



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Cómputo



Unidad de Aprendizaje: Teoría de Comunicaciones y Señales

Práctica 1: Simulación de la Serie Trigonométrica de Fourier

Grupo: 3CV16

Profesora: Gordillo Arzate Jacqueline

Integrantes:

Arévalo Andrade Miguel Ángel

Vargas Espino Carlos Hassan

Martínez Coronel Brayan Yosafat

1. Objetivo

El alumno analizará, comprenderá y verificará la STF de funciones dadas, empleando circuitos electrónicos simulados con el programa MULTISIM o equivalente.

2. Antecedentes

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica(x) en términos de una suma infinita de senos y cosenos . Las series de Fourier hacen uso de las relaciones de ortogonalidad de las funciones seno y coseno . El cálculo y estudio de series de Fourier se conoce como análisis armónico y es extremadamente útil como una forma de romper un arbitrario función periódica en un conjunto de términos simples que pueden insertarse, resolverse individualmente y luego recombinarse para obtener la solución al problema original o una aproximación al mismo con la precisión deseada o práctica. A continuación se ilustran ejemplos de aproximaciones sucesivas a funciones comunes utilizando series de Fourier.

En particular, dado que el principio de superposición es válido para las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria homogénea lineal , si dicha ecuación se puede resolver en el caso de una sola senoide, la solución para una función arbitraria está inmediatamente disponible expresando la función original como un Fourier. serie y luego enchufar la solución para cada componente sinusoidal. En algunos casos especiales donde la serie de Fourier se puede sumar en forma cerrada, esta técnica puede incluso producir soluciones analíticas.

Cualquier conjunto de funciones que forme un sistema ortogonal completo tiene una serie de Fourier generalizada correspondiente análoga a la serie de Fourier. Por ejemplo, el uso de la ortogonalidad de las raíces de una función de Bessel del primer tipo da una llamada serie de Fourier-Bessel .

El cálculo de la serie de Fourier (habitual) se basa en las identidades integrales

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin (m x) \sin (n x) d x &= \pi \delta_{m n} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos (m x) \cos (n x) d x &= \pi \delta_{m n} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin (m x) \cos (n x) d x &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin (m x) d x &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos (m x) d x &= 0\end{aligned}$$

porque $m, n \neq 0$ ¿dónde $\delta_{m n}$ está el delta de Kronecker ?

Utilizando el método de una serie de Fourier generalizada , la serie de Fourier habitual que incluye senos y cosenos se obtiene tomando $f_1(x) = \cos x$ y $f_2(x) = \sin x$. Puesto que estas funciones forman un sistema ortogonal completa sobre $[-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de una función $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin (n x),$$

dónde

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d x \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos (n x) d x \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin (n x) d x\end{aligned}$$

3. Desarrollo

Observe la función $f(t)$ mostrada en la figura 1. La serie trigonométrica de Fourier de esta función, está dada por la ecuación (1)

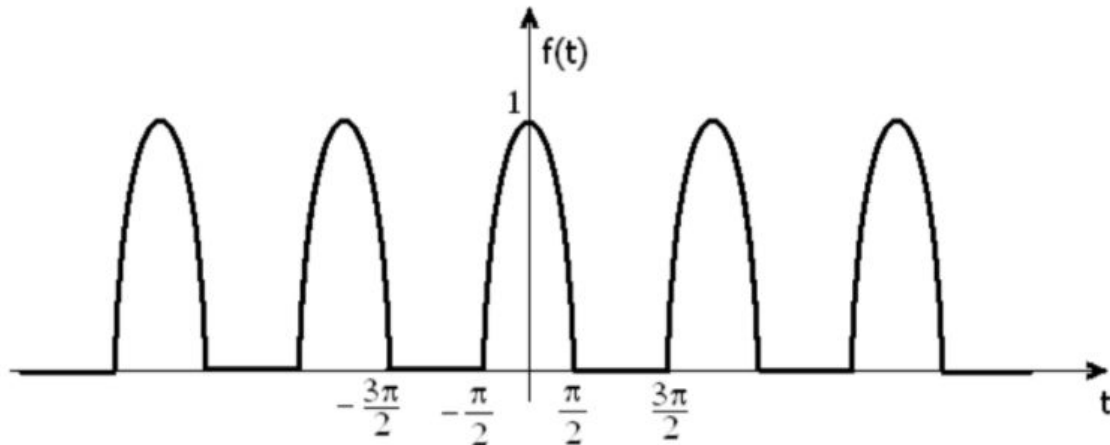


Figura 1

$$f(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cos t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-n^2)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos nt \quad \dots(1)$$

En la figura 2 se muestra la generación de $f(t)$ mediante algunos de estos componentes, usando un circuito electrónico. Estrictamente $f(t)$ solo está aproximada, pues tendrían que sumarse un grupo infinito de términos en el sistema para representarla de manera exacta.

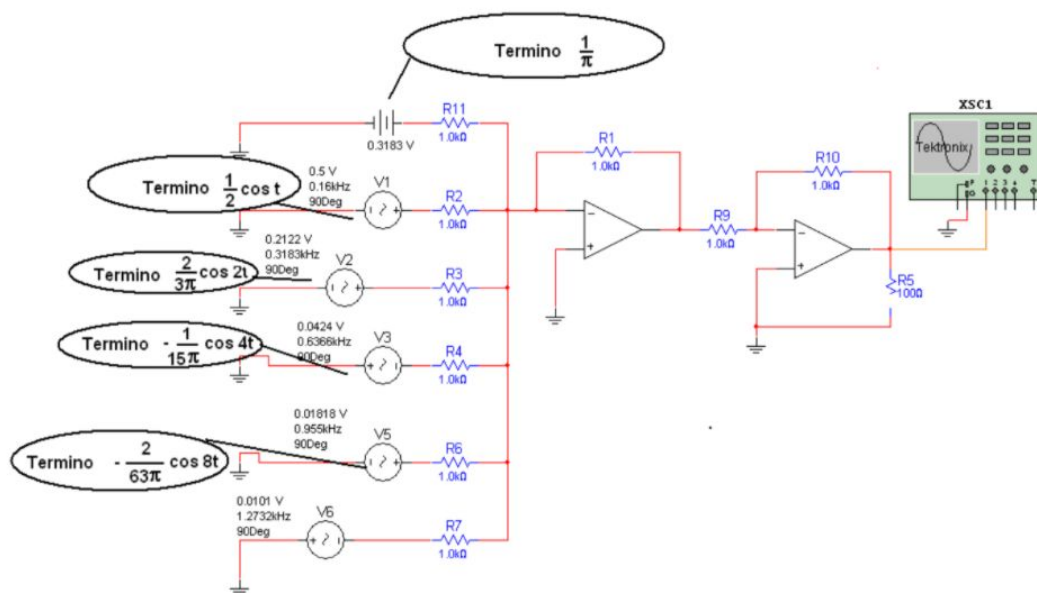


Figura 2. Configuración sumador-inversor-inversor con amplificadores operacionales

Actividad 3.1

Usando el programa de simulación de circuitos, MULTISIM, construye virtualmente el circuito de la figura 2.

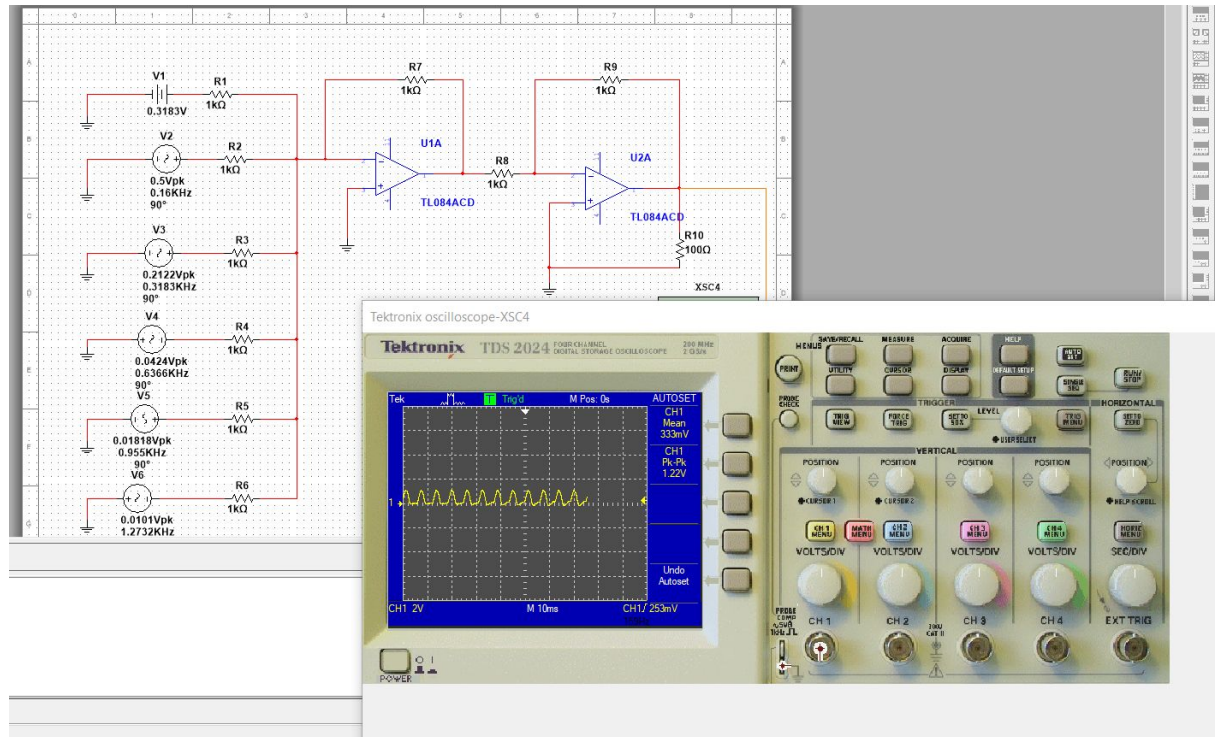


Figura 3 Circuito virtual en Multisim

Actividad 3.2

Compare la señal del osciloscopio con la señal de la figura 1 y escriba sus conclusiones.

Haciendo la comparación de la señal de la figura 1, con la obtenido en el osciloscopio podemos observar que no son prácticamente iguales pero sí son bastante parecidas, esto es debido a que se están usando únicamente unos pocos términos de una infinidad que conforman a la S.T.F.

Para obtener una señal muchísimo más aproximada, implicaría implementar un circuito muchísimo más elaborado, para abarcar una mayor cantidad de términos de la suma de la S.T.F. pero esto no sería factible, hacer una simulación con tantos componentes electrónicos.

Actividad 3.3



Figura 4. Salida con los primeros 3 términos

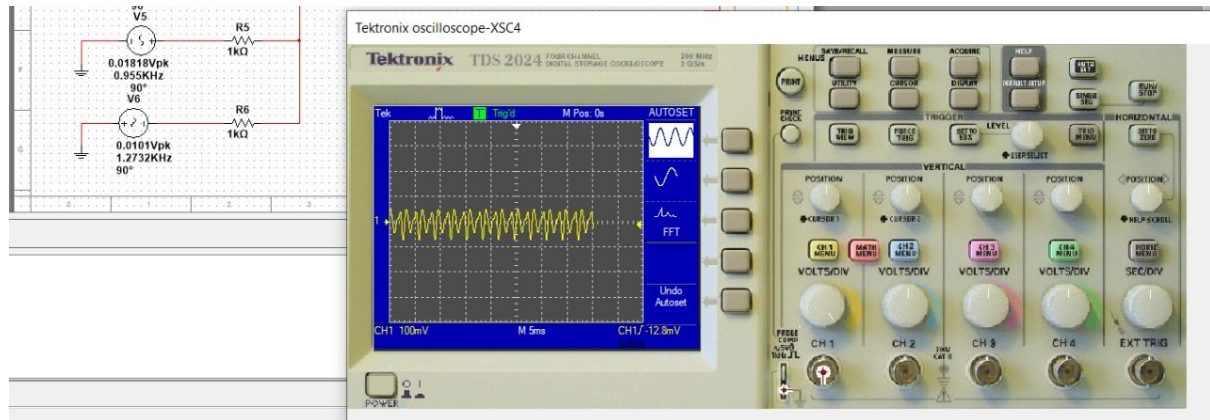


Figura 5. Salida con los términos subsecuentes a los primeros 3

¿A qué conclusiones llega?

A que la segunda se parece mucho menos a la original, es interesante que sin importar el número de las que le agreguemos, sin las primeras no se parece a la señal que tratamos de reproducir.

¿Cuáles son las componentes que definen la forma de $f(t)$?

Definitivamente las primeras, se diría que en especial las primeras 3, aunque con una forma irregular a la que queremos reproducir, aunque en términos grandes, pues definitivamente le dan mucha más forma que el resto.

¿Cuáles componentes únicamente afinan a $f(t)$?

Las siguientes a $n=3$, aunque sean muchos más términos, realmente solo hace que tenga la forma original pero en pequeño. Por supuesto, ambos términos son importantes, ya que queremos que la señal sea fiel a la original.

Actividad 3.4

Encuentre la STF de la señal mostrada en la figura 5;

$$f(t) = (t+1)A \text{ en } -1 < t < 0$$

$$f(t) = (t-1)A \text{ en } 0 < t < 1$$

$$f(t) = 0 \text{ en cualquier otro caso}$$

Se sabe que $f(t)$ es impar, por lo que a_n y a_0 serán 0, también que $T = 3$ y que $W = 2\pi/3$

$$b_n = \frac{4A}{3} \int_0^1 (t-1) \sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right) dt$$

$$b_n = \frac{4A}{3} \left[\frac{\sin\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)}{\left(\frac{2n\pi}{3}\right)^2} - \frac{t \cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)}{\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{2n\pi t}{3}\right)}{\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} \right] \text{ evaluado en } 1 \text{ y } 0$$

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} \left[\frac{3 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2n\pi} - \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 1 \right]$$

$$b_n = \frac{A}{n\pi} \left[\frac{3\sin(\frac{2n\pi}{3})}{n\pi} - 2 \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \left[\frac{3}{n\pi} \sin(\frac{2n\pi}{3}) - 2 \right] \sin(\frac{2nt}{3})$$

Grafique la expresión resultante en un programa de computadora; A = 1, n = 5000

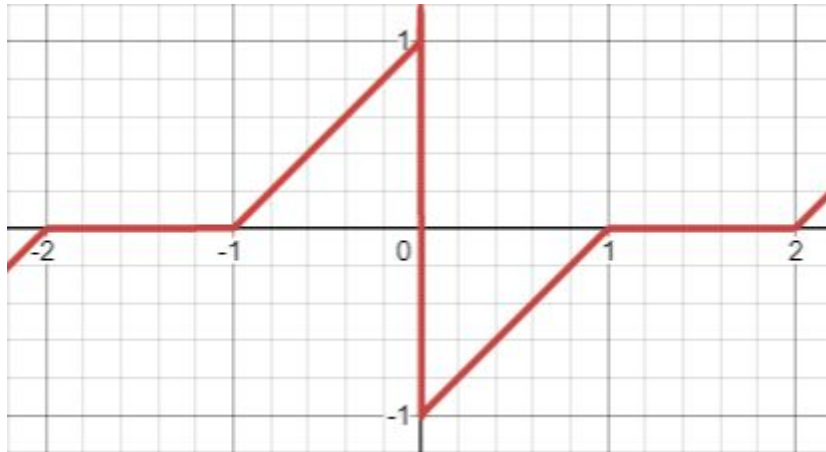


Figura 6. Señal en Desmos de la STF

Compare la salida con la imagen del osciloscopio

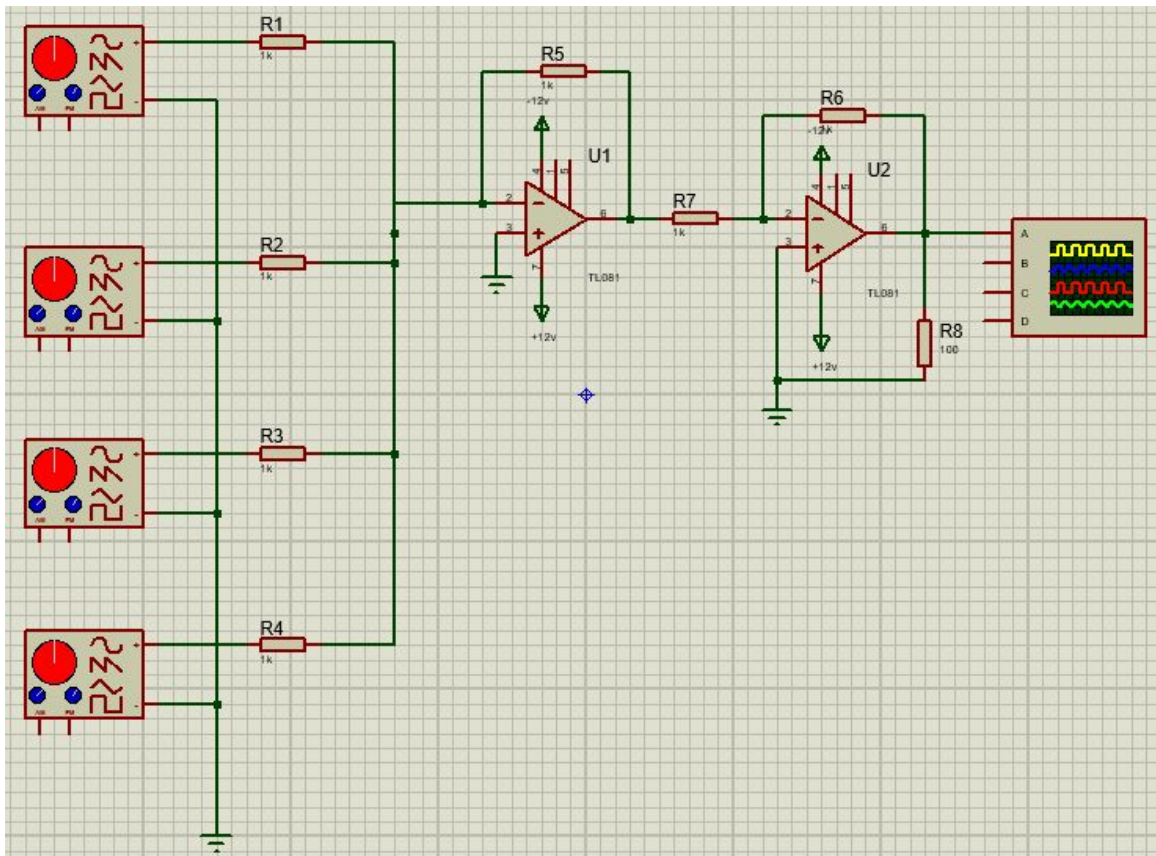


Figura 7. Circuito de la actividad 3.4

$$T = 3; W = 2\pi/3; f = nW/2\pi$$

| Término | Valor | Frecuencia |
|---------|------------------------------------|------------|
| 1 | $-0.3733\text{sen}(\frac{2nt}{3})$ | 1/3 |
| 2 | $-0.3841\text{sen}(\frac{2nt}{3})$ | 2/3 |
| 3 | $-0.2122\text{sen}(\frac{2nt}{3})$ | 1 |
| 4 | $-0.14\text{sen}(\frac{2nt}{3})$ | 4/3 |

Tabla de valores del circuito 2



Figura 8. Salida del Osciloscopio

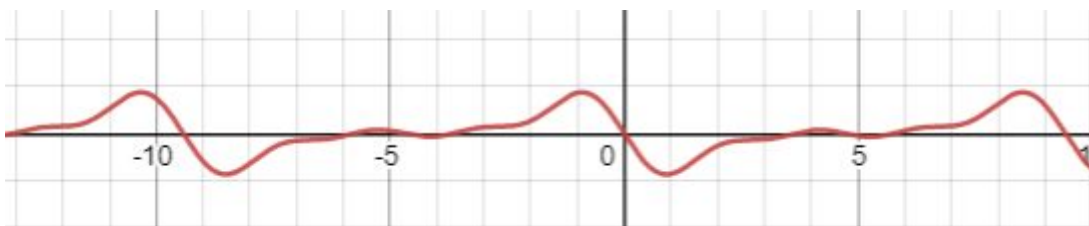


Figura 9. Salida del graficador con n=4

Como podemos observar, se parecen bastante, como era de esperarse los primeros términos ya hacen que parezca a la señal original, pero de forma irregular, no hay rectas ni se ven los triángulos en sí.

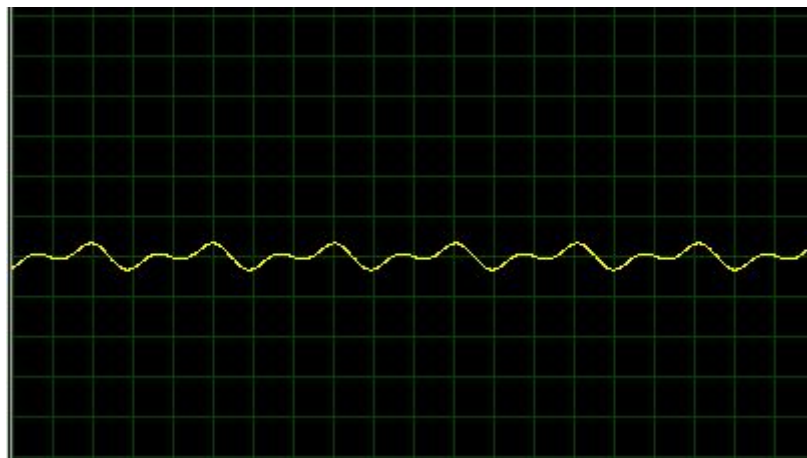


Figura 10. Salida con los primeros términos

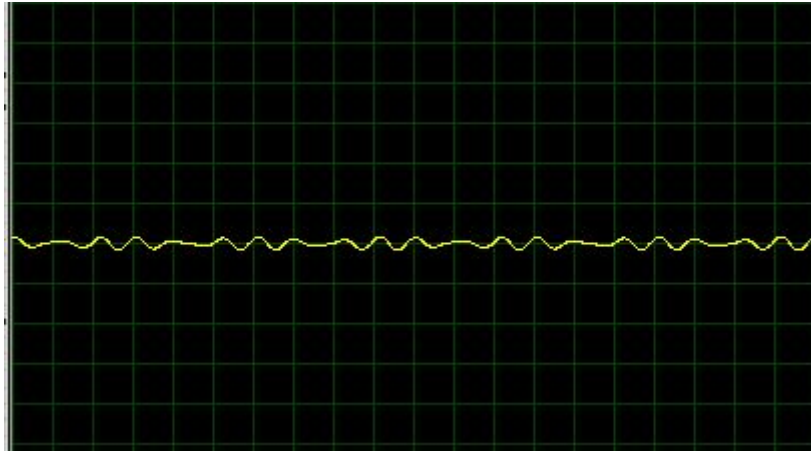


Figura 11. Salida con términos subsecuentes

Como podemos observar, los primeros términos, otra vez, trazan a grandes rasgos la señal original, y los últimos son los que refinan a la señal, de forma empírica, la mayoría de las señales que hemos graficado, cerca de los 100 términos de la suma crea una señal lo bastante parecida ante el ojo humano.

Actividad 3.5

Usando su creatividad, invente una forma de onda peculiar $h(t)$, desarrolle su serie exponencial de fourier. A partir de ella encuentre la serie trigonométrica, gráfiquela y repita las actividades 3.1 y 3.2

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{A}{T}t, 0 < t < T, f(t+T) = f(t), A = 1 \\
 A &= 2, T = 3 \\
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\
 \omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{3}\pi \\
 C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 C_n &= \frac{A}{T^2} \left(-\frac{t}{jn\omega} e^{-jn\omega t} \Big|_0^T - \int_0^T -\frac{1}{jn\omega} e^{-jn\omega t} dt \right) \\
 C_n &= \frac{A}{T^2} \left(-\frac{T}{jn\omega} e^{-jn\omega T} + 0 + \frac{1}{jn\omega} \int_0^T e^{-jn\omega t} dt \right) \\
 C_n &= \frac{A}{T^2} \left(-\frac{T}{jn\omega} e^{-jn\omega T} + \frac{1}{jn\omega} \left(-\frac{1}{jn\omega} e^{-jn\omega t} \right) \Big|_0^T \right) \\
 C_n &= \frac{A}{T^2} \left(-\frac{jT}{j^2 n^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)} e^{-2jn\pi} - \frac{1}{j^2 n^2 \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)} (e^{-2jn\pi} - 1) \right) \\
 C_n &= \frac{A}{T^2} \left(\frac{jT^2}{2n\pi} e^{-2jn\pi} + \frac{T^2}{4n^2\pi^2} (e^{-2jn\pi} - 1) \right)
 \end{aligned}$$

Figura 12. Desarrollo de onda peculiar

$$\begin{aligned}
 d_n &= \frac{A}{T^2} \left(\frac{i T^2}{2n\pi} e^{-2n\pi i} + \frac{T^2}{4n^2 \pi^2} (e^{-2n\pi i} - 1) \right) \\
 d_n &= \frac{iA}{2n\pi} e^{-2n\pi i} + \frac{A}{4n^2 \pi^2} (e^{-2n\pi i} - 1) \quad * e^{ix} = \cos x + i \sin x \\
 d_n &= \frac{iA}{2n\pi} (1) + \frac{A}{4n^2 \pi^2} (1 - 1) \quad e^{-2n\pi i} = \cos(-2n\pi) + i \sin(-2n\pi) \\
 &\quad e^{-2n\pi i} = 1 \\
 d_n &= \frac{iA}{2n\pi} \quad n \neq 0 \\
 \text{Calculando } d_0 & \\
 d_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t dt = \frac{A}{T^2} \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^T = \frac{A}{T^2} \left(\frac{T^2}{2} - 0 \right) = \frac{A}{2} \\
 d_n &= \frac{iA}{2n\pi} \quad n \neq 0 \\
 f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{iA}{2n\pi} e^{in \left(\frac{2\pi}{T} \right) t}
 \end{aligned}$$

Figura 13. Determinación serie exponencial

Convertirnos a Serie trigonométrica

$$\begin{aligned}
 a_0 &= d_0 & a_n &= 2 \operatorname{Re}\{c_n\} & b_n &= -2 \operatorname{Im}\{c_n\} \\
 a_0 &= \frac{A}{2} & a_n &= 2 \operatorname{Re}\left\{ \frac{iA}{2n\pi} \right\} & b_n &= -2 \operatorname{Im}\left\{ \frac{iA}{2n\pi} \right\} \\
 & & a_n &= 0 & b_n &= -\frac{A}{n\pi}
 \end{aligned}$$

Reescribiendo

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[0 \cos n\omega t + -\frac{A}{n\pi} \sin n\omega t \right] \\
 f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{A}{n\pi} \sin n \frac{2\pi}{T} t \right]
 \end{aligned}$$

Figura 14. Conversión a serie trigonométrica

Gráfico:

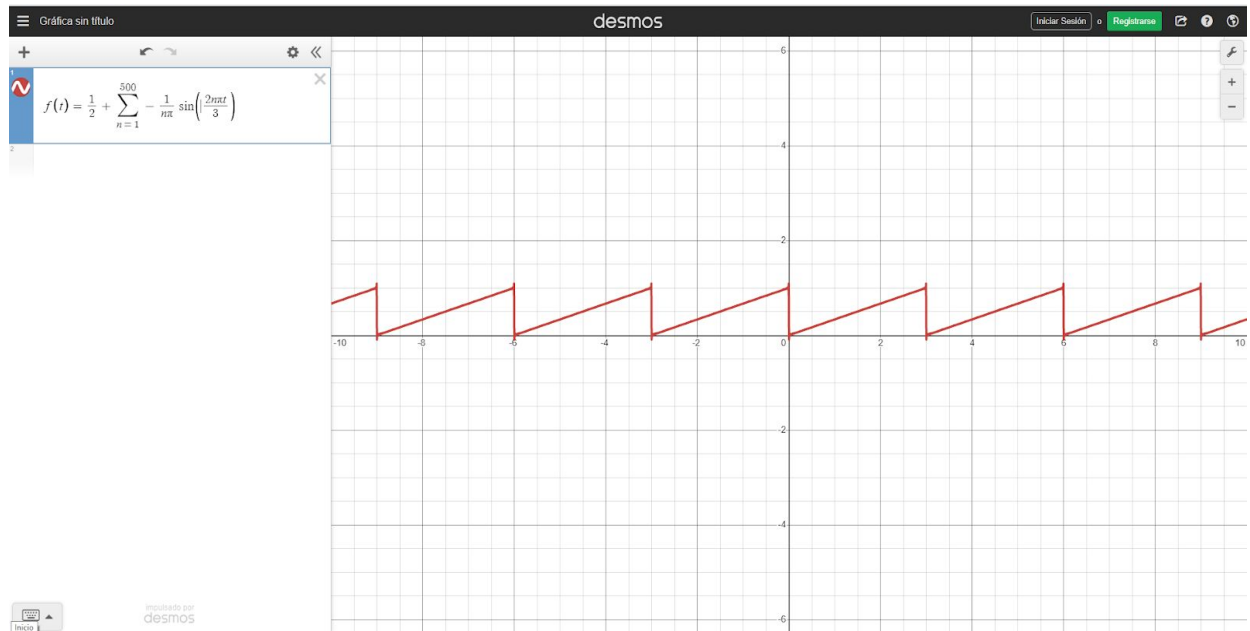


Figura 15. Graficación en desmos

Repetimos actividad 3.1

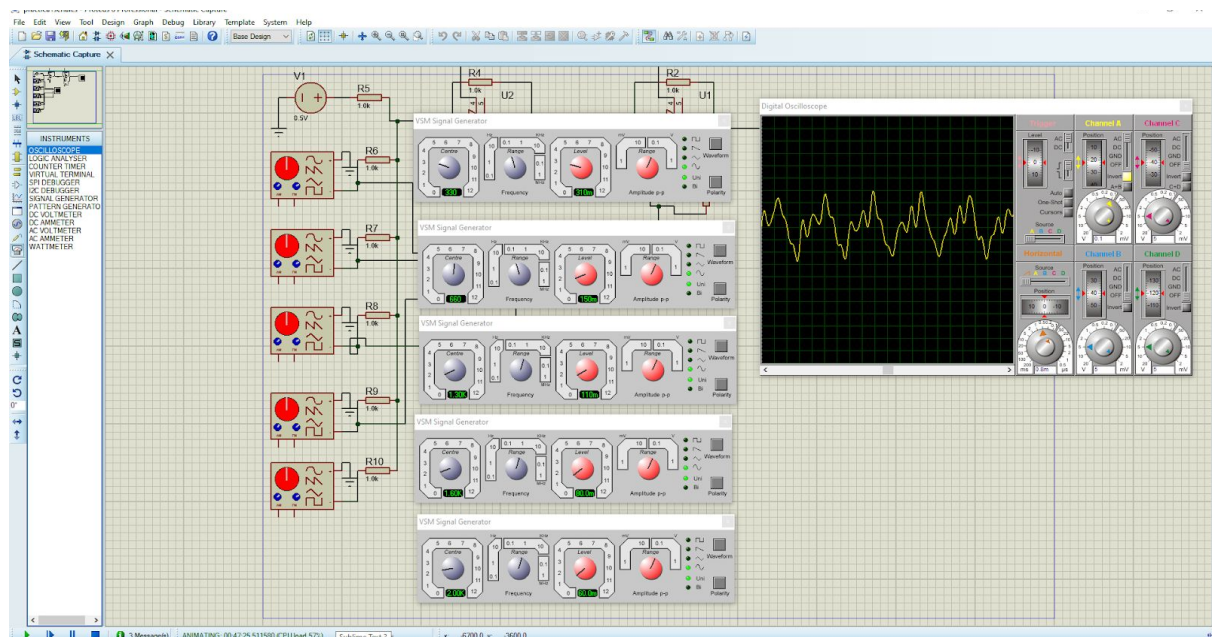


Figura 16. Salida de osciloscopio de serie trigonométrica

Repetimos actividad 3.2

Compare la señal del osciloscopio con la señal de la figura 1 y escriba sus conclusiones.

La función que obtuvimos de salida es similar a la que se graficó con desmos sin embargo podemos notar un desfase o fallos en la amplitud de la señal obtenida por el circuito, se requiere más puntos de la serie trigonométrica a evaluar para que se asemeje más a la gráfica de desmos aunque nos damos cuenta que el tamaño de amplitud y periodo si corresponde a la gráfica original.

Actividad 3.6

Si quisiera usar el concepto de Serie trigonométrica de Fourier para generar señales periódicas cuadradas, triangulares, dientes de sierra y de otro tipo, usando n fuentes de voltaje alterno. ¿Qué parámetro tendría que modificar en la serie trigonométrica de cada una de estas funciones para hacer ajustable el periodo de éstas?

Si se desea realizar señales periódicas que estén con formas cuadradas o triangulares, etc. Se debe de considerar tres parámetros importantes el primero es el periodo, después la frecuencia y por último la amplitud, con estos conceptos podemos hacer que la señal sea más grande, se repita en menos tiempo, sea más prolongada, la que jugará el papel importante en la modificación de la señal será la frecuencia ya que sabemos que la frecuencia es la velocidad a la que se repite el período de una señal debido a la modificación en la frecuencia el periodo aumenta o disminuye. La frecuencia se obtiene de despejar a w en la fórmula:

4. Conclusiones

Conclusión general

Se desarrolló de manera eficiente la simulación de la S.T.F. mediante el uso del software Proteus y Multisim, cumpliendo así el objetivo planteado al inicio. La limitación de componentes permitió observar una forma aproximada de la función en la *figura 1*. Y como recordamos, de forma empírica, si pudiéramos tener al menos unos 100 términos la señal se vería muy parecida, durante este proceso hemos podido aplicar los conocimientos vistos lo cual consideramos necesario ya que en el aspecto de desarrollo es parte esencial la práctica, quizás la situación es compleja como para hacer uso de los laboratorios de ESCOM, sin embargo los distintos software nos han ofrecido la posibilidad de tener simulación bastante aproximada a lo que se vería en la situación real.

Creemos que el procesamiento de señales es un amplio mar, es muy interesante el manejo de señales además de que se sigue desarrollando, por lo que creemos que se pueden hacer proyectos muy interesantes para el campo laboral en el cual quizás se pueda reinventar la forma de trabajo de las señales para que exista una menor pérdida de información o una mayor calidad en el procesamiento de las señales.

Conclusión individual

Conclusión Vargas Espino Carlos Hassan:

La pérdida de información está presente en el método de las señales, es ilustrador el conocer cómo se hace un procesamiento de una señal haciendo uso de la serie de fourier, he tenido la oportunidad de ver el procesamiento de señales de audio para el envío de mensajería y queda más claro el concepto técnico para convertir una variable externa y trabajarla, estoy emocionado por que es más complejo de lo que esperaba, supone un reto el adquirir este conocimiento técnico sin embargo pienso que las aplicaciones que se han desarrollado para acoplar señales son muy interesantes, no cabe duda de que es todo un mundo el procesamiento de señales.

Conclusión Martínez Coronel Brayan Yosafat:

No había tomado en cuenta que se podría hacer en el mundo real la verificación de la SFT, después de solo leer las instrucciones me quedó claro cómo lograrlo. Pero, estaba escéptico, porque, básicamente varios generadores de señales podrían hacer prácticamente cualquier señal muy aproximada. De no ser por el ruido de la naturaleza, podríamos crear una gama tan amplia de protocolos de comunicaciones, usar tales formas para ciertas cosas, no solo los hertz, sino mucho más allá.

Conclusión Arévalo Andrade Miguel Ángel:

En síntesis de lo expuesto anteriormente, podemos decir que en esta práctica se pone de manifiesto la aplicación de la S.T.F. en la vida real (o simulación en este caso), sentando así las bases para futuros proyectos más elaborados que requieran el análisis de señales, por mencionar algunas áreas tenemos, ingeniería eléctrica, análisis de vibraciones, acústica, óptica, procesamiento de señales, procesamiento de imágenes, mecánica cuántica, econometría, teoría de capas, etc.

5. Bibliografía

Fourier Series -- from Wolfram MathWorld. (s. f.). Wolfram. Recuperado 17 de marzo de 2021, de <https://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

Descargar Multisim. (s. f.). NI. Recuperado 18 de marzo de 2021, de <https://www.ni.com/es-mx/support/downloads/software-products/download.multisim.html>

J. Arzate Gordillo, *Conversión de Serie trigonométrica de Fourier a Serie Compleja de Fourier y viceversa*. 2021. <https://www.youtube.com/watch?v=1YjE0UFoywQ>

J. Arzate Gordillo, *Serie Compleja de Fourier de una función $f(t)$ periódica - ejemplo*. 2021. https://www.youtube.com/watch?v=gbJGcQUoS8o&ab_channel=JacquelineArzateGordillo