INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Teoría de Comunicaciones y Señales

Práctica 1. Simulación de la Serie Trigonométrica de Fourier

Profa. Arzate Gordillo Jacqueline

Ascencio Mata Aaron

Hernández Linares Joyce

Olivares Conchillos Leonel

3CV6

29 de octubre de 2020

1. Objetivo

El alumno analizará, comprenderá y verificará la STF de funciones dadas, empleando circuitos electrónicos simulados con el programa MULTISIM o equivalente.

2. Antecedentes

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

Fórmulas para calcular los coeficientes *an* , *b*n

En resumen

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\text{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Si se desea trabajar con la serie en términos de la frecuencia angular $T = 2\pi/\omega$, se pueden usar

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\omega}{2\pi}\int_1^{2\pi/\omega} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\cos(\omega n t)dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(t)\text{sen}(\omega n t)dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Si el periodo de la forma de onda es 2π, y se toma a ωt como variable, se pueden usar las fórmulas equivalentes

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_1^{2\pi} f(\omega t)d(\omega t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(\omega n t)d(\omega t), \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\text{sen}(\omega n t)d(\omega t), \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

3. Desarrollo

3.1. Observe la función f(t) mostrada en la figura 1. La serie trigonométrica de Fourier de esta función, está dada por la ecuación (1)

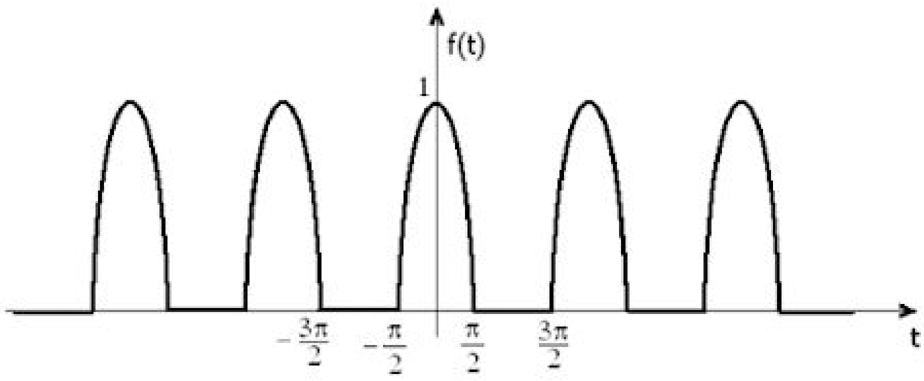


Figura 1

$$f(t)=\left(\frac{1}{\pi}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\cos t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi\left(1-n^{2}\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\cos nt \qquad \textbf{...(1)}$$

En la figura 2 se muestra la generación de f(t) mediante algunos de estos componentes, usando un circuito electrónico. Estrictamente f(t) solo está aproximada, pues tendrían que sumarse un grupo infinito de términos en el sistema para representarla de manera exacta.

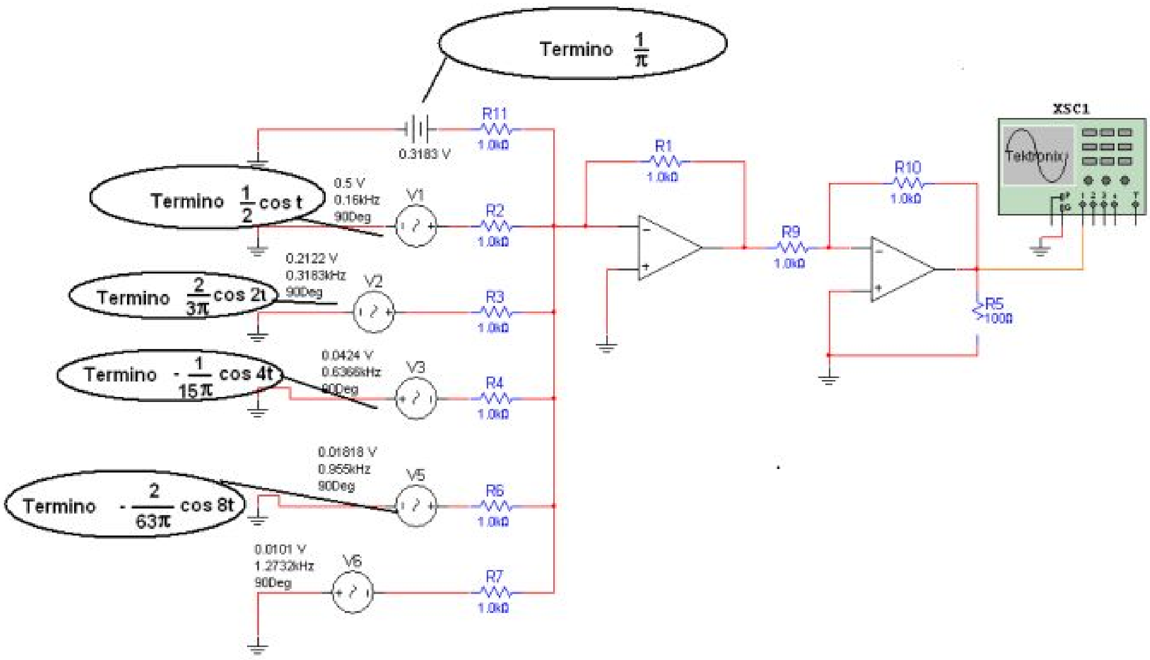
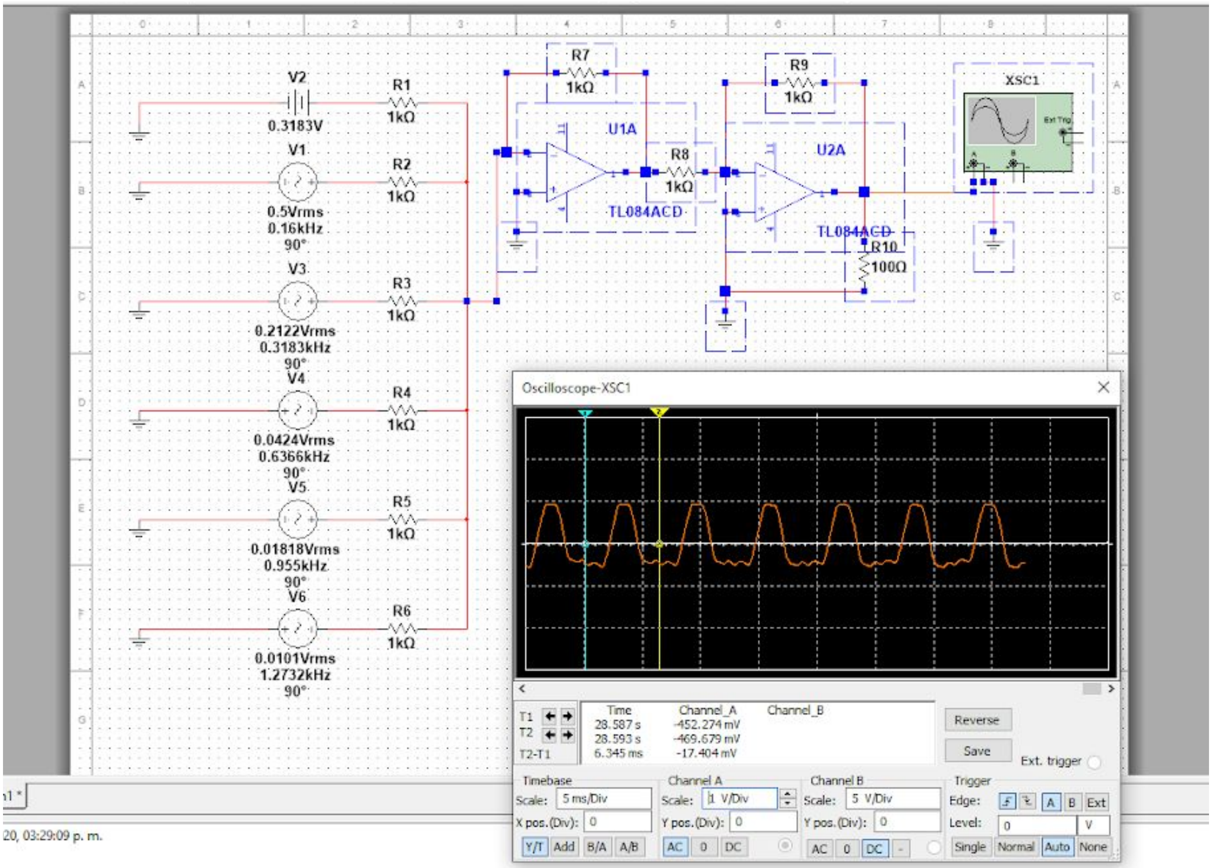


Figura 2. Configuración sumador-inversor-inversor con amplificadores operacionales

Actividad 3.1

Usando el programa de simulación de circuitos, MULTISIM, construye virtualmente el circuito de la figura 2.



Actividad 3.2

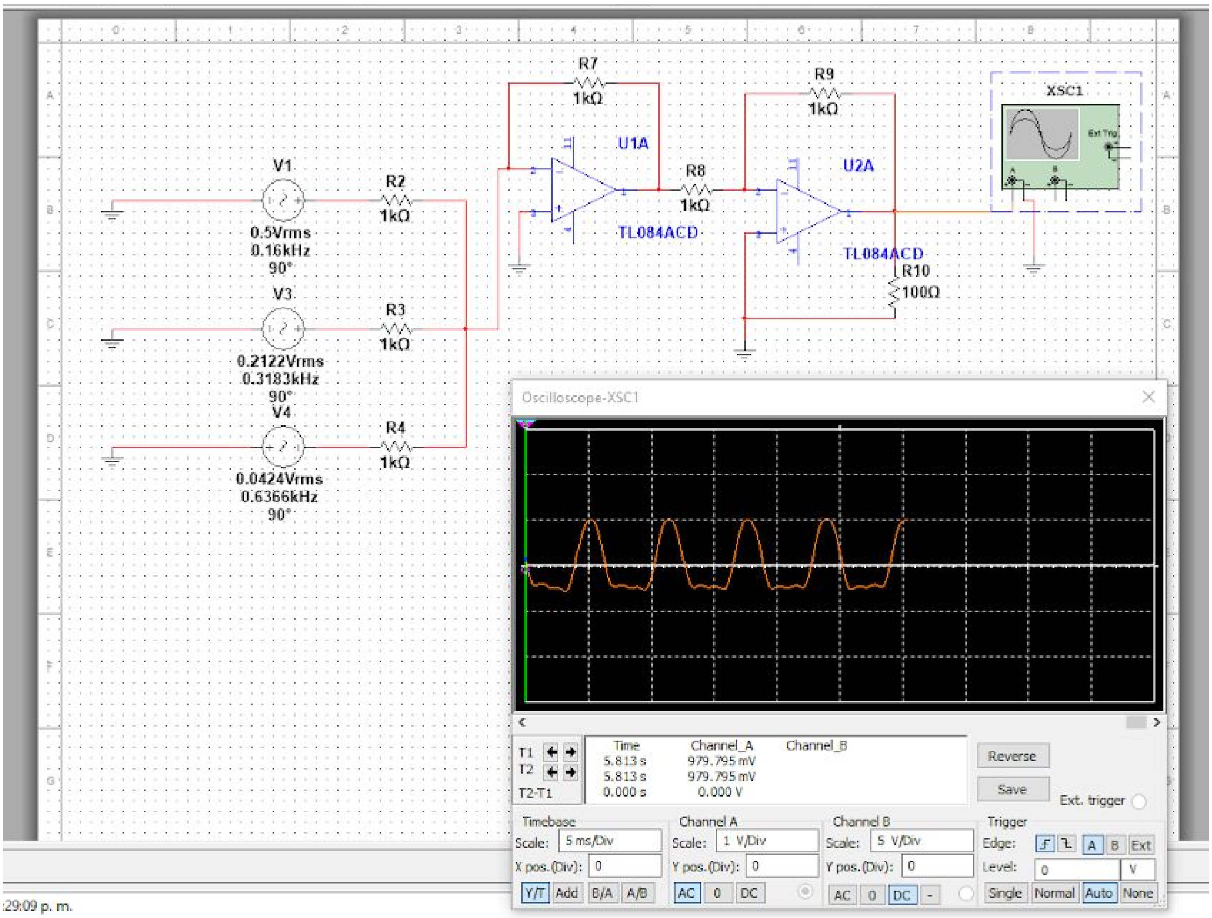
Compare la señal del osciloscopio con la señal de la figura 1 y escriba sus conclusiones.

Como se puede observar la señal obtenida en el osciloscopio es muy parecida a la de la figura 1, pero no termina de ser exactamente igual ya que esta señal está conformada por solamente 6 señales o cosenos, cuando en la teoría una STF está conformada por una infinidad de componentes que afinan la señal para que sea exactamente igual, claramente podemos ver que se asemejan bastante, pero para obtener una señal exactamente igual debemos agregar más componentes que afinen la señal y que mediante un simulador puede ser bastante atareado, pero ya en la vida real implicaría un gasto muy grande por todos los componentes que se agreguen.

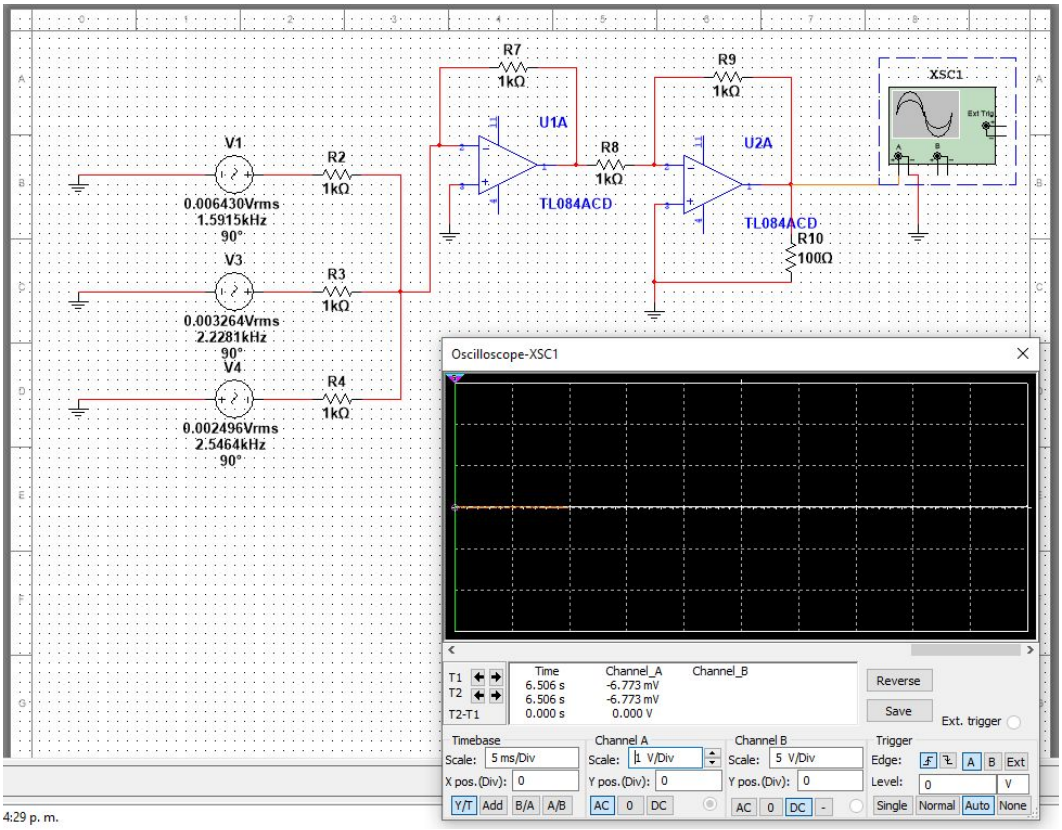
Actividad 3.3

Modifique el circuito de la figura 1, de tal manera que solo se sumen unos armónicos seleccionados. Por ejemplo las primeras 3 componentes (n=1,2,3) Y posteriormente las 3 componentes de mayor frecuencia (por ejemplo n= 10,15,16).

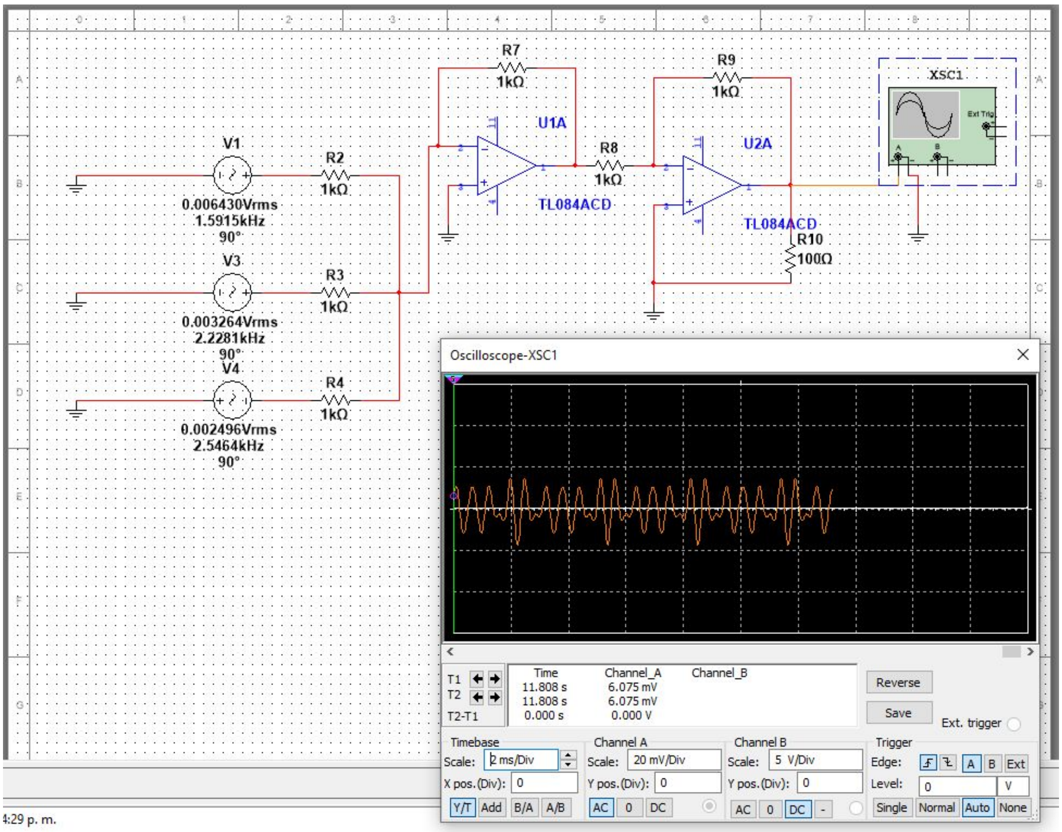
Primeras 3 componentes.



Componentes de mayor frecuencia (n = 10, 14 y 16).



Con menor escala.



Compare ambos resultados,

¿A qué conclusiones llega?

Podemos ver que los primeros componentes tienen una forma más parecida a la función f(t) mientras que los componentes con n más grande a la misma escala en la que vimos a los primeros 3 es casi imperceptible, pero si hacemos más pequeña la escala podemos observar que hay rastros de la onda que buscamos aunque no muy exacta, lo que pasa es que los primeros términos se encargan de darle forma a la función mientras que los demás solo se encargan de realizar la afinación de la función.

¿Cuáles son los componentes que definen la forma de f(t)?

Las primeras componentes que son las de menor frecuencia son las que definen el comportamiento de f(t).

¿Cuáles componentes únicamente afinan a f(t)?

Las componentes de mayor frecuencia son las que solamente afinan a f(t) para que sea lo más parecido a la función buscada.

Actividad 3.4

3.4.1 Encuentre la STF de la señal mostrada en la figura 5.

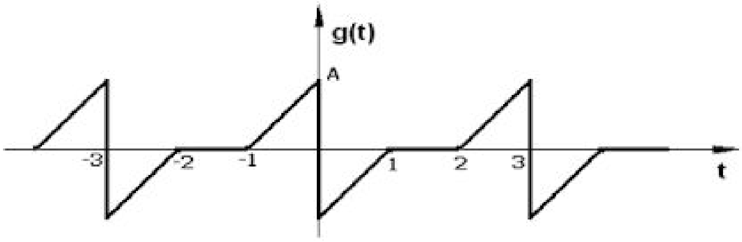
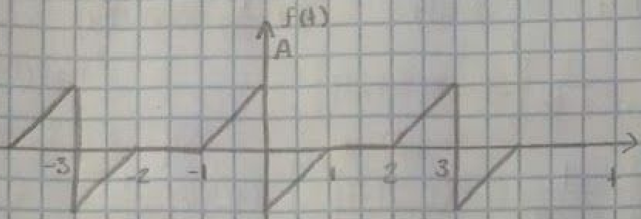


Figura 5

Actividad 3.4

3.4.1 Encuentre la STF de la señal mostrada



$$f(t)=\begin{cases} t+1 & -1<t<0 \\ t-1 & 0<t<1 \\ \varnothing & 1<t<2 \end{cases}$$

$$T=3 \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{2}{3}\left[\int_{-1}^{0}(t+1)\cos\left(\frac{n2\pi t}{3}\right)dt+\int_{0}^{1}(t-1)\cos\left(\frac{n2\pi t}{3}\right)dt\right]$$

IMPAR

$$=\varnothing \qquad \therefore \quad a_0=\varnothing$$

$$b_n=\frac{2}{3}\left[2\int_0^1 (t-1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\int_0^1 t\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt-\int_0^1 \mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt\right]$$

$$u=t \quad dv=\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)dt$$
$$du=dt \quad v=-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)t\Big|_0^1+\frac{9}{4n^2\pi^2}\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)\Big|_0^1+\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\cancel{-\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\cancel{\frac{3}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}-\frac{3}{2n\pi}\right]$$

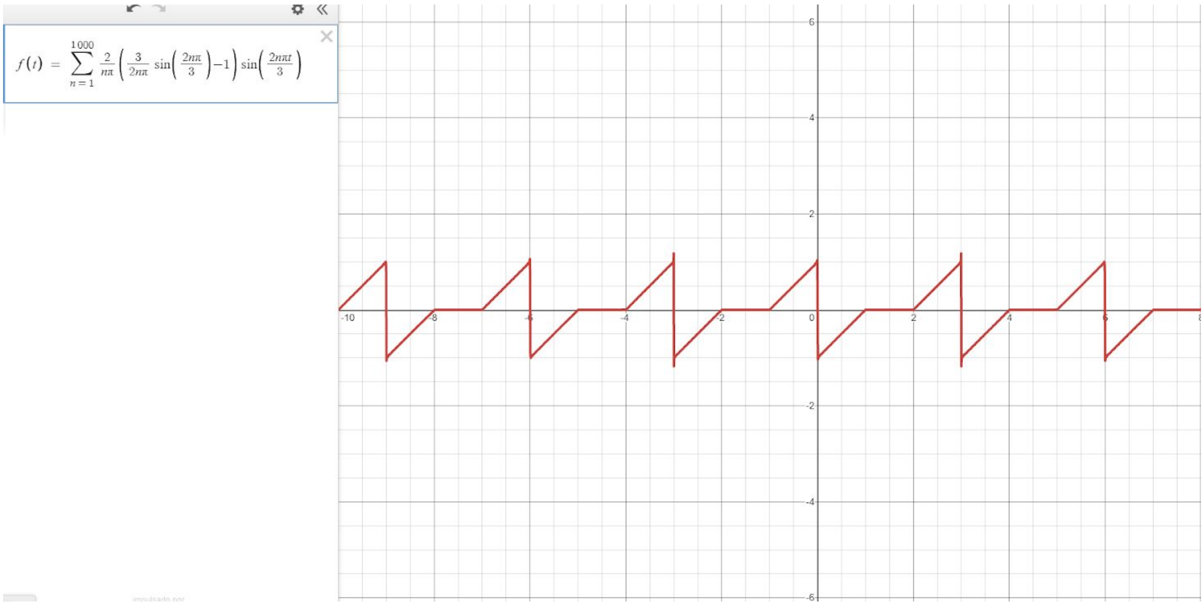
$$=\frac{12}{6n\pi}\left[\frac{3}{2n\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-1\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{3}{2n\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-1\right]$$

$$\therefore \quad f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[\frac{3}{2n\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-1\right]\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)$$

Así obtenemos que la f(t) expresada como STF es la siguiente:

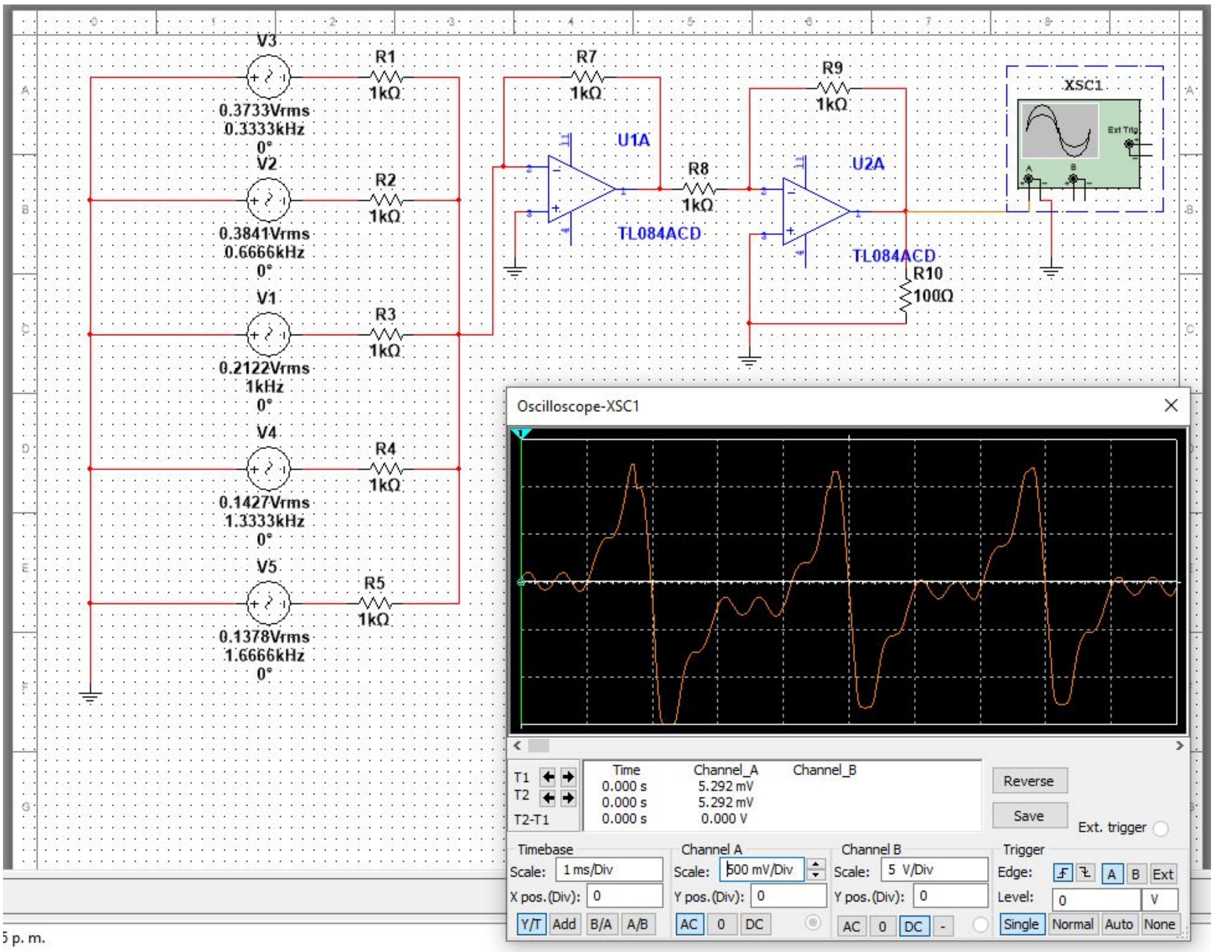
$$f(t) = \sum_{n=1}^{1000} \frac{2}{n\pi}\left(\frac{3}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)-1\right)\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)$$

3.4.2 Grafique la expresión resultante en un programa de computadora



3.4.3 Repita los puntos 3.2 y 3.3 para esta forma de onda g(t).

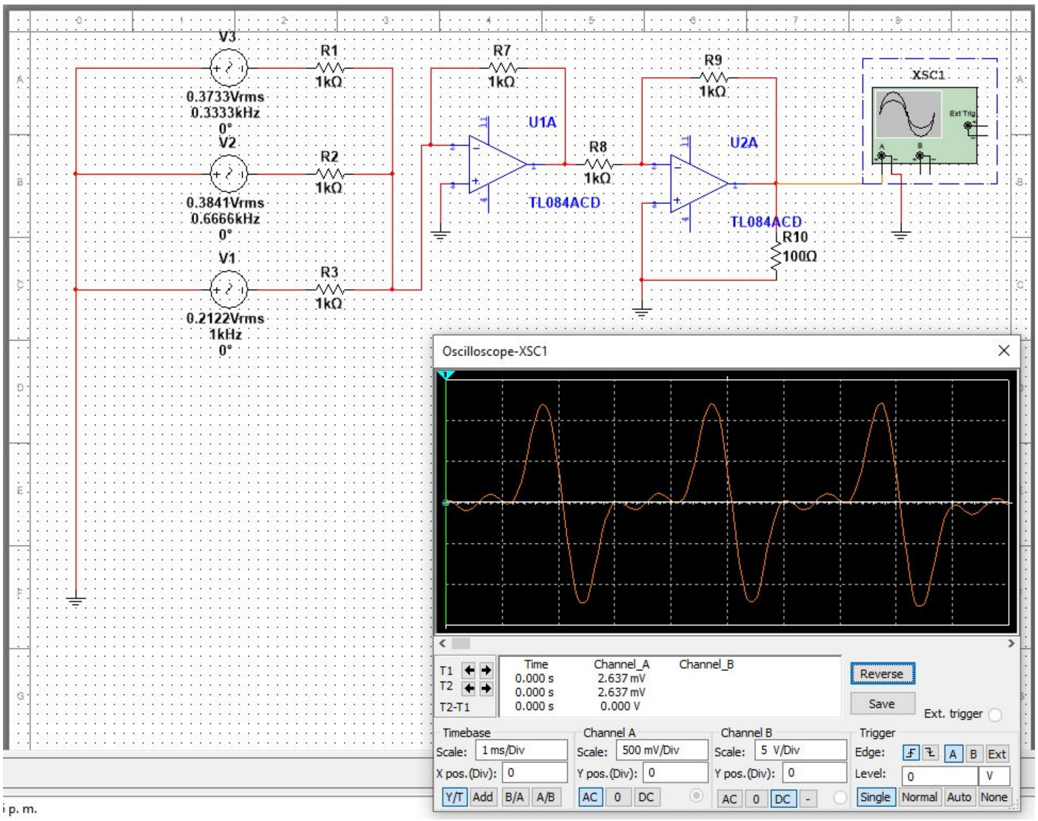
3.2. Comparar



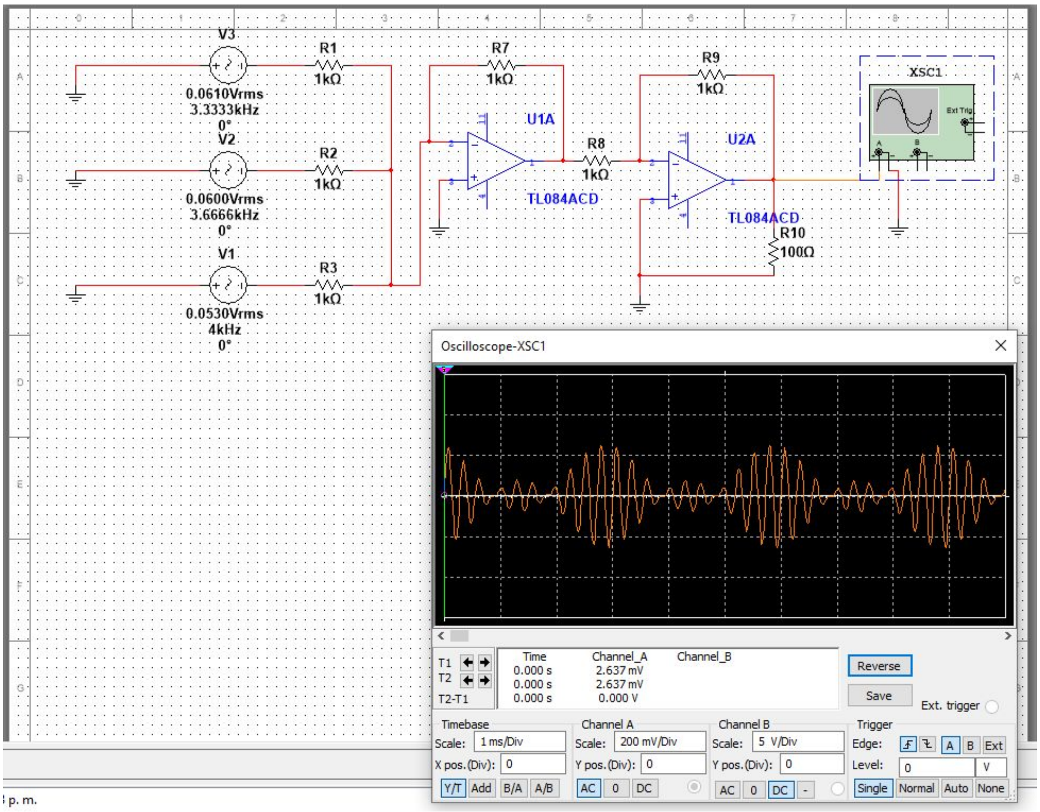
En esta ocasión podríamos tener más componentes para mejorar la forma de la onda, pero se puede distinguir la forma que de la función cuando sube, baja y despues se queda en 0, puede parecer que solo sube y baja, pero en los senos que hay en medio hay uno más largo que el otro, entonces el corto es justo cuando cambia la señal de alto a bajo y el largo es cuando vale 0.

3.3. Primeros 3 componentes y componentes más grandes

Primeros 3.



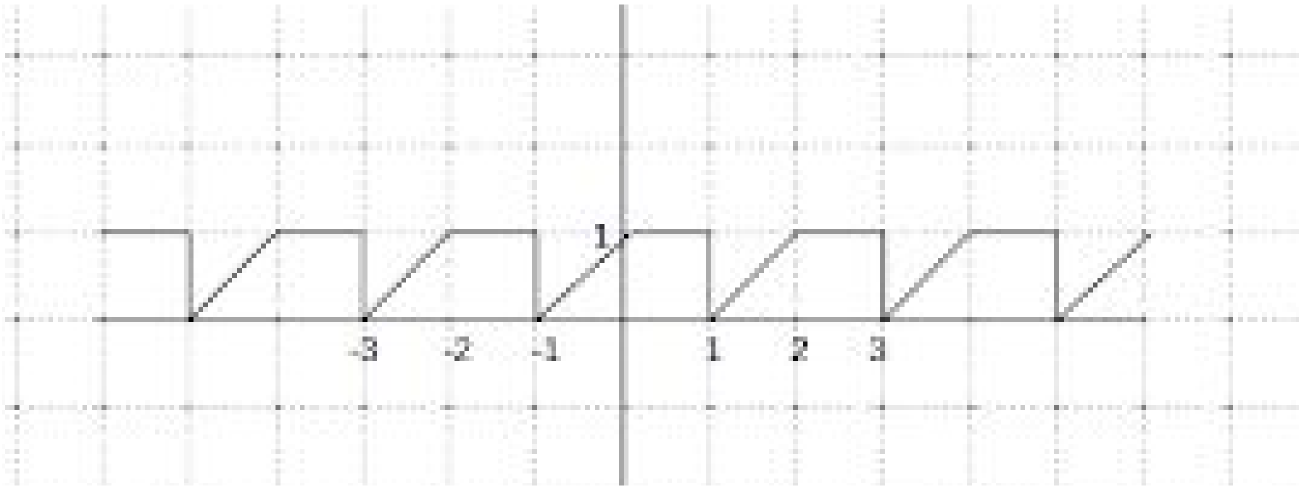
Componentes de mayor frecuencia (n = 10, 11 y 12).



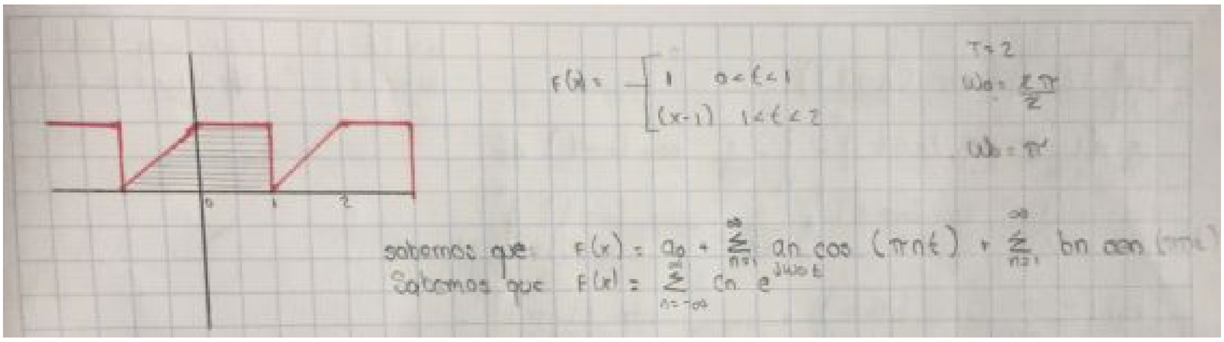
Comparando las dos ondas, podemos determinar lo mismo, los componentes con mayor frecuencia solamente afinan la función, pero su forma no es la más parecida a la original, mientras que los primeros componentes son los que le dan la forma a la función. En la segunda captura se puede distinguir el momento en que la función se vuelve 0, pero cuando se pone en alto o bajo no se logra apreciar el cambio.

ACTIVIDAD 3.5

Usando su creatividad, invente una forma de onda peculiar h(t), desarrolle su serie exponencial de fourier. A partir de ella encuentre la serie trigonométrica, grafíquela y repita las actividades 3.1 y 3.2



Serie Exponencial.



$$h(t)\begin{cases}1 & 0<t<1\\ (x-1) & 1<t<2\end{cases}$$

$T=2$

$\omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Serie exponencial

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\pi t}$$

$$C_n=\frac{1}{2}\int_0^1 F(t)\,e^{-jn\omega_0 t}+\frac{1}{2}\int_1^2 F(t)\,e^{-jn\omega_0 t}$$

$$C_n=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jn\pi t}+\frac{1}{2}\int_1^2 (t-1)\,e^{-jn\pi t}$$

$$C_{n1}=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jn\pi t}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{jn\pi}e^{-jn\pi t}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-jn\pi}}{jn\pi}+\frac{e^{0}}{jn\pi}\right]$$

$$C_{n1}=\frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-jn\pi}}{jn\pi}+\frac{1}{jn\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos n\pi+\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}^{\,0}}{jn\pi}+\frac{1}{jn\pi}\right]$$

$$C_{n1}=\frac{-\cos(n\pi)}{2jn\pi}+\frac{1}{2jn\pi}$$

$u=(t-1)$ $\quad dv=e^{-jn\pi t}$

$du=dt$ $\quad v=\frac{-1}{jn\pi}e^{-jn\pi t}$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\int_1^2 (t-1)\left(e^{-jn\pi t}\right)=$$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{(t-1)}{jn\pi}e^{-jn\pi t}\Big|_1^2-\int_1^2-\frac{1}{jn\pi}e^{-jn\pi t}\,du\right]$$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{(t-1)}{jn\pi}e^{-jn\pi t}-\frac{1}{(jn\pi)^2}e^{-jn\pi t}\right]_1^2$$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\left[\left[-\frac{(2-1)}{jn\pi}e^{-jn\pi 2}-\frac{1}{(jn\pi)^2}e^{-jn\pi 2}\right]-\left[-\frac{\cancel{(1-1)}^{\,0}}{jn\pi}e^{-jn\pi}-\frac{1}{(jn\pi)^2}e^{-jn\pi}\right]\right]$$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\pi}e^{-jn\pi 2}-\frac{1}{(jn\pi)^2}e^{-jn\pi 2}+\frac{1}{(jn\pi)^2}e^{-jn\pi}\right]$$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{jn\pi}\cos(2n\pi)-j\,\cancel{\operatorname{sen}(2n\pi)}^{\,0}-\frac{1}{(jn\pi)^2}\cos(2n\pi)-j\,\cancel{\operatorname{sen}(2n\pi)}^{\,0}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(jn\pi)^2}\cos(n\pi)-j\,\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}^{\,0}\right]$$

$$C_{n2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{jn\pi}-\frac{1}{(jn\pi)^2}+\frac{1}{(jn\pi)^2}\cos(n\pi)\right]$$

$$C_{n2}=\frac{-1}{2jn\pi}-\frac{1}{2(jn\pi)^2}+\frac{1}{2(jn\pi)^2}\cos(n\pi)$$

asi unimos

$C_{n_I} + C_{n_{II}}$

$$C_n = \frac{-\cos(n\pi)}{2jn\pi} + \cancel{\frac{1}{2jn\pi}} - \cancel{\frac{1}{2jn\pi}} + \frac{1}{2(jn\pi)^2} - \frac{1}{2(jn\pi)^2}\cos(n\pi)$$

$$C_n = \frac{-\cos(n\pi)}{2jn\pi} + \frac{1}{2(jn\pi)^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{2(jn\pi)^2}$$

asi $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{-\cos(n\pi)}{2jn\pi} + \frac{1}{2(jn\pi)^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{2(jn\pi)^2}\right] e^{jn\pi t}$

$a_0 = \frac{3}{4}$

$a_n = \frac{1}{(n\pi)^2}(1-\cos(n\pi))$ $\qquad 2R(C_n)$

$b_n = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)$ $\qquad 2Im(C_n)$

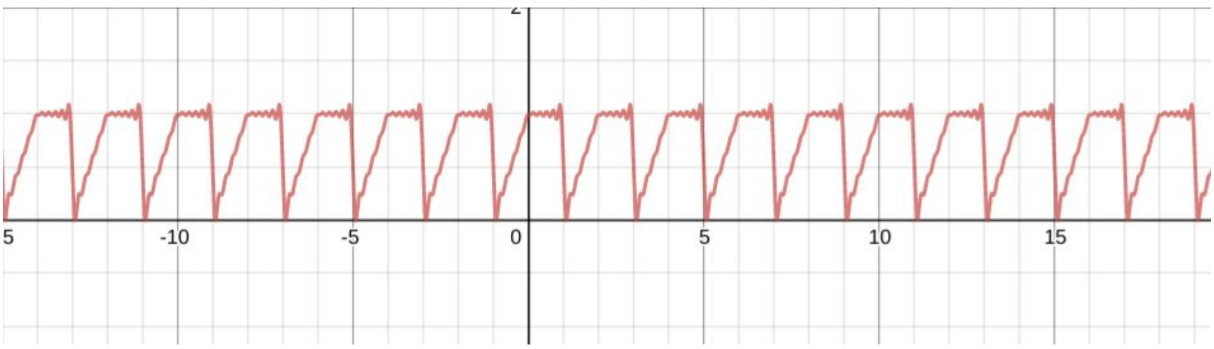
asi tenemos que nuestra serie trigonometrica es

$$h(t) = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}(1-\cos(n\pi)) . \cos(n\pi t) + \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)\cdot sen(n\pi t)$$

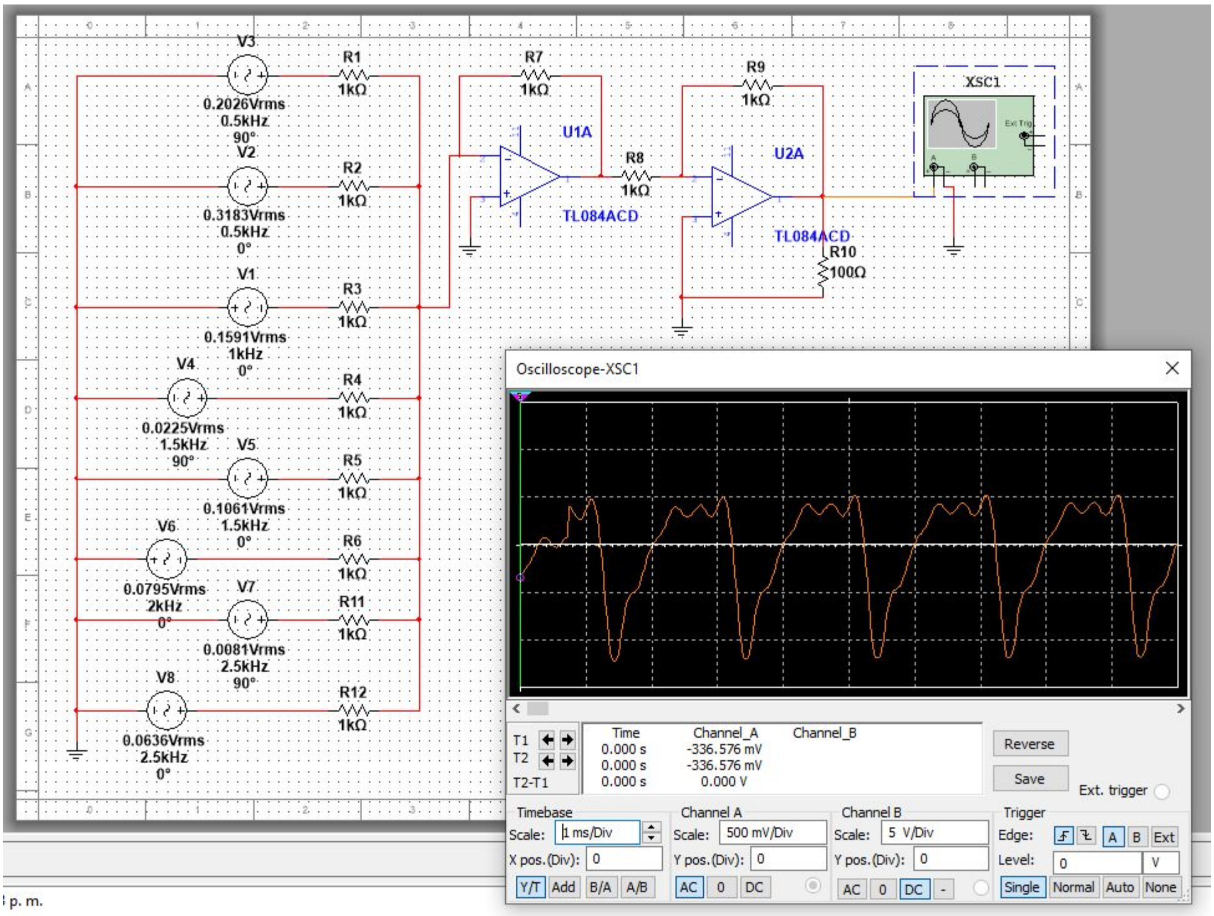
Así obtenemos que la f(t) expresada como STF es la siguiente:

$$f = \frac{3}{4} + \left(\sum_{n=1}^{10} \left(-\frac{1}{\pi^2 n^2}\left(\cos(\pi n) - 1\right)\right) \cdot \cos(\pi n t) + \sum_{n=1}^{10} \left(-\frac{1}{\pi n} \cdot \cos(n\pi)\right) \cdot \sin(n\pi t) \right)$$

Y la gráfica que obtuvimos fue la siguiente:



3.1.



3.2

En este caso al no tener una función par o impar tenemos dos valores por cada componente, lo que significa que se deben poner dos fuentes por cada componente, una desfasada 90 grados para representar al coseno y otra sin desfase para representar al seno. En esta simulación solo se tomó en cuenta los primero 5 componentes y podemos ver que tiene la forma de la función, pero la falta ser definida por más componentes.

Actividad 3.6 Pregunta

Si quisiera usar el concepto de Serie trigonométrica de Fourier para generar señales periódicas cuadradas, triangulares, dientes de sierra y de otro tipo, usando n fuentes de voltaje alterno. ¿Qué parámetro tendría que modificar en la serie trigonométrica de cada una de estas funciones para hacer ajustable el periodo de éstas?

Se tendría que modificar la frecuencia, pues, al definir una frecuencia para una STF de cualquier señal periódica, eso ocasionará que de acuerdo a la frecuencia seleccionada. aumente o disminuya el periodo con el que se repiten, pudiendo ser mayor o menor, a partir del periodo fundamental. Lo anterior se puede obtener si usamos la ecuación por medio de la cual se calcula la frecuencia, despejando a “w”.

4. Conclusiones

4.1 Generales:

En esta práctica podemos concluir cómo es que se lleva a cabo la representación de una Serie Trigonométrica de Fourier y como poder visualizar la señal a través de un amplificador operacional , llevar a cabo la simulación por medio de un software para simulaciones de circuitos electrónicos. Pudimos ver como se grafica la serie con pocos componentes y cómo se representan los que tienen poca frecuencia y los que tienen alta frecuencia y así ver cómo es que unos dan forma y otros afinan.

4.2 Individuales:

Hernández Linares Joyce:

La señales están presentes en la vida cotidiana,nuestra voz, las imágenes que vemos en nuestra televisión, entre otras, pero estas señales no nos dicen nada por si solas , tenemos que extraer la información que contiene.

Estas señales están relacionadas con la representación matemática de la señal y con la operación algorítmica efectuada sobre ella, esta práctica nos muestra los primeros pasos para obtener información de las señales, en este caso trabajamos con operaciones y simuladores que nos hicieron ver como se comportan estas señales en determinadas situaciones.

En mi caso me di cuenta que debo trabajar más con la parte matemática, pues aunque encontrar las series trigonométrica y exponencial para las gráficas dadas, no resultaba complicado, tuve errores básicos de signos y de fracciones.

Olivares Conchillos Leonel:

Utilizando herramientas como graficadores o el MULTISIM pude ver el comportamiento de cada componente dentro de la serie de fourier de las funciones dadas y como en conjunto pueden formar la función, se aprecia como los primeros componentes son los que le dan la forma a la función y los componentes con frecuencias altas son las que afinan o hacen más parecida la onda a la función esperada, podemos ver que en el MULTISIM podemos llegar a hacer una función más parecida, pero por el espacio y la cantidad de señales que debemos meter se vuelve muy laborioso conectarlo todo, pero se asemeja bastante a lo esperado con los pocos componentes que utilizamos, se puede ver claramente porque en MULTISIM solo tenemos 5 componentes y en un graficador como desmos podemos poner una cantidad enorme de componentes que la hacen más fiel a la función.

Ascencio Mata Aaron:

Nos sirvió para ver cómo se comporta cada componente , como pasar de un modelo matemático a una aplicación en la ingeniería , pero también tomando en cuenta que tenemos que agregar cierto número de componentes para que esta función sea semejante a la calculada. También nos ayudó a abrir el panorama e imaginar las grandes aplicaciones que estas pueden tener en el ámbito profesional. Como lo pueden ser en comunicaciones en la transmisión de radio y televisión.

5. Bibliografía

Website title: Cb.mty.itesm.mx

URL: http://cb.mty.itesm.mx/ma3002/materiales/ma3002-series-fourier.pdf

Website title: Mate.ingenieria.usac.edu.gt

URL: http://mate.ingenieria.usac.edu.gt/archivos/Serie_trig_de_fourier.pdf