Tarea #5 Ecuaciones Exactas y Reducibles a Exactas
FACTOR INTEGRANTE



## Ejercicios 2.4

*Las respuestas a los problemas de número impar empiezan en la página 482.*

En los Problemas 1-24 determine si la ecuación dada es exacta. Si es exacta, resuélvala.

1. $(2x + 4)\,dx + (3y - 1)\,dy = 0$
2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$
4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x\cos y - y)\,dy = 0$
5. $(2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy = 0$
6. $\left(2y - \dfrac{1}{x} + \cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$
7. $(x + y)(x - y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$
8. $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$
9. $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)\,dx + (3xy^2 + 2y\cos x)\,dy = 0$
10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$
11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\dfrac{1}{y} + x\ln y\right)dy = 0$
12. $\dfrac{2x}{y}\,dx - \dfrac{x^2}{y^2}\,dy = 0$
13. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$
14. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$
15. $\left(1 - \dfrac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)dy = 0$
16. $(e^y + 2xy\cosh x)y' + xy^2\operatorname{senh} x + y^2\cosh x = 0$
17. $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1 + 9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$
18. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$
19. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x\cos y\,dy = 0$
20. $(3x\cos 3x + \operatorname{sen} 3x - 3)\,dx + (2y + 5)\,dy = 0$
21. $(1 - 2x^2 - 2y)\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$
22. $(2y\operatorname{sen} x\cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$
23. $(4x^3y - 15x^2 - y)\,dx + (x^4 + 3y^2 - x)\,dy = 0$
24. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

En los Problemas 25-30 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica.

25. $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0,\quad y(1) = 1$
26. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0,\quad y(0) = 1$
27. $(4y + 2x - 5)\,dx + (6y + 4x - 1)\,dy = 0,\quad y(-1) = 2$
28. $\left(\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{2y^4} = 0,\quad y(1) = 1$
29. $(y^2\cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y\operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\,dy = 0,\quad y(0) = e$
30. $\left(\dfrac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right)\dfrac{dy}{dx} = y(y + \operatorname{sen} x),\quad y(0) = 1$

En los Problemas 31 y 34 halle el valor de $k$ de modo que la ecuación diferencial dada sea exacta.

31. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$
32. $(2x - y\operatorname{sen} xy + ky^4)\,dx - (20xy^3 + x\operatorname{sen} xy)\,dy = 0$
33. $(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + ke^x - 1)\,dy = 0$
34. $(6xy^3 + \cos y)\,dx + (kx^2y^2 - x\operatorname{sen} y)\,dy = 0$
35. Obtenga una función $M(x, y)$ de modo que la ecuación diferencial sea exacta.

$$M(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

**36.** Determine una función $N(x, y)$ de modo que la ecuación diferencial sea exacta.

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0$$

## Problemas diversos

En ocasiones es posible transformar una ecuación diferencial no exacta $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ en una ecuación exacta multiplicándola por un **factor integrante** $\mu(x, y)$. En los Problemas 37-42, resuelva la ecuación y verifique si $\mu(x, y)$ es un factor integrante.*

## Ejemplo 6

Resolver $\quad (x + y)\,dx + x \ln x\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = \dfrac{1}{x}$

en $0 < x < \infty$.

**Solución** Sean $M(x, y) = x + y$ y $N(x, y) = x \ln x$ de modo que $\partial M/\partial y = 1$ y $\partial N/\partial x = 1 + \ln x$; por lo tanto, la ecuación no es exacta. Sin embargo, si multiplicamos la ecuación por $\mu(x, y) = 1/x$ se obtiene

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \ln x\,dy = 0.$$

A partir de esta última forma se hacen las identificaciones:

$$M(x, y) = 1 + y/x, \quad N(x, y) = \ln x, \quad \partial M/\partial y = 1/x = \partial N/\partial x.$$

Por lo tanto, la segunda ecuación diferencial es exacta. Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x} = M(x, y)$$

$$f(x, y) = x + y \ln x + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + \ln x + g'(y) = \ln x$$

lo cual implica

$$g'(y) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(y) = c.$$

Por consiguiente $f(x, y) = x + y \ln x + c$. Se verifica fácilmente que

$$x + y \ln x + c = 0$$

es solución de ambas ecuaciones en $0 < x < \infty$.

**37.** $6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = y^2$

**38.** $-y^2\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = 1/x^2y$

**39.** $(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)\,dx + 2x \cos x\,dy = 0,$ $\mu(x, y) = xy$

* Las dos ecuaciones $M\,dx + N\,dy = 0$ y $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ no necesariamente son equivalentes en el sentido de que una solución de una de ellas sea también solución de la otra. Como consecuencia de la multiplicación, puede perderse o ganarse una solución.

**40.** $y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0$, $\mu(x, y) = e^x$

**41.** $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0$, $\mu(x, y) = x$

**42.** $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0$, $\mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

**43.** Demuestre que cualquier ecuación diferencial separable de primer orden también es exacta.

## 2.5 Ecuaciones lineales

En el Capítulo 1 se definió la forma general de una ecuación diferencial *lineal* de orden $n$ como

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Se recuerda al lector que la linealidad significa que todos los coeficientes son solamente funciones de $x$ y que $y$ y todas sus derivadas están a la primera potencia. Ahora bien, cuando $n = 1$, se obtiene la ecuación lineal de primer orden

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Dividiendo entre $a_1(x)$ resulta la forma más útil

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{1}$$

Se busca la solución de (1) en un intervalo $I$ en el cual $P(x)$ y $f(x)$ son continuas. En la discusión que sigue se supone tácitamente que (1) tiene solución.

### *Un factor integrante*

Supóngase que la ecuación (1) se escribe en la forma diferencial

$$dy + [P(x)y - f(x)]\,dx = 0. \tag{2}$$

Las ecuaciones lineales tienen la conveniente propiedad de que siempre es posible encontrar una función $\mu(x)$ tal que el múltiplo de (2)

$$\mu(x)\,dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]\,dx = 0 \tag{3}$$

es una ecuación diferencial exacta. Por el Teorema 2.2 se sabe que el miembro primer de la ecuación (3) será una diferencial exacta si

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)] \tag{4}$$

o bien

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x).$$

Esta es una ecuación separable a partir de la cual puede determinarse $\mu(x)$. Se tiene

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\,dx$$