es decir

$$\mathscr{L}\left[t^{\alpha}\right](s)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ \alpha>-1.$$

q.e.d

Así

$$\mathscr{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right](s)=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-1/2+1}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$\mathscr{L}\left[t^{\frac{1}{2}}\right](s)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{1/2+1}}=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^{3}}}$$

$$\mathscr{L}\left[t^{\frac{3}{2}}\right](s)=\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{s^{1/2+1}}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{s^{5}}}$$

EJERCICIOS

Calculo de la Transf de Laplace a través de su definición

En los Problemas 1-18 utilice la Definición dada por 6.7 para evaluar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

Solución. $\frac{2}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}$

2. $f(t)=\begin{cases}4, & 0\le t<2\\ 0, & t\ge 2\end{cases}$

3. $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$

Solución. $\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}$

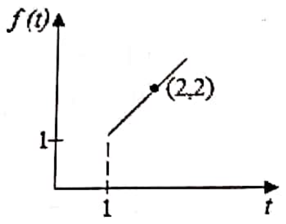
4. $f(t)=\begin{cases}2t+1, & 0\le t<1\\ 0, & t\ge 1\end{cases}$

5. $f(t)=\begin{cases} sen\, t, & 0\le t<1 \\ 0, & t\ge \pi \end{cases}$

Solución. $\dfrac{1+e^{-s\pi}}{s^2+1}$

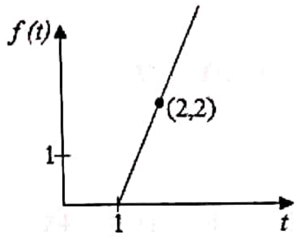
6. $f(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<\pi/2 \\ \cos t, & t\ge \pi/2 \end{cases}$

7.

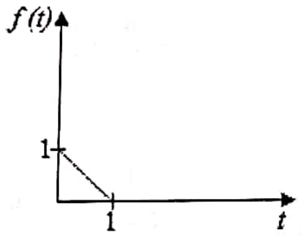


Solución. $\dfrac{e^{-s}}{s}+\dfrac{e^{-s}}{s^2}$

8.

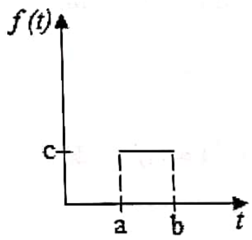


9.



Solución. $\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{e^{-s}}{s^2}$

10.



11. $f(t)=e^{t+7}$

Solución. $\dfrac{e^7}{s-1}$

12. $f(t)=e^{-2t-5}$

13. $f(t)=t\,e^{4t}$

Solución. $\dfrac{1}{(s-4)^2}$

14. $f(t)=t^2e^{3t}$

15. $f(t)=e^{-t}sen\,t$

Solución. $\dfrac{1}{s^2+2s+2}$

16. $f(t)=e^t\cos t$

17. $f(t)=t\cos t$

Solución. $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

18. $f(t)=t\,sen\,t$

En los problemas 19-42 usa los resultados de la tabla 6.1 para evaluar $\mathscr{L}[f(t)](s)$.

19. $f(t)=2t^4$

Solución. $\frac{48}{s^5}$

20. $f(t)=t^5$

21. $f(t)=4t-10$

Solución. $\frac{4}{s^2}-\frac{10}{s}$

22. $f(t)=7t+3$

23. $f(t)=t^2+6t-3$

Solución. $\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}-\frac{3}{s}$

24. $f(t)=-4t^2+16t+9$

25. $f(t)=(t+1)^3$

Solución. $\frac{6}{s^4}+\frac{6}{s^3}+\frac{3}{s^2}+\frac{1}{s}$

26. $f(t)=(2t-1)^3$

27. $f(t)=1+e^{4t}$

Solución. $\frac{1}{s}+\frac{1}{s-4}$

28. $f(t)=t^2-e^{-9t}+5$

29. $f(t)=\left(1+e^{2t}\right)^2$

Solución. $\frac{1}{s}+\frac{2}{s-2}+\frac{1}{s-4}$

30. $f(t)=(e^t-e^{-t})^2$

31. $f(t)=4t^2-5\,sen 3t$

Solución. $\frac{8}{s^3}-\frac{15}{s^2+9}$

32. $f(t)=\cos 5t+sen 2t$

33. $f(t)=senh\,kt$

34. $f(t)=\cosh kt$

Solución. Aplique $senh\,kt=\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}$ para demostrar que

$$\mathscr{L}\{senh\,kt\}=\frac{k}{s^2-k^2}.$$

35. $e^t senh\,t$

Solución. $\frac{1}{2(s-2)}-\frac{1}{2s}$

36. $f(t)=e^{-t}\cosh t$

37. $f(t) = sen\,2t\cos 2t$

Solución. $\dfrac{2}{s^2+16}$

38. $f(t) = \cos^2 t$

39. $f(t) = \cos t\cos 2t$ [***Sugerencia:*** Examine $\cos(t_1 \pm t_2)$.]

Solución. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+9}+\dfrac{s}{s^2+1}\right)$

40. $f(t) = sen\,t\,sen\,2t$

41. $f(t) = sen\,t\cos 2t$ [***Sugerencia:*** Examine $sen(t_1 \pm t_2)$.]

Solución. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{s^2+9}-\dfrac{1}{s^2+1}\right)$

42. $f(t) = sen^3 t$ [***Sugerencia:*** $sen^3 t = sen\,t\;sen^2 t$.]

43. La **función gamma** se define por la integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha > 0.$$

Demuestre que $\mathscr{L}\{t^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \alpha > -1$

Solución. El resultado se obtiene haciendo $u=st$ en $\mathscr{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st}\,dt$.

En los Problemas 44-46 utilice el resultado del Problema 43 para hallar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

45. $f(t) = t^{1/2}$

Solución. $\dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$

44. $f(t) = t^{-1/2}$

46. $f(t) = t^{3/2}$

47. Demuestre que la función $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ no tiene transformada de Laplace.

[***Sugenrencia:*** $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^1 e^{-st}f(t)\,dt + \int_1^\infty e^{-st}f(t)\,dt$. Use la definición de integral impropia para demostrar que $\int_0^1 e^{-st}f(t)\,dt$ no existe.]

Solución. En $0 \le t \le 1$, $e^{-st} \ge e^{-s}\,(s>0)$. Por lo tanto,

$$\int_0^1 e^{-st}\frac{1}{t^2}\,dt \ge e^{-s}\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt$$

48. Demuestre que si las funciones f y g son de orden exponencial para $t > t_0$, entonces el producto fg es de orden exponencial para $t > t_0$.

49. Sea $F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$. Probar que, para cualquier constante positiva a,

$$\mathscr{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

50. Supóngase que la transformada de Laplace está definida para valores complejos de t Utilice la fórmula de Euler para escribir $\cos at = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})$, y utilice la transformada de Laplace de e^{at} para otra deducción de una fórmula para $\mathscr{L}[\cos(at)](s)$

51. Emplear el método del problema 50 para producir otra deducción de la fórmula de $\mathscr{L}[sen(at)](s)$

En cada uno de los problemas 52 al 56, produzca números *M, b* y t_0 tal que $f(t)$ sea de orden exponencial. Se dice también que $f(t) = O(e^{bt})$, léase "o grande de e^{bt} "

52. $\cos(at)$, a cualquier número positivo.

53. t^3 **54.** e^{5t} **55** $senh(t)$ **56** t^4

57. Expresa $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ como una función gamma y compraba el resultado obtenido en (6.22). *Sug. Hacer* $z = x^2$

6.4 Propiedades de la transformada de Laplace.

Se presentan funciones $f(t)$ para las cuales su transformada de Laplace es difícil. Por ejemplo intentar evaluar $\mathscr{L}[e^{2t}t^4 sen 4t](s)$ utilizando la definición 6.7, no es conveniente ya que la integración por partes involucrada es bastante complicada. Por lo que presentaremos algunos teoremas que permiten evaluar de una manera mucho más sencilla tales transformaciones. El resultado que presentaremos en seguida recibe el nombre de traslación en la variable **s o primer teorema de traslación.**

Teorema 6.3 Traslación en la variable *s* o Primer teorema de traslación

Si $F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s)$ existe para $s > b \geq 0$, y a es una constante cualquiera, entonces

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) = \mathscr{L}[f(t)]_{(s-a)} \text{ para } s > a+b. \qquad \textbf{(6.25)}$$