INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO.

"ESCOM"

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERÍA.

PROGRAMA SINTÉTICO

OBJETIVO GENERAL:

APLICAR LAS HERRAMIENTAS DE LA MATEMÁTICA AVANZADA HACIENDO USO DE LOS ELEMENTOS BÁSICOS DEL CÁLCULO DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA, ASÍ COMO LAS TRANSFORMADAS INTEGRALES MAS IMPORTANTES EN EL CAMPO DE LAS CIENCIAS COMPUTACIONALES.

CONTENIDOS:

I VARIABLE COMPLEJA.

II SERIES DE FOURIER.

III TRANSFORMADA DE FOURIER.

BIBLIOGRAFÍA.

- PETER V. O'NEIL, MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA SÉPTIMA EDICIÓN. EDITORIAL CENGAGE LEARNING.

- PETER V. O'NEIL, MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA VOLUMEN 2 EDITORIAL CECSA.
- MURRAY R. SPIGEL, VARIABLE COMPLEJA EDITORIAL SCHAUM.
- DENNIS G. ZILL, INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS COMPLEJO CON APLICACIONES EDITORIAL CENGAGE LEARNING.
- HWEI P. HSU, ANÁLISIS DE FOURIER EDITORIAL FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO
- CHARLES K. ALEXANDER, FUNDAMENTOS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EDITORIAL Mc Graw Hill Education.
- RICHARD C. DORF, CIRCUITOS ELÉCTRICOS EDITORIAL ALFAOMEGA.
- MANUAL DE FÓRMULAS Y TABLAS MATEMÁTICAS MURRAY R. SPIGEL SCHAUM.

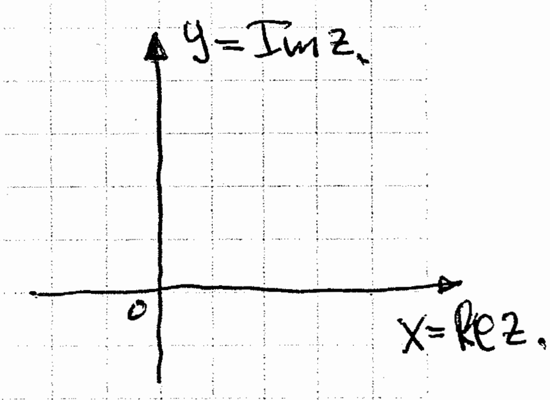
NÚMEROS COMPLEJOS $\mathbb{C}$.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS FUERON PROPUESTOS INICIALMENTE EN 1545, POR EL MATEMÁTICO ITALIANO GIROLAMO CARDANO.

POSTERIORMENTE, EL MATEMÁTICO CARL FRIEDRICH GAUSS LES DIO EL NOMBRE ACTUAL Y LAS UTILIZÓ PARA DEMOSTRAR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA (TODO POLINOMIO QUE NO SEA CONSTANTE TIENE ALMENOS UN CERO).

DEF: UN NÚMERO COMPLEJO z ES UNA PAREJA ORDENADA (x,y) TAL QUE $x,y \in \mathbb{R}$, SE ESCRIBE:

$$z=(x,y)=x+iy.$$



DONDE:

$x = \operatorname{Re} z =$ PARTE REAL.

$y = \operatorname{Im} z =$ PARTE IMAGINARIA.

i ES LA UNIDAD IMAGINARIA QUE SATISFACE LA CONDICIÓN $i^2=-1$.

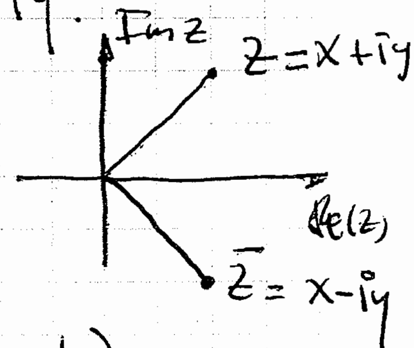
$$\therefore \quad i=\sqrt{-1}.$$

EJEMPLOS:

- $\sqrt{4} = 2$.
- $\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4(-1)} = \pm\sqrt{4}\,\sqrt{-1} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$.
- DOS NÚMEROS COMPLEJOS $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ SON IGUALES SI Y SÓLO SI (SSI) SUS PARTES REALES Y SUS PARTES IMAGINARIAS SON RESPECTIVAMENTE IGUALES.

- CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO z.

DEF: DADO UN NÚMERO COMPLEJO $z = x + iy$, SE DEFINE EL CONJUGADO DE z COMO $\overline{z} = x - iy$.



EJEMPLOS:

$$z = 3 - \frac{1}{4}i \Rightarrow \overline{z} = 3 + \frac{1}{4}i = \left(3, \frac{1}{4}\right)$$

$$z = -3 + \frac{1}{4}i \Rightarrow \overline{z} = -3 - \frac{1}{4}i = \left(-3, -\frac{1}{4}\right)$$

$$z = 2 \Rightarrow \overline{z} = 2 = (2, 0)$$

$$z = -2i \Rightarrow \overline{z} = 2i = (0, -2)$$

CONCLUSIÓN, SE LE CAMBIA DE SIGNO SÓLO A LA PARTE IMAGINARIA DE z.

• OPERACIONES ARITMÉTICAS DE Z.

ADICIÓN.

LA SUMA z_1+z_2 SE PUEDE ESCRIBIRSE:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+iy_1+iy_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$\therefore\ z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

SUSTRACCIÓN.

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

MULTIPLICACIÓN.

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)$$

DIVISIÓN.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

• DEMOSTRAR:

ⓐ $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)$

DEMOSTRACIÓN ⑥

SEAN: $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$ E $i^2 = -1$.

$$z_1 z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2)$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - y_1 y_2$$

AGRUPANDO PARTE REAL E IMAGINARIA, RESPECTIVAMENT

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$$\therefore z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2).$$

■

ⓑ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2}\,\frac{x_2 - i y_2}{x_2 - i y_2} = \frac{(x_1 + i y_1)(x_2 - i y_2)}{(x_2 + i y_2)(x_2 - i y_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 - i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - i^2 y_1 y_2}{(x_2)^2 - (i y_2)^2}, \qquad i^2 = -1$$

EL DENOMINADOR ES: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$,

DONDE $A = x_2$, $B = i y_2$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2-(-1)y_1y_2}{x_2^2-i^2y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2+y_1y_2}{x_2^2-(-1)y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2-ix_1y_2+iy_1x_2}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

$$\therefore\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

$\blacksquare$

EJEMPLOS.

1). REDUCIR LOS SIGUIENTES NÚMEROS COMPLEJOS A LA FORMA

$$z=x+iy=(x,y).$$

1) $(3+2i)+(-7-i)=3+2i-7-i=3-7+2i-i=-4+i$

$$\therefore\ (3+2i)+(-7-i)=-4+i=(-4,1)$$

2) $(-7-i)+(3+2i)=-7-i+3+2i=-7+3-i+2i=-4+i$

$$\therefore\ (-7-i)+(3+2i)=-4+i=(-4,1)$$

VERIFICAMOS LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA SUMA.

$$(3+2i)+(-7-i)=(-7-i)+(3+2i)$$

3) $(5+3i)+[(-1+2i)+(7-5i)]$.

SOL:

$(5+3i)+[-1+2i+7-5i] = 5+3i+[-1+7+2i-5i]$

$= 5+3i+[6-3i] = 5+3i+6-3i = 11+0 = 11 = (11,0)$

$\therefore (5+3i)+[(-1+2i)+(7-5i)] = 11 = 11+i(0) = (11,0)$

4) $(2-i)[(-3+2i)(5-4i)]$,

SOL: $(2-i)[(-3+2i)(5-4i)] = (2-i)[-15+12i+10i-8i^2]$

$= (2-i)[-15+12i+10i-8(-1)] = (2-i)[-15+12i+10i+8]$

$= (2-i)[-15+8+12i+10i] = (2-i)[-7+22i]$

$= -14+44i+7i-22i^2 = -14+44i+7i-22(-1) = -14+44i+7i+22$

$= -14+22+44i+7i = 8+51i = (8,51)$

$\therefore (2-i)[(-3+2i)(5-4i)] = 8+51i = (8,51)$

5) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$

SOL:

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=\frac{5+5i}{3-4i}\,\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{20}{4+3i}\,\frac{4-3i}{4-3i}$$

$$=\frac{15+20i+15i+20i^2}{3^2-(4i)^2}+\frac{80-60i}{4^2-(3i)^2}$$

$$=\frac{15+35i+(20)(-1)}{9-16i^2}+\frac{80-60i}{16-9i^2}$$

$$=\frac{15+35i-20}{9+16}+\frac{80-60i}{16+9}=\frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}$$

$$=\frac{-5+35i+80-60i}{25}=\frac{-5+80+35i-60i}{25}=\frac{75-25i}{25}$$

$$=\frac{75}{25}-\frac{25}{25}i=3-i=(3,-1)$$

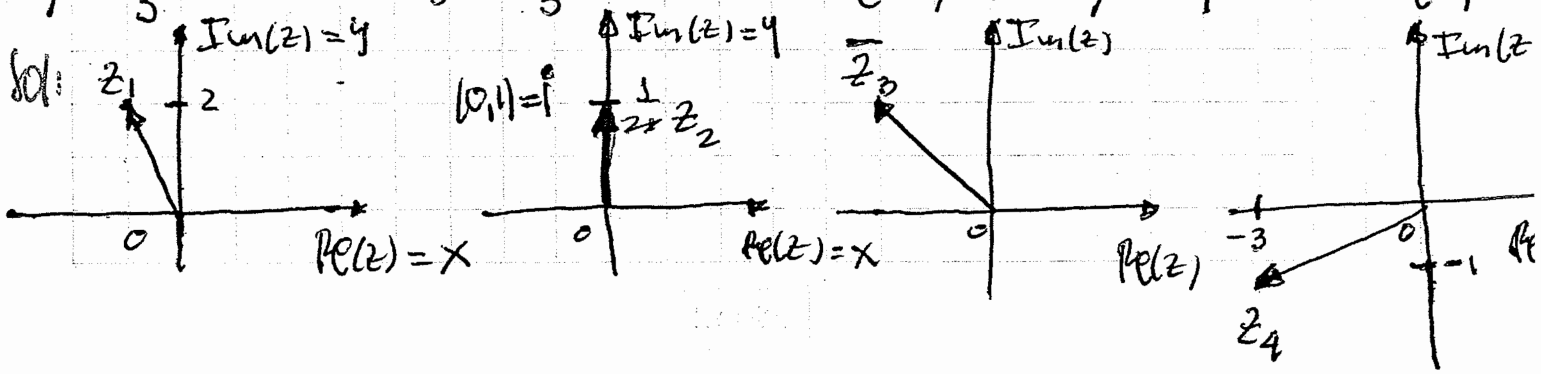
$$\therefore\ \frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=3-i=(3,-1)$$

② • REPRESENTAR GRAFICAMENTE LOS SIGUIENTES NUMEROS COMPLEJ

1) $z_1=-1+2i=(-1,2)$ 2) $z_2=0x+i=0+i=i=(0,1)$.

3) $z_3=-2-2i \Rightarrow \overline{z}_3=-2+2i=(-2,2)$ 4) $z_4=-3-i=(-3,-1)$

SOL:



• PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS.

A PARTIR DE LAS CONOCIDAS LEYES DE LOS NÚMEROS REALES, SE OBTIENEN LAS LEYES SIGUIENTES PARA CUALESQUIERA NÚMEROS COMPLEJOS z_1, z_2, z_3 Y $z \in \mathbb{C}$ TAL QUE $-z = -x - iy$.

• LEYES CONMUTATIVAS

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

• LEYES ASOCIATIVAS

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

• LEY DISTRIBUTIVA.

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

• 0 COMO IDENTIDAD RESPECTO A LA SUMA.

$$0 + z = z + 0 = z.$$

• 1 COMO IDENTIDAD RESPECTO DE LA MULTIPLICACIÓN.

$$1 . z = z . 1 = z.$$

• $-z$ ES EL INVERSO DE z RESPECTO A LA SUMA.

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

POR LO VISTO ANTERIORMENTE SEA $z \in \mathbb{C}$, ENTONCES $x-iy$ SE LLAMA CONJUGADO DE z Y SE DENOTA POR $\bar{z}$; ESTO ES:

$$z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy.$$

- ALGUNAS PROPIEDADES DE $\bar{z}$.

- $z+\bar{z} = 2x$
- $z-\bar{x} = 2yi$
- $x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$.
- $y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

DEMOSTRAR QUE:

$$\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = y = \operatorname{Im}(z).$$

PRUEBO:

$$\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}(x+iy-(x-iy)) = \frac{1}{2i}(x+iy-x+iy)$$

$$= \frac{1}{2i}(x-x+iy+iy) = \frac{1}{2i}(2iy) = y = \operatorname{Im}(z)$$

$$\therefore \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = y = \operatorname{Im}(z).$$

$\blacksquare$

COMENTARIO.

EN PARTICULAR, PARA UN NÚMERO REAL $z=x$ SE TIENE $z=\bar{z}$.

PARA $z=0+iy$ SE TIENE $\bar{z}=-z$. UN NÚMERO DE ESTE TIPO, CUYA PARTE REAL ES CERO SE LLAMA NÚMERO IMAGINARIO PURO; CORRESPONDE A UN PUNTO SOBRE EL EJE IMAGINARIO $Im(z)$.

- $\overline{(z_1+z_2)}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.
- $\overline{(z_1-z_2)}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.
- $\overline{(z_1 z_2)}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

PROPIEDADES IMPORTANTES DE $i^2=-1$.

(A) $i^2=-1 \therefore i^{2n}=(i^2)^n=(-1)^n=\begin{cases}1 \text{ si } n \text{ PAR}\\ -1 \text{ si } n \text{ IMPAR.}\end{cases}$

(B) $i^{2k+1}=i(i)^{2k}=i(i^2)^k=i(-1)^k=\begin{cases}i \text{ si } k \text{ PAR}\\ -i \text{ si } k \text{ IMPAR.}\end{cases}$

EJEMPLOS:

REDUCIR A SU FORMA $z=x+iy$.

1) $(-i)^{26}$

SOL: $(-i)^{26}=[(-1)i]^{26}=(-1)^{26}i^{26}=(1)i^{26}=i^{26}$

$=(i^2)^{13}=(-1)^{13}=-1$

$\therefore (-i)^{26}=-1$

2) a) $i^3=i^2 i=(-1)i=-i$; b) $i^4=i^2 i^2=(-1)(-1)=1$

c) $i^5=i^4 i=(i^2)^2 i=(-1)^2 i=(1)(i)=i$

3) $2i^3-3i^2+5i=2i^2 i-3i^2+5i=2(-1)i-3(-1)+5i$

$=-2i+3+5i=3+5i-2i=3+3i$

3) $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{-1-2i}=\dfrac{3(i^2)^{15}-i\,i^{18}}{-1-2i}=\dfrac{3(-1)^{15}-i\,(i^2)^9}{-1-2i}$

$=\dfrac{-3-i(-1)^9}{-1-2i}=\dfrac{-3+i}{-1-2i}=\dfrac{-3+i}{-1-2i}\cdot\dfrac{-1+2i}{-1+2i}$

$=\dfrac{3+6i-i+2i^2}{(-1)^2-(2i)^2}=\dfrac{3+6i-i-2}{1+4}=\dfrac{1-7i}{5}=\dfrac{1}{5}-i\dfrac{7}{5}$.

$\therefore \dfrac{3i^{30}-i^{19}}{-1-2i}=\dfrac{1}{5}-i\dfrac{7}{5}=\left(\dfrac{1}{5},-\dfrac{7}{5}\right)$

• MÓDULO O VALOR ABSOLUTO -

DEF: EL MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO $z = x + iy$ ES EL NÚMERO REAL z Y SE DENOTA POR $|z|$; ES DECIR:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0.$$

DEMOSTRAR.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

PRUEBA:

SEAN $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2 - (iy)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - i^2y^2} = \sqrt{x^2 - (-1)y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

$$\therefore |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

EJEMPLOS: CALCULAR EL MÓDULO DE:

a) $z_1 = 2 - 3i = (2, -3) \Rightarrow |z| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$$\therefore |z_1| = \sqrt{13}$$

b) $z_2 = -9i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{0^2 + (-9)^2} = \sqrt{0^2 + 81} = \sqrt{81} = 9$

$$\therefore |z_2| = 9 \,//$$

c) $z_3 = -5 \Rightarrow |z_3| = |z|_3 = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\therefore |z_3| = 5. \,//$$

PROPIEDADES.

- $|z|^2 = z\overline{z}$ y $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
- $|z_1 \, z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- Si $z_1 = z_2 = z \Rightarrow |z\,z| = |z||z| \therefore |z^2| = |z|^2.$

  $\therefore |z^2| = |z|^2.$
- $|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|Re(z)| \leq |z|$
- $|Im(z)| \leq |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\overline{\overline{z}} = z.$
- $|z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n|.$

· VERIFICAR a) $|Re(z)| \leq |z|$ si $z = 2-3i = (2,-3)$.

Sol:

$$Re(z) = Re(2-3i) = 2 \Rightarrow |Re(z)| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$|z| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\therefore |Re(z)| \leq |z| \Rightarrow 2 \leq \sqrt{13}$ SE CUMPLE.

AHORA PARA b) $|Im(z)| \leq |z|$

$$z = 2-3i \Rightarrow Im(z) = I(2-3i) = -3 \Rightarrow |Im(z)| = \sqrt{0^2+(-3)^2}$$

$$|Im(z)| = \sqrt{9} = 3$$

$$|z| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = \sqrt{2^2+(3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$\therefore |Im(z)| \leq |z| \Rightarrow 3 \leq \sqrt{13}$. SE CUMPLE.

EL EJEMPLO ANTERIOR NO FUE DEMOSTRACIÓN.

COMENTARIO:

· VERIFICACIÓN SE EFECTUA CON NÚMEROS.

· DEMOSTRACIÓN SE EFECTUA CON LETRAS.

• FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE Z.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS TAMBIÉN PUEDE EXPRESARSE EN FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS POLARES r, θ EN EL PLANO COMPLEJO, DEFINIDAS POR:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} (1)$$

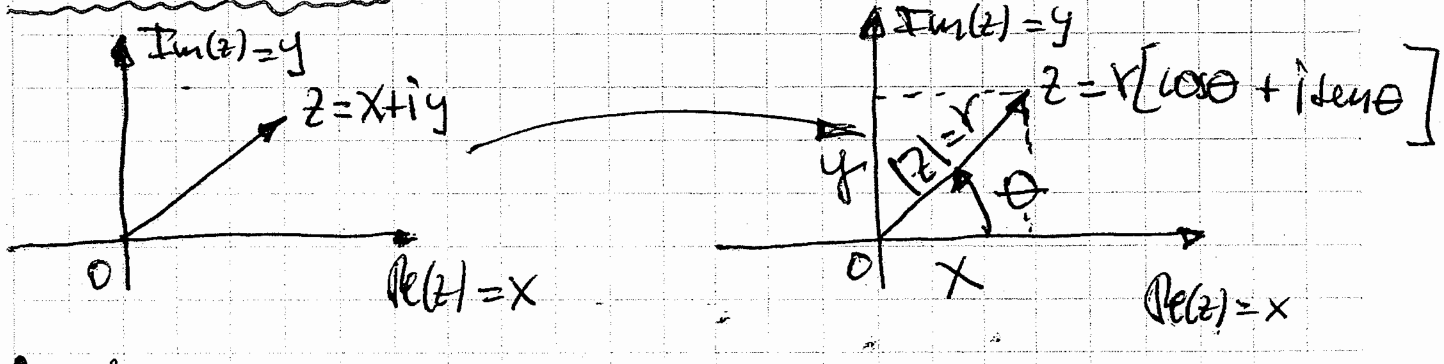
CUALQUIER NÚMERO COMPLEJO $z = x+iy$ PUEDE ESCRIBIRSE:

SUSTITUYENDO (1) EN:

$$z = x+iy = r\cos\theta + i r\,\mathrm{sen}\,\theta = r[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta]$$

$$\therefore\ z = r[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta] \quad (2)$$

LA RELACIÓN (2) SE CONOCE COMO FORMA POLAR O FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO.



Donde:

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0.$$

EL ÁNGULO DIRIGIDO θ, MEDIDO A PARTIR DEL x POSITIVO, SE LLAMA ARGUMENTO DE Z O AMPLITUD DE Z Y SE

DENOTA COMO $\theta = \arg(z)$.

A TODO NÚMERO $z \neq 0$ LE CORRESPONDE ÚNICAMENTE UN VALOR DE θ EN $0 \leq \theta < 2\pi$; SIN EMBARGO, PUEDE EMPLEARSE OTRO INTERVALO DE LONGITUD 2π, COMO $-\pi < \theta \leq \pi$.

RESUMIENDO:

$$z = r\left[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right]$$

TAL QUE:

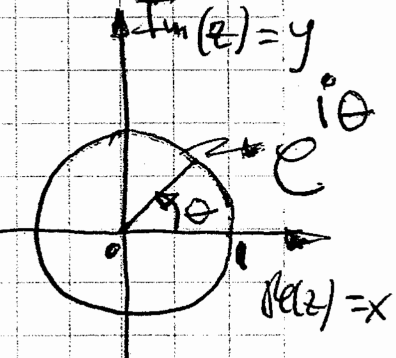
$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\theta = \arg(z) = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{y}{x}\right] \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- FÓRMULA DE EULER $e^{i\theta}$.

SI $r=1$.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta.$$



EN GENERAL, SE DEFINE:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}\left[\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y\right]$$

SI $y=0 \Rightarrow e^{z} = e^{x}\left[\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0\right] = e^{x}\left[1+\cancel{i(0)}\right] = e^{x}.$

Propiedades de $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ (Euler)

- $e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)$.

- $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Recuerde: $\cos(-\theta) = \cos\theta$ función par

$\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta$ función impar.

- $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1}\, e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2)$

- $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ con $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

o bien:

$\cos(\theta+2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+2k\pi) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$; $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

- $\left(e^{i\theta}\right)^{n} = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$.

- Teorema de De Moivre.

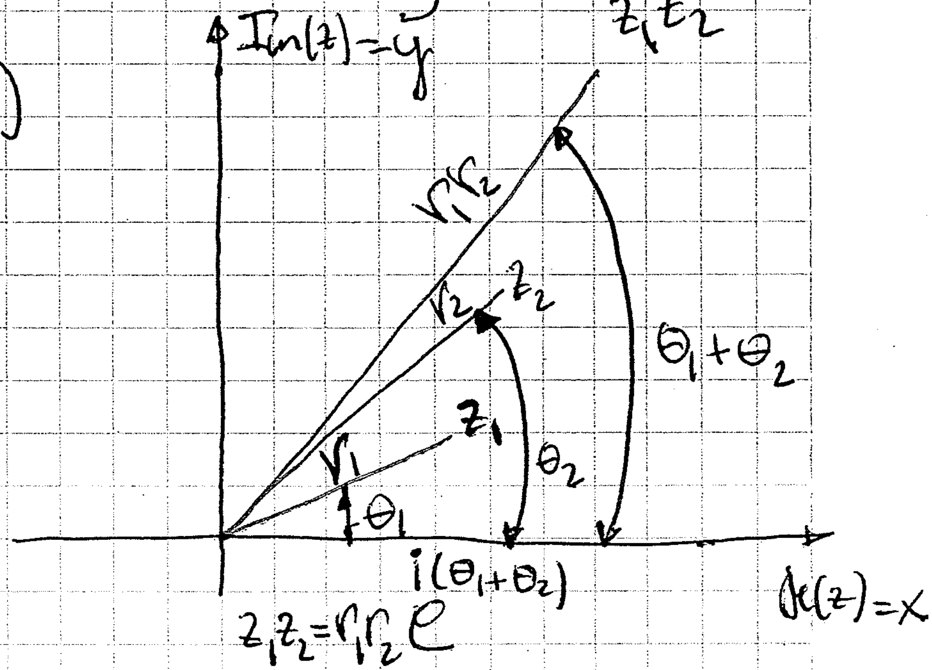
Sean: $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\left[\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right]$

$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\left[\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right]$

ENTONCES:

- $$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]$$
$$= r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{—— } (*)$$

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$$
$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$



GENERALIZANDO (*).

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \left[\cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)\right]$$

y si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ SE TIENE:

$$z^n = \left[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

$$\therefore \; z^n = r^n e^{in\theta}$$

SE CONOCE COMO TEOREMA DE DE MOIVRE.

• DEMOSTRAR:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2) \right]$$

PRUEBA.

$$z_1 = x_1 + i y_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)\ ;\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2)$$

EFECTUANDO EL PRODUCTO Y RECORDANDO $i^2 = -1$.

$$= r_1 r_2 \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2 \cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i^2\,\text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2 \right].$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2 \right]$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2 + i\,(\text{sen}\theta_2 \cos\theta_1 + \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2) \right]$$

SABEMOS POR TRIGONOMETRÍA

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1\,\text{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\theta_2 = \text{sen}(\theta_1+\theta_2)$$

$$\therefore z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1+\theta_2) \right]$$

- DOS NÚMEROS COMPLEJOS z_1 Y z_2 SON IGUALES.

DOS NÚMEROS COMPLEJOS z_1 Y z_2 SON IGUALES EN EL CASO Y SÓLO EN EL CASO, CUANDO SUS MÓDULOS SON IGUALES Y SUS ARGUMENTOS O SE DISTINGUEN EN LA MAGNITUD QUE ES MÚLTIPLO A 2π.

$$|z_1| = |z_2|$$

$$\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n \text{ si } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

HACIENDO $n=0$ SE LLAMA ARGUMENTO PRINCIPAL DE θ.

$$\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$$

$$\text{si } n=0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2\pi(0) = \theta_2 + 0 = \theta_2$$

$$\therefore \theta_1 = \theta_2.$$

- TEOREMA.
  - $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$.
  - $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \theta_1 + \theta_2$ HASTA MÚLTIPLOS DE 2π.
  - $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{r_1}{r_2}$.
  - $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \theta_1 - \theta_2$ HASTA MÚLTIPLOS DE 2π.

TEOREMA. EL CONJUGADO $\overline{z} = x - iy$, ENTONCES:

- $|\overline{z}| = |z| = r$.
- $\arg \overline{z} = -\arg z = -\theta$.
- FORMA POLAR: $\overline{z} = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$
- $\overline{z}^{-1} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\,\text{sen}\,(-\theta)\right] = \frac{1}{r}\left[\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta\right]$

$$\therefore \overline{z}^{-1} = \frac{1}{r}\left[\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta\right].$$

RECUERDE: $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

- $\cos(-\theta) = \cos\theta$. FUNCIÓN PAR $(f(-t) = f(t))$
- $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$. FUNCIÓN IMPAR $(f(-t) = -f(t))$

NOTA:

DE PREFERENCIA EL ARGUMENTO DE z Ó $\arg z = \theta$ SE EXPRESA EN $\boxed{\text{RADIANES}}$ O GRADOS. SI $\boxed{0 \leq \theta < 2\pi}$.

FORMA POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.16. Exprese en forma polar los números complejos siguientes.

a) $2+2\sqrt{3}i$, *b*) $-5+5i$, *c*) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ y *d*) $-3i$

Solución

a) $2+2\sqrt{3}i$ [veá la figura 1-22.]

El módulo o valor absoluto es $r=|2+2\sqrt{3}i|=\sqrt{4+12}=4$.
La amplitud o argumento es $\theta=\operatorname{sen}^{-1}2\sqrt{3}/4=\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{3}/2=60°=\pi/3$ (radianes).
Entonces

$$2+2\sqrt{3}i=r(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=4(\cos 60°+i\operatorname{sen}60°)=4(\cos\pi/3+i\operatorname{sen}\pi/3)$$

Este resultado también se expresa como 4 cis $\pi/3$ o, con la fórmula de Euler, como $4e^{\pi i/3}$.

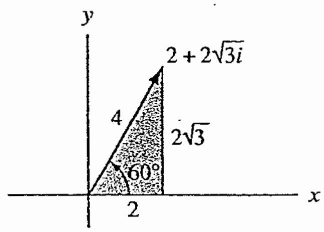


Figura 1-22

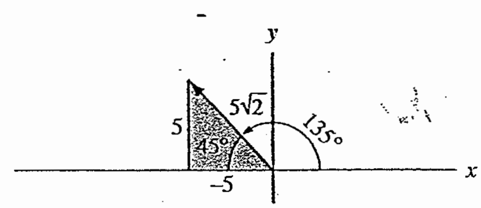


Figura 1-23

b) $-5+5i$ [vea la figura 1-23.]

$$r=|-5+5i|=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$
$$\theta=180°-45°=135°=3\pi/4 \text{ (radianes)}$$

De manera que

$$-5+5i=5\sqrt{2}(\cos 135°+i\operatorname{sen}135°)=5\sqrt{2}\operatorname{cis}3\pi/4=5\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$$

c) $-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ [vea la figura 1-24.]

$$r=|-\sqrt{6}-\sqrt{2}i|=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$$
$$\theta=180°+30°=210°=7\pi/6 \text{ (radianes)}$$

De manera que

$$-\sqrt{6}-\sqrt{2}i=2\sqrt{2}(\cos 210°+i\operatorname{sen}210°)=2\sqrt{2}\operatorname{cis}7\pi/6=2\sqrt{2}e^{7\pi i/e}$$

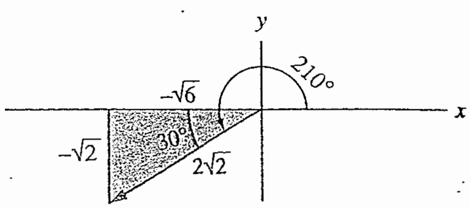


Figura 1-24

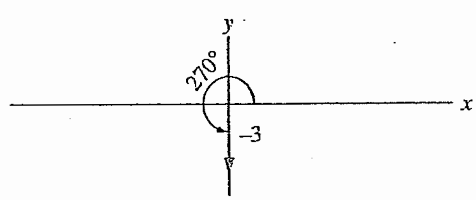


Figura 1-25

d) $-3i$ [vea la figura 1-25.]

$$r=|-3i|=|0-3i|=\sqrt{0+9}=3$$
$$\theta=270°=3\pi/2 \text{ (radianes)}$$

De manera que

$$-3i=3(\cos 3\pi/2+i\operatorname{sen}3\pi/2)=3\operatorname{cis}3\pi/2=3e^{3\pi i/2}$$

• EJERCICIOS.

1) EVALÚE LAS SIGUIENTES POTENCIAS.

a) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$.

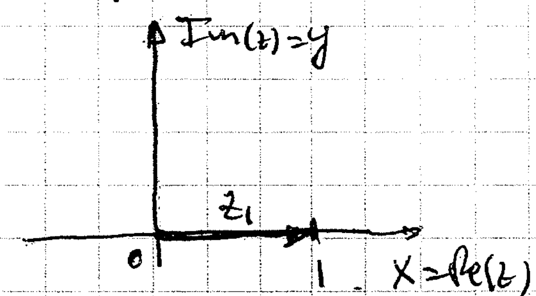
b) $i^{11} = i\, i^{10} = i(i^2)^5 = i(-1)^5 = i(-1) = -i$.

c) $i^{42} = (i^2)^{21} = (-1)^{21} = -1$.

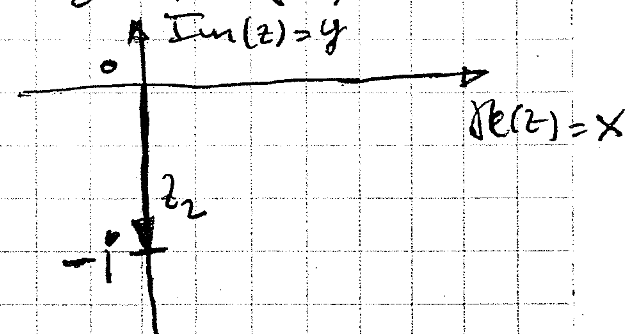
d) $(i)^{105} = i\, i^{104} = i(i^2)^{52} = i(-1)^{52} = i(1) = i$

2) DEL EJERCICIO 1 GRAFICAR LAS SOLUCIONES DE LOS INCISOS a), b), c) y d) RESPECTIVAMENTE.

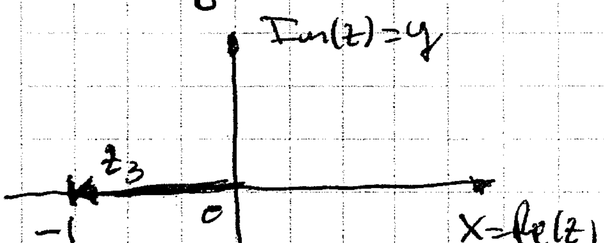
a) $z_1 = 1 = (1,0)$



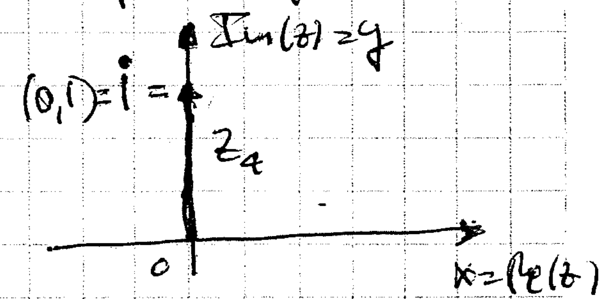
b) $z_2 = -i = (0,-1)$



c) $z_3 = -1 = (-1,0)$



d) $z_4 = i = (0,1)$



3 . ESCRIBA EL NÚMERO DADO EN LA FORMA 25

$z = x + iy.$

a) $$\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}} = \frac{5}{i} + \frac{2}{i^2 i} - \frac{20}{(i^2)^9} = \frac{5}{i} - \frac{2}{i} - \frac{20}{(-1)^9}$$

$$= \frac{5}{i} - \frac{2}{i} + 20 = 20 + \frac{3}{i} = 20 + \frac{3}{i}\frac{i}{i} = 20 + \frac{3i}{i^2}$$

$$= 20 + \frac{3i}{(-1)} = 20 - 3i = (20, -3)$$

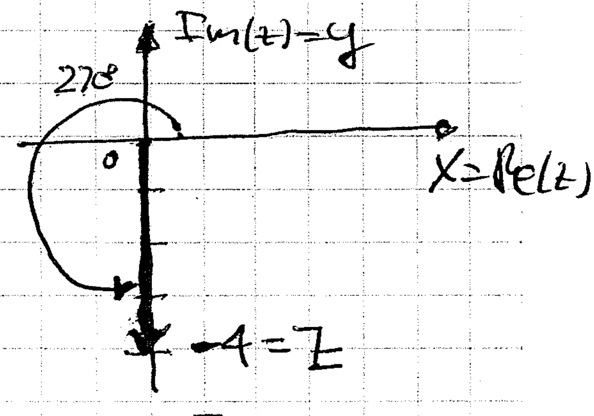
b) $$3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9 = 3i\,i^4 - (i^2)^2 + 7i\,i^2 - 10(-1) - 9$$

$$= 3i(i^2)^2 - (i^2)^2 + 7i\,i^2 + 10 - 9 = 3i - 1 - 7i + 1 =$$

$$= -4i = (0, -4). \quad \therefore \; z = -4i = (0, -4)$$

COMPROBAR EL RESULTADO $z = -4i$.

Sol: ESCRIBIENDO $z = -4i$ EN SU FORMA POLAR.



$$|z| = r = \sqrt{0^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{16} = 4$$

$$\therefore r = 4.$$

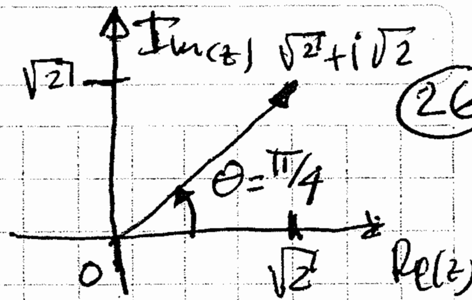
$$\theta = 270° = \frac{3\pi}{2}.$$

SABEMOS: $$re^{i\theta} = r[\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta]$$

$$-4i = 4\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right] = 4e^{i3\pi/2}$$

$$-4i = 4[0 + i(-1)] = 4[-i] = -4i = 4e^{i3\pi/2} \quad \therefore -4i = -4i.$$

c) $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$



26

SOL:

$$|z|=r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$$

$$r=2$$

$$\theta=tg^{-1}\left[\frac{2}{2}\right]=tg^{-1}[1]=\frac{\pi}{4}=45^\circ$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=r\,e^{i\theta}=r[\cos\theta+i\,sen\,\theta]$$

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{i\pi/4}=2\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right]$$

COMPROBACIÓN:

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{i\pi/4}=2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{2\sqrt{2}}{2}+i\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

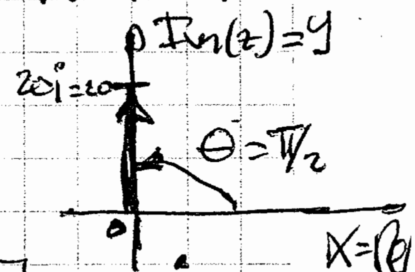
d) $i(1-i)(2-i)(2+6i)=i(1-i)[(2-i)(2+6i)]$

$$=(i-i^2)(4+12i-2i-6i^2)=(i+1)(4+12i-2i+6)$$

$$=(i+1)(10+10i)=10i+10i^2+10+10i=10i-10+10+10i$$

$$=20i=(0,20)$$

CONVERTIR A POLAR



$$r=\sqrt{0^2+(20)^2}=20\;;\;\theta=\pi/2$$

$$20i=r\,e^{i\pi/2}=20[\cos\pi/2+i\,sen\,\pi/2]=20[0+i(1)]=20i$$

④. SIMPLIFICAR LA SIGUIENTE OPERACIÓN

UTILIZANDO: $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]$.

$$z_1 z_2 = [3(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)][4(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)]$$

$$= 12[(\cos(40° + 80°) + i \operatorname{sen}(40° + 80°)]$$

$$= 12[\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°] = 12\left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= 12\, e^{i 2\pi/3} = 12\left[-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -6 + 6i\sqrt{3}$$

$$\therefore z_1 z_2 = -6 + 6i\sqrt{3}$$

⑤. PROBAR: $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \theta_1 + \theta_2$.

DEMOSTRACIÓN:

SEAN: $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1]$; $z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2]$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]$, ENTONCES:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2.$$

⑥ ESCRIBA EL NÚMERO EN LA FORMA $x+iy$.

a) $2e^{i\pi/8}\; 4e^{3\pi/8}$. b) $\dfrac{2e^{i\pi/8}}{4e^{i3\pi/8}}$.

c) $5\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right]$.

SOL: a) $2e^{i\pi/8}\,4e^{i3\pi/8} = 8e^{i\pi/8}\,e^{i3\pi/8}$ (28)

$$= 8e^{i(\pi/8+3\pi/8)} = 8e^{i4\pi/8} = 8e^{i\pi/2}$$

$$= 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right] = 8\left[0 + i(1)\right] = 8i$$

b) $$\frac{2e^{i\pi/8}}{4e^{i3\pi/8}} = \frac{2}{4}e^{i\pi/8}e^{-i3\pi/8} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

c) $$5\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right] = 5e^{i7\pi/6} = 5e^{i210^\circ}$$

$$= 5\left[\cos 210^\circ + i\,\text{sen}\,210^\circ\right] = 5\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{5\sqrt{3}}{2} - i\frac{5}{2}$$

7. ESCRIBA LA FORMA POLAR EN LA NOTACIÓN $x+iy$.

a) $(3-3i)(5+5\sqrt{3}\,i)$. b) $\dfrac{-i}{1+i}$.

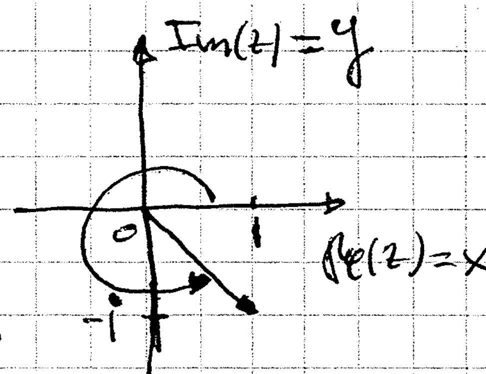
a) $(3-3i)(5+5\sqrt{3}\,i) = 3(1-i)5(1+\sqrt{3}\,i)$

Sol:

$$3(1-i)5(1+\sqrt{3}\,i) = 15(1-i)(1+i\sqrt{3})$$

$$= 15\left[r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}\right] \quad — \ (*)$$

HACIENDO: $(1-i) = r_1 e^{i\theta_1}$

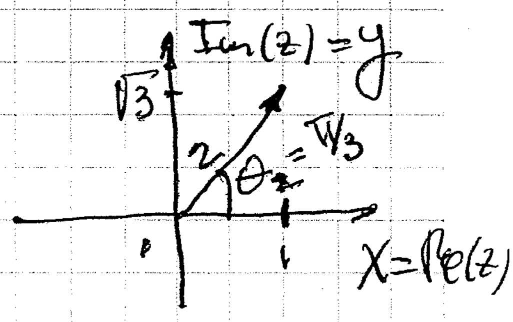


$$r_1 = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left[\frac{-1}{1}\right] = tg^{-1}[-1] = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

$$\theta_1 = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

$$(1-i) = r_1 e^{i\theta_1} = \sqrt{2}\, e^{i7\pi/4}$$



AHORA: $(1+i\sqrt{3}) = r_2 e^{i\theta_2}$

$$r_2 = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta_2 = tg^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{1}\right] = tg^{-1}\left[\sqrt{3}\right] = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$(1+i\sqrt{3}) = r_2 e^{i\theta_2} = 2e^{i\pi/3}$$

SUSTITUYENDO $r_1 e^{i\theta_1}$ y $r_2 e^{i\theta_2}$ EN $(*)$.

$$15\left[r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}\right] = 15\left[\sqrt{2}\, e^{i7\pi/4}\, 2\, e^{i\pi/3}\right]$$

$$= 30\sqrt{2}\, e^{i[7\pi/4+\pi/3]} = 30\sqrt{2}\, e^{i25\pi/12}$$

$$= 30\sqrt{2}\left[\cos\frac{25\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{25\pi}{12}\right] = 42.4[0.97+i0.26] \cong 41+i11.$$

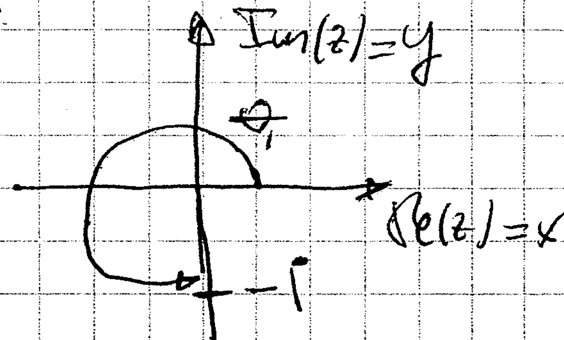
$\cong 41+i11$

(b) $\dfrac{-i}{1+i}$

Sol:

$$\frac{-i}{1+i} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

$$-i = r_1 e^{i\theta_1}$$

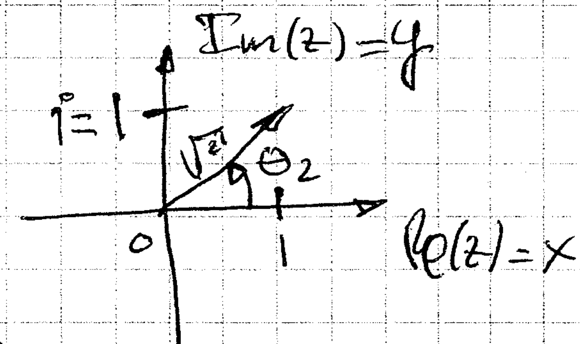


$$r_1 = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\theta_1 = 270° = \frac{3\pi}{2}$$

$$-1 = r_1 e^{i\theta_1} = 1\, e^{i3\pi/2}$$

Ahora $(1+i) = r_2 e^{i\theta_2}$



$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_2 = tg^{-1}\left[\frac{1}{1}\right] = 45° = \frac{\pi}{4}$$

$$(1+i) = r_2 e^{i\theta_2} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}.$$

$$\frac{-i}{1+i} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{1\, e^{i3\pi/2}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i(3\pi/2 - \pi/4)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

(8). ESCRIBA EN FORMA POLAR EL NÚMERO COMPLEJO DADO Y POSTERIORMENTE EN LA FORMA $x+iy$.

(a) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9$

SOL:

$$r=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$\theta=tg^{-1}\left[\sqrt{3}\right]=\frac{\pi}{3}$$

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^9=\left[r\,e^{i\theta}\right]^9=\left[2\,e^{i\pi/3}\right]^9=2^9\,e^{i9\pi/3}=2^9\,e^{i3\pi}$$

$$=2^9\left[\cos 3\pi+i\,sen\,3\pi\right]=2^9\left[-1+i(0)\right]=2^9\left[-1+0\right]$$

$$=-512.$$

(b) $\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\,sen\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,sen\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

SOL:

$$\left(e^{i\frac{\pi}{9}}\right)^{12}\left(2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5=e^{i\frac{12\pi}{9}}\,2^5\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$=2^5\,e^{i4\pi/3}\,e^{i5\pi/6}=2^5\,e^{i\left[4\pi/3+5\pi/6\right]}=2^5\,e^{i\frac{13}{6}\pi}$$

$$=2^5\,e^{i\frac{13\pi}{6}}=2^5\left[\cos\frac{13\pi}{6}+i\,sen\frac{13\pi}{6}\right]=32\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{32}{2}\left[\sqrt{3}+i\right]=16\sqrt{3}+i\,16$$

(9). EVALÚE: SEAN $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$, y $z_3 = \sqrt{3}-2i$.

a) $\left|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1\right|$ b) $\overline{(z_2+z_3)}\,\overline{(z_1-z_3)}$.

¡OL! c) $\left|z_1^2+\bar{z}_2^{2}\right|^2 + \left|\bar{z}_3^2 - z_2^2\right|^2$

(a) $\left|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1\right| = \left|(1-i)\overline{(-2+4i)} + (-2+4i)\overline{(1-i)}\right|$

$= \left|(1-i)(-2-4i) + (-2+4i)(1+i)\right| = \left|-2-4i+2i-4-2-2i+4i-4\right|$

$= \left|-12+i(0)\right| = \left|-12\right| = \sqrt{(12)^2+0^2} = \sqrt{(12)^2} = 12$

(b) $\overline{(z_2+z_3)}\,\overline{(z_1-z_3)} = (\bar{z}_2+\bar{z}_3)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)$

$= \left(\overline{(-2+4i)} + \overline{(\sqrt{3}-2i)}\right)\left(\overline{(1-i)} - \overline{(\sqrt{3}-2i)}\right)$

$= \left((-2-4i)+\sqrt{3}+2i\right)\left(1+i-\sqrt{3}-2i\right) = \left(-2+\sqrt{3}-2i\right)\left(1-\sqrt{3}-i\right)$

$= -2+2\sqrt{3}+2i+\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}-2i+i2\sqrt{3}-2$

$= -7+3\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

(c) $\left|z_1^2+\bar{z}_2^{2}\right|^2 + \left|\bar{z}_3^2 - z_2^2\right|^2$

$$\left|(1-i)^2+\left(\overline{-2+4i}\right)^2\right|^2+\left|\left(\overline{\sqrt{3}-2i}\right)^2-\left(-2+4i\right)^2\right|^2 \qquad 33$$

$$=\left|(1-i)^2+(-2-4i)^2\right|^2+\left|(\sqrt{3}+2i)^2-(-2+4i)^2\right|^2$$

$$=\left|1-2i-1+4+16i-16\right|^2+\left|3+4\sqrt{3}i-4-4-16i+16\right|^2$$

$$=\left|-12+14i\right|^2+\left|11+i(4\sqrt{3}+16)\right|^2$$

$$=\left[\sqrt{(-12)^2+(14)^2}\right]^2+\left[\sqrt{(11)^2+\left(4\sqrt{3}+16\right)^2}\right]^2$$

$$=(-12)^2+(14)^2+(11)^2+16\left(\sqrt{3}+4\right)^2$$

$$=144+196+121+16\left(3+8\sqrt{3}+16\right)$$

$$=144+196+121+48+128\sqrt{3}+256$$

$$=765+128\sqrt{3}$$

10. EXPRESAR $\dfrac{1}{2+i}$ EN LA FORMA $x+iy$.

Sol:

$$\frac{1}{2+i} = x+iy$$

$$1 = (2+i)(x+iy) = 2x+i2y+ix-y$$

$$1 = 2x-y+i2y+ix$$

$$1 = (2x-y)+i(2y+x)$$

IGUALANDO PARTE REAL CON PARTE IMAGINARIA.

$$1+0i = (2x-y)+i(x+2y)$$

$$(2x-y)=1$$

$$(x+2y)=0$$

RESOLVIENDO EL SISTEMA DE ECUACIONES:

$$\begin{array}{r} 4x-2y=2 \\ x+2y=0 \\ \hline 5x+0=2 \end{array} \Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

$$x+2y=0 \Rightarrow \frac{2}{5}+2y=0 \; ; \; 2y=-\frac{2}{5}$$

$$y=-\frac{1}{5}$$

PODEMOS ESCRIBIR TAMBIÉN:

$$\frac{1}{2+i} = (2+i)^{-1} = x+iy = \frac{2}{5} - i\frac{1}{5} = \frac{1}{5}(2-i).$$

11), UTILIZANDO EL TEOREMA DE DEMOIVRE Y LA EXPANSIÓN BINOMIAL EXPRESE $\cos 4\theta$ Y $sen 4\theta$ EN TÉRMINOS DE POTENCIAS DE $\cos\theta$ y $sen\theta$. 35

SOL:

APLICANDO MOIVRE.

$$\cos 4\theta + i\,sen 4\theta = (\cos\theta + i\,sen\theta)^4$$

SABEMOS QUE:

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

DONDE: $A = \cos\theta$; $B = i\,sen\theta$; $i^2 = -1$

$$\cos 4\theta + i\,sen 4\theta = \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\,sen\theta + 6i^2\cos^2\theta + sen^2\theta + 4i^3\cos\theta\,sen^3\theta + i^4 sen^4\theta.$$

SEPARANDO PARTE REAL E IMAGINARIO RESPECTIVAMENTE.

$$\cos 4\theta + i\,sen 4\theta = (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,sen^2\theta + sen^4\theta) + i(4\,sen^3\theta\,sen\theta - 4\cos\theta\,sen^3$$

IGUALANDO <u>PARTE REAL</u> E <u>IMAGINARIO</u>.

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,sen^2\theta + sen^4\theta$$

$$sen 4\theta = 4\cos^3\theta\,sen\theta - 4\cos\theta\,sen^3\theta = 4(\cos^3\theta\,sen\theta - \cos\theta\,sen^3\theta)$$

. RAÍCES ENÉSIMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO.

INTRODUCCIÓN:

SEA LA ECUACIÓN POLINOMIAL:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (1)$$

DONDE:

$$a_0 \neq 0,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{Z}^+ \text{ (GRADO DE LA ECUACIÓN)}$$

A LAS SOLUCIONES DE ESTAS ECUACIONES SE LES LLAMA CERO DEL POLINOMIO O RAÍCES DE LA ECUACIÓN.

DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

SÍ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ SON LAS n RAÍCES O CEROS DE (1) SE ESCRIBE COMO:

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=0,$$

QUE SE CONOCE COMO FORMA FACTORIZADA DE LA ECUACIÓN POLINOMIAL.

LAS n RAÍCES n-ÉSIMA DE UN NÚMERO COMPLEJO $z \neq 0$ ESTÁN DADOS POR:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)+i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}+k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right]$$

CON $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left[\frac{\theta}{n}+k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}, \quad k=0,1,\dots,n-1.$$

DONDE:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \arg(z) = tg^{-1}\left[\frac{y}{x}\right], \quad 0 \le \theta < 2\pi.$$

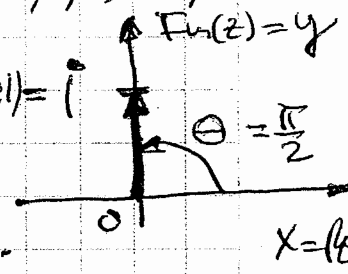
ESTOS n VALORES SE ENCUENTRAN SOBRE UN CÍRCULO DE RADIO $\sqrt[n]{r}$ CON CENTRO EN EL ORIGEN Y CONSTITUYEN LOS VÉRTICES DE UN POLÍGONO REGULAR DE n LADOS.

. EJEMPLOS.

1) a) HALLAR LAS TRES RAÍCES CÚBICAS DE $z=i$.

SOL: $z = i = (0,1)$, $n=3$, $K=0,1,2$. $K=0,1,2,\dots,n-1$.

$r=\sqrt{0^2+1^2}=\sqrt{1}=1$; $\theta = \frac{\pi}{2} = 90°$



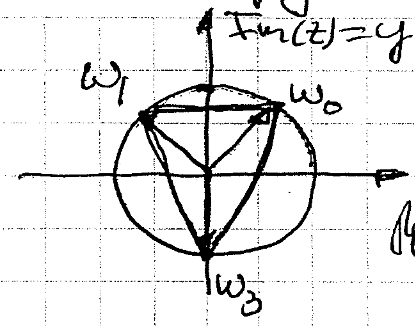
$$\omega_K = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left[\frac{\theta}{n}+K\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]} \quad \text{CON } K=0,1,2,\dots,n-1.$$

$$K=0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left[\frac{\pi}{6}+0\right]} = 1e^{i\pi/6} = e^{i60°} = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}.$$

$$K=1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left[\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right]} = 1e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i150°} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}.$$

$$K=2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left[\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right]} = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i270°} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i.$$

(b) GRAFICAR: w_0, w_1 y w_2.



(c) COMPROBACIÓN:

$$w_0+w_1+w_2=0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-i=0$$

∴ ESTÁN BIEN LAS TRES RAÍCES O CEROS.

OTRA FORMA:

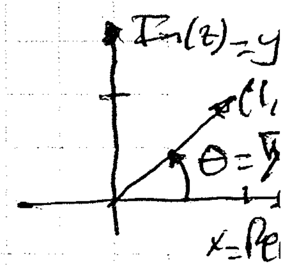
$$z=i$$

$$z_0^3=\left(1\,e^{i\pi/6}\right)^3=e^{i3\pi/6}=e^{i\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\pi/2=0+i(1)=i$$

$$z_1^3=\left(1\,e^{5\pi/6}\right)^3=e^{i(5)(3)\pi/6}=e^{i5\pi/2}=\cos\frac{5\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{2}=0+i(1)=i$$

$$z_2^3=\left(1\,e^{3\pi/2}\right)^3=\left(e^{i\frac{9\pi}{2}}\right)=\cos\frac{9\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{2}=0+i(1)=i.$$

(2) ENCONTRAR LAS CUATRO RAÍCES O CEROS DE $z=1+i=(1,1)$.



Sol: (a) $n=4$, $K=0,1,2,3$, $K=0,1,2,\dots,n-1$.

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \quad ; \quad \theta=tg^{-1}\left[\frac{1}{1}\right]=\frac{\pi}{4}=45^\circ$$

$$w_K=\sqrt[n]{r}\;e^{i\left[\frac{\theta}{n}+K\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]} \quad \text{si } K=0,1,2,3.$$

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\, e^{i[\pi/16+0]} = \sqrt[8]{2}\, e^{i\pi/16}$$

$$= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{16}\right] \simeq 1.0696 + i\,0.2127.$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\, e^{i[\pi/16 + 2\pi/4]} = \sqrt[8]{2}\, e^{i\,9\pi/16}$$

$$= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{16}\right] \simeq -0.2127 + i\,1.0696.$$

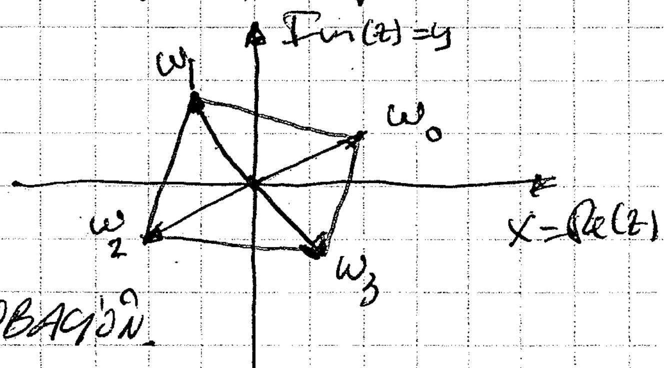
$$w_2 = \sqrt[8]{2}\, e^{i\left[\frac{\pi}{16} + \frac{4\pi}{4}\right]} = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{16}}$$

$$= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{17\pi}{16}\right] \simeq -1.0696 - i\,0.2127.$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\, e^{i\left[\frac{\pi}{16} + \frac{6\pi}{4}\right]} = \sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{16}}$$

$$= \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{25\pi}{16}\right] \simeq 0.2127 - i\,1.0696.$$

(b) GRAFICAR w_0, w_1, w_2 y w_3.



(c) COMPROBACIÓN

$$\sqrt[8]{2}\left[w_0 + w_1 + w_2 + w_3\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[8]{2}\left[1.0696 + i0.2127 - 0.2127 + i1.0696 - 1.0696 - i0.2127 + 0.2127 - i1.0696\right]$$

$$= \sqrt[8]{2}\left[0 + i(0)\right] = 0$$

• OTRO CASO DE RAÍCES DE Z.

SI m Y n SON ENTEROS POSITIVOS PRIMOS RELATIVOS (ES DECIR, NO TIENEN FACTORES COMUNES), ENTONCES POR LO VISTO ANTERIORMENTE SE TIENE QUE:

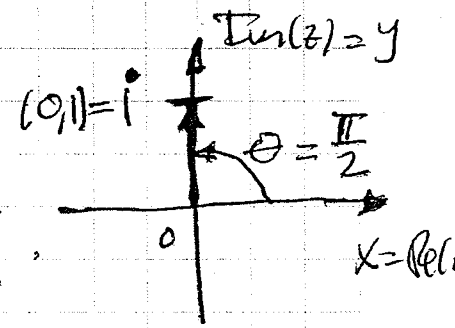
$$w_k = z^{m/n} = \sqrt[n]{r^m}\; e^{i\left[\frac{m\theta}{n} + K\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right]} \;;\; K = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

EJEMPLO.

(a) DETERMINAR LAS RAÍCES O CEROS DE:

$$(i)^{2/3} = (0,1)^{2/3}$$

SOL:



$$r = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \;;\; \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$m = 2;\ n = 3 \quad ; \quad K = 0, 1, 2.$

$$w_0 = \sqrt[3]{1^2}\, e^{i[\pi/3]} = \cos\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/3 = 1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.5 + i\,0.86.$$

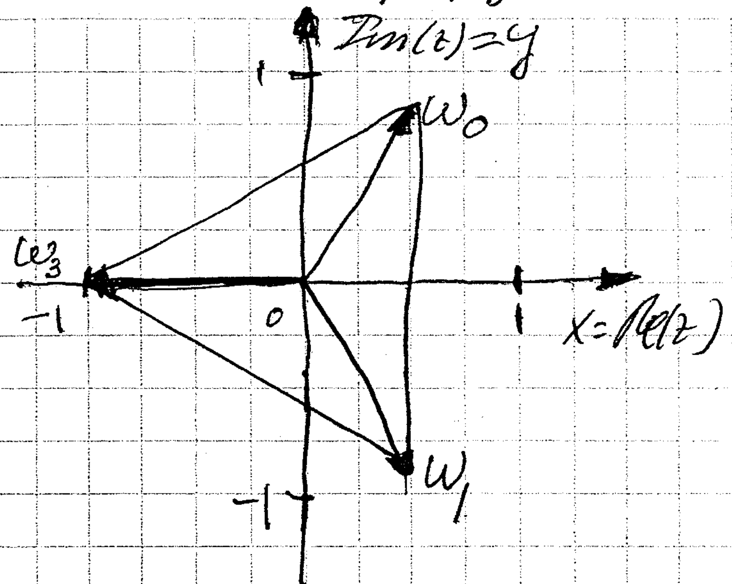
$$w_1 = \sqrt[3]{1^2}\, e^{i\left[\pi/3 + 4\pi/3\right]} = e^{i5\pi/3} = \cos 5\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,5\pi/3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1^2}\, e^{i\left[\pi/3 + 8\pi/3\right]} = e^{i9\pi/3} = \cos\frac{9\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{3} = -1 + i(0) = -1$$

(b) COMPROBACIÓN:

$$w_0 + w_1 + w_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \checkmark$$

(C) GRÁFICA DE w_0, w_1 y w_2:



RAÍCES n-ÉSIMAS DE LA UNIDAD $w^n=1$.

RECUERDE QUE:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left[\frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]} \quad \text{si } k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

HACIENDO: $r=1$ y $\theta=0$, ENTONCES:

$$w_k = \sqrt[n]{1}\, e^{i\left[\frac{0}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]} = e^{i\left[0 + k\frac{2\pi}{n}\right]}$$

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{CON } k=0,1,\ldots,n-1.$$

LAS RAÍCES n-ÉSIMA DE LA UNIDAD ESTÁ DADA POR:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{si } k=0,1,\ldots,n-1.$$

• EJEMPLO.

1 (a) HALLAR TODAS LAS RAÍCES QUINTAS DE LA UNIDAD.

SOL:

SABEMOS QUE: $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ SI $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$n = 5$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$\omega_0 = e^{i(0)} = e^0 = 1.$$

$$\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} = 0.30 + i\,0.95.$$

$$\omega_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5} = -0.80 + i\,0.58$$

$$\omega_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5} = -0.80 - i\,0.58$$

$$\omega_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5} = 0.30 - i\,0.95.$$

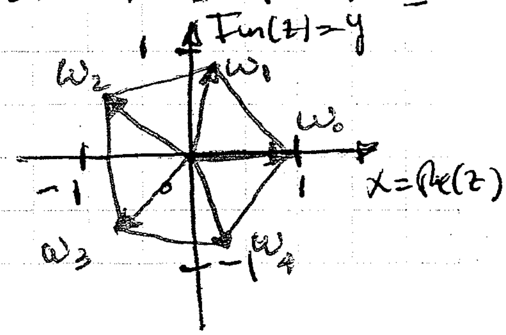
(b) COMPROBACIÓN:

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0$$

$$1 + 0.3 + i\,0.95 - 0.8 + i\,0.58 - 0.8 - i\,0.58 + 0.3 - i\,0.95 =$$

$$= 0 + i(0) = 0 \quad \text{CORRECTO}$$

(c) GRAFICAR $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ Y ω_4:



A continuación se verá otro tipo de ejemplos para determinar las raíces o ceros de números complejos.

Ejemplos:

• Hallar todas las raíces o ceros de:

1) $z^2+(1-i)z-3i=0$

Sol:

$$z^2+(1-i)z-3i=0$$

Haciendo: $a=1$; $b=1-i$; $C=-3i$.

$$z=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b+\left[b^2-4ac\right]^{1/2}}{2a}$$

$$z=\frac{-(1-i)+\left[(1-i)^2-4(-3i)\right]^{1/2}}{2(1)}=\frac{-1+i+\left[1-2i-1+12i\right]^{1/2}}{2}$$

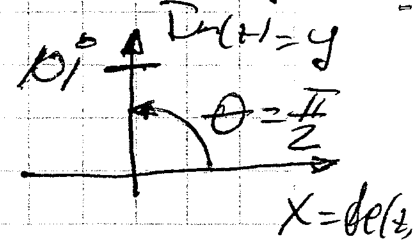
$$=\frac{-1+i+\left[10i\right]^{1/2}}{2}=\frac{1}{2}\left(-1+i+(10i)^{1/2}\right) \quad (*)$$

De (*), para encontrar $(10i)^{1/2}$ utilizamos la teoría vista anteriormente:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left[\frac{\theta}{n}+k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n}+k\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right]$$

con $k=0,1,\ldots,n-1$.

$n=2$; $k=0,1$; $(10i)^{1/2}=(0,10)^{1/2}$.



$r=\sqrt{0^2+10^2}=10$; $\theta=\frac{\pi}{2}=90°$.

$$w_0 = \sqrt{10}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{10}\left[\cos\frac{\pi}{10} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{10}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \sqrt{5} + i\sqrt{5}$$

$$w_1 = \sqrt{10}\, e^{i5\pi/4} = \sqrt{10}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}.$$

POR TANTO, DE (*) DA DOS VALORES.

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-1+i+(\sqrt{5}+i\sqrt{5})\right].$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left[-1+i+(-\sqrt{5}-i\sqrt{5})\right].$$

ESTAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN ORIGINAL, ESCRITA EN LA NOTACIÓN DE LA FORMA $z = x+iy$.

$$z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\,i$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,i$$

O BIEN FACTORIZANDO EL POLINOMIO CUADRÁTICO.

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$$

$$z^2+(1-i)z-3i = (z-z_1)(z-z_2)$$

$$= \left[z - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)i\right]\left[z + \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)i\right].$$

(2) ENCONTRAR LAS RAÍCES DE:

45

$$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$$

SOL:

SE PROPONE CON $z = 1$.

VERIFICAR QUE $z=1$ ES RAÍZ; ES DECIR:

$$z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = (1)^5 - 2(1)^4 - (1)^3 + 6(1) - 4$$

$$= 1 - 2 - 1 + 6 - 4 = 0$$ ES CORRECTA LA RAÍZ $z = 1$.

UTILIZANDO EL MÉTODO DE RAÍZ SINTÉTICA.

$$\begin{array}{r|l}
 & z^4 - z^3 - 2z^2 - 2z + 4 \\ \hline
z - 1 & z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 \\
 & -z^5 + z^4 \\ \hline
 & 0 - z^4 - z^3 + 6z - 4 \\
 & z^4 - z^3 \\ \hline
 & 0 - 2z^3 + 6z - 4 \\
 & +2z^3 \qquad -2z^2 \\ \hline
 & 0 - 2z^2 + 6z - 4 \\
 & +2z^2 - 2z \\ \hline
 & 0 \quad 4z - 4 \\
 & -4z + 4 \\ \hline
 & 0 \quad 0
\end{array}$$

$$(z-1)(z^4-z^3-2z^2-2z+4)=0.$$

AHORA PROPONEMOS OTRA RAÍZ, POR EJEMPLO $z=1$,

APLICAMOS DIVISIÓN SINTÉTICA.

$$\begin{array}{r|l} & z^3 - 2z - 4 \\ \hline z-1 & z^4 - z^3 - 2z^2 - 2z + 4 \\ & -z^4 + z^3 \\ \hline & 0 \quad 0 - 2z^2 - 2z + 4 \\ & \quad +2z^2 - 2z \\ \hline & \quad 0 - 4z + 4 \\ & \qquad 4z - 4 \\ \hline & \qquad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$(z-1)(z^3-2z-4)=0.$$

LAS RAÍCES DE $z^3-2z-4=0$ SE EFECTÚAN POR MEDIO DE LA CALCULADORA:

$$z^3-2z-4=0 \Rightarrow z_1=2,\ z_2=-1+i,\ z_3=-1-i.$$

FINALMENTE LOS CEROS O RAÍCES SON:

$$1, 1, 2, -1+i \text{ y } -1-i$$

(3) DETERMINAR TODAS LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN $z^3+z^2+z+1=0$

SOL. METODO (A).

$$z^3+z^2+z+1=0$$

SUPONGA $z=-1 \Rightarrow (-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$

DIVISIÓN SINTÉTICA.

$$\begin{array}{r|l} & z^2+1 \\ z+1 & z^3+z^2+z+1 \\ & -z^3-z^2 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad z+1 \\ & \qquad\quad -z-1 \\ \hline & \qquad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$z^3+z^2+z+1=(z^2+1)(z+1)=0$$

$$(z+1)=0 \Rightarrow z_1=-1$$

$$(z^2+1)=0 \Rightarrow z^2=-1;\ z=\pm\sqrt{-1}=\pm i,\ z_2=-i,\ z_3=i.$$

$$z^3+z^2+z+1=(z-i)(z+i)(z+1)=0$$

$$\therefore z_1=-1,\ z_2=-i \text{ y } z_3=i$$

METODO (B).

$$z^3+z^2+z+1=0 \Rightarrow z^2(z+1)+(z+1)=0$$

$$(z+1)(z^2+1)=0$$

$(z+1)=0 \Rightarrow z=-1$

$z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1;\ z=\pm\sqrt{-1}=\pm i;\ z_2=i \text{ y } z_3=-i$

Ó BIEN:

$z^2+1=0\ ;\ a=1,\ b=0,\ c=1$

SOL:

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{0-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-4}}{2}$$

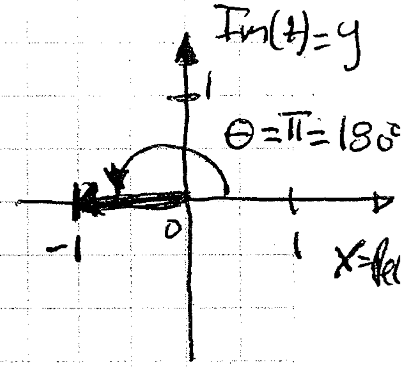
$$=\frac{\pm 2i}{2}=\pm i \quad z_2=i,\ z_3=-i$$

OTRA FORMA:

$$z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1=-1+i(0)=-1=(-1,0)$$

SOL: POR LO ANTERIOR:

$$\omega_K=\sqrt[n]{r}\ e^{i\left[\frac{\theta}{n}+K\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]}$$



$n=2;\ K=0,1;\ \theta=\pi=180°$

$r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=\sqrt{(1)^2+0}=\sqrt{1}=1.$

$$\omega_0=\sqrt{1}\ e^{i[\pi/2+0]}=e^{i\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}=0+i(1)=i$$

$$\omega_1=\sqrt{1}\ e^{i[\pi/2+2\pi/2]}=e^{i3\pi/2}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}=0+i(-1)=-i$$

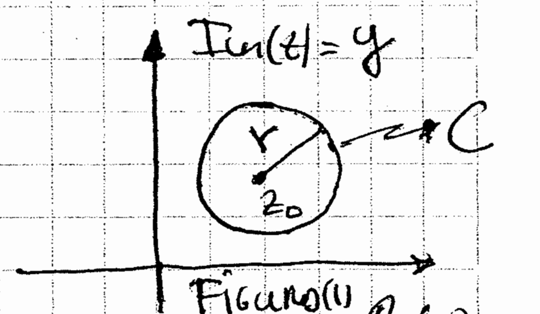
LAS RAÍCES SON:

$$z_2=i \text{ y } z_3=-i \Rightarrow z_1=-1,\ z_2=i \text{ y } z_3=-i$$

CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO COMPLEJO.

LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS z y z_0 ES $|z-z_0|$, REPRESENTA UN CÍRCULO C DE RADIO $r>0$, CON CENTRO EN UN PUNTO z_0; ES DECIR

$$|z-z_0| = r \quad (1)$$



Figura(1)

PROBAREMOS A CONTINUACIÓN QUE LA ECUACIÓN (1) REPRESENTA UN CÍRCULO DE RADIO r.

PRUEBA.

CONSIDERE $z=(x,y)=x+iy$ y $z_0=(x_0,y_0)=x_0+iy_0$

DE (1):
$$|z-z_0|=r$$

$$|z-z_0| = |x+iy-(x_0+iy_0)| = |x+iy-x_0-iy_0| = |(x-x_0)+i(y-y_0)|$$

$$|z-z_0| = |(x-x_0)+i(y-y_0)| = r$$

$$|(x-x_0)+i(y-y_0)| = r$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$

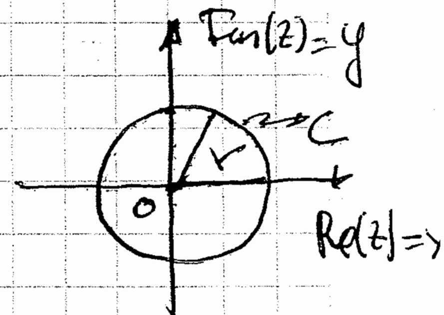
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$$

REPRESENTA UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN (x_0,y_0) y RADIO r, VER FIGURA(1).

DE ECUACIÓN (1) HACIENDO $Z_0=0$, TENEMOS.

$$\text{SI } z_0=0 \Rightarrow |z-z_0|=|z-0|=|z|=r,$$ 50

NUEVAMENTE ES UN CÍRCULO CON CENTRO EN CERO Y RADIO r.



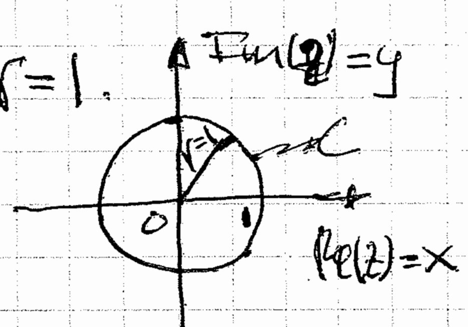
$$|z|=r$$

$$\text{SEA } z=x+iy \Rightarrow |z|=|x+iy|=r$$

$$|x+iy|=r$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r \quad \therefore \; x^2+y^2=r^2$$

SI $r=1 \Rightarrow |z|=1$ UN CÍRCULO CON CENTRO EN ORIGEN Y RADIO $r=1$.



LA DESIGUALDAD $|z-z_0|<r$ (2),

SE CUMPLE PARA TODO PUNTO z EN EL INTERIOR DE C,

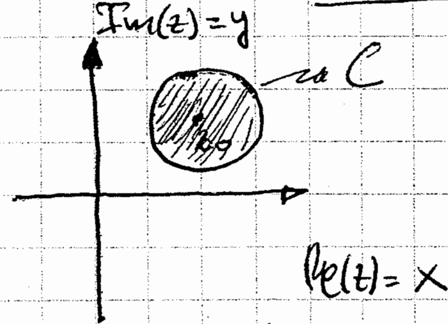
ES DECIR (2) REPRESENTA EL INTERIOR DE C, SE CONOCE COMO DISCO CIRCULAR ABIERTO.

EN CONTRASTE UN DISCO CIRCULAR CERRADO ES:

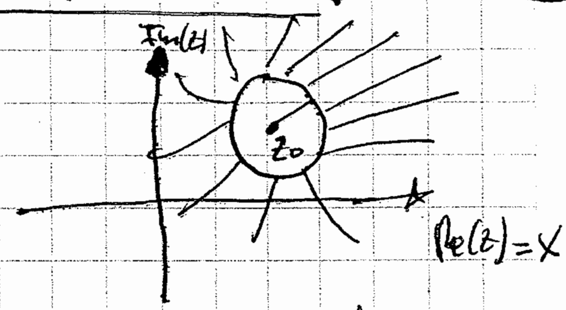
$$|z-z_0|\leq r$$

AHORA: $|z-z_0|>r$,

REPRESENTA EL EXTERIOR DEL CÍRCULO C.



$|z-z_0|<r$

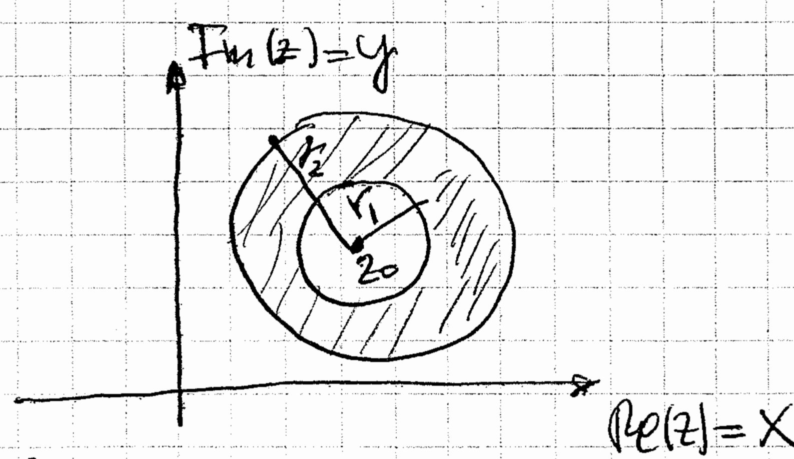


$|z-z_0|>r$

LA REGIÓN ENTRE DOS CÍRCULOS CONCÉNTRICOS DE RADIOS r_1 Y r_2 TAL QUE $r_2>r_1$ EN LA FORMA:

$$r_1<|z-z_0|<r_2,$$

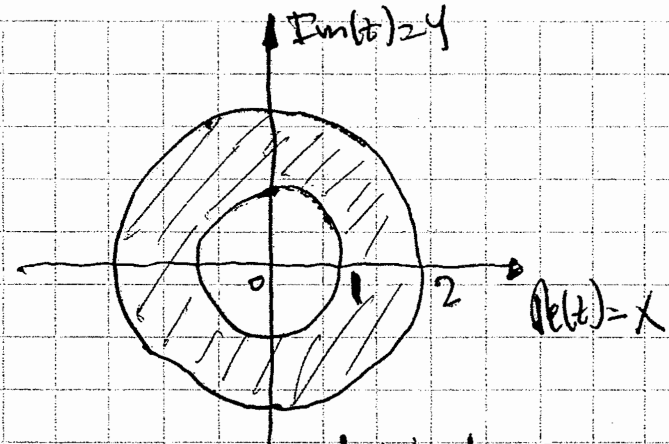
EN DONDE z_0 ES EL CENTRO DE LOS CÍRCULOS, UNA REGIÓN ASÍ SE LLAMA ANILLO CIRCULAR ABIERTO O CORONA ABIERTA.



EJEMPLOS:

① DESCRIBA LA REGIÓN $1<|z|\le 2$.

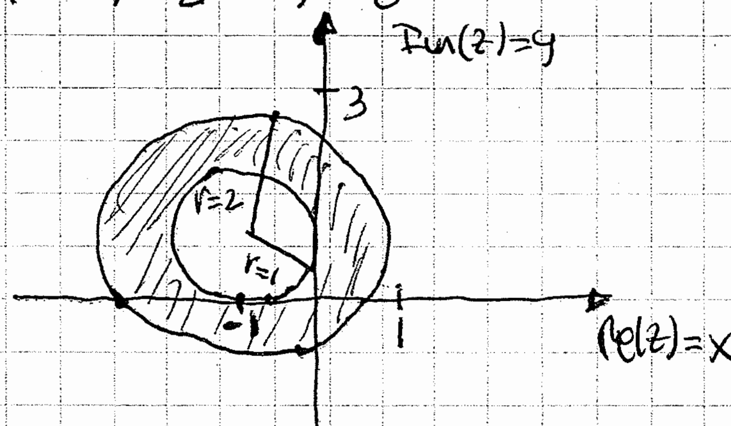
SOL: AQUÍ $z_0=0$:



$1<|z|\leq 2.$

(2) ¿Qué región describe la desigualdad $1<|z+1-i|<2$?

Sol: Aquí $r_1=1$, $r_2=2$, $z_0=-1+i$.



$1<|z+1-i|<2.$

Comentario.

En los siguientes ejemplos las regiones pueden ser rectas ó cónicas (circunferencias, hipérbola y elipse).

(3) Describa la región para: $\text{Im}\left[\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{2}$.

SOL: NOTA: $Im[z]$ PARTE IMAGINARIA DE z. (53)

SEA $z = x+iy$.

$$Im\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2} \quad ; \quad Im\left[\frac{1}{x+iy}\right] = \frac{1}{2}$$

$$Im\left[\frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}\right] = \frac{1}{2} \quad ; \quad Im\left[\frac{x-iy}{x^2-i^2y^2}\right] = \frac{1}{2} \quad ; \quad i^2 = -1$$

$$Im\left[\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right] = Im\left[\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{1}{2}$$

RECUERDE EL: $\boxed{Im[x+iy] = y}$

EN NUESTRO PROBLEMA EL $Im[z]$ ES:

$$-\frac{y}{x^2+y^2} = 1/2 \quad ; \quad -y2 = \cancel{x}^2+y^2$$

$$-2y = x^2+y^2 \quad ; \quad x^2+y^2+2y = 0$$

COMPLETANDO CUADRADO EN y.

$$x^2+y^2+2y+1-1 = 0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2 = 1 \text{ CIRCUNFERENCIA}$$

CENTRO $(0,-1)$; RADIO $r=1$.

(4) DESCRIBA LA REGIÓN SI $Re[z^2] = 1$.

SOL: $z = x+iy$; $Re[z] = Re[x+iy] = x$ PARTE REAL DE z.

$$Re[z^2] = Re[(x+iy)^2] = Re[x^2+i2xy+i^2y^2] = Re[x^2+i2xy-y^2] = 1$$

$$Re[x^2-y^2+i2xy] = 1 \Rightarrow x^2-y^2 = 1 \text{ ES HIPERBOLA.}$$

5 $|z-i|+|z+i|=5$ si $z=x+iy$

Sol:

$$|x+iy-i|+|x+iy+i|=5$$

$$|x+i(y-1)|+|x+i(y+1)|=5$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=5$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=5-\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\left[\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right]^2=\left[5-\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right]^2$$

$$x^2+(y-1)^2=25-10\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2$$

$$x^2+y^2-2y+1=25-10\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+y^2+2y+1$$

$$x^2+y^2-2y+1-x^2-y^2-2y-1-25=-10\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$-4y-25=-10\sqrt{x^2+(y+1)^2} \; ; \; 4y+25=10\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$(4y+25)^2=\left[10\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right]^2$$

$$16y^2+200y+625=100\left(x^2+(y+1)^2\right)=100\left(x^2+y^2+2y+1\right)$$

$$16y^2+200y+625=100x^2+100y^2+200y+200$$

$$16y^2+200y-100x^2-100y^2-200y=200-625$$

$$16y^2-100x^2-100y^2=-425 \; ; \; -84y^2-100x^2=-425.$$

$$-100x^2-84y^2=-425 \; ; \; 100x^2+84y^2=425$$

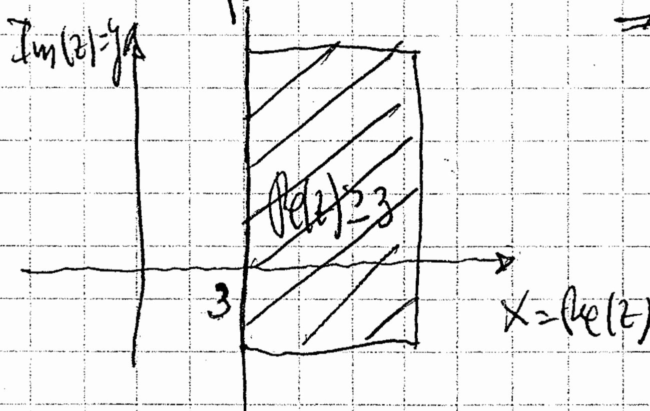
$$\frac{100}{425}x^2+\frac{84}{425}y^2=\frac{425}{425} \Rightarrow \frac{x^2}{0.24}+\frac{y^2}{3.36}=1 \;//\; \text{ELIPSE.}$$

6 a) $Re(z) \geq 3$ b) $Re[z] \geq 1$ y $Im(z) \leq 1$

Sol: c) $|z| \leq 4$ d) $|z| > 4$.

$$z = x + iy$$

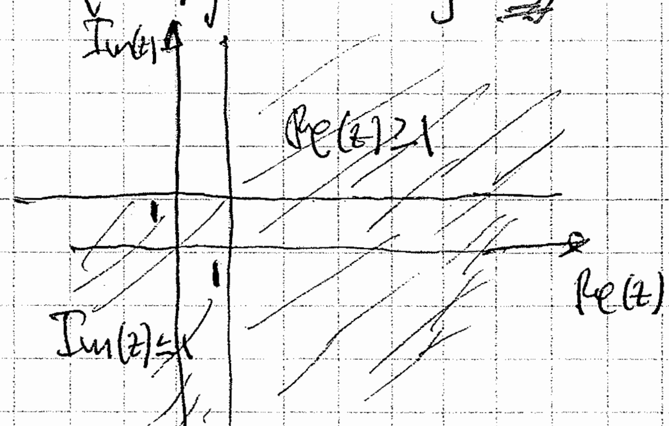
a) $Re(z) \geq 3 \Rightarrow Re(x+iy) \geq 3 \therefore x \geq 3$.



b) $Re(z) \geq 1$ y $Im(z) \leq 1$

$Re(z) \geq 1 \Rightarrow Re(x+iy) \geq 1 \therefore x \geq 1$

$Im(z) \leq 1 \Rightarrow Im(x+yi) \leq 1 \therefore y \leq 1$



c) $|z| < 4$

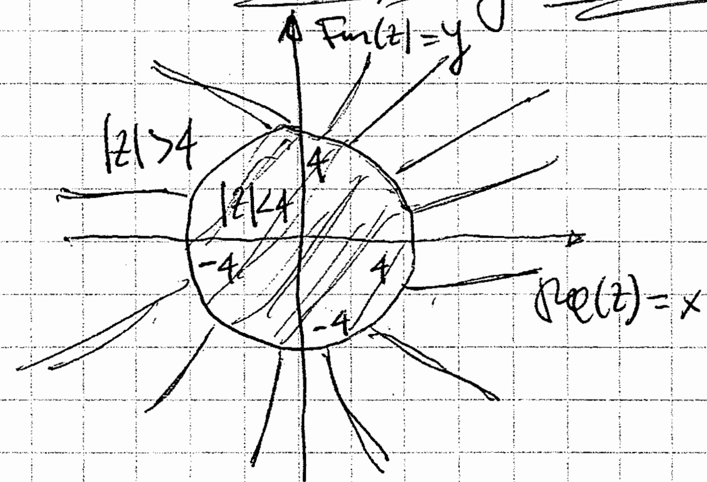
$|z| < 4 \Rightarrow |x+iy| < 4$; $\sqrt{x^2+y^2} < 4$; $x^2+y^2 < 16$

Circunferencia centro $(0,0)$ y radio $r=4$.

d) $|z|>4$

$|z|>4;\ |x+iy|>4;\ \sqrt{x^2+y^2}>4;\ x^2+y^2>16$

CIRCUNFERENCIA CENTRO $(0,0)$ y RADIO $r=4$.



TAREA 1 AVANZADAS. T1-1

1. EFECTUE LAS SIGUIENTES OPERACIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS.

a) $(3-2i)(4+5i)+(3-2i)(4-5i)$.

R: $24-16i$.

b) $(2-i)(4+3i)(5+2i)$. c) $(3+4i)-(2-3i)$

R: $51+32i$. R: $1+7i$.

d) $(7-7i)-(7+6i)$ R: $-13i$.

e) $\dfrac{3-2i}{4+3i}$ R: $\dfrac{6}{25}-\dfrac{17}{25}i$

f) $\dfrac{2-2i}{7+i}+\dfrac{3+4i}{2-3i}$ R: $\left(\dfrac{6}{25}-\dfrac{6}{13}\right)+\left(\dfrac{17}{13}-\dfrac{8}{25}\right)i$.

2) REDUCIR LOS SIGUIENTES NÚMEROS A LA FORMA $X+iY$.

a) $i^4-3i^3+4i^2+2i-6$ R: $-9+5i$.

b) $\left[\dfrac{2i}{1+i}\right]^4$ R: -4.

c) ENCONTRAR LOS NÚMEROS REALES X y Y TAL QUE:

a) $4x+i2xy-iy=5+3i$. R: $x=\dfrac{5}{4}$; $y=2$.

b) $2x-3iy+4ix-2y-1+i10=x+y+2-i(y-x+3)$. R: COMPROBARLO

TAREA 1

T-I-2

(1) EFECTUAR LAS SIGUIENTES OPERACIONES:

(a) $\left|3(2+i)-4(3-2i)\right|$ (R) $\sqrt{157}$

(b) $(2+i)^3-3(2+i)^2+4(2+i)-8$ (R) $-7+3i$.

(c) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$ (R): $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(d) $\left|\frac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}\right|^2$. (R): 1.

(e) PROBAR QUE EL NÚMERO $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ SATISFACE LA ECUACIÓN $\frac{3}{z+1}-\frac{1}{z}=1$.

(f) DEMOSTRAR QUE: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

(g) PROBAR QUE: $\left(e^{i\theta}\right)^{-1}=e^{-i\theta}$.

(h) UTILIZANDO EULER CON $\cos^4\theta=\left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^4$,

DEMOSTRAR QUE: $\cos^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$.

(i) CALCULAR EL MÓDULO DE: $\left|\frac{x+iy}{x-iy}\right|^n$ TAL QUE $n\geq 0$.

TAREA 1

T-1-3

(j) DEMOSTRAR $\left(\dfrac{1+i\,tg\theta}{1-i\,tg\theta}\right)^n = \dfrac{1+i\,tg\,n\theta}{1-i\,tg\,n\theta}$.

(3) UTILIZAR LA FORMA POLAR O DE MOIVRE Y EXPRESARLO EN LA NOTACIÓN $x+iy$.

(a) $(4+i4\sqrt{3})^5$ — R. $8^5\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) $(2\sqrt{3}+i2)^6$ — R. $-4^6=-4096$.

(c) $\left(\dfrac{5+i5}{10\sqrt{3}+i10}\right)^6$ — R. $\dfrac{i}{512}$.

(d) $\left(\dfrac{6\sqrt{3}+i6}{6+i6}\right)^{-3}$ — R. $\frac{1}{4}+i\frac{1}{4}$.

(e) $(\sqrt{3}+i)^2(1+i)$ — R. $\dfrac{25}{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right)$

(f) $\left(\dfrac{5\angle 15^\circ}{10\angle 30^\circ}\right)^{12}$ — R. $\dfrac{1}{4096}$.

(g) SEA $w\neq 1$ ALGUNA RAIZ ENESIMA DE LA UNIDAD. PROBAR QUE, PARA ALGÚN ENTERO NO-NEGATIVO $n\neq 1$, $1+w+w^2+\dots+w^{n-1}=0$

TAREA 1

T-1 4

4. DETERMINE LAS RAÍCES O CEROS DE:

a) $z^5 + z^4 + z^3 + z + 1 = 0$ R: $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) GRAFICAR LAS RAÍCES. $1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) HALLAR LAS CINCO RAÍCES DE $(1+i\sqrt{3})$ ó $(1+i\sqrt{3})^{1/5}$,

GRAFICAR Y COMPROBAR.

R: $w_0 = \sqrt[5]{2}\, e^{i[\pi/15]}$; $w_1 = \sqrt[5]{2}\, e^{i 7\pi/15}$; $w_3 = \sqrt[5]{2}\, e^{i 19\pi/15}$

y $w_4 = \sqrt[5]{2}\, e^{i 5\pi/3}$.

d) DESPEJE w, HALLAR LAS RAÍCES, GRAFICAR Y

COMPROBAR SUS RESULTADOS CONSIDERANDO $\theta = -\frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$

RESPECTIVAMENTE DE:

1) $w^{4/3} + 2i = 0$ R: si $\theta = 270° = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 1.68 e^{i 9\pi/8}$; $w_1 = 1.68 e^{i 21\pi/8}$

$1.68\, e^{i \frac{33}{8}\pi}$ y $w_3 = 1.68\, e^{i 45\pi/8}$.

si $\theta = -\frac{\pi}{2} = -90°$; $1.68\, e^{-i 3\pi/8}$; $1.68\, e^{i 9\pi/8}$; $1.68\, e^{i 21\pi/8}$;

y w $1.68 e^{i 33\pi/8}$.

TAREA 1

T1-S

(e) Despejar ω de las siguientes ecuaciones y hallar sus raíces respectivas.

(1) $\omega^5 - 1 = 0$. (2) $\omega^6 + 1 = 0$.

R(1): $1, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{i6\pi/5}$ y $e^{i8\pi/5}$.

R(2): $e^{i\pi/6}, e^{i3\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i9\pi/6}$ y $e^{i11\pi/6}$

(f) Encontrar las tres raíces y graficarlas de:

$$\omega = (-1+i)^{1/3} = (-1,1)^{1/3}.$$

R: $\omega_0 = 2^{1/6} e^{i\pi/4}$; $\omega_1 = 2^{1/6} e^{i11\pi/12}$; $\omega_2 = 2^{1/6} e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

(g) Encontrar las raíces de:

$$\omega^5 + 16\omega - \omega^4 - 16 = 0$$

R: $1, 2e^{i\pi/4}, 2e^{i3\pi/4}, 2e^{i5\pi/4}$ y $2e^{i7\pi/4}$.

(f) Encontrar las tres raíces cúbicas de la unidad.

(1) Comprobación (2) Graficar los ceros (3) Determine el área del triángulo.

R: $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{i2\pi/3}$, $\omega_2 = e^{i4\pi/3}$ $\therefore$ Área $= 1.3\, u^2$.

TAREA 1 — T-1-6

5 JUSTIFIQUE QUE TIPO DE CÓNICA O RECTA RETRATA.

1) $\operatorname{Im}(z^2)=4$

R_1: HIPÉRBOLA $x^2-y^2=4$

2) $|z-i|=2$

R_2: CIRCUNFERENCIA: $x^2+(y+1)^2=5$
$C(0,-1)$; $r=\sqrt{5}$

3) $|z|-z=2+i$ R: NO TIENE SOLUCIÓN ¿PORQUE?

4) $|z+i|<|z-1|$ R: RECTA $y=-x$.

5) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|=2$ R: CIRCUNFERENCIA: $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$

$C\left(\frac{5}{3},0\right)$; $r=\frac{4}{3}$

6) $|z-i|=\operatorname{Im}(z)+1$ R: $y=\dfrac{x^2}{4}$ PARÁBOLA.

7) $\operatorname{Im}\left[\overline{z}+3i\right]=6$ R: $y=-3$ RECTA.

8) UTILIZAR LA SUMA PARCIAL $S_n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ CON $z=e^{i\theta}$ DE LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{\alpha=0}^{\infty} z^{\alpha}=1+z+z^2+z^3+\dots+z^k+\dots$

Y LA FÓRMULA DE MOIVRE EN LA PRUEBA DE LA IGUALDAD:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\theta/2)}.$$