Tarea 3

Ecuaciones Diferenciales Separables y reducibles a separables $y'=f(ax+by+c)$

Profr. Juan Manuel Corballi Jiménez.

Encontrar la solución general o particular, según sea el caso, para las siguientes ecuaciones diferenciales separables.

1. $\dfrac{dy}{dx}=3\cos 7x$ sol. $y=\dfrac{3}{7}sen7x+C$

2. $\dfrac{dy}{dx}-4xy=0$ sol. Ce^{2x^2}

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos y}{senx}$ sol. $\sec y+\tan y=C(\csc x-\cot x)$

4. $x^3y'=e^y$ sol. $y=\ln\left|\dfrac{2x^2}{Cx^2+1}\right|$

5. $y'+x^2seny=0$ sol. $3\ln|\csc y-\tan y|=C-x^3$

6. $(1+\cos\theta)dr=rsen\theta d\theta$ sol. $r(1+\cos\theta)=C$

7. $xdy-ydx=0;\quad y(1)=1$ sol. $y=x$

8. $\cos xdx+ydy=0;\quad y(0)=-3$ sol. $y=\pm\sqrt{9-2senx}$

9. **Problema de mayor esfuerzo**

$y' = \tan(x+y)$ sol. $\ln|1+sen2(x+y)|+2y-2x=C$

10. $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^y dy)-(1+y)dy=0$ sol. $\frac{e^{2x}}{2}-e^y-\arctan y-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$

11. $y'+sen\left(\frac{x+y}{2}\right)=sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$ sol. $2\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right|+4sen\frac{x}{2}=C$

12. $(e^x+e^{-x})\frac{dy}{dx}=y^2$ sol. $-y^{-1}=\tan^{-1}(e^x)+C$

13. $x\sqrt{1-y^2}\,dx=dy$ sol. $y=sen\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$

14. $\frac{dy}{dx}=senx(\cos 2y-\cos^2 y)$ sol $-\cot y=\cos x+C$

15. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ sol. $\left(\frac{y+3}{x+4}\right)^5=C_1e^{y-x}$

16. $(y-yx^2)\frac{dy}{dx}=(y+1)^2$ sol. $(y+1)^{-1}+\ln|y+1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$

17. $(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0$ sol. $(e^x+1)^{-2}+2(e^y+1)^{-1}=C$

18. $e^y sen2xdx+\cos x(e^{2y}-y)dy=0$ sol. $-2\cos x+e^y+ye^{-y}+e^{-y}=C$

19. $\frac{dP}{dt}=P-P^2$ sol. $P=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$

20. $y\ln x\dfrac{dx}{dy}=\left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$ sol. $\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{1}{9}x^3=\dfrac{y^2}{2}+2y+\ln|y|+C$

21. La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x,y) está dada por

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+xy^2}{2y+x^2y}.$$

Halle la ecuación del miembro de la familia que pasa por $(2,1)$.

Sol. $(x^2+2)(y^2+3)=24$

22. $\dfrac{dU}{ds}=\dfrac{U+1}{\sqrt{s}+\sqrt{sU}}$ Sol. $2\sqrt{U}+\ln|U+1|-2\tan^{-1}\sqrt{U}=2\sqrt{s}+C$

23. $x^3e^{2x^2+3y^2}dx-y^3e^{-x^2-2y^2}dy=0$ sol. $25(3x^2-1)e^{3x^2}+9(5y^2+1)e^{-5y^2}=C$

24. $\dfrac{dr}{d\phi}=\dfrac{sen\phi+e^{2r}sen\phi}{3e^r+e^r\cos 2\phi}$; $r=0$ donde $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ sol. $2\tan^{-1}e^r+\tan^{-1}(\cos\phi)=\dfrac{\pi}{2}$

25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y-1)(x-2)(y+3)}{(x-1)(y-2)(x+3)}$ sol. $(x-1)(y+3)^5=C(y-1)(x+3)^5$

26. $\dfrac{dy}{dx}=sen(x+y)$ sol. $\tan(x+y)-\sec(x+y)=x+C$

27. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\ln(3x+y+2)+2}-3$ sol. $5x+2y+(3x+y+2)[\ln(3x+y+2)-1]=C$

28. $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$ sol. $y=-x-1+\tan(x+C)$

29. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$ sol. $4(y - 2x + 3) = (x + C)^2$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(y + x)$ sol. $2y - 2x + sen2(x + y) = C$

31. **Problema de mayor esfuerzo**
(a) Muestre que la ecuación diferencial no separable $[F(x) + yG(xy)]dx + xG(xy)dy = 0$ se convierte en separable al cambiar la variable dependiente de y a v de acuerdo a la transformación $v = xy$. (b) Use esto para resolver $(x^2 + ysen(xy))dx + xsen(xy)dy = 0$.

Sol. $x^3 - 3\cos xy = C.$

32. **Problema de mayor esfuerzo**

Evalúe

$$\int_0^\infty e^{-\left[t^2 + \left(\frac{9}{t^2}\right)\right]} dt$$

Sugerencia: Sea $I(x) = \int_0^\infty e^{-\left[t^2 + \left(\frac{x}{t}\right)^2\right]} dt$. Obtenga $I'(x)$ derivando bajo el sigo de integral con respecto a x y luego escriba $u = \dfrac{x}{t}$. Demuestre que $I'(x) = 2I(x)$ y resuelva esta ecuación diferencial separable para obtener $I(x)$. Dé por conocido el hecho de que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ para obtener la condición inicial $I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ y obtenga la solución de la ecuación diferencial que satisfaga esta condición. Finalmente, observe que la integral que se pide es I(3).

33. Demuestra que la ecuación $yF(xy)dx + xG(xy)dy = 0$ puede resolverse haciendo $v = xy$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones reducibles a separables.

a) $[x^2 + 1 + x^2y^3 + y]dx + x(x^2y^2 + 1)dy = 0$

b) $ye^{xy}dx + x(e^{xy} - 1)dy = 0$