

Movidas para Helga

De mí para tú

Versión 3, a martes 16/04/2024

Hoolas jajaja :D Pues aquí viene una nueva entrega, esta vez tocha tochísima. Y además muy apropiada a los tiempos que corren, en los que está super de moda esta serie de Netflix que se llama “El problema de los tres cuerpos”. Porque el main point de todo lo nuevo que te pongo es, precisamente, el problema de los tres cuerpos.

Todo lo nuevo viene al hilo del problema aquel de Júpiter e Ío que tuviste, en el que te dije que había dos mentiras. Si bien todo lo que he escrito al respecto está autocontenido, no se necesita todo todo para pillar el punto que quiero transmitir. En este sentido, si te lees la sección 5.2, toda la sección 6 excepto el 6.3 y la sección 9, yo creo que no te pierdes nada. Así que eres libre de hacerlo así y tener todo lo demás en plan cosas graciosas (o no tanto, porque la sección 5.1 es un rollo filosófico de la hostia).

Y bueno, eso. Espero que te guste. Chaitooo ;)

Cambios con respecto a la versión anterior

- Actualización del preludio jeje
- Adición de todo lo que hay a partir de la Sección 5 inclusive.

Nota: Todos los vectores se asume que son vectores columna. Se considerará todo el rato un espacio tridimensional, es decir que los vectores tendrán 3 componentes indicadas con subíndices x , y , z respectivamente, y las matrices serán siempre de 3×3 . Como soy ingeniero y todo eso me da igual, voy a usar las palabras “tensor” y “matriz” como sinónimos, para horror de toda la gente de mates y física.

Otra nota: A menos que lo diga expresamente, la notación que seguiré por lo general para vectores es la siguiente. Un vector lo llamaré con una flecha encima (por ejemplo, \vec{v}). El módulo de ese vector tendrá el mismo nombre, pero sin flecha (el módulo de \vec{v} es v). Un vector unitario (de módulo 1) definido en base a otro vector del que toma su dirección y sentido llevará el mismo nombre, pero con un acento circunflejo en lugar de la flecha (es decir, si uno \vec{v} para definir un vector unitario con la misma dirección y sentido que \vec{v} , lo llamaré \hat{v}). De esta forma siempre se puede escribir $\vec{v} = v\hat{v}$.

1. Cosas que saber antes de empezar

Antes de empezar, hay un par de operaciones/propiedades que deberías manejar, ambas relativas a los vectores. Considera dos vectores \vec{a} y \vec{b} . Asumo que conoces las operaciones básicas entre ellos, léase el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (que produce un escalar) y el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ (que produce un vector). En cualquier caso te los pongo en la Ecuación 1. Bien, pues ahora vamos a introducir el **producto diádico**, $\vec{a} \otimes \vec{b}$. El resultado es una matriz (técnicamente, una díada, pero son movidas en las que no me voy a meter ahora), y está definido como se ve en la Ecuación 2. Nótese que $\vec{b} \otimes \vec{a} = (\vec{a} \otimes \vec{b})^T$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

Otra cosa (básica) que hay que saber son las propiedades de estos productos, algunas de las cuales son interesantes. Te las dejo por aquí abajo, donde uso \circ como símbolo genérico de cualquiera de los tres productos de arriba. Mira que para productos con vectores no hay asociativa que valga.

- Distributiva: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$
- Conmutativa del producto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Anticonmutativa del producto vectorial: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Producto mixto: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$
- Y esta que te la pongo yo: $(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \otimes \vec{c})\vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$
- Y la famosa *BAC CAB rule*: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \otimes \vec{c} - \vec{c} \otimes \vec{b})\vec{a}$

Otra cosa que tienes que saber va con integrales. Considera una región Ω sobre la cual definimos la integral de la Ecuación 3, donde \circ representa una operación genérica entre los dos vectores (es decir puede ser un producto escalar, vectorial o diádico). Bien pues si uno de los dos vectores es constante, se puede sacar de la integral igual que si estuviésemos trabajando con escalares. Esto es básicamente lo que sale en la parte derecha de la Ecuación 3. Esto también acepta tener escalares (o incluso matrices) de por medio, que si son constantes pueden salir de la integral y si no pues se quedan dentro. En cualquier caso, cuando dos vectores operan entre sí, el orden en el que lo hacen es importante y hay que mantenerlo al meterlos/sacarlos de una integral.

$$\int_{\Omega} \vec{a} \circ \vec{b} dV = \begin{cases} \vec{a} \circ \left(\int_{\Omega} \vec{b} dV \right) & \text{si } \vec{a} \text{ es constante en } \Omega. \\ \left(\int_{\Omega} \vec{a} dV \right) \circ \vec{b} & \text{si } \vec{b} \text{ es constante en } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Por último, y aunque asumo que lo sabes, recordemos la definición del centro de masas. Supón un cuerpo (sólido) que ocupa una región Ω del espacio. La posición de su centro de masas, llamémosla \vec{r}_c , viene dada por la Ecuación 4, donde $dm = \rho dV$ es un diferencial de masa del cuerpo, \vec{r} es el vector posición de dicho diferencial de masa y M es la masa total del cuerpo. De esto se desprende lo que he puesto a la derecha, que sale simplemente de considerar que M es simplemente la integral de dm sobre Ω , traer \vec{r}_c dentro de esa integral y pasarlo todo al mismo sitio. Lo de la derecha es importante, porque el vector $\vec{r} - \vec{r}_c$ es un vector que va desde el centro de masas del cuerpo hasta la posición del diferencial dm . Esta integral de la derecha sería como intentar calcular la posición del centro de masas con respecto a sí mismo (es decir, 0).

$$M\vec{r}_c = \int_{\Omega} \vec{r} dm \implies \int_{\Omega} (\vec{r} - \vec{r}_c) dm = \vec{0} \quad (4)$$

Esta integral va a salir mucho en lo que viene luego, así que es conveniente entenderla.

Por último, un apunte de notación. En la Sección 4 va a aparecer una operación del tipo $\vec{a} \cdot (\vec{A}\vec{b})$, donde \vec{a} y \vec{b} son vectores y \vec{A} es una matriz (como dice la nota del principio, los vectores son tridimensionales y la matriz es de 3×3). Aquí aparece una pequeña dicotomía en cuanto a cómo escribir eso para que sea “bonito”. Están las dos versiones que te pongo en la Ecuación 5. Hay gente que prefiere una, y gente que prefiere otra. Y según que libro/página web mires, verás una o la otra. Si nos ponemos finos filipinos, las dos son igual de incorrectas. Técnicamente, el producto escalar entre dos vectores (entendidos recuerda como vectores columna), se define como $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$, donde \vec{a}^T es por tanto un vector fila y el producto matricial tradicional entre un vector fila (dimensión $1 \times n$) y un vector columna (dimensión $n \times 1$) produce un escalar (dimensión 1×1). Por otra parte, se sabe que los productos matriciales son asociativos, es decir que el producto de tres matrices cumple $\vec{A}\vec{B}\vec{C} = (\vec{A}\vec{B})\vec{C} = \vec{A}(\vec{B}\vec{C})$. De esta manera, la primera de las notaciones se podría escribir como $\vec{a} \cdot \vec{A} \cdot \vec{b} = (\vec{a}^T \vec{A})^T \vec{b}$, lo cual no estaría definido porque $\vec{a}^T \vec{A}$ es un vector fila y por tanto $(\vec{a}^T \vec{A})^T$ es un vector columna, no multiplicable matricialmente por otro vector columna. Por otra parte, la segunda notación se podría escribir como $\vec{a}(\vec{A}\vec{b})$, lo cual no está definido al ser $\vec{A}\vec{b}$ un vector columna y por tanto no multiplicable matricialmente por el otro vector columna \vec{a} . La notación técnicamente correcta sería esta que te pongo en la Ecuación 6, pero tener esa transposición ahí parece que no gusta.

$$\vec{a} \cdot (\vec{A}\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{A} \cdot \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot (\vec{A}\vec{b}) = \vec{a}\vec{A}\vec{b} \quad (5)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{A}\vec{b}) = \vec{a}^T \vec{A}\vec{b} \quad (6)$$

Y teniendo todo esto en mente, yo he de decir que uso ambas versiones incorrectas jajajaj. Como es una cuestión de pura estética y nada más, hay veces que uso letras que me parecen más bonitas estando juntitas y uso la segunda notación, y hay veces que no lo veo y las separo con la primera notación.

2. Momento angular (pero en plan tocho)

Vale. Vamos a ello. Empecemos por lo básico. Considera un cuerpo de masa M cuyo centro de masas se encuentra, en un instante del tiempo, en la posición \vec{r}_c y se mueve a una velocidad \vec{v}_c (estas dos cantidades son constantes sobre todo el cuerpo). El cuerpo además está girando sobre sí mismo con una velocidad angular $\vec{\omega}$ (que también es obviamente constante sobre todo el cuerpo). El momento angular del cuerpo con respecto a un punto O (recuerda que un momento angular siempre necesita un punto de referencia), llámalo \vec{L}_o , es simplemente la suma de los momentos angulares de cada diferencial de masa dm del cuerpo. Esto es básicamente lo que pongo en la Ecuación 7. Aquí, \mathcal{B} indica que la integral se calcula sobre el volumen del cuerpo, \vec{r} y \vec{v} son la posición y velocidad del diferencial de masa dm **con respecto al punto O** y $\vec{v}dm$ es realmente el momento lineal del diferencial de masa.

$$\vec{L}_o = \int_{\mathcal{B}} \vec{r} \times (\vec{v}dm) = \int_{\mathcal{B}} \vec{r} \times \vec{v}dm \quad (7)$$

Ahora vamos a desmontar esto. Por una parte, la posición de dm con respecto a O se puede escribir como la posición del centro de masas con respecto a O (que recuerdo que es \vec{r}_c) más la posición de dm con respecto al centro de masas (llámala $\vec{\rho}$), es decir $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{\rho}$. Por otra parte, la velocidad de dm es la combinación de la velocidad del centro de masas del cuerpo con respecto a O (que recuerdo que es \vec{v}_c) más la velocidad de dm con respecto al centro de masas, que viene dada por $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ al estar el cuerpo girando sobre sí mismo. Bien, pues ahora toca ponerlo todo junto en la Ecuación 7 y separarlo todo, como he hecho en la Ecuación 8. He quitado el \mathcal{B} porque era un coñazo y se sobreentiende.

$$\vec{L}_o = \int (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \times (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho})dm = \int \vec{r}_c \times \vec{v}_c dm + \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})dm + \int \vec{\rho} \times \vec{v}_c dm + \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})dm \quad (8)$$

Vale. Como son muchas integrales, vamos a ir una por una. Y ya lo digo desde ahora, fíjate que $\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho}dm = \vec{0}$ porque es el equivalente a la parte derecha de la Ecuación 4. Vale. Integral por integral.

- $\int \vec{r}_c \times \vec{v}_c dm = (\vec{r}_c \times \vec{v}_c) \int dm = M\vec{r}_c \times \vec{v}_c = \vec{r}_c \times (M\vec{v}_c)$. Fíjate que es el momento angular del centro de masas.
- $\int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})dm = \vec{r}_c \times (\int \vec{\omega} \times \vec{\rho}dm) = \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \int \vec{\rho}dm) = \vec{0}$ porque $\int \vec{\rho}dm = \vec{0}$
- $\int \vec{\rho} \times \vec{v}_c dm = (\int \vec{\rho}dm) \times \vec{v}_c = \vec{0}$ porque $\int \vec{\rho}dm = \vec{0}$

La última integral es donde está la chicha así que le voy a dar trato especial. Para procesarla empezamos por aplicar la BAC CAB rule y escribir $\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = (\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\rho}$. Y de ahí tiramos con la Ecuación 9, donde $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ es la matriz identidad de 3×3 .

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int [(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\rho}] dm \quad (9a)$$

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int [\rho^2 \vec{\omega} - (\vec{\rho} \otimes \vec{\rho})\vec{\omega}] dm \quad (9b)$$

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int (\rho^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) \vec{\omega} dm \quad (9c)$$

$$\int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \left(\int (\rho^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) dm \right) \vec{\omega} \quad (9d)$$

Y aquí al final de todo llegamos a esa integral tan fea, que fíjate que es una matriz. Bueno, pues esa es la definición de la matriz de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas, \mathbf{I} . Poniendo todas las cosas juntas, nos queda como resultado final la Ecuación 10. En esta expresión tenemos dos componentes muy claras del momento angular. Vamos a mirarlas un poco más de cerca.

$$\vec{L}_o = \vec{r}_c \times (M\vec{v}_c) + \mathbf{I}\vec{\omega} \quad (10a)$$

$$\mathbf{I} = \int_{\mathcal{B}} (\rho^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) dm \quad (10b)$$

La primera surge del momento lineal del cuerpo, la componente $\vec{r}_c \times (M\vec{v}_c)$. Es la que llaman “orbital” en tu libro, aplicado a mecánica orbital. Esta componente tiene dos propiedades. La primera es que, si el cuerpo no está acelerado de ninguna forma, esta componente es constante. Por una parte es fácil de ver que en esta situación \vec{v}_c es constante, pero me puedes argumentar que \vec{r}_c cambia con el tiempo. Y la respuesta es sí, pero no de una manera en la que importe. Por una parte, se justifica con la definición geométrica el producto vectorial $\vec{r}_c \times \vec{v}_c = r_c v_c |\sin \theta|$, donde θ es el ángulo entre \vec{r}_c y \vec{v}_c . Si el cuerpo no está acelerado, v_c es constante y además el cuerpo (o mejor dicho su centro de masas) se mueve en línea recta. Fíjate que $r_c |\sin \theta|$ es precisamente la distancia entre esta línea recta y el punto de referencia O (se ve bien si te pintas el dibujín, pero hacerlo en Latex cuesta la vida). De forma matemática, si el cuerpo no está acelerado, la cinemática del cuerpo dice que $\vec{r}_c = \vec{r}_{c,o} + \vec{v}_c t$, donde $\vec{r}_{c,o}$ es la posición inicial del cuerpo (toma el $t = 0$ donde te dé la gana, es irrelevante, pero el punto es que esta posición inicial es una cantidad obviamente constante). De esta manera, el producto vectorial se reduce a $\vec{r}_c \times \vec{v}_c = (\vec{r}_{c,o} + \vec{v}_c t) \times \vec{v}_c = \vec{r}_{c,o} \times \vec{v}_c + (\vec{v}_c \times \vec{v}_c) t = \vec{r}_{c,o} \times \vec{v}_c$ porque el producto vectorial de un vector por sí mismo es nulo. Y así queda el producto de dos cantidades constantes, $\vec{r}_{c,o}$ y \vec{v}_c , y es por tanto constante también.

Otra propiedad de esta componente del momento angular es que es muy fácil de eliminar. En el caso desacelerado, si coges el punto de referencia O en cualquier punto de esta línea recta en la que se mueve el (centro de masas del) cuerpo, \vec{r}_c y \vec{v}_c van a ser paralelos, y por tanto su producto vectorial nulo. Por otra parte, si escoges el punto O en el centro de masas del cuerpo, \vec{r}_c va a ser nulo por definición (porque sería la posición del centro de masas con respecto a sí mismo). Esto último es así siempre, pero requiere definir el punto O como dependiente del tiempo (porque se tendría que mover con el centro de masas). Esto se resuelve fácilmente expresando el momento angular en un sistema de referencia en el cual el punto O - y por tanto el centro de masas - esté fijo (por lo general se usa un sistema de referencia cuyo origen está en el centro de masas mismo). Si el cuerpo está desacelerado - o, mejor dicho, si el *centro de masas* está desacelerado - esto no presenta ningún problema. Pero en caso contrario, el sistema de referencia se convierte en no inercial, por lo que las leyes de Newton - y en particular la ley de conservación de momento angular - no se cumplen. Resolver esto no es necesariamente trivial en muchos casos.

Luego tenemos la componente $\mathbf{I}\vec{\omega}$, que es la que en tu libro llaman “de spin” y surge de la rotación que tiene el cuerpo sobre sí mismo. Las propiedades de esta componente no son tan particulares. Pero es la que más dramáticamente cambia con la elección de sistema de referencia. Esto podría parecer que no, porque los términos que aparecen aquí son el tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas (irrespectivamente del origen de nuestro sistema de referencia o nuestro punto O , y por tanto siempre el mismo en principio) y la velocidad angular $\vec{\omega}$. Pero recuerda cuando te conté la movida de las derivadas en sistemas no inerciales que el tensor de inercia con respecto al centro de masas de un cuerpo cambia con el tiempo a menos que cojas un sistema de referencia con origen en el centro de masas del cuerpo y que además rote con el cuerpo mismo. La razón es bastante sutil (a mí me ha costado pillarla), y todo recae en la definición misma del tensor de inercia, la Ecuación 10b. Fíjate que en esta ecuación he puesto explícitamente que la integral se calcula sobre la región del espacio que ocupa el cuerpo, es decir \mathcal{B} . Los límites de integración son por tanto una una superficie cerrada en el espacio que, en el más puro sentido matemático, viene dada por una ecuación del tipo $f(x, y, z) = 0$, cuya expresión es completamente necesaria para llevar a cabo la integral. Y

aquí entran en juego las variables espaciales x , y y z , cuya definición requiere de un origen de coordenadas y unas direcciones de sus respectivos ejes. El uso del momento de inercia en el momento angular requiere un cálculo consistente entre ambos, de forma que los ejes de coordenadas para el cálculo del tensor de inercia tienen que estar asociados al sistema de referencia en el que se calcula el momento angular. El problema es que si el cuerpo se mueve en este sistema de referencia, la función que define su superficie y por tanto los límites de integración de la integral de \mathbf{I} van a cambiar con el tiempo. Mira que, como lo que importa es el movimiento de la superficie del cuerpo, cuando digo “moverse” quiero decir tanto trasladarse como rotar (aunque esto último no importa si el cuerpo es una esfera perfecta).

Esto es sólomente en lo que respecta a la superficie y los límites de integración. Pero es que además pasa otra cosa. El diferencial de masa viene dado por $dm = \varphi dV$, donde φ es la densidad de masa del cuerpo (perdón por no usar ρ , pero es para no confundirlo con $\vec{\rho}$). En un cuerpo con heterogeneidades, esta densidad es una función del espacio, es decir $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Y de nuevo volvemos a la defición de las variables espaciales y a la misma problemática que antes. En este caso, aunque el cuerpo fuese una esfera perfecta (y por tanto su rotación no cambia los límites de integración), si presenta heterogeneidades la distribución de densidad alrededor de su centro de masas cambia al rotar, y por tanto volvemos a tener un tensor de inercia dependiente del tiempo. El caso particular en el que esto no sucede es si la distribución de densidad presenta simetría esférica, es decir el cuerpo es como una cebolla perfectamente esférica compuesto de una superposición de cortezas esféricas.

Otra cosa que quiero puntualizar es que el tensor de inercia es *definido positivo* (si eso te dice algo). Esto es importante para cosas en las que no me voy a meter ahora, la verdad. En términos de sus componentes, se escribe la Ecuación 11. Los términos de la diagonal principal del tensor de inercia se llaman *momentos de inercia*, y son los típicos momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes de coordenadas. Los términos de fuera de la diagonal se llaman *productos de inercia*, a veces escritos con una P en lugar de con una I , y no estoy muy seguro de qué representan físicamente. Pero no hacen más que complicar las matemáticas cuando se usan, así que normalmente lo que se hace es trabajar en sistemas de referencia y ejes de coordenadas en los que todos estos productos son 0.

$$\mathbf{I} = \int_B (\rho^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) dm = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (11)$$

3. Teorema de ejes paralelos (pero generalizado)

Si no recuerdo mal, conoces ya el teorema de los ejes paralelos, que funciona para momentos de inercia con respecto a un eje. Estos momentos de inercia son escalares. Pero ahora tenemos la inercia con respecto a un punto, que es una matriz, es decir la matriz de inercia \mathbf{I} . Y la pregunta que sé que **no** te estás haciendo pero que te voy a responder igualmente es, ¿existe un teorema equivalente aquí? Y la respuesta es “pero por supestísimamente” jajja. Esto va así.

Comenzamos con la definición del tensor de inercia, la Ecuación 10b. Esta versión es el tensor de inercia con respecto al centro de masas, llamémoslo \mathbf{I}_c . Por extensión, podemos definir un tensor de inercia con respecto a un punto cualquiera O del espacio, llamémoslo \mathbf{I}_O . La definición se mantendría igual, pero cambiando todos los $\vec{\rho}$ - la posición de cada dm con respecto al centro de masas del cuerpo - por \vec{r} - la posición de cada dm con respecto al punto de referencia O . Fíjate que estoy usando la misma nomenclatura que en la Ecuación 4 con $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c$ y que por tanto, de nuevo, $\int_B \vec{\rho} dm = \vec{0}$. Vale. Pues ahora el proceso es simplemente, sustituir $\vec{\rho}$ por \vec{r} (recordando que $\rho^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}$) en la Ecuación 10b y empezar a expandir y separar. Pongo el proceso aquí abajo en la Ecuación 14. Pero vamos a ir un poco término por término, porque hay muchos. Vamos a empezar por expandir el producto escalar, como en la Ecuación 12, recordando las propiedades del producto escalar.

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \cdot (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \quad (12a)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r}_c \cdot \vec{r}_c + \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} + \vec{\rho} \cdot \vec{r}_c + \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} \quad (12b)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r_c^2 + \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} + \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} + \rho^2 \quad (12c)$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r_c^2 + \rho^2 + 2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho} \quad (12d)$$

Y ahora separamos el producto diádico, como en la Ecuación 13. Aquí la conmutativa no vale, así que en el último paso simplemente reordeno términos.

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \otimes (\vec{r}_c + \vec{\rho}) \quad (13a)$$

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c + \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} \quad (13b)$$

$$\vec{r} \otimes \vec{r} = \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} + \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c \quad (13c)$$

Y ahora solo queda separarlo todo, como en la Ecuación 14.

$$\mathbf{I}_o = \int_{\mathcal{B}} (\vec{r} \cdot \vec{r} \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{r} \otimes \vec{r}) dm \quad (14a)$$

$$\mathbf{I}_o = \int_{\mathcal{B}} [(r_c^2 + \rho^2 + 2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} - (\vec{r}_c \otimes \vec{r}_c + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho} + \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c)] dm \quad (14b)$$

$$\mathbf{I}_o = \int_{\mathcal{B}} (r_c^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c) dm + \int_{\mathcal{B}} (\rho^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) dm + \int_{\mathcal{B}} [(2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} - (\vec{r}_c \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c)] dm \quad (14c)$$

Aquí es donde nos damos cuenta que, de la primera integral, todo es constante (pues son todo productos de \vec{r}_c , que es una constante sobre todo el cuerpo), y por tanto todo sale de la integral, que se reduce a la integral de dm sobre el cuerpo o, lo que es lo mismo, la masa total del cuerpo M . Por otra parte, la segunda integral es exactamente la misma que la de la Ecuación 10b, y por tanto equivale a \mathbf{I}_c , el tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas. Por tanto, el siguiente paso queda como en la Ecuación 15, donde me he tomado la libertad de reorganizar los términos y separar toda esa integral última que, de momento, no es nada en particular.

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_c + M (r_c^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c) + \int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} dm - \int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} dm - \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c dm \quad (15)$$

Vale, pues ahora voy a demostrar que todas y cada una de las integrales que quedan son exactamente nulas, para lo que, recuerdo por terecera vez, $\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm = \vec{0}$. Nota que, en el penúltimo paso de todos estos procesos, es justamente esta integral la que aparece.

La primera

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} dm &= 2 \int_{\mathcal{B}} (\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} dm \\ \int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} dm &= 2 \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \cdot \vec{\rho} dm \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} dm &= 2\vec{r}_c \cdot \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \int_{\mathcal{B}} (2\vec{r}_c \cdot \vec{\rho}) \mathbf{I}_{3 \times 3} dm &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

La segunda

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} dm &= \vec{r}_c \otimes \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm \\ \int_{\mathcal{B}} \vec{r}_c \otimes \vec{\rho} dm &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

La tercera

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c dm &= \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} dm \right) \otimes \vec{r}_c \\ \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \otimes \vec{r}_c dm &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Y así es como toda esa morralla desaparece y nos queda sólomente las dos cosas que sí podíamos interpretar. De esta forma, el tensor de inercia con respecto a cualquier punto de referencia O se queda como en la Ecuación 16. Esta sería la versión de tensor de inercia del teorema de ejes paralelos que usas para los momentos de inercia. Fíjate que, de nuevo, esta es una matriz definida positiva (de nuevo, importante para movidas en las que no me voy a meter ahora).

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_c + M (r_c^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \vec{r}_c \otimes \vec{r}_c) \quad (16)$$

4. Energías cinéticas

Pasando a la siguiente cosa, energías cinéticas de translación y rotación. Pero de nuevo, en plan tocho. Porque trabajar con escalares es aburrido. Así que vamos a hacer cosas generales, con vectores en 3D. Porque molamos más

que nadie. Aquí voy a usar todas las movidas de Sección 1, y reutilizaré la notación que vengo usando hasta ahora (por eso de que no soy un psicópata).

Empezar se empieza igual que para el momento angular. Supón un cuerpo de masa M cuyo centro de masas se encuentra, en un instante del tiempo, en la posición \vec{r}_c y se mueve a una velocidad \vec{v}_c , y además rota sobre sí mismo con velocidad angular $\vec{\omega}$. La energía cinética E del cuerpo entero viene dada por la Ecuación 17, donde \vec{v} es la velocidad de cada diferencial de masa dm con respecto al origen.

$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} dm \quad (17)$$

Como el cuerpo se traslada y rota, esta velocidad viene dada por $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, donde $\vec{\rho}$ es el vector que va desde el centro de masas del cuerpo hasta cada diferencial de masa dm . Sustituir esto en la Ecuación 17 da lugar al proceso de la Ecuación 18. De las tres integrales que aparecen en la Ecuación 18c, todo el integrando de la primera es constante, así que queda la integral del diferencial de masa, que es la masa total del cuerpo M . Por otra parte, de la última voy a sacar tanto \vec{v}_c como $\vec{\omega}$, para que me quede la integral de $\vec{\rho}$, que es $\vec{0}$ como venía siendo hasta ahora. Y con eso se pasa a la Ecuación 18d. Y de ahí voy a ir con la calma.

$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (18a)$$

$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (18b)$$

$$E = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c dm + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm + \int_{\mathcal{B}} \vec{v}_c \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (18c)$$

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (18d)$$

Ahora tengo un término feo aquí. Voy a ir modificando el integrando de esta cosa poco a poco. Lo primero que voy a hacer es escribir el primero de los $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ como un vector auxiliar \vec{a} , de forma que puedo escribir la Ecuación 19a. Usando las propiedades de la Sección 1 se puede escribir la Ecuación 19b, y reponiendo \vec{a} sale la Ecuación 19c. Y la verdad es que no voy a hacer nada más.

$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{a} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (19a)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{a}) \quad (19b)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})) \quad (19c)$$

Poniendo esto en la Ecuación 18d sale esto de aquí de la Ecuación 20, que sigue sin ser perfecto pero tiene una integral un poco diferente.

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (20)$$

Pues resulta que esta integral que hay ahora es exactamente la misma que salió en la expresión del momento angular (última integral de la Ecuación 8). Y siguiendo el proceso de la Ecuación 9, toda la integral se reduce a $\vec{I} \vec{\omega}$, con \vec{I} siendo el tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masas. Y por esto ahora aparece el término $\vec{\omega} \cdot (\vec{I} \vec{\omega})$. Y con esto la energía cinética pasa a venir dada por la Ecuación 21.

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (21)$$

Aquí por una parte está la energía cinética de translación (del centro de masas, el primer término), y la energía cinética de rotación (del cuerpo entero, el segundo término). Este segundo término, en este caso, aparece en su forma generalizada. Fíjate que $\vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}$ es un escalar. Si escribes $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$, entonces se puede escribir que $\vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \omega^2 (\hat{n} \cdot \vec{I} \cdot \hat{n})$, donde $\hat{n} \cdot \vec{I} \cdot \hat{n}$ es de nuevo un escalar. Es precisamente este escalar el que tu usas como “momento de inercia” y llamas I en tus problemas.

5. Derivada temporal de un vector

En la última clase que tuvimos antes de tu examen de Física I, vimos un problema que hablaba sobre las lunas de Júpiter y, si recuerdas, te dije que en ese ejercicio había dos mentiras gordas. La primera era que decía que “Ío y Calisto eran el primer y cuarto satélites de Júpiter”, lo cual es falso porque hay otros cuatro satélites, llamados el grupo *Amaltea*, interiores a Ío. La otra mentira no te la conté porque “iba a ser muy larga de explicar”. Esta mentira tiene que ver con ese punto entre Júpiter e Ío en el cual el campo gravitatorio de uno y otro cuerpo se anulan. Tal cual dice el problema, y cito textualmente, “un satélite situado en esta posición y con velocidad $v = 0$ podría mantenerse ahí indefinidamente sin gasto energético”. Y esto pues, simplemente, no es verdad. La explicación que sé (o creo) que quieres tú requiere un poco de contexto. Y esta sección es el primer paso para construir ese contexto, que será un viaje (algo) largo con las siguientes paradas:

- Derivada temporal de un vector
- Dinámica de partículas en sistemas no inerciales
- Astrodinámica 0.0 - Ley de gravitación de Newton y problema de N cuerpos
- Astrodinámica 0.1 - Problema de 2 cuerpos
- Astrodinámica 0.2 - Problema (circular restringido) de 3 cuerpos

Algunas de estas cosas, en concreto lo relativo a la gravitación de Newton, ya lo habrás dado en clase. No obstante, me parece que tenerlo aquí es beneficioso por varias razones. La primera introduzco notación que es por una parte mucho más universal que lo que tienes en el libro y por otra parte mucho más común en el campo de la astrodinámica. La segunda razón es que te lo encuadro de un marco que tiene sentido y que realmente llega a algún sitio, con varios apuntes aquí y allí que creo que le van a dar más profundidad que esa versión tan descontextualizada de la gravedad newtoniana que te da el libro.

Y tras estos apuntes generales sobre esta sección y las cuatro siguientes, voy al lío.

5.1. Sistemas de referencia y bases vectoriales

Para describir un vector, uno necesita una base vectorial, y el vector se escribe como combinación lineal de los vectores base. A los coeficientes que acompañan a cada vector se les llaman componentes (y, a veces, coordenadas, aunque no me gusta mucho este término así que no lo usaré, pero existe). De forma general, esta base vectorial no tiene por qué ser la típica $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. A los vectores que forman una base se les suele llamar de forma general \vec{e}_i . Para que un número n de vectores sean capaces de representar cualquier vector arbitrario de n dimensiones, los vectores base tienen que ser linealmente independientes. Esto se asume siempre. Si todos los vectores de una base son perpendiculares entre sí, se dice que la base es *ortogonal* y si, además, todos son unitarios, se dice que la base es *ortonormal*. En cualquier caso, ninguna de estas condiciones es necesaria para definir una base vectorial válida. Rota esta fijación con cualquier base vectorial específica, voy a lo que importa. Hablar sobre la derivada temporal de un vector requiere discutir sobre los *marcos de referencia* (o *sistemas de referencia*), lo cual comúnmente se hace usando la herramienta de “el observador” (es de hecho tan común que la relatividad general y especial usan esa palabra cada dos por tres). En cierto modo, el sistema de referencia es el contexto desde el cual un observador mide/observa/experimenta cambios temporales. En los anales de la Wikipedia, esta discusión sobre observadores experimentando cambios diferentes a veces se conoce como *relatividad galileana* y he visto a panolis por Instagram e incluso LinkedIn hablar de “la teoría de la relatividad” como si hablasen de Einstein y en realidad hablaban de la relatividad galileana, que nada tiene que ver.

Voy a coger la foto que usa la peña para resumir, como ellos dicen, “la teoría de la relatividad en una imagen”, que es una foto tomada con medio marco dentro y medio marco fuera de un tren. Lo que hay en el tren se mueve para los de fuera, pero no para los de dentro. Y viceversa. Los que están en el tren *observarán* la posición de los objetos del tren como invariante en el tiempo, mientras que observarán la posición de los árboles de la calle como variantes en el tiempo. Y lo mismo pasará con observadores de fuera del tren - digamos que es un campo - pero a la contra. El tren y el campo son por lo tanto sistemas de referencia distintos. Los cambios en uno y en otro - por ejemplo los cambios en la posición de los objetos, es decir las velocidades - no serán iguales en uno que en otro.

Habrà quien erróneamente dirá que esta diferencia en magnitudes vectoriales se debe al movimiento de las bases vectoriales que se usan para describir los vectores. Esto es mentira por varias razones. Por una parte, en toda la discusión que he presentado en los dos últimos párrafos sobre la derivada temporal de un vector no he hecho referencia alguna a las componentes del vector, por lo que este fenómeno es independiente a las bases vectoriales, a que haya una base, dos, tres o veinte, y a que sean o no iguales. Por otra parte, hasta ahora sólo he presentado un planteamiento

físico, mientras que las componentes de un vector son la *descripción matemática* de ese vector. Atribuir esta “relatividad galileana” a las bases vectoriales sería reducirla a un mero formalismo matemático. Y bueno, que vayan y le digan al del tren que su velocidad es mentira, y que solo es porque está usando la base que no es para describir su posición. Y ya para rematar esto, te voy a poner en la siguiente tesitura. Supón que el tren viaja en línea recta a velocidad constante (el movimiento más sencillo del mundo). Asocia al tren una base vectorial de la siguiente manera: uno de los vectores apunta al techo, otro apunta hacia la dirección de movimiento (hacia *adelante*, y es por tanto paralelo a las vías), y el tercero es perpendicular a los otros dos, en dirección, por ejemplo a estribor (la *derecha* del tren si miras en la dirección de movimiento). Ahora salte fuera del tren por estribor, y monta la misma base vectorial: un vector hacia arriba (al cielo, porque ahora no hay techo), otro es paralelo a la vía y apunta hacia donde se mueve el tren, y el tercero es perpendicular a los otros dos. La base que está asociada al tren se mueve con el tren, mientras que la base asociada al campo se queda en el campo. Sin embargo, los tres vectores son siempre paralelos entre sí, de forma que, de forma efectiva, las bases son siempre exactamente las mismas. Y sin embargo nadie diría que no hay movimiento relativo entre el tren y el campo.

De hecho, dado que esta *relatividad* no surge por las bases vectoriales, una es libre de expresar la velocidad de los objetos del tren vista desde uno u otro sistema de referencia usando cualquier base vectorial, con independencia del sistema de referencia al que la base esté asociada. Esta separación entre sistema de referencia y base vectorial es, muchas veces, lo que más les cuesta entender a los ingenieros (para mí fue un tremendo dolor de cabeza). Es bastante estándar asociar una base vectorial diferente a cada sistema de referencia, lo que dificulta mucho percibir esta inter-independencia de las unas con los otros. Sin embargo, esto permite especificar el sistema de referencia en el cual estás expresando una cantidad mediante la base vectorial que usas para describir los vectores con sus componentes. Pero cuando una usa la misma base vectorial para dos sistemas de referencia distintos, se pierde esta capacidad. Y surge la pregunta: *En este ejemplo del tren, si la base vectorial es la misma, por qué deberíamos usar componentes distintas para describir la misma cosa, que es “la velocidad del tren?”*. Y es aquí cuando una se da cuenta de que “la velocidad del tren” es un sintagma con muy poco significado, y es necesario añadir un “con respecto a”. Y esta “cosa” con respecto a la que se mide la velocidad suele ser un punto. En principio una es libre de coger este punto donde quiera, siempre y cuando sepa interpretar el resultado pero lo que se suele hacer es coger un punto que produzca un resultado con un buen balance de facilidad interpretativa y contenido de información. Igual de estúpido sería coger este punto de referencia en el Valle Marineris de Marte que en coger el punto en el mismo tren. Una elección te enmascara la velocidad del tren entre mucho “ruido” y la otra pues no te dice absolutamente nada.

El proceso lógico que me ha llevado hasta aquí pone de manifiesto un concepto bastante importante. Las bases vectoriales son *libres*, es decir que no necesitan un punto para establecerse. Una base vectorial solo indica la dirección y el sentido de las unidades con las que una construye sus magnitudes vectoriales. Esto por su puesto tendrá un impacto sobre las *componentes* de dichas magnitudes. Pero estas componentes, además, se verán afectadas por la elección del llamado *origen* de esa base vectorial (el “punto de referencia” del que hablaba antes). Se puede argumentar que cambiar el punto de referencia te cambia la magnitud en sí. Es decir, “la velocidad del tren con respecto a A” no es lo mismo que “la velocidad del tren con respecto a B”, y por tanto no puedes decir que las componentes están cambiando, porque es la magnitud misma la que es diferente. Todo esto es ya cosa de gustos me parece.

Pero ojo cuidao. Toda esta discusión se ha construido a partir de un movimiento rectilíneo uniforme (uniforme = a velocidad constante). Queda preguntarse qué pasaría en casos acelerados, ya sea con aceleración lineal (en la dirección del movimiento) o con movimientos curvilíneos (donde las aceleraciones cambian la dirección de la velocidad con independencia de que cambien, además, su módulo). Lo cierto es que el primero de estos casos no cambia la discusión que me ha traído hasta aquí, pero pone de manifiesto un aspecto importante de ese *origen* o “punto de referencia” del que hablaba antes que, si bien se intuía al tratar las velocidades, no se hacía explícito. Y es que es este *origen* el que une una base vectorial a un sistema de referencia. Es este origen el que está asociado puramente al sistema de referencia. Y si bien es un punto en el espacio, su asociación con el sistema de referencia es algo más sutil que eso. Si lo piensas, un sistema de referencia se extiende - en principio - por todo el espacio. Por lo que la existencia de dos sistemas de referencia implica que cualquier punto de ese espacio pertenece a la vez a uno y a otro. Se ve muy bien con el origen como caso particular de “un punto”. Ponte en el ejemplo del tren, donde hay dos sistemas de referencia: uno asociado a y viajando con el tren, y el otro quieto en el campo. Si ahora pones el origen del sistema de referencia del campo sobre las vías, llegará un momento en el que ese origen coincida en el espacio con el origen del sistema de referencia del tren al viajar por las vías. En ese momento, ambos orígenes representan el mismo punto en el espacio, pero están asociados a sistemas de referencia distintos.

Esto da entrada muy apropiadamente al otro caso de aceleraciones, el de movimientos curvilíneos. Y vamos a cambiar de ejemplo. Imagina un tiovivo. Un sistema de referencia habitual es uno que gira con el tiovivo, y su origen se establece en el centro de giro. Sin embargo, cuando existe un sistema de referencia en rotación pura, éste suele coexistir con otro sistema de referencia que no gira (con respecto al que normalmente se mide la velocidad de giro). Lo interesante es que este sistema de referencia estático tiene su origen, por lo general, también en el centro de giro. Es por tanto estándar trabajar con dos sistemas de referencia con el mismo origen - se llaman entonces sistemas *concéntricos* - pero no iguales.

El problema de los sistemas de referencia es que son cosas muy abstractas, y para ayudar en la visualización se utiliza siempre una base vectorial que, de manera intuitiva, refleje las propiedades del sistema de referencia (una base vectorial que rote junto con el sistema de referencia, ...). De hecho, el desarrollo de la dinámica en sistemas no inerciales pasa - y de forma bastante crítica en realidad - por describir un sistema de referencia mediante una base vectorial, de forma que una puede describir la evolución temporal del sistema de referencia mediante los cambios temporales de la base vectorial. De esta manera, un sistema de referencia se puede en cierto modo describir mediante un conjunto base vectorial + origen. Lo de usar un punto en el espacio es ambiguo por lo de que los orígenes de dos sistemas distintos pueden coincidir en el espacio, pero esto ocurre tan poco en la práctica que no es un problema importante. Además, existe un truco sencillo para quitarse ese problema de medio.

Usando bases vectoriales para describir sistemas de referencia, las distintas propiedades de cambio de base o cambio de origen de los movimientos de translación y rotación se ven en la Figura 1. Es muy claro ver en la Figura 1a que los vectores base se mantienen iguales todo el rato, mientras que los orígenes de uno y otro sistema se alejan a una velocidad v . Por otra parte, la Figura 1b muestra como los orígenes se mantienen coincidentes todo el rato, mientras que los vectores de una base rotan a velocidad angular ω con respecto a los vectores de la otra.

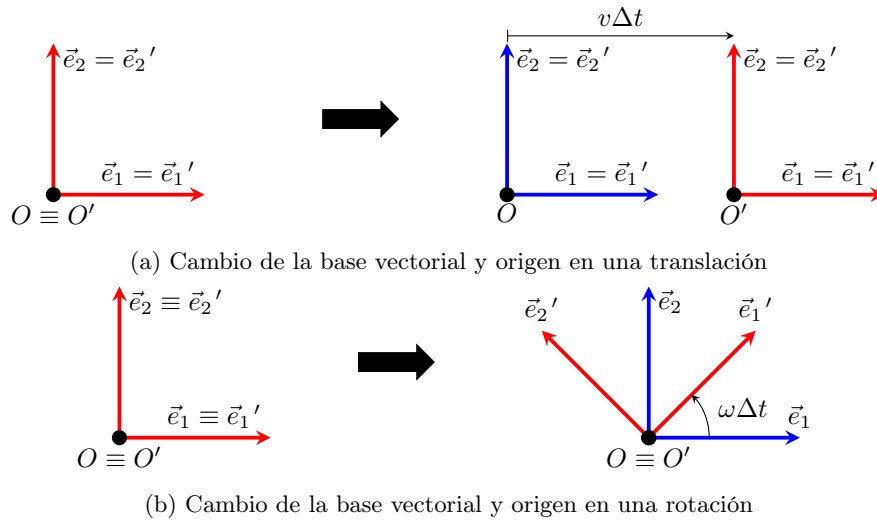


Figura 1: Cambio de la base vectorial y origen en distintos movimientos

Y esto es importante porque, por lo general, una puede componer cualquier tipo de movimiento con translaciones y rotaciones. No obstante, hay que tener en cuenta el impacto de estas transformaciones de translación/rotación en el posterior uso de los sistemas de referencia. Si una establece una translación acelerada del origen o si rota los vectores, entonces está dando lugar a un sistema de referencia acelerado y por lo tanto un sistema de referencia *no inercial*. Y el punto es que en estos sistemas las leyes de Newton no se cumplen. En contraposición, un sistema no acelerado se llama un sistema *inercial*, y son en los cuales se pueden aplicar las leyes de Newton. No obstante, la posición de un objeto es a menudo mucho más sencillamente escrita en un sistema de referencia no inercial, por lo que su uso es muchas veces ventajoso, siempre y cuando una sepa tratar las derivadas temporales de esta posición adecuadamente para usarlas en las leyes de Newton.

Estas derivadas temporales son las que voy a reproducir en el resto de esta sección. La derivada temporal de vectores de dirección constante (donde lo único que cambia es el módulo) es trivial. Me centraré pues en la derivada temporal de vectores de módulo constante, y luego dedicaré un pequeño párrafo a la derivada temporal de vectores con dirección y módulo cambiante.

5.2. Derivada temporal de un vector de módulo constante

Considera un vector \vec{a} que sufre una rotación pura determinada por un vector $\vec{\omega}$. La dirección de $\vec{\omega}$ representa el eje de rotación, mientras que el módulo de $\vec{\omega}$ representa la velocidad angular del giro. Existe un ángulo θ entre \vec{a} y $\vec{\omega}$, tal y como he pintado en la Figura 2a. En un tiempo Δt , el vector \vec{a} rota un ángulo $\omega \Delta t$, como he pintado en la Figura 2b. Hay tres cosas que son siempre verdad en este plano perpendicular a $\vec{\omega}$: (a) todos los vectores contenidos en este plano son perpendiculares a $\vec{\omega}$, (b) la proyección de \vec{a} sobre este plano es constante e igual a $a \sin \theta$ y constituye el radio de la rotación, y (c) todo lo que sea perpendicular a esta proyección de \vec{a} en este plano es también perpendicular al vector \vec{a} mismo en las tres dimensiones. Esto último se ve claro si miras la Figura 2a y expresas \vec{a} como la suma de un vector \vec{a}_{ω} que es paralelo a $\vec{\omega}$ y llega hasta el plano, y un vector \vec{a}_{\perp} en el plano, que sería la proyección $a \sin \theta$ de la Figura 2b. Cualquier vector en el plano es perpendicular a \vec{a}_{ω} y si, además, es perpendicular a \vec{a}_{\perp} , entonces es

perpendicular a \vec{a} entero. Es entonces inmediato ver que el incremento de \vec{a} , es decir $\Delta\vec{a}$, es perpendicular a $\vec{\omega}$.

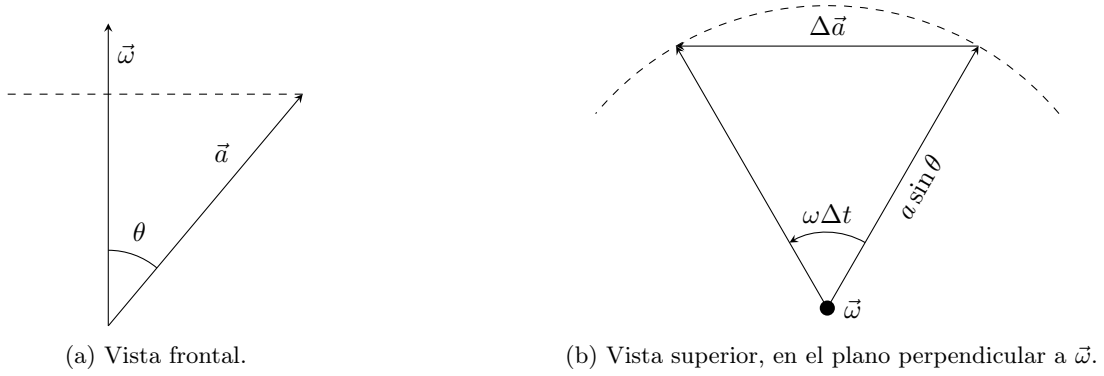


Figura 2: Escenario para la derivada temporal de un vector de módulo constante.

Utilizando la definición de derivada, se puede escribir la Ecuación 22a. Atendiendo a la Figura 2b y usando trigonometría, una puede escribir la longitud o módulo de $\Delta\vec{a}$ como en la Ecuación 22b, donde se identifica $a\omega \sin \theta$ como el módulo de $\vec{\omega} \times \vec{a}$. Puesto que a , ω y θ son constantes, este módulo no cambia con el tiempo. La variación temporal de $|\Delta\vec{a}|$ queda pues recogida en el factor $\sin x/x$.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} \quad (22a)$$

$$|\Delta\vec{a}| = 2(a \sin \theta) \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) = a\omega \sin \theta \frac{\sin x}{x} \Delta t = |\vec{\omega} \times \vec{a}| \frac{\sin x}{x} \Delta t \quad \text{con } x = \frac{\omega \Delta t}{2} \quad (22b)$$

Mirando a la Figura 2b es inmediato ver que, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, el vector $\Delta\vec{a}$ es perpendicular a la proyección de \vec{a} en el plano, y por tanto $\Delta\vec{a}$ es perpendicular a \vec{a} . En otras palabras, en el límite ocurre que $\Delta\vec{a}$ es perpendicular tanto a $\vec{\omega}$ como a \vec{a} y por tanto está alineado con $\vec{\omega} \times \vec{a}$ (atendiendo a la regla de la mano derecha). Por otra parte, el límite de $\sin x/x$ da como resultado 1. Por tanto, $\Delta\vec{a}$ es, en el límite, un vector con el módulo y la dirección de $\vec{\omega} \times \vec{a}$, lo que viene a ser el vector $\vec{\omega} \times \vec{a}$ mismo. El resultado de esta sección queda pues recogido en la Ecuación 23.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (23)$$

En el caso genérico, $\vec{\omega}$ es en sí mismo una función del tiempo. Esto no presenta ningún problema, pues en el límite el ángulo entre $\vec{a}(t)$ y $\vec{a}(t + \Delta t)$ se sigue correspondiendo a $\omega(t)\Delta t$.

Este resultado lo voy a usar en la sección siguiente para expresar las leyes de Newton en sistemas no inerciales.

6. Dinámica de partículas en sistemas no inerciales

Las leyes de Newton son aplicables únicamente en sistemas de referencia inerciales. En particular, la segunda ley de Newton (Ecuación 24) requiere que la aceleración $\ddot{\vec{r}}$ se exprese en un sistema de referencia inercial para que \vec{F} sea la suma (o resultante) de todas las fuerzas externas. Si $\ddot{\vec{r}}$ es la aceleración expresada en un sistema no inercial, entonces \vec{F} debe contener toda una serie de *fuerzas inerciales* (a menudo llamadas *fuerzas ficticias*, aunque no me gusta mucho esa denominación porque, bueno, son fuerzas que están ahí y que nadie se ha inventado en realidad).

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (24)$$

Empezaré con una subsección sobre las derivadas temporales en sistemas de referencia inerciales vs no inerciales, y luego simplemente derivaré las leyes de Newton en sistemas no inerciales. Acabaré comentando alguna cosilla sobre energías y cosas así.

6.1. Derivadas temporales en sistemas no inerciales

Como he mencionado antes, un sistema no inercial puede estar acelerado de dos maneras: linealmente y angular o circularmente. La primera acelearción se puede expresar como una aceleración del origen, mientras que la segunda aceleración se puede expresar como una rotación de la base vectorial. Fíjate que aquí, como he dicho antes, es donde se describe el comportamiento de un sistema de referencia a través del comportamiento de su base vectorial. La relación entre uno y otra es más íntima matemáticamente de lo que lo es físicamente.

Estos dos tipos de aceleraciones requieren un tratamiento completamente diferente. Las acelearciones lineales aceptan un suma (sí, simplemente añadir las al final), mientras que las acelearciones angulares hay que tenerlas en cuenta desde el principio. Por eso empezaré por deducir una expresión que relacione las derivadas temporales tomadas en un sistema inercial con las derivadas temporales tomadas en un sistema no inercial que experimente una rotación pura con respecto al sistema inercial. Esta rotación pura vendrá dada por el vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Esto es lo mismo que decir que los vectores base rotan con velocidad angular $\vec{\omega}$.

En esta subsección indicaré las derivadas temporales tomadas en un sistema inercial con el subíndice \mathcal{I} , y las tomadas en un sistema no inercial con el subíndice \mathcal{N} , como pongo en la Ecuación 25.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{I}} \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{N}} \quad (25)$$

Considera un sistema de referencia no inercial al cual se le asocia un origen y una base vectorial formada por vectores \vec{e}_i . Desde el punto de vista de un sistema inercial, cada uno de estos vectores rota con velocidad angular $\vec{\omega}$. Un vector \vec{a} y su derivada temporal en un sistema inercial se escribe como en la Ecuación 26a. En el sistema de referencia inercial, los vectores \vec{e}_i cambian con el tiempo, y por tanto una debe aplicar la regla del producto al tomar la derivada temporal de $a_i \vec{e}_i$. Fíjate que este procedimiento resulta en el uso de la base vectorial del sistema de referencia inercial - \vec{e}_i - para escribir esta derivada en el sistema inercial. Esto es, muchas veces, lo que confunde. Esta derivada - que es al fin y al cabo un vector - aunque esté matemáticamente escrita con la base vectorial del sistema no inercial, representa una derivada tomada en el sistema inercial. La Ecuación 26a hace uso del resultado de la Ecuación 23 para expresar la derivada temporal de \vec{e}_i . El primero de los sumatorios resultantes representa el cambio que experimenta \vec{a} visto desde la base vectorial del sistema no inercial, y por tanto es lo que vería un observador en ese sistema de referencia. Es entonces la derivada temporal tomada en el sistema de referencia no inercial. Por otra parte, el segundo sumatorio se identifica con \vec{a} mismo. De esta manera, la relación entre ambas derivadas queda recogida en la Ecuación 26b, a veces llamada *teorema de Coriolis* o el *teorema de transporte*.

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i \implies \left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} = \sum_i \left(\dot{a}_i \vec{e}_i + a_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} \right) = \sum_i \dot{a}_i \vec{e}_i + \sum_i a_i \vec{\omega} \times \vec{e}_i = \sum_i \dot{a}_i \vec{e}_i + \vec{\omega} \times \sum_i a_i \vec{e}_i \quad (26a)$$

$$\left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} = \left. \frac{d\vec{a}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (26b)$$

El teorema de Coriolis pone de manifiesto que $\vec{\omega}$ es un vector particular, pues su derivada temporal es la misma tomada en un sistema inercial que en un sistema no inercial (pues $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$). Esto será muy útil más adelante.

Y con esto una está preparada para empezar a expresar velocidades y aceleraciones en sistemas no inerciales.

6.2. Aceleración en un sistema no inercial

Como he dicho antes, las aceleraciones lineales de un sistema no inercial son equivalentes a considerar acelerado el origen. Para llegar a esta conclusión solo hace falta considerar un sistema de referencia no inercial cuyo origen - el punto C - se encuentra en una posición \vec{r}_c vista desde un sistema de referencia inercial. Desde dónde se toma esta posición es completamente irrelevante, pues lo que es de interés son las derivadas de este vector. Este sistema de referencia rota a una velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto al espacio inercial. La posición \vec{r}_p de un punto P en el espacio se puede escribir como en la Ecuación 27, donde \vec{r} es la posición de P en el sistema de referencia no inercial.

$$\vec{r}_p = \vec{r}_c + \vec{r} \quad (27)$$

La velocidad de P se obtiene tomando la derivada de \vec{r}_p en el sistema de referencia inercial. Para esto hace falta aplicar Coriolis (Ecuación 26b) a la derivada de \vec{r} , pues la derivada de \vec{r}_c viene directamente dada en sistema inercial. Esto se ve en la Ecuación 28a. La derivada inercial de \vec{r}_c la escribo como \vec{v}_c , mientras que la derivada temporal de \vec{r}

tomada en el sistema no inercial la escribo simplemente como \vec{v} . Insisto, esta velocidad \vec{v} es la velocidad en el sistema no inercial.

$$\left. \frac{d\vec{r}_p}{dt} \right|_{\mathcal{I}} = \left. \frac{d\vec{r}_c}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} = \left. \frac{d\vec{r}_c}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (28a)$$

$$\left. \frac{d\vec{r}_p}{dt} \right|_{\mathcal{I}} = \vec{v}_c + \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (28b)$$

Por último, la aceleración se halla simplemente derivando la velocidad, de nuevo en el sistema inercial. La derivada del producto vectorial se desarrolla con la regla del producto. La derivada de $\vec{\omega}$ es la misma es un sistema que en otro, y la llamaré $\vec{\alpha}$, que representa el vector *aceleración angular*. Esto es lo que recoge la Ecuación 29a. De estas derivadas inerciales, la de \vec{v}_c se puede tomar directamente en sistema inercial, mientras que la de \vec{r} y \vec{v} requerirán del uso de Coriolis. Esto lo recojo en la Ecuación 29b. Por último, a la derivada inercial de \vec{v}_c la llamaré \vec{a}_c , la derivada no inercial de \vec{r} sigue siendo \vec{v} como antes, y a la derivada no inercial de \vec{v} la llamaré \vec{a} , que es la aceleración que el punto experimenta dentro del sistema no inercial. Este cambio de nombres lo pongo en la Ecuación 29c.

$$\left. \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} \right|_{\mathcal{I}} = \left. \frac{d\vec{v}_p}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{I}} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \left. \frac{d\vec{v}_p}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{I}} \quad (29a)$$

$$\left. \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} \right|_{\mathcal{I}} = \left. \frac{d\vec{v}_p}{dt} \right|_{\mathcal{I}} + \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \quad (29b)$$

$$\left. \frac{d^2\vec{r}_p}{dt^2} \right|_{\mathcal{I}} = \vec{a}_c + \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (29c)$$

Si una utiliza un sistema no inercial, es porque tiene interés en la aceleración experimentada dentro del sistema no inercial, es decir el término \vec{a} . La segunda ley de Newton, sin embargo, se ha de aplicar utilizando todos estos términos que han aparecido aquí. Metiendo esto en la segunda ley de Newton y despejando para lo que interesa, una llega a la segunda ley de Newton para sistemas no inerciales, la Ecuación 30.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_c - \vec{\alpha} \times \vec{r} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (30)$$

Todos estos términos son las famosas *fuerzas inerciales* o *fuerzas ficticias*. Bueno, en esta ecuación son aceleraciones, pero basta con multiplicarlas por la masa m para que sean fuerzas. Lo mismo me da. Voy a centrarme un poco en cada una porque le he prestado 0 atención a su significado físico.

- El término \vec{a}_c , a veces llamado *término de Einstein*, es la aceleración lineal del sistema no inercial. Como ves, se le puede simplemente sumar al final. Este término viene sólomente y es el único producto del término \vec{r}_c de la Ecuación 27. Suelen ser muy pocos los casos en los que este término aparece.
- El término $\vec{\alpha} \times \vec{r}$, a veces llamado *término de Euler*, es un término que sólo aparece en sistemas cuya rotación no es uniforme. De nuevo, suelen ser pocos los casos en los que este término aparece, pues se suelen evitar sistemas no inerciales en los que la rotación no sea constante en el tiempo.
- El término $2\vec{\omega} \times \vec{v}$ es la famosa *fuerza de Coriolis*. Este es peculiar, pues es una fuerza que te tira hacia un lado cuando te mueves en un sistema no inercial. Pero sólo si te alejas o acercas al eje de rotación de alguna manera. Este es en realidad fácil de entender si te imaginas dos personas montadas en un tiovivo, una cerca del centro y la otra cerca del borde. La que está hacia el borde tiene mucha velocidad tangencial (pues está lejos del eje de rotación). Si le intenta tirar una pelota a la que está en el centro, (en principio en línea recta) le imprimirá a la pelota toda su velocidad tangencial. Pero la persona del centro no tiene esa velocidad tangencial, por lo que la pelota “se desviará de su trayectoria recta”, y no alcanzará a la persona del centro.
- El término $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$ es la famosa *fuerza centrífuga*, que como puedes comprobar es perpendicular a $\vec{\omega}$ y, con ese signo negativo, empuja “hacia fuera” del eje de rotación. Fíjate que, si le cambias el signo, pasa a apuntar “hacia dentro” del eje de rotación. En este caso se llama *fuerza centrípeta*.

Para terminar esta parte de la dinámica en sistemas no inerciales, voy a hablar un poquito sobre la conservación de la energía en sistemas no inerciales.

6.3. Conservación de la energía en sistemas no inerciales

En un sistema inercial, una partícula puede tener energía cinética (si tiene velocidad) y/o energía potencial (si está actuando sobre ella alguna fuerza conservativa). Si no hay fuerzas no conservativas ejerciendo trabajo sobre ella, la ley de conservación de la energía dice que su energía mecánica (suma de cinética y potencial) se conservará. En la misma definición de energía se deja claro que esta energía depende del sistema de referencia, pues la velocidad misma depende del sistema. Entonces la pregunta es, ¿cómo funciona esta ley aplicada a los sistemas no inerciales?

Lo primero que es evidente en la Ecuación 30 es que hay muchas fuerzas actuando de forma predeterminada en una partícula. Tristemente, no todas son conservativas¹. De hecho, si haces la prueba, las únicas aceleraciones que son conservativas son la fuerza de Einstein y la centrífuga, cuyos potenciales pongo en la Ecuación 31 (perdón por el cambio de subíndice en los potenciales, pero la e es de *Einstein* y la c es de *centrífugo*).

$$\vec{a}_c = -\nabla\phi_e \quad \text{con} \quad \phi_e = -\vec{a}_c \cdot \vec{r} \quad (31a)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = -\nabla\phi_c \quad \text{con} \quad \phi_c = \frac{1}{2} |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 = -\frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{r} \quad (31b)$$

Si bien la fuerza de Coriolis no es conservativa, es por definición perpendicular a la velocidad, y por tanto nunca ejerce trabajo. No obstante, las fuerzas de Euler (si la hubiese) no es conservativa y, en el caso general, ejercería trabajo sobre la partícula. Por tanto, aunque $\vec{F} = \vec{0}$ (y por tanto no hubiese fuerzas no conservativas ejerciendo trabajo), la energía seguiría sin conservarse.

En sistemas de referencia que rotan uniformemente (es decir, $\vec{\alpha} = \vec{0}$), todas las fuerzas inerciales que ejercen trabajo son conservativas, por lo que se puede establecer una especie de *potencial inercial* que recoja los potenciales de la fuerza centrífuga y de Einstein², con la posibilidad de establecer conservación de la energía.

¹Recuerda que una fuerza \vec{f} es conservativa cuando se puede expresar como el gradiente de una función escalar ϕ denominada *potencial*, $\vec{f} = \nabla\phi$. Hay quien lo define como el contrario, es decir $\vec{f} = -\nabla\phi$. Como es cuestión de pura definición, mientras dejes claro cómo lo estás usando tú, todo bien. En cualquier caso, se cumple que el rotacional de una fuerza conservativa es $\vec{0}$ porque $\nabla \times \vec{f} = \nabla \times \nabla\phi = \vec{0}$.

²Aquí hay una sutileza importante. Si \vec{a}_c es una función del tiempo, la cosa se complica un poco. Pero no nos metamos ahí.

7. Astrodinámica 0.0 - Ley de Gravitación de Newton

En este punto he desarrollado ya las herramientas físicas y matemáticas necesarias para meternos en el tema que me ocupa: la astrodinámica. La voy a separar en tres partes. La primera parte constará de principios generales sobre gravedad, notación y el problema de N cuerpos como primer acercamiento a la dinámica en un sistema de partículas. En la segunda parte hablaré bastante en profundidad sobre el problema de 2 cuerpos, del cual se derivan, mediante la física newtoniana, las leyes que Kepler estableció empíricamente. En la tercera parte hablaré sobre (un caso particular de) el problema de los 3 cuerpos, que es donde se descubre la mentira que había en aquel problema sobre las lunas de Júpiter y donde acaba este viaje. No obstante, la primera y segunda parte no son estrictamente necesarias para entender la tercera, así que puedes saltártelas si quieres e ir directamente a la Sección 9. Eso sí, asumiré que conoces toda la notación que presento en las dos primeras partes.

7.1. Ley de gravitación universal

En esta primera parte voy a poner la ley de gravitación de Newton, pero la voy a explicar bien. Considera dos **partículas** de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r . La ley de Newton dice que existe una fuerza entre ellas que las atrae y cuyo **módulo** F viene dado por la Ecuación 32. En esta ecuación, G es la *constante de gravitación universal* y su valor me da bastante igual y no lo he necesitado nunca realmente (pero es de seis con algo por diez a la menos mucho).

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (32)$$

Lo de que sean partículas es importante porque esta ecuación sólo es válida para campos gravitatorios con simetría esférica³. Esto está muy bien, pero poco se puede hacer con este numerito si no tengo su dirección. Y es que su dirección no es única. Según m_1 , la dirección es de sí mismo a m_2 ; según m_2 , es a la contra. Así que voy a definir un vector \vec{r}_{12} que va de m_1 a m_2 , y su vector unitario \hat{r}_{12} con misma dirección y sentido pero módulo 1. La fuerza que m_2 ejerce sobre m_1 viene dada por la Ecuación 33a; la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 viene dada por la Ecuación 33b. Nótese que son iguales y opuestas (por supuesto, tal cual dicta la tercera ley de Newton).

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}_{12} \quad (33a)$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}_{12} \quad (33b)$$

Tomadas en un sistema inercial, la aceleración gravitatoria que cada partícula sufre por la presencia de la otra viene dada por la Ecuación 34: la aceleración que m_2 ejerce en m_1 está en la Ecuación 34a y la aceleración que m_1 ejerce en m_2 está en la Ecuación 34b.

$$\vec{a}_{2 \rightarrow 1} = \frac{Gm_2}{r^3} \vec{r}_{12} \quad (34a)$$

$$\vec{a}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r}_{12} \quad (34b)$$

Como ya se sabía desde Galileo, la aceleración que sufre un cuerpo no depende de su propia masa, sino de la masa del cuerpo atractor. Además, la constante universal de gravitación siempre sale multiplicando esta masa. A nivel científico, esto quiere decir que las dos no se pueden separar muy bien mediante la astrodinámica (es la principal limitación a la hora de saber la masa de los planetas). El producto de ambas, sin embargo, es más manejable. Por eso a este producto Gm se le da un nombre especial: el *parámetro gravitacional*, μ .

En astrodinámica, la fuerza de la gravedad es la dominante en todos los cuerpos. Hay factores menores, como la presión de radiación si estás “cerca” de una estrella o el rozamiento atmosférico si estás “cerca” de un cuerpo con atmósfera (ya sea planeta o luna). Así que todas las fuerzas que consideraré a partir de ahora serán, a menos que expresamente diga lo contrario, aceleraciones gravitatorias.

En lo que sigue voy a dejar de usar la G horrible y voy a usar exclusivamente los parámetros gravitacionales. Por otra parte, voy a ahorrarme las flechas de los subíndices sin cambiar el significado del término, de forma que *la aceleración que m_2 causa sobre m_1* la escribiré como \vec{a}_{21} , y punto. Y ahora, ya, doy paso a lo siguiente.

³Un campo gravitatorio con simetría esférica es un campo que solo es función de la distancia a la fuente, pero que no cambia con la dirección por la que te acercas/alejes

7.2. Problema de N cuerpos

El problema de N cuerpos es el “problema génesis” de la astrodinámica. Los problemas de 2 y 3 cuerpos son mucho más importantes a nivel práctico, aunque el problema de N cuerpos también es relevante - piensa que una simulación del Sistema Solar, por ejemplo, es un problema de N cuerpos. Los problemas de 2 y 3 cuerpos son particularizaciones del problema de N cuerpos, y no hay propiedad de estos problemas que no se pueda deducir a partir del problema de N cuerpos. Ahora bien, hay diferencias muy importantes entre ellos. De entrada, el problema de N cuerpos no tiene solución analítica excepto para el único caso de $N = 2$ (problema de dos cuerpos). En cuanto sumas un cuerpo más, la solución genérica es caótica (en el sentido estricto y matemático de la palabra *caos*). Sin embargo, el problema de los 3 cuerpos acepta ciertas imposiciones sobre las condiciones físicas que hacen que el problema tenga solución analítica.

Las propiedades del problema de N cuerpos son en realidad las mismas que salen de considerar simplemente un sistema de partículas que sólo están sometidas a interacciones mutuas (de cualquier tipo), es decir que no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema. Para estudiar el movimiento de estas partículas, una necesita un sistema de referencia, a poder ser inercial. Es decir, un origen no acelerado y una base vectorial que no rote. En principio, una puede elegir este origen donde le venga en gana, pero hay un punto preferente: el centro de masas del sistema. Y es que este punto no está acelerado. Demostrar esto es muy sencillo.

Primero hace falta formular la tercera ley de Newton. En este sistema, cada partícula i ejerce una aceleración \vec{a}_{ij} sobre la partícula j . Por la tercera ley de Newton, la partícula j ejerce una aceleración \vec{a}_{ji} en la partícula i de forma que las dos aceleraciones están relacionadas por la Ecuación 35.

$$m_j \vec{a}_{ij} = -m_i \vec{a}_{ji} \quad (35)$$

Y lo segundo que hace falta es recordar la definición del centro de masas C del sistema. Su posición viene dada por la Ecuación 36, donde M es la suma de todas las masas m_i . El punto desde el que se miden las posiciones es irrelevante, salvo por el hecho de que no puede estar acelerado, porque son las derivadas de estos vectores las que interesan.

$$M \vec{r}_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (36)$$

Con esto, una deriva la Ecuación 36 dos veces con respecto del tiempo (en un sistema inercial) y expresa $\ddot{\vec{r}}_i$ como la suma de todas las \vec{a}_{ji} que ejerce cada partícula j sobre la partícula i , tal y como empieza la Ecuación 37a. Esta ecuación aplica la Ecuación 35, tras lo cual se intercambia el orden del sumatorio y se identifica el nuevo término con la aceleración total de la partícula j y el sumatorio de éstas como la aceleración del centro de masas. Por último, la Ecuación 37b recoge el proceso de resolución que lleva al resultado final, que dice que el centro de masas no está acelerado.

$$M \ddot{\vec{r}}_c = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i \vec{a}_{ji} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_{ij} = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N m_j \vec{a}_{ij} = - \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j = -M \ddot{\vec{r}}_c \quad (37a)$$

$$M \ddot{\vec{r}}_c = -M \ddot{\vec{r}}_c \implies 2M \ddot{\vec{r}}_c = \vec{0} \implies \ddot{\vec{r}}_c = \vec{0} \quad (37b)$$

Este resultado es lo mismo que decir que el momento lineal del centro de masas - y por tanto el momento lineal total del sistema - se conserva. Esta es la primera ley de Newton, pero aplicada ahora a sistemas de partículas enteros. De la misma manera, se puede aplicar la ley de conservación de momento angular. El momento angular del sistema de partículas, llámalo \vec{L} , es la suma de los momentos angulares de todas las partículas, es decir la Ecuación 38a. Aquí, \vec{r}_i y \vec{p}_i son la posición y el momento lineal de cada partícula, medidos ambos en un sistema de referencia inercial. La derivada temporal (en este sistema inercial) queda como en la Ecuación 38b, donde $\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$ porque ambos vectores son proporcionales, y la derivada temporal de \vec{p}_i es, mediante la segunda ley de Newton, la fuerza total que actúa sobre la partícula i . Para escribir la Ecuación 38c he usado la tercera ley de Newton $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ y que la posición de i es la posición de j más el vector que va de j a i , \vec{r}_{ji} . Además, como dos partículas solo pueden ejercerse fuerzas en su línea de visión, \vec{r}_{ji} es paralelo a \vec{F}_{ij} y su producto vectorial es nulo.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (38a)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \quad (38b)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_{ji} \times \vec{F}_{ij} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \quad (38c)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = - \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_j = - \frac{d\vec{L}}{dt} \implies \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad (38d)$$

Para resumir un poco, las conclusiones que se sacan pues de un estudio preliminar de un sistema de partículas sin fuerzas externas son las siguientes:

- El momento lineal total del sistema se conserva (no así el de cada partícula individual).
- El momento angular total del sistema se conserva (no así el de cada partícula individual).
- El centro de masas del sistema representa el origen de un sistema de referencia inercial.

Lo último que quedaría por ver en este sistema de partículas son las ecuaciones de movimiento de una única partícula. La segunda ley de Newton viene simplemente dada por la Ecuación 39.

$$\vec{a}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{F}_{j \rightarrow i}}{m_i} \quad (39)$$

La particularización que el concepto del *problema de N cuerpos* impone en esta ecuación es la forma de $\vec{F}_{j \rightarrow i}$, que viene ahora dada por la fuerza de la gravedad mediante la ley de la gravitación de Newton (Ecuación 32), y por tanto la aceleración de un *cuerpo* en este sistema viene dada como en la Ecuación 40.

$$\vec{a}_i = - \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{|\vec{r}_{ji}|^2} \hat{r}_{ji} \quad \text{donde} \quad \vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (40)$$

Un último paso que a veces es útil tomar de cara a estudiar sistemas planetarios es planetarse la siguiente pregunta. El movimiento de la Luna, por ejemplo, se estudia desde un sistema de referencia terrestre como si éste fuese inercial. Pero la Tierra está acelerada por la Luna también. Entonces, ¿cómo se puede estudiar el movimiento de un cuerpo celeste en un sistema de referencia sujeto a otro? Por ejemplo, cómo se vería la dinámica de la partícula i desde la partícula k .

Resolver esto es más sencillo de lo que parece. Como este sistema de referencia, si bien acelerado linealmente, no rota, bastaría con añadir la aceleración a la que está sometida la partícula k , lo que equivaldría al término de Einstein de la Ecuación 30. Para eso es necesario separar el término de la partícula k de la Ecuación 40, tal y como se ve en la Ecuación 41a, donde el sumatorio no corre sobre la partícula k . De la misma manera, la aceleración a la que está sometida la partícula k son las que están en la Ecuación 41b, donde el sumatorio no corre sobre la partícula i . Por último, la aceleración que experimenta la partícula i en un sistema de referencia sujeto a la partícula k viene dada en la Ecuación 41c, donde el sumatorio se salta tanto la partícula i como la partícula k .

$$\vec{a}_i = - \frac{\mu_k}{|\vec{r}_{ki}|^2} \hat{r}_{ki} - \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{|\vec{r}_{ji}|^2} \hat{r}_{ji} \quad (41a)$$

$$\vec{a}_k = - \frac{\mu_i}{|\vec{r}_{ik}|^2} \hat{r}_{ik} - \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{|\vec{r}_{jk}|^2} \hat{r}_{jk} \quad (41b)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_i - \vec{a}_k = - \frac{\mu_k + \mu_i}{|\vec{r}_{ki}|^2} \hat{r}_{ki} - \sum_{j=1}^N \mu_j \left(\frac{\hat{r}_{ji}}{|\vec{r}_{ji}|^2} - \frac{\hat{r}_{jk}}{|\vec{r}_{jk}|^2} \right) \quad (41c)$$

8. Astrodinámica 0.1 - Problema de 2 cuerpos

Si bien el problema de N cuerpos es, como he dicho antes, la “génesis” de la astrodinámica, no es el más sencillo de estudiar, ni el más útil. Además, no tiene solución general. En textos de astrodinámica, es en realidad más común empezar por el problema de dos cuerpos, que suele ser lo primero primerísimo que se ve. Pero viniendo desde la dinámica de partículas en sistemas no inerciales como hace este texto, está mejor hilado si se pasa primero por el problema de N cuerpos.

El problema de dos cuerpos es la particularización del problema de N cuerpos para $N = 2$ con el objetivo de estudiar la evolución del sistema, i.e. la posición relativa de un cuerpo con respecto al otro. Para esto hay dos opciones. Estudiar los cuerpos desde su centro de masas común (sistema de referencia inercial) o estudiar la posición de un cuerpo directamente desde el (centro de masas del) otro cuerpo. Cuando se hace esto, se tiene un cuerpo moviéndose alrededor de otro, que está en el “centro”. A este segundo se le llama *primario* o *cuerpo central* y suele ser el cuerpo más pesado de los dos, mientras que al otro se le llama *secundario* o, según en qué aplicaciones, *orbitador*. Usando la Ecuación 41c como referencia, hacer esto sería como estudiar la dinámica de i (el secundario) en un sistema de referencia asociado a k (el primario) con todas las fuerzas de “otros cuerpos” siendo 0 (porque no hay otros cuerpos, vaya). Muchas veces a estos “otros cuerpos” se les suele considerar *perturbaciones* al problema de 2 cuerpos, y por eso se les conoce como “cuerpos terceros” (*third bodies* en inglés).

Simplificando entonces la Ecuación 41c, escribiendo \vec{r} como la posición de i con respecto a k y cambiando subíndices i y k por 1 y 2, la ecuación de movimiento del cuerpo 2 en un sistema de referencia asociado al cuerpo 1 se vería como en la Ecuación 42, donde se ha usado el hecho de que $\vec{r} = r\hat{r}$ y se ha escrito $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Las derivadas temporales de \vec{r} ($\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$) son simplemente la velocidad y aceleración, \vec{v} y \vec{a} , y ambas notaciones se usarán indistintamente.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \quad (42)$$

En muchas ocasiones, sobre todo cuando se estudia el movimiento de satélites artificiales, se da que $\mu_2 \ll \mu_1$, y por lo tanto suele tomarse el límite $\mu \rightarrow \mu_1$ (en el caso de Cassini alrededor de Saturno, por ejemplo, $\mu_2/\mu_1 \sim 10^{-24}$, muy por debajo de la resolución numérica de cualquier ordenador). Esta aproximación se llama a veces “problema de 1 cuerpo”, y la masa del segundo cuerpo no juega ningún papel en su movimiento. En cualquier caso, fíjate que la forma de la Ecuación 42 no cambia, y por tanto el sistema de referencia es indeferente.

8.1. Leyes de conservación

Para un sistema de partículas, el momento lineal y angular del sistema entero se conserva. Ahora, sin embargo, la pregunta es qué cantidades se conservan *del segundo cuerpo* únicamente. Puesto que está sometido a una aceleración, su momento lineal obviamente no se conserva. El momento angular⁴ \vec{h} , sin embargo, sí. Esto es trivial de verificar, tal y como se ve en la Ecuación 43. En el último paso, se ha usado que el producto vectorial de vectores proporcionales es nulo (\vec{v} es obviamente proporcional a \vec{v} y \vec{a} es proporcional a \vec{r} , como dice la Ecuación 42).

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \implies \frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{0} \quad (43)$$

Por otra parte, en este problema sólo actúa la fuerza de la gravedad (que es conservativa) y por tanto la energía se conserva. Esto es fácil de probar matemáticamente si se multiplica la Ecuación 42 escalarmente por \vec{v} como en la Ecuación 44.

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \quad (44)$$

Y ahora toca interpretar cada término. El primero es trivial, y se reduce a una derivada temporal como en la Ecuación 45, que no es sino la derivada temporal de la energía cinética del secundario.

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (45)$$

⁴En astrodinámica se suele trabajar siempre con cantidades específicas, es decir, por unidad de masa (del secundario). Cuando digo “momento lineal” me refiero a “momento lineal por unidad de masa” (es decir velocidad); cuando digo “momento angular” me refiero a “momento angular por unidad de masa”, es decir $\vec{r} \times \vec{v}$; y cuando digo “energía” me refiero a “energía por unidad de masa”, por ejemplo la energía cinética sería $v^2/2$.

El segundo es un poco más enrevesado. Pasa por darse cuenta de que $\dot{\vec{r}} \cdot \hat{r}$ es la proyección de la velocidad sobre la línea que une el primario y el secundario, y por tanto la componente de la velocidad en esta dirección. En otras palabras, es la velocidad a la que el secundario se aleja/acerca del primario, y por tanto la derivada temporal del módulo de \vec{r} , es decir $\dot{\vec{r}} \cdot \hat{r} = \dot{r}$. Por tanto, $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = r\dot{r}$. De esta manera, el segundo término de la Ecuación 44 se convierte en una derivada temporal como se ve en la Ecuación 46, que no es sino la derivada temporal de la energía potencial de secundario.

$$\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mu}{r^3} r\dot{r} = \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{r} \right) \quad (46)$$

De esta manera, la Ecuación 44 se convierte en la Ecuación 47, donde se define la energía mecánica \mathcal{E} , que se conserva. Esta ecuación se conoce comúnmente como la *ecuación de vis-viva*.

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \mu \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \implies \mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (47)$$

No sólo el momento angular \vec{h} y la energía mecánica \mathcal{E} del secundario se conservan. En el problema de dos cuerpos hay otra magnitud que se conserva: el vector excentricidad \vec{e} . Su ley de conservación se deriva multiplicando vectorialmente la Ecuación 42 por el momento angular \vec{h} , tal y como se ve en la Ecuación 48.

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} = \vec{0} \quad (48)$$

El primer término se desarrolla de la siguiente manera, pues el momento angular es una cantidad constante y se puede meter dentro de la derivada:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{h} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{h}) \quad (49)$$

El segundo término es un poco más particular, y requiere algunos pasos. El primero (Ecuación 50a) Es expandir \vec{h} y convenientemente distribuir el r^3 del denominador. El segundo (Ecuación 50b) es reescribir la derivada temporal y su producto vectorial. Por último, la se usa la propiedad $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ en la Ecuación 50c.

$$\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \mu \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} = \mu \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \frac{1}{r} \frac{d(r\hat{r})}{dt} \right) \quad (50a)$$

$$\hat{r} \times \frac{1}{r} \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \hat{r} \times \left(\frac{\dot{r}}{r} \hat{r} + \frac{d\hat{r}}{dt} \right) = \hat{r} \times \frac{d\hat{r}}{dt} \implies \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} = \mu \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \frac{d\hat{r}}{dt} \right) \quad (50b)$$

$$\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \frac{d\hat{r}}{dt} \right) = \hat{r} \left(\hat{r} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \right) - \frac{d\hat{r}}{dt} (\hat{r} \cdot \hat{r}) = \frac{\hat{r}}{2} \frac{d}{dt} (\hat{r} \cdot \hat{r}) - \frac{d\hat{r}}{dt} = -\frac{d\hat{r}}{dt} \implies \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \vec{h} = -\mu \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (50c)$$

De esta manera, la Ecuación 48 se convierte en la Ecuación 51, donde se define el *vector excentricidad* \vec{e} , cuya derivada temporal es 0.

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{h}) - \mu \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{0} \implies \vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \quad (51)$$

Creo que este es buen momento para meterme con las implicaciones físicas de la conservación de todas estas cantidades.

La conservación del momento angular implica un momento angular constante tanto en módulo como en dirección. Y el tema de la dirección es muy importante. Fíjate que \vec{h} es perpendicular al plano formado por \vec{r} y \vec{v} (porque es perpendicular a los dos, vaya). Si la dirección de \vec{h} es constante, quiere decir que el plano formado por \vec{r} y \vec{v} también es constante en el tiempo - su orientación lo es, vaya. Por tanto, **el movimiento del secundario va a estar siempre contenido en el mismo plano**. Este es el *plano de la órbita*.

La conservación de la energía establece una relación entre (el módulo de) la velocidad del secundario v y su distancia al primario r , de tal manera que cuando la una crece, la otra decrece, y viceversa. Cuando $r \rightarrow \infty$ se dice que el secundario *escapa* del primario, y entonces $\mathcal{E} \rightarrow v_\infty^2/2$, donde v_∞ es la velocidad que el secundario lleva “en el infinito” y se llama *velocidad de exceso* (*excess velocity* en inglés). Fíjate que, como la energía se conserva, esta “energía

en el infinito” es una medida de la energía de la trayectoria en sí. Muchas veces, la energía de una trayectoria, incluso de una órbita cerrada que nunca realmente escapa, se mide en términos de esta v_∞ , a menudo llamada $v_\infty^2 = C_2$.

Por otra parte, el vector excentricidad está contenido en el plano orbital, pues $\vec{v} \times \vec{h}$ es perpendicular a \vec{h} y por tanto está contenido en el plano orbital. Al mismo tiempo, y al ser constante en el tiempo, presenta una dirección de referencia con respecto a la cual medir la dirección de \vec{r} y \vec{v} . Y esto enlaza divinamente con lo que viene a continuación.

8.2. Sistema perifocal y ecuación de trayectoria

Si \vec{h} presenta una dirección constante perpendicular al plano de la órbita, y \vec{e} presenta una dirección constante dentro del plano de la órbita, una puede usar esas direcciones como vectores de una base vectorial, a falta de una tercera dirección. Esta base vectorial y sistema de referencia se conoce como *sistema de referencia perifoca* (*perifocal reference frame* en inglés). Está centrada en el (centro de masas del) primario y formada por los vectores $\{\hat{p}, \hat{q}, \hat{w}\}$ definidos en la Ecuación 52.

$$\hat{p} = \frac{\vec{e}}{e} \quad \hat{q} = \hat{w} \times \hat{p} \quad \hat{w} = \frac{\vec{h}}{h} \quad (52)$$

Puesto que el movimiento del secundario ocurre siempre en el plano formado por \hat{p} y \hat{q} , una puede describir la trayectoria del secundario con respecto al primario especificando su distancia al primario, es decir $r = |\vec{r}|$, y el ángulo que \vec{r} forma con cualquiera de las direcciones de referencia contenidas en el plano orbital, es decir \hat{p} o \hat{q} . A este ángulo le voy a llamar θ , y lo voy a medir entre \hat{p} y \vec{r} . Esta decisión es la estándar, y a este ángulo se le llama *anomalía verdadera* (*true anomaly* en inglés). Algunas fuentes la llaman ν , pero bueno. Preferencias personales.

La trayectoria, que al final es una curva, vendrá dada por una relación entre estas dos magnitudes, de la forma $f(r, \theta) = 0$ (el equivalente en coordenadas polares de una línea en el plano dada por una función $f(x, y) = 0$). Si en coordenadas cartesianas es intuitivo expresar y en función de x tomando x como variable independiente, en polares es intuitivo expresar r en función de θ , siendo ésta última la variable independiente. Es lo que voy a buscar a continuación.

La anomalía verdadera aparece en el producto escalar de \vec{r} y \hat{p} , o equivalentemente en el producto escalar de \vec{r} y \vec{e} . Este producto lo he desarrollado en la Ecuación 53a, donde he usado la relación $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Por otra parte, la Ecuación 53b despeja r casi hasta el final.

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = re \cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{\mu} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{\vec{h} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})}{\mu} - \frac{r^2}{r} = \frac{\vec{h} \cdot \vec{h}}{\mu} - r = \frac{h^2}{\mu} - r \quad (53a)$$

$$re \cos \theta = \frac{h^2}{\mu} - r \implies re \cos \theta + r = \frac{h^2}{\mu} \implies r(1 + e \cos \theta) = \frac{h^2}{\mu} \quad (53b)$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \quad (53c)$$

La Ecuación 53c, que proporciona r en función de θ , se conoce a menudo como *ecuación de órbita* o *ecuación de trayectoria* (*orbit equation* o *trajectory equation* en inglés). Yo no soy geómetra, pero alguien que en su momento supo mucho de geometría identificó esta ecuación como la ecuación de una sección o curva cónica en coordenadas polares. Es por ello que conviene hablar un poquito de las secciones cónicas.

8.3. Curvas cónicas

Las secciones cónicas son cuatro: círculo, elipse, parábola e hipérbola. La distinción entre ellas viene principalmente dada por el parámetro e , que se llama excentricidad, tal y como se ve en la Tabla 1.

Tabla 1: Tipos de cónicas y su excentricidad

Cónica	Excentricidad
Círculo	$e = 0$
Elipse	$0 < e < 1$
Parábola	$e = 1$
Hipérbola	$e > 1$

De éstas, la parábola y la hipérbola son curvas abiertas, pues $e \geq 1$ da lugar a una singularidad cuando el denominador de la Ecuación 53c se vuelve 0 (cosa que es imposible para $e < 0$ puesto que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$). Sin embargo, para $e > 1$, puede ocurrir que $e \cos \theta = -1$, en cuyo caso r quedaría indefinido. Sin embargo se puede establecer el comportamiento asintótico para $e \cos \theta \rightarrow -1$, en cuyo caso $r \rightarrow \infty$. Este valor límite de θ se suele conocer como θ_∞ , y viene dado como en la Ecuación 54, que sólo es válida para $e \geq 1$. Fíjate que para una parábola ($e = 1$) $\theta_\infty = 180^\circ$.

$$\theta_\infty = \arccos \left(-\frac{1}{e} \right) \quad (54)$$

Tras este pequeño apunte, voy a centrarme en las trayectorias cerradas, que son las que propiamente se pueden llamar *órbitas*. Estará implícito pues a partir de ahora que $e < 1$ y trataré el círculo como un mero caso concreto de una elipse sin necesidad de más atención.

Una elipse se define formalmente como *el lugar geométrico de todos aquellos puntos para los cuales la suma de las distancias entre el punto y dos focos es la misma*, donde los *focos* son simplemente dos puntos que se eligen donde se quiera. Por tanto, la construcción de una elipse requiere de dos puntos, los focos, que se suelen denominar como F y F' , y una distancia. Esta construcción hace que los puntos más alejados de la elipse estén separados precisamente por esa “distancia”, que se llama *eje mayor* y se denota como $2a$ (y por tanto a se llama *semieje mayor*). Por otra parte, la distancia $2a$ es siempre mayor que la distancia en los dos focos, que se llama *distancia interfocal* y a la que denotaré como $2c$. La relación entre las dos viene dada por la excentricidad, de tal forma que $c = ea$. Todos estos elementos los tienes pintados en el dibujinchi de la Figura 3. La ecuación de la cónica (Ecuación 53c) sitúa uno de los focos en el origen. En nuestro caso, el origen está situado en el primario, que estaría pues en uno de los focos de la elipse, comúnmente conocido como *foco ocupado* y señalado como F en la Figura 3, mientras que el otro sería el *foco vacío*. En esta figura también he señalado el comúnmente conocido como *semieje menor*, b .

Puesto que el cuerpo primario se sitúa en el foco ocupado, es relativo a este foco que se definen cantidades como el vector posición \vec{r} o la anomalía verdadera θ , ambos pintados también en la Figura 3. También te he puesto el vector excentricidad. Cruzando este puente entre la geometría pura y la astrodinámica más propiamente dicha, los puntos de la elipse se suelen referir siempre al foco ocupado. Un *punto más cercano* o *bajo* es un punto que está cerca del foco ocupado ($|\theta|$ pequeño) mientras que un *punto lejano* o *alto* es un punto que está lejos del foco ocupado ($|\theta|$ grande). Hay por tanto dos puntos importantes: el más cercano ($\theta = 0$) y el más lejano ($\theta = \pi$). Estos puntos se llaman *pericentro/periapsis/periapso* y *apocentro/apoapsis/apoapso*, respectivamente. Hay algún rarillo por ahí que los llama *periastro* y *apoastro*. Para órbitas alrededor de la Tierra, es muy común llamarlos *perigeo* y *apogeo*; para órbitas alrededor del Sol hay quien los llama *perihelio* y *afelio*; y en principio existen nomenclaturas específicas para cada cuerpo celeste, pero no se suelen usar más que esas. La jerga de los científicos de misión suelen llamar al pericentro también *punto de mayor acercamiento* o simplemente *el mayor acercamiento* (*closest approach* en inglés).

Más que extremadamente importantes, estos dos puntos - apoapsis y periapsis - son extremadamente útiles y

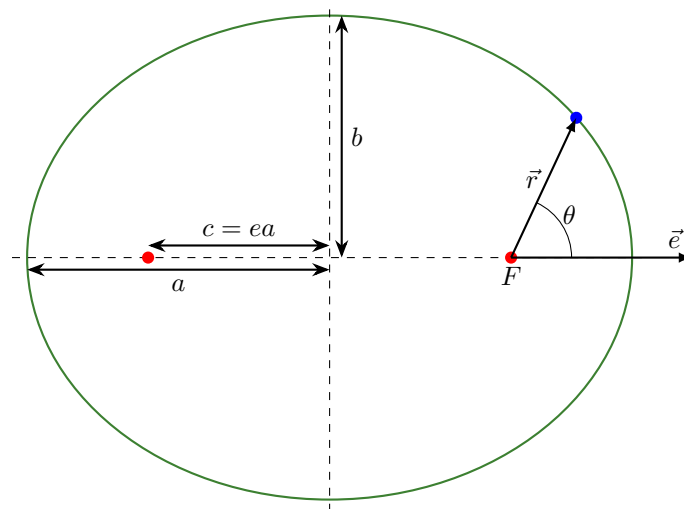


Figura 3: Geometría de una elipse. Indicados en rojo están los focos, uno de los cuales he etiquetado como F . El otro sería F' . También he pintado el semieje mayor a . En un contexto planetario, el primario estaría situado en F (mientras que F' estaría vacío), y en azul he pintado al secundario, con su vector posición \vec{r} y su anomalía verdadera θ . También te he pintado el vector excentricidad \vec{e} .

prácticos. Fíjate que en estos puntos representan un máximo y un mínimo de r , por lo que, por definición, $\dot{r} = 0$. Recuerda, como mencioné antes, que \dot{r} es la velocidad radial, es decir la proyección de \vec{v} sobre \hat{r} . Y si es 0, quiere decir que en estos puntos la velocidad es perpendicular a \hat{r} (y por tanto a \vec{r}), lo que simplifica muchísimo el cálculo del momento angular \hat{h} (Ecuación 43). Con $\vec{v} \perp \vec{r}$, $h = |\vec{h}|$ viene dado por el producto de r y v . Usando subíndices a y p para el apoapsis y periapsis respectivamente, una puede escribir la Ecuación 55.

$$h = r_p v_p \implies v_p = \frac{v_p}{r_p} \quad h = r_a v_a \implies v_a = \frac{v_a}{r_a} \quad (55)$$

También permiten reescribir la ecuación de trayectoria (Ecuación 53c) eliminando el momento angular h , a veces fastidioso. Si llamas r_p y r_a a los valores de r en periapsis y apoapsis respectivamente, calculados para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, su suma tiene que ser $2a$. Esto se escribe matemáticamente como en la Ecuación 56, donde se ha usado la Ecuación 53c evaluada en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y se ha resuelto para h^2/μ .

$$r_p + r_a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1+e} + \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1-e} = 2a \implies \frac{h^2}{\mu} = a(1-e^2) \implies h = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad (56)$$

Si esta expresión se sustituye de vuelta en la ecuación de trayectoria (Ecuación 53c) y se particulariza en periapsis y apoapsis, una puede llegar a las sencillas expresiones de la Ecuación 57.

$$r = a \frac{1-e^2}{1+e \cos \theta} \implies \begin{cases} r_p = a(1-e) \\ r_a = a(1+e) \end{cases} \quad (57)$$

Combinando todas estas relaciones, una puede deducir una expresión sencilla y práctica para la energía mecánica \mathcal{E} , tal y como se muestra en la Ecuación 58. Se comienza particularizando la ecuación de vis-viva (Ecuación 47) en apoapsis o periapsis. Cualquiera de los dos sirve, y la Ecuación 58a se ha escrito usando el apoapsis. Se sustituye v usando la Ecuación 55 y se sustituye h utilizando la Ecuación 56, tal y como muestra la misma Ecuación 58a. Por último, se sustituye r usando la Ecuación 57, como muestra la Ecuación 58b. Todo el factor entre parentésis se simplifica para dar como resultado -1, lo cual produce el resultado en la Ecuación 58c. Como ves, la energía del secundario queda totalmente determinada por el semieje mayor de su órbita. Por eso se suele decir que la energía *pertenece a* la órbita, y se le llama *energía orbital*.

$$\mathcal{E} = \frac{v_a^2}{2} - \frac{\mu}{r_a} = \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_a^2} - \frac{\mu}{r_a} = \frac{a\mu(1-e^2)}{2} \frac{1}{r_a^2} - \frac{\mu}{r_a} \quad (58a)$$

$$\mathcal{E} = \frac{a\mu(1-e^2)}{2} \frac{1}{a^2(1+e)^2} - \frac{\mu}{a(1+e)} = \frac{\mu}{2a} \left(\frac{1-e^2}{(1+e)^2} - \frac{2}{1+e} \right) \quad (58b)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} \quad (58c)$$

De esta manera, especificando los vectores posición y velocidad de un cuerpo, el tamaño y forma de la trayectoria en la que se encuentra, dados por el semieje mayor y la excentricidad de la misma, quedan automáticamente determinados mediante el cálculo del vector excentricidad (Ecuación 51) y la energía orbital (Ecuación 47), que proporciona el semieje mayor a través de la Ecuación 58c.

8.4. Base intrínseca y velocidad orbital

En la Subsección 8.1 hemos necesitado la componente radial de la velocidad, es decir $\dot{r} = \vec{r} \cdot \hat{r}$, para llegar a la Ecuación 46. Esta descomposición de la velocidad es muy útil muy a menudo y, además, su estudio de lugar a toda una serie de conceptos interesantes y extremadamente útiles en muchos otros sentidos. Por eso voy a dedicarle un ratito especial a esto.

Si bien el vector excentricidad presenta una dirección de referencia muy conveniente dentro del plano orbital, en muchas ocasiones es más útil referir las direcciones de distintos vectores con respecto a la propia dinámica del cuerpo. Por ejemplo, la orientación de un satélite de telecomunicaciones se define muchísimo mejor con respecto a su vector posición \vec{r} , pues a menudo se requiere que la antena del satélite esté siempre apuntando en la dirección de $-\hat{r}$. Otro ejemplo es la fuerza de rozamiento de un satélite con la atmósfera, que viene naturalmente dada por la dirección del vector velocidad \vec{v} , y suele estar normalmente alineada con $-\hat{v}$. En general, tiene sentido pensar que una dirección fija en el espacio no responde muy bien a la simetría cilíndrica de la que goza el movimiento de un cuerpo alrededor de

su cuerpo central. Es por eso que, si bien útil en ciertos casos, el sistema perifocal definido en la Subsección 8.2 no presenta demasiadas ventajas en según qué situaciones.

Para eso existe una base vectorial específica llamada *base intrínseca* cuyos ejes están alineados con respecto al cuerpo en su órbita. De esta manera, la base está formada por el vector (unitario) \hat{r} en la dirección de \vec{r} , el vector (unitario) \hat{w} en la dirección normal al plano orbital - es decir en la dirección de \vec{h} - y el vector unitario $\hat{s} = \hat{w} \times \hat{r}$ que completa la tríada derecha. Recojo las tres definiciones en la Ecuación 59. Esta base es muy comúnmente llamada *base RSW* (por razones obvias). Otra nomenclatura que se suele usar es la de *base RTN*, pues tienes un vector *radial*, un vector (casi) *tangencial* a la trayectoria (el vector \hat{s}) y un vector *normal* al plano orbital (el vector \hat{w}). Es muy común en muchas ocasiones describir la dinámica del cuerpo en un sistema de referencia asociado a esta base RTN.

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \hat{s} = \hat{w} \times \hat{r} \quad \hat{w} = \frac{\vec{h}}{h} \quad (59)$$

Esta base permite descomponer el vector velocidad en su componentes *radial* y *tangencial* de una forma además bastante elegante. Sirva de referencia la Figura 4, donde se muestran los vectores \hat{r} y \hat{s} del sistema RTN. Este sistema no es inercial, pues rota con velocidad angular $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{w}$ a medida que el secundario se mueve alrededor del primario. La posición del secundario se puede expresar como $\vec{r} = r\hat{r}$ en el sistema RTN, y su velocidad vendría dada, atendiendo a la Ecuación 26b, como $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{s}$. La velocidad tiene pues una componente *radial* dada por $v_r = \dot{r}$ en la dirección \hat{r} y una componente *tangencial* $v_\theta = r\dot{\theta}$ en la dirección \hat{s} .

A menudo se llama a la dirección \hat{r} la *vertical local*, mientras que la dirección \hat{s} sería la *horizontal local* o el *horizonte local*. De esta manera, el vector velocidad \vec{v} - que siempre es, por definición, tangente a la trayectoria - forma un ángulo γ con la horizontal local que, haciendo el paralelismo con el vuelo atmosférico (es decir de aviones en el cielo), se suele denominar como el *flight path angle* en inglés y, según Google, el *ángulo de trayectoria de vuelo* en español. Por pura trigonometría, este ángulo sigue la relación de la Ecuación 60.

$$\tan \gamma = \frac{v_r}{v_\theta} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}} \quad (60)$$

Las componentes de la velocidad v_r y v_θ tienen expresiones que rigen su evolución a lo largo de la trayectoria, es decir, son funciones explícitas de θ (y las propiedades orbitales).

La más directa de ellas es la expresión para v_θ . Fíjate que, si haces la cuenta con $\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{s}$, el momento angular de la órbita puede escribirse como $\vec{h} = rv_\theta\hat{w}$. Esto permite escribir v_θ como en la Ecuación 61, donde se ha usado la ecuación de la trayectoria (Ecuación 53c) para sustituir r .

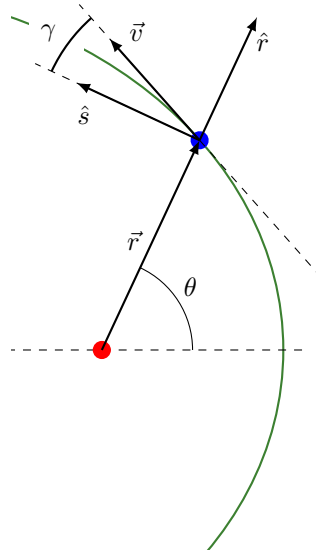


Figura 4: Vectores \hat{r} y \hat{s} de la base RTN centrados en el secundario (punto azul). Indicadas referentes al foco (punto rojo) están la anomalía verdadera θ y el vector posición del secundario, \vec{r} . Se muestra en la figura también la velocidad \vec{v} del secundario así como el ángulo de trayectoria de vuelo γ .

$$v_\theta = \frac{h}{r} = \frac{\mu}{h}(1 + e \cos \theta) \quad (61)$$

Por otra parte, la expresión para $v_r = \dot{r}$ pasa por derivar con respecto del tiempo la ecuación de la trayectoria (Ecuación 53c), y usar la regla de la cadena para escribir la Ecuación 62. Al escribir $dr/d\theta$ una puede identificar el término r tal cual viene dado por la ecuación de la trayectoria, para posteriormente identificar $r\dot{\theta} = v_\theta$ y, para terminar, la Ecuación 61 permite escribir el último paso de la Ecuación 62.

$$v_r = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{h^2}{\mu} \frac{e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \dot{\theta} = \frac{re \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \dot{\theta} = \frac{v_\theta e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{\mu}{h} e \sin \theta \quad (62)$$

Fíjate que, como era de esperar por la física del problema, v_θ es siempre positivo - pues la anomalía verdadera siempre crece - mientras que v_r es positivo para $0 < \theta < \pi$ - la primera mitad de la órbita, cuando el secundario se *aleja* del primario - y negativo para $\pi < \theta < 2\pi$ - la segunda mitad de la órbita, cuando el secundario vuelve a *acercarse* al primario. Para $\theta = 0$ (periapsis) y $\theta = \pi$ (apoapsis), $v_r = 0$, pues r alcanza su mínimo y máximo respectivamente (y por tanto su derivada es 0). En estos dos puntos, toda la velocidad es tangencial, y v_θ es mínima (en apoapsis) y máxima (en periapsis).

Esta descomposición de la velocidad es extremadamente útil para muchos casos. Si bien las expresiones en sí sean más o menos relevantes, pensar siempre en una *velocidad radial* y una *velocidad tangencial* es muy importante sobre todo en el campo del *tracking* (que no sé cómo se dice en español, pero Google dice que es *seguimiento* o *rastreo*). Como su traducción indica, el *tracking* es el seguimiento de un cuerpo en el espacio, aplicable más prominentemente a satélite artificiales o basura espacial.

Si bien hay muchas formas de hacer *tracking*, la más sencilla - conocida como *one-way tracking* - consiste en que el satélite mande una señal (por lo general de radio, pero cada vez más también de láser) a una estación en la Tierra, que recibe la señal. En esa señal va codificada mucha información, pero la que nos importa es la hora precisa de emisión, y la frecuencia precisa de emisión. De esta manera, la distancia en línea recta⁵ entre el satélite y la estación se pueden calcular utilizando la hora de emisión, la hora de recepción (que queda grabada por la estación) y la velocidad de la señal en el vacío. De nuevo, esto proporciona la distancia estación-satélite, es decir r . Por otra parte, la frecuencia de emisión se verá alterada por la velocidad del satélite mediante el efecto Doppler, de forma que la frecuencia de la onda que recibe la estación de tierra no es exactamente la misma que la que emite el satélite. Si has oído algo del efecto Doppler, este ocurre cuando dos cuerpos se *alejan* o *acercan*, de forma que lo que interesa aquí no es la velocidad total del satélite, sino la velocidad a la que se acerca/aleja de la estación, es decir, $\dot{r} = v_r$. Es por eso que, al usar este método de *tracking*, una puede calcular la posición y velocidad del satélite con mucha precisión en la dirección de \hat{r} , pero no tanto así en las direcciones \hat{s} o \hat{w} . En esta aplicación, por ejemplo, la base RTN y esta descomposición de la velocidad son cruciales.

8.5. Evolución temporal en una órbita

Si bien he hecho un análisis bastante completo de la (forma de) la trayectoria y la velocidad del secundario en la misma, todavía no he hablado del tiempo. Preguntas como el tiempo que tarda el secundario en completar una órbita o cuánto tiempo tardará en llegar de cierto punto a otro en su órbita todavía no se pueden responder.

Matemáticamente, esa segunda pregunta se puede plantear como la solución a la ecuación diferencial de la Ecuación 63. Para esta ecuación he usado el hecho de que $h = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$ junto con la ecuación de la trayectoria y/o la Ecuación 61.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mu^2}{h^3}(1 + e \cos \theta)^2 \quad (63)$$

Integrar esta ecuación diferencial es de todo menos fácil. Como diría M. Rajoy, “no es fácil, o dicho de otra manera, es difícil”. Y la verdad es que es extremadamente difícil. Pero existe una especie de cambio de variable que facilita mucho las cosas. Esta nueva variable se llama *anomalía excéntrica*, denotada E , y está geoméricamente relacionada con la anomalía verdadera. Esto va a parecer un rodeo largo, pero voy a plantear la geometría, derivar las relaciones y re-escribir la Ecuación 63 en términos de la anomalía excéntrica.

La anomalía excéntrica se define como en la Figura 5, que servirá de referencia para el desarrollo matemático. El coseno de este ángulo se define como en la Ecuación 64a, donde se ha usado la Ecuación 57 para escribir el ratio r/a .

⁵Esto es un poco mentira. Cuando hay materia de por medio, i.e. la atmósfera, la señal se refracta y se curva, por lo que la distancia calculada no es realmente la que hay en línea recta entre el satélite y la estación, sino la que ha recorrido la señal en su trayectoria curva entre el uno y la otra.

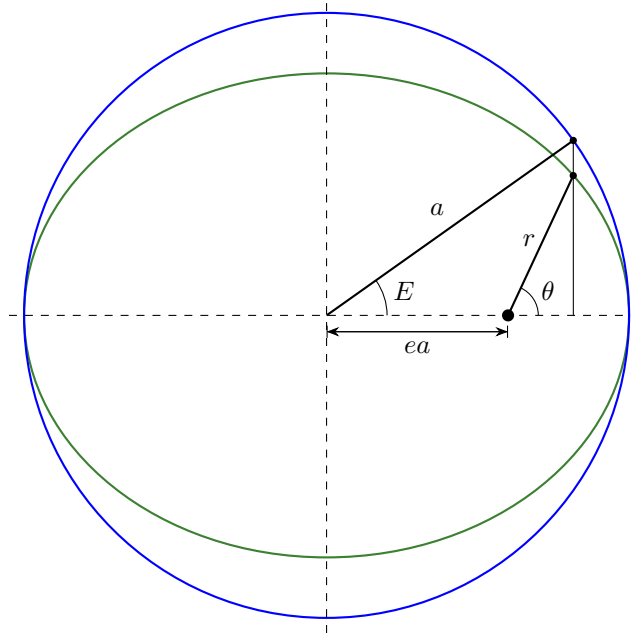


Figura 5: Geometría de las anomalías verdadera (θ) y excéntrica (E). La anomalía excéntrica se construye a través de una circunferencia auxiliar (en azul) de radio a que circunscribe a la elipse (en verde).

El seno se escribe como en la Ecuación 64b, donde el signo que le corresponde a la raíz (recuerda que podría ser tanto positiva como negativa) se resuelve por la mera definición geométrica, según la cual $\sin E$ y $\sin \theta$ tienen el mismo signo.

$$\cos E = \frac{ea + r \cos \theta}{a} = e + \frac{r}{a} \cos \theta \implies \cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (64a)$$

$$\sin E = \sqrt{1 - \cos^2 E} \implies \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (64b)$$

La relación inversa (es decir, θ en términos de E) se consigue despejando $\cos \theta$ en la Ecuación 64a y usando ese resultado para despejar $\sin \theta$ en la Ecuación 64b. Una encuentra entonces las expresiones de la Ecuación 65.

$$\cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E} \quad (65)$$

La derivada temporal de la Ecuación 63 se puede escribir en función de la anomalía excéntrica derivando $\cos \theta$ con respecto del tiempo en la Ecuación 65 y usando la expresión para $\sin \theta$ de la misma ecuación, tal y como se muestra en la Ecuación 66.

$$\frac{d}{d\theta}(\cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dE} \left(\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \right) \frac{dE}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} \frac{dE}{dt} \quad (66)$$

Por otra parte, el lado derecho de la Ecuación 63 se escribe trivialmente en función de E sustituyendo $\cos \theta$ por la expresión de la Ecuación 65, tal y como se muestra en la Ecuación 67.

$$1 + e \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E} \quad (67)$$

Poniendo la Ecuación 67 y la Ecuación 66 juntas según dicta la Ecuación 63, una puede cancelar varios términos para dar lugar a la Ecuación 68. La transformación a la relación de la derecha es abrupta, así que voy a explicarla por partes.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mu^2(1 - e^2)^{3/2}}{h^3} \frac{1}{1 - e \cos E} \implies \frac{dM}{dt} = n \quad (68)$$

Esta ecuación presenta un factor constante que depende de μ , h y e que, usando la Ecuación 56, se puede reducir a la expresión de la Ecuación 69. Esta cantidad, a la que se le llama n , es una cantidad de la órbita cuyo nombre en español desconozco, pero que en inglés se llama *mean motion* (puede que se llame *movimiento medio* en español (?)).

$$\frac{\mu^2(1-e^2)^{3/2}}{h^3} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = n \quad (69)$$

Por otra parte, el término $1 - e \cos E$ del denominador de la Ecuación 68 pasa a la parte izquierda del igual, que se puede escribir como en la Ecuación 70. Aquí aparece la derivada temporal de una cantidad, que se define pues como *anomalía media*, M .

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E - e \sin E) \implies M = E - e \sin E \quad (70)$$

Voy a pararme a reflexioanr un poco más sobre estas cosas. Voy primero a incidir sobre la relación entre las tres anomalías (Ecuación 64, Ecuación 65 y Ecuación 70). En todas estas relaciones solo interviene un único parámetro de la órbita: la excentricidad. Más importantemente, no interviene el semieje mayor. Esto quiere decir que la relación entre las tres anomalías viene determinada solamente por la *forma* de la órbita, y no por su *tamaño*. Cuanto más circular es la órbita - y por tanto cuanto menor es e - más se parecen las tres anomalías. De hecho, en el límite de $e = 0$, las tres son exactamente iguales. En este caso de la órbita circular, la anomalía verdadera evoluciona linealmente con el movimiento medio n . De nuevo, cuanto más excéntrica es la órbita (más grande es e), más diferentes van a ser las derivadas temporales de unas y otras anomalías. Estas velocidades sí que vienen determinadas por el tamaño de la órbita mediante la Ecuación 69. Ayuda mucho visualizar la relación entre las tres anomalías, así como la diferencia entre sus velocidades. Todo esto aparece junto en la Figura 6 para una órbita de excentricidad $e = 0,6$.

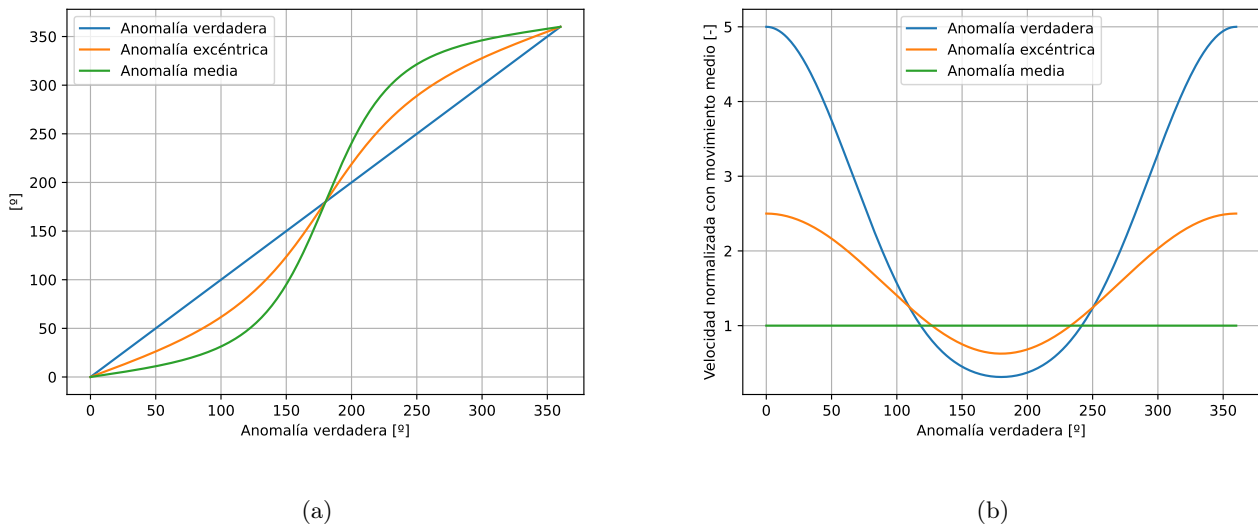


Figura 6: Comparación entre las tres anomalías y sus velocidades para una órbita con excentricidad $e = 0,6$. A la izquierda, las tres anomalías en función de la anomalía verdadera. Por supuesto la anomalía verdadera es una línea recta con pendiente 1. A la derecha, las velocidades de cada anomalía normalizadas con el movimiento medio, es decir los ratios $\dot{\theta}/n$, \dot{E}/n y \dot{M}/n . Estas cantidades normalizadas pierden su dependencia del tamaño de la órbita y sólo dependen de la forma. Por definición $\dot{M} = n$, por lo que esa línea es una recta constante en 1.

Es importante destacar que las tres anomalías son exactamente iguales en dos puntos de la órbita: periapsis ($\theta = 0^\circ$) y apoapsis ($\theta = 180^\circ$). Esto implica que las tres tardan exactamente lo mismo en completar una revolución. Lo contrario no tendría sentido realmente, pues una órbita cerrada es cíclica y como tal todas las cantidades deben volver al mismo punto exacto al principio y al final. Gracias a esto, definir el periodo orbital T es trivial si una usa la anomalía media, pues la Ecuación 68 es directamente integrable entre $t = 0$ y T , proporcionando el resultado de la Ecuación 71. Fíjate que esta expresión para T es exactamente la misma que la que ya tú sabes⁶ para órbitas circulares, pero cambiando el radio R de la órbita circular por el semieje mayor a de la órbita excéntrica.

⁶Como diría el gran pensador estadounidense Pitbull.

$$\int_0^T \frac{dM}{dt} dt = \int_0^{2\pi} dM = \int_0^T n dt \implies 2\pi = nT \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (71)$$

Por último, voy a delinear cómo se respondería a las preguntas que he formulado al principio. ¿Cuánto tiempo tarda el secundario en ir de un punto a otro de la órbita? ¿De dónde a dónde irá en un tiempo determinado? Estas dos preguntas son una la inversa de la otra. Llama Δt al tiempo en consideración, y $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ al recorrido a lo largo de la órbita, expresado en un incremento de anomalía verdadera. La primera pregunta pide Δt para un $\Delta\theta$ conocido, mientras que la segunda pide $\Delta\theta$ para un Δt conocido. El problema común es que el tiempo no se relaciona trivialmente con las anomalías verdaderas, sino con las anomalías medias. Entonces hay que hacer cambios entre ellas.

Empezaré por la primera, pues es mucho más sencilla de responder. Supón que partes de un punto θ_1 en la órbita, y quieres efectuar un incremento $\Delta\theta$ que te llevará hasta otro punto θ_2 . El proceso a seguir es el siguiente:

1. Convertir las dos anomalías verdaderas en anomalías medias: $\theta_1, \theta_2 \rightarrow E_1, E_2 \rightarrow M_1, M_2$. Para esto se usan las relaciones de la Ecuación 64 y la Ecuación 70.
2. Calcular el tiempo necesario para ir de M_1 a M_2 : $\Delta M = M_2 - M_1 = n\Delta t \rightarrow \Delta t = (M_2 - M_1)/n$

Estos pasos son los dos triviales, y sólo requieren de e para las relaciones entre las tres anomalías y de a y μ para calcular el movimiento medio n . El proceso inverso parece igual de sencillo, pero solo lo parece. Supón que empiezas en un punto de la órbita θ_1 , y quieres averiguar a qué punto θ_2 llegarás tras un tiempo Δt . El proceso funciona un poco así:

1. Convierte θ_1 a M_1 : $\theta_1 \rightarrow E_1 \rightarrow M_1$ como antes.
2. Calcula M_2 con $\Delta M = M_2 - M_1 = n\Delta t \rightarrow M_2 = M_1 + n\Delta t$.
3. Convierte M_2 a θ_2 : $M_2 \rightarrow E_2 \rightarrow \theta_2$.

Este último paso requiere el uso de la Ecuación 70, pero sabiendo M y teniendo E como incógnita. Esta ecuación es una ecuación *transcendental*, por lo que una no puede resolverla analíticamente. Es decir, no existe una expresión cerrada para E en función de M . Este paso debe resolverse de forma iterativa mediante algún método numérico, el más popular (y sencillo) siendo el *método de Newton-Raphson*.

8.6. Notas finales

Para terminar, me gustaría remarcar un par de cosas importantes sobre aspectos que voy a dejar fuera de todo este texto de manera bastante deliberada.

La primero que quiero hacer es llamar la atención sobre el cambio de geometría que ha sufrido el análisis del problema de dos cuerpos. Si bien el planetamiento inicial ha sido total y completamente genérico y por lo tanto válido para problemas en dos y tres dimensiones, la Subsección 8.2 ha introducido la base perifocal y, desde ese punto, el estudio se ha centrado total y completamente en el movimiento dentro del plano orbital, desarrollando una nomenclatura y unos métodos aptos para esta dinámica en el plano - es decir, en dos dimensiones. Como habrás podido ver, desde la Subsección 8.2 en adelante no se han usado vectores para absolutamente nada, excepto para, precisamente, descomponer la velocidad en sus componentes radial y tangencial y evitar tratarla como un vector. Si bien bastante detallado e interesante a nivel geométrico y analítico, todo este estudio es bastante poco apropiado para estudiar situaciones reales salvo desde una primera aproximación analítica y teórica para establecer ciertos órdenes de magnitud (distancias, velocidades, energías, ...). No obstante, este estudio se puede extender para introducir la tercera dimensión mediante la orientación del plano orbital en el espacio, lo que se hace mediante sus ángulos de Euler (que son tres) y, unidos a los ya conocidos semieje mayor a , excentricidad e y anomalía verdadera θ (o equivalentemente la media M) constituyen los conocidos *elementos orbitales clásicos* (*classical orbital elements* en inglés, *COE* para abreviar). Soy consciente de que hay gente que me daría una paliza por no introducirlos en este estudio del problema de dos cuerpos. Una paliza bastante justificada, la verdad. Pero visto que el objetivo aquí es llegar al problema de tres cuerpos, donde los elementos orbitales ni pinchan ni cortan, no me parece que merezca la pena. De hecho, todo lo que te he contado en esta sección sobre el problema de dos cuerpos pinta bastante poco en el problema de tres cuerpos, y soy de los que piensan que primero habría de estudiarse el problema de tres cuerpos, y ya luego el problema de dos cuerpos. Sin embargo, hay una línea tan fina entre el problema de tres cuerpos y lo que se conoce como *movimiento relativo* que parece un crimen no hacerlas seguidas. Y para el tema de movimiento relativo conceptos como la excentricidad o el semieje mayor sí hacen falta. Por eso te pongo el problema de dos cuerpos primero, y el de tres cuerpos después.

Sin embargo, ten en cuenta que el estudio que he hecho del problema de dos cuerpos ha sido totalmente plano, y que falta toda la componente tridimensional que, en un libro de texto, es obligatoria.

La segunda cosa que quiero mencionar va añadida al hecho de que el estudio que hemos hecho del problema de dos cuerpos es plano. Y es que he dedicado toda mi atención a las órbitas elípticas, y he pasado olímpicamente de trayectorias abiertas (parábolas e hipérbolas). Estas curvas son esenciales y fundamentales para estudiar problemas de transferencias interplanetarias. El problema de “estoy orbitando un planeta y quiero ir a otro” se estudia mediante un procedimiento que en inglés se llama *patched conics* (el método de *cónicas parcheadas* en español, según un chaval del Observatorio Astronómico de Quito). Este método utiliza trayectorias hiperbólicas para abandonar la órbita alrededor de un planeta y entrar en una órbita heliocéntrica (alrededor del Sol). El estudio entonces de estas trayectorias abiertas es total y completamente esencial. Pero como el punto de esto no es ser un libro de texto, me lo voy a saltar completamente.

El siguiente paso antural en este proceso sería estudiar el conocido como *problema de Lambert*, que combina todo lo visto hasta ahora y lo extiende a tres dimensiones para responder a la siguiente pregunta: *¿dadas dos posiciones en el espacio, y habiendo un cuerpo tardado un tiempo determinado en volar de la una a la otra, en qué órbita se encuentra?*. La respuesta viene, por lo general, en forma del semieje mayor y excentricidad de la órbita, pues (la orientación de) el plano orbital queda marcado por el plano que forman los vectores de las dos posiciones. Sin embargo, de nuevo, es un problema que requiere bastante involucración y no aporta nada al problema de tres cuerpos. Así que me lo voy a saltar. Y así pues, solo quedaría pasar por fin al problema de tres cuerpos.

9. Astrodinámica 0.2 - Problema (circular restringido) de 3 cuerpos

Newton encontró una solución al problema de dos cuerpos (todo lo que cuento en la Sección 8). Sin embargo, resulta que el problema de tres cuerpos no tiene solución *general*. Es un problema caótico que no se presta a predicciones. Excepto para determinadas condiciones iniciales. Por ejemplo, si los tres cuerpos se mueven en la misma línea recta, la solución es trivial: convergen en un punto, se chocan, y ya. Otra solución estable es la de órbitas coplanares, es decir cuando los tres se mueven siempre en el mismo plano. No estoy seguro de si además esto requiere que los tres tracen órbitas circulares alrededor del centro de masas común, o también se admiten órbitas elípticas.

En cualquier caso, no importa, porque este no es un problema de tres cuerpos normal. Fíjate que tiene dos apellidos: *circular* y *restringido*. El segundo hace referencia a la trampa de este problema, y es que se restringe el problema a una situación en la que uno de los cuerpos es extremadamente ligero con respecto a los otros dos, tanto tanto que su masa se desprecia total y completamente. De esta manera, los otros dos cuerpos orbitan alrededor de su centro de masas común en un problema de dos cuerpos estándar, como el de la Sección 8. Por otra parte, lo de *circular* quiere decir que esta órbita que siguen los dos cuerpos principales es circular.

9.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento

Considera dos cuerpos de parámetros gravitacionales μ_1 y μ_2 “comparables” entre sí (es decir, ninguno es despreciable con respecto al otro), bajo la única influencia cada uno de la gravedad del otro. Estudiados en un problema de dos cuerpos, el movimiento medio del “secundario” en su órbita alrededor del “primario” viene dado por la Ecuación 69, donde ahora $\mu = \mu_1 + \mu_2$, pues no estamos despreciando la masa de ninguno de los dos cuerpos. Si, además, estas órbitas son circulares, el semieje mayor a del secundario es igual a la distancia d entre los dos cuerpos.

El estudio del movimiento de un tercer cuerpo de masa despreciable en este entorno es más sencillo si se hace en un sistema no inercial, con origen el centro de masas común de los otros dos cuerpos, y rotando a la misma velocidad angular a la que el secundario gira en torno al primario. En este sistema de referencia, el primario y el secundario están estáticos (es decir, no se mueven). De esta forma, la configuración se mantiene todo el rato tal cual muestra la Figura 7, que gira a velocidad constante $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, con ω siendo el movimiento medio del secundario alrededor del primario tal cual dice la Ecuación 72.

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_1 + \mu_2}{(r_1 + r_2)^3}} \quad (72)$$

La dinámica del terciario en este sistema de referencia no inercial viene dada, de forma general, por la Ecuación 29, donde $\vec{a}_c = \vec{\alpha} = \vec{0}$ y el término \vec{F}/m es la suma de las atracciones gravitatorias del primario y el secundario, que se pueden escribir como en la Ecuación 42 cambiando \vec{r} por $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$ respectivamente. De esta manera, la ecuación de movimiento para el terciario responde a la Ecuación 73, donde las derivadas temporales se toman en el sistema de

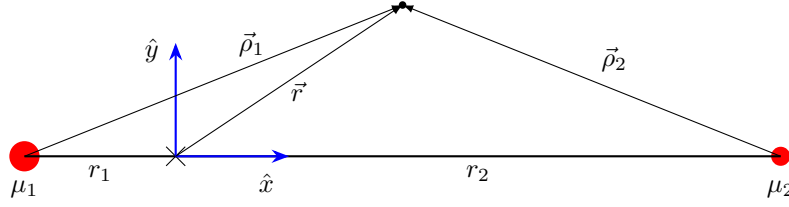


Figura 7: Planteamiento del problema circular restringido de tres cuerpos. El secundario (parámetro gravitacional μ_2) está en una órbita circular alrededor del primario (parámetro gravitacional μ_1). Toda esta configuración gira a velocidad angular constante $\omega = n$ según la Ecuación 69 con respecto al centro de masas común (indicado con la cruz), de forma que $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = n \hat{z}$. El sistema de referencia para estudiar al “terciario” (situado en la posición \vec{r}) tiene origen en el centro de masas común y rota a velocidad $\vec{\omega}$ con toda la configuración, de forma que el primario y el secundario están estáticos en este sistema de referencia.

referencia no inercial. Además he puesto las aceleraciones inerciales o *ficticias* (Coriolis y centrífuga/centrípeta) a la izquierda, como suele ser costumbre.

$$\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} \vec{\rho}_1 - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \vec{\rho}_2 \quad \text{con} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Es estándar descomponer esta ecuación vectorial en sus tres direcciones. Para eso, voy a calcularte explícitamente las aceleraciones de Coriolis y centrípeta, así como las expresiones para $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$. Para escribir la fuerza centrípeta he usado directamente el resultado anterior para escribir el producto $\vec{\omega} \times \vec{r}$ de forma análoga a $\vec{\omega} \times \vec{r}$.

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = -\omega \dot{y} \hat{x} + \omega \dot{x} \hat{y} = \begin{bmatrix} -\omega \dot{y} \\ \omega \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74a)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x \hat{x} - \omega^2 y \hat{y} = \begin{bmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74b)$$

$$\vec{\rho}_1 = \vec{r} - (-r_1 \hat{x}) = \begin{bmatrix} x + r_1 \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \rho_1 = \sqrt{(x + r_1)^2 + y^2 + z^2} \quad (74c)$$

$$\vec{\rho}_2 = \vec{r} - r_2 \hat{x} = \begin{bmatrix} x - r_2 \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \rho_2 = \sqrt{(x - r_2)^2 + y^2 + z^2} \quad (74d)$$

Poniendo todas estas expresiones juntas, una encuentra el sistema de ecuaciones diferenciales que te pongo en la Ecuación 75. Este es un sistema altamente no lineal, pues los términos $1/\rho_1^3$ y $1/\rho_2^3$ contienen las tres coordenadas espaciales. Por tanto, no tienen solución general, sino que han de resolverse numéricamente con un ordenador.

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} (x + r_1) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} (x - r_2) \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} y - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} y \\ \ddot{z} = -\frac{\mu_1}{\rho_1^3} z - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} z \end{cases} \quad (75)$$

Estas son las ecuaciones con las que voy a trabajar a partir de ahora.

9.2. Adimensionalización de las ecuaciones de movimiento

Otra modificación estándar que se suele hacer a estas ecuaciones es adimensionalizarlas. Esto presenta muchas ventajas y es una cosa de la que yo soy muy fan, porque permite extrapolar soluciones de un sistema a otro, y parametrizarlas con el mínimo número de cantidades posibles. Todo esto se hace mediante las dimensiones relevantes en el problema, que en este caso son distancia y tiempo (son las únicas unidades que aparecen en la Ecuación 75). De

esta forma, se escogen una “escala de tiempo” y una “escala de distancia” y se expresa todo en el problema como ratios con respecto a esas escalas. Hay quien lo ve como cambiarle las unidades a todas las cantidades. Considera por ejemplo que como escala de tiempo elijo el periodo orbital T del secundario alrededor del primario. Entonces todos los tiempos me quedarán en proporciones de T . Hay quien lo ve como cambiar las unidades de tiempo de segundos a periodos. Los tiempos se expresarán en “un periodo” o “tres periodos” y así. No sólo eso, sino que las derivadas temporales también me quedarán en términos del periodo. En lugar de tener velocidades en metros por segundo, las tendré en “metros por periodo” (por ejemplo).

En este caso, las unidades de tiempo y distancia que voy a escoger son $1/\omega$ y $r_1 + r_2$, y voy a escribir las cantidades adimensionales con una nubecita (como la de la ñ, a veces llamadas “tildes”, sobre todo en inglés). La adimensionalización entonces se ve como en la Ecuación 76.

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_1 + r_2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega(r_1 + r_2)} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{x}} \\ \ddot{\tilde{y}} \\ \ddot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^2(r_1 + r_2)} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} \quad (76a)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega} = 1 \quad \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \\ \tilde{r}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r_1 + r_2} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 \\ \tilde{\mu}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^2(r_1 + r_2)^3} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad (76b)$$

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{x} + \tilde{r}_1 \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \quad \tilde{\rho}_1 = \sqrt{(\tilde{x} + \tilde{r}_1)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} \quad (76c)$$

$$\tilde{\rho}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{x} - \tilde{r}_2 \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \quad \tilde{\rho}_2 = \sqrt{(\tilde{x} - \tilde{r}_2)^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} \quad (76d)$$

Fíjate que, por la mera definición, $\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = 1$ y también $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 = 1$. Por eso me voy a permitir definir $\mu = \tilde{\mu}_1$, de forma que $\tilde{\mu}_2 = 1 - \mu$. Esto también tiene implicaciones en las definiciones de \tilde{r}_1 y \tilde{r}_2 . Por la propia definición del centro de masas, fíjate que $-\mu_1 r_1 \hat{x} + \mu_2 r_2 \hat{x} = \vec{0}$, por lo que $\mu_1 r_1 = \mu_2 r_2$. Si una divide esta expresión por $(\mu_1 + \mu_2)(r_1 + r_2)$ para encontrar su versión adimensional, sale lo siguiente:

$$\tilde{\mu}_1 \tilde{r}_1 = \tilde{\mu}_2 \tilde{r}_2 \implies \mu \tilde{r}_1 = (1 - \mu)(1 - \tilde{r}_1) \implies \tilde{r}_1 = 1 - \mu \quad \text{por lo que} \quad \tilde{r}_2 = \mu \quad (77)$$

Solo quedaría sustituir todos estos términos en la Ecuación 75. Esto va a dar lugar a tener un montón de tildes (las nubecitas) por todos lados. Por eso **voy a suprimir las tildes para que la notación no sea tan engorrosa**, pero todas las cantidades que salgan a partir de ahora habrán de entenderse como adimensionales. De esta forma, la versión adimensional de la Ecuación 75 se ve como en la Ecuación 78, donde me he tomado la libertad de transponer algunos términos y sacar factores comunes y esas cosas, además de aislar todas las derivadas temporales en el lado izquierdo.

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \mu - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) (x - \mu) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) y \\ \ddot{z} = - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} \right) z \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho_1 = \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2 + z^2} \\ \rho_2 = \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \quad (78)$$

Fíjate que en estas ecuaciones adimensionales no aparece ω por ningún lado, pero quedan parametrizadas con μ . Este parámetro μ es la proporción de masa del primario con respecto a la total del primario y secundario. Con este número, las soluciones a estas ecuaciones quedan totalmente determinadas. Más concretamente, esta adimensionalización facilita mucho muchísimo el estudio del equilibrio en el problema de tres cuerpos, que es lo que viene ahora.

9.3. Equilibrio: Puntos de Lagrange

Y ahora, redoble de tambores, voy culminar todo este camino, porque de estas ecuaciones sale la explicación a aquella mentira que te contó ese problema sobre Júpiter e Ío (que, recuerdo, es lo que vinimos a hacer). El problema te pidió encontrar el punto en el que, según decía, *un satélite [...] con velocidad $v = 0$ podría mantenerse ahí indefinidamente sin gasto energético*. Este punto, en el que todas las aceleraciones se cancelan y por tanto, si te quedas quieto en ese punto, ahí te quedarás siempre. Se llama *punto de equilibrio*, y se define matemáticamente como aquel punto

en el que $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} = \vec{0}$. Sustituir esta condición en la Ecuación 75 resulta en un sistema de ecuaciones algebraicas (pues estamos eliminando todas las derivadas temporales) para las coordenadas x , y y z de estos puntos de equilibrio. Este sistema te lo pongo en la Ecuación 79.

$$\begin{cases} \mu - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) (x - \mu) = 0 \\ - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) y = 0 \\ - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} \right) z = 0 \end{cases} \quad (79)$$

En cualquier caso, este sistema sigue siendo altamente no lineal, y por tanto no se puede poner en forma de matriz y resolver bonito. Por eso hay que ir un poco jugando con las posibles soluciones, y para esto hace falta pericia y práctica, para saber por dónde empezar. En este caso, como la tercera de las ecuaciones del sistema parece más sencilla, voy a empezar por ahí. Para que se cumpla, uno de los dos factores tiene que ser 0, como se ve en la Ecuación 80. Ahora bien, fíjate que tanto μ , como $1 - \mu$, como ρ_1 como ρ_2 son todos positivos. La única forma de que esa suma sea 0 es si cada uno de los términos es 0 por su cuenta, para lo que ambos numeradores tienen que ser 0. Y eso es imposible. Si este factor no es 0 nunca, la única solución a esta ecuación es $z = 0$, por lo que los puntos de equilibrio siempre tendrán $z = 0$.

$$- \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} \right) z = 0 \implies \begin{cases} \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (80)$$

Esto implica que **no hay puntos de equilibrio fuera del plano orbital del secundario alrededor del primario**. Esto tiene todo el sentido del mundo en realidad, pues con el primario y secundario en el mismo plano, sus campos gravitatorios siempre se superpondrán para producir una componente de la fuerza que “tire” hacia el plano en el que se mueven.

De esta forma, el sistema de ecuaciones puede reducirse a dos solamente, y las expresiones para ρ_1 y ρ_2 se pueden simplificar. El sistema que hay que estudiar ahora es, pues, el de la Ecuación 81.

$$\begin{cases} \mu - \frac{\mu}{\rho_1^3} - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) (x - \mu) = 0 \\ - \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x + 1 - \mu)^2 + y^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(x - \mu)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (81)$$

Volviendo a la aproximación metodica como antes, voy a empezar por la segunda ecuación, que es más sencilla que la primera. Para que se cumpla, uno de los dos factores tiene que ser 0, tal y como se ve en la Ecuación 82. Voy a empezar por el primero. Y fíjate tú que conveniente, que aparece tal cual en la primera ecuación también.

$$- \left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 \right) y = 0 \implies \begin{cases} \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (82)$$

Imponiendo esta condición, y sustituyéndola en la primera ecuación, el sistema se reduce al de la Ecuación 83. El término μ/ρ_1^3 se puede despejar de la primera ecuación y sustituir en la segunda. Esto resulta en dos ecuaciones totalmente análogas, una en ρ_1 y otra en ρ_2 , tal y como muestra la susodicha ecuación. La solución es, pues, única en ρ_1 y ρ_2 . Esta es una solución para la que tanto x e y pueden ser distintos de 0, pues no he asumido eso en ningún momento (la x ha desaparecido de la primera ecuación porque he asumido que el factor que la multiplicaba era 0).

$$\begin{cases} \mu - \frac{\mu}{\rho_1^3} = 0 \\ \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3} - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\mu}{\rho_1^3} = \mu \\ \frac{1-\mu}{\rho_2^3} = 1 - \mu \end{cases} \implies \rho_1 = \rho_2 = 1 \quad (83)$$

No sé cómo llevarás la geometría, pero esta solución que he encontrado en la Ecuación 83 representa dos puntos muy concretos. Como ves en la Figura 8, las circunferencias de $\rho_1 = 1$ y $\rho_2 = 1$ solo se cruzan en dos puntos, que están

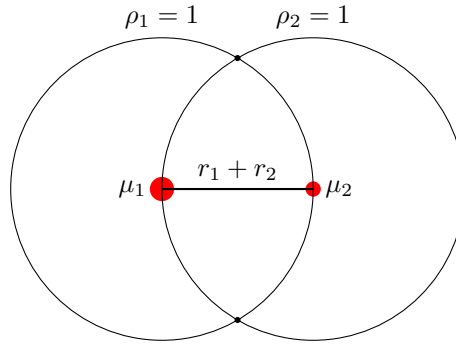


Figura 8: Dibujinchi con la interpretación geométrica de la solución $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Fíjate que siendo este dibujo adimensional, $r_1 + r_2 = 1$

a la misma distancia de los dos cuerpos como los dos cuerpos entre sí. De esta manera, cada punto forma un triángulo equilátero con los dos cuerpos. Las soluciones en términos de x e y quedan entonces recogidas como en la Ecuación 84.

$$x = \cos \frac{\pi}{6} - (1 - \mu) = \mu - \frac{1}{2} \quad y = \pm \sin \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (84)$$

Estas son, pues, las coordenadas de dos puntos de equilibrio, en los cuales todas las aceleraciones se anulan entre sí y, si el terciario llega a ellos con velocidad nula ($\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$), no se moverá de ahí nunca.

Ahora bien, estas son las dos soluciones que salen de considerar la primera posibilidad de la Ecuación 82. Ahora queda analizar el otro caso, es decir, las soluciones que surgen para $y = 0$, si es que las hay. Con $y = z = 0$, estas soluciones se encuentran sobre el eje x , es decir en la línea que une el primario y el secundario. De esta forma, solo se requiere una sola ecuación (la de x en la Ecuación 81), donde además se reducen las expresiones para ρ_1 y ρ_2 a simplemente $\rho_1 = |x + 1 - \mu|$ y $\rho_2 = |x - \mu|$. Sustitución directa de esto en la Ecuación 81 da lugar a la Ecuación 85a, mientras que un poco de manipulación da lugar a la Ecuación 85b, donde α y β son los signos de $x + 1 - \mu$ y $x - \mu$ respectivamente.

$$\mu - \frac{\mu}{|x + 1 - \mu|^3} - \left(\frac{\mu}{|x + 1 - \mu|^3} + \frac{1 - \mu}{|x - \mu|^3} - 1 \right) (x - \mu) = 0 \quad (85a)$$

$$x - \frac{\alpha\mu}{(x + 1 - \mu)^2} - \frac{\beta(1 - \mu)}{(x - \mu)^2} = 0 \quad (85b)$$

Por desgracia, esta es una ecuación de, en última instancia, quinto grado en x (una vez se eliminan los denominadores) que no admite solución general. Sin embargo un análisis de la ecuación (que te dejo en el Apéndice A) permite saber que tiene tres soluciones reales: una en el intervalo $x < -(1 - \mu)$, una en el intervalo $-(1 - \mu) < x < \mu$ y otra en el intervalo $x > \mu$. Esto quiere decir que hay tres puntos de equilibrio en el sistema: uno a la izquierda del primario, otro entre el primario y el secundario, y otro a la derecha del secundario.

Esto choca un poco con lo que una se esperaría de primeras, que viene a ser una única solución entre los dos cuerpos, donde los campos gravitatorios se anulan. Sin embargo, la acción de la fuerza centrífuga se opone ligeramente a la gravedad de ambos cuerpos en las otras regiones del eje x , dando lugar a las dos soluciones extra donde la centrífuga se compensa con la gravedad.

Al final, hemos encontrado cinco puntos de equilibrio: dos para $x, y \neq 0$ y tres para $y = 0$, todos ellos en el plano de la órbita del secundario alrededor del primario ($z = 0$). Estos son los famosos **puntos de Lagrange**, y están numerados tal cual te los pongo en la Figura 9⁷.

El orden de los números tiene su sentido, pero no me voy a meter ahí ahora. Estos puntos de Lagrange son los puntos de equilibrio, esos puntos en los que *un cuerpo con velocidad 0 podría mantenerse ahí indefinidamente sin gasto energético*. Como ves, por una parte son cinco (no uno). Por otra parte, puedes argumentar que el ejercicio pedía el punto L_1 , pero es que el valor no es el mismo. Fíjate que esta solución de L_1 no tiene siquiera expresión cerrada, y la Ecuación 85 tiene que resolverse numéricamente (para pintarte los puntos de la Figura 9, yo usé el Newton-Raphson). Y así quedaría desmentida por fin la segunda mentira que tenía ese ejercicio de Física I que tuviste.

⁷Para la Figura 9 he usado $\mu = 0,7$, o $1 - \mu = 0,3$ para una mejor visualización, pero valores típicos de $1 - \mu$ están muy por debajo de 0,1. Los sistemas Tierra-Luna, Tierra-Sol, Saturno-Titán y Júpiter-Ío, por ejemplo, tienen valores de $1 - \mu$ de 0,012, 3×10^{-6} , $2,4 \times 10^{-4}$ y $4,7 \times 10^{-5}$ respectivamente.

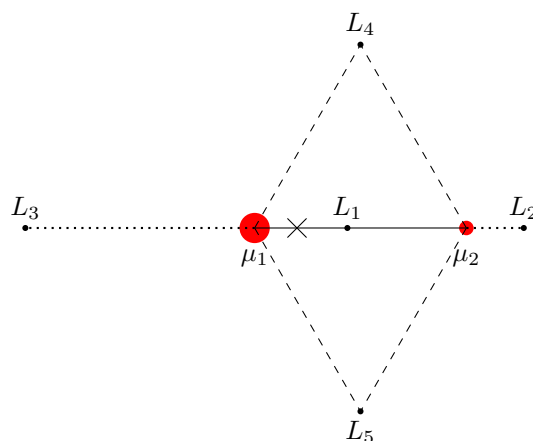


Figura 9: Configuración y numeración de los puntos de Lagrange. La cruz indica el centro de masas del sistema, con el primario y secundario en rojo. Para este ejemplo, $\mu = 0,7$.

9.4. Notas finales

Quiero recalcar que este es un tratamiento muy simple y directo que le he dado, más que nada porque el objetivo era llegar al final. Hay quien me daría una paliza por hablar del problema de los tres cuerpos y los puntos de Lagrange sin hablar de energías, la constante de Jacobi - que es de donde le viene la numeración a los puntos de Lagrange - o las “órbitas halo”, así como de estabilidad más a nivel general, pues los puntos de Lagrange 4 y 5 son equilibrios estables mientras que el resto son equilibrios inestables. Pero chica, no era el punto.

Por otra parte, sí que quiero mencionar los puntos fuertes y sobre todo débiles de esta teoría de 3 cuerpos:

- El modelo dinámico omite todos los cuerpos ajenos al sistema. El movimiento de una astronave estudiado como un problema de tres cuerpos en el sistema Sol-Tierra, por ejemplo, no sirve de mucho, pues tienes muchos otros planetas - más importantemente Mercurio, Venus y Júpiter - que son importantes en la dinámica de la astronave y por tanto este modelo no sería muy bueno. Más concretamente, el sistema joviano presenta muchos cuerpos, por lo que la validez de este modelo dinámico para estudiar un satélite que se mueve entre sus lunas - al igual que el cálculo de los puntos de equilibrio - es más bien regulara.
- No obstante, la situación de solo dos cuerpos es bastante acertada en sistemas como el Tierra-Luna o el Marte-Phobos, donde no hay cuerpos intermedios. De hecho, las primeras trayectorias lunares, al igual que muchas trayectorias dentro del sistema marciano, se estudian - por lo menos en primera aproximación - mediante el problema de tres cuerpos.
- Otra limitación es que la órbita del secundario alrededor del primario se asume perfectamente circular, lo que nunca es el caso. En la realidad, todo cuerpo se mueve en una órbita elíptica alrededor de su cuerpo central.
- Sin embargo, las excentricidades de las órbitas elípticas son extremadamente pequeñas. Por ejemplo, la excentricidad de la órbita lunar es de solo 0,055 (más o menos), la excentricidad de Phobos alrededor de Marte es de 0,015 y la de Ío alrededor de Júpiter es de 0,004. Además, existen (o se pueden desarrollar, si todavía no se ha hecho) correcciones a esta teoría circular que incorporen, al menos *en primer orden*⁸, la excentricidad del secundario alrededor del primario.
- Los cuerpos se asumen perfectamente esféricos, lo cual no suele ser el caso.

Por lo general, y como todo, lo suyo es saber cuándo esta teoría puede ser útil, y hasta qué punto lo que salga de ella va a ser erróneo.

⁸Esto de “a primer orden” te lo vas a encontrar a cascoporro por todos lados, y tiene que ver con la serie de Taylor. Quiere decir que todas las ecuaciones se linealizan (polinomio de grado 1) alrededor de $e = 0$. Siempre que aparezca una potencia de e , se desprecia. Los senos de e se aproximan a e , los cosenos de e se aproximan a 1, etc etc etc

A. Análisis de la Ecuación 85

Aquí te voy a poner el análisis de la Ecuación 85 que lleva a la conclusión de que hay tres soluciones reales. Las soluciones a la Ecuación 85b no son sino las raíces de todo lo que hay a la izquierda, que voy a llamar $f(x)$ (como en la Ecuación 86).

$$f(x) = x - \frac{\alpha\mu}{(x+1-\mu)^2} - \frac{\beta(1-\mu)}{(x-\mu)^2} \quad \alpha = \text{signo}(x+1-\mu) \quad \beta = \text{signo}(x-\mu) \quad (86)$$

Lo primero que se localiza muy rápidamente son las dos asíntotas verticales que tiene esta función, una en $x = -(1-\mu)$ y la otra en $x = \mu$, que se identifican con las posiciones del primario y el secundario. Estas dos asíntotas dividen el espacio en tres regiones, caracterizadas por los valores de α y β . Vayamos una por una.

A.1. Primera región

La primera región, la que más a la izquierda de todas está, tiene $x < -(1-\mu)$, por lo que $\alpha = \beta = -1$, y la función en esta primera región queda definida de la siguiente manera:

$$f(x) = x + \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} \quad (87)$$

Hay dos límites de interés: en $-\infty$ y en la asíntota vertical $x = -(1-\mu)$. El valor de estos dos límites es tal como en la Ecuación 88 (asumo que puedes hacer la comprobación tú solita). Como ves, la función “empieza” en $-\infty$ y “termina” en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -(1-\mu)} f(x) = +\infty \quad (88)$$

Para que esto sea posible, la función tiene que pasar por el 0 un número impar de veces: al menos una, según el teorema de Bolzano, pero se le permite pasar 3 (una para arriba, otra para abajo, y de vuelta para arriba), o cinco, o siete, o nueve... Bueno, en realidad no. La función, recuerda, es de grado 5, así que sólo puede tener un máximo de 5 raíces (y por tanto pasar por el 0 un máximo de 5 veces). Así que la duda está en si la función para por el 0 una, tres o cinco veces.

De momento, esta ambigüedad no se puede resolver (o no la voy a resolver, más bien. Así que pasamos a la segunda región.

A.2. Segunda región

La segunda región, la de medio, comprende el espacio entre el primario y el secundario, y tiene $x > -(1-\mu)$, por lo que $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, y la función en esta segunda región queda definida de la siguiente manera:

$$f(x) = x - \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} + \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} \quad (89)$$

De nuevo hay dos límites de interés, uno en cada asíntota: $x = -(1-\mu)$ y $x = \mu$. El valor de estos dos límites es tal como en la Ecuación 90. Cieriosamente y como en el caso anterior, la función “empieza” en $-\infty$ y “termina” en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -(1-\mu)} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \mu} f(x) = +\infty \quad (90)$$

De esta manera, la misma conclusión que en el caso anterior se saca, y la función tiene una, tres, o cinco raíces en este intervalo. Siempre, eso sí, siendo compatible con el número de raíces que ya había en la región 1 (si había tres raíces, aquí no puede haber otras tres, pues habría seis raíces y eso es más del total máximo de cinco que puede tener la función).

Si poder determinar más allá de esto, pasamos a la siguiente región.

A.3. Tercera región

La tercera región queda a la derecha del secundario y tiene $x > \mu$, por lo que $\alpha = \beta = 1$, y la función en esta tercera región queda definida de la siguiente manera:

$$f(x) = x - \frac{\mu}{(x+1-\mu)^2} - \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} \quad (91)$$

Los límites ahora son para $x = \mu$ y $x = +\infty$, que resultan como en la Ecuación 92.

$$\lim_{x \rightarrow -(1-\mu)} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \mu} f(x) = +\infty \quad (92)$$

Y de nuevo la función tiene un número impar de raíces.

A.4. Solución global

Al poner las tres regiones juntas, sale que todas tienen un número impar de raíces, sumando como máximo cinco raíces en total. Esto quiere decir que todas tienen al menos una raíz, y se permite que una de ellas tengan tres. Para saber cuál de las tres tiene tres raíces - si es que alguna las tiene - voy a hacer lo siguiente.

En cada una de las tres regiones, la función de la Ecuación 86 es continua y diferenciable, así que la voy a diferenciar, teniendo en cuenta que tanto α como β son constantes en cada región. La derivada queda así:

$$f'(x) = 1 + \frac{2\alpha\mu}{(x+1-\mu)^3} + \frac{2\beta(1-\mu)}{(x-\mu)^3} = 1 + \frac{2\mu}{(x+1-\mu)^2} \frac{\alpha}{x+1-\mu} + \frac{2(1-\mu)}{(x-\mu)^2} \frac{\beta}{x-\mu} \quad (93)$$

La segunda forma en que la he escrito no es arbitraria. Mira esas fracciones que he separado. Si te fijas, cada una lleva en el numerador el signo del denominador. Si el denominador es positivo, el numerador es 1 y por tanto la fracción es positiva; pero si el denominador es negativo, el numerador es -1 y la fracción también es positiva. Por tanto estos términos son *siempre* positivos. Y todo lo demás en esa ecuación es positivo también. La conclusión es que $f'(x) > 0$ para todo valor de x , por lo que **la función siempre crece** (lo que algunos llaman una *función estrictamente monotónica creciente*). Esto significa que, en cada región, solo puede cruzar el 0 una única vez - es decir, cada región puede tener un máximo de una raíz.

De esta manera, la función tiene tres raíces, una en cada región. Que son los tres puntos de Lagrange L_1 , L_2 y L_3 .