INTEGRALES DE LÍNEA COMPLEJAS Ó DE CONTORNO.

INTRODUCCIÓN:

UNA CURVA C ES UN CONJUNTO DE PUNTOS.

$z = (x, y)$ TAL QUE:

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t) \quad a \leq t \leq b \ (*)$$

DONDE $x(t)$ y $y(t)$ SON FUNCIONES CONTINUAS DEL PARÁMETRO REAL "t".

LAS ECUACIONES DADAS EN (*) SON LLAMADAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA CURVA. ASÍ, PARA CADA VALOR DE t EN EL INTERVALO $[a, b]$ OBTENEMOS UN PUNTO z EN EL PLANO COMPLEJO DEFINIDO POR:

$$z = z(t) = x + iy = x(t) + iy(t)$$

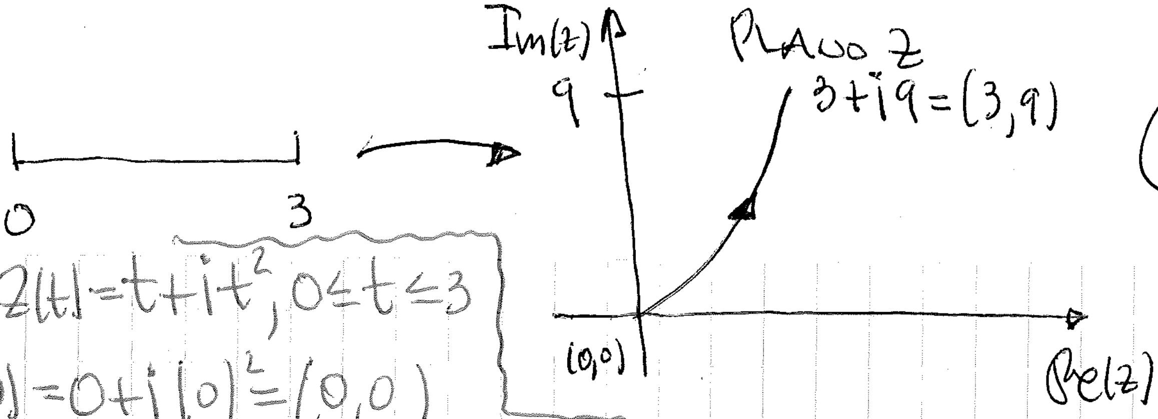
$$\therefore z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

EJEMPLO:

① SEAN $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ SI $0 \leq t \leq 3$.

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 3.$$

LAS FUNCIONES t y t^2 SON FUNCIONES CONTINUAS EN EL INTERVALO DADO, POR TANTO DESCRIBIRÁN UNA CURVA EN EL PLANO Z.



110

$z(t)=t+it^2,\ 0\le t\le 3$

$z(0)=0+i(0)^2=(0,0)$

$z(3)=3+i(3)^2=3+i9=(3,9)$

• **DEF** C ES UNA CURVA SIMPLE O ARCO DE JORDAN SI NO SE CRUZA CONSIGO MISMA; ESTO ES, $z(t_1)\neq z(t_2)$ CUANDO $t_1\neq t_2$.

SI C ES UNA CURVA SIMPLE, EXCEPTO POR EL HECHO DE QUE $z(b)=z(a)$ SE DICE QUE C ES UNA CURVA SIMPLE Y CERRADA O CURVA DE JORDAN.

EJEMPLO.

(2) SEAN $X=X(t)=\cos t$; $y=y(t)=\operatorname{sen} t$ $\quad 0\le t\le 2\pi$.

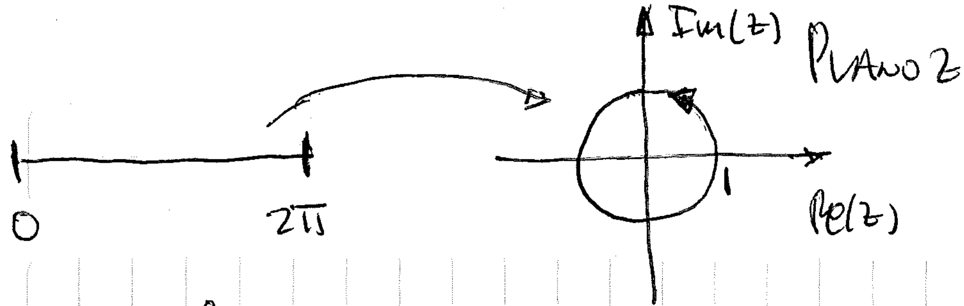
HECHO $z(t)=x(t)+iy(t)=\cos t+i\operatorname{sen} t\quad ,0\le t\le 2\pi$.

$z(0)=\cos(0)+i\operatorname{sen}(0)=1$

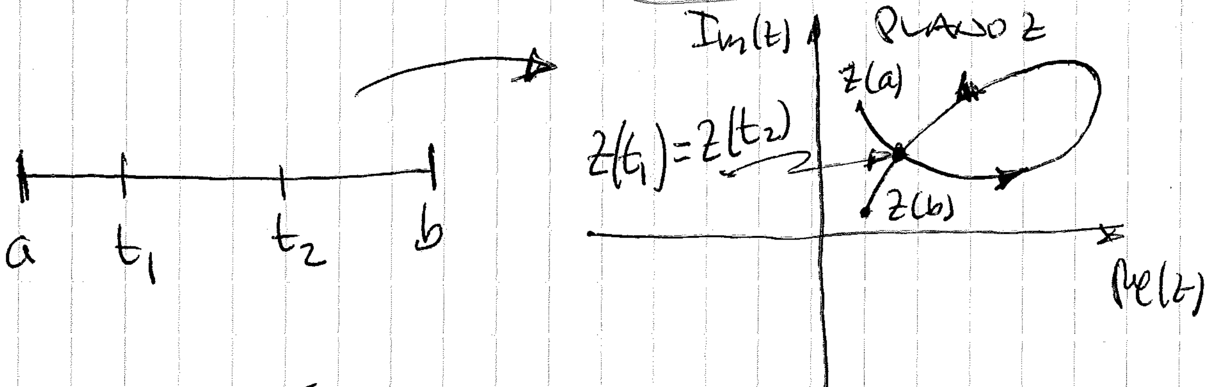
$z(2\pi)=\cos(2\pi)+i\operatorname{sen}(2\pi)=1$

ADEMÁS: $\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=x^2+y^2=1$.

REPRESENTA UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO. (ES CURVA SIMPLE Y CERRADA).



UN EJEMPLO DE UNA CURVA NO-SIMPLE ES:



• DEF. LA FUNCIÓN DE VALOR COMPLEJO

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \;;\; a \le t \le b$$

SE DICE QUE ES DIFERENCIABLE DEL PARÁMETRO REAL "t"

SI $x(t)$ y $y(t)$ SON DIFERENCIABLES y:

$$z'(t) = \frac{dz(t)}{dt} = x'(t) + i\,y'(t).$$

• DEF UNA CURVA C, DESCRITA POR $z(t)$, SE LLAMA SUAVE SI $z'(t)$ EXISTE, ES CONTINUA EN EL INTERVALO $[a,b]$ y SI $z'(t)$ NUNCA SE HACE CERO EN EL INTERVALO DADO.

EJEMPLO: LAS CURVAS DADAS POR:

③

1) $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$ SI $0 \le t \le 2\pi$

SOL> $(e^{it})' = i\,e^{it} \neq 0$ ES UNA CURVA SUAVE.

4) $z(t) = t + i t^2, \; 0 \le t \le 3$.

Sol: $z'(t) = 1 + i2t$

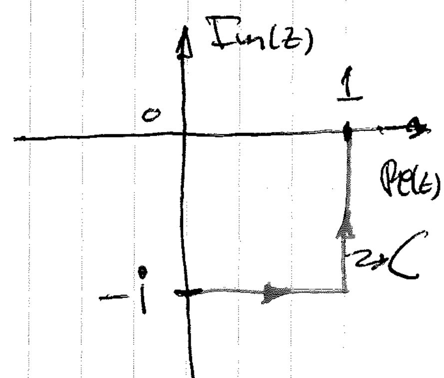
$z'(0) = 1 + i2(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$.

$z'(3) = 1 + i2(3) = 1 + i6 \neq 0$.

$\therefore$ $z(t)$ ES UNA CURVA SUAVE.

5)

$$C: \; z(t) = \begin{cases} 1 - i(1-t) & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 1 + t - i & \text{si } -1 \le t \le 0 \end{cases}$$



- $z(t) = 1 - i(1-t), \; 0 \le t \le 1$

$z(0) = 1 - i(1-0) = 1 - i = (1,-1)$

$z(1) = 1 - i(1-1) = 1 - i(0) = 1 = (1,0)$

- $z(t) = 1 + t - i, \; -1 \le t \le 0$

$z(-1) = 1 - 1 - i = 0 - i = -i = (0,-1)$

$z(0) = 1 + 0 - i = 1 - i = (1,-1)$

- INTEGRAL DE LÍNEA O CONTORNO COMPLEJA.

- DEF: SEA $C: z = z(t)$, $a \le t \le b$, UNA CURVA SUAVE, y $f(z) = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$ CONTINUA EN C. ASÍ, LA INTEGRAL DE LÍNEA O CONTORNO COMPLEJO DE f SOBRE C ESTÁ DADA POR:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[u(z(t)) + i\,v(z(t))\right]\left[x'(t) + i\,y'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \left[u(z(t))\,x'(t) - v(z(t))\,y'(t)\right] dt + i\int_a^b \left[u(z(t))\,y'(t) + v(z(t))\,x'(t)\right] dt.$$

$$\therefore \int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)\,dt$$

COMENTARIOS.

(A) LA INTEGRAL DE LÍNEA SOBRE UNA CURVA SUAVE POR PARTES SE OBTIENE AL APLICARLE LA DEFINICIÓN ANTERIOR A UN NÚMERO FINITO DE INTERVALOS CERRADOS, EN LOS CUALES $z(t)$ ES SUAVE, Y SUMAR RESULTADOS.

(B) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA.

(I) SEA K UNA CONSTANTE COMPLEJA.

$$\int_C K f(z)\,dz = K\int_C f(z)\,dz.$$

II) SI C ES UNA CURVA QUE VA DESDE a HASTA b, $-C$ ES LA MISMA CURVA RECORRIDA DE b A a. EN ESTE CASO:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_{C} f(z)\,dz.$$

III) SI C ES UN CONTORNO, CON CURVAS SUAVES DEFINIDAS POR $C_1, C_2, \ldots, C_n$, ENTONCES:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

EN GENERAL EL VALOR $\int_C f(z)\,dz$ DESDE UN PUNTO a HASTA UN PUNTO b, DEPENDERÁ DE LA TRAYECTORIA QUE SE SIGA PARA IR DEL PUNTO INICIAL AL PUNTO FINAL.

C) REGIONES CONEXAS SIMPLES Y CONEXAS MÚLTIPLES.

DECIMOS QUE UNA REGIÓN R ES CONEXA SIMPLE SI CUALQUIER CURVA CERRADA SENCILLA QUE SE ENCUENTRE EN R PUEDE ESCOGERSE HASTA LLEGAR A SER UN PUNTO SIN SALIR DE LA REGIÓN. UNA REGIÓN R QUE NO ES CONEXA SIMPLE SE LLAMA CONEXA MÚLTIPLE.

(6) AHORA, CONSIDERE OTRA ECUACIÓN PARAMÉTRICA

ESTO ES: $x = 2t$ y $y = 2t$

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = 2t + i\,2t \text{ si } 0 \le t \le \frac{1}{2}.$$

VERIFICAR:

$$z(0) = 2(0) + i\,2(0) = 0 + i(0) = (0,0)$$

$$z\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) + i\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + i = (1,1)$$

SON CORRECTOS LOS PUNTOS.

$$z = 2t + i\,2t \Rightarrow dz = (2 + i\,2)\,dt$$

$$\int_C f(z) = \int_0^{1/2} (2t + 2t - i\,6t)(2 + i\,2)\,dt =$$

$$= (2+i2)\int_0^{1/2}(4t - i6t)\,dt = (2+i2)\left[\int_0^{1/2} 4t\,dt - i6\int_0^{1/2} t\right]$$

$$= (2+i2)\left[2t^2\Big|_0^{1/2} - i6\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2}\right] = (2+i2)\left[2\left[\frac{1}{4} - 0\right] - 3i\left[\frac{1}{4} - 0\right]\right]$$

$$= (2+i2)\left[\frac{1}{2} - i\,\frac{3}{4}\right] = 2(1+i)\,\frac{1}{2}\left[1 - i\,\frac{3}{2}\right] = (1+i)\left(1 - i\,\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ I = (1+i)\left(1 - i\,\frac{3}{2}\right)$$

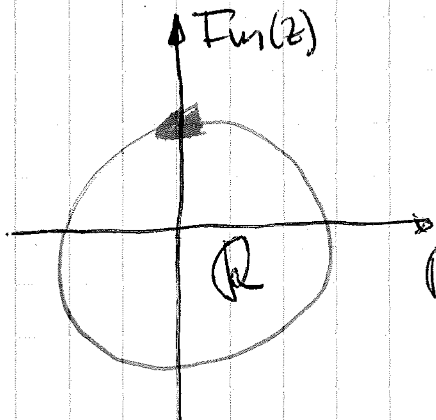
HECHOS:

$$y(t) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)t + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

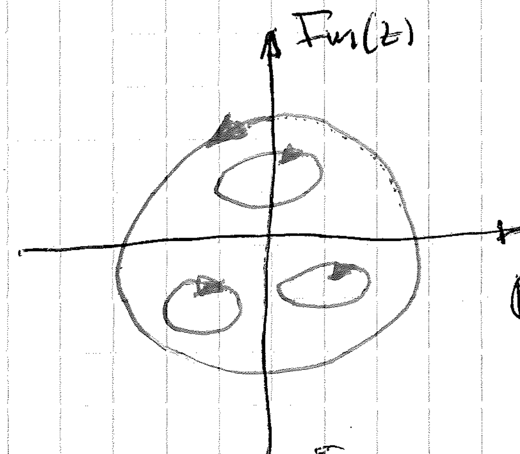
$$x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1$$

$$y(t) = (y_2 - y_1)t + y_1$$

INTUITIVAMENTE, UNA REGIÓN CONEXA SIMPLE ES AQUELLA QUE NO TIENE AGUJEROS EN TANTO QUE UNA REGIÓN CONEXA MÚLTIPLE SÍ LOS TIENE.



REGIÓN CONEXA SIMPLE.

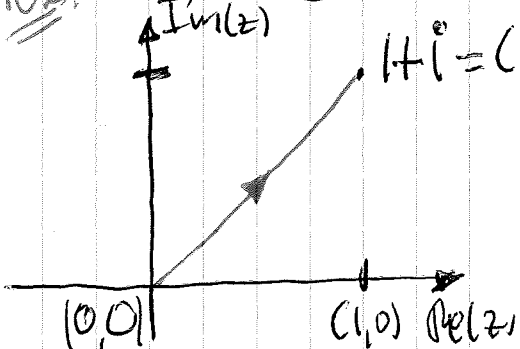


REGIÓN CONEXA MÚLTIPLE.

⑦ EJEMPLOS. SEA C UN CONTORNO QUE VA DESDE $z=0=(0,0)$ A $z=1+i=(1,1)$ A LO LARGO DE UN SEGMENTO DE RECTA Y $f(z)=x+y-3xi$.

EVALÚE: $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=\int_0^{1+i}(x+y-i3x)\,dz$.

SOL:



TENEMOS QUE DETERMINAR LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS $(0,0)$ Y $(1,1)$.

LA ECUACIÓN ES:

SI HACEMOS $x=x(t)=t \Rightarrow y=y(t)=t$ CON $0\le t\le 1$.

SABEMOS QUE:

116

$$z(t)=x(t)+iy(t): \quad a\leq t\leq b.$$

$$x=x(t)=t \text{ y } y=y(t)=t \text{ si } 0\leq t\leq 1.$$

$$z=z(t)=t+it \Rightarrow dz=(1+i)dt.$$

COMO: $f(z)=x+y-i3x$ ESTA DEFINIDA SOBRE C ENTONCES:

$$f(z)=f(z(t))=t+t-i3t=2t-i3t, \quad 0\leq t\leq 1.$$

POR OTRO LADO DE LA DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA.

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\,z'(t)dt.$$

$$\int_C f(z)dz=\int_0^1 [2t-i3t](1+i)dt=(1+i)\int_0^1 [2t-i3t]dt$$

$$=(1+i)\left[\int_0^1 2t\,dt-i\int_0^1 3t\,dt\right]=(1+i)\left[t^2\Big|_0^1-i\frac{3}{2}t\Big|_0^1\right]$$

$$=(1+i)\left[(1^2-0^2)-i\frac{3}{2}(1-0)\right]=(1+i)\left[1-i\frac{3}{2}\right]$$

$$\therefore I=(1+i)\left(1-i\frac{3}{2}\right).$$

VERIFICAR QUE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS SON LAS CORRECTAS; ES DECIR, $z=z(t)=t+it$ CON $0\leq t\leq 1$.

$t=0 \Rightarrow z(0)=0+i(0)=0+0=(0,0)$ ES EL PUNTO INICIAL

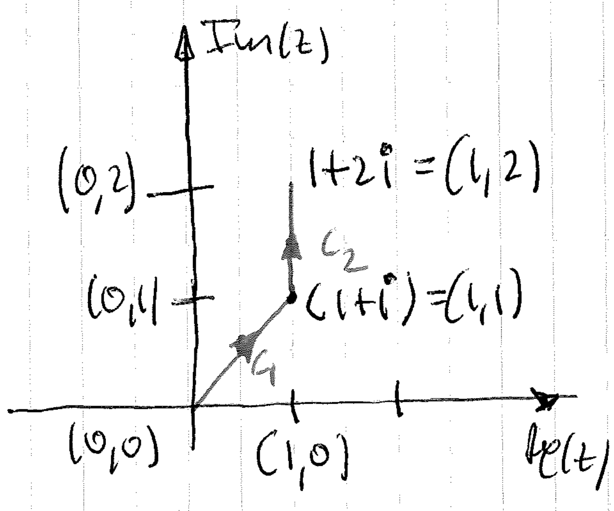
$t=1 \Rightarrow z(1)=1+i(1)=1+i=(1,1)$ ES EL PUNTO FINAL

VER GRÁFICA

ES CORRECTA LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA.

8) EVALÚE LA INTEGRAL $I = \int_C (x^2 + iy^2)\, dz$

DONDE C ES LA FIGURA SIGUIENTE.



SOL

- PARA C_1:

$$(x_1, y_1) = (0,0)$$
$$(x_2, y_2) = (1,1)$$

$$y = y(t) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)t + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} = \left(\frac{1-0}{1-0}\right)t + \frac{(1)(0)-(0)(0)}{1-0} = t$$

$$\therefore\ y = y(t) = t$$

$$(x_1, y_1) = (0,0)$$
$$(x_2, y_2) = (1,0)$$

$$x = x(t) = (x_2 - x_1)t + x_1 = (1-0)t + 0 = t \Rightarrow x = x(t) = t$$

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) = t + it\ ,\ 0 \le t \le 1.$$

$$dz = (1+i)\,dt.$$

$$I_1=\int_{C_1}(x^2+iy^2)\,dz=\int_0^1\left[t^2+it^2\right](1+i)\,dt$$

$$=(1+i)\int_0^1\left[t^2+it^2\right]dt=(1+i)\left[\int_0^1 t^2dt+i\int_0^1 t^2dt\right]$$

$$=(1+i)\left[\frac{t^3}{3}\Big|_0^1+i\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right]=(1+i)\left[\left(\frac{1}{3}-0^3\right)+i\left(\frac{1}{3}-0^3\right)\right]$$

$$=(1+i)\left[\frac{1}{3}+i\,\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}(1+i)(1+i)=\frac{1}{3}(1+i)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left[(1+2i+i^2)\right]=\frac{1}{3}\left[1+2i-1\right]=i\,\frac{2}{3}\quad\therefore I_1=i\,\frac{2}{3}$$

PARA C_2: $\quad x=x(t)=1$

AHORA: $(x_1,y_1)=(0,1)$, $(x_2,y_2)=(0,2)$ $\Rightarrow y=y(t)=(y_2-y_1)t+y_1=(2-1)t+0=t$

$$\therefore y=y(t)=t$$

$z=z(t)=x(t)+iy(t)=1+it$. $\quad$ si $1\leq t\leq 2$

$z(1)=1+i(1)=1+i=(1,1)$

$z(2)=1+i2=1+2i=(1,2)$.

$z=z(t)=x(t)+iy(t)=1+it\Rightarrow dz=i\,dt\quad,1\leq t\leq 2.$

$$I_2=\int_{C_2}(x^2+iy^2)\,dz=\int_1^2\left((1)^2+it^2\right)i\,dt=i\int_1^2(1+it^2)\,dt$$

$$I_2 = i\left[\int_1^2 dt + i\int_1^2 t^2\, dt\right]$$

$$= i\left[t\Big|_1^2 + i\,\frac{t^3}{3}\Big|_1^2\right] = i\left[(2-1) + i\,\frac{1}{3}(8-1)\right]$$

$$= i\left[1 + i\,\frac{7}{3}\right] = i + i^2\,\frac{7}{3} = i - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3} + i$$

$$\therefore I_2 = -\frac{7}{3} + i$$

FINALMENTE:

$$I = I_1 + I_2 = i\,\frac{2}{3} - \frac{7}{3} + i = -\frac{7}{3} + i\left(\frac{2}{3} + 1\right) = -\frac{7}{3} + i\,\frac{5}{3}$$

$$\therefore I = -\frac{7}{3} + i\,\frac{5}{3}.$$

9) EVALÚE: $I = \int_C x\, dz$, TAL QUE $C: z = z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

SOL: $x = x(t) = \cos t$; $y = y(t) = \operatorname{sen} t$.

$$z = z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t = x(t) + i\, y(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

$$dz = (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\, dt, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$I = \int_C x\, dz = \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t + i\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t \cos t + i \cos^2 t)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t + i \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$$

TABLAS.

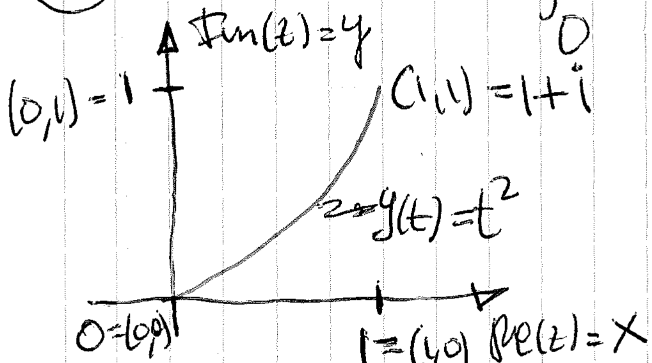
- $\int \operatorname{sen} at \cos at \, dt = \frac{\operatorname{sen}^2 at}{2a}$
- $\int \cos^2 at \, dt = \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2at}{4a}$ • $\int \cos^2 at \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2at}{4a}$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi} + i\left[\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$= -\left[\cancel{\frac{\operatorname{sen}^2 2\pi}{2}}^{\,0} - \cancel{\frac{\operatorname{sen}^2 0}{2}}^{\,0}\right] + i\left[\frac{1}{2}(2\pi - 0) + \cancel{\frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4}}^{\,0} - \cancel{\frac{\operatorname{sen} 0}{4}}^{\,0}\right]$$

$$= i\left[\frac{2\pi}{2} - \frac{0}{2} + 0\right] = i\,\frac{2\pi}{2} = i\pi \quad \therefore \; I = i\pi$$

(10) EVALÚE $I = \int_0^{1+i} (z-1)\, dz$ SOBRE LA PARÁBOLA $y = x^2$.



Sol $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $0 \le t \le 1$.

$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) = t + i\,t^2$

$z = t + it^2$, $0 \le t \le 1$

$dz = (1 + i2t)\, dt$.

$$z - 1 = x + iy - 1 = t + it^2 - 1 = (t-1) + it^2$$

$$I = \int_0^{1+i} (z-1)\, dz = \int_0^1 \left[(t-1) + it^2\right] dz = \int_0^1 \left[t - 1 + it^2\right] (1 + i2t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[(t-1)+it^2\right](1+i2t)\,dt$$

$$=\int_0^1 \left[(t-1)+it^2+i2t(t-1)+2i^2t^3\right]dt$$

$$=\int_0^1 \left[t-1+it^2+i2t^2-i2t-2t^3\right]dt$$

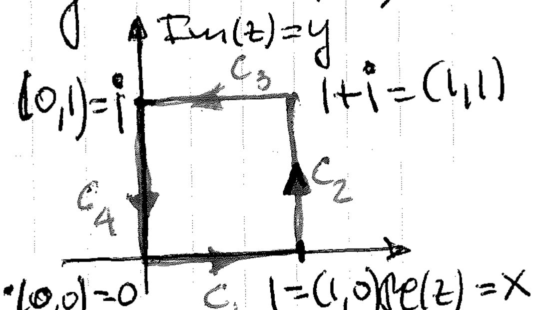
$$=\int_0^1 \left[t-1+3it^2-i2t-2t^3\right]dt=\left[\frac{t^2}{2}-t+3i\frac{t^3}{3}-2i\frac{t^2}{2}-2\frac{t^4}{4}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-1+i-i-\frac{1}{2}=-1 \qquad \therefore\ I=-1$$

11) SEA C LA FRONTERA DEL CUADRADO CON VÉRTICES EN $z=0=(0,0)$, $z=1=(1,0)$, $z=1+i=(1,1)$ y $z=i=(0,1)$,

EVALÚE:

$$I=\pi\int_C e^{\pi\bar{z}}\,dz.$$



SOL:

$$I=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}\ ;\ \bar{z}=\overline{z(t)}=x(t)-iy(t);$$

C_1: $x=t,\ y=0,\ 0\le t\le 1 \Rightarrow z=z(t)=x+iy=t+i(0)=t \Rightarrow dz=dt$

$$\bar{z}=x-iy=t-i(0)=t\ ;\ 0\le t\le 1$$

$$I_1=\int_{C_1}f(z)\,dz=\pi\int_0^1 e^{\pi\bar{z}}\,dt=\pi\int_0^1 e^{\pi t}\,dt=\frac{\pi}{\pi}e^{\pi t}\Big|_0^1=e^{\pi(1)}-e^{0}$$

$$=e^{\pi}-1 \qquad \therefore\ I_1=e^{\pi}-1$$

$$\boxed{\int e^{at}\,dt=\frac{e^{at}}{a}}$$

C_2 : $x=1$; $y=t$, $0\le t\le 1$

$z=z(t)=x(t)+iy(t)=1+it \Rightarrow dz=i\,dt$

$\bar z=\bar z(t)=x-iy=1-it$.

$$e^{\pi\bar z}=e^{\pi(1-it)}=e^{\pi}e^{-i\pi t}$$

$$I_2=\int_{C_2} f(z)\,dz=\pi\int_{C_2} e^{\pi\bar z}\,dt=i\pi\int_0^1 e^{\pi}e^{-i\pi t}\,dt=i\pi e^{\pi}\int_0^1 e^{-i\pi t}\,dt$$

$$=\frac{ie^{\pi}\pi}{-i\pi}\left[e^{-i\pi t}\right]_0^1=-e^{\pi}\left[e^{-i\pi}-e^{0}\right]=-e^{\pi}\left[-1-1\right]=-e^{\pi}(-2)$$

$$\therefore I_2=2e^{\pi}$$

$\boxed{e^{-i\pi}=\cos\pi-i\,\text{sen}\,\pi=-1.}$

C_3 : $x=t$, $y=1$; $0\le t\le 1$; $z=z(t)=x+iy=t+i\Rightarrow dz=dt$

$\bar z=x-iy=t-i$

$$I_3=\int_{C_3} f(z)\,dz=\pi\int_{C_3} e^{\pi\bar z}\,dz$$

$$=\pi\int_0^1 e^{\pi t}e^{-i\pi}\,dt=\pi e^{-i\pi}\int_0^1 e^{\pi t}\,dt=\frac{\pi(-1)}{\pi}\cdot e^{\pi t}\Big|_0^1$$

$$=e^{\pi}-e^{0}=e^{\pi}-1\quad\therefore I_3=e^{\pi}-1$$

C_4 : $x=0$, $y=t$, $0\le t\le 1$; $z=z(t)=x+iy=0+it\Rightarrow dz=i\,dt$

$\bar z=x-iy=0-it=-it$.

$$I_4 = \int_{C_4} f(z)dz = -\pi \int_0^1 e^{\pi \bar{z}} dz = -\pi \int_0^1 e^{0} e^{-it\pi} i\,dt$$

$$= -\pi i \int_0^1 e^{-i\pi t} dt = \frac{-\pi i}{-\pi i} e^{-i\pi t}\Big|_0^1 = e^{-i\pi} - e^{0} = -1-1 = -2$$

$$\boxed{e^{-i\pi} = -1}$$

$$\therefore I_4 = -2$$

FINALMENTE:

$$I = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} + e^{\pi} - 1 - 2 = 4e^{\pi} - 4 = 4(e^{\pi} - 1).$$

$$\therefore I = 4\left[e^{\pi} - 1\right]$$

- INTEGRAL DE POTENCIAS ENTERAS.

SEA $f(z) = (z - z_0)^n$, DONDE n ES UN ENTERO Y z_0 ES UNA CONSTANTE. INTEGRAR EN SENTIDO CONTRARIO AL MOVIMIENTO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ, ALREDEDOR DEL CÍRCULO C DE RADIO r Y CENTRO EN z_0.

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

. TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.

EL TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO PARA INTEGRALES DE LÍNEA REALES, SI LAS FUNCIONES $P(x,y)$ Y $Q(x,y)$ JUNTO CON SUS DERIVADAS PARCIALES P_x, P_y, Q_x Y Q_y, SON CONTINUAS SOBRE UNA REGIÓN CERRADA R QUE CONSISTE DE UNA CURVA CERRADA SIMPLE C Y SU INTERIOR, ENTONCES:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy,$$

DONDE, LA CURVA C ES RECORRIDA EN EL SENTIDO POSITIVO; ESTO ES, LA DIRECCIÓN TAL QUE LOS PUNTOS INTERIORES DE R ESTÁN A LA IZQUIERDA DE C.

. TEOREMA DE CAUCHY.

I. SEA $f(z) = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$ UNA FUNCIÓN ANALÍTICA SOBRE LA REGIÓN R QUE CONSISTE DE UNA CURVA CERRADA SIMPLE C Y SU INTERIOR. SI $f'(z)$ ES CONTINUA SOBRE R, ENTONCES:

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0,$$

EN DONDE LA SEGUNDA INTEGRAL ENFATIZA EL HECHO DE QUE C ES UNA CURVA CERRADA SIMPLE.

POR EJEMPLO, LA FUNCIONES:

$$\oint_C e^z\,dz = 0, \quad \oint_C \operatorname{sen} z\,dz, \quad \oint_C P(z)\,dz = 0,$$

CON RESPECTO A CUALQUIER CURVA CERRADA SIMPLE C. EN PARTICULAR, DE LA ÚLTIMA DE ESTAS INTEGRALES OBTENEMOS:

$$\oint_C dz = 0, \quad \oint_C z\,dz = 0, \quad \oint_C z^2\,dz = 0, \text{ ETC.}$$

- COMENTARIO.

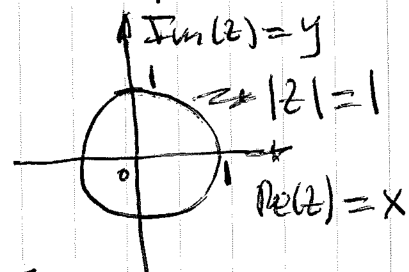
EL TEOREMA DE CAUCHY NO SIEMPRE LA INTEGRAL ES CERO, PUEDE FALLAR SI $D = R$ NO ES SIMPLEMENTE CONEXO.

EJEMPLO

VERIFICAR QUE: $\oint_C dz = \int_C dz = 0$, CON $C: |z| = 1$.

SOL:

$$\int_C dz = 0 \quad \text{si } C: |z| = 1$$



$$z = z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$dz = (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\,dt$$

$$I = \int_C dz = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\,dt = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,dt + i \int_0^{2\pi} \cos t\,dt$$

$$= -(-\cos t)\Big|_0^{2\pi} + i\,\text{sen}\,t\Big|_0^{2\pi} = \cos t\Big|_0^{2\pi} + i\,\text{sen}\,t\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \cos 2\pi - \cos 0 + i\left[\text{sen}\,2\pi - \text{sen}\,0\right]$$

$$= 1 - 1 + i\left[0 - 0\right] = 0 \qquad \therefore\ I = \int_C dz = 0$$

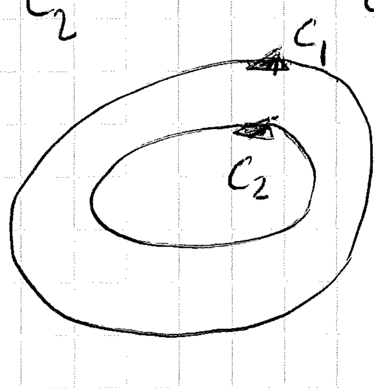
• TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT.

I. SI $f(z)$ ES ANALÍTICA SOBRE UNA CURVA CERRADA SIMPLE C y SU INTERIOR, ENTONCES:

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz = 0.$$

II. SI $f(z)$ ES ANALÍTICA DENTRO Y SOBRE LA FRONTERA DE UNA REGIÓN ACOTADA POR DOS CURVAS CERRADAS C_1 Y C_2 SE TIENE QUE:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



• FÓRMULAS DE LA INTEGRAL DE CAUCHY.

(*) I SEA f ANALÍTICA EN UN DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO D. SEA z_0 CUALQUIER PUNTO EN D Y SEA C CUALQUIER CURVA CERRADA SIMPLE EN D QUE ENCIERRA A z_0. ENTONCES:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

(**) INTEGRAL DE CAUCHY PARA DERIVADAS SUPERIORES.

I. SEA f ANALÍTICA EN UN DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO D Y SEA z_0 EN D. ENTONCES f TIENE DERIVADAS DE TODOS LOS ÓRDENES EN z_0. ADEMÁS, LA ENÉSIMA DERIVADA DE f EN z_0 ES:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

HECHO.

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

LOS RESULTADOS (*) y (**) SE CONOCEN COMO FÓRMULAS DE LA INTEGRAL DE CAUCHY Y SON INTERESANTES DEBIDO A QUE NOS MUESTRAN QUE SI CONOCEMOS UNA FUNCIÓN $f(z)$ SOBRE C ENTONCES PODEMOS HALLAR LOS VALORES DE LA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS EN TODOS LOS PUNTOS DENTRO DE C.

ASÍ, SI UNA FUNCIÓN DE VARIABLE COMPLEJA TIENE UNA PRIMERA DERIVADA, O SEA, ES ANALÍTICA EN UNA REGIÓN CONEXA SIMPLE, TODAS SUS OTRAS DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR TAMBIÉN EXISTEN EN $R = D$.

EJEMPLOS.

1 EVALÚE: $I = \int_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)} dz$, DONDE C ES UNA CURVA CERRADA SIMPLE EN $\mathbb{C}$.

SOL:

CASO A

- SUPONGA QUE: $(z-i) = 0 \Rightarrow z_0 = i \notin C$, ENTONCES.

$$I = \int_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)} dz = 0$$

CASO B

- SUPONGA QUE: $(z-i) = 0 \Rightarrow z_0 = i \in C$.

UTILIZAR (*)T $\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$

DONDE: 129

$f(z) = f(z_0) = e^{z_0^2}$ si $z_0 = i \Rightarrow f(z_0) = f(i) = e^{z_0^2}$

$f(z_0) = f(i) = e^{z_0^2} = e^{i^2} = e^{-1} \Rightarrow f(z_0) = f(i) = e^{-1}$

POR (*T):

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)} = \int_C \frac{e^{z^2}}{(z-i)}\,dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i f(i) = 2\pi i e^{-1}$$

$$\therefore I = \frac{2\pi i}{e}.$$

2 $\quad I = \int_C \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)}{z-2}\,dz.$

CASO A

SUPONGA $z-2=0 \Rightarrow z_0 = 2 \therefore z_0 = 2 \notin C.$

ENTONCES:

$$I = \int_C \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)}{z-2}\,dz = 0 \therefore I = 0$$

CASO B

SUPONGA: $(z-2)=0 \Rightarrow z_0 = 2 \in C,$

$f(z) = e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)\,dz \Rightarrow f(z_0) = f(2) = e^{(2)(2)}\operatorname{sen}(2^2) = e^4\operatorname{sen}4.$

POR (*T).

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = \int_C \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z^2)}{(z-2)}\,dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i e^4 \operatorname{sen}4.$$

(130)

③ $I = \int_C \dfrac{e^z}{z^2+4}\,dz$ si $C: |z| = 1.$

SOL

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+4} \Rightarrow f'(z) = \frac{(z^2+4)e^z - e^z(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= \frac{(z^2-2z+4)e^z}{(z^2+4)^2} \quad \therefore f'(z) = \frac{(z^2-2z+4)\,e^z}{(z^2+4)^2},$$

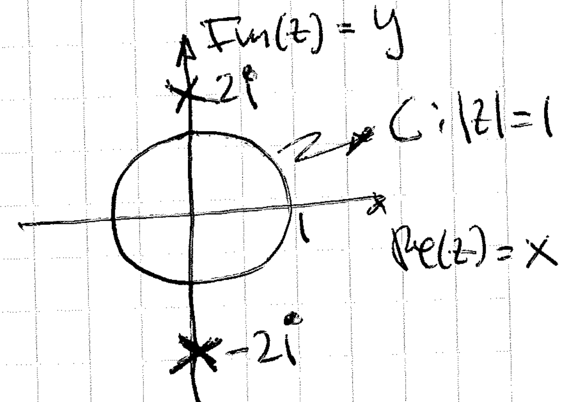
SON ANALÍTICAS SOBRE Y EN EL INTERIOR DE $|z|=1$.

COMO LA DERIVADA ES ANALÍTICA, ES CONTINUA. POR TANTO, EL *TEOREMA SE APLICA.

$$z^2+4 = (z+2i)(z-2i) = 0$$

$$z+2i = 0 \Rightarrow z_0 = -2i \notin C$$

$$z-2i = 0 \Rightarrow z_0 = 2i \notin C$$



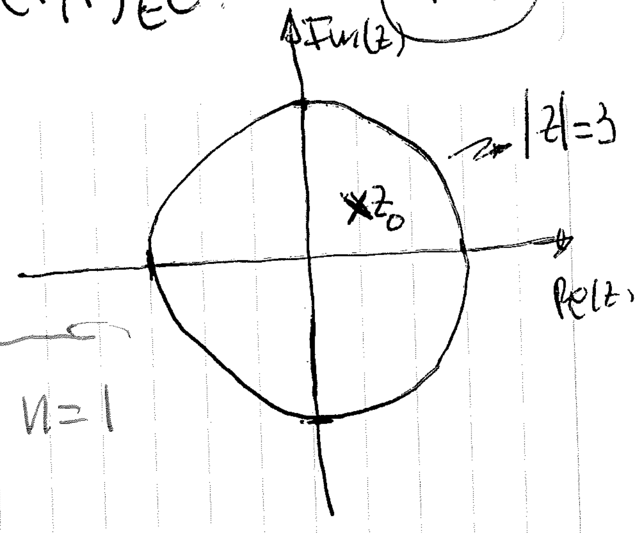
COMO $z_0 = -2i$ y $z_0 = 2i$ ESTÁN FUERA DE $C: |z| = 1$, LUEGO LA INTEGRAL RESULTA CERO.

$$\therefore I = \int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 0 \qquad \therefore I = 0$$

④ $I = \int_C \dfrac{dz}{z-1-i} = \int_C \dfrac{dz}{z-(1+i)}$ si $C: |z| = 3.$

SOL: $z-(1+i)=0 \Rightarrow z_0 = 1+i = (1,1) \in \mathbb{C}$

131



$$I = \int_C \frac{dz}{z-(1+i)}$$

APLICANDO EL HECHO

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

$n=1$ y $z_0=(1+i)$, ENTONCES:

$$I = \int_C \frac{dz}{z-(1+i)} = 2\pi i \quad \therefore \quad \underline{\underline{I = 2\pi i}}$$

(5) $I = \int_C \frac{dz}{z-3}$ si $C: |z+i| = 4$

$|z+i| = 4$

$|x+iy+i| = 4$; $|x+i(y+1)| = 4$

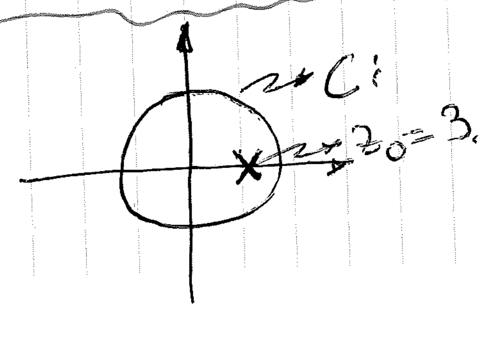
$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4$; $x^2+(y+1)^2 = 16$

centro $(0,-1)$; $r=4$, círculo.

SOL: $z-3=0 \Rightarrow z_0 = 3 \in \mathbb{C}$

APLICANDO HECHO:

$$I = \int_C \frac{dz}{z-3} = 2\pi i \quad \therefore \quad \underline{\underline{I = 2\pi i}}$$



⑥ $I=\int_C \dfrac{e^z}{z^2+4}\,dz$ CON $C: |z|=3.$

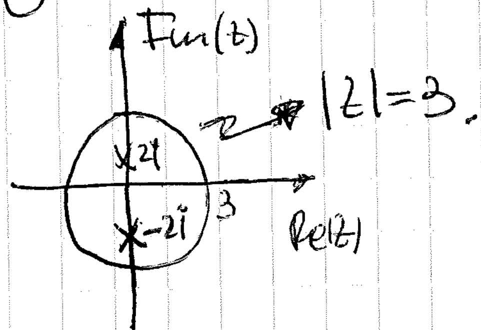
132

SOL

$$z^2+4=(z+2i)(z-2i)=0$$

$(z+2i)=0 \Rightarrow z_0=-2i \in C$

$(z-2i)=0 \Rightarrow z_0=2i \in C.$



$$I=\int_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz=\int_C \frac{e^z}{(z+2i)(z-2i)}\,dz$$

POR FRACCIONES PARCIALES

$$I=\int_C e^z\left[\frac{A}{z+2i}+\frac{B}{z-2i}\right]dz \quad (H)$$

CALCULANDO A Y B RESPECTIVAMENTE:

$$A=\left[(z+2i)\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}\right]_{z_0=-2i}=\left.\frac{1}{(z-2i)}\right|_{z_0=-2i}=\frac{1}{-2i-2i}=\frac{1}{-4i}$$

$$\therefore A=-\frac{1}{4i}$$

$$B=\left[(z-2i)\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}\right]_{z_0=+2i}=\left.\frac{1}{z+2i}\right|_{z_0=2i}=\frac{1}{2i+2i}=\frac{1}{4i}$$

$$\therefore B=\frac{1}{4i}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN (H), APLICANDO (**)T CON: $f(z)=e^z$; $z_0=-2i$ y $z_0=2i$.

$$I=\int_C e^{z}\left[-\frac{1}{4i}\frac{1}{z+2i}+\frac{1}{4i}\frac{1}{z-2i}\right]dz$$

$$=\frac{1}{4i}\int_C\left[-\frac{e^{z}}{z+2i}dz+\frac{e^{z}}{z-2i}dz\right]=\frac{1}{4i}\left\{-\int_C\frac{e^{z}}{z+2i}dz+\int_C\frac{e^{z}}{z-2i}dz\right\}$$

$$=\frac{1}{4i}\left\{-e^{-2i}2\pi i+e^{2i}2\pi i\right\}=\frac{2\pi i}{4i}\left\{e^{-2i}+e^{2i}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{-e^{-2i}+e^{2i}\right\}\quad\therefore\ I=\frac{\pi}{2}\left[-e^{-2i}+e^{2i}\right]$$

7 EVALÚE $\int_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}dz$ si $C:|z-2|=2$.

$|z-2|=2$; $(x-2)^2+y^2=4$

$|x+iy-2|=2$ } Círculo

$|x-2+iy|=2$ } Centro: $(2,0)$

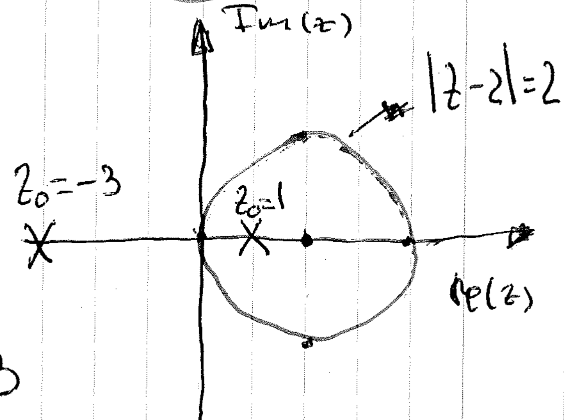
$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2$ | $r=2$

10/ MÉTODO A

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3}=\frac{5z+7}{(z-1)(z+3)}$$

$(z-1)=0 \Rightarrow z_0=1\in C$

$(z+3)=0 \Rightarrow z_0=-3\notin C$



POR FRACCIONES PARCIALES:

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+3}\quad(\mathrm{I})$$

$$5z+7=Az+3A+Bz-B=(A+B)z+3A-B$$

$A+B=5$
$+\ 3A-B=7$
$4A+0=12\Rightarrow A=\frac{12}{4}=3$

$A+B=5$
$3+B=5$
$B=5-3=2$

SUSTITUYENDO $A=3$ y $B=2$ EN (I).

$$I=\int_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz=\int_C \frac{A}{(z-1)}\,dz+\int_C \frac{B}{(z+3)}\,dz$$

$$I=3\int_C \frac{dz}{(z-1)}+2\cancel{\int_C \frac{dz}{(z+3)}}^{\,0}=3(2\pi i)+2(0)=6\pi i$$

APLICANDO EL HECHO A LA PRIMERA INTEGRAL Y LA SEGUNDA INTEGRAL VALE CERO, YA QUE $(z+3)=0 \Rightarrow z_0=-3\notin C$.

$$\therefore\ I=3(2\pi i)=6\pi i$$

$\boxed{\text{MÉTODO B}}$

SOL

$$I=\int_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz\ ;\ C:|z-2|=2.$$

SABEMOS.

$$z^2+2z-3=(z-1)(z+3)=0$$

$$(z-1)=0 \Rightarrow z_0=1\in C$$

$$(z+3)=0 \Rightarrow z_0=-3\notin C.$$

ENTONCES REESCRIBIENDO EL INTEGRANDO COMO:

$$\frac{5z+7}{z^2+2z-3}=\frac{5z+7}{(z-1)(z+3)}=\frac{\left.\frac{5z+7}{(z+3)}\right\} f(z)}{(z-1)}$$

APLICANDO (*T)

$$I=2\pi i\,f(1)=2\pi i\left(\frac{5(1)+7}{1+3}\right)=2\pi i\left(\frac{5+7}{4}\right)=2\pi i\left(\frac{12}{4}\right)$$

$$=2\pi i(3)=6\pi i \quad \therefore\ I=6\pi i$$

⑧ EVALÚE: $I = \int_C \frac{z}{z^2+9}\, dz$ CON $C: |z-2i| = 4$. (135)

SOL

$z^2+9 = (z+3i)(z-3i) = 0$

$(z+3i) = 0 \Rightarrow z_0 = -3i \notin C$; $(z-3i) = 0 \Rightarrow z_0 = 3i \in C$.

MÉTODO (A)

$|z-2i| = 4$

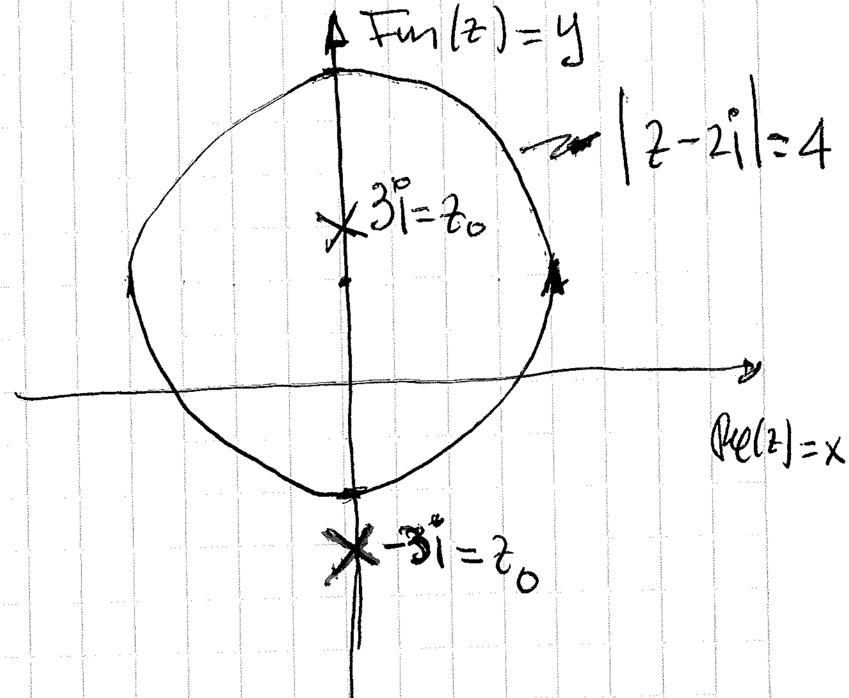
$|x+iy-2i| = 4$

$|x+i(y-2)| = 4$

$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = 4$

$x^2+(y-2)^2 = 16$ CÍRCULO.

CENTRO $(0,2)$ y $r=4$.



POR PARCIALES.

$$\frac{z}{z^2+9} = \frac{A}{z+3i} + \frac{B}{z-3i} \Rightarrow z = Az - A3i + Bz + 3iB$$

$z = (A+B)z + 3i(-A+B)$

$$\begin{array}{r} A+B=1 \\ -A+B=0 \\ \hline 2B=1 \end{array} \quad \therefore B = \frac{1}{2}$$

$A+B = 1 \Rightarrow A = 1-B = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

SUSTITUYENDO $A = 1/2$ y $B = \frac{1}{2}$ Y APLICANDO HECHO.

$$I = \int_C \frac{z}{z^2+9}\, dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{(z+3i)}^{\to 0} + \frac{1}{2}\int_C \frac{dz}{(z-3i)} = \frac{1}{2}(2\pi i) = \pi i \;\therefore\; I = \pi i$$

MÉTODO (B)

SOL:

136

$$\frac{z}{z^2+9}=\frac{z}{(z+3i)(z-3i)}=\frac{\overbrace{\frac{z}{z+3i}}^{f(z)}}{z-3i}$$

$$I=\int_C \frac{z}{z^2+9}\,dz=\int_C \frac{z}{(z+3i)(z-3i)}\,dz=\int_C \frac{\frac{z}{(z+3i)}}{(z-3i)}\,dz$$

$$f(z)=\frac{z}{z+3i}$$

APLICANDO (*) T

$$=2\pi i f(3i)=2\pi i\left(\frac{3i}{3i+3i}\right)=2\pi i\left(\frac{3i}{6i}\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi i}{2}=\pi i \quad \therefore I=\pi i$$

(9) CALCULAR LA INTEGRAL $I=\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$, DONDE $C: |z|=2$.

SOL

MÉTODO (A)

UTILIZANDO (**) TEOREMA $\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$

$(z-1)^3=0 \Rightarrow z_0=1\in C$

$n=2$; $f(z)=5z^2-3z+2$

HAY QUE DERIVAR DOS VECES.

$f'(z)=10z-3 \Rightarrow f''(z)=10$, $z_0=1 \therefore f''(z_0)=f''(1)=10$

APLICANDO (**)T.

$$I=\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz=\frac{2\pi i}{n!}f''(z_0)=\frac{2\pi i}{2!}f''(1)=\frac{2\pi i}{2!}f''(1)$$

$$I=\frac{2\pi i}{2}f''(1)=\frac{2\pi i}{2}(10)=10\pi i \quad \therefore I=i\,10\pi$$

$\boxed{\text{MÉTODO (B)}}$ UTILIZANDO FRACCIONES PARCIALES.

$$\frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{(z-1)^3}$$

$$5z^2-3z+2=A(z-1)^2+B(z-1)+C$$

$$5z^2-3z+2=A(z^2-2z+1)+Bz-B+C=Az^2-2Az+A+Bz+C$$

$$5z^2-3z+2=Az^2+(-2A+B)z+A-B+C$$

$A=5$

$-2A+B=-3 \Rightarrow -10+B=-3;\; B=-3+10=7 \;\therefore B=7$

$A-B+C=2 \Rightarrow 5-7+C=2;\; C=2-5+7=9-5=4 \;\therefore C=4$

SUSTITUYENDO $A=5$, $B=7$ y $C=4$. ADEMÁS APLICANDO EL HECHO $\boxed{\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n=2,3,4,\ldots\end{cases}}$

$$I=\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}dz=\int_C \frac{A}{(z-1)}dz+\int_C \frac{B}{(z-1)^2}dz+\int_C \frac{C}{(z-1)^3}dz$$

$$I = 5\int_C \frac{dz}{(z-1)} + 7\cancel{\int_C \frac{dz}{(z-1)^2}}^{\to 0} + 4\cancel{\int_C \frac{dz}{(z-1)^3}}^{\to 0}$$

$$I = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0) = i\,10\pi + 0 + 0 = i\,10\pi$$

$$\therefore I = i\,10\pi$$

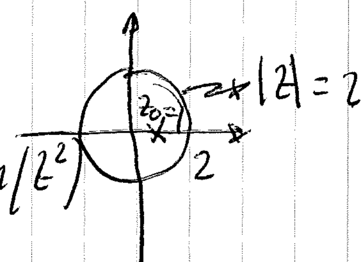
10 HALLAR $I = \int_C \frac{2\,\text{sen}(z^2)}{(z-1)^4}\,dz$; $C: |z| = 2$.

SOL

$n = 3$; $f(z) = 2\,\text{sen}(z^2)$; $(z-1)^4 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C$.

$f(z) = 2\,\text{sen}(z^2)$

$f'(z) = 4z\cos(z^2)$; $f''(z) = 4\cos(z^2) - 8z^2\,\text{sen}(z^2)$



$f'''(z) = -24z\,\text{sen}(z^2) - 16z^3\cos(z^2)$

$$I = \int_C \frac{2\,\text{sen}(z^2)}{(z-1)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{2\pi i}{3!} f'''(1)$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}\left[-24(1)\,\text{sen}(1^2) - 16(1)^3\cos(1^2)\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}\left[-24\,\text{sen}(1) - 16\cos(1)\right] = \frac{2\pi i}{6}\left[-24\,\text{sen}(1) - 16\cos(1)\right]$$

$$\therefore I = \frac{\pi i}{3}\left[-24\,\text{sen}(1) - 16\cos(1)\right].$$

11) EVALÚE LAS SIGUIENTES INTEGRALES DEFINIDAS COMPLEJAS.

a) $I = \int_{\pi}^{i} e^{z} \operatorname{sen} z \, dz$.

SOL: $\boxed{\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}[a \operatorname{sen} bx - b \cos bx]}{a^2+b^2} \quad a=b=1}$

APLICANDO LA FÓRMULA.

$$I = \frac{e^{z}[\operatorname{sen} z - \cos z]}{2}\Bigg|_{\pi}^{i} = \frac{1}{2}\left[e^{z}\operatorname{sen} z\Big|_{\pi}^{i} - e^{z}\cos z\Big|_{\pi}^{i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}\operatorname{sen} i - e^{\pi}\operatorname{sen}\pi - \{e^{i}\cos i - e^{\pi}\cos\pi\}\right]$$

$\boxed{\operatorname{sen}\pi = 0 \text{ y } \cos\pi = -1}$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}\operatorname{sen} i - e^{i}\cos i - e^{\pi}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{i}[\operatorname{sen} i - \cos i] - e^{\pi}\right]$$

$\boxed{e^{\pi} = 23.14 \,;\ \operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z \,;\ \cos(iz) = \cosh z.}$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}[\operatorname{sen} i - \cos i] - 23.14\right] = \frac{1}{2}\left[e^{i}[i \operatorname{senh} 1 - \cosh 1] - 23.14\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{i}[i1.175 - 1.543] - 23.14\right]$$

$\boxed{e^{i} = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1 = 0.54 + i0.84}$

$$= \frac{1}{2}\left[(0.54+i0.84)(i1.175-1.543)-23.14\right]$$ 140

$$= \frac{1}{2}\left[i0.6345-0.833-0.987-i1.296-23.14\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-i0.6615-24.96\right] = -i0.33-12.48$$

$$\therefore \underline{I} = -12.48 - i0.33$$

(b) $I = \int_0^{4i} z e^{z} dz$

Sol

$$\boxed{\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[x - \frac{1}{a}\right]}$$

$$I = \int_0^{4i} z e^{z} dz = e^{z}\left[z - \frac{1}{1}\right]\Big|_0^{4i} = e^{z}\left[z-1\right]\Big|_0^{4i}$$

$$= e^{z} z\Big|_0^{4i} - e^{z}\Big|_0^{4i} = e^{4i}4i - \cancel{e^{0}(0)} - \left[e^{4i} - e^{0}\right]$$

$$= 4i\, e^{4i} - e^{4i} + 1 = e^{4i}\left[4i-1\right]+1$$

$$= \left[\cos 4 + i \operatorname{sen} 4\right]\left[4i-1\right]+1 = \left[-0.65-i0.75\right]\left[4i-1\right]+1$$

$$\therefore I = \left[-0.65 - i0.75\right]\left[4i-1\right]+1$$

• TEOREMA DEL RESIDUO.

EN ESTE TEMA SE LLEGA A LA JUSTIFICACIÓN DE LA IMPORTANCIA DEL CONCEPTO DE RESIDUO. EL SIGUIENTE TEOREMA ESTABLECE QUE, EN CIERTAS CIRCUNSTANCIAS, SE PUEDEN CALCULAR INTEGRALES COMPLEJAS DE LA FORMA $\oint_C f(z)dz = \int_C f(z)dz$ SUMANDO LOS RESIDUOS EN LAS SINGULARIDADES AISLADAS DE f DENTRO DEL CONTORNO CERRADO C.

• TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY.

SEA D UN DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO Y C UN CONTORNO CERRADO SIMPLE QUE SE HALLA COMPLETAMENTE DENTRO DE D. SI UNA FUNCIÓN f ES ANALÍTICA Y EN EL INTERIOR DE C, EXCEPTO UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS SINGULARES $z_1, z_2, \ldots, z_n$ DEL INTERIOR DE C, ENTONCES:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\left(f(z), z_k\right).$$

DONDE $\text{Res} = R =$ RESIDUO.

T1. RESIDUO EN UN POLO SIMPLE.

SI f TIENE UN POLO SIMPLE EN $z = z_0$, ENTONCES:

$$\text{Res}\left(f(z), z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

T.2. RESIDUO EN UN POLO DE ORDEN n.

SI f TIENE UN POLO DE ORDEN n EN $z = z_0$, ENTONCES:

$$\text{Res}\left(f(z), z_0\right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z).$$

T.3. RESIDUOS DE LA FORMA $P(z)/q(z)$.

SEA LA FUNCIÓN $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$, DONDE $P(z)$ Y $q(z)$ SON ANALÍTICAS EN LA VECINDAD DE z_0 Y $q(z)$ TIENE UNA SINGULARIDAD EN z_0; ES DECIR, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$, ENTONCES.

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \text{Res} = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}.$$

$$\therefore \text{Res} = \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}.$$

EJEMPLOS:

1 HALLAR LOS RESIDUOS DE:

SOL

a $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$.

$$(z-3)(z-1)^2=0 \quad y \quad f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}.$$

$(z-3)=(z-3)^{1}=0 \Rightarrow z_0=3$ con 1

$(z-1)^2=(z-1)^{2}=0 \Rightarrow z_0=1$ con 2

• Por T.1 $R[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

• $z_0=3$ y $n=1$.

$$R[f(z),3]=\lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right]=\lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{1}{(3-1)^2}=\frac{1}{(2)^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow R=\frac{1}{4}$$

Por T.2 $R=\text{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)$

• $z_0=1$ y $n=2$.

$$R=R[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right]$$

$$R=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3)}\right]=\lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{(z-3)^2}\right]=\frac{-1}{(1-3)^2}=\frac{-1}{(-2)^2}$$

$$=-\frac{1}{4} \Rightarrow \therefore\ R=-\frac{1}{4}.$$

(b) $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$

Sol:

$(z+1)(z+2)(z+3) = 0$

$(z+1)=0 \Rightarrow z_0 = -1$

$(z+2)=0 \Rightarrow z_0 = -2$

$(z+3)=0 \Rightarrow z_0 = -3$

Port.1 $R[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

• $z_0 = -1$.

$$R[f(z), -1] = \lim_{z \to -1} \left[\frac{(z+1)}{(z+1)(z+2)(z+3)} (5z^2-4z+3) \right]$$

$$= \lim_{z \to -1} \left[\frac{5z^2-4z+3}{(z+2)(z+3)} \right] = \frac{5(-1)^2-4(-1)+3}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{5+4+3}{(1)(2)} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\therefore R[f(z), -1] = 6$$

• $z_0 = -2$

$$R[f(z), -2] = \lim_{z \to -2} \left[\frac{(z+2)}{(z+1)(z+2)(z+3)} (5z^2-4z+3) \right]$$

$$= \lim_{z \to -2} \left[\frac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+3)} \right] = \frac{5(-2)^2-4(-2)+3}{(-1)(1)} = \frac{20+8+3}{-1} = -31$$

$$\therefore R[f(z), -2] = -31$$

$\circ\ z_0 = -3.$

$$R[f(z), -3] = \lim_{z \to -3} \left[\frac{(z+3)}{(z+1)(z+2)(z+3)} (5z^2-4z+3) \right]$$ 145

$$= \lim_{z \to -3} \left[\frac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)} \right] = \frac{5(-3)^2-4(-3)+3}{(-2)(-1)} = \frac{45+12+3}{2} = \frac{60}{2}$$

$$= 30 \qquad \therefore R[f(z), -3] = 30$$

(2) EVALUE $I = \int_C \frac{e^z}{z^2+z} dz = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$ si $C: |z-1| = 3.$

(a) UTILIZANDO TEOREMA DE CAUCHY (*) T

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

(b) POR MEDIO DEL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R[f(z), z_k]$$

T.1 RESIDUO EN UN POLO SIMPLE

$$R[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

T.2 RESIDUO EN UN POLO DE ORDEN n.

$$R[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z)$$

(c) APLICAR $f(z)=\dfrac{P(z)}{q(z)} \Rightarrow R=\dfrac{P(z_0)}{q'(z_0)}$ (146)

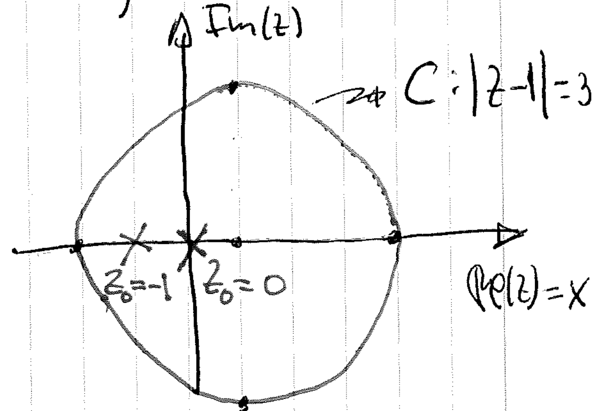
SOL:

(a) $I=\int_C \dfrac{e^z}{z^2+z}\,dz=\int_C \dfrac{e^z}{z(z+1)}\,dz$; $C:|z-1|=3$

SOL: $|z-1|=3$; $|x+iy-1|=3$

$|(x-1)+iy|=3$; $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=9$

$(x-1)^2+y^2=9$ círculo centro $(1,0)$; $r=3$



SINGULARIDADES.

$$z(z+1)=0 \begin{cases} z_0=0\in C \\ (z+1)=0 \Rightarrow z_0=-1\in C. \end{cases}$$

$$I=\int_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz=\int_C e^z\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}\right]dz \quad (*)$$

$$A=z\,\frac{1}{z(z+1)}\Big|_{z_0=0}=\frac{1}{z+1}\Big|_0=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1 \therefore A=1$$

$$B=(z+1)\frac{1}{z(z+1)}\Big|_{z_0=-1}=\frac{1}{z}\Big|_{-1}=\frac{1}{-1}=-1 \therefore B=-1$$

SUSTITUYENDO $A=1$ y $B=-1$ EN $(*)$:

$$I=\int_C\left[\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{(z+1)}\right]dz=\int_C \frac{e^z}{z}\,dz-\int_C \frac{e^z}{z+1}\,dz$$

DONDE $f(z)=e^z \Rightarrow f(z_0)=e^{z_0}$ PARA $z_0=0$ y $z_0=-1$ RESPECTIVAMENTE.

$$I = 2\pi i\, e^{0} - 2\pi i\, e^{-1} = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right].$$

$$\therefore I = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right].$$

b) $I = \int_C \frac{e^{z}}{z(z+1)}\,dz$ si $C: |z-1| = 3$.

Sol

$$z(z+1) = \begin{cases} z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \in C \text{ con } n = 1. \\ (z+1) = (z+1)^{1} = 0 \Rightarrow z_0 = -1 \text{ con } n = 1. \end{cases}$$

Los residuos son R_0 y R_{-1}, respectivamente.

$$R = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \quad \text{con } f(z) = \frac{e^{z}}{z^2 + z} = \frac{e^{z}}{z(z+1)}$$

$$R_0 = \lim_{z \to 0}\left[(z-0)\frac{e^{z}}{z(z+1)}\right] = \lim_{z \to 0}\left[\frac{z\, e^{z}}{z(z+1)}\right] = \lim_{z \to 0}\left[\frac{e^{z}}{z+1}\right]$$

$$= \frac{e^{0}}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore R_0 = 1$$

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1}\left[(z+1)\frac{e^{z}}{z(z+1)}\right] = \lim_{z \to -1}\left[\frac{e^{z}}{z}\right] = \frac{e^{-1}}{(-1)} = -e^{-1}$$

$$\therefore R_{-1} = -e^{-1}$$

Por el T del residuo.

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R\left[f(z), z_k\right] = 2\pi i\left[R_0 + R_{-1}\right] = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right]$$

$$\therefore I = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right].$$

c) $I = \int_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ con $C: |z-1| = 3$

c)

$$z(z+1) = z^2 + z = \begin{cases} z_0 = 0 \in C \\ z_0 = -1 \in C. \end{cases}$$

HACIENDO:

$$P(z) = e^z$$

$$q(z) = z^2 + z \Rightarrow q'(z) = 2z+1$$

$$R_0 = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{z_0=0} = \left.\frac{e^z}{2z+1}\right|_{z_0=0} = \frac{e^0}{2(0)+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$R_{-1} = \left.\frac{P(z)}{q'(z)}\right|_{z_0=-1} = \left.\frac{e^z}{2z+1}\right|_{-1} = \frac{e^{-1}}{2(-1)+1} = \frac{e^{-1}}{-1} = -e^{-1}$$

APLICANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO.

$$I = 2\pi i\left[R_0 + R_{-1}\right] = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right]$$

$$\therefore I = 2\pi i\left[1 - e^{-1}\right]$$

COMENTARIO:

ESTE MÉTODO DE $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$, SE APLICA SOLAMENTE CUANDO TENEMOS EN EL DENOMINADOR $q(z)$ UN CERO CON $n=1$, EN EL EXPONENTE, $(z-0)^1 = z-0 = z \Rightarrow z_0 = 0$.

3 UTILIZANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY, EVALUAR: 149

a
$$I=\int_C \frac{sen\, 2z}{(z-i)^3}\,dz$$ si C INCLUYE LA SINGULARIDAD i.

SOL:

SINGULARIDAD

$(z-i)^3=(z-i)^{3} \Rightarrow z_0=i \in C$ CON $n=3=3$.

- $z_0=i$ CON $n=3$.

$$R_i=\lim_{z\to i}\frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)\frac{sen(2z)}{(z-i)^3}\right]=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz}\left[sen(2z)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[-4\,sen(2z)\right]=\frac{1}{2}\left[-4\,sen(2i)\right]=-2\,sen(2i)$$

$$\therefore R_i=-2\,sen(2i)$$

HECHO:

$$sen\,2i=\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=i\,senh(2)$$

$$I=\int_C\frac{sen\,2z}{(z-i)^3}dz=2\pi i\left[R_i\right]=2\pi i\left[-2i\,senh(2)\right]$$

$$=-4\pi i^2 senh(2)=-4\pi(-1)\,senh(2)=4\pi\,senh(2)$$

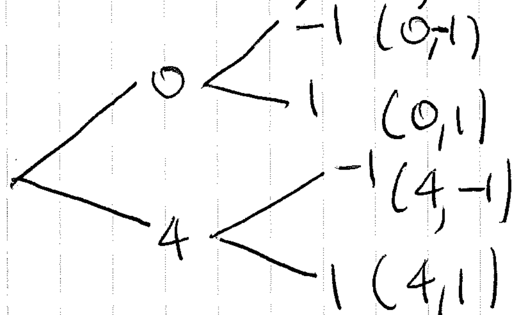
$$=4\pi(3.62)=14\pi=45.6$$

$$\therefore I=14\pi=45.6$$

(b) $I = \int_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$ 　　　　150

(1) C ES EL RECTÁNGULO DEFINIDO POR $x=0$, $x=4$, $y=-1$, $y=1$,

(2) $C: |z| = 2$.

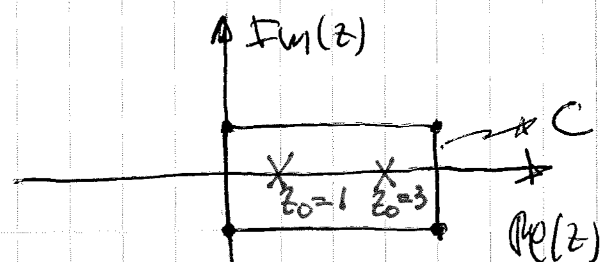


(1) Sol

$$(z-1)^2(z-3) = 0$$

$(z-1)^2 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C$ CON $n=2$

$(z-3) = 0 \Rightarrow z_0 = 3 \in C$.



- $z_0 = 1$ CON $n=2$

$$R_1 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-3)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{(z-3)^2}\right] = \left[\frac{-1}{(1-3)^2}\right] = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} \quad \therefore R_1 = -\frac{1}{4}$$

- Si $z_0 = 3$

$$R_3 = \lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\right] = \lim_{z\to 3}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right] = \frac{1}{(3-1)^2} = \frac{1}{4}$$

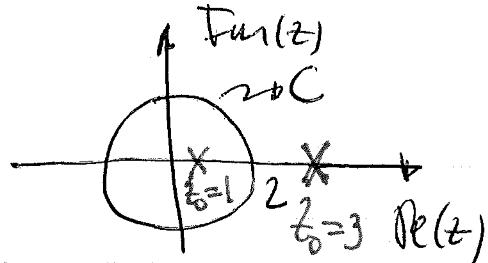
$$\therefore R_3 = \frac{1}{4}.$$

POR EL T DEL RESIDUO,

$$I = 2\pi i\left[R_1 + R_3\right] = 2\pi i\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 2\pi i(0) = 0$$

$$\therefore I = 0.$$

(2) $C: |z| = 2$



Sol: $(z-1)^2 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in C,\ n = 2$

$(z-3) = 0 \Rightarrow z_0 = 3 \notin C$

SABEMOS QUE $R_1 = -\frac{1}{4}$ y $R_3 = 0$ YA QUE $z_0 = 3 \notin C$.

POR EL T. DEL RESIDUO.

$$I = 2\pi i\left[R_1 + R_3\right] = 2\pi i\left[-\frac{1}{4} + 0\right] = 2\pi i\left[-\frac{1}{4}\right]$$

$$= -\frac{2\pi i}{4} = -\frac{i\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{I = -\frac{i\pi}{2}}$$

APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESIDUO DE CAUCHY PARA EVALUAR ALGUNAS INTEGRALES REALES DE LAS FORMAS SIGUIENTES.

(A) $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta,$

(B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$

(C) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\alpha x\, dx$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}\alpha x\, dx,$

DONDE F EN (A) y f EN (B) y (C) SON FUNCIONES

RACIONALES, PARA LA FUNCIÓN RACIONAL

$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ EN B y C, SUPONEMOS QUE LOS

POLINOMIOS P y q NO TIENEN FACTORES COMUNES.

A SEA $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$,

DONDE $F(s, t)$ ES EL COCIENTE DE DOS FUNCIONES

POLINOMIALES EN s y t, PUEDEN TRANSFORMARSE EN

INTEGRALES DE LÍNEA MEDIANTE LA SUSTITUCIÓN $z = e^{i\theta}$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$, TAL QUE:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] = \frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2}\left[z + z^{-1}\right] = \frac{z^2+1}{2z}.$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z} \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right] = \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2i}\left[z - z^{-1}\right] = \frac{z^2-1}{i2z}.$$

$$\therefore \operatorname{sen}\theta = \frac{z^2-1}{i2z} \quad (2)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Rightarrow d\theta = -iz^{-1}dz \quad \therefore d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3)$$

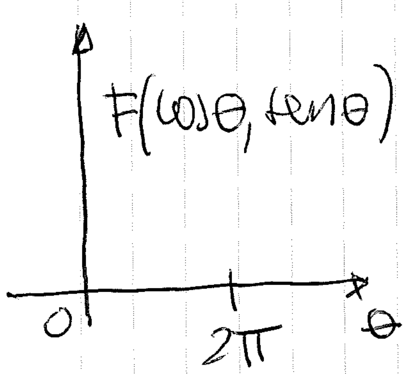
POR EL TEOREMA DEL RESIDUO

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum_C R[f(z)],$$

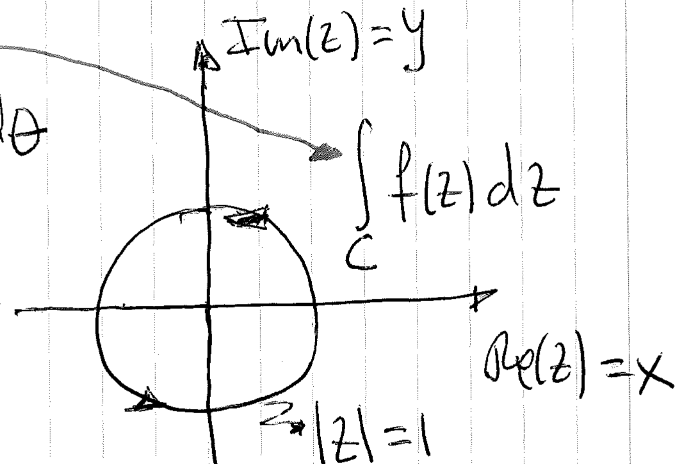
LA SUMA $\sum_C$ SE EXTIENDE SOBRE TODOS LOS RESIDUOS DE $f(z)$ DEL CÍRCULO UNITARIO $|z|=1$.

TEOREMA.

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \int_{|z|=1} F\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}.$$



$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$



EJEMPLOS.

1 EVALÚE: $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$.

SOL:

$$\cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_C \frac{z^2+1}{z}\,\frac{dz}{iz} = \int_C \frac{z^2+1}{i2z^2}\,dz$$

SABEMOS QUE:

$C: |z|=1$; $2iz^2=0 \Rightarrow z_0^2=0$

PARA: $z_0=0$ CON $n=2$.

$$R_0=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z^2+1)}{z^2(2i)}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+1}{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\left[2z\right]=\frac{1}{2i}\left(2(0)\right)=0$$

$\therefore R_0=0$

APLICANDO EL TEOREMA DEL RESIDUO.

$$I=2\pi i R_0=2\pi i(0)=0 \quad \therefore I=0.$$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} tg\,\theta\, d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}\,d\theta$

Sol:

$$\int_0^{2\pi}\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}d\theta=\int_C sen\,\theta\ \frac{1}{cos\,\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{z^2-1}{2iz}\ \frac{1}{\frac{z^2+1}{2z}}\ \frac{dz}{iz}=\int_C\frac{z^2-1}{2iz}\ \frac{2z}{z^2+1}\ \frac{dz}{iz}$$

$$=-\int_C\frac{z^2-1}{2z^2}\ \frac{2z}{z^2+1}\,dz=-\int_C\frac{z^2-1}{2(z^2+1)}\,dz$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(z) &= z^2-1 \\ q(z) &= z^3+z \end{aligned}}$$

155

LAS SINGULARIDADES ES UN CERO.

$z(z^2+1)=0 \Rightarrow z_0 = 0 \in C$.

$z^2+1=0 \Rightarrow z_0 = i$ y $z_0=-i \Rightarrow z_0 = i = (0,1) \in C$

$z_0 = -i = (0,-1) \in C$.

APLICANDO:

$P(z) = z^2-1$

$q(z) = z^3+z \Rightarrow q'(z) = 3z^2+1$

$$R_0 = \frac{P(z)}{q'(z)}\Bigg|_0 = \frac{z^2-1}{3z^2+1}\Bigg|_0 = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \therefore R_0 = -1$$

$$R_{-i} = \frac{P(z)}{q'(z)}\Bigg|_{-i} = \frac{z^2-1}{3z^2+1}\Bigg|_{-i} = \frac{(-i)^2-1}{3(-i)^2+1} = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$R_i = \frac{P(z)}{q'(z)}\Bigg|_i = \frac{i^2-1}{3i^2+1} = \frac{-1-1}{-3+1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$I = 2\pi i\left[R_0 + R_{-i} + R_i\right] = \left[-1+1+1\right]2\pi i = 2\pi i$$

$$\therefore I = 2\pi i$$

(B) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$

156

INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES RACIONALES

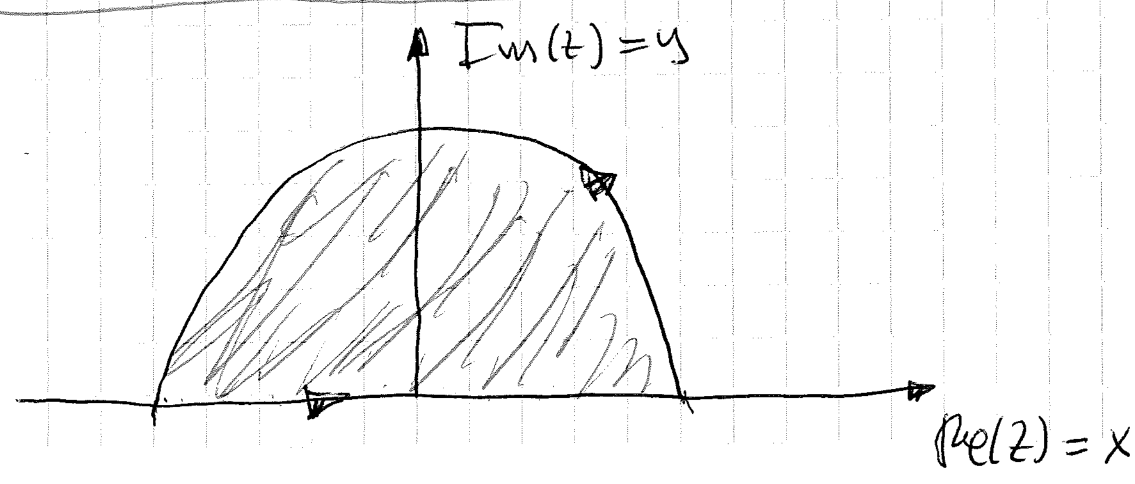
SEAN INTEGRALES IMPROPIAS DE FUNCIONES RACIONALES.

DE LA FORMA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum R[f(z)].$$

NOTA: • SE SUPONE QUE LA FUNCIÓN $f(x)$ ES UNA FUNCIÓN RACIONAL REAL CUYO DENOMINADOR ES DIFERENTE DE CERO PARA TODA x Y SU GRADO ES AL MENOS DOS UNIDADES MÁS ALTO QUE EL NUMERADOR.

• AMPLIÁNDOSE LA SUMA A TODOS LOS RESIDUOS DE $f(z)$ CORRESPONDIENTES A LAS SINGULARIDADES DE ÉSTA EN EL SEMIPLANO SUPERIOR.



EJEMPLO: EVALUE.

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$$

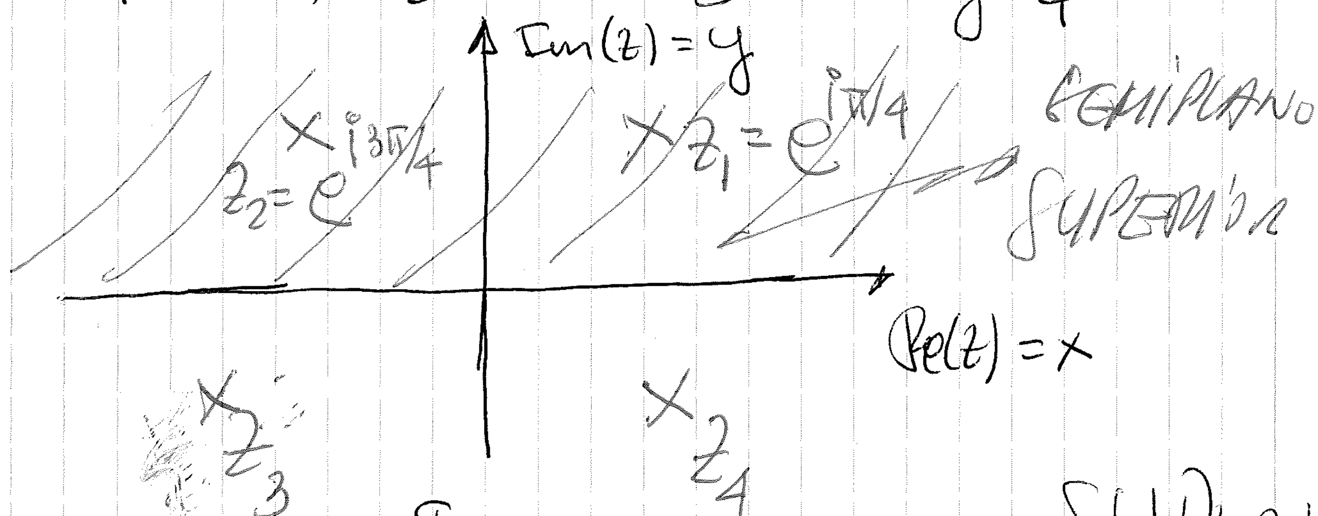
SOL:

$$f(\cancel{x})=\frac{1}{x^4+1}\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z^4+1}.$$

SINGULARIDADES.

$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1$ SE CALCULAN LAS RAÍCES O SINGULARIDADES COMO SE VIÓ AL PRINCIPIO DEL CURSO; ESTO ES:

$$z_1=e^{i\pi/4},\ z_2=e^{i3\pi/4},\ z_3=e^{-i3\pi/4}\ y\ z_4=e^{-i\pi/4}.$$



∴ z_1 y z_2 ESTAN EN EL SEMIPLANO SUPERIOR

∴ z_3 y z_4 NO ESTAN EN EL SEMIPLANO SUPERIOR

CÁLCULO DE LOS RESIDUOS, PARA z_1 y z_2 (158)

CON $n=1$.

$$R_{z_1} = R_{e^{i\pi/4}} = \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left[\left(z - e^{i\pi/4}\right) \frac{1}{z^4+1} \right]$$

$$= \left(e^{i\pi/4} - e^{i\pi/4}\right) \frac{1}{\left(e^{i\pi/4}\right)^4 + 1} = \frac{0}{\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi} =$$

$$= 0 \; \frac{1}{-1+1} = \frac{0}{0} \quad \text{INDETERMINACIÓN}$$

POR L'HOSPITAL.

$$R_{z_1} = \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left\{ (1-0) \frac{1}{4z^3+1} \right\} = \lim_{z \to e^{i\pi/4}} \left[\frac{1}{4z^3} \right]$$

$$= \frac{1}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^3} = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4} \quad \therefore \quad R_{z_1} = \frac{1}{4} e^{-i3\pi/4}$$

ASÍ MISMO SE CALCULA R_{z_2}, ES DECIR.

$$R_{z_2} = \frac{1}{4} e^{-i9\pi/4}$$

FINALMENTE, SABEMOS QUE

$R_{z_3} = R_{z_4} = 0$ NO ESTAN EN EL SEMIPLANO SUPERIOR.

POR EL T. DEL RESIDUO.

$$I = 2\pi i\left[R_{z_1} + R_{z_2}\right] = 2\pi i\left[\frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} + \frac{1}{4}e^{-i9\pi/4}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left[e^{-i3\pi/4} + e^{-i9\pi/4}\right] = \frac{\pi i}{2}\left[-i1.414\right]$$

$$= 0.707\pi.$$

$$\therefore I = 0.707\pi.$$

TAREA 3 AVANZADAS   T-3-1

1) a) DIBUJAR $z(t)$ PARA:

$$C: z(t) = \begin{cases} 1+it, & 0 \le t \le 1 \\ (2-t)+i, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

b) EVALÚE $I = \int_C x\,dz$ A LO LARGO DEL CONTORNO C.

$R_b = -\frac{1}{2}+i$

2) EVALUAR $I = \int_C x\,dz$ SI: $C: z = z(t) = \begin{cases} 1+i\ln t, & 1 \le t \le e. \\ 2-\frac{t}{e}+i, & e \le t \le 2e. \end{cases}$

R: $i - \frac{1}{2}$

3) CALCULAR: $I = \int_C (z+3)\,dz$ SI $C: x = 2t;\ y = 4t-1,\ 1 \le t \le 3.$

R: $-28 + i84.$

4) SEA $I = \int_C y\,dx$ DONDE C ES LA ELIPSE $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$ CON $0 \le t \le 2\pi$: HALLAR $I = \int_C y\,dx$.

R: $-\pi ab.$

5) HALLAR $I = \int_C (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$, DONDE $C: x = t;\ y = t^2,\ 0 \le t \le 1.$

$R = 4/3.$

6) EVALUAR $I = \int_C x^2 y^3\,dx$, CON $C: z = t(1+it^2) = t(1+it^2),\ 0 \le t \le 1.$

$R = \frac{1}{12}.$

7 . EVALÚE LAS INTEGRALES DE LÍNEA COMPLEJAS.

T-3-2

a) $I = \int_{1}^{1+2i} x\,dz$ SOBRE LA LÍNEA RECTA 1 A $1+2i$.

$R = 2i$.

b) $I = \int_{C} x\,dz$ SOBRE EL CÍRCULO UNITARIO $|z|=1$ DESCRITO EN LA DIRECCIÓN CONTRARIA A LAS MANECILLAS DEL RELOJ.

$R: i\pi$

c) $I = \int_{0}^{1+i} (x+y-ix^2)\,dz$ SOBRE LA TRAYECTORIA A LO LARGO DE LAS LÍNEAS $x=0$ y $y=1$.

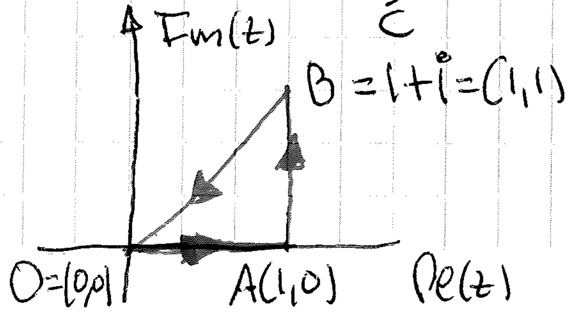
$R = \frac{3}{2} + \frac{i}{6}$

d) SEA $I = \int_{-i}^{i} (x^2+iy^2)\,dz$ SOBRE LA MITAD DERECHA DEL CÍRCULO UNITARIO $|z|=1$ DESCRITO EN DIRECCIÓN CONTRARIA A LAS MANECILLAS DEL RELOJ.

8) EVALÚE $I = \int_{C} (z^3 - 1 + 3i)\,dz$ SI $C: |z|=1$.

$R: 0$

9) EVALUAR $I = \pi \int_{C} e^{\pi z}$, DONDE C ES EL TRIÁNGULO.



$R: 0$

(10) SI EL CONTORNO CERRADO SIMPLE C ES EL CÍRCULO $|z|=1$ DESCRITO EN UNA DIRECCIÓN POSITIVA (O NEGATIVA) CALCULAR LAS SIGUIENTES INTEGRALES. **T-3-3**

(a) $$I = \int_C \frac{z^3}{z+3}\,dz$$ (R): $I = 0$

(b) $$I = \int_C \frac{(e^{2z} + 3\,\mathrm{tgh}\,z)}{z^2+4}\,dz$$ (R): $I = 0$

(c) $$I = \int_C \frac{3\,\mathrm{sen}^2 z}{z^2-7z+7}\,dz$$ (R): $I = 0$.

(11) EVALÚE LAS SIGUIENTES INTEGRALES COMPLEJAS.

(a) $$\int_0^z e^{az}\,dz \Rightarrow$$ (R): $\frac{1}{a}\left[e^{az}-1\right]$.

(b) $$\int_0^z \mathrm{sen}\,az\,dz$$ (R): $-\frac{1}{a}\left[\cos az - 1\right]$.

(c) $$\int_{1-i}^{1+i} (z^2+1)\,dz$$ (R) $\frac{10}{3}i$.

(d) $$\int_{-i\pi/6}^{i\pi/6} \cos 6z\,dz$$ (R): $\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(\pi i) = \frac{i}{3}\,\mathrm{senh}\,\pi$

(12) EVALÚE LAS SIGUIENTES INTEGRALES COMPLEJAS.

(a) $$\int_C \frac{(e^z-1)}{z}\,dz, \quad C: |z|=1.$$ (R) 0

b) $\int_C \frac{(\operatorname{senh}^2 z + \cos z)}{z - i\pi}$ si $C: |z| = 4$. T-3-4

R: $2\pi i \cosh \pi$.

c) $\int_C \left[\frac{3}{z+1} - \frac{4}{z-1}\right] dz$ $C: |z| = 2$

R: $-2\pi i$

d) $\int_C \frac{dz}{z^4 - 1}$ con el círculo $C: |z| = 2$

R: 0

13) Evalúe las integrales siguientes, para el contorno cerrado simple C tome la frontera de un cuadrado cuyos lados se encuentran a lo largo de las líneas $x = \pm 4$ y $y = \pm 4$, descritas en la dirección positiva.

a) $\int_C \frac{e^z}{z^6} dz$ R: $\frac{i\pi}{60}$.

b) $\int_C \frac{(z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1) dz}{(z - 2i)^6}$ R -24π.

14) Evalúe: $I = \int \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z} dz$ si $|z + 1 - i| < \frac{3}{2}$.

R: $3\pi(i - 1)$.

15 a EVALUE: $I = \frac{4}{i}\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz$ T-3-S

con $C: |z|=1.$

R: $I = 0.8\pi$

b $I = \frac{z\,dz}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}$ si $C: |z| = \frac{3}{2}$,

R: $I=0$