entonces $f(t) = g(t)$ en el intervalo $[0, T]$, donde $T = 2$. Pero g se puede expresar en términos de funciones escalón unitario como

$$g(t) = t - t\mathcal{U}(t-1) = t - (t-1)\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-1).$$

Así que (10) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\mathscr{L}\{g(t)\}\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\mathscr{L}\{t-(t-1)\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-1)\}\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right].\end{aligned}$$

Al inspeccionar la ecuación entre corchetes se observa que es idéntica a (11).

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 597

1. Use el resultado $(d/dt)e^t = e^t$ y (1) de esta sección para evaluar $\mathscr{L}\{e^t\}$.
2. Utilice el resultado $(d/dt)\cos^2 t = -\operatorname{sen} 2t$ y (1) de esta sección para evaluar $\mathscr{L}\{\cos^2 t\}$.

En los Problemas 3 y 4 supóngase que la función $y(t)$ tiene las propiedades de que $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$. Encuentre la transformada de Laplace de la expresión dada.

3. $y'' + 3y'$
4. $y'' - 4y' + 5y$

En los Problemas 5 y 6 supóngase que la función $y(t)$ tiene las propiedades de que $y(0) = 2$ y $y'(0) = 3$. Halle la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

5. $y'' - 2y' + y = 0$
6. $y'' + y = 1$

En los Problemas 7-20 obtenga la transformada de Laplace dada sin evaluar la integral.

7. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau\, d\tau\right\}$
8. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \cos\tau\, d\tau\right\}$
9. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\, d\tau\right\}$
10. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau\operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}$
11. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau}\, d\tau\right\}$
12. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos(t-\tau)\, d\tau\right\}$
13. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}$
14. $\mathscr{L}\left\{t\int_0^t \tau e^{-\tau}\, d\tau\right\}$
15. $\mathscr{L}\{1 * t^3\}$
16. $\mathscr{L}\{1 * e^{-2t}\}$
17. $\mathscr{L}\{t^2 * t^4\}$
18. $\mathscr{L}\{t^2 * te^t\}$
19. $\mathscr{L}\{e^{-t} * e^t\cos t\}$
20. $\mathscr{L}\{e^{2t} * \operatorname{sen} t\}$

En los Problemas 21 y 22 supóngase que $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Encuentre la transformada inversa de Laplace para la función dada.

21. $\dfrac{1}{s+5}F(s)$

22. $\dfrac{s}{s^2+4}F(s)$

En los Problemas 23-28 utilice (6) para evaluar $f(t)$.

23. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\}$

24. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right\}$

25. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$

26. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\}$

27. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$

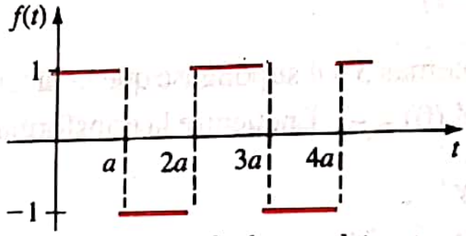
28. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+4s+5)^2}\right\}$

29. Demuestre la propiedad conmutativa de la integral de convolución $f * g = g * f$.

30. Demuestre la propiedad distributiva de la integral de convolución $f * (g + h) = f * g + f * h$.

En los Problemas 31-38 aplique el Teorema 7.10 para hallar la transformada de Laplace de la función periódica dada.

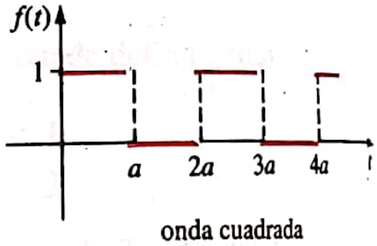
31.



onda cuadrada completa

Figura 7.29

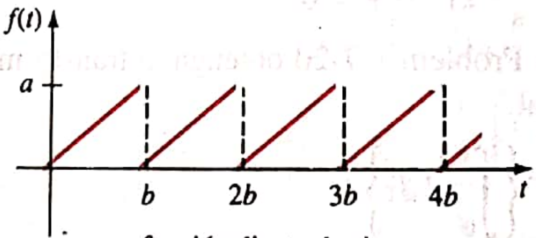
32.



onda cuadrada

Figura 7.30

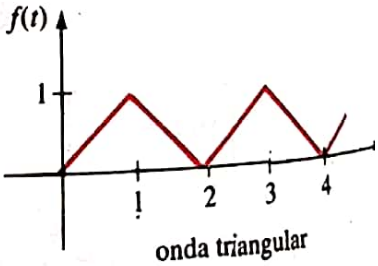
33.



función diente de sierra

Figura 7.31

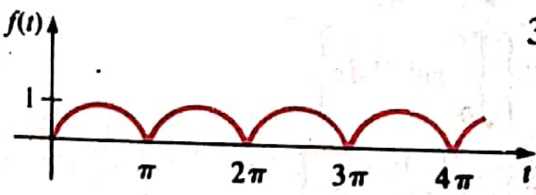
34.



onda triangular

Figura 7.32

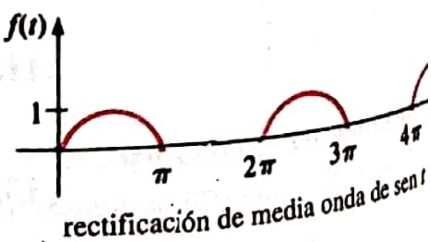
35.



rectificación de onda completa de sen t

Figura 7.33

36.



rectificación de media onda de sen t

Figura 7.34

37. $f(t) = \operatorname{sen} t$
$f(t + 2\pi) = f(t)$

38. $f(t) = \cos t$
$f(t + 2\pi) = f(t)$