Ejercicios Tarea 8: aplicación de las ec. dif. a los circuitos eléctricos.

1. Un circuito consta de una fuera electromotriz de 40 V, una resistencia de 10Ω y un inductor de 0,2 H, todos ellos en serie. Si la corriente inicial es 0, hallar la intensidad de corriente para $t > 0$. Pol. $i = 4(1 - e^{-50t})$
2. Resolver el problema 1 si la fuerza electromotriz viene dada por $E(t) = 150 \cos 200tV$ en lugar de la fuerza electromotriz constante dada en ese problema.
3. Un circuito consta de una fuerza electromotriz constante de 100 V, una resistencia de $10\,\Omega$ y un condensador de 2×10^{-4} farad, todos ellos en serie. Se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, siendo cero la carga en el condensador en este instante. Hallar la carga y la intensidad de corriente para $t > 0$. Pol. $q = \frac{1}{50}(1 - e^{-500t})$; $i = 10e^{-500t}$
4. Un circuito consta de una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 5$ sen $100t$ V, una resistencia de 10Ω, un inductor de 0,05 H y un condensador de 2×10^{-4} farad. Si tanto la intensidad de corriente como la carga iniciales en el condensador son cero, hallar la carga en el condensador en cualquier instante $t > 0$. Todos los elementos del circuito se encuentran conectados en serie.
5. Un circuito consta de una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 100$ sen $200t$ V, una resistencia de $40\,\Omega$, un inductor de 0,25 H y un condensador de 40×10^{-4} farad, estando conectados en serie todos estos ele-

Pol. $i = e^{-80t}(-4,588 \operatorname{sen} 60t + 1,247 \cos 60t) - 1,247 \cos 200t + 1,331 \operatorname{sen} 200t$

mentos. Si la corriente inicial es cero y la carga inicial en el condensador es 0,01 coulomb, hallar la corriente para $t > 0$.

6. Un circuito consta de una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 200e^{-100t}$ V, una resistencia de 80 Ω, un inductor de 0,2 H y un condensador de 5×10^{-6} farad, todos ellos en serie. Si la corriente inicial y la carga inicial en el condensador son cero, hallar la corriente en cualquier instante $t > 0$.

7. Un circuito consta de una resistencia de R Ω, una inducción de L H y un condensador de C farad, todos ellos en serie. La corriente inicial es cero y la carga inicial en el condensador es Q_0 coulomb.
   (a) Demostrar que la carga y la corriente son funciones oscilatorias amortiguadas temporales si, y sólo si, $R < 2\sqrt{L/C}$, y hallar la expresión para la carga y la corriente en este caso.
   (b) Si $R \geq 2\sqrt{L/C}$, estudiar la naturaleza de la carga y la corriente como funciones del tiempo. Ver respuesta al reverso.

8. Un circuito consta de una fuerza electromotriz dada por $E(t) = E_0 \operatorname{sen}\omega t$ V, una resistencia de R Ω, un inductor de L H y un condensador de C farad.
   (a) Demostrar que la corriente estacionaria es

$$i = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\operatorname{sen}\omega t - \frac{X}{Z}\cos\omega t\right),$$

donde $X = L\omega - 1/C\omega$ y $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$. La magnitud X se denomina *reactancia* del circuito y Z se denomina *impedancia*.

   (b) Usando el resultado de la parte (a), demostrar que la corriente estacionaria puede escribirse

$$i = \frac{E_0}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \phi),$$

donde ϕ viene determinado por las ecuaciones

$$\cos\phi = \frac{R}{Z}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{X}{Z}.$$

Demostrar entonces que la corriente estacionaria alcanza su valor máximo absoluto, E_0/Z, en los instantes $t_n + \phi/\omega$, donde

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

Profr. Juan Manuel Carballo Jiménez

son los instantes en que la fuerza electromotriz alcanza su valor máximo absoluto E_0.

(c) Demostrar que la amplitud de la corriente estacionaria es un máximo cuando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Para este valor de ω se dice que el circuito tiene *resonancia eléctrica.*

(d) Si $R = 20$, $L = 1/4$, $C = 10^{-4}$ y $E_0 = 100$, hallar el valor de ω que da lugar a la resonancia eléctrica y determinar la amplitud de la corriente estacionaria en este caso.

Lecturas sugeridas

AGNEW, R., *Differential Equations*, 2ª ed. (McGraw-Hill, New York, 1960).

BOYCE, W. y R. DIPRIMA, *Elementary Differential Equations*, 2ª ed. (Wiley, New York, 1969).

KAPLAN, W., *Ordinary Differential Equations* (Addison-Wesley, Reading Mass., 1958).

RAINVILLE, E. y P. BEDIENT, *Elementary Differential Equations*, 4ª ed. (Macmillan, New York, 1969).

RITGER, P. y N. ROSE, *Differential Equations with Applications* (McGraw-Hill, New York, 1968).

SPIEGEL, M., *Applied Differential Equations*, 2ª ed. (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967).

Sol

7. $$q = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\frac{Q_0\sqrt{C}\,R}{\sqrt{4L-R^2C}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4L-R^2C}}{2\sqrt{C}\,L}\right)t + Q_0\cos\left(\frac{\sqrt{4L-R^2C}\,t}{2\sqrt{C}\,L}\right)\right]$$

$$i = -\frac{2Q_0}{\sqrt{4LC-R^2C^2}}\,e^{-\frac{R}{2L}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4L-R^2C}}{2\sqrt{C}\,L}\,t\right)$$