Se observa fácilmente que las raíces de la ecuación auxiliar de la última ecuación diferencial son 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2 y 5. En consecuencia

$$y = \boxed{c_1} + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \boxed{c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}} + c_7x^2e^{2x} + c_8x^3e^{2x} + c_9x^4e^{2x} + c_{10}e^{5x}. \tag{16}$$

Puesto que la combinación lineal $c_1 + c_5 e^{2x} + c_6 xe^{2x}$ puede tomarse como función complementaria de (15), los términos restantes en (16) proporcionan la forma de una solución particular de la ecuación diferencial:

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^2e^{2x} + Fx^3e^{2x} + Gx^4e^{2x} + He^{5x}.$$

■

Resumen del método

Para conveniencia del lector el método de coeficientes indeterminados se resume como sigue,

Coeficientes indeterminados-Enfoque aniquilador

La ecuación diferencial $L(y) = g(x)$ tiene coeficientes constantes y la función $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de constantes, polinomios, funciones exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos.

(i) Hallar la solución complementaria y_c para la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

(ii) Aplicar el operador diferencial L_1 en ambos miembros de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ que aniquila a la función $g(x)$.

(iii) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden superior $L_1L(y) = 0$.

(iv) Eliminar todos aquellos términos de la solución en el paso (iii) que están duplicados en la solución complementaria y_c hallada en el paso (i). Formar una combinación lineal y_p de los términos restantes. Esta es la forma de una solución particular de $L(y) = g(x)$.

(v) Sustituir la y_p encontrada en el paso (iv) en $L(y) = g(x)$. Igualar coeficientes de las diferentes funciones en cada lado de la igualdad y resolver el sistema de ecuaciones resultante para los coeficientes desconocidos en y_p.

(vi) Con la solución particular hallada en el paso (v), formar la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada.

EJERCICIOS 4.6

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 588

En los Problemas 1-32, resolver la ecuación diferencial dada por coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 9y = 54$

2. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

3. $y'' + y' = 3$
4. $y''' + 2y'' + y' = 10$
5. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$
6. $y'' + 3y' = 4x - 5$
7. $y''' + y'' = 8x^2$
8. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$
9. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$
10. $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$
11. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$
12. $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$
13. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$
14. $y'' + 4y = 4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x - 8$
15. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$
16. $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$
17. $y'' - y = x^2e^x + 5$
18. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$
19. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$
20. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$
21. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$
22. $y'' + y = 4 \cos x - \operatorname{sen} x$
23. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$
24. $y'' + 4y = \cos^2 x$
25. $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$
26. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$
27. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$
28. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
29. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$
30. $y^{(4)} - 4y'' = 5x^2 - e^{2x}$
31. $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$
32. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 2 \cosh x - 6$

En los Problemas 33-40, resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

33. $y'' - 64y = 16, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
34. $y'' + y' = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
35. $y'' - 5y' = x - 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$
36. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
37. $y'' + y = 8 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi/2) = -1, y'(\pi/2) = 0$
38. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5, \quad y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$
39. $y'' - 4y' + 8y = x^3, \quad y(0) = 2, y'(0) = 4$
40. $y^{(4)} - y''' = x + e^x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0$

En los Problemas 41 y 42, determinar la forma de una solución particular para la ecuación diferencial dada.

41. $y'' - y = e^x(2 + 3x \cos 2x)$
42. $y'' + y' = 9 - e^{-x} + x^2 \operatorname{sen} x$

43. Demostrar que el operador $(xD - 1)(D + 4)$ es diferente del operador $(D + 4)(xD - 1)$.

44. Demuestre que la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = k,$$

k, una constante, $a_0 \neq 0$, tiene la solución particular $y_p = k/a_0$.