TAREA 5

ECUACIONES LINEALES

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

y

Bernoulli!

En los ejercicios del 1 al 20 resuelve la ecuación lineal correspondiente por el método de variación de parámetros $y = y_h + y_p$.

1. $y' + y\cos x = senx\cos x$ — sol. $y = senx - 1 + Ce^{-senx}$

2. $3x^2y - 6x^3 - y^2 + 2xy + \left(2x^2 - xy\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$ — sol $y = x^2 + \dfrac{C}{x}$

3. $\dfrac{dy}{dx} - y\tan x = \sec x$ — sol $y = \sec x(C + x)$

4. $y' = \dfrac{1}{xseny + 2sen2y}$ — sol. $x = Ce^{-\cos y} - 4(\cos y - 1)$

5. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = 3x$ — sol. $y = x^2 + Cx^{-1}$

6. $(x^2-x-2)y'+3xy=x^2-4x+4$ sol. $y=\frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{x+1}+C\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

7. $y'+xy=\cos x$ sol. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}\cos x dx+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$

8. $x\frac{dy}{dx}=y+x^3+3x^2-2x$ sol. $y=\frac{1}{2}(x^3+6x^2-4x\ln x+Cx)$

9. $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x}$ sol. $ysenx=-5e^{\cos x}+C$

10. $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$ sol. $2x\ln y=\ln^2 y+C$

11. $\frac{dy}{dx}-2y\cot 2x=1-2x\cot 2x-2\csc 2x$ sol. $y=x+\cos 2x+Csen2x$

12. $seny\frac{dy}{dx}=\cos x(2\cos y-sen^2 x)$

Sug: transforma la ecuación vía $\cos y=v$. sol. $\cos y=\frac{1}{2}sen^2 x-\frac{1}{2}senx+\frac{1}{4}+Ce^{-2senx}$

13. $y'=(10-y)\cosh x$ sol. $y=10+Ce^{-senhx}$

14. $\frac{dr}{d\theta}+r\sec\theta=\cos\theta$ sol. $(\sec\theta+\tan\theta)r=\theta-\cos\theta+C$

15. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$ sol. $y=e^{-x}\ln(e^x+e^{-x})+Ce^{-x}$

16. $ydx-4(x+y^6)dy=0$ sol. $x=2y^6+Cy^4$

17. $x^2y'+x(x+2)y=e^x$ sol. $y=\frac{1}{2x^2}e^x+\frac{C}{x^2}e^{-x}$

18. $x\dfrac{dy}{dx}+4y=x^3-x$ sol. $y=\dfrac{1}{7}x^3-\dfrac{1}{5}x+Cx^{-4}$

19. $x^2y'+xy=1$ sol. $y=x^{-1}\ln x+Cx^{-1}$

20. $x\dfrac{dy}{dx}+3y=\dfrac{senx}{x^2}, \quad x\neq 0$ sol. $x^3y=-\cos x+C$

En los problemas 21 a 27 resuelve la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se da.

21. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y-x}, \quad y(5)=2$ sol. $x=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{8}{y}$

22. $x(x-2)y'+2y=0, \quad y(3)=6$ sol. $y=\dfrac{2x}{x-2}$

23. $(x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=\ln x, \quad y(1)=10$ sol. $(x+1)y=x\ln x-x+21$

24. $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E; \quad L, R\ y E$ constantes. $i(0)=i_0$ sol. $i=\dfrac{E}{R}+\left(i_o-\dfrac{E}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$

25. $y'+(\tan x)y=\cos^2 x, \quad y(0)=-1$ sol. $y = senx \cos x - \cos$

26. $y'+\dfrac{5y}{9x}=3x^3+x, \quad y(-1)=4$ sol. $y=\dfrac{27}{41}x^4+\dfrac{9}{23}x^2-\dfrac{2782}{943}x^{-\frac{5}{9}}$

27. $y'+\dfrac{1}{x-2}y=3x; \quad y(3)=4$ sol. $y=x^2-x-2$

28. Sean y_1 y y_2 dos soluciones distintas de la ecuación

$$y'+P(x)y=0$$

Demostrar que existe una constante C tal que $y_1=Cy_2$.

29. Problema de mayor esfuerzo

Sean y_1 y y_2 dos soluciones distintas de la ecuación

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

(a) Demostrar que $y=y_1+C(y_2-y_1)$ es la solución general de la misma ecuación.

(b) ¿Cuál debería ser la relación entre las constantes C_1 y C_2 para que la combinación lineal $C_1y_1+C_2y_2$ sea la solución general de la ecuación dada?

(c) Demuestre que si y_3 es una tercera solución distinta de y_1 y y_2, entonces $\dfrac{(y_2-y_1)}{(y_3-y_1)}$ es constante.

30. Demuestre que la ecuación diferencial

$$y'+P(x)y=Q(x)y\ln y$$

puede resolverse haciendo $\ln y=v$. Resuelva

$$y'+3y=x^2y\ln y. \qquad \text{Sol } \ln y=e^{\frac{1}{3}x^3}\left[C-3\int e^{-\frac{1}{3}x^3}dx\right]$$

31. Resolver la siguiente ecuación diferencial $\cos y\dfrac{dy}{dx}+seny=x^2$ sug.

$$\frac{d}{dx}seny=\cos y\frac{dy}{dx}$$

Sol. $seny=x^2-2x+2+Ce^{-x}$

En los problemas del 1 al 6 resuelve la ecuación de Bernoulli dada.

1. $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{1}{y^2}$ sol. $y^3=1+Cx^{-3}$

2. $\dfrac{dy}{dx}=y\left(xy^3-1\right)$ sol. $y^{-3}=x+\dfrac{1}{3}+Ce^{3x}$

3. $x^2\dfrac{dy}{dx}+y^2=xy$ sol $e^{\frac{x}{y}}=Cx$

4. $y'+xy=\dfrac{x}{y^3}\quad y\neq 0$ sol. $y^4=1+Ce^{-2x^2}$

5. $y'+y=xy^3$ sol. $\dfrac{1}{y^2}=Ce^{2x}+x+\dfrac{1}{2}$

6. $\left(1-x^3\right)\dfrac{dy}{dx}-2(1+x)y=y^{\frac{5}{2}}$ sol. $y^{-3/2}=-\dfrac{3}{4\left(1+x+x^2\right)}+\dfrac{C(1-x)^2}{1+x+x^2}$

En los problemas 7 a 10 resuelve la ecuación diferencial dada, sujeta a la condición inicial que se indica.

7. $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3y^4,\quad y(1)=\dfrac{1}{2}$ sol. $y^{-3}=-\dfrac{9}{5}x^{-1}+\dfrac{49}{5}x^{-6}$

8. $xy\left(1+xy^2\right)\dfrac{dy}{dx}=1,\quad y(1)=0$ sol $x^{-1}=2-y^2-e^{-\frac{y^2}{2}}$, la ecuación es de Bernoulli en la variable x.

9. $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{y^2}{x},\quad y(-1)=1$ sol. $y=1$

10. $2\cos x\,dy=\left(y\,\mathrm{sen}\,x-y^3\right)dx,\quad y(0)=1$ sol. $\sec x=y^2(\tan x+1)$

No puse ejercicios de Lagrange y Clairaut.
Debo agregar.