después de designar nuevamente las constantes. Análogamente, $x(C_3 e^{ix} + C_4 e^{-ix})$ puede expresarse como $x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x.$$

El Ejemplo 6 ilustra un caso especial cuando la ecuación auxiliar tiene raíces complejas repetidas. En general, si $m_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad k de una ecuación auxiliar con coeficientes reales, entonces su conjugado $m_2 = \alpha - i\beta$ es también una raíz de multiplicidad k. De las $2k$ soluciones complejas valuadas

$$e^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha+i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha-i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

se concluye, con la ayuda de la fórmula de Euler, que la solución general de la ecuación diferencial correspondiente debe contener una combinación lineal de las $2k$ soluciones reales linealmente independientes

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

En el Ejemplo 6 se identifica a $k = 2$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

EJERCICIOS 4.3

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 587

En los Problemas 1-36 encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $4y'' + y' = 0$
2. $2y'' - 5y' = 0$
3. $y'' - 36y = 0$
4. $y'' - 8y = 0$
5. $y'' + 9y = 0$
6. $3y'' + y = 0$
7. $y'' - y' - 6y = 0$
8. $y'' - 3y' + 2y = 0$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$
10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$
11. $y'' + 3y' - 5y = 0$
12. $y'' + 4y' - y = 0$
13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
14. $8y'' + 2y' - y = 0$
15. $y'' - 4y' + 5y = 0$
16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$
17. $3y'' + 2y' + y = 0$
18. $2y'' + 2y' + y = 0$
19. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
20. $4y''' + 4y'' + y' = 0$
21. $y''' - y = 0$
22. $y''' + 5y'' = 0$
23. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
24. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
25. $y''' + y'' - 2y = 0$
26. $y''' - y'' - 4y = 0$
27. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
28. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

29. $\dfrac{d^4y}{dx^4}+\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

30. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

31. $16\dfrac{d^4y}{dx^4}+24\dfrac{d^2y}{dx^2}+9y=0$

32. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-7\dfrac{d^2y}{dx^2}-18y=0$

33. $\dfrac{d^5y}{dx^5}-16\dfrac{dy}{dx}=0$

34. $\dfrac{d^5y}{dx^5}-2\dfrac{d^4y}{dx^4}+17\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$

35. $\dfrac{d^5y}{dx^5}+5\dfrac{d^4y}{dx^4}-2\dfrac{d^3y}{dx^3}-10\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+5y=0$

36. $2\dfrac{d^5y}{dx^5}-7\dfrac{d^4y}{dx^4}+12\dfrac{d^3y}{dx^3}+8\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

En los Problemas 37-52 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

37. $y''+16y=0,\quad y(0)=2,\ y'(0)=-2$

38. $y''-y=0,\quad y(0)=y'(0)=1$

39. $y''+6y'+5y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=3$

40. $y''-8y'+17y=0,\quad y(0)=4,\ y'(0)=-1$

41. $2y''-2y'+y=0,\quad y(0)=-1,\ y'(0)=0$

42. $y''-2y'+y=0,\quad y(0)=5,\ y'(0)=10$

43. $y''+y'+2y=0,\quad y(0)=y'(0)=0$

44. $4y''-4y'-3y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=5$

45. $y''-3y'+2y=0,\quad y(1)=0,\ y'(1)=1$

46. $y''+y=0,\quad y(\pi/3)=0,\ y'(\pi/3)=2$

47. $y'''+12y''+36y'=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-7$

48. $y'''+2y''-5y'-6y=0,\quad y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=1$

49. $y'''-8y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=0$

50. $\dfrac{d^4y}{dx^4}=0,\quad y(0)=2,\ y'(0)=3,\ y''(0)=4,\ y'''(0)=5$

51. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}=0,\quad y(0)=y'(0)=0,\ y''(0)=y'''(0)=1$

52. $\dfrac{d^4y}{dx^4}-y=0,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y'''(0)=1$

En los Problemas 53-56 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones de frontera que se indican.

53. $y''-10y'+25y=0,\quad y(0)=1,\ y(1)=0$

54. $y''+4y=0,\quad y(0)=0,\ y(\pi)=0$

55. $y''+y=0,\quad y'(0)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$

56. $y''-y=0,\quad y(0)=1,\ y'(1)=0$

57. Las raíces de una ecuación auxiliar son $m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

58. Las raíces de una ecuación auxiliar son $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3 + i$, $m_3 = 3 - i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

En los Problemas 59 y 60 encuentre la solución general de la ecuación dada si se sabe que y_1 es una solución.

59. $y''' - 9y'' + 25y' - 17y = 0; \quad y_1 = e^x$

60. $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0; \quad y_1 = e^{-4x} \cos x$

En los Problemas 61-64 determine la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes que tenga las soluciones indicadas.

61. $4e^{6x}, 3e^{-3x}$

62. $10 \cos 4x, -5 \operatorname{sen} 4x$

63. $3, 2x, -e^{7x}$

64. $8 \operatorname{senh} 3x, 12 \cosh 3x$

65. Sabiendo que

$$i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^2 \quad \text{y} \quad -i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^2$$

para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + y = 0.$$

[*Sugerencia:* Escriba la ecuación auxiliar $m^4 + 1 = 0$ como $(m^2 + 1)^2 - 2m^2 = 0$. Observe qué sucede cuando se factoriza.]