Nombre: | Día | Mes | Año | Folio

Tarea 9
Ecuación de Cauchy-Euler.

EJERCICIOS 6.1

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 592

En los Problemas 1-22 resuelva la ecuación diferencial dada.

1. $x^2y'' - 2y = 0$
2. $4x^2y'' + y = 0$
3. $xy'' + y' = 0$
4. $xy'' - y' = 0$
5. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
6. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$
7. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$
8. $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$
9. $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$
10. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$
11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$
13. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
14. $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$
15. $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$
16. $2x^2y'' + xy' + y = 0$
17. $x^3y''' - 6y = 0$
18. $x^3y''' + xy' - y = 0$
19. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$
20. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$
21. $x\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$
22. $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 9x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

En los Problemas 23-26 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

23. $x^2y'' + 3xy' = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 4$
24. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0, \quad y(2) = 32, y'(2) = 0$
25. $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 2$
26. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 5, y'(1) = 3$

En los Problemas 27-28 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales indicadas. [*Sugerencia:* Sea $t = -x$.]

27. $4x^2y'' + y = 0, \quad y(-1) = 2, y'(-1) = 4$
28. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(-2) = 8, y'(-2) = 0$

Resuelva los Problemas 29-34 mediante variación de parámetros.

29. $xy'' + y' = x$
30. $xy'' - 4y' = x^4$
31. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
32. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$
33. $x^2y'' - xy' + y = 2x$
34. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$

En los Problemas 35-40 resuelva la ecuación diferencial dada en términos de la sustitución $x = e^t$.

35. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 10x \dfrac{dy}{dx} + 8y = x^2$

36. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$

37. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$

38. $2x^2y'' - 3xy' - 3y = 1 + 2x + x^2$

39. $x^2y'' + 9xy' - 20y = 5/x^3$

40. $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x \dfrac{dy}{dx} - 6y = 3 + \ln x^3$

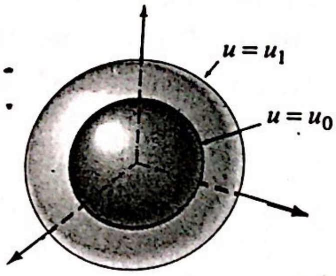

Figura 6.2

41. Considere dos esferas concéntricas de radio $r = a$ y $r = b$, $a < b$, como se muestra en la Figura 6.2. La temperatura $u(r)$ en la región entre las dos esferas se determina a partir del problema de valores en la frontera

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + 2 \frac{du}{dr} = 0, \qquad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Obtenga $u(r)$.

42. La temperatura $u(r)$ en el anillo circular mostrado en la Figura 6.3 se determina a partir del problema de valores en la frontera

$$r \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \qquad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Demuestre que

$$u(r) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

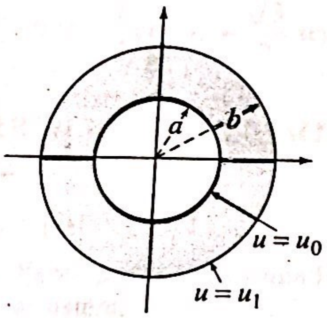

Figura 6.3

En los Problemas del 43-45 resuelva la ecuación diferencial dada.

43. $(x-1)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2(x-1) \dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$ [*Sugerencia*: Sea $t = x - 1$.]

44. $(3x+4)^2y'' + 10(3x+4)y' + 9y = 0$

45. $(x+2)^2y'' + (x+2)y' + y = 0$

6.2 REPASO DE SERIES DE POTENCIAS; SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

Repaso de series de potencias

No obstante lo presentado en la sección anterior, la mayoría de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables no pueden resolverse en términos de funciones elementales. Una técnica estándar para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes variables es tratar de encontrar una solución en forma de series infinitas. Con frecuencia la solución puede encontrarse en forma de series de potencias. Debido a esto, es apropiado mencio-

7. $q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$;
$i(t) = 60e^{-3t} \operatorname{sen} 3t$; 10.432 coulombs

9. $q_p = \frac{100}{13} \operatorname{sen} t + \frac{150}{13} \cos t$
$i_p = \frac{100}{13} \cos t - \frac{150}{13} \operatorname{sen} t$

13. $q(t) = -\frac{1}{2}e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$ coulombs

15. Demuestre que $dZ/dC = 0$ cuando $C = 1/L\gamma^2$. En este valor, Z es mínima y, en forma correspondiente, la amplitud E_0/Z es un máximo.

17. $$q(t) = \left(q_0 - \frac{E_0 C}{1 - \gamma^2 LC}\right) \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + \sqrt{LC}\, i_0 \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{E_0 C}{1 - \gamma^2 LC} \cos \gamma t;$$
$$i(t) = i_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(q_0 - \frac{E_0 C}{1 - \gamma^2 LC}\right) \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{E_0 C \gamma}{1 - \gamma^2 LC} \operatorname{sen} \gamma t$$

19. $\theta(t) = \frac{1}{2} \cos 4t + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 4t$; 1; $\pi/2$; $2/\pi$

EJERCICIOS DE REPASO ■ Capítulo 5, Pág. 242

1. 8 pie 3. 5/4 m

5. Falso; puede existir una fuerza aplicada que impulse al sistema.

7. sobreamortiguado 9. 9/2 lb/pie

11. $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$ 13. $0 < m \le 2$

15. $\gamma = 8\sqrt{3}/3$

17. $$x(t) = e^{-4t} \times \left(\frac{26}{17} \cos 2\sqrt{2}t + \frac{28\sqrt{2}}{17} \operatorname{sen} 2\sqrt{2}t\right) + \frac{8}{17} e^{-t}$$

19. (a) $q(t) = -\dfrac{1}{150} \operatorname{sen} 100t + \dfrac{1}{75} \operatorname{sen} 50t$
(b) $i(t) = -\dfrac{2}{3} \cos 100t + \dfrac{2}{3} \cos 50t$
(c) $t = n\pi/50$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

EJERCICIOS 6.1, Pág. 257

Soluciones de tarea 14

1. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$ 3. $y = c_1 + c_2 \ln x$

5. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)$

7. $y = c_1 x^{(2-\sqrt{6})} + c_2 x^{(2+\sqrt{6})}$

9. $y_1 = c_1 \cos(\frac{1}{5} \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{5} \ln x)$

11. $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x$

13. $y = x[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)]$

15. $y = x^{-1/2}\left[c_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} \ln x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6} \ln x\right)\right]$

17. $y = c_1 x^3 + c_2 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x)$

19. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + c_3 x^4$

21. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^{-3}$

23. $y = 2 - 2x^{-2}$

25. $y = \cos(\ln x) + 2 \operatorname{sen}(\ln x)$

27. $y = 2(-x)^{1/2} - 5(-x)^{1/2} \ln(-x)$

29. $y = c_1 + c_2 \ln x + \dfrac{x^2}{4}$

31. $y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$

33. $y = c_1 x + c_2 x \ln x + x(\ln x)^2$

35. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-8} + \frac{1}{30}x^2$

37. $y = x^2[c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3 \ln x)] + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x$

39. $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-10} - \frac{1}{7}x^{-3}$

41. $u(r) = \left(\dfrac{u_0 - u_1}{b - a}\right)\dfrac{ab}{r} + \dfrac{u_1 b - u_0 a}{b - a}$

43. $y = c_1(x-1)^{-1} + c_2(x-1)^4$

45. $y = c_1 \cos(\ln(x+2)) + c_2 \operatorname{sen}(\ln(x+2))$

EJERCICIOS 6.2, Pág. 267

1. $(-1, 1]$ 3. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 5. $[2, 4]$

7. $(-5, 15)$ 9. $\{0\}$

11. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$

13. $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{4}{315}x^7 + \cdots$

15. $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 - \frac{44}{105}x^8 + \cdots$

17. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

19. $1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{24}x^6 - \cdots$

21. $y = ce^{-x}$; $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n$

23. $y = ce^{x^3/3}$; $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)^n$

25. $y = c/(1-x)$; $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$