Solución Transformando (9) con respecto a la variable x se obtiene

$$EI(s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)) = \frac{w_0}{s}$$

$$s^4Y(s) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{w_0}{EIs}.$$

Si se hace $c_1 = y''(0)$ y $c_2 = y'''(0)$, entonces

$$Y(s) = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{w_0}{EIs^5}$$

y consecuentemente $$y(x) = \frac{c_1}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} + \frac{c_2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \frac{w_0}{4!EI}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

$$= \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{6}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Aplicando las condiciones dadas, $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$, a la última ecuación se llega al sistema

$$\frac{c_1}{2}L^2 + \frac{c_2}{6}L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$c_1L + \frac{c_2}{2}L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$

Resolviéndolo, se encuentra que $c_1 = w_0L^2/12EI$ y $c_2 = -w_0L/EI$. Así que la deflexión está dada por

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4 = \frac{w_0}{24EI}x^2(x-L)^2.$$ ■

.5 *Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 598*

Una tabla de transformadas de algunas funciones básicas se proporciona en el Apéndice II

En los Problemas 1-26 utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial dada, sujeta a las condiciones iniciales indicadas. En donde sea apropiado, escriba f en términos de funciones escalón unitario.

1. $\dfrac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$
2. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = t, \quad y(0) = -1$
3. $y' + 4y = e^{-4t}, \quad y(0) = 2$
4. $y' - y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0$
5. $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
6. $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$
7. $y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

Scanned by CamScanner

$y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

8. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

9. $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}$ — $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4$

10. $y'' + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$

11. $y'' + 16y = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

12. $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

13. $y'' - 2y' = e^t \operatorname{senh} t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

14. $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

15. $y''' + 2y'' - y' - 2y = \operatorname{sen} 3t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

16. $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1, y'''(0) = 0$

17. $y^{(4)} - y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$

18.

19. $y' + y = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$

20. $y' + y = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$

21. $y' + 2y = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0$

22. $y'' + 4y = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$

23. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t\,\mathscr{U}(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

24. $y'' - 5y' + 6y = \mathscr{U}(t - 1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

25. $y'' + y = f(t)$, donde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

26. $y'' + 4y' + 3y = 1 - \mathscr{U}(t - 2) - \mathscr{U}(t - 4) + \mathscr{U}(t - 6);$
$y(0) = 0, y'(0) = 0$

En los Problemas 27 y 28 utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial dada, sujeta a las condiciones de frontera indicadas.

27. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y'(0) = 2, y(1) = 2$

28. $y'' - 9y' + 20y = 1, \quad y(0) = 0, y'(1) = 0$

En los Problemas 29-38 utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación integral, o la ecuación integrodiferencial, dada.

29. $f(t) + \int_0^t (t - \tau) f(\tau)\, d\tau = t$

30. $f(t) = 2t - 4 \int_0^t \operatorname{sen} \tau f(t - \tau)\, d\tau$

Scanned by CamScanner

31. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau f(t-\tau)\,d\tau$

32. $f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau = 4e^{-t} + \operatorname{sen} t$

33. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau = 1$

34. $f(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\,d\tau$

35. $f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (\tau - t)^3 f(\tau)\,d\tau$

36. $t - 2f(t) = \int_0^t (e^{\tau} - e^{-\tau}) f(t-\tau)\,d\tau$

37. $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 0$

38. $\frac{dy}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

$100 - 100 \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \\ 1, & t \ge \end{cases}$

39. Use la ecuación (3) para determinar la corriente $i(t)$ (en amperes, A) en un circuito L-R-C en serie cuando $L = 0.005$ H, $R = 1\ \Omega$, $C = 0.02$ F, $E(t) = 100[1 - \mathcal{U}(t-1)]$ volts (V), e $i(0) = 0$.

40. Resuelva el Problema 39 cuando $E(t) = 100[t - (t-1)\,\mathcal{U}(t-1)]$.

41. Recordando que la ecuación diferencial para la carga $q(t)$ del capacitor en un circuito R-C conectado en serie es

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

donde $E(t)$ es la tensión aplicada. Véase la Sección 3.2. Use la transformada de Laplace para determinar la carga eléctrica $q(t)$ cuando $q(0) = 0$ y $E(t) = E_0 e^{-kt}$, $k > 0$. Considere dos casos: $k \neq 1/RC$ y $k = 1/RC$.

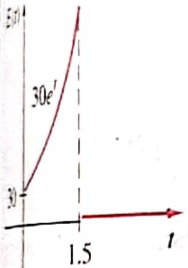

Figura 7.43

42. Utilice la transformada de Laplace para determinar la carga en el capacitor en un circuito R-C en serie si $q(0) = q_0$, $R = 10\Omega$, $C = 0.1$ F y $E(t)$ está dada en la Figura 7.43.

43. Aplique la transformada de Laplace para determinar la carga en el capacitor en un circuito R-C en serie si $q(0) = 0$, $R = 2.5\ \Omega$, $C = 0.08$ F y $E(t)$ está dada en la Figura 7.44.

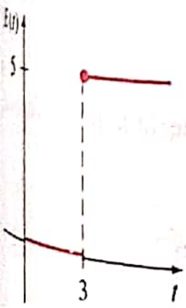

Figura 7.44

$v(t) = \begin{cases} 100, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

100 0

$100 - 100\,H(t-1)$

Scanned by CamScanner

44. Utilice la transformada de Laplace para determinar la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito R-C en serie cuando $q(0) = 0$, $R = 50\ \Omega$, $C = 0.01$ F y $E(t)$ se da en la Figura 7.45.

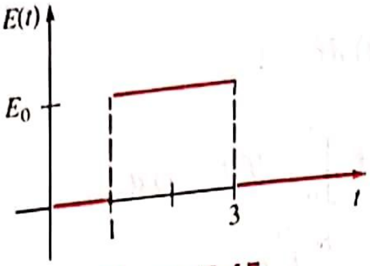

Figura 7.45

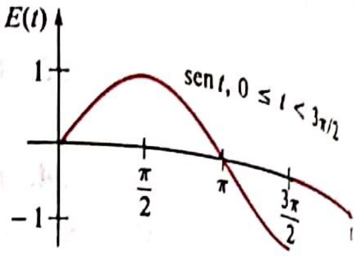

Figura 7.46

45. Use la transformada de Laplace para determinar la corriente $i(t)$ en un circuito L-R en serie cuando $i(0) = 0$, $L = 1$ H, $R = 10\ \Omega$ y $E(t)$ está dada en la Figura 7.46.

46. Resuelva la ecuación (6) sujeta a $i(0) = 0$, donde $E(t)$ está dada en la Figura 7.47. [*Sugerencia:* Véase el Problema 31 de los Ejercicios 7.4].

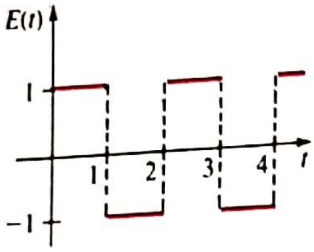

Figura 7.47

47. Resuelva la ecuación (6) sujeta a $i(0) = 0$, donde $E(t)$ está dada en la Figura 7.48. Especifique la solución para $0 \le t < 2$. [*Sugerencia:* Véase el Problema 33 de los Ejercicios 7.4].

48. Recuerde que la ecuación diferencial para la carga instantánea $q(t)$ en el capacitor conectado en un circuito L-R-C en serie es

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{10}$$

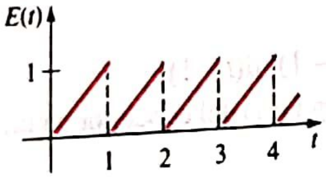

Figura 7.48

Véase la Sección 5.4. Utilice la transformada de Laplace para determinar $q(t)$ cuando $L = 1$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.005$ F, $E(t) = 150$ V, $t > 0$ y $q(0) = 0$, $i(0) = 0$. ¿Cuál es la corriente? ¿Cuál es la carga si la misma tensión constante se anula para $t \ge 2$?

49. Determine la carga $q(t)$ y la corriente $i(t)$ para un circuito conectado en serie en el cual $L = 1$ H, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $E(t) = 120$ sen $10t$ volts, $q(0) = 0$, e $i(0) = 0$. ¿Cuál es la corriente de estado permanente?

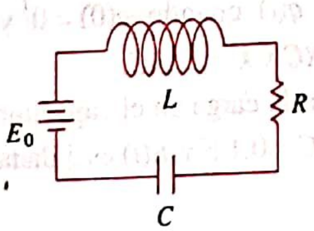

Figura 7.49

50. Considere la batería de voltaje constante, E_0, que carga el capacitor mostrado en la Figura 7.49. Si se divide entre L y se define $\lambda = R/2L$ y $\omega^2 = 1/LC$, entonces (10) se convierte en

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = \frac{E_0}{L}.$$

Utilice la transformada de Laplace para demostrar que la solución de esta ecuación, sujeta a $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$, es

$$q(t) = \begin{cases} E_0C[1 - e^{-\lambda t}(\cosh\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}\operatorname{senh}\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t)], & \lambda > \omega \\ E_0C[1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)], & \lambda = \omega \\ E_0C[1 - e^{-\lambda t}(\cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}\operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t)], & \lambda < \omega. \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

51. Use la transformada de Laplace para determinar la carga $q(t)$ en el capacitor conectado en el circuito L-C en serie cuando $q(0) = 0$, $i(0) = 0$ y $E(t) = E_0\, e^{-kt}$, siendo $k > 0$.

52. Suponga que un peso de 32 lb alarga un resorte vertical 2 pie. Si el peso se suelta a partir de la posición de equilibrio, determine la ecuación de movimiento si una fuerza $f(t) =$ sen t aplicada al sistema actúa en $0 \leq t < 2\pi$, siendo retirada después. Ignore cualquier fuerza de amortiguación. [*Sugerencia*: Escriba la fuerza aplicada en términos de la función escalón unitario].

53. Un peso de 4 lb alarga un resorte vertical 2 pie. El peso se suelta, a partir del reposo, 18 pulg arriba de la posición de equilibrio y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguación numéricamente equivalente a 7/8 de la velocidad instantánea. Utilice la transformada de Laplace para determinar la ecuación de movimiento.

54. Un peso de 16 lb se sujeta a un resorte vertical cuya constante es $k = 4.5$ lb/pie. Iniciando en $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 4$ sen $3t + 2$ cos $3t$ actúa en el sistema. Suponiendo que no se presentan fuerzas de amortiguación, use la transformada de Laplace para hallar la ecuación de movimiento si el cuerpo se suelta desde la posición de equilibrio, estando en reposo.

55. Para una viga en voladizo, empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho ($x = L$), la deflexión $y(x)$ debe satisfacer (9) y

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0. \tag{11}$$

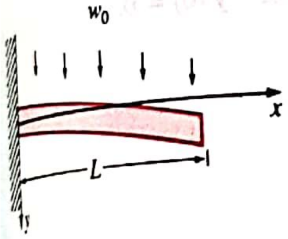

Figura 7.50

Las primeras dos condiciones establecen que la deflexión y la pendiente son cero en $x = 0$, y las últimas dos, que el momento torsionante y la fuerza cortante son nulas en $x = L$. Utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación (9) sujeta a las condiciones (11) cuando la carga constante w_0 está uniformemente repartida a lo largo de la viga. Véase la Figura 7.50. Determine la deflexión en el punto medio de la viga, así como su deflexión máxima.

56. Resuelva el Problema 55 cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L/3 \\ w_0, & L/3 < x < 2L/3 \\ 0, & 2L/3 < x < L. \end{cases}$$

Exprese $w(x)$ en términos de funciones escalón unitario.

57. Resuelva el Problema 55 cuando la carga está dada por

$$w(x) = \begin{cases} w_0, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L. \end{cases}$$

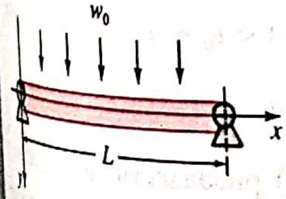

Figura 7.51

58. La deflexión estática $y(x)$ de una viga articulada en ambos extremos debe satisfacer la ecuación diferencial (9) y las condiciones

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad y''(L) = 0. \tag{12}$$

Utilice la transformada de Laplace para resolver (9) sujeta a las condiciones (12) cuando $w(x) = w_0$, $0 < x < L$. Véase la Figura 7.51.

Scanned by CamScanner

En los Problemas 59 y 60 use la transformada de Laplace y el Teorema 7.7 para hallar una solución de la ecuación dada.

59. $ty'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0$

60. $ty'' + 2ty' + 2y = 0, \quad y(0) = 0$

61. En este problema se demuestra cómo puede usarse la integral de convolución para resolver un problema de valor inicial del tipo

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{13}$$

(a) Demuestre que la solución $y_1(t)$ del problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

es

$$y_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{as^2 + bs + c}\right\}.$$

(b) Use el resultado del inciso (a) para mostrar que la solución $y_2(t)$ del problema de valor inicial en (13) está dada por

$$y_2(t) = \frac{1}{a} g * y_1.$$

62. Utilice el procedimiento presentado en el Problema 61 para hallar una solución del problema de valor inicial

$$y'' + y = \sec t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

Impulso unitario

Algunos sistemas mecánicos suelen estar sometidos a una fuerza exterior (o a una tensión eléctrica aplicada en el caso de circuitos) de gran magnitud, que solamente actúa durante un tiempo muy corto. Por ejemplo, una descarga eléctrica podría caer sobre el ala vibrante de un avión; a un cuerpo sujeto a un resorte podría dársele un fuerte golpe con un martillo, una pelota (de beisbol, de golf o de tenis) inicialmente en reposo, podría ser enviada velozmente por los aires al ser golpeada con violencia con un objeto adecuado (bat de beisbol, un bastón de golf o una raqueta de tenis). La función

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \le t < t_0 + a \\ 0, & t \ge t_0 + a, \end{cases} \tag{1}$$

siendo $a > 0$, $t_0 > 0$, mostrada en la Figura 7.52(a), puede servir como modelo matemático para tal fuerza. Para un valor pequeño de a, se tiene que $\delta_a(t - t_0)$ es esencialmente un función constante de gran magnitud, que está "activa" por un tiempo muy corto alrededor de t_0. El comportamiento de $\delta_a(t - t_0)$ cuando

Scanned by CamScanner

$\frac{}{dt} + 6y(t) + 9\int_0^t y$

39. Use la ecuación (
un circuito L-R-(
$E(t) = 100[1 - \mathcal{U}($

40. Resuelva el Prob

41. Recordando que
circuito R-C cor

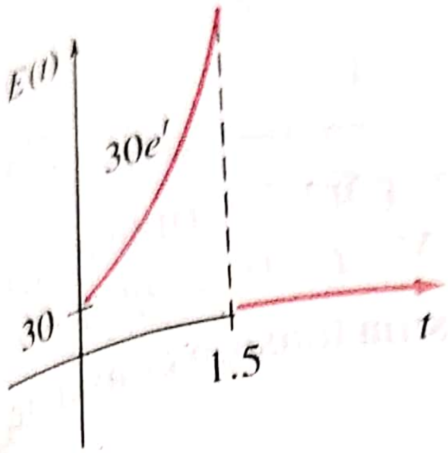

Figura 7.43

donde $E(t)$ es
de Laplace
$E(t) = E_0 e^{-}$

42. Utilice la tr
en un circu
en la Figur

43. Aplique la
en un circ
en la Fig

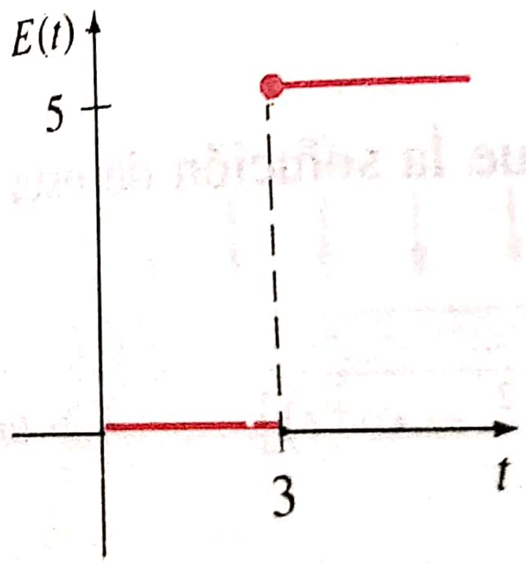

Figura 7.44

Scanned by CamScanner