Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт

по лабораторной работе №3

Название «Обработка разреженных матриц»

Дисциплина «Типы и структуры данных»

Вариант 5

Студент ИУ7-31Б _______________ Корниенко К. Ю.
(подпись, дата) (Фамилия И.О.)

Преподователь _______________ Силантьева А. В.
(подпись, дата) (Фамилия И.О.)

Москва, 2021

Содержание

Введение . . . 3
1 Аналитический раздел . . . 4
1.1 Способы хранения разреженных матриц . . . 4
1.2 Описание условия задачи . . . 4
1.3 Техническое задание . . . 5
1.4 Вывод . . . 5
2 Конструкторский раздел . . . 6
2.1 Описание структур данных . . . 6
2.2 Описание алгоритма . . . 8
2.3 Вывод . . . 8
3 Технологический раздел . . . 9
3.1 Требование к ПО . . . 9
3.2 Реализация алгоритмов . . . 9
3.3 Тестовые данные . . . 12
3.4 Вывод . . . 12
4 Исследовательский раздел . . . 13
4.1 Постановка эксперимента . . . 13
4.2 Технические характеристики . . . 13
4.3 Анализ временной сложности алгоритмов . . . 13
5 Контрольные вопросы . . . 16
Заключение . . . 17

Введение

Матрицы широко используются для представления информации о многих сферах деятельности. Матрицы и эффективные алгоритмы работы с ними применяются в анализе данных и машинном обучении. Часто применяют алгоритмы для работы с **разреженными** матрицами, иными словами матрицами, количество нулевых элементов в которой во много раз превышает количество ненулевых.

Целью данной работы является реализация алгоритмов обработки разреженных матриц, сравнение эффективности использования этих алгоритмов (по времени выполнения и по требуемой памяти) со стандартными алгоритмами обработки матриц при различном процентном заполнении матриц ненулевыми значениями и при различных размерах матриц.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- исследовать подходы к хранению разреженных матриц;
- описать используемые структуры данных;
- описать алгоритм умножения разреженного вектора на разреженную матрицу;
- протестировать разработанное ПО;
- сравнить эффективность по времени и памяти умножения вектора на матрицу в разреженном и классическом представлениях.

1 Аналитический раздел

В данном разделе будет представлены основные сведения о способах хранения разреженных матриц. Также будет описано условие задачи и техническое задание.

1.1 Способы хранения разреженных матриц

Существуют различные методы хранения элементов матрицы в памяти. Например, линейный связный список, т.е. последовательность ячеек, связанных в определенном порядке. Каждая ячейка списка содержит элемент списка и указатель на положение следующей ячейки. Можно хранить матрицу, используя кольцевой связный список, двунаправленные стеки и очереди. Существует диагональная схема хранения симметричных матриц, а также - связные схемы разреженного хранения. Связная схема хранения матриц, предложенная Кнутом, предлагает хранить в массиве (например, в AN) в произвольном порядке сами элементы, индексы строк и столбцов соответствующих элементов (например, в массивах I и J), номер (из массива AN) следующего ненулевого элемента, расположенного в матрице по строке (NR) и по столбцу (NC), а также номера элементов, с которых начинается строка (указатели для входа в строку – JR) и номера элементов, с которых начинается столбец (указатели для входа в столбец - JC). Данная схема хранения избыточна, но позволяет легко осуществлять любые операции с элементами матрицы.

Наиболее широко используемая схема хранения разреженных матриц - это схема, предложенная Чангом и Густавсоном, называемая: "разреженный строчный формат". Эта схема предъявляет минимальные требования к памяти и очень удобна при выполнении операций сложения, умножения матриц, перестановок строк и столбцов, транспонирования, решения систем линейных уравнений, при хранении коэффициентов в разреженных матрицах и т.п. В этом случае значения ненулевых элементов хранятся в массиве AN, соответствующие им столбцовые индексы - в массиве JA. Кроме того, используется массив указателей, например, IA, отмечающих позиции AN и JA, с которых начинаются описание очередной строки. Дополнительная компонента в IA содержит указатель первой свободной позиции в JA и AN.

В связи с тем, что разреженный строчный формат предъявляет минимальные требования к памяти и удобна для операции умножения, в данной лабораторной работе будет использована именно она.

1.2 Описание условия задачи

Разработать программу умножения или сложения разреженных матриц. Предусмотреть возможность ввода данных, как с клавиатуры, так и использования заранее подготовленных данных. Матрицы хранятся и выводятся в форме трех объектов. Для небольших матриц можно дополнительно вывести матрицу в виде матрицы. Величина матриц - любая (допустим, 1000×1000). Сравнить эффективность (по памяти и по времени выполнения) стандартных алгоритмов обработки матриц с алгоритмами обработки разреженных матриц при различной степени разреженности матриц и различной размерности матриц.

1.3 Техническое задание

Разреженная (содержащая много нулей) матрица хранится в форме 3-х объектов:

- вектор A содержит значения ненулевых элементов;
- вектор JA содержит номера столбцов для элементов вектора A;
- связный список IA, в элементе Nk которого находится номер компонент в A и JA, с которых начинается описание строки Nk матрицы A.

1) Смоделировать операцию умножения вектора-строки и матрицы, хранящихся в этой форме, с получением результата в той же форме.
2) Произвести операцию умножения, применяя стандартный алгоритм работы с матрицами.
3) Сравнить время выполнения операций и объем памяти при использовании этих 2-х алгоритмов при различном проценте заполнения матриц.

1.4 Вывод

В данном разделе были описаны способы хранения матриц в памяти и сформулировано техническое задание. В результате анализа способов хранения матриц для реализации операции умножения вектора-строки на матрицу был выбран разреженный строчный формат хранения.

2 Конструкторский раздел

В данном разделе будут описаны используемые структуры данных, приведен список функций для работы с данными типами. Также будет описан алгоритм умножения разреженных матриц.

2.1 Описание структур данных

Ниже, на листинге 2.1 представлены коды возможных ошибок.

Листинг 2.1 — Коды ошибок

```
#define SUCCESS     0   // Успешное выполнение
#define MEM_ERR     1   // Ошибка памяти
#define INP_ERR     2   // Ошибка ввода
#define BAD_MATRIX  3   // Некорректная матрица
#define BAD_PERCENT 4   // Некорректный процент заполнения
#define ARGS_ERR    5   // Некорректные аргументы, переданные в функцию
#define MUL_ERR     6   // Матрицы невозможно перемножить
#define BAD_VECTOR  7   // Вектор некорректен
#define BAD_FILE    8   // Файл некорректен
```

Ниже, на листинге 2.2 представлены сокращения используемых типов данных.

Листинг 2.2 — Используемые типы

```
typedef double data_t;
typedef unsigned int id_t;
```

Ниже, на листинге 2.3 представлена структура связного списка.

Листинг 2.3 — Связный список и функции для работы с ним

```
typedef struct node
{
    id_t col_index;    // индекс столбца
    struct node* next; // следующий элемент
} node_t;

typedef struct list
{
    node_t* head;   // указатель на голову
} list_t;
```

На листинге 2.4, представленном ниже, описана структура разреженной матрицы и функции для работы с ней.

Листинг 2.4 — Разреженная матрица и функции для работы с ней

```
typedef struct smatrix
{
    id_t rows;
    id_t cols;
```

```c
    id_t size;

    data_t* A;
    id_t* JA;
    list_t IA;
} smatrix_t;

// Представление разреженной матрицы по-умолчанию
smatrix_t smat_null(void);

// Проверка на корректность разреженной матрицы
bool smat_is_valid(const smatrix_t* mat);

// Освобождение памяти
void smat_destroy(smatrix_t* mat);

// Получение элемента по индексам
data_t smat_get(const smatrix_t* mat, id_t row, id_t col);
```

Ниже, на листинге 2.5 представлено описание структуры классической матрицы и функции для работы с ней.

Листинг 2.5 — Классическое представление матрицы и функции для работы с ней

```c
typedef struct stdmat
{
    id_t rows;
    id_t cols;
    data_t** data;
} stdmat_t;

// Инициализация по-умолчанию
stdmat_t stdm_null(void);

// Нулевая матрица заданного размера
stdmat_t stdm_zero(id_t rows, id_t cols);

// Освобождение памяти
void stdm_destroy(stdmat_t* mat);

// Проверка на корректность данных в матрице
bool stdm_is_valid(const stdmat_t* mat);

// Проверка на возможность перемножить две матрицы
bool stdm_is_multable(const stdmat_t* left, const stdmat_t *right);

// Случайная матрица
int stdm_randomize(stdmat_t* mat, double zero_percent);
```

Ниже, на листинге 2.6 представлены операции над матрицами.

Листинг 2.6 — Функции умножения матриц

```
// Умножение вектора-строки на матрицу в обычной форме
int std_mul(stdmat_t *res, const stdmat_t *v, const stdmat_t *m);

// Умножение вектора-строки на матрицу в разреженной форме
int sparse_mul(smatrix_t *res, const smatrix_t *v, const smatrix_t *m);
```

2.2 Описание алгоритма

Для умножения вектора-строки на разреженнную матрицу исходная матрица сначала транспонируется, затем применяется операция скалярного произведения вектора-строки на каждую строку из разреженной матрицы. Для сокращения операций хранится расширенный массив указателей IP. При этом умножаются только ненулевые элементы.

2.3 Вывод

В данном разделе были представлены используемые структуры данных, а также описан алгоритм умножение разреженного вектора-строки на разреженную матрицу.

3 Технологический раздел

В данном разделе будут представлены листинги кодов реализации операции умножения двух матриц в классическом и разреженном представлении и произведено тестирование ПО.

3.1 Требование к ПО

К программе предъявлены следующие требования:

- на вход программе подаются количество столбцов и количество ненулевых элементов вектора-строки, размерность матрицы и количество ненулевых элементов в ней;
- на выходе – матрица, которая является результатом умножения входных вектора-строки и матрицы.

3.2 Реализация алгоритмов

Ниже, на листинге 3.1 представлены реализации умножение матриц, представленных классически, и разреженных матриц.

Листинг 3.1 — Реализация умножения матриц

```
int std_mul(stdmat_t *res, const stdmat_t *v, const stdmat_t *m)
{
    if (res == NULL)
        return ARGS_ERR;

    if (!stdm_is_valid(m) || !stdm_is_valid(v))
        return BAD_MATRIX;

    if (!stdm_is_multable(v, m))
        return MUL_ERR;

    if (v->rows != 1)
        return BAD_VECTOR;

    *res = stdm_zero(v->rows, m->cols);

    if (!stdm_is_valid(res))
        return MEM_ERR;

    for (unsigned int col = 0; col < v->cols; col++)
        for (unsigned int row = 0; row < m->rows; row++)
            res->data[0][col] += v->data[0][row] * m->data[row][col];

    return SUCCESS;
}

static stdmat_t _std_transpose(stdmat_t *src)
```

```
{
    stdmat_t res = stdm_zero(src->cols, src->rows);

    for (id_t col = 0; col < src->cols; col++)
        for (id_t row = 0; row < src->rows; row++)
            res.data[col][row] = src->data[row][col];

    return res;
}

static smatrix_t _transpose(const smatrix_t *src)
{
    stdmat_t res = stdm_null();
    smatrix_t sres = smat_null();

    smat_to_stdm(&res, src);
    stdmat_t rest = _std_transpose(&res);
    stdm_to_smat(&sres, &rest);

    stdm_destroy(&res);
    stdm_destroy(&rest);

    return sres;
}

static smatrix_t _preinit_rowvec(id_t size)
{
    smatrix_t res = smat_null();

    res.rows = 1;
    res.cols = size;

    res.A = malloc(size * sizeof(data_t));
    if (res.A != NULL)
    {
        res.JA = malloc(size * sizeof(id_t));
        if (res.JA != NULL)
        {
            res.IA = lst_reserve(2, 0);
            if (res.IA.head != NULL)
            return res;

            free(res.JA);
        }

        free(res.A);
    }
```

```c
    return smat_null();
}

int sparse_mul(smatrix_t *res, const smatrix_t *v, const smatrix_t *m)
{
    if (res == NULL)
        return ARGS_ERR;

    if (!smat_is_valid(v) || !smat_is_valid(m))
        return BAD_MATRIX;

    if (v->rows != 1 || v->cols != m->rows)
        return MUL_ERR;

    *res = _preinit_rowvec(m->cols);
    if (!smat_is_valid(res))
        return MEM_ERR;

    int *IP = malloc(v->cols * sizeof(int));
    if (IP == NULL)
    {
        smat_destroy(res);
        return MEM_ERR;
    }

    for (id_t i = 0; i < v->cols; i++)
        IP[i] = -1;

    for (id_t i = 0; i < v->size; i++)
        IP[v->JA[i]] = i;

    smatrix_t mt = _transpose(m);
    node_t *IA_node = mt.IA.head;
    for (id_t row = 0; row < mt.rows; row++)
    {
        // index - позиция первого ненулевого элемента в массиве A в строке row матрицы mt
        // index_last - позиция первого ненулевого элемента в массиве A в следующей строке за row
        id_t index = IA_node->col_index;
        id_t index_last = IA_node->next->col_index;

        data_t sum = 0;

        // цикл по всем ненулевым элементам строки row матрицы mt
        for (; index < index_last; index++)
```

```
        {
            int col = IP[mt.JA[index]];
            // если соответствующий элемент в IP не равен -1 -> умножаем
            if (col != -1)
            sum += mt.A[index] * v->A[col];
        }

        // установка результата в результирующий вектор
        if (sum != 0)
        {
            res->A[res->size] = sum;
            res->JA[res->size] = row;
            res->size++;
        }

        IA_node = IA_node->next;
    }

    // обновление последнего элемента в списке IA
    res->IA.head->next->col_index = res->size;

    smat_destroy(&mt);
    free(IP);
    return SUCCESS;
}
```

3.3 Тестовые данные

В таблице 3.1 приведены тесты для функции умножения разреженных вектора-строки на матрицу.

Вектор-строка	Матрица	Ожидаемый результат

Таблица 3.1 — Тестовые данные

3.4 Вывод

В данном разделе были разработаны исходные коды алгоритмов: умножение матриц в классическом представлении и в разреженном виде.

4 Исследовательский раздел

В данном разделе будут проведено сравнение работы алгоритмов умножения матриц и разреженных матриц, а также представлены графики сравнительного анализа.

4.1 Постановка эксперимента

Объектом для постановки эксперимента является влияние размерности матрицы на время работы алгоритма и сравнение временной эффективности умножения матриц в классическом представлении и в разреженном виде.

Эксперимент проводится на квадратных матрицах размером от 50×50 до 300×300 с шагом 50. Планируется сделать 50 замеров, на основании которых результат для каждой размерности будет усреднен.

4.2 Технические характеристики

Ниже приведены технические характеристики устройства, на котором было проведено тестирование ПО:

- операционная система: Ubuntu Linux 20.04 64-bit;
- оперативная память: 16 GB;
- процессор: AMD Ryzen 5 3500U with Radeon Vega Mobile Gfx @ 8x 2,1GHz.

4.3 Анализ временной сложности алгоритмов

Ниже, на рисунках 4.1 и 4.2 представлена зависимость времени умножения матриц от размерности массива для классического представления матриц и для разреженных матриц.

Исходя из приведенных ниже графиков можно сделать вывод, что умножение матриц в разреженном строчном формате эффективнее обычного только если процент разреженности матрицы превышает 30-40%.

Рисунок 4.1 — График зависимости времени от размерности матрицы при разреженности 20%

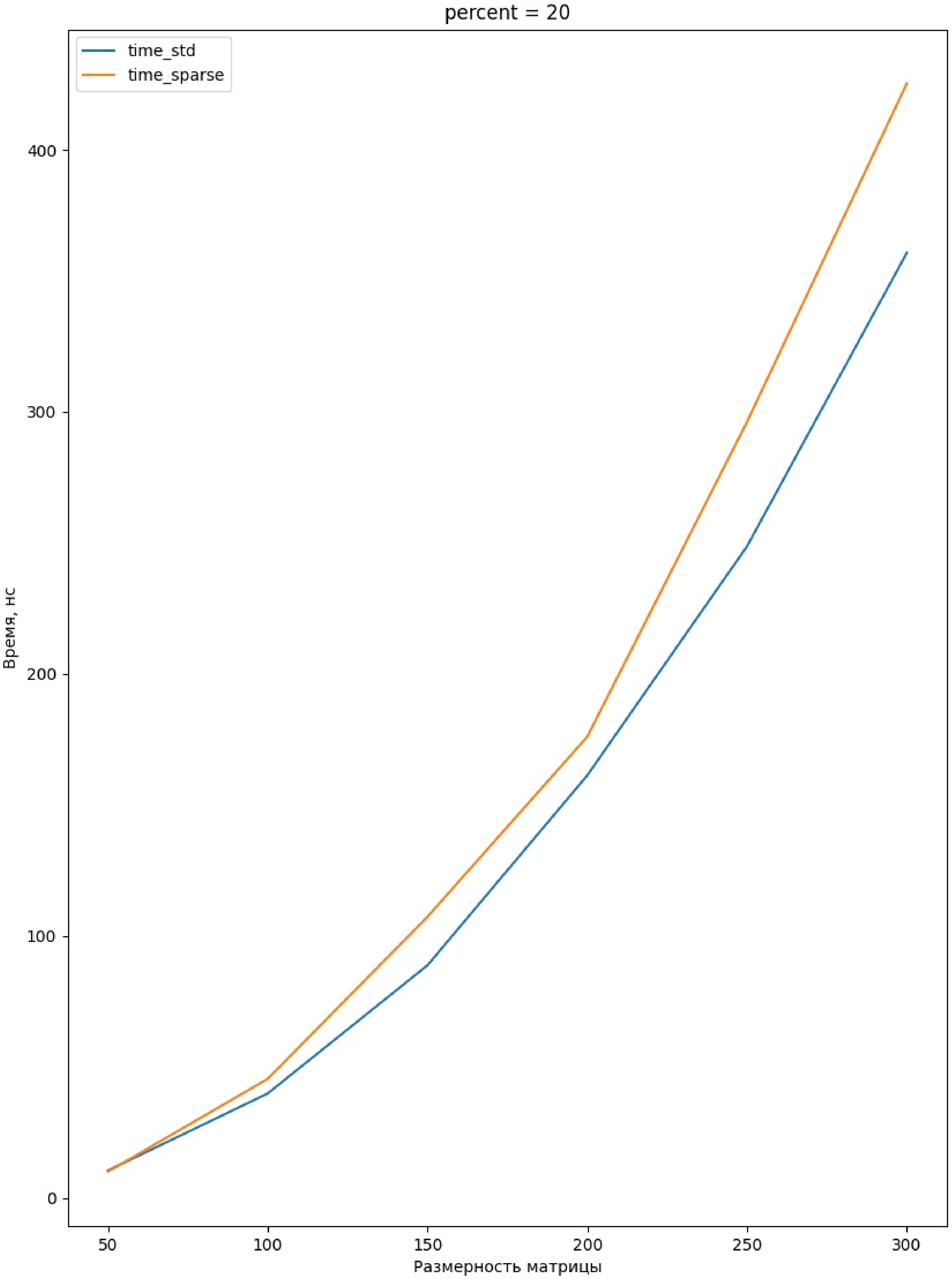
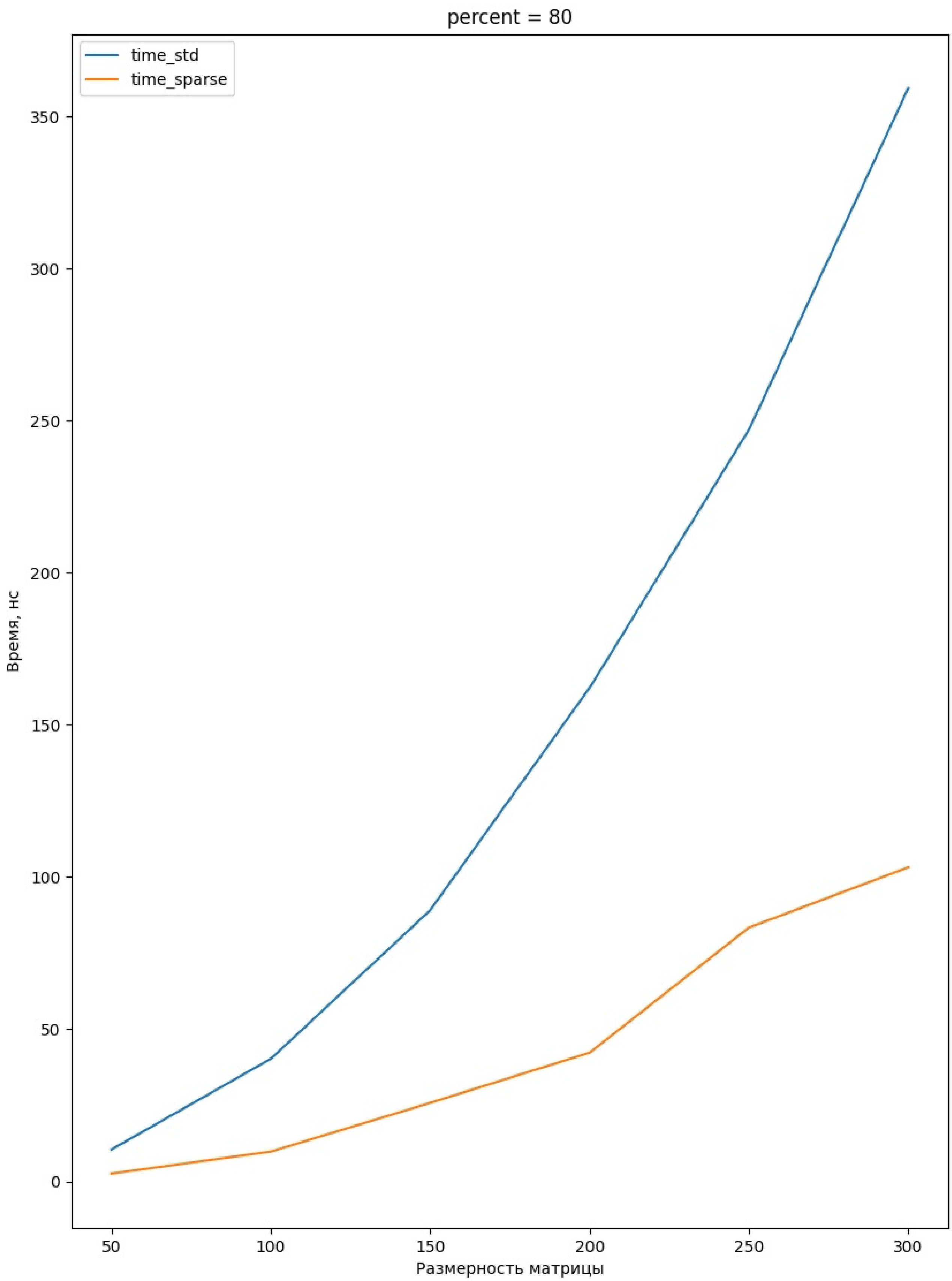


Рисунок 4.2 — График зависимости времени от размерности матрицы при разреженности 80%



5 Контрольные вопросы

1) Что такое разреженная матрица, какие схемы хранения таких матриц Вы знаете?

Разреженная матрица это структура данных, в которой хранятся только ненулевые элементы матрицы, и информация об их позиции в матрице. Такой информацией может быть, например явное указание строки и столбца (координатная форма), а может быть только индекс строки, но вместе с ненулевыми элементами тогда хранится список индексов элементов с которых начинается тот или иной столбец в матрице (Йельский формат). Также, в ряде случаев работа происходит только с симметричными матрицами. Тогда нам достаточно хранить только половину от всех ненулевых элементов матрицы. Существует и множество других форматов, которые разрабатывались для определённой конфигурации матриц, и подходящие для очень узкого круга задач, например, можно хранить матрицу блоками.

2) Каким образом и сколько памяти выделяется под хранение разреженной и обычной матрицы?

Для хранения матрицы в обычном представлении память выделяется сразу под все элементы матрицы. Для хранения разреженной матрицы память выделяется по мере необходимости и только для ненулевых элементов матрицы. При этом, для хранения одного элемента в разреженном формате требуется больше памяти, чем в обычном. Тем не менее, при малой заполненности матрицы хранение только ненулевых элементов становится выгоднее.

3) Каков принцип обработки разреженной матрицы?

Принцип обработки разреженной матрицы заключается в том, чтобы обходить только ненулевые элементы матрицы, а не все возможные, тем самым облегчая сложность алгоритма с $O(N^2)$ до $O(K)$ где N - размерность матрицы, а K - число ненулевых элементов в ней.

4) В каком случае для матриц эффективнее применять стандартные алгоритмы обработки матриц? От чего это зависит?

Это зависит от выбранного формата хранения разреженной матрицы, а также в неменьшей степени от процента заполненности матрицы. Чем он меньше (разреженность выше), тем эффективнее использование алгоритмов, работающих с разреженными матрицами. Однако, если процент разреженности матрицы не превосходит $30-40\%$ то стандартные алгоритмы обработки оказываются не только проще, но и эффективнее нестандартных.

Заключение