INTEGRALES DE LÍNEA COMPLEJAS Ó DE CONTORNO.

INTRODUCCIÓN:

UNA CURVA C ES UN CONJUNTO DE PUNTOS.

$z = (x, y)$ TAL QUE:

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t) \quad a \leq t \leq b \; (*)$$

DONDE $x(t)$ y $y(t)$ SON FUNCIONES CONTINUAS DEL PARÁMETRO REAL "t".

LAS ECUACIONES DADAS EN $(*)$ SON LLAMADAS <u>ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA CURVA</u>. ASÍ, PARA CADA VALOR DE t EN EL INTERVALO $[a, b]$ OBTENEMOS UN PUNTO z EN EL PLANO COMPLEJO DEFINIDO POR:

$$z = z(t) = x + iy = x(t) + i\,y(t)$$

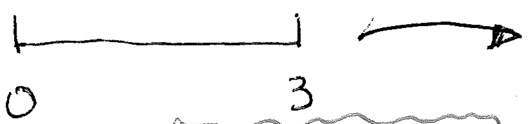
$$\therefore \; z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad a \leq t \leq b.$$

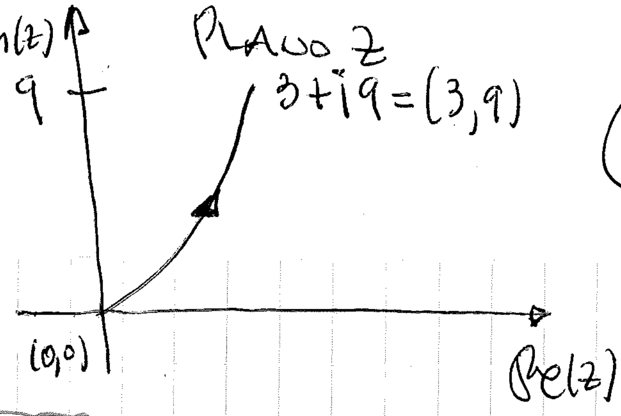
EJEMPLO:

① SEAN $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ SI $0 \leq t \leq 3$.

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = t + i t^2, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

LAS FUNCIONES t y t^2 SON FUNCIONES CONTINUAS EN EL INTERVALO DADO, POR TANTO DESCRIBIRÁN UNA CURVA EN EL PLANO Z.





$z(t)=t+it^2, 0\leq t\leq 3$

$z(0)=0+i(0)^2=(0,0)$

$z(3)=3+i(3)^2=9+i9=(3,9)$

• DEF C ES UNA CURVA SIMPLE O ARCO DE JORDAN SI NO SE CRUZA CONSIGO MISMA; ESTO ES, $z(t_1)\neq z(t_2)$ CUANDO $t_1\neq t_2$.

SI C ES UNA CURVA SIMPLE, EXCEPTO POR EL HECHO DE QUE $z(b)=z(a)$ SE DICE QUE C ES UNA CURVA SIMPLE Y CERRADA O CURVA DE JORDAN.

EJEMPLO.

(2) SEAN $X=X(t)=\cos t$; $y=y(t)=\operatorname{sen} t$ $\quad 0\leq t\leq 2\pi$.

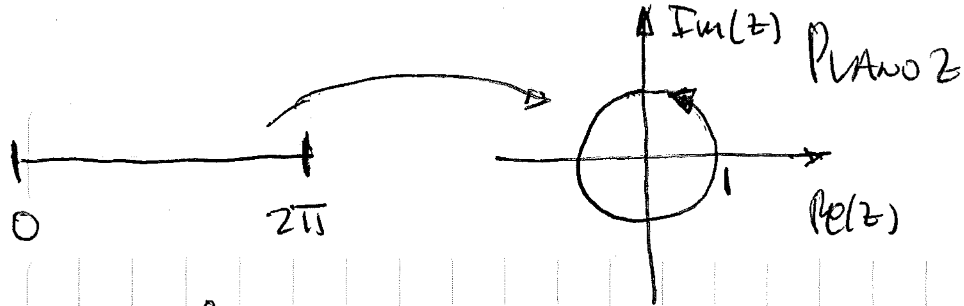
HECHO $z(t)=x(t)+iy(t)=\cos t+i\operatorname{sen} t \quad , 0\leq t\leq 2\pi$.

$z(0)=\cos(0)+i\operatorname{sen}(0)=1$

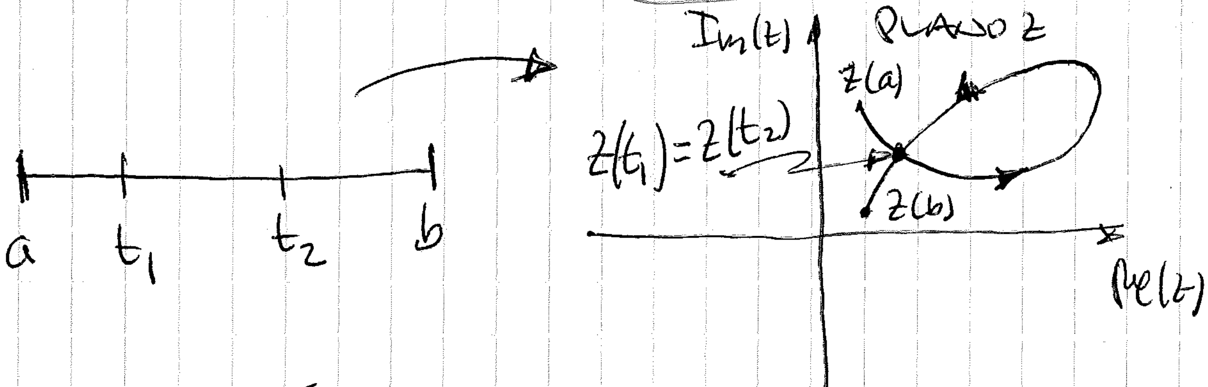
$z(2\pi)=\cos(2\pi)+i\operatorname{sen}(2\pi)=1$

ADEMÁS: $\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=x^2+y^2=1$.

REPRESENTA UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO. (ES CURVA SIMPLE Y CERRADA).



UN EJEMPLO DE UNA CURVA NO-SIMPLE ES:



• DEF. LA FUNCIÓN DE VALOR COMPLEJO

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)\ ;\ a \leq t \leq b$$

SE DICE QUE ES DIFERENCIABLE DEL PARÁMETRO REAL "t"

SI $x(t)$ y $y(t)$ SON DIFERENCIABLES y:

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} = x'(t) + i\,y'(t).$$

• DEF UNA CURVA C, DESCRITA POR $z(t)$, SE LLAMA SUAVE SI $z'(t)$ EXISTE, ES CONTINUA EN EL INTERVALO $[a,b]$ y SI $z'(t)$ NUNCA SE HACE CERO EN EL INTERVALO DADO.

EJEMPLO: LAS CURVAS DADAS POR:

(3)

1) $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$ SI $0 \leq t \leq 2\pi$

SOL> $(e^{it})' = i e^{it} \neq 0$ ES UNA CURVA SUAVE.

4) $z(t) = t + it^2,\ 0 \leq t \leq 3$.

SOL: $z'(t) = 1 + i2t$

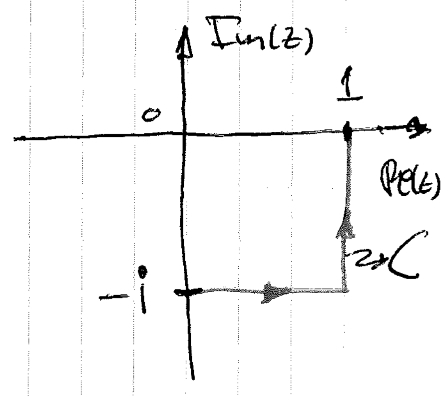
$z'(0) = 1 + i2(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$.

$z'(3) = 1 + i2(3) = 1 + i6 \neq 0$.

$\therefore$ $z(t)$ ES UNA <u>CURVA SUAVE</u>.

5)

$$C: z(t) = \begin{cases} 1 - i(1-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 + t - i & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$



- $z(t) = 1 - i(1-t),\ 0 \leq t \leq 1$

$z(0) = 1 - i(1-0) = 1 - i = (1,-1)$

$z(1) = 1 - i(1-1) = 1 - i(0) = 1 = (1,0)$

- $z(t) = 1 + t - i,\ -1 \leq t \leq 0$

$z(-1) = 1 - 1 - i = 0 - i = -i = (0,-1)$

$z(0) = 1 + 0 - i = 1 - i = (1,-1)$

- <u>INTEGRAL DE LÍNEA O CONTORNO COMPLEJA</u>.

- <u>DEF</u>: SEA $C: z = z(t),\ a \leq t \leq b$, UNA CURVA SUAVE, y $f(z) = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$ CONTINUA EN C. ASÍ, LA INTEGRAL DE LÍNEA O CONTORNO COMPLEJO DE f SOBRE C ESTÁ DADA POR:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[u(z(t)) + i\,v(z(t))\right]\left[x'(t) + i\,y'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \left[u(z(t))\,x'(t) - v(z(t))\,y'(t)\right] dt + i\int_a^b \left[u(z(t))\,y'(t) + v(z(t))\,x'(t)\right] dt.$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)\,dt$$

COMENTARIOS.

(A) LA INTEGRAL DE LÍNEA SOBRE UNA CURVA SUAVE POR PARTES SE OBTIENE AL APLICARLE LA DEFINICIÓN ANTERIOR A UN NÚMERO FINITO DE INTERVALOS CERRADOS, EN LOS CUALES $z(t)$ ES SUAVE, Y SUMAR RESULTADOS.

(B) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA.

(I) SEA K UNA CONSTANTE COMPLEJA.

$$\int_C K f(z)\,dz = K\int_C f(z)\,dz.$$

II) SI C ES UNA CURVA QUE VA DESDE a HASTA b, $-C$ ES LA MISMA CURVA RECORRIDA DE b A a. EN ESTE CASO:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_{C} f(z)\,dz.$$

III) SI C ES UN CONTORNO, CON CURVAS SUAVES DEFINIDAS POR $C_1, C_2, \ldots, C_n$, ENTONCES:

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

EN GENERAL EL VALOR $\int_C f(z)\,dz$ DESDE UN PUNTO a HASTA UN PUNTO b, DEPENDERÁ DE LA TRAYECTORIA QUE SE SIGA PARA IR DEL PUNTO INICIAL AL PUNTO FINAL.

C) REGIONES CONEXAS SIMPLES Y CONEXAS MÚLTIPLES.

DECIMOS QUE UNA REGIÓN R ES CONEXA SIMPLE SI CUALQUIER CURVA CERRADA SENCILLA QUE SE ENCUENTRE EN R PUEDE ESCOGERSE HASTA LLEGAR A SER UN PUNTO SIN SALIR DE LA REGIÓN. UNA REGIÓN R QUE NO ES CONEXA SIMPLE SE LLAMA CONEXA MÚLTIPLE.

6 AHORA, CONSIDERE OTRA ECUACIÓN PARAMÉTRICA

ESTO ES: $x = 2t$ y $y = 2t$

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = 2t + i\,2t \text{ si } 0 \le t \le \frac{1}{2}.$$

VERIFICAR:

$$z(0) = 2(0) + i\,2(0) = 0 + i(0) = (0,0)$$

$$z\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) + i\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + i = (1,1)$$

SON CORRECTOS LOS PUNTOS.

$$z = 2t + i\,2t \Rightarrow dz = (2 + i\,2)\,dt$$

$$\int_C f(z) = \int_0^{1/2} (2t + 2t - i\,6t)(2 + i\,2)\,dt =$$

$$= (2 + i\,2) \int_0^{1/2} (4t - i\,6t)\,dt = (2 + i\,2)\left[\int_0^{1/2} 4t\,dt - i\,6\int_0^{1/2} t\right]$$

$$= (2 + i\,2)\left[2t^2\Big|_0^{1/2} - i\,6\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2}\right] = (2 + i\,2)\left[2\left[\frac{1}{4} - 0\right] - 3i\left[\frac{1}{4} - 0\right]\right]$$

$$= (2 + i\,2)\left[\frac{1}{2} - i\,\frac{3}{4}\right] = 2(1 + i)\,\frac{1}{2}\left[1 - i\,\frac{3}{2}\right] = (1 + i)\left(1 - i\,\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ I = (1 + i)\left(1 - i\,\frac{3}{2}\right)$$

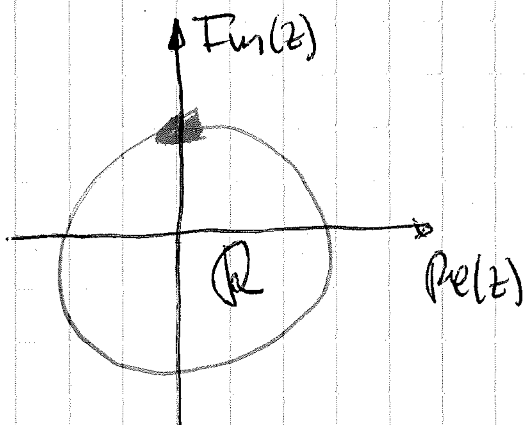
HECHOS:

$$y(t) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)t + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

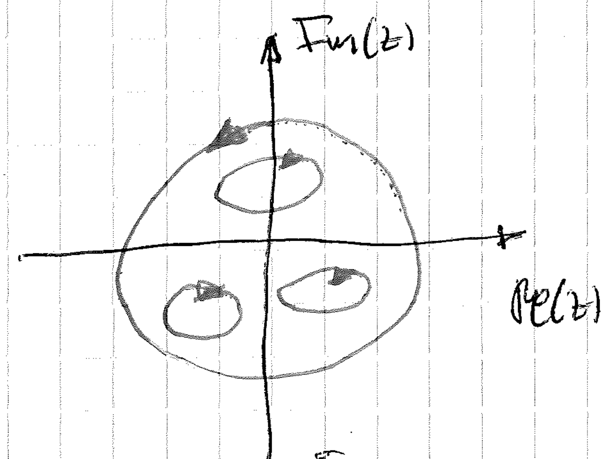
$$x(t) = (x_2 - x_1)\,t + x_1$$

$$y(t) = (y_2 - y_1)\,t + y_1$$

INTUITIVAMENTE, UNA REGIÓN CONEXA SIMPLE ES AQUELLA QUE NO TIENE AGUJEROS EN TANTO QUE UNA REGIÓN CONEXA MÚLTIPLE SÍ LOS TIENE.



REGIÓN CONEXA SIMPLE.

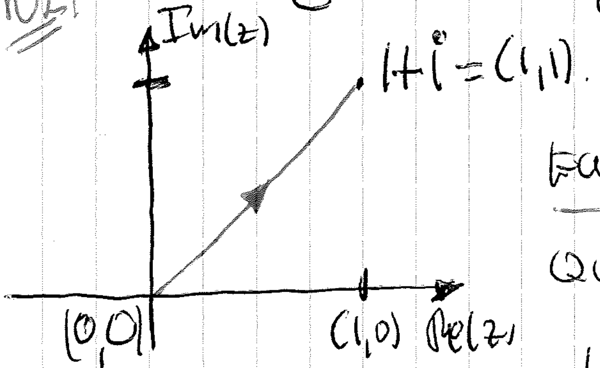


REGIÓN CONEXA MÚLTIPLE.

(7) EJEMPLOS. SEA C UN CONTORNO QUE VA DESDE $z=0=(0,0)$ A $z=1+i=(1,1)$ A LO LARGO DE UN SEGMENTO DE RECTA Y $f(z)=x+y-3xi$.

EVALÚE: $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=\int_0^{1+i}(x+y-i3x)\,dz$.

SOL:



TENEMOS QUE DETERMINAR LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS $(0,0)$ Y $(1,1)$.

LA ECUACIÓN ES:

SI HACEMOS $x=x(t)=t \Rightarrow y=y(t)=t$ CON $0\leq t\leq 1$.

SABEMOS QUE:

116

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad a \leq t \leq b.$$

$$x = x(t) = t \text{ y } y = y(t) = t \text{ si } 0 \leq t \leq 1.$$

$$z = z(t) = t + it \Rightarrow dz = (1+i)\,dt.$$

COMO: $f(z) = x + y - i3x$ ESTA DEFINIDA SOBRE C ENTONCES:

$$f(z) = f(z(t)) = t + t - i3t = 2t - i3t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

POR OTRO LADO DE LA DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 [2t - i3t](1+i)\,dt = (1+i)\int_0^1 [2t - i3t]\,dt$$

$$= (1+i)\left[\int_0^1 2t\,dt - i\int_0^1 3t\,dt\right] = (1+i)\left[t^2\Big|_0^1 - i\frac{3}{2}t\Big|_0^1\right]$$

$$= (1+i)\left[(1^2 - 0^2) - i\frac{3}{2}(1-0)\right] = (1+i)\left[1 - i\frac{3}{2}\right]$$

$$\therefore I = (1+i)\left(1 - i\frac{3}{2}\right).$$

VERIFICAR QUE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS SON

LAS CORRECTAS; ES DECIR, $z = z(t) = t + it$ CON $0 \leq t \leq 1$.

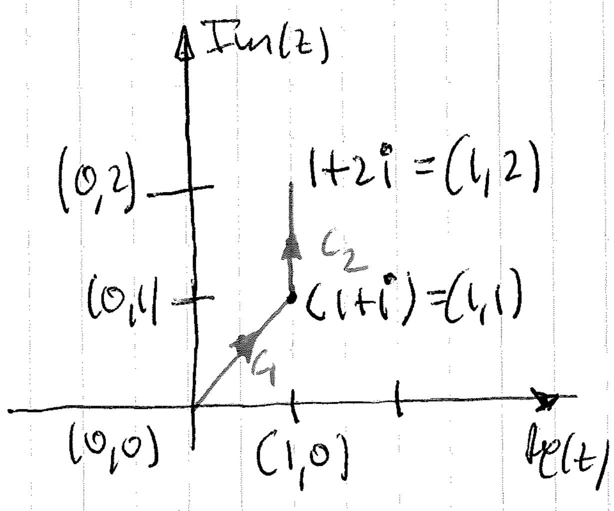
$t = 0 \Rightarrow z(0) = 0 + i(0) = 0 + 0 = (0,0)$ ES EL PUNTO INICIAL } VER

$t = 1 \Rightarrow z(1) = 1 + i(1) = 1 + i = (1,1)$ ES EL PUNTO FINAL } GRÁFICA

ES CORRECTA LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA.

⑧ EVALÚE LA INTEGRAL $I = \int_C (x^2 + i y^2)\, dz$

DONDE C ES LA FIGURA SIGUIENTE.



SOL

- PARA C_1:

$$(x_1, y_1) = (0,0)$$
$$(x_2, y_2) = (1,1)$$

$$y = y(t) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) t + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = \left(\frac{1-0}{1-0}\right) t + \frac{(1)(0)-(0)(0)}{1-0} = t$$

$$\therefore\ y = y(t) = t$$

$$(x_1, y_1) = (0,0)$$
$$(x_2, y_2) = (1,0)$$

$$x = x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1 = (1-0)t + 0 = t \Rightarrow x = x(t) = t$$

$$z = z(t) = x(t) + i y(t) = t + it\ ,\quad 0 \le t \le 1.$$

$$dz = (1+i)\, dt.$$

$$I_1 = \int_{C_1} (x^2 + i y^2)\, dz = \int_0^1 [t^2 + i t^2](1+i)\, dt$$ (118)

$$= (1+i)\int_0^1 [t^2 + i t^2]\, dt = (1+i)\left[\int_0^1 t^2 dt + i \int_0^1 t^2 dt\right]$$

$$= (1+i)\left[\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + i\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right] = (1+i)\left[\left(\frac{1}{3} - 0^3\right) + i\left(\frac{1}{3} - 0^3\right)\right]$$

$$= (1+i)\left[\frac{1}{3} + i\,\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}(1+i)(1+i) = \frac{1}{3}(1+i)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1 + 2i + i^2)\right] = \frac{1}{3}\left[1 + 2i - 1\right] = i\,\frac{2}{3} \quad \therefore I_1 = i\,\frac{2}{3}$$

PARA C_2: $\quad x = x(t) = 1$

AHORA: $\begin{array}{l}(x_1, y_1) = (0,1) \\ (x_2, y_2) = (0,2)\end{array} \Rightarrow y = y(t) = (y_2 - y_1)t + y_1 = (2-1)t + 0 = t$

$$\therefore y = y(t) = t$$

$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = 1 + i t$. $\quad$ si $1 \le t \le 2$

$z(1) = 1 + i(1) = 1 + i = (1,1)$

$z(2) = 1 + i2 = 1 + 2i = (1,2)$.

$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = 1 + i t \Rightarrow dz = i\,dt \quad , 1 \le t \le 2$.

$$I_2 = \int_{C_2} (x^2 + i y^2)\, dz = \int_1^2 ((1)^2 + i t^2)\, i\, dt = i \int_1^2 (1 + i t^2)\, dt$$

$$I_2 = i\left[\int_1^2 dt + i\int_1^2 t^2\,dt\right]$$

$$= i\left[t\Big|_1^2 + i\,\frac{t^3}{3}\Big|_1^2\right] = i\left[(2-1) + i\,\frac{1}{3}(8-1)\right]$$

$$= i\left[1 + i\,\frac{7}{3}\right] = i + i^2\,\frac{7}{3} = i - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3} + i$$

$$\therefore I_2 = -\frac{7}{3} + i$$

FINALMENTE:

$$I = I_1 + I_2 = i\,\frac{2}{3} - \frac{7}{3} + i = -\frac{7}{3} + i\left(\frac{2}{3} + 1\right) = -\frac{7}{3} + i\,\frac{5}{3}$$

$$\therefore I = -\frac{7}{3} + i\,\frac{5}{3}.$$

9) EVALÚE: $I = \int_C x\,dz$, TAL QUE $C: z = z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

SOL: $x = x(t) = \cos t$; $y = y(t) = \operatorname{sen} t$.

$$z = z(t) = e^{it} = \cos t + i\operatorname{sen} t = x(t) + i\,y(t) = \cos t + i\operatorname{sen} t$$

$$dz = (-\operatorname{sen} t + i\cos t)\,dt, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$I = \int_C x\,dz = \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t + i\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t\cos t + i\cos^2 t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\cos t + i\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$$

TABLAS.

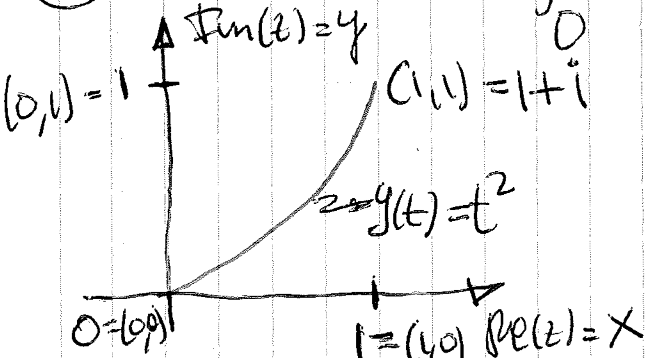
- $\int \operatorname{sen} at \cos at \, dt = \dfrac{\operatorname{sen}^2 at}{2a}$
- $\int \cos^2 at \, dt = \dfrac{t}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2at}{4a}$. $\int \cos^2 at \, dt = \dfrac{t}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2at}{4a}$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} + i\left[\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$= -\left[\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}^2 2\pi}{2}} - \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}^2 0}{2}}\right] + i\left[\frac{1}{2}(2\pi - 0) + \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4}} - \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen} 0}{4}}\right]$$

$$= i\left[\frac{2\pi}{2} - \frac{0}{2} + 0\right] = i\,\frac{2\pi}{2} = i\pi \quad \therefore I = i\pi$$

(10) EVALUE $I = \int_0^{1+i} (z-1)\,dz$ SOBRE LA PARABOLA $y = x^2$.



SOL $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $0 \le t \le 1$.

$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = t + i\,t^2$

$z = t + it^2$, $0 \le t \le 1$

$dz = (1 + i2t)\,dt$.

$$z - 1 = x + iy - 1 = t + it^2 - 1 = (t-1) + it^2$$

$$I = \int_0^{1+i} (z-1)\,dz = \int_0^1 \left[(t-1) + it^2\right] dz = \int_0^1 \left[t - 1 + it^2\right] (1 + i2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[(t-1)+it^2\right](1+i2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[(t-1)+it^2+i2t(t-1)+2i^2t^3\right]dt$$

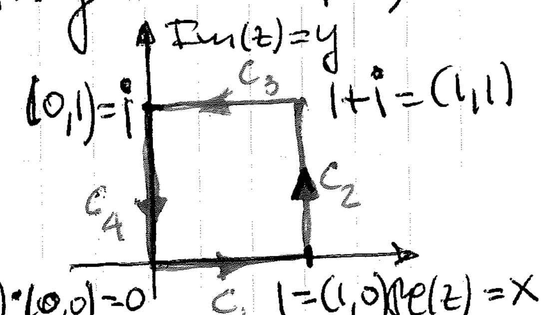
$$= \int_0^1 \left[t-1+it^2+i2t^2-i2t-2t^3\right]dt$$

$$= \int_0^1 \left[t-1+3it^2-i2t-2t^3\right]dt = \left[\frac{t^2}{2}-t+3i\frac{t^3}{3}-2i\frac{t^2}{2}-2\frac{t^4}{4}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}-1+i-i-\frac{1}{2} = -1 \qquad \therefore I = -1$$

(11) SEA C LA FRONTERA DEL CUADRADO CON VÉRTICES EN $z=0=(0,0)$, $z=1=(1,0)$, $z=1+i=(1,1)$ y $z=i=(0,1)$,

EVALÚE:
$$I = \pi\int_C e^{\pi\bar{z}}\,dz.$$



SOL:

$$I = \int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4} \ ; \quad \bar{z} = \overline{z(t)} = x(t)-iy(t);$$

C_1: $x=t,\ y=0,\ 0\le t\le 1 \Rightarrow z=z(t)=x+iy=t+i(0)=t \Rightarrow dz=dt$

$$\bar{z} = x-iy = t-i(0) = t \ ; \quad 0\le t\le 1$$

$$I_1 = \int_{C_1} f(z)\,dz = \pi\int_0^1 e^{\pi\bar{z}}\,dt = \pi\int_0^1 e^{\pi t}\,dt = \frac{\pi}{\pi}e^{\pi t}\Big|_0^1 = e^{\pi(1)}-e^0$$

$$= e^{\pi}-1 \qquad \therefore I_1 = e^{\pi}-1$$

$$\boxed{\int e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a}}$$

$\underline{C_2}$: $x=1;\ y=t,\ 0\le t\le 1$

$$z=z(t)=x(t)+iy(t)=1+it \Rightarrow dz=i\,dt$$

$$\bar{z}=\bar{z}(t)=x-iy=1-it.$$

$$e^{\pi\bar{z}}=e^{\pi(1-it)}=e^{\pi}e^{-i\pi t}$$

$$I_2=\int_{C_2} f(z)\,dz=\pi\int_{C_2} e^{\pi\bar{z}}\,dt=i\pi\int_0^1 e^{\pi}\,e^{-i\pi t}\,dt=i\pi e^{\pi}\int_0^1 e^{-i\pi t}\,dt$$

$$=\frac{i e^{\pi}\pi}{-i\pi}\left[e^{-i\pi t}\right]_0^1=-e^{\pi}\left[e^{-i\pi}-e^{0}\right]=-e^{\pi}\left[-1-1\right]=-e^{\pi}(-2)$$

$$\therefore I_2=2e^{\pi}$$

$$\boxed{e^{-i\pi}=\cos\pi-i\,\text{sen}\,\pi=-1.}$$

$\underline{C_3}$: $x=t,\ y=1;\ 0\le t\le 1;\ z=z(t)=x+iy=t+i \Rightarrow dz=dt$

$$\bar{z}=x-iy=t-i$$

$$I_3=\int_{C_3} f(z)\,dz=\pi\int_{C_3} e^{\pi\bar{z}}\,dz$$

$$=-\pi\int_0^1 e^{\pi t}\,e^{-i\pi}\,dt=-\pi e^{-i\pi}\int_0^1 e^{\pi t}\,dt=\frac{-\pi(-1)}{\pi}\cdot e^{\pi t}\Big|_0^1$$

$$=e^{\pi}-e^{0}=e^{\pi}-1 \quad \therefore I_3=e^{\pi}-1$$

$\underline{C_4}$: $x=0,\ \therefore\ y=t,\ 0\le t\le 1;\ z=z(t)=x+iy=0+it \Rightarrow dz=i\,dt$

$$\bar{z}=x-iy=0-it=-it.$$

$$I_4=\int_{C_4} f(z)dz=-\pi\int_0^1 e^{\pi \bar{z}}dz=-\pi\int_0^1 e^{0}e^{-it\pi}i\,dt$$

$$=-\pi i\int_0^1 e^{-i\pi t}dt=\frac{-\pi i}{-\pi i}e^{-i\pi t}\Big|_0^1=e^{-i\pi}-e^{0}=-1-1=-2$$

$$\boxed{e^{-i\pi}=-1}$$

$$\therefore I_4=-2$$

FINALMENTE:

$$I=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}=e^{\pi}-1+2e^{\pi}+e^{\pi}-1-2=4e^{\pi}-4=4(e^{\pi}-1).$$

$$\therefore I=4\left[e^{\pi}-1\right]$$

- INTEGRAL DE POTENCIAS ENTERAS.

SEA $f(z)=(z-z_0)^n$, DONDE n ES UN ENTERO Y z_0 ES UNA CONSTANTE. INTEGRAR EN SENTIDO CONTRARIO AL MOVIMIENTO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ, ALREDEDOR DEL CÍRCULO C DE RADIO r Y CENTRO EN z_0.

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n=2,3,4,\ldots\end{cases}$$

. TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.

EL TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO PARA INTEGRALES DE LÍNEA REALES, SI LAS FUNCIONES $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ JUNTO CON SUS DERIVADAS PARCIALES P_x, P_y, Q_x y Q_y, SON CONTINUAS SOBRE UNA REGIÓN CERRADA R QUE CONSISTE DE UNA CURVA CERRADA SIMPLE C y SU INTERIOR, ENTONCES:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy,$$

DONDE, LA CURVA C ES RECORRIDA EN EL SENTIDO POSITIVO; ESTO ES, LA DIRECCIÓN TAL QUE LOS PUNTOS INTERIORES DE R ESTAN A LA IZQUIERDA DE C.

. TEOREMA DE CAUCHY.

I. SEA $f(z) = u + iv = u(x,y) + i\,v(x,y)$ UNA FUNCIÓN ANALÍTICA SOBRE LA REGIÓN R QUE CONSISTE DE UNA CURVA CERRADA SIMPLE C Y SU INTERIOR. SI $f'(z)$ ES CONTINUA SOBRE R, ENTONCES:

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0,$$

EN DONDE LA SEGUNDA INTEGRAL ENFATIZA EL HECHO DE QUE C ES UNA CURVA CERRADA SIMPLE.

POR EJEMPLO, LA FUNCIONES:

$$\oint_C e^z\,dz = 0, \quad \oint_C \operatorname{sen} z\,dz, \quad \oint_C P(z)\,dz = 0,$$

CON RESPECTO A CUALQUIER CURVA CERRADA SIMPLE C. EN PARTICULAR, DE LA ÚLTIMA DE ESTAS INTEGRALES OBTENEMOS:

$$\oint_C dz = 0, \quad \oint_C z\,dz = 0, \quad \oint_C z^2\,dz = 0, \text{ ETC.}$$

• COMENTARIO.

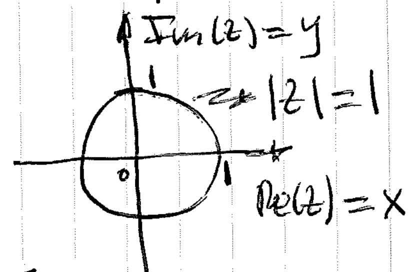
EL TEOREMA DE CAUCHY NO SIEMPRE LA INTEGRAL ES CERO, PUEDE FALLAR SI $D = R$ NO ES SIMPLEMENTE CONEXO.

EJEMPLO

VERIFICAR QUE: $\oint_C dz = \int_C dz = 0$, CON $C: |z| = 1$.

SOL:

$$\int_C dz = 0 \quad \text{si } C: |z| = 1$$



$$z = z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$dz = (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\,dt$$

$$I = \int_C dz = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\,dt = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,dt + i \int_0^{2\pi} \cos t\,dt$$

$$= -(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} + i\,\mathrm{sen}\,t\Big|_0^{2\pi} = \cos t\Big|_0^{2\pi} + i\,\mathrm{sen}\,t\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \cos 2\pi - \cos 0 + i\left[\mathrm{sen}\,2\pi - \mathrm{sen}\,0\right]$$

$$= 1 - 1 + i\left[0 - 0\right] = 0 \qquad \therefore\ I = \int_C dz = 0$$

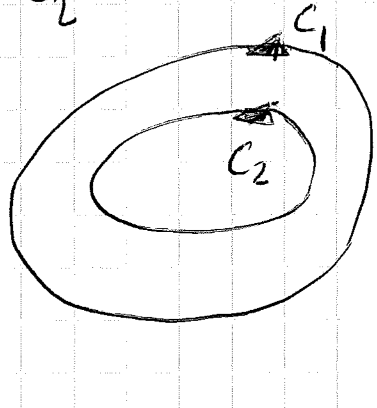
- TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT.

I. Si $f(z)$ es analítica sobre una curva cerrada simple C y su interior, entonces:

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz = 0.$$

II. Si $f(z)$ es analítica dentro y sobre la frontera de una región acotada por dos curvas cerradas C_1 y C_2 se tiene que:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



• FÓRMULAS DE LA INTEGRAL DE CAUCHY.

(*) I SEA f ANALÍTICA EN UN DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO D. SEA z_0 CUALQUIER PUNTO EN D Y SEA C CUALQUIER CURVA CERRADA SIMPLE EN D QUE ENCIERRA A z_0. ENTONCES:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0).$$

(**) INTEGRAL DE CAUCHY PARA DERIVADAS SUPERIORES.

I. SEA f ANALÍTICA EN UN DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO D Y SEA z_0 EN D. ENTONCES f TIENE DERIVADAS DE TODOS LOS ÓRDENES EN z_0. ADEMÁS, LA ENÉSIMA DERIVADA DE f EN z_0 ES:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

HECHO.

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=2,3,4,\dots \end{cases}$$

LOS RESULTADOS (*) Y (**) SE CONOCEN COMO FÓRMULAS DE LA INTEGRAL DE CAUCHY Y SON INTERESANTES DEBIDO A QUE NOS MUESTRAN QUE SI CONOCEMOS UNA FUNCIÓN $f(z)$ SOBRE C ENTONCES PODEMOS HALLAR LOS VALORES DE LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS EN TODOS LOS PUNTOS DENTRO DE C.

ASÍ, SI UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA TIENE UNA PRIMERA DERIVADA, O SEA, ES ANALÍTICA EN UNA REGIÓN CONEXA SIMPLE, TODAS SUS OTRAS DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR TAMBIÉN EXISTEN EN $R = D$.

EJEMPLOS.

1. EVALÚE: $I = \int_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)} dz$, DONDE C ES UNA CURVA CERRADA SIMPLE EN $\mathbb{C}$.

SOL:

CASO A

- SUPONGA QUE: $(z-i) = 0 \Rightarrow z_0 = i \notin C$, ENTONCES.

$$I = \int_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)} dz = 0$$

CASO B

- SUPONGA QUE: $(z-i) = 0 \Rightarrow$ $z_0 = i \in C$.

UTILIZAR (*)T $\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$

DONDE:

$$f(z) = f(z_0) = e^{z_0^2} \text{ si } z_0 = i \Rightarrow f(z_0) = f(i) = e^{z_0^2}$$

129

$$f(z_0) = f(i) = e^{z_0^2} = e^{i^2} = e^{-1} \Rightarrow f(z_0) = f(i) = e^{-1}$$

POR (*T):

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = \int_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)}dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i f(i) = 2\pi i e^{-1}$$

$$\therefore I = \frac{2\pi i}{e}.$$

2

$$I = \int_C \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)}{z-2}dz.$$

CASO A

SUPONGA: $z-2=0 \Rightarrow z_0 = 2 \therefore z_0 = 2 \notin C.$

ENTONCES:

$$I = \int_C \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)}{z-2}dz = 0 \therefore I = 0$$

CASO B

SUPONGA: $(z-2) = 0 \Rightarrow z_0 = 2 \in C,$

$$f(z) = e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)dz \Rightarrow f(z_0) = f(2) = e^{(2)(2)}\operatorname{sen}(2^2) = e^4\operatorname{sen}4.$$

POR (*T).

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = \int_C \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)}{(z-2)}dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^4\operatorname{sen}4.$$

③ $I = \int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$ si $C: |z| = 1.$ (130)

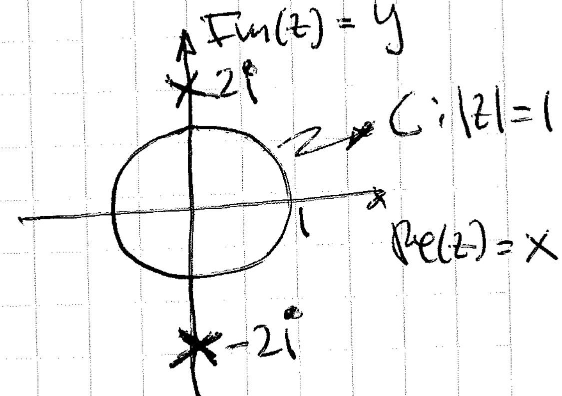
SOL

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+4} \Rightarrow f'(z) = \frac{(z^2+4)e^z - e^z(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= \frac{(z^2-2z+4)e^z}{(z^2+4)^2} \quad \therefore f'(z) = \frac{(z^2-2z+4)\,e^z}{(z^2+4)^2},$$

SON ANALÍTICAS SOBRE Y EN EL INTERIOR DE $|z|=1$.

COMO LA DERIVADA ES ANALÍTICA, ES CONTINUA. POR TANTO, EL *TEOREMA SE APLICA.



$$z^2+4 = (z+2i)(z-2i) = 0$$

$$z+2i = 0 \Rightarrow z_0 = -2i \notin C$$

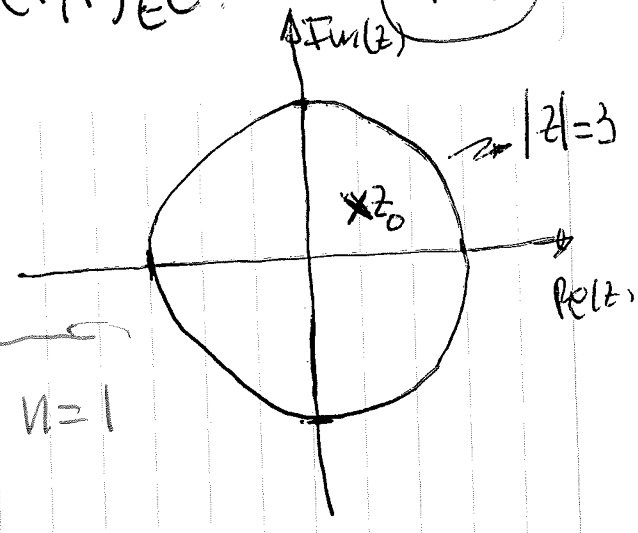
$$z-2i = 0 \Rightarrow z_0 = 2i \notin C$$

COMO $z_0 = -2i$ y $z_0 = 2i$ ESTÁN FUERA DE $C: |z|=1$, LUEGO LA INTEGRAL RESULTA CERO.

$$\therefore I = \int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 0 \qquad \therefore I = 0$$

④ $I = \int_C \frac{dz}{z-1-i} = \int_C \frac{dz}{z-(1+i)}$ si $C: |z| = 3.$

SOL: $z-(1+i)=0 \Rightarrow z_0=1+i=(1,1)\in\mathbb{C}$



$$I=\int_C \frac{dz}{z-(1+i)}$$

APLICANDO EL HECHO

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases} 2\pi i & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

$n=1$ y $z_0=(1+i)$, ENTONCES:

$$I=\int_C \frac{dz}{z-(1+i)}=2\pi i \quad \therefore \quad I=2\pi i$$

(5) $I=\int_C \dfrac{dz}{z-3}$ si $C: |z+i|=4$

$|z+i|=4$

$|x+iy+i|=4$; $|x+i(y+1)|=4$

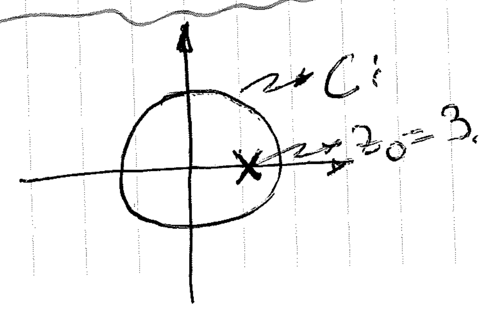
$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4$; $x^2+(y+1)^2=16$

centro $(0,-1)$; $r=4$. círculo.

SOL: $z-3=0 \Rightarrow z_0=3\in\mathbb{C}$

APLICANDO HECHO:

$$I=\int_C \frac{dz}{z-3}=2\pi i \quad \therefore \quad I=2\pi i$$



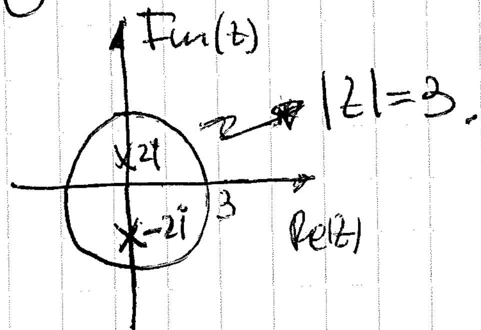
⑥ $I = \int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$ CON $C: |z| = 3.$

SOL

$$z^2+4 = (z+2i)(z-2i) = 0$$

$$(z+2i) = 0 \Rightarrow z_0 = -2i \in C$$

$$(z-2i) = 0 \Rightarrow z_0 = 2i \in C.$$



$$I = \int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = \int_C \frac{e^z}{(z+2i)(z-2i)}\,dz$$

POR FRACCIONES PARCIALES

$$I = \int_C e^z\left[\frac{A}{z+2i} + \frac{B}{z-2i}\right]dz \quad (H)$$

CALCULANDO A Y B RESPECTIVAMENTE:

$$A = \left[(z+2i)\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}\right]_{z_0=-2i} = \left.\frac{1}{(z-2i)}\right|_{z_0=-2i} = \frac{1}{-2i-2i} = \frac{1}{-4i}$$

$$\therefore A = -\frac{1}{4i}$$

$$B = \left[(z-2i)\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}\right]_{z_0=+2i} = \left.\frac{1}{z+2i}\right|_{z_0=2i} = \frac{1}{2i+2i} = \frac{1}{4i}$$

$$\therefore B = \frac{1}{4i}$$

REEMPLAZANDO A Y B EN (H), APLICANDO (*)T CON: $f(z) = e^z$; $z_0 = -2i$ y $z_0 = 2i$.

$$I = \int_C e^z \left[-\frac{1}{4i} \frac{1}{z+2i} + \frac{1}{4i} \frac{1}{z-2i} \right] dz$$

$$= \frac{1}{4i} \int_C \left[-\frac{e^z}{z+2i} dz + \frac{e^z}{z-2i} dz \right] = \frac{1}{4i} \left\{ -\int_C \frac{e^z}{z+2i} dz + \int_C \frac{e^z}{z-2i} dz \right\}$$

$$= \frac{1}{4i} \left\{ -e^{-2i} 2\pi i + e^{2i} 2\pi i \right\} = \frac{2\pi i}{4i} \left\{ e^{-2i} + e^{2i} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ -e^{-2i} + e^{2i} \right\} \quad \therefore I = \frac{\pi}{2} \left[-e^{-2i} + e^{2i} \right]$$

7 Evalúe $\int_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz$ si $C: |z-2| = 2$.

10/ $\boxed{\text{MÉTODO A}}$

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3} = \frac{5z+7}{(z-1)(z+3)}$$

$(z-1) = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C$

$(z+3) = 0 \Rightarrow z_0 = -3 \notin C$

$|z-2| = 2$; $(x-2)^2 + y^2 = 4$

$|x+iy-2| = 2$

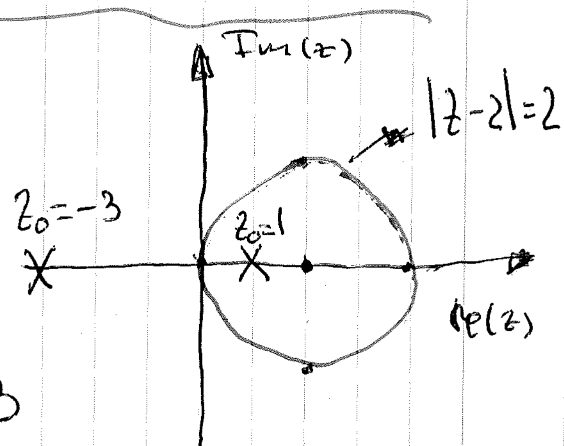
$|x-2+iy| = 2$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 2$

Círculo

Centro: $(2,0)$

$r = 2$



POR FRACCIONES PARCIALES:

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} \quad (I)$$

$5z+7 = Az + 3A + Bz - B = (A+B)z + 3A - B$

$$\begin{array}{r} A+B=5 \\ +\; 3A-B=7 \\ \hline 4A+0=12 \end{array} \Rightarrow A = \frac{12}{4} = 3$$

$A+B=5$

$3+B=5$

$B = 5-3 = 2$

SUSTITUYENDO $A=3$ y $B=2$ EN (I).

$$I=\int_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz=\int_C \frac{A}{(z-1)}\,dz+\int_C \frac{B}{(z+3)}\,dz$$

$$I=3\int_C \frac{dz}{(z-1)}+2\cancel{\int_C \frac{dz}{(z+3)}}^{\,0}=3(2\pi i)+2(0)=6\pi i$$

APLICANDO EL HECHO A LA PRIMERA INTEGRAL Y LA SEGUNDA INTEGRAL VALE CERO, YA QUE $(z+3)=0 \Rightarrow z_0=-3\notin C$.

$$\therefore\ I=3(2\pi i)=6\pi i.$$

$\boxed{\text{MÉTODO B}}$

SOL

SABEMOS.

$$I=\int_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz\ ;\ C: |z-2|=2.$$

$$z^2+2z-3=(z-1)(z+3)=0$$

$$(z-1)=0 \Rightarrow z_0=1\in C$$

$$(z+3)=0 \Rightarrow z_0=-3\notin C.$$

ENTONCES REESCRIBIENDO EL INTEGRANDO COMO:

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3}=\frac{5z+7}{(z-1)(z+3)}=\frac{\left.\dfrac{5z+7}{(z+3)}\right\} f(z)}{(z-1)}$$

APLICANDO (*T)

$$I=2\pi i\, f(1)=2\pi i\left(\frac{5(1)+7}{1+3}\right)=2\pi i\left(\frac{5+7}{4}\right)=2\pi i\left(\frac{12}{4}\right)$$

$$=2\pi i(3)=6\pi i \quad \therefore\ I=6\pi i$$

8 EVALÚE: $I=\int_C \frac{z}{z^2+9}\,dz$ CON $C: |z-2i|=4$.

135

$z^2+9=(z+3i)(z-3i)=0$

$(z+3i)=0 \Rightarrow z_0=-3i \notin C$; $(z-3i)=0 \Rightarrow z_0=3i \in C$.

MÉTODO A

$|z-2i|=4$

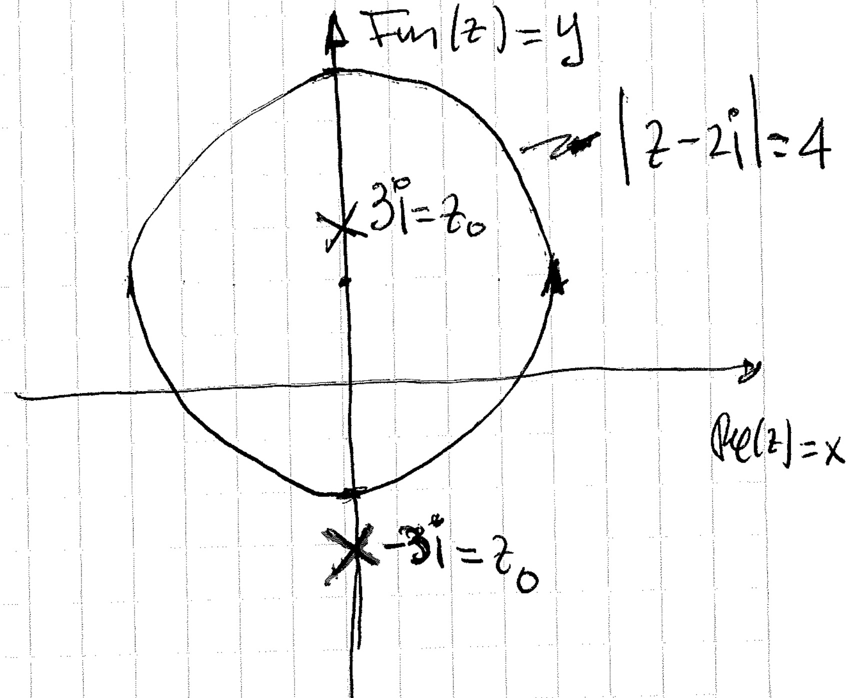
$|x+iy-2i|=4$

$|x+i(y-2)|=4$

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=4$

$x^2+(y-2)^2=16$ CÍRCULO.

CENTRO $(0,2)$ y $r=4$.



POR PARCIALES.

$$\frac{z}{z^2+9}=\frac{A}{z+3i}+\frac{B}{z-3i} \Rightarrow z = Az-A3i+Bz+3iB$$

$$z=(A+B)z+3i(-A+B)$$

$$\begin{array}{r} A+B=1 \\ -A+B=0 \\ \hline 2B=1 \end{array} \quad \therefore B=\frac{1}{2}$$

$A+B=1 \Rightarrow A=1-B=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore A=\frac{1}{2}$

SUSTITUYENDO $A=1/2$ y $B=\frac{1}{2}$ Y APLICANDO HECHO.

$$I=\int_C \frac{z}{z^2+9}dz=\frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{(z+3i)}^{\,0}+\frac{1}{2}\int_C\frac{dz}{(z-3i)}=\frac{1}{2}(2\pi i)=\pi i \therefore I=\pi i$$

SOL: MÉTODO (B)

$$\frac{z}{z^2+9}=\frac{z}{(z+3i)(z-3i)}=\frac{\overbrace{\frac{z}{z+3i}}^{f(z)}}{z-3i}$$

$$I=\int_C \frac{z}{z^2+9}dz=\int_C \frac{z}{(z+3i)(z-3i)}dz=\int_C \frac{\frac{z}{(z+3i)}}{(z-3i)}dz$$

$$\boxed{f(z)=\frac{z}{z+3i}}$$

APLICANDO (*) I

$$=2\pi i f(3i)=2\pi i\left(\frac{3i}{3i+3i}\right)=2\pi i\left(\frac{3i}{6i}\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi i}{2}=\pi i \;\therefore\; I=\pi i$$

(9) CALCULAR LA INTEGRAL $I=\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz$, DONDE $C: |z|=2$.

SOL

MÉTODO (A)

UTILIZANDO (**) TEOREMA $\boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)}$.

$(z-1)^3=0 \Rightarrow z_0=1\in C$

$n=2$; $f(z)=5z^2-3z+2$

HAY QUE DERIVAR DOS VECES.

$f'(z)=10z-3 \;\Rightarrow f''(z)=10$, $z_0=1 \;\therefore f''(z_0)=f''(1)=10$

APLICANDO (**) T.

$$I=\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz = \frac{2\pi i}{n!}f''(z_0) = \frac{2\pi i}{2!}f''(1) = \frac{2\pi i}{2!}f''(1)$$

$$I = \frac{2\pi i}{2}f''(1) = \frac{2\pi i}{2}(10) = 10\pi i \quad \therefore \underline{I = i\,10\pi}$$

$\boxed{\text{MÉTODO (B)}}$ UTILIZANDO <u>FRACCIONES PARCIALES</u>.

$$\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3}$$

$$5z^2-3z+2 = A(z-1)^2 + B(z-1) + C$$

$$5z^2-3z+2 = A(z^2-2z+1) + Bz - B + C = Az^2 - 2Az + A + Bz + C$$

$$5z^2-3z+2 = Az^2 + (-2A+B)z + A - B + C$$

$A = 5$

$-2A+B=-3 \Rightarrow -10+B=-3;\ B=-3+10=7 \quad \therefore B=7$

$A-B+C=2 \Rightarrow 5-7+C=2;\ C=2-5+7=9-5=4 \quad \therefore C=4$

SUSTITUYENDO $A=5$, $B=7$ y $C=4$. ADEMÁS APLICANDO EL <u>HECHO</u>

$$\boxed{\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n=2,3,4,\ldots \end{cases}}$$

$$I=\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz = \int_C \frac{A}{(z-1)}dz + \int_C \frac{B}{(z-1)^2}dz + \int_C \frac{C}{(z-1)^3}dz$$

$$I = 5\int_C \frac{dz}{(z-1)} + 7\cancel{\int_C \frac{dz}{(z-1)^2}}^{\to 0} + 4\cancel{\int_C \frac{dz}{(z-1)^3}}^{\to 0}$$

$$I = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0) = i10\pi + 0 + 0 = i10\pi$$

$$\therefore I = i10\pi$$

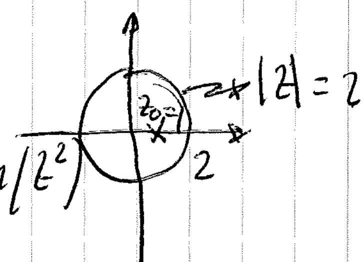
10 HALLAR $I = \int_C \frac{2\,\text{sen}(z^2)}{(z-1)^4}\,dz$; $C: |z| = 2$.

SOL

$n = 3$; $f(z) = 2\,\text{sen}(z^2)$; $(z-1)^4 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C$.

$f(z) = 2\,\text{sen}(z^2)$

$f'(z) = 4z\cos(z^2)$; $f''(z) = 4\cos(z^2) - 8z^2\,\text{sen}(z^2)$



$f'''(z) = -24z\,\text{sen}(z^2) - 16z^3\cos(z^2)$

$$I = \int_C \frac{2\,\text{sen}(z^2)}{(z-1)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{2\pi i}{3!} f'''(1)$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}\left[-24(1)\,\text{sen}(1^2) - 16(1)^3\cos(1^2)\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}\left[-24\,\text{sen}(1) - 16\cos(1)\right] = \frac{2\pi i}{6}\left[-24\,\text{sen}(1) - 16\cos(1)\right]$$

$$\therefore I = \frac{\pi i}{3}\left[-24\,\text{sen}(1) - 16\cos(1)\right].$$

11) EVALÚE LAS SIGUIENTES INTEGRALES DEFINIDAS COMPLEJAS.

a) $I = \int_{\pi}^{i} e^{z} \operatorname{sen} z \, dz$.

SOL:

$$\boxed{\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}[a \operatorname{sen} bx - b \cos bx]}{a^2+b^2} \qquad a=b=1}$$

APLICANDO LA FÓRMULA.

$$I = \frac{e^{z}[\operatorname{sen} z - \cos z]}{2}\Big|_{\pi}^{i} = \frac{1}{2}\left[e^{z}\operatorname{sen} z\Big|_{\pi}^{i} - e^{z}\cos z\Big|_{\pi}^{i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}\operatorname{sen} i - e^{\pi}\operatorname{sen}\pi - \{ e^{i}\cos i - e^{\pi}\cos\pi \} \right]$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\pi = 0 \text{ y } \cos\pi = -1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}\operatorname{sen} i - e^{i}\cos i - e^{\pi}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{i}[\operatorname{sen} i - \cos i] - e^{\pi}\right]$$

$$\boxed{e^{\pi} = 23.14;\ \operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z;\ \cos(iz) = \cosh z.}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}[\operatorname{sen} i - \cos i] - 23.14\right] = \frac{1}{2}\left[e^{i}[i \operatorname{senh} 1 - \cosh 1] - 23.14\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}[i1.175 - 1.543] - 23.14\right]$$

$$\boxed{e^{i} = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1 = 0.54 + i0.84}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(0.54+i0.84)(i1.175-1.543)-23.14\right]$$ 140

$$=\frac{1}{2}\left[i0.6345-0.833-0.987-i1.296-23.14\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-i0.6615-24.96\right]=-i0.33-12.48$$

$$\therefore \underline{I=-12.48-i0.33}$$

(b) $$I=\int_0^{4i} z e^{z}\,dz$$

sol

$$\boxed{\int x e^{ax}\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\left[x-\frac{1}{a}\right]}$$

$$I=\int_0^{4i} z e^{z}\,dz=e^{z}\left[z-\frac{1}{1}\right]\Big|_0^{4i}=e^{z}\left[z-1\right]\Big|_0^{4i}$$

$$=e^{z}z\Big|_0^{4i}-e^{z}\Big|_0^{4i}=e^{4i}4i-\cancel{e^{0}(0)}-\left[e^{4i}-e^{0}\right]$$

$$=4i\,e^{4i}-e^{4i}+1=e^{4i}\left[4i-1\right]+1$$

$$=\left[\cos 4+i\,\text{sen}\,4\right]\left[4i-1\right]+1=\left[-0.65-i0.75\right]\left[4i-1\right]+1$$

$$\therefore I=\left[-0.65-i0.75\right]\left[4i-1\right]+1$$

• TEOREMA DEL RESIDUO.

EN ESTE TEMA SE LLEGA A LA JUSTIFICACIÓN DE LA IMPORTANCIA DEL CONCEPTO DE RESIDUO. EL SIGUIENTE TEOREMA ESTABLECE QUE, EN CIERTAS CIRCUNSTANCIAS, SE PUEDEN CALCULAR INTEGRALES COMPLEJAS DE LA FORMA $\oint_C f(z)dz = \int_C f(z)dz$ SUMANDO LOS RESIDUOS EN LAS SINGULARIDADES AISLADAS DE f DENTRO DEL CONTORNO CERRADO C.

• TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY.

SEA D UN DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO Y C UN CONTORNO CERRADO SIMPLE QUE SE HALLA COMPLETAMENTE DENTRO DE D. SI UNA FUNCIÓN f ES ANALÍTICA Y EN EL INTERIOR DE C, EXCEPTO UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS SINGULARES $z_1, z_2, \ldots, z_n$ DEL INTERIOR DE C, ENTONCES:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left(f(z), z_k\right).$$

DONDE $\mathrm{Res} = R =$ RESIDUO.

TI. RESIDUO EN UN POLO SIMPLE.

SI f TIENE UN POLO SIMPLE EN $z = z_0$, ENTONCES:

$$\text{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z \to z_0} \left(z - z_0\right) f(z).$$

T2. RESIDUO EN UN POLO DE ORDEN n.

SI f TIENE UN POLO DE ORDEN n EN $z = z_0$, ENTONCES:

$$\text{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(z - z_0\right)^n f(z).$$

T.3. RESIDUOS DE LA FORMA $P(z)/q(z)$.

SEA LA FUNCIÓN $f(z) = \dfrac{P(z)}{q(z)}$, DONDE $P(z)$ Y $q(z)$ SON ANALÍTICAS EN LA VECINDAD DE z_0 Y $q(z)$ TIENE UNA SINGULARIDAD EN z_0; ES DECIR, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$, ENTONCES.

$$\text{Res}\left[f(z), z_0\right] = \text{Res} = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}.$$

$$\therefore \text{Res} = \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}.$$

EJEMPLOS:

1. HALLAR LOS RESIDUOS DE:

Sol (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$.

$$(z-3)(z-1)^2 = 0 \quad y \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}.$$

$(z-3) = (z-3)^{1} = 0 \Rightarrow z_0 = 3$ con 1

$(z-1)^2 = (z-1)^{2} = 0 \Rightarrow z_0 = 1$ con 2

- Por T.1 $R[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

- $z_0 = 3$ y $n = 1$.

$$R[f(z), 3] = \lim_{z \to 3}\left[(z-3)\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right] = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(3-1)^2} = \frac{1}{(2)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

Por T.2 $R = \text{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z)$

- $z_0 = 1$ y $n = 2$.

$$R = R[f(z), 1] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right]$$

$$R = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3)}\right] = \lim_{z \to 1}\left[-\frac{1}{(z-3)^2}\right] = \frac{-1}{(1-3)^2} = \frac{-1}{(-2)^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \Rightarrow \therefore R = -\frac{1}{4}.$$

(b) $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$ 144

Sol:

$(z+1)(z+2)(z+3) = 0$

$(z+1)=0 \Rightarrow z_0 = -1$

$(z+2)=0 \Rightarrow z_0 = -2$

$(z+3)=0 \Rightarrow z_0 = -3$

Port. 1

$$\boxed{R[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$$

- $z_0 = -1$.

$$R[f(z), -1] = \lim_{z \to -1} \left[\frac{(z+1)}{(z+1)(z+2)(z+3)} (5z^2-4z+3) \right]$$

$$= \lim_{z \to -1} \left[\frac{5z^2-4z+3}{(z+2)(z+3)} \right] = \frac{5(-1)^2-4(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{5+4+3}{(1)(2)} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\therefore R[f(z), -1] = 6$$

- $z_0 = -2$

$$R[f(z), -2] = \lim_{z \to -2} \left[\frac{(z+2)}{(z+1)(z+2)(z+3)} (5z^2-4z+3) \right]$$

$$= \lim_{z \to -2} \left[\frac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+3)} \right] = \frac{5(-2)^2-4(-2)+3}{(-1)(1)} = \frac{20+8+3}{-1} = -31$$

$$\therefore R[f(z), -2] = -31$$

$\circ\ z_0 = -3.$

$$R[f(z), -3] = \lim_{z\to -3}\left[\frac{(z+3)}{(z+1)(z+2)(z+3)}(5z^2-4z+3)\right]$$ 145

$$= \lim_{z\to -3}\left[\frac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)}\right] = \frac{5(-3)^2-4(-3)+3}{(-2)(-1)} = \frac{45+12+3}{2} = \frac{60}{2}$$

$$= 30 \qquad \therefore R[f(z), -3] = 30$$

(2) EVALÚE $I = \int_C \frac{e^z}{z^2+z}\,dz = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ si $C: |z-1| = 3.$

(a) UTILIZANDO TEOREMA DE CAUCHY (*) T

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

(b) POR MEDIO DEL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R[f(z), z_k]$$

T.1 RESIDUO EN UN POLO SIMPLE

$$R[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

T.2 RESIDUO EN UN POLO DE ORDEN n.

$$R[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)$$

(c) APLICAR $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)} \Rightarrow R = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}$ (146)

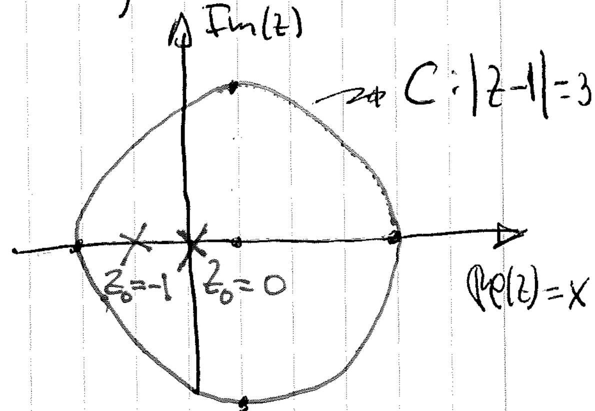
SOL:

(a) $I = \int_C \frac{e^z}{z^2+z} dz = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$; $C: |z-1| = 3$

SOL: $|z-1| = 3$; $|x+iy-1| = 3$

$|(x-1) + iy| = 3$; $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 9$

$(x-1)^2 + y^2 = 9$ círculo centro $(1,0)$; $r = 3$



SINGULARIDADES.

$$z(z+1) = 0 \begin{cases} z_0 = 0 \in C \\ (z+1) = 0 \Rightarrow z_0 = -1 \in C. \end{cases}$$

$$I = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz = \int_C e^z \left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} \right] dz \quad (*)$$

$$A = z \frac{1}{z(z+1)} \Bigg|_{z_0=0} = \frac{1}{z+1}\Bigg|_0 = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \therefore A = 1$$

$$B = (z+1) \frac{1}{z(z+1)} \Bigg|_{z_0=-1} = \frac{1}{z}\Bigg|_{-1} = \frac{1}{-1} = -1 \therefore B = -1$$

SUSTITUYENDO $A=1$ y $B=-1$ EN $(*)$:

$$I = \int_C \left[\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{(z+1)} \right] dz = \int_C \frac{e^z}{z} dz - \int_C \frac{e^z}{z+1} dz$$

DONDE $f(z) = e^z \Rightarrow f(z_0) = e^{z_0}$ PARA $z_0 = 0$ y $z_0 = -1$ RESPECTIVAMENTE.

$$I = 2\pi i\, e^{0} - 2\pi i\, e^{-1} = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right].$$

$$\therefore I = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right].$$

(b) y $I = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ si $C: |z-1| = 3$.

Sol

$$z(z+1) = \begin{cases} z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \in C \text{ con } n = 1. \\ (z+1) = (z+1)^1 = 0 \Rightarrow z_0 = -1 \text{ con } n = 1. \end{cases}$$

Los residuos son R_0 y R_{-1}, respectivamente.

$$R = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \quad \text{con } f(z) = \frac{e^z}{z^2 + z} = \frac{e^z}{z(z+1)}$$

$$R_0 = \lim_{z \to 0}\left[(z-0)\frac{e^z}{z(z+1)}\right] = \lim_{z \to 0}\left[\frac{z\, e^z}{z(z+1)}\right] = \lim_{z \to 0}\left[\frac{e^z}{z+1}\right]$$

$$= \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore R_0 = 1$$

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1}\left[(z+1)\frac{e^z}{z(z+1)}\right] = \lim_{z \to -1}\left[\frac{e^z}{z}\right] = \frac{e^{-1}}{(-1)} = -e^{-1}$$

$$\therefore R_{-1} = -e^{-1}$$

Por el T del residuo.

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R\left[f(z), z_k\right] = 2\pi i\left[R_0 + R_{-1}\right] = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right]$$

$$\therefore I = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right].$$

(c) $I = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ con $C: |z-1| = 3$ (148)

(c)

$$z(z+1) = z^2 + z = \begin{cases} z_0 = 0 \in C \\ z_0 = -1 \in C. \end{cases}$$

HACIENDO:

$$P(z) = e^z$$

$$q(z) = z^2 + z \Rightarrow q'(z) = 2z+1$$

$$R_0 = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{z_0=0} = \left.\frac{e^z}{2z+1}\right|_{z_0=0} = \frac{e^0}{2(0)+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$R_{-1} = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{z_0=-1} = \left.\frac{e^z}{2z+1}\right|_{-1} = \frac{e^{-1}}{2(-1)+1} = \frac{e^{-1}}{-1} = -e^{-1}$$

APLICANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO.

$$I = 2\pi i\left[R_0 + R_{-1}\right] = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right]$$

$$\therefore I = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right]$$

$\boxed{\text{COMENTARIO:}}$

ESTE MÉTODO DE $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$, SE APLICA SOLAMENTE CUANDO TENEMOS EN EL DENOMINADOR $q(z)$ UN CERO CON $n=1$, EN EL EXPONENTE, $(z-0)^1 = z-0 = z = z_0 = 0$.

3) UTILIZANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY, EVALUAR:

a) $I = \int_C \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3} dz$ si C INCLUYE LA SINGULARIDAD i.

SOL:

SINGULARIDAD

$(z-i)^3 = (z-i)^3 \Rightarrow z_0 = i \in C$ con $n = 3 = 3$.

- $z_0 = i$ con $n = 3$.

$$R_i = \lim_{z \to i} \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-i)^3}\right] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz}\left[\operatorname{sen}(2z)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z \to i}\left[-4\operatorname{sen}(2z)\right] = \frac{1}{2}\left[-4\operatorname{sen}(2i)\right] = -2\operatorname{sen}(2i)$$

$$\therefore R_i = -2\operatorname{sen}(2i)$$

HECHO:

$$\operatorname{sen} 2i = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = i\operatorname{senh}(2)$$

$$I = \int_C \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z-i)^3} dz = 2\pi i\left[R_i\right] = 2\pi i\left[-2i\operatorname{senh}(2)\right]$$

$$= -4\pi i^2 \operatorname{senh}(2) = -4\pi(-1)\operatorname{senh}(2) = 4\pi\operatorname{senh}(2)$$

$$= 4\pi(3.62) = 14\pi = 45.6$$

$$\therefore I = 14\pi = 45.6$$

150

(b) $I = \int_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$

(1) C ES EL RECTÁNGULO DEFINIDO POR $X=0$, $X=4$, $y=-1$, $y=1$.

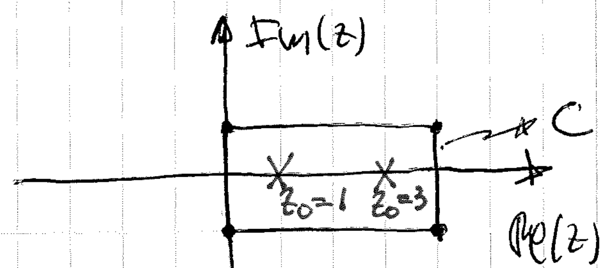
(2) $C: |z| = 2$.

- 0
  - -1 $(0,-1)$
  - 1 $(0,1)$
- 4
  - -1 $(4,-1)$
  - 1 $(4,1)$

(1) SOL $(z-1)^2(z-3)=0$

$(z-1)^2 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C$ CON $n=2$

$(z-3) = 0 \Rightarrow z_0 = 3 \in C$.



- $z_0 = 1$ CON $n=2$

$$R_1 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{(z-3)^2}\right] = \left[\frac{-1}{(1-3)^2}\right] = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} \quad \therefore R_1 = -\frac{1}{4}$$

- Si $z_0 = 3$

$$R_3 = \lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right] = \lim_{z\to 3}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] = \frac{1}{(3-1)^2} = \frac{1}{4}$$

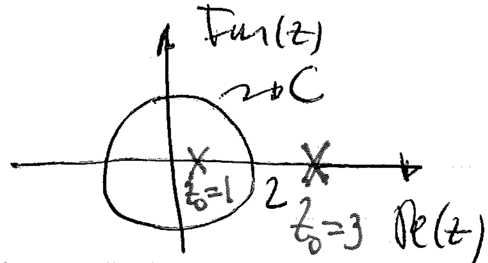
$$\therefore R_3 = \frac{1}{4}.$$

POR EL T DEL RESIDUO,

$$I = 2\pi i\left[R_1 + R_3\right] = 2\pi i\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right] = 2\pi i(0) = 0$$

$$\therefore I = 0.$$

(2) $C: |z|=2$



Sol: $(z-1)^2=0 \Rightarrow z_0=1 \in C,\ n=2$

$(z-3)=0 \Rightarrow z_0=3 \notin C$

SABEMOS QUE $R_1=-\frac{1}{4}$ y $R_3=0$ YA QUE $z_0=3\notin C$.

POR EL T. DEL RESIDUO.

$$I = 2\pi i\left[R_1+R_3\right] = 2\pi i\left[-\frac{1}{4}+0\right] = 2\pi i\left[-\frac{1}{4}\right]$$

$$= -\frac{2\pi i}{4} = -\frac{i\pi}{2} \quad \therefore \quad I = -\frac{i\pi}{2}$$

APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA EVALUAR ALGUNAS INTEGRALES REALES DE LAS FORMAS SIGUIENTES.

(A) $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta,$

(B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$

(C) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx,$

DONDE F EN (A) y f EN (B) y (C) SON FUNCIONES

RACIONALES, PARA LA FUNCIÓN RACIONAL (152)

$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ EN (B) Y (C), SUPONEMOS QUE LOS

POLINOMIOS P Y q NO TIENEN FACTORES COMUNES.

(A) SEA $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$,

DONDE $F(s,t)$ ES EL COCIENTE DE DOS FUNCIONES POLINOMIALES EN s Y t, PUEDEN TRANSFORMARSE EN INTEGRALES DE LÍNEA MEDIANTE LA SUSTITUCIÓN $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, TAL QUE:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] = \frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2}\left[z + z^{-1}\right] = \frac{z^2+1}{2z}.$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z} \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right] = \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2i}\left[z - z^{-1}\right] = \frac{z^2-1}{i2z}.$$

$$\therefore \operatorname{sen}\theta = \frac{z^2-1}{i2z} \quad (2)$$

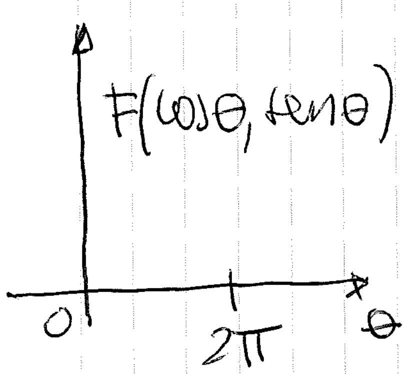
$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Rightarrow d\theta = -iz^{-1}dz \quad \therefore d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3)$$

POR EL TEOREMA DEL RESIDUO

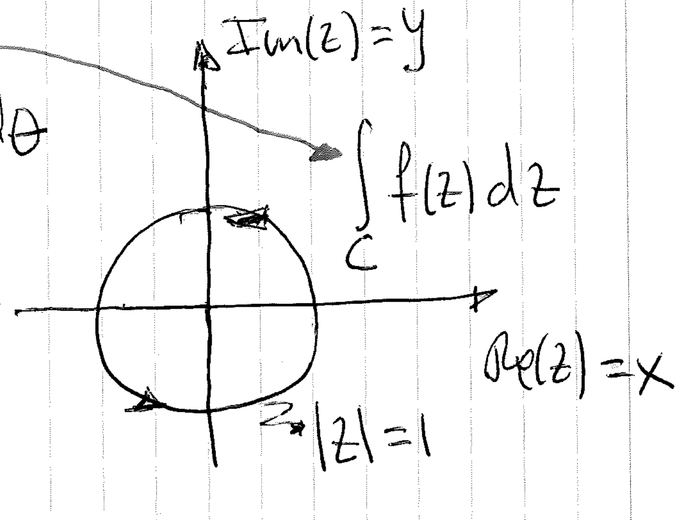
$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum_C R[f(z)],$$

LA SUMA $\sum_C$ SE EXTIENDE SOBRE TODOS LOS RESIDUOS DE $f(z)$ DEL CÍRCULO UNITARIO $|z|=1$.

TEOREMA. $$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_{|z|=1} F\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}.$$



$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$



EJEMPLOS.

(1) EVALÚE: $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$.

SOL:

$$\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_C \frac{z^2+1}{z}\,\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{z^2+1}{i2z^2}\,dz$$

SABEMOS QUE:

$C: |z|=1$; $2iz^2=0 \Rightarrow z_0^2=0$

PARA: $z_0=0$ CON $n=2$.

$$R_0=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z^2+1)}{z^2(2i)}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\left[2z\right]=\frac{1}{2i}(2(0))=0$$

$\therefore$ $R_0=0$

APLICANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO.

$$I=2\pi i R_0=2\pi i(0)=0 \quad \therefore I=0.$$

(2) $$\int_0^{2\pi}\operatorname{tg}\theta\, d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

Sol:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_C \operatorname{sen}\theta\ \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{z^2-1}{2iz}\ \frac{1}{\frac{z^2+1}{2z}}\ \frac{dz}{iz}=\int_C\frac{z^2-1}{2iz}\ \frac{2z}{z^2+1}\ \frac{dz}{iz}$$

$$=-\int_C\frac{z^2-1}{2z^2}\ \frac{2z}{z^2+1}\,dz=-\int_C\frac{z^2-1}{2(z^2+1)}\,dz$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(z) &= z^2-1 \\ q(z) &= z^3+z \end{aligned}}$$

155

LAS SINGULARIDADES ES UN CERO.

$z(z^2+1)=0 \Rightarrow z_0 = 0 \in C$.

$z^2+1=0 \Rightarrow z_0 = i$ y $z_0=-i \Rightarrow z_0 = i = (0,1) \in C$

$z_0 = -i = (0,-1) \in C$.

APLICANDO:

$P(z) = z^2-1$

$q(z) = z^3+z \Rightarrow q'(z) = 3z^2+1$

$$R_0 = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_0 = \left.\frac{z^2-1}{3z^2+1}\right|_0 = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \therefore R_0 = -1$$

$$R_{-i} = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{-i} = \left.\frac{z^2-1}{3z^2+1}\right|_{-i} = \frac{(-i)^2-1}{3(-i)^2+1} = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$R_i = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_i = \frac{i^2-1}{3i^2+1} = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

$$I = 2\pi i\left[R_0 + R_{-i} + R_i\right] = \left[-1+1+1\right]2\pi i = 2\pi i$$

$$\therefore I = 2\pi i$$

(B) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$ (156)

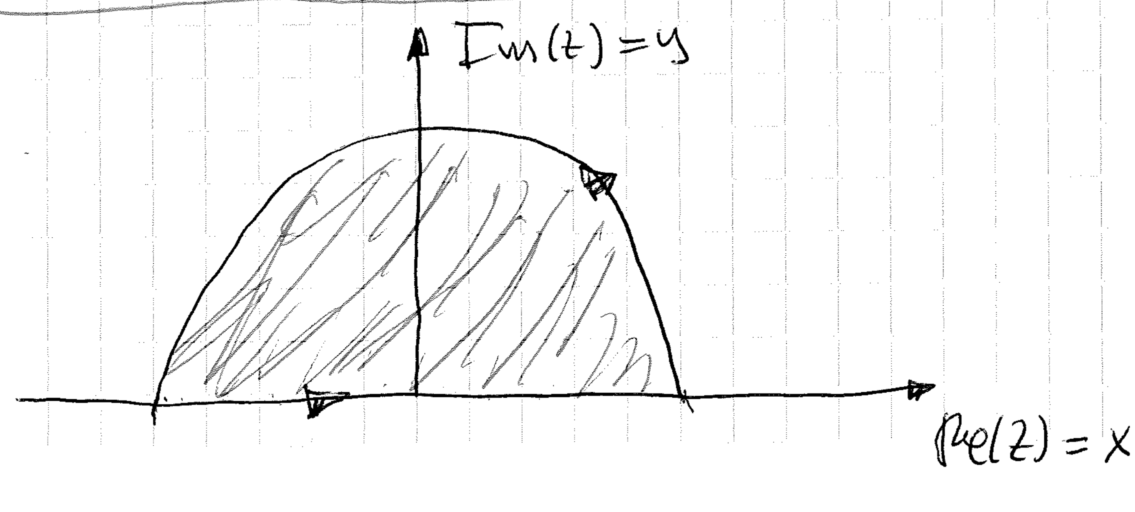
INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES RACIONALES

SEAN INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES RACIONALES. DE LA FORMA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum R[f(z)].$$

NOTA: • SE SUPONE QUE LA FUNCIÓN $f(x)$ ES UNA FUNCIÓN RACIONAL REAL CUYO DENOMINADOR ES DIFERENTE DE CERO PARA TODA x Y SU GRADO ES AL MENOS DOS UNIDADES MÁS ALTO QUE EL NUMERADOR.

• AMPLIANDOSE LA SUMA A TODOS LOS RESIDUOS DE $f(z)$ CORRESPONDIENTES A LAS SINGULARIDADES DE ÉSTA EN EL SEMIPLANO SUPERIOR.



EJEMPLO: EVALÚE.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

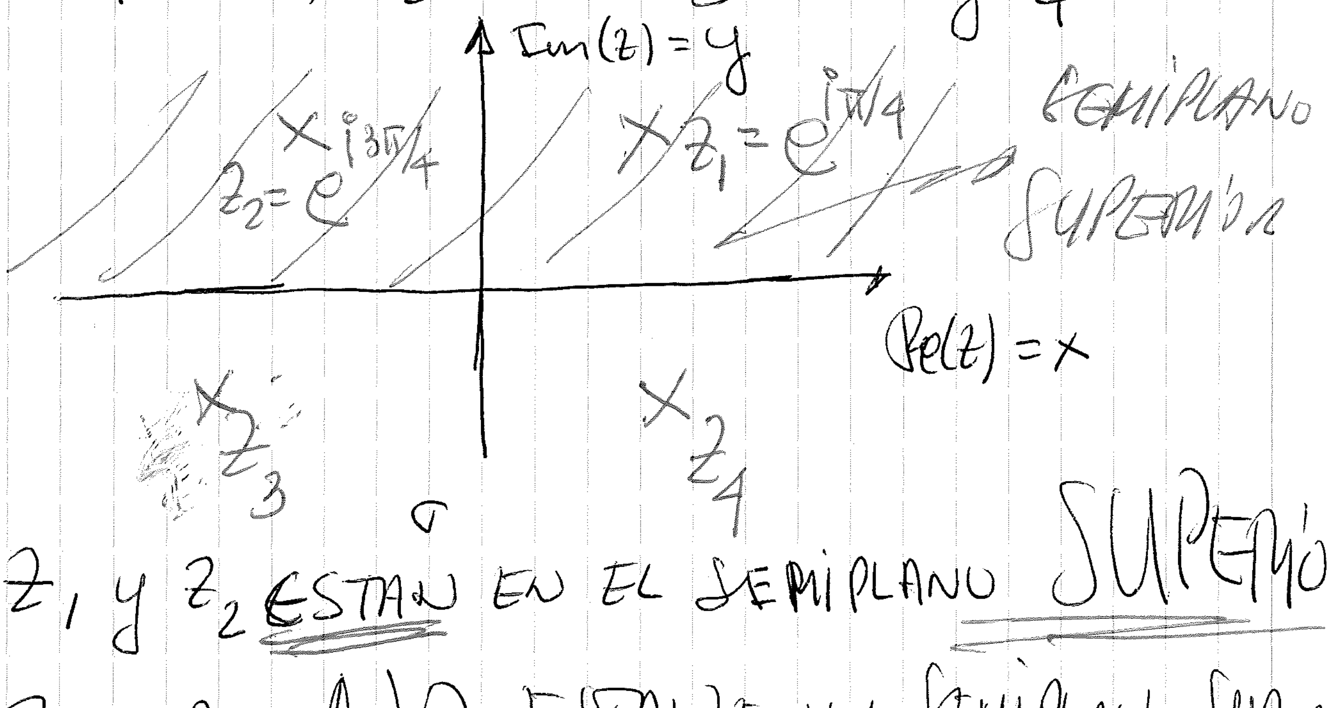
SOL:

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

SINGULARIDADES.

$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1$ SE CALCULAN LAS RAÍCES O SINGULARIDADES COMO SE VIÓ AL PRINCIPIO DEL CURSO; ESTO ES:

$$z_1 = e^{i\pi/4},\ z_2 = e^{i3\pi/4},\ z_3 = e^{-i3\pi/4} \text{ y } z_4 = e^{-i\pi/4}.$$



∴ z_1 y z_2 ESTAN EN EL SEMIPLANO SUPERIOR

∴ z_3 y z_4 NO ESTAN EN EL SEMIPLANO SUPERIOR

CÁLCULO DE LOS RESIDUOS, PARA z_1 y z_2

CON $n=1$,

$$R_{z_1} = R_{e^{i\pi/4}} = \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left[\left(z - e^{i\pi/4}\right) \frac{1}{z^4+1} \right]$$

$$= \left(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}\right) \frac{1}{\left(e^{i\pi/4}\right)^4 + 1} = \frac{0}{\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi} =$$

$$= 0 \, \frac{1}{-1+1} = \frac{0}{0} \quad \text{INDETERMINACIÓN}$$

POR L'HOSPITAL.

$$R_{z_1} = \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left\{ (1-0) \frac{1}{4z^3+1} \right\} = \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left[\frac{1}{4z^3} \right]$$

$$= \frac{1}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^3} = \frac{1}{4 e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4} \quad \therefore \quad R_{z_1} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4}$$

ASÍ MISMO SE CALCULA R_{z_2}, ES DECIR.

$$R_{z_2} = \frac{1}{4} e^{-i9\pi/4}$$

FINALMENTE, SABEMOS QUE

$R_{z_3} = R_{z_4} = 0$ NO ESTAN EN EL SEMIPLANO SUPERIOR.

POR EL T. DEL RESIDUO.

$$I = 2\pi i\left[R_{z_1} + R_{z_2}\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} + \frac{1}{4}e^{-i9\pi/4}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left[e^{-i3\pi/4} + e^{-i9\pi/4}\right] = \frac{\pi i}{2}\left[-i1.414\right]$$

$$= 0.707\pi.$$

$$\therefore I = 0.707\pi.$$

TAREA 3 AVANZADAS

T-3-1

1 a) DIBUJAR $z(t)$ PARA:

$$C: z(t) = \begin{cases} 1+it, & 0 \le t \le 1 \\ (2-t)+i, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

b) EVALÚE $I = \int_C x\,dz$ A LO LARGO DEL CONTORNO C.

$R_{b} = -\frac{1}{2}+i$

2 EVALUAR $I = \int_C x\,dz$ SI: $C: z = z(t) = \begin{cases} 1+i\ln t, & 1 \le t \le e. \\ 2-\frac{t}{e}+i, & e \le t \le 2e. \end{cases}$

R: $i - \frac{1}{2}$

3 CALCULAR: $I = \int_C (z+3)\,dz$ SI $C: x = 2t;\ y = 4t-1,\ 1 \le t \le 3.$

R: $-28 + i84.$

4 SEA $I = \int_C y\,dx$ DONDE C ES LA ELIPSE $x = a\cos t,\ y = b\,\text{sen}\,t$ CON $0 \le t \le 2\pi$: HALLAR $I = \int_C y\,dx.$

R: $-\pi ab.$

5 HALLAR $I = \int_C (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$, DONDE $C: x = t;\ y = t^2,\ 0 \le t \le 1.$

$R = 4/3.$

6 EVALUAR $I = \int_C x^2 y^3\,dx$, CON $C: z = t(1+it^2) = t(1+it^2),\ 0 \le t \le 1.$

$R = \frac{1}{12}.$

7 • EVALÚE LAS INTEGRALES DE LÍNEA COMPLEJAS. T-3-2

a. $I=\int_{1}^{1+2i} x\,dz$ SOBRE LA LÍNEA RECTA 1 A $1+2i$.

$R=2i$.

b. $I=\int_C x\,dz$ SOBRE EL CÍRCULO UNITARIO $|z|=1$ DESCRITO EN LA DIRECCIÓN CONTRARIA A LAS MANECILLAS DEL RELOJ.

$R: i\pi$.

c. $I=\int_{0}^{1+i}(x+y-ix^2)\,dz$ SOBRE LA TRAYECTORIA A LO LARGO DE LAS LÍNEAS $x=0$ y $y=1$.

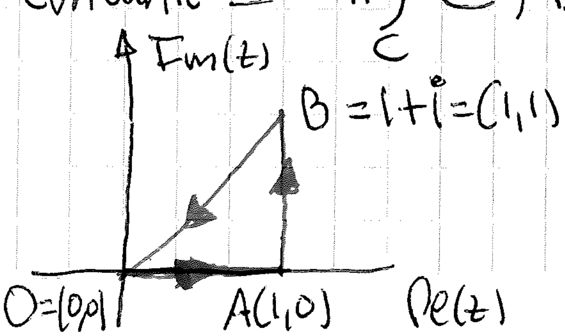
$R=\frac{3}{2}+\frac{i}{6}$.

d. SEA $I=\int_{-i}^{i}(x^2+iy^2)\,dz$ SOBRE LA MITAD DERECHA DEL CÍRCULO UNITARIO $|z|=1$ DESCRITO EN DIRECCIÓN CONTRARIA A LAS MANECILLAS DEL RELOJ.

8 EVALÚE $I=\int_C (z^3-1+3i)\,dz$ SI $C: |z|=1$.

$R: 0$.

9 EVALUAR $I=\pi\int_C e^{\pi z}$, DONDE C ES EL TRIÁNGULO.



$R: 0$.

(10) SI EL CONTORNO CERRADO SIMPLE C ES EL CÍRCULO $|z|=1$ DESCRITO EN UNA DIRECCIÓN POSITIVA (O NEGATIVA) CALCULAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES. **T-3-3**

(a) $I = \int_C \frac{z^3}{z+3}\,dz$ (R: $I = 0$)

(b) $I = \int_C \frac{(e^{2z} + 3\,tgh z)}{z^2+4}\,dz$ (R: $I = 0$)

(c) $I = \int_C \frac{3\,sen^2 z\,dz}{z^2-7z+7}$ (R: $I = 0$.)

(11) EVALÚE LAS SIGUIENTES INTEGRALES COMPLEJAS.

(a) $\int_0^z e^{az}\,dz \Rightarrow$ (R: $\frac{1}{a}\left[e^{az}-1\right]$.)

(b) $\int_0^z sen\,az\,dz$ (R: $-\frac{1}{a}\left[\cos az-1\right]$.)

(c) $\int_{1-i}^{1+i}(z^2+1)\,dz$ (R) $\frac{10}{3}i$.

(d) $\int_{-i\pi/6}^{i\pi/6}\cos 6z\,dz$ (R: $\frac{1}{3}sen(\pi i) = \frac{i}{3}senh\,\pi$)

(12) EVALÚE LAS SIGUIENTES INTEGRALES COMPLEJAS.

(a) $\int_C \frac{(e^z-1)}{z}\,dz$, $C: |z|=1$. (R) 0.

(b) $\int_C \frac{(\operatorname{senh}^2 z + \cos z)}{z - i\pi}$ si $C: |z| = 4$. (T-3-4)

(R): $2\pi i \cosh \pi$.

(c) $\int_C \left[\frac{3}{z+1} - \frac{4}{z-1}\right] dz$ $C: |z| = 2$

R: $-2\pi i$

(d) $\int_C \frac{dz}{z^4 - 1}$ CON EL CÍRCULO $C: |z| = 2$

(R): 0

(13) EVALÚE LAS INTEGRALES SIGUIENTES, PARA EL CONTORNO CERRADO SIMPLE C TOME LA FRONTERA DE UN CUADRADO CUYOS LADOS SE ENCUENTRAN A LO LARGO DE LAS LÍNEAS $X = \pm 4$ y $y = \pm 4$, DESCRITAS EN LA DIRECCIÓN POSITIVA.

(a) $\int_C \frac{e^z}{z^6} dz$ (R): $\frac{i\pi}{60}$.

(b) $\int_C \frac{(z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1) dz}{(z - 2i)^6}$ (R) -24π.

(14) EVALÚE: $I = \int \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z} dz$ si $|z + 1 - i| < \frac{3}{2}$.

(R): $3\pi(i - 1)$.

15 a EVALÚE: $I = \frac{4}{i}\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz$ T-3-S

con $C: |z| = 1.$

R: $I = 0.8\pi$

b $I = \frac{z\,dz}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}$ si $C: |z| = \frac{3}{2}$.

R: $I = 0$