c$. Si el cuerpo no está acelerado, v_c es constante y además el cuerpo (o mejor dicho su centro de masas) se mueve en línea recta. Fíjate que $r_c |\sin\theta|$ es precisamente la distancia entre esta línea recta y el punto de referencia O (se ve bien si te pintas el dibujín, pero hacerlo en Latex cuesta la vida). De forma matemática, si el cuerpo no está acelerado, la cinemática del cuerpo dice que $\vec{r}_c = \vec{r}_{c,o} + \vec{v}_c t$, donde $\vec{r}_{c,o}$ es la posición inicial del cuerpo (toma el $t = 0$ donde te dé la gana, es irrelevante, pero el punto es que esta posición inicial es una cantidad obviamente constante). De esta manera, el producto vectorial se reduce a $\vec{r}_c \times \vec{v}_c = (\vec{r}_{c,o} + \vec{v}_c t) \times \vec{v}_c = \vec{r}_{c,o} \times \vec{v}_c + (\vec{v}_c \times \vec{v}_c) t = \vec{r}_{c,o} \times \vec{v}_c$ porque el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo. Y así queda el producto de dos cantidades constantes, $\vec{r}_{c,o}$ y $\vec{v}_c$, y es por tanto constante también.

Otra propiedad de esta componente del momento angular es que es muy fácil de eliminar. En el caso desacelerado, si coges el punto de referencia O en cualquier punto de esta línea recta en la que se mueve el (centro de masas del) cuerpo, $\vec{r}_c$ y $\vec{v}_c$ van a ser paralelos, y por tanto su producto vectorial nulo. Por otra parte, si escoges el punto O en el centro de masas del cuerpo, $\vec{r}_c$ va a ser nulo por definición (porque sería la posición del centro de masas con respecto a sí mismo). Esto último es así siempre, pero requiere definir el punto O como dependiente del tiempo (porque se tendría que mover con el centro de masas). Esto se resuelve fácilmente expresando el momento angular en un sistema de referencia en el cual el punto O - y por tanto el centro de masas - esté fijo (por lo general se usa un sistema de referencia cuyo origen está en el centro de masas mismo). Si el cuerpo está desacelerado - o, mejor dicho, si el *centro de masas* está desacelerado - esto no presenta ningún problema. Pero en caso contrario, el sistema de referencia se convierte en no inercial, por lo que las leyes de Newton - y en particular la ley de conservación de momento angular - no se cumplen. Resolver esto no es necesariamente trivial en muchos casos.

Luego tenemos la componente $\boldsymbol{I}\vec{\omega}$, que es la que en tu libro llaman "de spin" y surge de la rotación que tiene el cuerpo sobre sí mismo. Las propiedades de esta componente no son tan particulares. Pero es la que más dramáticamente cambia con la elección de sistema de referencia. Esto podría parecer que no, porque los términos que aparecen aquí son el tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas (irrespectivamente del origen de nuesrto sistema de referencia o nuestro punto O, y por tanto siempre el mismo en principio) y la velocidad angular $\vec{\omega}$. Pero recuerda cuando te conté la movida de las derivadas en sistemas no inerciales que el tensor de inercia con respecto al centro de masas de un cuerpo cambia con el tiempo a menos que cojas un sistema de referencia con origen en el centro de masas del cuerpo y que además rote con el cuerpo mismo. La razón es bastante sutil (a mí me ha costado pillarla), y todo recae en la definición misma del tensor de inercia, la Ecuación 10b. Fíjate que en esta ecuación he puesto explíciatemente que la integral se calcula sobre la región del espacio que ocupa el cuerpo, es decir $\mathcal{B}$. Los límites de integración son por tanto una una superficie cerrada en el espacio que, en el más puro sentido matemático, viene dada por una ecuación del tipo $f(x, y, z) = 0$, cuya expresión es completamente necesaria para llevar a cabo la integral. Y aquí entran en juego las variables espaciales x, y y z, cuya definición requiere de un origen de coordenadas y unas direcciones de sus respectivos ejes. El uso del momento de inercia en el momento angular requiere un cálculo consistente entre ambos, de forma que los ejes de coordenadas para el cálculo del tensor de inercia tienen que estar asociados al sistema de referencia en el que se calcula el momento angular. El problema es que si el cuerpo se mueve en este sistema de referencia, la función que define su superficie y por tanto los límites de integración de la integral de $\boldsymbol{I}$ van a cambiar con el tiempo. Mira que, como lo que importa es el movimiento de la superficie del cuerpo, cuando digo "moverse" quiero decir tanto trasladarse como rotar (aunque esto último no importa si el cuerpo es una esfera perfecta).

Esto es sólamente en lo que respecta a la superficie y los límites de integración. Pero es que además pasa otra cosa. El diferencial de masa viene dado por $dm = \varphi dV$, donde φ es la densidad de masa del cuerpo (perdón por no usar ρ, pero es para no confundirlo con $\vec{\rho}$). En un cuerpo con heterogeneidades, esta densidad es una función del espacio, es decir $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Y de nuevo volvemos a la defición de las variables espaciales y a la misma problemática que antes. En este caso, aunque el cuerpo fuese una esfera perfecta (y por tanto su rotación no cambia los límites de integración), si presenta heterogeneidades la distribución de densidad alrededor de su centro de masas cambia al rotar, y por tanto volvemos a tener un tensor de inercia dependiente del tiempo. El caso particular en el que esto no sucede es si la distribución de densidad presenta simetría esférica, es decir el cuerpo es como una cebolla perfectamente esférica compuesto de una superposición de cortezas esféricas.

Otra cosa que quiero puntualizar es que el tensor de inercia es *definido positivo* (si eso te dice algo). Esto es importante para cosas en las que no me voy a meter ahora, la verdad. En términos de sus componentes, se escribe la Ecuación 11. Los términos de la diagonal principal del tensor de inercia se llaman *momentos de inercia*, y son los típicos momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes de coordenadas. Los términos de fuera de la diagonal se llaman *productos de inercia*, a veces escritos con una P en lugar de con una I, y no estoy muy seguro de qué representan físicamente. Pero no hacen más que complicar las matemáticas cuando se usan, así que normalmente lo que se hace es trabajar en sistemas de referencia y ejes de coordenadas en los que todos estos productos son 0.

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathcal{B}} \left(\rho^2 \boldsymbol{I}_{3\times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}\right) dm = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{11}$$

3. Teorema de ejes paralelos (pero generalizado)

Si no recuerdo mal, conoces ya el teorema de los ejes paralelos, que funciona para momentos de inercia con respecto a un eje. Estos momentos de inercia son escalares. Pero ahora tenemos la inercia con respecto a un punto, que es una matriz, es decir la matriz de inercia $\boldsymbol{I}$. Y la pregunta que sé que **no** te estás haciendo pero que te voy a responder igualmente es, ¿existe un teorema equivalente aquí? Y la respuesta es "pero por supestísimamente" jajja. Esto va así.

Comenzamos con la definición del tensor de inercia, la Ecuación 10b. Esta versión es el tensor de inercia con respecto al centro de masas, llamémoslo $\boldsymbol{I_c}$. Por extensión, podemos definir un tensor de inercia con respecto a un punto cualquiera O del espacio, llamémoslo $\boldsymbol{I_o}$. La definición se mantendría igual, pero cambiando todos los $\vec{\rho}$ - la posición de cada dm con respecto al centro de masas del cuerpo - por $\vec{r}$ - la posición de cada dm con respecto al punto de referencia O. Fíjate que estoy usando la misma nomenclatura que en la Ecuación 4 con $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c$ y que por tanto, de nuevo, $\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm = \vec{0}$. Vale. Pues ahora el proceso es simplemente, sustituir $\vec{\rho}$ por $\vec{r}$ (recordando que $\rho^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}$) en la Ecuación 10b y empezar a expandir y separar. Pongo el proceso aquí abajo en la Ecuación 14. Pero vamos a ir un poco término por término, porque hay muchos. Vamos a empezar por expandir el producto escalar, como en la Ecuación 12, recordando las propiedades del producto escalar.

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \cdot (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \tag{12a}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c + \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} + \vec{\rho} \cdot \vec{r}_c + \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} \tag{12b}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r_c^2 + \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} + \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} + \rho^2 \tag{12c}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r_c^2 + \rho^2 + 2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho} \tag{12d}$$

Y ahora separamos el producto diádico, como en la Ecuación 13. Aquí la conmutativa no vale, así que en el último paso simplemente reordeno términos.

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \otimes (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \tag{13a}$$

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c + \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} \tag{13b}$$

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} + \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c \tag{13c}$$

Y ahora solo queda separarlo todo, como en la Ecuación 14.

$$\boldsymbol{I_o} = \int_{\mathcal{B}} (\vec{r} \cdot \vec{r} \boldsymbol{I}_{3\times3} - \vec{r} \otimes \vec{r})\, dm \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{I_o} = \int_{\mathcal{B}} \left[\left(r_c^2 + \rho^2 + 2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho} \right) \boldsymbol{I}_{3\times3} - (\vec{r}_c \otimes \vec{r}_c + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} + \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c) \right] dm \tag{14b}$$

$$\boldsymbol{I_o} = \int_{\mathcal{B}} \left(r_c^2 \boldsymbol{I}_{3\times3} - \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c \right) dm + \int_{\mathcal{B}} \left(\rho^2 \boldsymbol{I}_{3\times3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} \right) dm + \int_{\mathcal{B}} \left[(2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} - (\vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c) \right] dm \tag{14c}$$

Aquí es donde nos damos cuenta que, de la primera integral, todo es constante (pues son todo productos de $\vec{r}_c$, que es una constante sobre todo el cuerpo), y por tanto todo sale de la integral, que se reduce a la integral de dm sobre el cuerpo o, lo que es lo mismo, la masa total del cuerpo M. Por otra parte, la segunda integral es exactamente la misma que la de la Ecuación 10b, y por tanto equivale a $\boldsymbol{I_c}$, el tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas. Por tanto, el siguiente paso queda como en la Ecuación 15, donde me he tomado la libertad de reorganizar los términos y separar toda esa integral última que, de momento, no es nada en particular.

$$\boldsymbol{I_o} = \boldsymbol{I_c} + M \left(r_c^2 \boldsymbol{I}_{3\times3} - \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c \right) + \int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} dm - \int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} dm - \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c dm \tag{15}$$

Vale, pues ahora voy a demostrar que todas y cada una de las integrales que quedan son exactamente nulas, para lo que, recuerdo por terecera vez, $\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm = \vec{0}$. Nota que, en el penúltimo paso de todos estos procesos, es justamente esta integral la que aparece.

La primera

$$\int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} dm = 2 \int_{\mathcal{B}} (\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} dm$$

$$\int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} dm = 2 \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} dm \right) \boldsymbol{I}_{3\times3}$$

$$\int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} dm = 2\vec{r}_c \cdot \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm \right) \boldsymbol{I}_{3\times3}$$

$$\int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho})\, \boldsymbol{I}_{3\times3} dm = \boldsymbol{0}$$

La segunda

$$\int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} dm = \vec{r}_c \otimes \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm$$

$$\int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} dm = \boldsymbol{0}$$

La tercera

$$\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c dm = \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm \right) \otimes \vec{r}_c$$
$$\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c dm = \mathbf{0}$$

Y así es como toda esa morralla desaparece y nos queda sólamente las dos cosas que sí podíamos interpretar. De esta forma, el tensor de inercia con respecto a cualquier punto de referencia O se queda como en la Ecuación 16. Esta sería la versión de tensor de inercia del teorema de ejes paralelos que usas para los momentos de inercia. Fíjate que, de nuevo, esta es una matriz definida positiva (de nuevo, importante para movidas en las que no me voy a meter ahora).

$$\boldsymbol{I_o} = \boldsymbol{I_c} + M \left(r_c^2 \boldsymbol{I_{3\times3}} - \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c \right) \tag{16}$$

4. Energías cinéticas

Pasando a la siguiente cosa, energías cinéticas de translación y rotación. Pero de nuevo, en plan tocho. Porque trabajar con escalares es aburrido. Así que vamos a hacer cosas generales, con vectores en 3D. Porque molamos más que nadie. Aquí voy a usar todas las movidas de Sección 1, y reutilizaré la notación que vengo usando hasta ahora (por eso de que no soy un psicópata).

Empezar se empieza igual que para el momento angular. Supón un cuerpo de masa M cuyo centro de masas se encuentra, en un instante del tiempo, en la posición $\vec{r}_c$ y se mueve a una velocidad $\vec{v}_c$, y además rota sobre sí mismo con velocidad angular $\vec{\omega}$. La energía cinética E del cuerpo entero viene dada por la Ecuación 17, donde $\vec{v}$ es la velocidad de cada diferencial de masa dm con respecto al origen.

$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} dm \tag{17}$$

Como el cuerpo se translada y rota, esta velocidad viene dada pro $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, donde $\vec{\rho}$ es el vector ue va desde el centro de masas del cuerpo hasta cada diferencial de masas dm. Sustituir esto en la Ecuación 17 da lugar al proceso de la Ecuación 18. De las tres integrales que aparecen en la Ecuación 18c, todo el integrando de la primera es constante, así que queda la integral del diferencial de masa, que es la masa total del cuerpo M. Por otra parte, de la última voy a sacar tanto $\vec{v}_c$ como $\vec{\omega}$, para que me quede la integral de ρ, que es $\vec{0}$ como venía siendo hasta ahora. Y con eso se pasa a la Ecuación 18d. Y de ahí voy a ir con la calma.

$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \tag{18a}$$
$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \tag{18b}$$
$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c dm + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm + \int_{\mathcal{B}} \vec{v}_c \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \tag{18c}$$
$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \tag{18d}$$

Ahora tengo un término feo aquí. Voy a ir modificando el integrando de esta cosa poco a poco. Lo primero que voy a hacer es escribir el primero de los $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ como un vector auxiliar $\vec{a}$, de forma que puedo escribir la Ecuación 19a. Usando las propiedades de la Sección 1 se puede escribir la Ecuación 19b, y reponiendo $\vec{a}$ sale la Ecuación 19c. Y la verdad es que no voy a hacer nada más.

$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{a} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \tag{19a}$$
$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{a}) \tag{19b}$$
$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})) \tag{19c}$$

Poniendo esto en la Ecuación 18d sale esto de aquí de la Ecuación 20, que sigue sin ser perfecto pero tiene una integral un poco diferent.

$$E = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \tag{20}$$

Pues resulta que esta integral que hay ahora es exactamente la misma que salió en la expresión del momento angular (última integral de la Ecuación 8). Y siguiendo el proceso de la Ecuación 9, toda la integral se reduce a $\boldsymbol{I}\vec{\omega}$, con $\boldsymbol{I}$ siendo el tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas. Y por esto ahora aparece el término $\vec{\omega} \cdot (\boldsymbol{I}\vec{\omega})$. Y con esto la energía cinética pasa a venir dada por la Ecuación 21.

$$E = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \vec{\omega} \tag{21}$$

Aquí por una parte está la energía cinética de translación (del centro de masas, el primer término), y la energía cinética de rotación (del cuerpo entero, el segundo término). Este segundo término, en este caso, aparece en su forma generalizada. Fíjate que $\vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I}\vec{\omega}$ es un escalar. Si escibes $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$, entonces se puede escribir que $\vec{\omega} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \vec{\omega} = \omega^2(\hat{n} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \hat{n})$, donde $\hat{n} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \hat{n}$ es de nuevo un escalar. Es precisamente este escalar el que tu usas como “momento de inercia” y llamas I en tus problemas.