TAREA 7

EJERCICIOS Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de 1er Orden.

Mecánica (ejercicios básicos para aflojar y calentar brazo)

1. Una roca que se desprende de una saliente de una montaña desciende en caída libre. Si la masa de la roca es de 50Kg. ¿ qué velocidad adquiere después de 10 segundos si aún no toca el suelo? **respuesta 98.1m/s**
2. Un martillo cae desde lo alto de un muro de 3 metros de altura. Si su masa es de 5 Kg,¿con qué velocidad llega al suelo? $(g = 9.81 m/s^2)$ **respuesta 7.65m/s**
3. Un tapón de sidra es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 85 m/s. ¿Cuál será su velocidad a una altura de 1.5m? **respuesta 84.80m/s**
4. Un cuerpo cae con una velocidad inicial de 500ft/s al estar sometido a la aceleración de la gravedad $(32 ft/s^2)$ ¿Cuánto ha caído después de 3 segundos? **respuesta 1644ft.**
5. Una masa de 25 g cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad. (a) Establezca una ecuación diferencial y condiciones para el movimiento. (b) Encuentre la distancia viajada y la velocidad conseguida 3 segundos después de empezar su movimiento. (c) ¿Cuánta distancia recorre la masa entre el 3° y 4° segundo? ¿entre el 4° y 5° segundo? **respuesta (b) 4.410cm, 490cm/s. (c) 3.430cm, 4.410cm.**
6. Una partícula se mueve a lo largo del eje x estimulada solamente por una fuerza opuesta proporcional a su velocidad instantánea. La partícula empieza en el origen con una velocidad de 10 ft/s, la cual se reduce a 5 ft/s después de moverse 2.5 ft. Encuentre su velocidad cuando esté a 4 ft del origen. **respuesta 2ft/s.**
7. Un paracaidista y su paracaídas pesan 200 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a 40ft/s . Si la resistencia del aire varía directamente proporcional a la velocidad instantánea y la resistencia del aire es de 80 lb cunado la velocidad es de 20ft/s: (a) Encuentre la velocidad límite. (b) Determine la posición y la velocidad a cualquier tiempo. **respuesta** (a) 50ft/s. (b) $x = 50t + \frac{125}{8}e^{-0.64t} - \frac{125}{8}$, $v = 50 - 10e^{-0.64t}$.

   cuando

8. La fuerza de resistencia del agua que actúa sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea, y es tal que a 20ft/s la resistencia del agua es de 40 lb. Si el bote pesa 320 lb y el único pasajero pesa 160 lb, y si el motor puede ejercer una fuerza estable de 50 lb en la dirección del movimiento: (a) Encuentre la máxima velocidad a la cual el bote puede viajar. (b) Encuentre la distancia recorrida y la velocidad a cualquier tiempo, asumiendo que el bote parte del reposo. **respuesta** (a) 25 ft/s. (b) $x = 25t + \frac{375}{2}e^{-2t/15} - \frac{375}{2}$, $v = 25(1 - e^{-2t/15})$.
9. Una masa de 200 g se lanza hacia arriba con una velocidad de 2450 cm/s, (a) Encuentre las distancias desde el punto de partida y las velocidades conseguidas 2 y 4 segundos después de empezar el movimiento. (b) Encuentre el punto más alto alcanzado y el tiempo requerido. (c) ¿Cuáles son las distancias totales recorridas después de 2 segundos? ¿después de 4 segundos? **respuesta (a)** 2940cm, 490

cm/s hacia arriba después de 2 segundos. 1960 cm, 1470 cm/s hacia abajo después de 4 segundos. **(b)** 3062.5cm por encima del punto inicial (asumiendo $g = 980 cm/s^2$) y las respuestas con una precisión de al menos cinco cifras significativas), 2.5 segundos. **(c)** 2940cm, 4165cm.

Los siguientes problemas son de mayor grado de dificultad

1. Muestre que una bola lanzada verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 toma para regresar el doble del tiempo requerido para alcanzar su punto más alto. Encuentre la velocidad al regreso. La resistencia del aire se asume despreciable.
2. Un cuerpo se mueve en una línea recta con aceleración constante a. Si v_0 es la velocidad inicial, v la velocidad, y s la distancia viajada después de un tiempo t, muestre que:

$$(a)\, v = v_0 + at. \qquad (b)\, s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (c)\, v^2 = v_0{}^2 + 2as.$$

3. Una masa m se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0. La resistencia del aire es proporcional a su velocidad instantánea, siendo k la constante de proporcionalidad. Muestre que la máxima altura conseguida es

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right).$$

4. Un paracaidista y su paracaídas pesan W lb. Cuando el paracaídas se abre él está viajando verticalmente hacia abajo a v_0 ft/s. Si la fuerza de resistencia del aire varia proporcionalmente al cuadrado de la velocidad instantánea y si la resistencia del aire es F lb, donde la velocidad es V ft/s: (a) Escriba las ecuaciones diferenciales para la velocidad y el desplazamiento como una función del tiempo. (b) Encuentre la velocidad t segundos después de abrirse el paracaídas y la velocidad limite. ¿Qué simplificaciones resultaran si $v_0 = 0$? (c) Encuentre la velocidad como una función de la distancia recorrida. **Respuesta**

(a) $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{Fg}{V^2 W} v^2 = g$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{Fg}{V^2 W}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = g$

(b) $v = p\left[\dfrac{(p+v_0)e^{\alpha t} - (p - v_0)}{(p+v_0)e^{\alpha t} + (p - v_0)}\right]$ donde $p = V\sqrt{\dfrac{W}{F}}$, $\alpha = \dfrac{2g}{V}\sqrt{\dfrac{F}{W}}$, velocidad limite $= p = V\sqrt{\frac{W}{F}}$. Si $v_0 = 0, v = p\left[\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}\right] = p\tanh\frac{\alpha t}{2}$ usando funciones hiperbólicas.

(c) $v = \sqrt{p^2 - (p^2 - {v_0}^2)e^{-2kx}}$ donde $p = V\sqrt{\frac{W}{F}}$, $k = \frac{Fg}{WV^2}$.

5. Un objeto con peso de 1000 lb se hunde en agua empezando desde el reposo. Dos fuerzas actúan sobre él, una fuerza de flotación de 200 lb, y una fuerza de resistencia del agua la cual es numéricamente igual a $100v$ lb, donde v está en ft/s. Encuentre la distancia recorrida después de 5 segundos y su velocidad limite. **respuesta** $37.5 ft$, $8 ft/s$.

6. Un objeto de 10 lb se deja caer verticalmente hacia abajo desde una cima muy alta. La ley de resistencia en el sistema pls está dada por $0.001v^2$, donde v es la velocidad instantánea. Determinar (a) la velocidad como una función de la distancia, (b) la velocidad como una función del tiempo, (c) la velocidad del objeto después de haber caído 500 pies, (d) la velocidad límite, (e) la distancia recorrida después de 10 segundos. **respuesta** (a) $v = 100\sqrt{1-e^{-0.0064x}}$ (b) $v = 100\left(\frac{e^{0.64t}-1}{e^{0.64t}+1}\right) = 100\tanh(0.32t)$ (c) $97.9 ft/s$ (d) $100 ft/s$ (e) 784ft.

7. Una partícula se mueve en una línea recta hacia un punto fijo O en la línea con una velocidad instantánea proporcional a la n-ésima potencia de sus distancia instantánea de O. (a) Muestre que si $n \geq 1$ la partícula nunca alcanzará O. (b) Discuta los casos de $n < 1$.

8. Cuando una bola se lanza hacia arriba, ésta alcanza una altura particular después de un tiempo T_1 cuando asciende y en el tiempo T_2 cuando desciende. (a) Asumiendo que la resistencia del aire es despreciable, muestre que la altura está dada por $\frac{1}{2}gT_1T_2$. (b) ¿Cómo se puede usar este resultado para medir la altura de un árbol sin subirse a él?

9. Muestre que la bola en el ejercicio 8 fue lanzada hacia arriba con una velocidad de $\frac{1}{2}g(T_1+T_2)$.

10. ¿Cuánto tiempo tomará para solo deslizar una cadena de longitud L sobre una mesa sin fricción si inicialmente una parte de ella de longitud α cuelga sobre el lado? **respuesta** $\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-\alpha^2}}{\alpha}\right)$.

11. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza dada por $F(x)$. Si v es la velocidad instantánea, muestre que

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E$$

donde E es una constante y

$$V(x) = \int_x^a F(u)du$$

asumiendo que a es tal que $V(a) = 0$. El resultado se conoce como el *principio de conservación de la energía,* donde $\frac{1}{2}mv^2$ se llama energía cinética. $V(x)$ la energía potencial y E la energía total.

Problemas reto.
Ahora los siguientes problemas son apropiados para los exámenes.

1. Un peso de 100 lb se desliza hacia abajo desde el reposo en un plano inclinado (ver figura 1) el cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Asumiendo la ausencia de fricción: (a) Establesca la ecuación diferencial y condiciones que describen el movimiento. (b) ¿Qué distancia recorrerá el peso 5 segundos después de empezar y cuál será su velocidad y aceleración en ese instante?(*Sugerencia* : Descomponga la fuerza debida al peso en dos componentes, una paralela y otra perpendicular al plano. La componente P paralela al plano es la fuerza neta que produce el movimiento.)

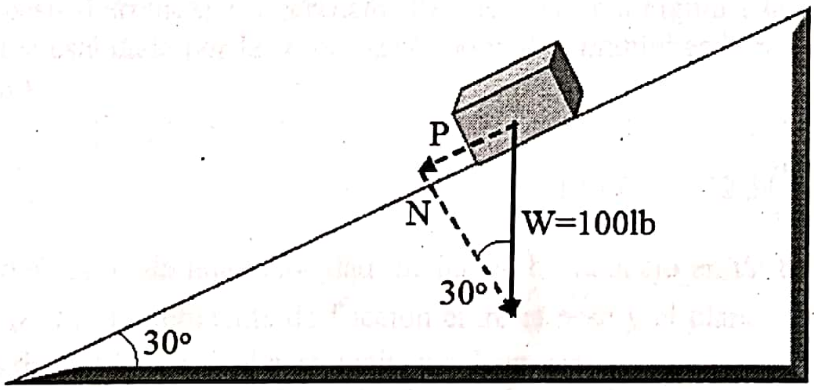

Figura1

Solución

$$(b)\ 200 pies, 80\frac{pies}{seg}, 16\frac{pies}{seg^2}$$

2. Muestre que un peso W , dada una velocidad inicial v_0, se desliza una distancia s hacia abajo por un plano inclinado sin fricción de inclinación α en el tiempo

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

Scanned by CamScanner

$$\frac{\sqrt{v_0{}^2 + 2gs(sen\alpha)} - v_0}{gsen\alpha}.$$

3. Un objeto de masa m se lanza hacia arriba por un plano con inclinación α. Asumiendo que no hay fricción, muestre que la máxima distancia alcanzada es

$$\frac{v_0}{2gsen\alpha}$$

4. Si se tiene en cuenta que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea (constante de proporcionalidad k), muestre que el objeto en el ejercicio 3, alcanza una distancia máxima hacia arriba en el plano inclinado dada por

$$\frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} sen\alpha \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mgsen\alpha}\right).$$

Verifique que esta distancia tiende a la del ejercicio 3 a medida que $k \to 0$.

5. Un peso de 100 lb parte del reposo hacia abajo por un plano con 30° de inclinación. Si el coeficiente de fricción entre el peso y el plano es 0,2 ¿qué distancia bajará el peso después de 5 seg? Encuentre su velocidad y aceleración en ese instante (asuma que el peso sí arranca). (*Sugerencia:* Refiriéndose a la Figura 1 la fuerza de fricción que actúa está dada por la componente normal *N* multiplicada por el coeficiente de fricción.)

Solución.

$$130.8 pies, 52.3\frac{pies}{seg}, 10.5\frac{pies}{seg^2}$$

6. Un peso W se le da una velocidad inicial v_0 hacia abajo en un plano inclinado de ángulo α. Si el coeficiente de fricción entre el peso y el plano es μ, muestre que después de un tiempo T el peso viaja una distancia.

$$v_0 T + \frac{1}{2}(gsen\alpha - \mu g\cos\alpha)T^2 \quad si \tan\alpha > \mu.$$

7. De acuerdo a la teoría especial de la relatividad de Einstein, la masa de una partícula varía con su velocidad v de acuerdo a la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz (186000 millas/s).

La ecuación diferencial del movimiento es

$$F = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Si una partícula parte del reposo en *t=0* y se mueve en una línea recta estimulada solo por una fuerza constante *F*, ¿qué distancia cubrirá y cuál será su velocidad en tiempo *t*? Muestre que a medida que transcurre el tiempo, la velocidad de la partícula se acerca a la velocidad de la luz.

Solución.

$$r = \frac{cFt}{\sqrt{F^2t^2 + m_0^2c^2}}, \; x = \frac{c}{F}\sqrt{F^2t^2 + m_0^2c^2} - \frac{m_0c^2}{F}$$

8. Un objeto con una masa en el reposo m_0 de 10.000g se mueve en el eje x bajo una fuerza constante de 50.000 dinas. Si empieza del reposo en *x=0* en tiempo *t=0*, determine dónde estará en cualquier tiempo asumiendo: (a) La masa del objeto es constante e igual a m_0. (b) La masa varía de acuerdo a la ley de la relatividad especial.

Solución.

$$(a)\; x = \frac{5}{2}t^2. \quad (b)\; x = \frac{c^2}{5}\left(\sqrt{1 + 25t^2/c^2} - 1\right)$$

9. Objetos que parten del reposo caen sin fricción a lo largo de cuerdas de un círculo vertical terminan todos en el punto más bajo. Muestre que ellos alcanzan el punto en el mismo tiempo.

10. ¿El resultado del Ejercicio 9 es cierto si el círculo está inclinado a un ángulo con la vertical? Explique.

11. ¿Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba y si la resistencia del aire está presente, tomará para regresar al punto de partida un tiempo igual al doble del requerido para alcanzar su punto más alto? Explique (vea Ejercicio 1. de los de Mayor Grado de Dificultad)

12. ¿En el Ejercicio 11 la velocidad de retorno del objeto será la misma a la cual es lanzado? Explique.

13. Un satélite gira en una órbita circular actuado sólo por una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. (a) Si la velocidad es v_0 en tiempo $t=0$ y v_1 en el tiempo $t=T_1$ muestre que la velocidad en cualquier tiempo es

$$v = \frac{v_0 v_1 T_1}{v_1 T_1 + (v_0 - v_1)t}$$

(b) Muestre que el número de revoluciones hechas entre los tiempos $t=0$ y $t=T_1$ es

$$\frac{v_0 v_1 T_1}{\pi(v_0 - v_1)} \ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right)$$

(c) Muestre que aunque la velocidad se mantiene decreciendo el satélite gira indefinidamente.

(d) ¿Piensa usted que el problema representa una situación física posible? Explique.

14. Trabaje el Ejercicio 13 si la fuerza de resistencia es proporcional a la n-ésima potencia de la velocidad instantánea y examine el caso especial donde $n=3$?

15. Trabaje el Ejercicio 10 de los de mayor grado de dificultad, si la mesa está inclinada un ángulo α con la horizontal y el segmento de longitud α cuelga sobre el lado más alto. ¿Hay alguna restricción en α? Explique.

Solución.

$$\sqrt{\frac{L}{g(1+sen\alpha)}} \ln\left\{\frac{L+\sqrt{L^2-[a+(a-L)sen\alpha]^2}}{a+(a-L)sen\alpha}\right\}; sen\alpha \langle \frac{a}{L-a}$$

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

EJERCICIOS

Trayectorias Ortogonales (ejercicios básicos para aflojar y calentar brazo)

1. La ecuación $y^2 = cx$ define una familia de parábolas. (a) Encuentre una ecuación diferencial para la familia. (b) Encuentre una ecuación diferencial para las trayectorias ortogonales y resuelva. (c) Grafique varios miembros de cada familia en el mismo conjunto de ejes.

   Solución.

   $(a)\ 2xy' = y, \quad (b)\ yy' = -2x, 2x^2 + y^2 = c_1$

2. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia $y^3 = cx^2$ y dibuje un gráfico de las familias.

   Solución.

   $3x^2 + 2y^2 = c_1$

3. Determine las trayectorias ortogonales de cada familia y encuentre miembros particulares de cada una que pasen por los puntos indicados.

   $(a)\ x^2 + cy^2 = 1;\ (2,1).$ $\quad (b)\ x^2 = cy + y^2;\ (3,-1)$ $\quad (c)\ y = c\tan 2x + 1;\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$

   $(d)\ y = ce^{-2x} + 3x;\ (0,3)$ $\quad (e)\ y^2 = c(1+x^2);\ (-2,5)$

   Solución.

   $$(a)\ e^{x^2+y^2} = c_1x^2;\ x^2 - 3y^2 = 1,\ 4e^{x^2+y^2-5} = x^2$$
   $$(b)\ x^3 + 3xy^2 = c_1;\ x^2 + 8y = y^2,\ x^3 + 3xy^2 = 36$$
   $$(c)\ 4y^2 - 8y + sen^2 2x = c_1;\ y = 1 - \tan 2x,\ 8y^2 - 16y + 2sen^2 2x = 1$$
   $$(d)\ 9x - 3y + 5 = c_1e^{-6y};\ y = 3e^{-2x} + 3x,\ 9x - 3y + 5 = -4e^{6(3-y)}$$
   $$(e)\ e^{-x^2-y^2} = c_1x^2;\ y^2 = 5(1+x^2),\ 4e^{29-x^2-y^2} = x^2$$

4. Muestre que las familias $x^2 + 4y^2 = c_1$ y $y = C_2x^4$ son ortogonales

Los siguientes problemas son de mayor grado de dificultad

1. Encuentre la constante α para que las familias $y^3 = c_1x$ y $x^2 + \alpha y^2 = c^2$ sean ortogonales.

   Solución.

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

2. Muestre que la familia de parábolas $y^2 = 4cx + 4c^2$ es así mismo ortogonal. Grafique algunos miembros.

3. Determine las trayectorias ortogonales de
$(a)\ x^p + cy^p = 1;\ p = constante,\quad (b)\ x^2 + cxy + y^2 = 1.$

Solución.

$$(a)\ y^2 = \frac{2x^{2-p}}{2-p} - x^2 + c_1\ \ si\ p \neq 2;\ e^{x^2+y^2} = c_1 x^2\ \ si\ p = 2$$

$$(b)\ x^2 - y^2 = c_1 e^{x^2+y^2}$$

Problemas reto.
Ahora los siguientes problemas son apropiados para los exámenes.

1. Determine la familia de curvas en la cual cada uno de sus miembros corta a cada miembro de la familia de líneas rectas $y = mx$ a un ángulo de *45°*.

Solución.

$2\tan^{-1}(y/x) + \ln(x^2 + y^2) = c$, o en coordenadas polares $r = \alpha\, e^{-\phi}$

2. Determine la curva que pasa por $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3/2}\right)$ y corta cada miembro de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ a un ángulo de *60°*.

Solución.

$\ln(x^2 + y^2) \pm 2\sqrt{3}\tan^{-1}(y/x) = \pm 2\pi\sqrt{3}/3$ *o* $r = e^{\pm\sqrt{3}(\phi - \pi/3)}$

3. Encuentre todas las curvas que cortan la familia $y = ce^x$ a un ángulo α constante.

Solución.

$$\pm\, y\tan\alpha + \sec^2\alpha\,\ln|y \mp \tan\alpha| = x + c_1$$

4. Muestre que si una ecuación diferencial de una familia de curvas en coordenadas polares (r, φ) está dada por

$$\frac{dr}{d\varphi} = F(r, \varphi)$$

entonces a ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r^2}{F(r,\varphi)}$$

(Sugerencia: Use el resultado del cálculo elemental que en coordenadas polares la tangente del ángulo formado por el radio vector y la línea tangente a la curva es *(r dφ/dr)*.

5. Encuentre las trayectorias ortogonales de $r = c\cos\phi$ y grafique.

Solución.

$r = c_1 sen\phi$

6. Determine las trayectorias ortogonales de las espirales $r = e^{r\phi}$.

Solución.

$(\ln r)^2 + \phi^2 = c_1$

7. Encuentre las trayectorias ortogonales de la cardioide $r = c(1-\cos\phi)$.

Solución.

$r = c_1(1+\cos\phi)$

8. Sea $F(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ donde $z = x + i\,y$ y las funciones *u (x, y)* y *v (x, y)* son reales. (a) Encuentre *u (x, y)* y *v (x, y)* correspondiente a $F(z)=z^2$ y muestre que las familias $u(x, y)= c_1$ y $v(x, y)= c_2$ son ortogonales. (b) Trabaje parte (a) para las funciones $F(z)=z^3$ y $F(z)=2x^2-iz-3$. (c) ¿Piensa usted que los resultados indicados para estos casos especiales se cumplen en general? Explique (compare con Ejercicio 4. de los Ejercicios reto).

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

EJERCICIOS

Crecimiento y Decrecimiento de poblaciones. Ley de enfriamiento de Newton.

1. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años, ¿Cuánto demorará en triplicarse? ¿Cuánto demorará en cuadruplicarse?
Solución. *7.9* años

2. Suponga que se sabe que la población de la población de la comunidad del Problema 1 es de 10 000 habitantes después de 3 años. ¿Cuál será la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?

3. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?
Solución. *760*

4. La cantidad de bacterias de un cultivo crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de ellas que haya en dicho instante. Después de 3 horas se observa que se tiene 400 bacterias, y que al cabo de 10 horas hay 2 000. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

5. El isótopo radiactivo de plomo, Pb 209, se desintegra, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante, y tiene una semivida (o periodo medial) de 3.3 horas. Si inicialmente hay 1 gramo de plomo, ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que se desintegre el 90% de dicho elemento?
Solución. *11* horas

6. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva, después de 6 horas la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad de sustancia en dicho instante, halle la cantidad que queda después de 24 horas.

7. Determine la semivida de la sustancia radiactiva descrita en el Problema 6.
Solución. *136.5* horas

8. Demuestre en forma general que la semivida de una sustancia radiactiva es

$$t = \frac{(t_2 - t_1)\ln 2}{\ln(A_1 / A_2)},$$

en donde $A_1 = A(t_1)$ y $A_2 = A(t_2)$, $t_1 < t_2$.

9. Un termómetro que está en el interior de una habitación se lleva al exterior, en donde la temperatura del aire es de 5°F. Después de un minuto el termómetro marca 55°F y después de 5 minutos marca 30°F. ¿Cuál es la temperatura inicial de la habitación?

10. Un termómetro se saca de una habitación, en donde la temperatura del aire es de 70°F, al exterior, en donde la temperatura es de 10°F. Después de $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro marca 50°F. ¿Cuánto marca el termómetro cuando $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los 15°F?
Solución. $T(1)=36.67$ grados, aproximadamente 3.6 minutos

11. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea se obtiene también la fórmula de la ley de enfriamiento de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20°C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los 90°C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en un segundo. ¿Cuánto demorará la barra en alcanzar los 98°C?

12. En cierto modelo que representa la variación de la población de la población $P(t)$ de una comunidad, se supone que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt},$$

en donde dB/dt y dD/dt son las tasas de natalidad y de mortalidad, respectivamente.

(a) Obtenga el $P(t)$ si

$$\frac{dB}{dt} = k_1 P \quad y \quad \frac{dD}{dt} = k_2 P.$$

(b) Analice los casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$.

Solución. (a) $P(t) = P_0 e^{(k_1 - k_2)t}$

(b) $k_1 > k_2$; los nacimientos sobrepasan a los fallecimientos de modo que la población aumenta.

$k_1 = k_2$; población constante puesto que el número de nacimientos es igual al de defunciones.

$k_1 < k_2$; los fallecimientos sobrepasan a los nacimientos, y así la población disminuye.

13. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (k \cos t) P,$$

donde k es una constante positiva, se usa frecuentemente como modelo para una población que sufre fluctuaciones estacionales anuales. Despeje $P(t)$ y grafique la solución. Suponga que $P(0)=P_0$.

14. Cuando se hacen estudios acerca del olvido, la tasa de memorización de una persona está dada por

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2 A,$$

donde $k_1 > 0, k_2 > 0$, $A(t)$ es la cantidad de material memorizada en un tiempo t, M es la cantidad total a memorizar, y *M-A* es la cantidad que queda por memorizar. Resuelva la ecuación para evaluar *A(t)* y grafique la solución. Suponga que *A(0) = 0.* Obtenga el valor límite de A cuando $t \to \infty$ e interprete el resultado.

15. El número de personas *N(t)* de una comunidad que verán cierto aviso publicitario se rige por la ecuación logística. Inicialmente *N(0)= 500* y se observa que *N(1)= 1000.* Si se predice que el número límite de personas de la comunidad que verán el aviso es 50 000, determine *N(t)* en un instante cualquiera.

16. La población *P(t)* de una suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7} P), \quad P(0) = 5000,$$

en donde t se mide en meses. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?

Solución. *1,000,000; 52.9* meses

17. Encuentre una solución de la **ecuación logística modificada**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)(1 - cP^{-1}), \quad a, b, c > 0.$$

18. (a) Resuelva la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln P).$$

(b) Si *P(0)= P₀*, determine el valor de c en la ecuación

$$P(t) = e^{a/b} e^{-ce^{-bt}}$$

Solución. (a) Separando las variables se obtiene

$$\frac{dP}{p(a - b\ln P)} = dt$$

de modo que

$$-(1/b)\ln|a - b\ln P| = t + c_1$$

$$a - b\ln P = c_2 e^{-bt} \qquad (e^{-bc_1} = c_2)$$

$$\ln P = (a/b) - ce^{-bt} \qquad (c_2 / b = c)$$

$$P(t) = e^{a/b} \bullet e^{-ce^{-bt}}$$

(b) Si $P(0)=P_0$, entonces

$$P_0 = e^{a/b} e^{-c} = e^{a/b-c}$$

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

y así

$$\ln P_0 = (a/b) - c$$
$$c = (a/b) - \ln P_0.$$

EJERCICIOS

Circuitos Eléctricos (ejercicios básicos para aflojar y calentar brazo)

1. En *t=0* una fem de 20 voltios se aplica a un circuito consistente de un inductor de 2 henrios en serie con una resistencia de 40 ohmios. Si la corriente es cero es *t=0*, ¿cuál es en cualquier tiempo $t \geq 0$?

   Solución.
   $$I = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-20t}\right)$$

2. Trabaje el ejercicio anterior si la fem es 100 sen (10t).

   Solución.
   $$I = 2\,sen 10t - \cos 10t + e^{-20t}$$

3. Una resistencia de 20 ohmios y un inductor de 5 henrios se conectan en serie en un circuito eléctrico en el cual hay un flujo de corriente de 20 amperios en tiempo *t=0*. Encuentre la corriente para $t \geq 0$ si la fem es 0 para $t > 0$.

   Solución.
   $$I = 20e^{-4t}$$

4. Un condensador de $5X10^{-3}$ faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de 50 voltios. El interruptor se cierra en *t=0*. Asumiendo que la carga en el condensador es cero en *t=0*, determine la carga y la corriente en cualquier tiempo.

   Solución.
   $$Q = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-8t}\right),\ I = 2e^{-8t}$$

5. Trabaje el ejercicio anterior si la fem es de $50\cos 6t,\ t \geq 0$.

   Solución.
   $$Q = 0.16\cos 6t + 0.12\,sen 6t - 0.16e^{-8t},$$
   $$I = 0.72\cos 6t - 0.96\,sen 6t + 1.28e^{-8t}$$

6. Un circuito consiste de una resistencia de 10 ohmios y un condensador de 0.01 faradios en serie. La carga en el condensador es de 0.05 culombios. Encontrar la carga y la corriente en tiempo t después de cerrar el interruptor.

Solución.

$$Q = 0.05e^{-10t}\,,\ I = -0.5e^{-10t}$$

7. Una resistencia de 4 ohmios y un inductor de un henrio se conecta en serie con un voltaje dado por $100e^{-4t}\cos 50t\,,\ t \geq 0$. Encontrar *I(t)* si *I=0* en *t=0.*

Solución.

$$I(t) = 2e^{-4t}\,sen\,50t$$

8. Una resistencia de 20 ohmios se conecta en serie con un condensador de 0.01 faradios y una fem en voltios dada por $40e^{-3t} + 20e^{-3t}$. Si *Q=0* en *t=0,* muestre que la caída máxima en el condensador es de 0.25 coulombios.

Los siguientes problemas son de mayor grado de dificultad

1. Un circuito consiste de una resistencia constante de R ohmios en serie con una fem constante de E voltios y una inductancia constante de L henrios. Si la corriente inicial es cero, muestre que la corriente crece a la mitad de su valor teórico máximo en *(L ln 2)/R* segundos.

2. Una fem de $E_0 \cos \omega t$ voltios, donde E_0, ω son constantes, se aplica en *t=0* a un circuito en serie consistente de *R* ohmios y *C* faradios, donde *R* y *C* son constantes. Si *Q=0* en *t=0,* muestre que la carga en *t>0* es

$$Q = \frac{CE_0}{R^2C^2\omega^2 + 1}(\cos \omega t + \omega RC\, sen\, \omega t - e^{-t/RC})$$

3. Una resistencia de R ohmios varía con el tiempo t (segundos) de acuerdo a $R = 1 + 0.01t\,,\ 0 \leq 1.000.$ Se conecta en serie con un condensador de 0.1 faradios y una fem de 100 voltios. La carga inicial en ese condensador es de 5 culombios. Encuentre (a) la carga y la corriente como una función del tiempo, (b) la carga máxima teórica.

Solución.

$$(a)\ Q = 10 - 5(1 + 0.01t)^{-1.000}\,,\ I = 50(1 + 0.01t)^{-1.001} \quad (b)\ 10\,columbios$$

4. Un inductor de L henrios varía con el tiempo t (segundos) de acuerdo a $L = 0.05 + 0.001t\,,\ 0 \leq t \leq 1.000.$ Se conecta en serie con una fem de 40 voltios y una resistencia de 10 ohmios. Si *I=0* en *t=0*, encuentre (a) *I(t), t>0;* (b) la corriente máxima teórica.

Solución.

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

$$(a)\ I(t) = 4 - 4(1+0.02t)^{-10.000} \quad (b)\ 4\,amp$$

5. Un circuito tiene R ohmios C faradios, y E voltios en serie con un interruptor, siendo R, C, E constantes. La carga inicial en el condensador es cero. Si el interruptor está cerrado hasta que la carga se al 99 por ciento de su máximo teórico y luego E se reduce repentinamente a cero, encuentre Q de ahí en adelante.

Solución.

$$Q = 0.99CEe^{-tRC}$$

Problemas reto.

Ahora los siguientes problemas son apropiados para los exámenes.

1. Un inductor de 0.1 henrios, una resistencia de 10 ohmios y una fem de *E(t)* voltios, donde

$$E(t) = \begin{cases} 10, & 0 \langle t \leq 5 \\ 0, & t \rangle 5 \end{cases}$$

se conecta en serie. Encuentre la corriente *I(t),* asumiendo *I(0)=0.*

Solución.

$$I(t) = \begin{cases} 1-e^{-100t}, & 0 \leq t \leq 5 \\ (1-e^{-500})e^{-100(t-5)}, & t \geq 5 \end{cases}$$

2. Una fem periódica *E(t)* mostrada gráficamente en la Figura 2 se aplica en *t=0* a un circuito consistente de *R* ohmios y *C* faradios en serie, donde *R* y *C* son constantes. Encuentre la carga cuando *t=4T*, asumiendo que en *t=0* la carga es cero.

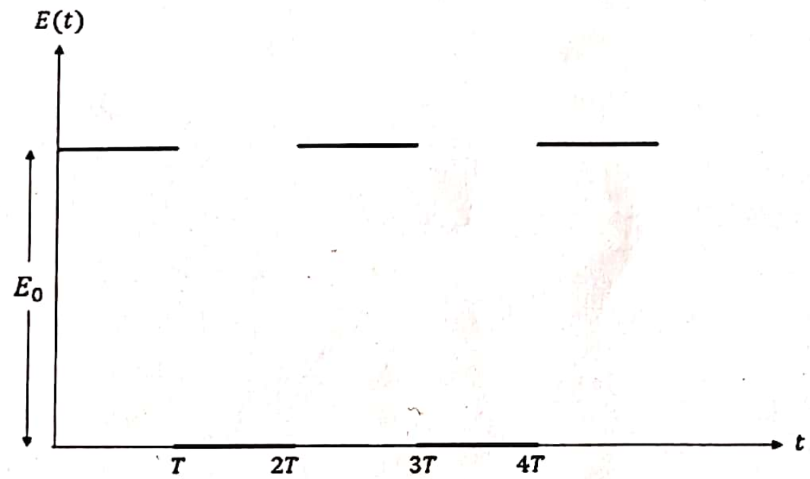

Figura 2

Solución.

$$Q = CE_0(e^{-T/RC} - e^{-2T/RC} + e^{-3T/RC} - e^{-4T/RC})$$

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez

3. Una fem $E_0 \cos \omega t,\ t \geq 0$ se aplica a un circuito consistente de L henrios y R ohmios en serie. Las cantidades E_0, ω, L, R son constantes dadas. Si la corriente es cero en $t=0$; (a) Muestre que la corriente se compone de *términos transientes* los cuales llegan a ser insignificantes después de algún tiempo y *términos de estado estacionario* los cuales tienen el mismo período de la fem aplicada. (b) Muestre que la corriente media cuadrática definida por

$$\sqrt{\frac{\int_a^b I^2 dt}{b-a}}$$

Donde $(b-a)$ es el período $2\pi/\omega$ de la fem, tiende a $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

Profesor: Juan Manuel Carballo Jiménez