Después, por la fórmula (4) se tiene,

$$y_2 = \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int dx/x}}{\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\right)^2} dx \qquad \Leftarrow \boxed{e^{-\int dx/x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \int \csc^2 x \, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} (-\cot x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Puesto que la ecuación diferencial es homogénea, se puede descartar el signo negativo y tomar a $y_2 = (\cos x)/\sqrt{x}$ como la segunda solución. ■

Observe que en el Ejemplo 3 $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada en el intervalo más grande $(0, \infty)$.

Observación Se ha deducido e ilustrado cómo usar (4) debido a que esta fórmula se verá nuevamente en la siguiente sección y en la Secc. 6.1. Usamos (4) simplemente para ahorrar tiempo en la obtención del resultado deseado. El profesor de la materia indicará cuándo se debe memorizar (4) y cuándo se deberán saber los principios básicos de reducción de orden.

EJERCICIOS 4.2

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 587

En los Problemas 1-30 encuentre una segunda solución para cada ecuación diferencial. Use la reducción de orden o la fórmula (4) como se indicó. Suponga un intervalo apropiado de validez.

1. $y'' + 5y' = 0; \quad y_1 = 1$
2. $y'' - y' = 0; \quad y_1 = 1$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$
4. $y'' + 2y' + y = 0; \quad y_1 = xe^{-x}$
5. $y'' + 16y = 0; \quad y_1 = \cos 4x$
6. $y'' + 9y = 0; \quad y_1 = \operatorname{sen} 3x$
7. $y'' - y = 0; \quad y_1 = \cosh x$
8. $y'' - 25y = 0; \quad y_1 = e^{5x}$
9. $9y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y_1 = e^{2x/3}$
10. $6y'' + y' - y = 0; \quad y_1 = e^{x/3}$
11. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0; \quad y_1 = x^4$
12. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0; \quad y_1 = x^2$
13. $xy'' + y' = 0; \quad y_1 = \ln x$
14. $4x^2y'' + y = 0; \quad y_1 = x^{1/2} \ln x$
15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0; \quad y_1 = x + 1$
16. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0; \quad y_1 = 1$
17. $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \quad y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$
18. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0; \quad y_1 = x^2 \cos(\ln x)$

19. $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y_1 = e^{-2x}$

20. $(1 + x)y'' + xy' - y = 0; \quad y_1 = x$

21. $x^2y'' - xy' + y = 0; \quad y_1 = x$

22. $x^2y'' - 20y = 0; \quad y_1 = x^{-4}$

23. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0; \quad y_1 = x^3 \ln x$

24. $x^2y'' + xy' + y = 0; \quad y_1 = \cos(\ln x)$

25. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0; \quad y_1 = x^2 + x^3$

26. $x^2y'' - 7xy' - 20y = 0; \quad y_1 = x^{10}$

27. $(3x + 1)y'' - (9x + 6)y' + 9y = 0; \quad y_1 = e^{3x}$

28. $xy'' - (x + 1)y' + y = 0; \quad y_1 = e^x$

29. $y'' - 3(\tan x)y' = 0; \quad y_1 = 1$

30. $xy'' - (2 + x)y' = 0; \quad y_1 = 1$

En los Problemas 31-34 utilice el método de reducción de orden para encontrar una solución de la ecuación no homogénea dada. La función asociada $y_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Determine una segunda solución de esta ecuación y una solución particular de la ecuación no homogénea.

31. $y'' - 4y = 2; \quad y_1 = e^{-2x}$

32. $y'' + y' = 1; \quad y_1 = 1$

33. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}; \quad y_1 = e^x$

34. $y'' - 4y' + 3y = x; \quad y_1 = e^x$

35. Verifique por sustitución directa que la fórmula (4) satisface la ecuación (2).

4.3 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Se ha visto que la ecuación lineal de primer orden $dy/dx + ay = 0$, donde a es una constante, tiene la solución exponencial $y = c_1e^{-ax}$ en $(-\infty, \infty)$. Por consiguiente, es natural tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $(-\infty, \infty)$ para ecuaciones de orden superior como

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \tag{1}$$

en donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes. Lo sorprendente es que *todas* las soluciones de (1) son funciones exponenciales o se construyen a partir de funciones exponenciales. Se empezará considerando el caso particular de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Ecuación auxiliar

Si se prueba una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$ de tal manera que la ecuación (2) se convierte en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Debido a que e^{mx} nunca se anula para valores reales de x, es evidente que la única manera de que esta función exponencial pueda satisfacer la ecuación diferencial es seleccionando m de tal manera que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3}$$