Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Cómputo

Teoría de Comunicaciones y Señales

"Práctica #1. Simulación de la serie trigonométrica de Fourier"

Grupo: 3CM5

Integrantes:

- Ramírez Gaytán Omar.
- Ramírez Olvera Guillermo.
- Sánchez Méndez Edmundo Josue.

Profesora: Arzate Gordillo Jacqueline

ESCOM

1. Objetivo.

El alumno analizará, comprenderá y verificará la STF de funciones dadas, empleando circuitos electrónicos simulados con el programa MULTISIM o equivalente.

2. Antecedentes.

En lo que llevamos del semestre hemos estado trabajando con la Serie de Fourier Trigonométrica de la cual ya sabemos cómo calcular dada una funcion y como comprobar de manera gráfica que esa STF corresponde efectivamente a la funcion, pero ahora nos podemos preguntar, porque surgió la SFT.

En 1811 el Instituto de Francia convocó un concurso para "La formulación de una teoría matemática de las leyes de la transmisión del calor y comparar esta teoría con los experimentos." Fourier ganó el concurso con un trabajo que, no fue publicado inmediatamente porque, según reza en el informe del jurado, "el análisis de su solución deja algo que desear tanto en lo concerniente a la generalidad como al rigor." Fourier continuó trabajando en el tema culminándolo con la publicación en 1822 de su "Teoría analítica del calor." Un elemento fundamental de la teoría formulada por Fourier fue el postular que cualquier función f(x), continua o no, periódica (tomándose como período 2π por comodidad) puede escribirse como una serie de senos y cosenos del mismo período.

Cuando f(x) representa la distribución de temperaturas en una barra de longitud de tamaño 2π, el convencimiento de la existencia del desarrollo viene avalado por la mera existencia de una solución física del problema.

En 1829 Dirichlet da la primera demostración completa de un teorema de convergencia para las series de Fourier probando que si f(x) es:

1. Continua en [0,2π] salvo un número finito de discontinuidades de salto.
2. Posee un número finito de máximos y mínimos en dicho intervalo.

Entonces la serie converge a f(x) en los puntos de continuidad y al punto medio del salto en las discontinuidades de salto. El propio Dirichlet comenta que el problema con la hipótesis 1 es el de dar sentido a la integral cuando hay infinitas discontinuidades, proponiendo la función indicadora de los racionales como ejemplo de que alguna restricción es necesaria.

3. Desarrollo

3.1 Observe la funcion f(t) mostrada en la figura 1. La serie trigonométrica de Fourier de esta funcion está dada por la ecuación (1)

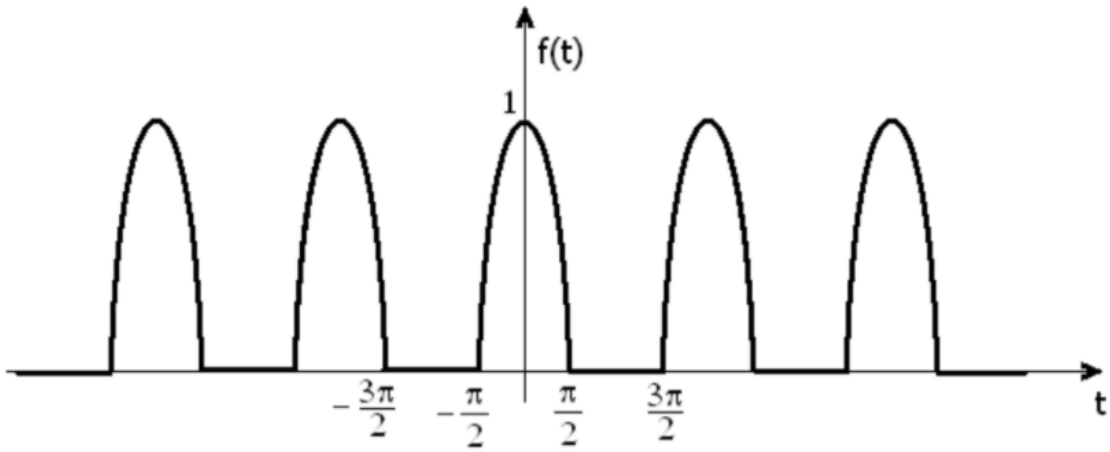


Figura 1

$$\mathrm{f(t)} = \left(\frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cos t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-n^2)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos(nt) \qquad \textbf{...(2)}$$

La S.T.F establece que, cualesquier funcion f(t) periódica está compuesta por un grupo infinito de sinusoides de frecuencias $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \ldots, n\omega_0, \ldots$ etc.

Las sinusoides componentes de f(t), según la ecuación (1) son:

$$\frac{1}{\pi}, \left(\frac{1}{2}\right)\cos t, \left(\frac{2}{3\pi}\right)\cos 2t, -\left(\frac{1}{15\pi}\right)\cos 4t, \left(\frac{2}{35\pi}\right)\cos 6t, -\left(\frac{2}{63}\right)8, \qquad \ldots,$$

$$\frac{2}{\pi(1-n^2)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos(nt), \ldots$$

En la figura 2 se muestra la generación de f(t) mediante algunos de estos componentes, usando un circuito electrónico. Estrictamente f(t) solo está aproximada, pues tendrían que sumarse un grupo infinito de términos en el sistema para representarla de manera exacta.

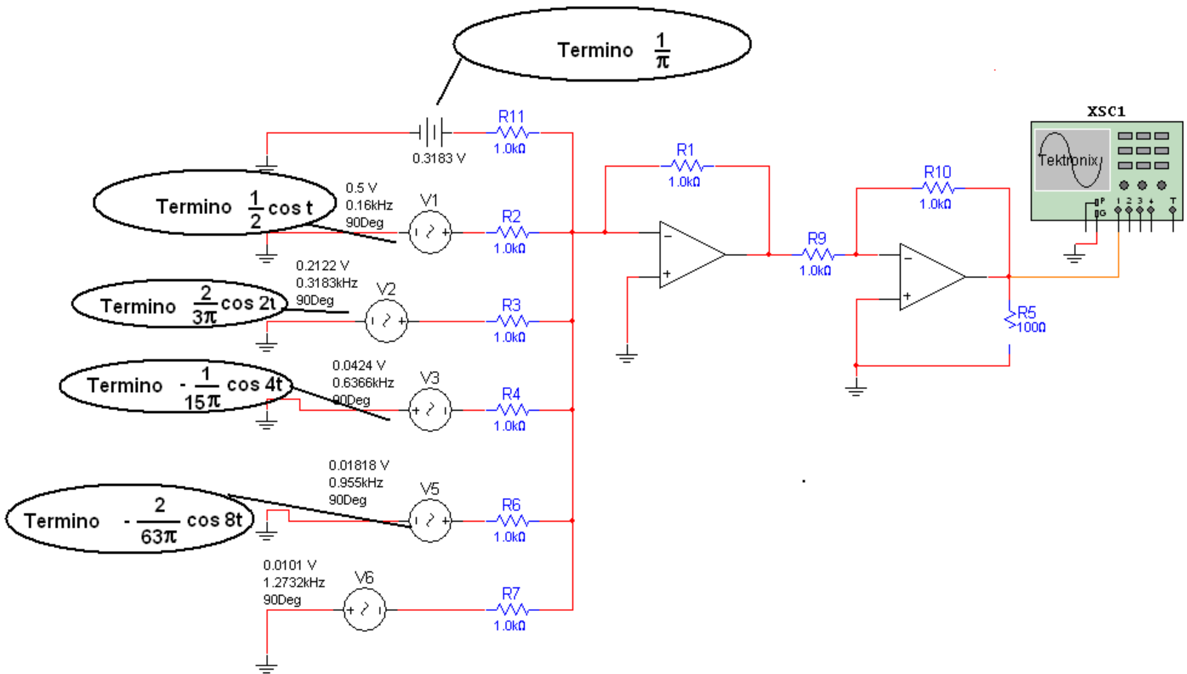


Figura 2. Configuración sumador-inversor-inversor con amplificadores operacionales

ACTIVIDAD 3.1

Usando el programa de simulación de circuitos, MULTISIM, construya virtualmente el circuito de la figura 2. Para ello siga las indicaciones siguientes:

1.Cada fuente de voltaje alterno (equivalente a un término en la sumatoria sinusoidal de Fourier), ajustar a una frecuencia en Hz, convirtiendo rad/seg a Hz, usando la formula siguiente:

$$\omega = 2\pi f$$

$$Así\ para\ el\ n - ésimo\ término f_n:$$

$$f_n = \frac{n\omega}{2\pi}\ con\ n = 1,2,3,\ldots$$

$$\omega = frecuencia\ en\ radianes\ por\ segundo$$

$$f = frecuencia\ en\ hertz$$

La Tabla 1 nos muestra los valores que tendrá cada fuente de voltaje alterno las cuales son 5.

Cálculo de voltaje y frecuencia para cada fuente de voltaje			
	Termino	**Voltaje (V)**	**Frecuencia (Hz)**
0	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\pi} = 0.3183$	Sin frecuencia a aplicar
1	$\frac{1}{2}\cos t$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1*1}{2\pi} = 0.1591$
2	$\frac{2}{3\pi}\cos 2t$	$\frac{2}{3\pi} = 0.2122$	$\frac{1*2}{2\pi} = 0.3183$
3	$-\frac{1}{15\pi}\cos 4t$	$-\frac{1}{15\pi} = -0.02122$	$\frac{1*4}{2\pi} = 0.6366$
4	$\frac{2}{35\pi}\cos 6t$	$\frac{2}{35\pi} = 0.1818$	$\frac{1*6}{2\pi} = 0.9549$
5	$-\frac{2}{63\pi}\cos 8t$	$-\frac{2}{63\pi} = -0.0101$	$\frac{1*8}{2\pi} = 1.2732$

Tabla 1. Valores para usar en el circuito.

NOTA: Para facilitar la visualización desde el osciloscopio, se adecuó la frecuencia de cada término (fuente de voltaje alterno) en Hz a Khz. **Véase figura 3**

2. Ajuste en el recuadro de fase el valor de 90, (este significa una función seno desfasada 90 grados, pues cada uno de los términos en la serie son señales coseno). **Véase figura 3**

3. Ajuste la amplitud pico de cada componente según corresponda. **Véase figura 3**

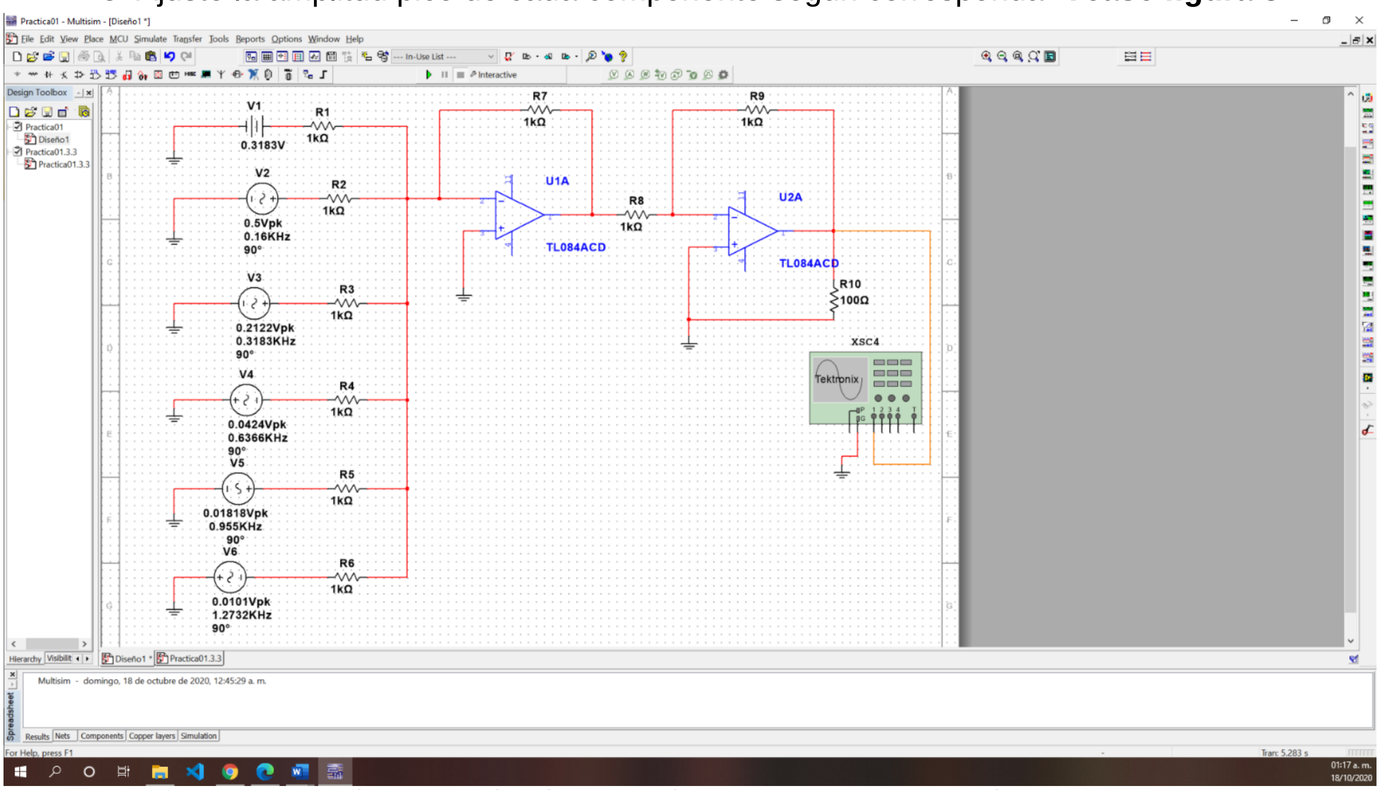


Figura 3. Circuito armado y con valores cargados.

4. Conecte el osciloscopio tektronix a la salida del circuito y ajuste los controles hasta observar claramente la forma de la señal de voltaje de salida (puede usar el botón auto set ubicado en la carátula del osciloscopio). **Véase figura 4**

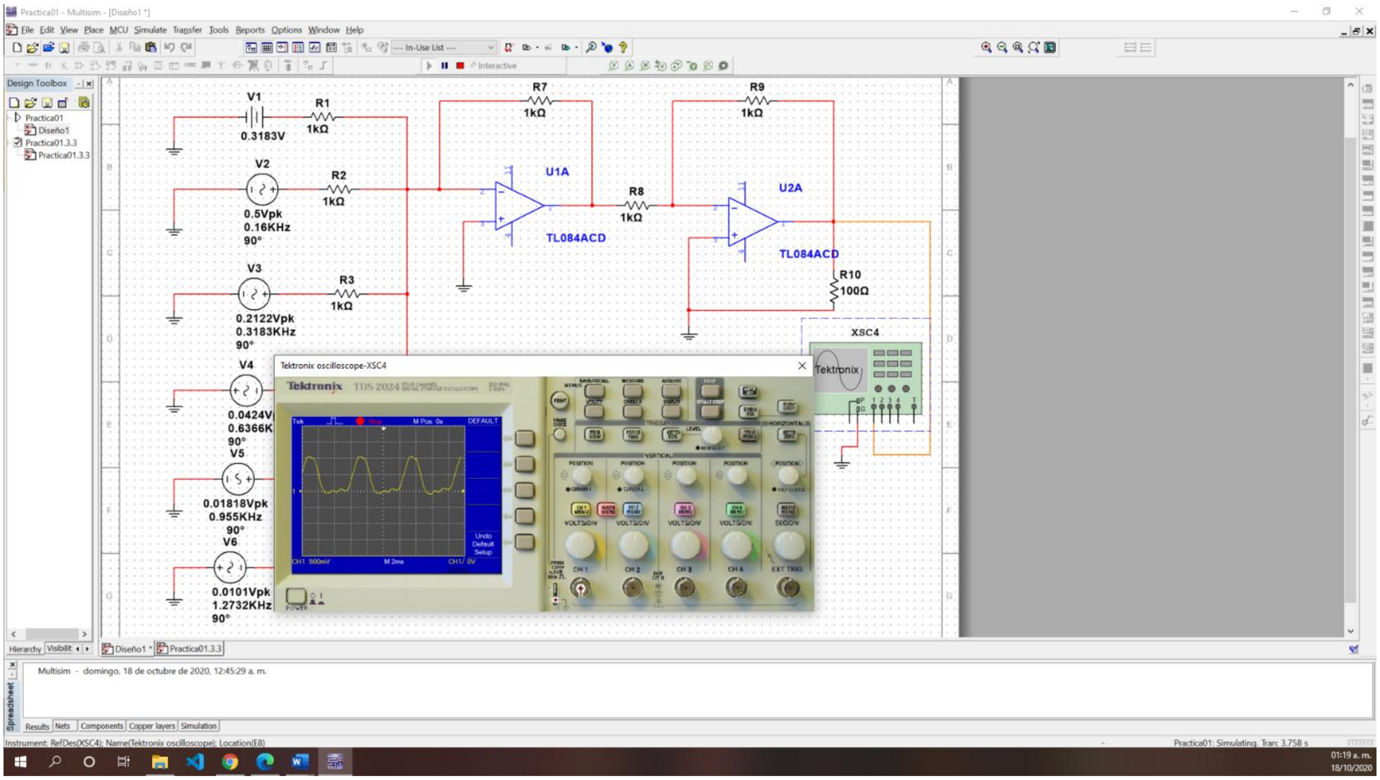


Figura 4. Grafica de la función que queríamos obtener.

ACTIVIDAD 3.2

Compare la señal del osciloscopio con la señal de la Figura 1 y escriba sus conclusiones.

Conclusiones: Al conectar nuestras 6 fuentes de voltaje alternas y usando amplificadores operacionales nos damos cuenta de cómo se asemeja a la Figura 1, pero no son exactamente iguales, pero: ¿Por qué se llega a hacer una forma de onda muy parecida? La respuesta es muy sencilla y es que al influir la frecuencia y los grados a los que ponemos nuestras fuentes, es lo que nos hace varear considerablemente nuestros resultados, es decir, que, si llegamos a no usar las consideraciones del punto 1, no sería tan fácil asemejarnos a esta la forma de onda deseada, finalmente nos podemos hacer una pregunta: ¿Por qué no son exactamente iguales? Pues es muy sencillo encontrar una respuesta, la repuesta reside en el número de fuentes que usamos y es que apenas son 6, las cuales corresponden a 6 términos de la STF, la cual tiene una suma infinita de términos, podemos deducir entonces que, si tuviéramos un mayor número de fuentes conectadas, entonces, la señal del osciloscopio (Figura 4) sería más parecida a de la Figura 1.

ACTIVIDAD 3.3

Modifique el circuito de la figura 1, de tal manera que solo se sumen unos armónicos seleccionados. Por ejemplo, las primeras 3 componentes (n=1,2,3) y posteriormente las 3 componentes de mayor frecuencia (por ejemplo, n=10,15,16).

Cálculo de voltaje y frecuencia para cada fuente de voltaje			
n	**Termino**	**Voltaje (V)**	**Frecuencia (Hz)**
1	$\frac{1}{2}\cos t$	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1*1}{2\pi} = 0.1591$
2	$\frac{2}{3\pi}\cos 2t$	$\frac{2}{3\pi} = 0.2122$	$\frac{1*2}{2\pi} = 0.3183$
3	0	0	Sin frecuencia a aplicar
10	$\frac{2}{99\pi}\cos 10t$	$\frac{2}{99\pi} = 6.43x10^{-3}$	$\frac{1*10}{2\pi} = 1.5915$
15	0	0	Sin frecuencia a aplicar
16	$-\frac{2}{255\pi}\cos 16t$	$-\frac{2}{255\pi} = -2.497x10^{-3}$	$\frac{1*16}{2\pi} = 2.5465$

Tabla 2. Valores para usar en el circuito.

Circuito haciendo uso de los valores n=1,2,3. **véase figura 5**

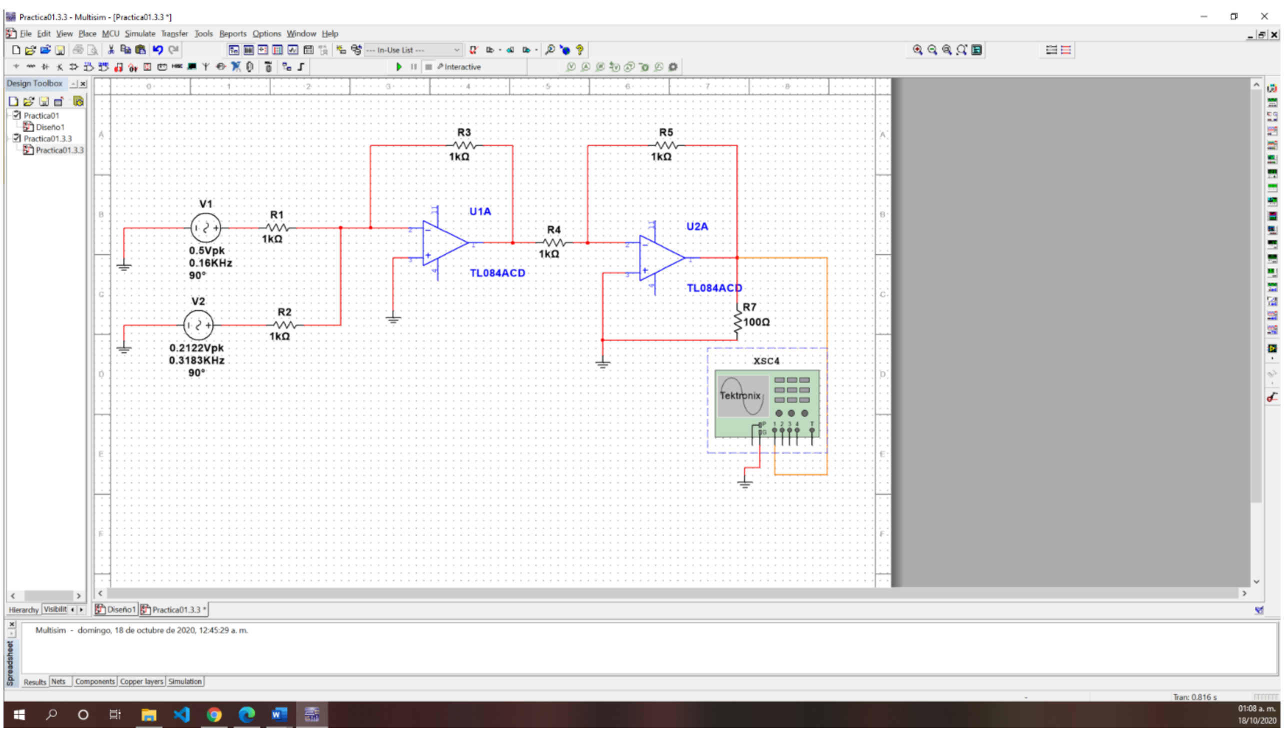


Figura 5.Circuito con valores n=1,2,3.

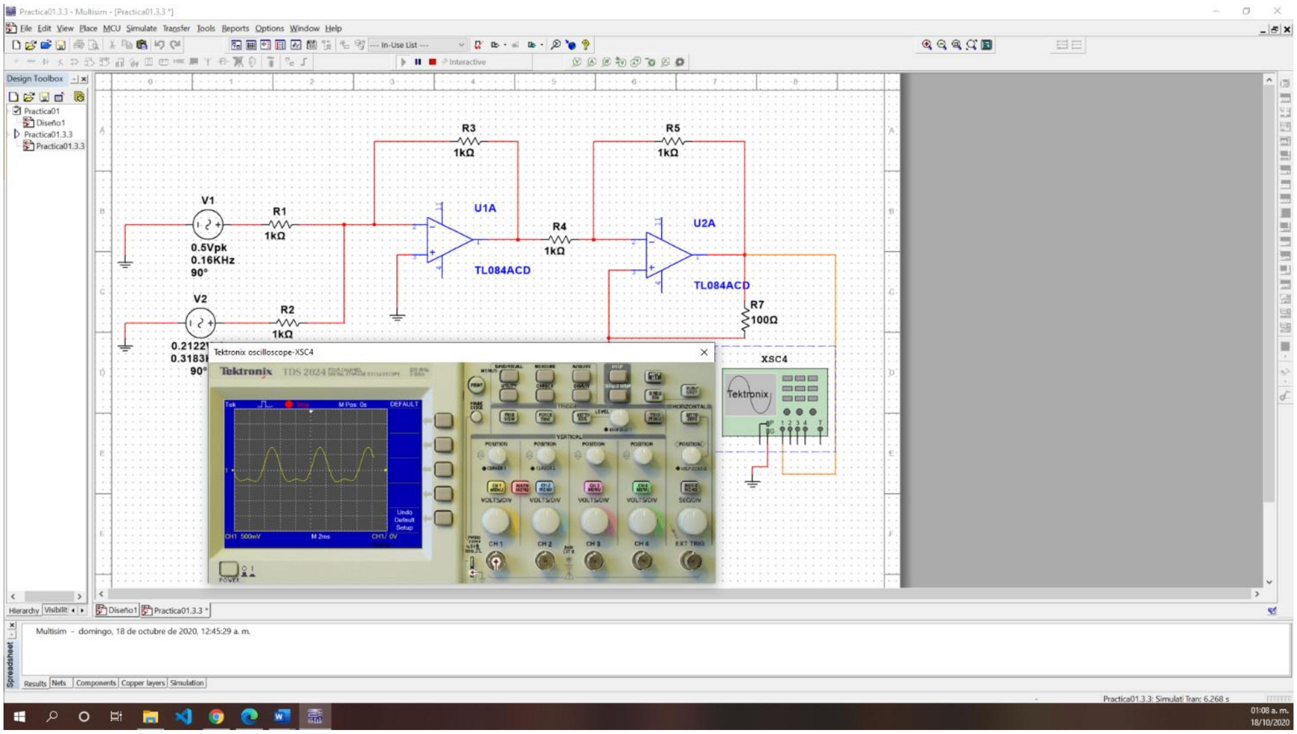


Figura 5a. Grafica de la función con valores n=1,2,3.

Circuito haciendo uso de los valores n=10,15,16. **véase figura 6**

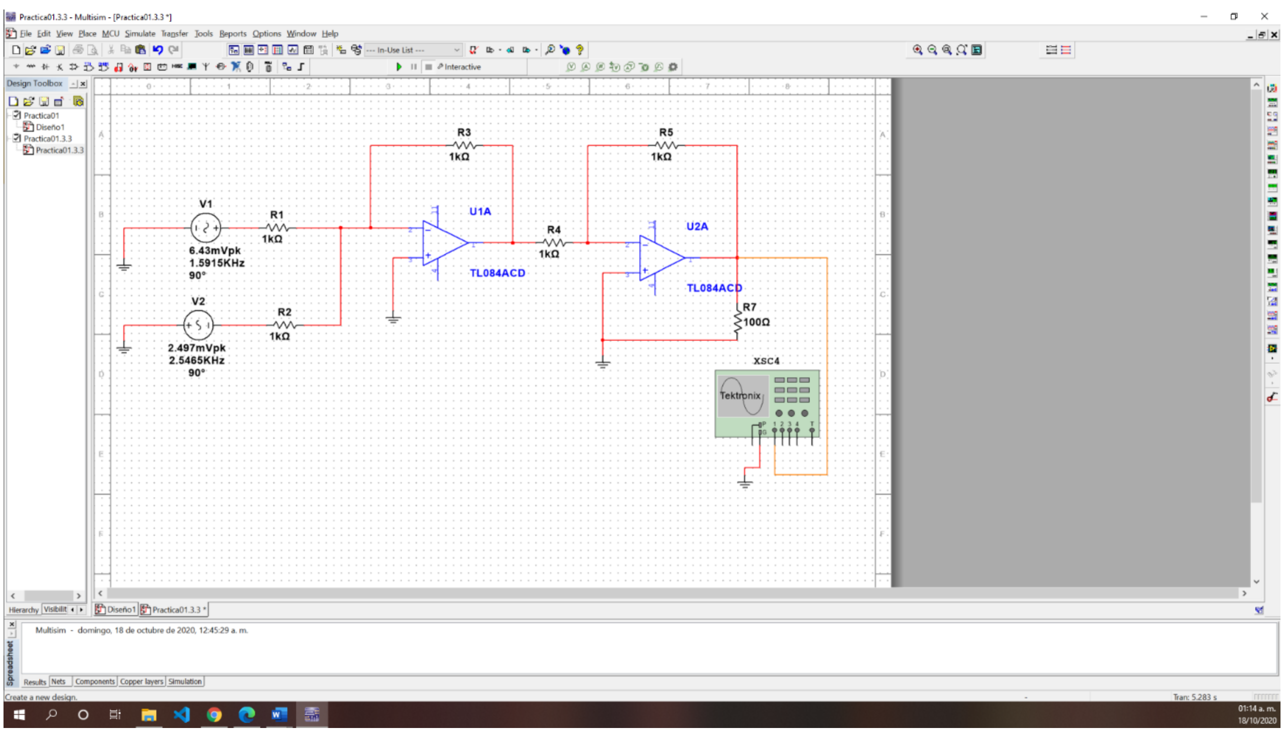


Figura 6.Circuito con valores n=10,15,16.

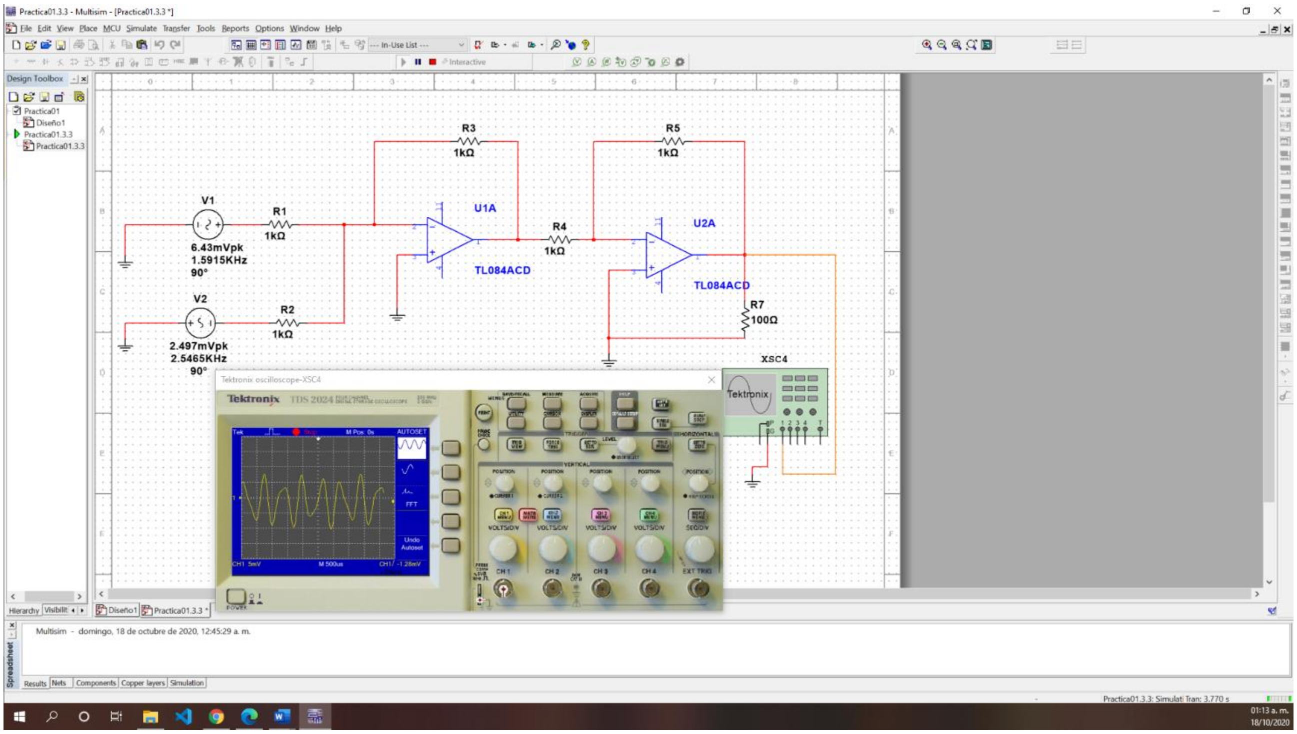


Figura 6a. Grafica de la función con valores n=10,15,16.

Compare ambos resultados,

¿A qué conclusiones llega?

Respuesta: Nos damos cuenta de que, al tomar ciertos términos en nuestra sumatoria, son los primeros 2 componentes los que principalmente son los que se nos muestran una gráfica semejante a la **figura 1**, ademas de que los valores n también producen graficas semejantes, pero hay que ajustar el osciloscopio para poder observar a detalle, es decir, por lo que podemos concluir que el termino perteneciente a la sumatoria es para afinar aún más la gráfica.

¿Cuáles son las componentes que definen la forma de f(t)?

Respuesta: Los primeros componentes son los que definen la forma de la función f(t), en este caso los primeros 2 componentes.

¿Cuáles componentes únicamente afinan a f(t)?

Respuesta: Los componentes con mayor frecuencia, es este caso los últimos 3 del circuito son los que afinan un poco la forma de la función f(t), es decir, los pertenecientes a la sumatoria.

ACTIVIDAD 3.4

3.4.1 Encuentre la STF de la señal mostrada en la figura 7

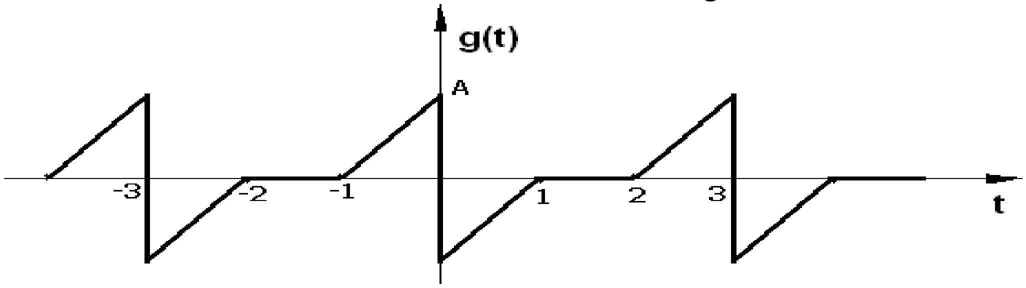


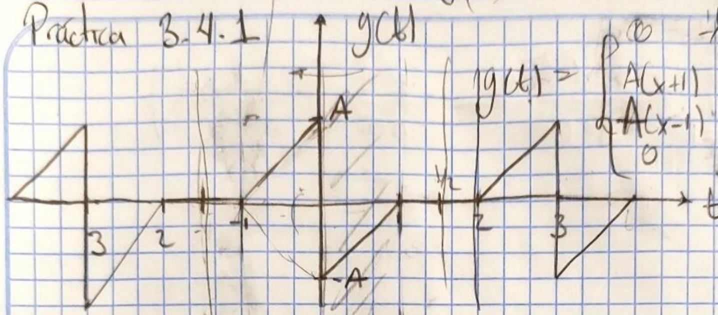
Figura 7

$m = \frac{A-0}{0+1} = A$ $\qquad$ $m = \frac{0+A}{1-0} = A$

Nombre: $\qquad$ Día $\quad$ Mes $\quad$ Año $\quad$ Folio

Tema: $\qquad y_1 = A(x+1)$ $\qquad y + A = Ax$ $\qquad y = A(x-1)$

Práctica 3.4.1



$$g(t) = \begin{cases} 0 & -1/2 < t < 1 \\ A(x+1) & 1 < t < 0 \\ A(x-1) & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 1 \end{cases}$$

IMPAR

Como $g(t)$ Impar $\Rightarrow a_n = a_0 = 0$

$T = 3$

$w_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$b_n = \frac{4}{3}\int_0^{3/2} f(t)\sin n w_0 t\,dt = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 A(x-1)\sin n\frac{2\pi}{3}t\,dt + 0\right]$$

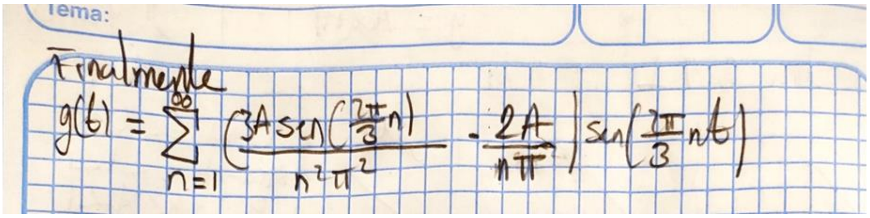
$$b_n = \frac{4}{3}A\left[\int_0^1 x\sin n\frac{2\pi}{3}t\,dt - \int_0^1 \sin n\frac{2\pi}{3}t\,dt\right] =$$

$$\frac{4}{3}A\left[-\frac{3x\cos(n\frac{2\pi}{3}t)}{2\pi n} + \frac{9\sin(n\frac{2\pi}{3}t)}{4\pi^2} + \frac{3\cos(n\frac{2\pi}{3}t)}{2\pi n}\right]_0^1 =$$

$$\frac{4}{3}A\left[\cancel{-\frac{3\cos(n\frac{2\pi}{3})}{2\pi n}} + 0 + \frac{9\sin(n\frac{2\pi}{3})}{4\pi^2 n^2} - 0\ \cancel{\frac{3\cos(n\frac{2\pi}{3})}{2\pi n}} - \frac{3}{2\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{4}{3}A\left[\frac{9\sin(n\frac{2\pi}{3})}{4\pi^2} - \frac{3}{2\pi}\right] = \frac{3A\sin(n\frac{2\pi}{3})}{n^2\pi^2} - \frac{2A}{n\pi}$$

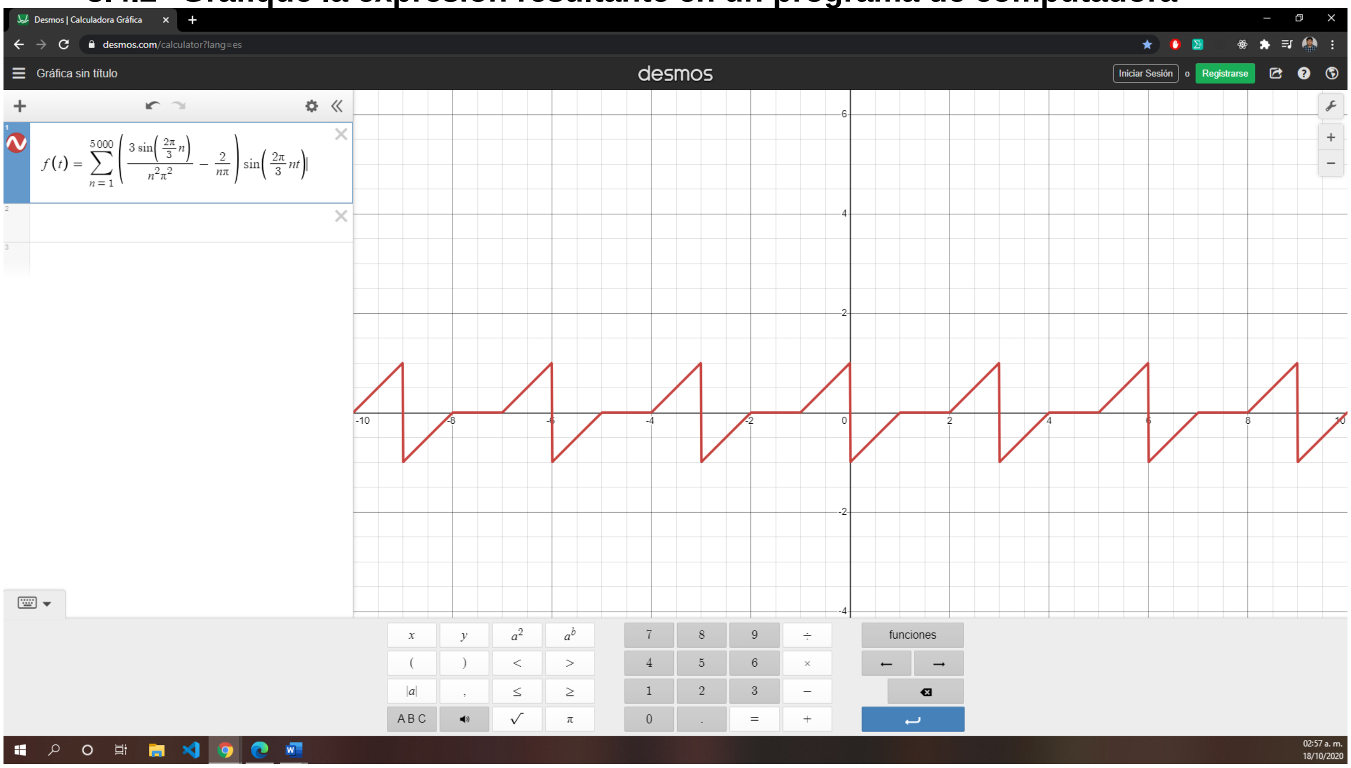
$$b_n = \frac{3A\sin(n\frac{2\pi}{3})}{\pi^2 n^2} - \frac{2A}{n\pi}$$



STF de la señal mostrada en la figura 8:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\,\mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)}{n^2\pi^2} - \frac{2A}{n\pi} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}nt\right)$$

3.4.2 Grafique la expresión resultante en un programa de computadora



3.4.3 Repita los puntos 3.2 y 3.3 para esta forma de onda g(t).

Primero calculamos los componentes de g(t) para n=1,2,3,4,5,6, tomando el valor de A=1. Dichos componentes son:

$-0.37338\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$, $-0.3841\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$, $-0.2122\mathrm{sen}(2\pi t)$, $-0.1427\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$, $-0.13785 sen\left(\frac{10\pi}{3}t\right)$, $-0.1061 sen(4\pi t)$

En la siguiente tabla (Tabla 3) se muestran los voltajes y frecuencias a las que ajustamos cada fuente de voltaje alterna

Cálculo de voltaje y frecuencia para cada fuente de voltaje			
n	**Termino**	**Voltaje (V)**	**Frecuencia (Hz)**
1	$-0.37338 sen\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$	-0.37338	$\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = 0.33333$

2	$-0.3841 sen\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$	-0.3841	$\frac{\frac{4}{3}\pi}{2\pi} = 0.66666$
3	$-0.2122 sen(2\pi t)$	-0.2122	$\frac{2\pi}{2\pi} = 1.0$
4	$-0.1427 sen\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$	-0.1427	$\frac{\frac{8}{3}\pi}{2\pi} = 1.33333$
5	$-0.13785 sen\left(\frac{10\pi}{3}t\right)$	-0.13785	$\frac{\frac{10}{3}\pi}{2\pi} = 1.66666$
6	$-0.1061 sen(4\pi t)$	-0.1061	$\frac{4\pi}{2\pi} = 2.0$

Tabla 3. Valores para usar en el circuito.

NOTA: Para facilitar la visualización desde el osciloscopio, se adecuó la frecuencia de cada término (fuente de voltaje alterno) en Hz a Khz.

2. Ajuste en el recuadro de fase el valor de 90, (este significa una función seno desfasada 90 grados, pues cada uno de los términos en la serie son señales coseno). **Véase figura 8**

3. Ajuste la amplitud pico de cada componente según corresponda. **Véase figura 8**

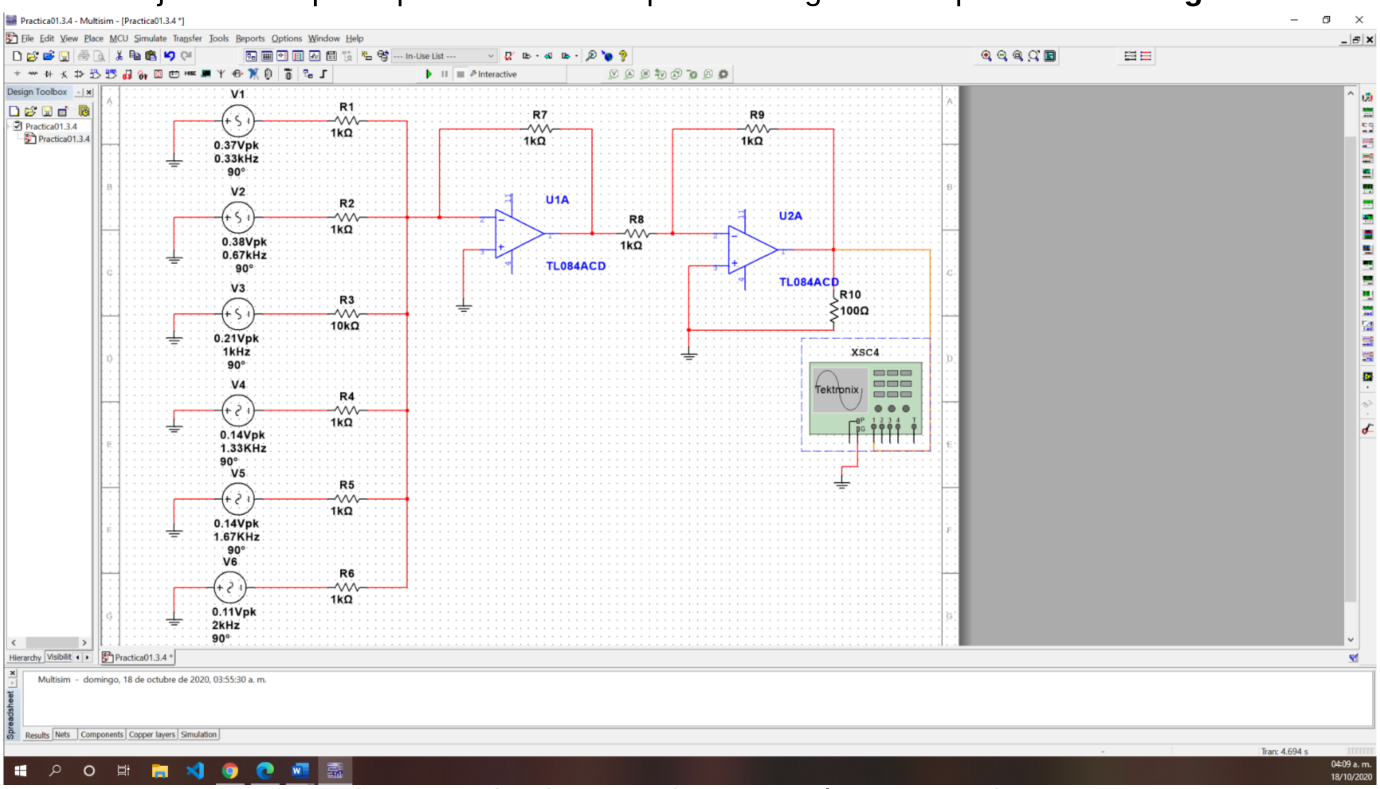


Figura 8. Circuito armado y con valores cargados.

4. Conecte el osciloscopio tektronix a la salida del circuito y ajuste los controles hasta observar claramente la forma de la señal de voltaje de salida (puede usar el botón auto set ubicado en la carátula del osciloscopio). **Véase figura 9**

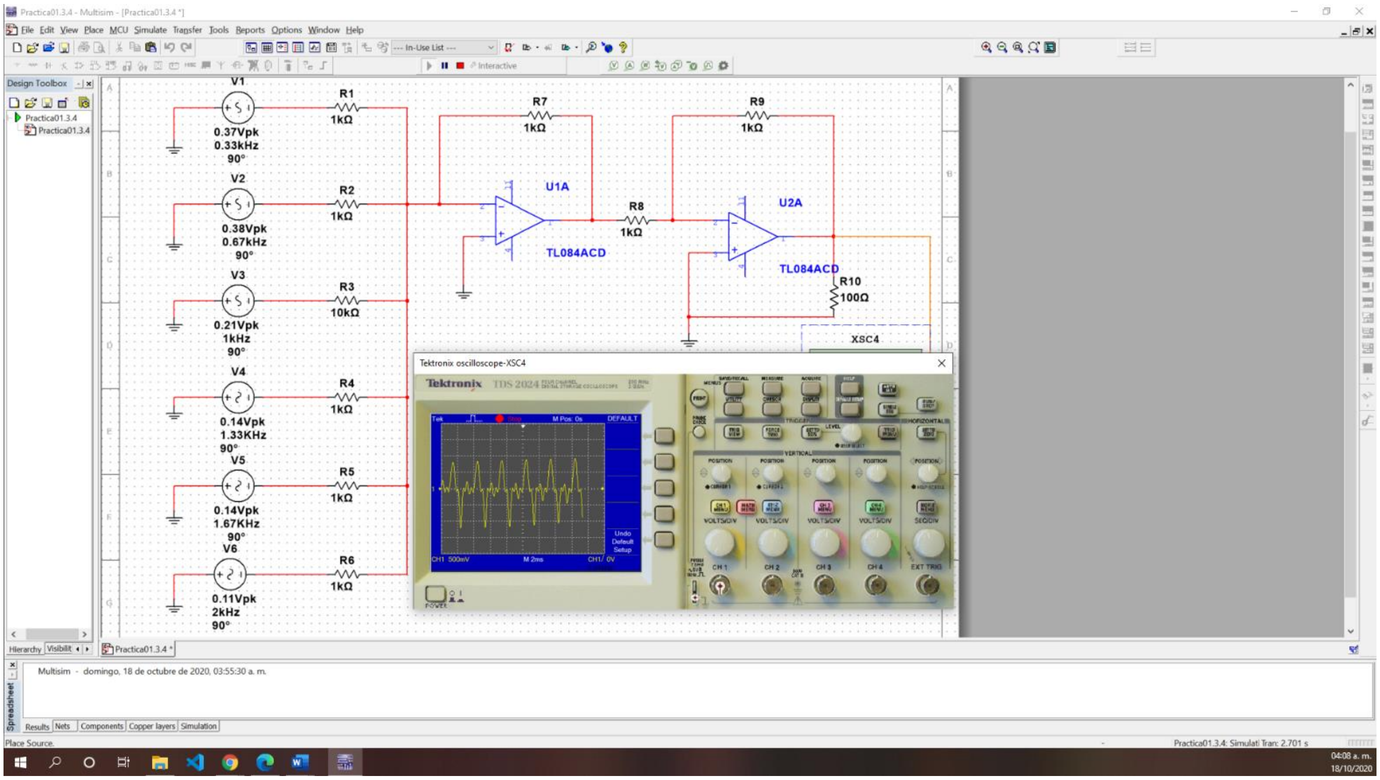


Figura 9. Grafica de la función que queríamos obtener.

ACTIVIDAD 3.5

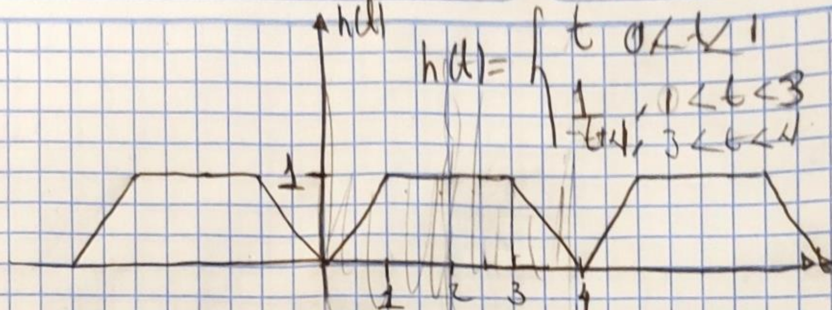
Usando su creatividad, invente una forma de onda peculiar h(t), desarrolle su serie exponencial de Fourier. A partir de ella encuentre la serie trigonométrica, grafíquela y repita las actividades 3.1 y 3.

$m = \frac{0-1}{4-3} = -\frac{1}{1}$

$y = -1(x-3)+1 = -x+3+1 = -x+4$

Nombre:

Tema:



$h(t) = \begin{cases} t & 0<t<1 \\ 1, & 1<t<3 \\ -t+4, & 3<t<4 \end{cases}$

$T = 4 \qquad w_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^2 h(t)\,dt = \frac{4}{4}\left[\int_0^1 t\,dt + \int_1^2 1\,dt\right]$

$a_0 = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + t\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

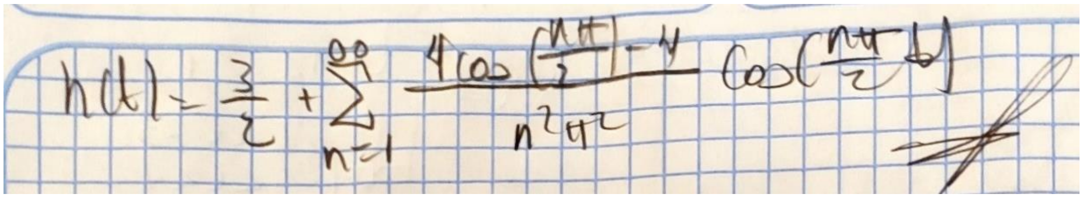
$a_0 = \frac{3}{2}$

$a_n = \frac{4}{T}\int_0^2 h(t)\cos n\frac{\pi}{2}t\,dt = \frac{4}{4}\left[\int_0^1 t\cos(n\frac{\pi}{2}t)\,dt + \int_1^2 \cos(n\frac{\pi}{2})\,dt\right]$

$a_n = \frac{2t\sin(\frac{n\pi}{2}t)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{4\cos(\frac{n\pi}{2}t)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 + \frac{2\sin(\frac{n\pi}{2}t)}{n\pi}\Big|_1^2$

$a_n = \cancel{\frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}} - 0 + \frac{4\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2} + \cancel{\frac{2\sin(n\pi)}{n\pi}}^{0} - \cancel{\frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}}$

$a_n = \frac{4\cos(\frac{n\pi}{2}) - 4}{n^2\pi^2}$



STF de la señal calculada:

$$h(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 4}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} t\right)$$

3.5.2 Repita los puntos 3.2 y 3.3 para esta forma de onda h(t).

Primero calculamos los componentes de g(t) para n=0,1,2,3,4,5, tomando el valor de A=1.

En la siguiente tabla (Tabla 4) se muestran los voltajes y frecuencias a las que ajustamos cada fuente de voltaje alterna

Cálculo de voltaje y frecuencia para cada fuente de voltaje			
n	**Termino**	**Voltaje (V)**	**Frecuencia (Hz)**
0	$\frac{3}{2}$	1.5	Sin frecuencia a aplicar
1	$-0.41cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	-0.41	$\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = 0.25$
2	$-0.20\cos(\pi t)$	-0.20	$\frac{\pi}{2\pi} = 0.5$
3	$-0.045\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)$	-0.045	$\frac{\frac{3}{2}\pi}{2\pi} = 0.75$
4	0	0	Sin frecuencia a aplicar
5	$-0.016\cos\left(\frac{5}{2}\pi t\right)$	-0.016	$\frac{\frac{5}{2}\pi}{2\pi} = 1.25$

Tabla 4. Valores para usar en el circuito.

NOTA: Para facilitar la visualización desde el osciloscopio, se adecuó la frecuencia de cada término (fuente de voltaje alterno) en Hz a Khz.

2. Ajuste en el recuadro de fase el valor de 90, (este significa una función seno desfasada 90 grados, pues cada uno de los términos en la serie son señales coseno). **Véase figura 10**

3.Ajuste la amplitud pico de cada componente según corresponda. **Véase figura 10**

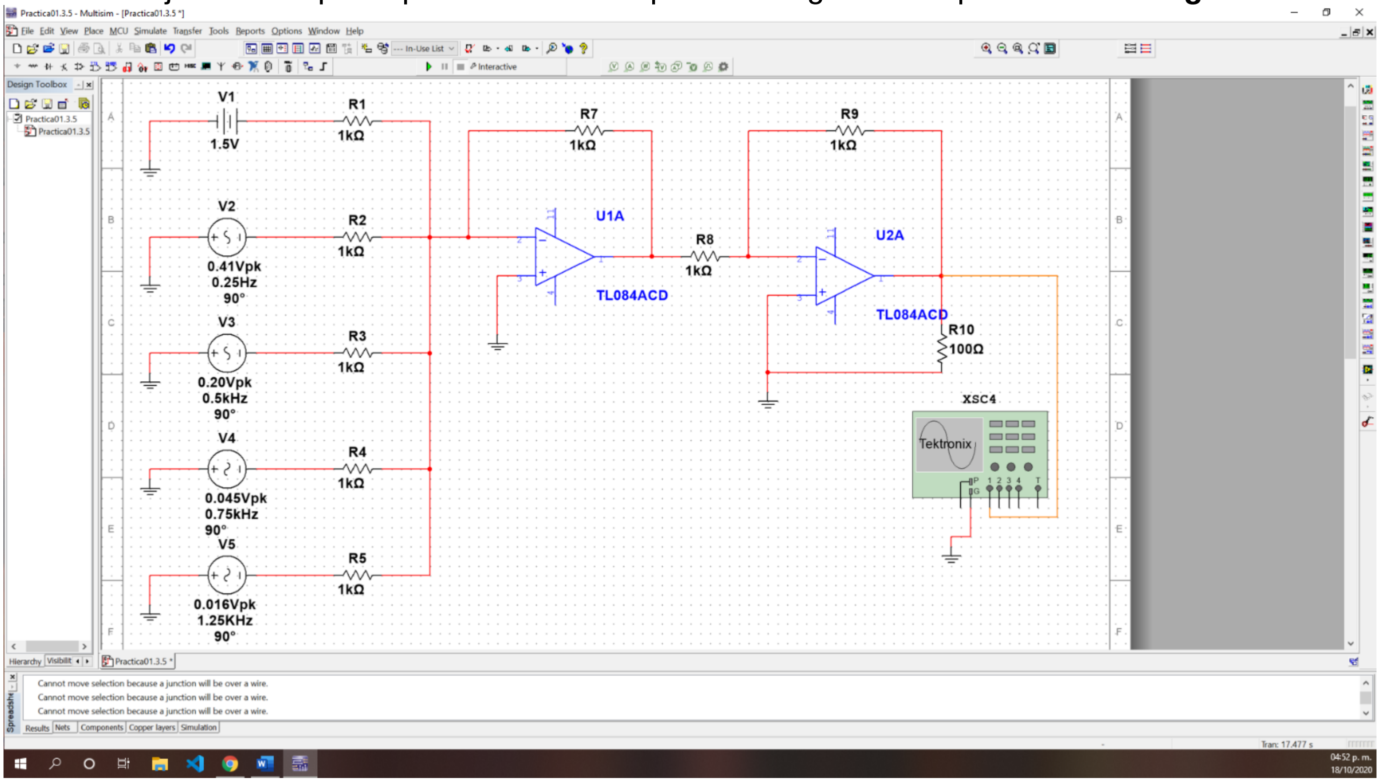


Figura 10. Circuito armado y con valores cargados.

4. Conecte el osciloscopio tektronix a la salida del circuito y ajuste los controles hasta observar claramente la forma de la señal de voltaje de salida (puede usar el botón auto set ubicado en la carátula del osciloscopio). **Véase figura 11**

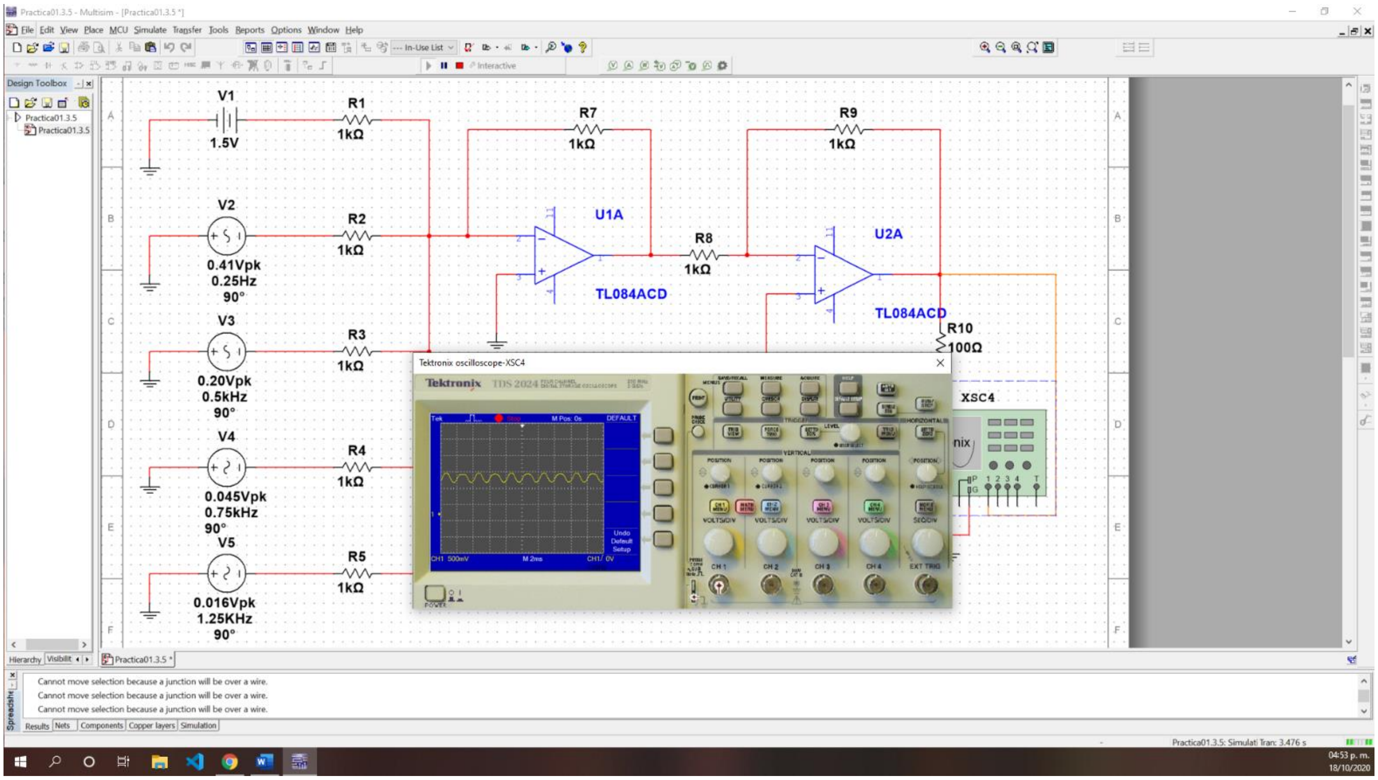


Figura 11. Grafica de la función que queríamos obtener.

ACTIVIDAD 3.6 Pregunta

Si quisiera usar el concepto de Serie trigonométrica de Fourier para generar señales periódicas cuadradas, triangulares, dientes de sierra y de otro tipo, usando n fuentes de voltaje alterno.

¿Qué parámetro tendría que modificar en la serie trigonométrica de cada una de estas funciones para hacer ajustable el periodo de éstas?

Respuesta: Tendría que ajustarse la variable n, ya que con esta se puede controlar el número de periodos, por ejemplo, si ponemos 6 fuentes de voltaje, entonces cada fuente tendría un valor en el ejemplo seria de 0 a 6, el cual es el periodo de la funcion, otro ejemplo es que si quisiéramos hacer un periodo de 2 en 2, entonces en la primera fuente va el término 0, en la segunda fuente va el término 2 y así sucesivamente, así de esta manera se estaría ajustando el periodo de esas funciones según lo que se necesite.

4. CONCLUSIONES

-Ramírez Gaytán Omar:
En esta práctica se pudo observar de manera más gráfica e interactiva la representación de la serie trigonométrica de Fourier y como intervienen sus diferentes componentes para su salida de señal. Además, comprendimos que los primeros términos de la serie son los que definen la forma de la señal y los otros simplemente se encargan de hacer más precisa dicha señal.

-Ramírez Olvera Guillermo:
Esta práctica me pareció muy interesante porque me adentro al mundo de las señales y como simularlas, también me pude dar una idea de qué manera está relacionado con el mundo de la electrónica, pero a mi parecer la parte más interesante fue ver como los voltajes ayudan a generar la serie de Fourier periódica, sin duda se me hizo una práctica muy interesante para este curso de Señales.

-Sanchez Mendez Edmundo Josue:
La simulación de la SFT mediante circuitos electrónicos es una buena manera de visualizar el como una función f(t) dada se vuelve periódica en un determinado intervalo de tiempo. Además, observamos como intervienen los diferentes componentes de la SFT para la generación de la señal, ya sea electrónicamente o en un programa graficador y sobre todo comprendimos y observamos que los primeros términos de la serie son los que definen la forma de la señal y los siguientes son los que se encargan de afinar dicha señal.

Conclusión general:
Esta práctica nos permitió ver de una manera, valga la redundancia practica el como la SFT se puede observar mediante el uso de circuitos analógicos, ademas de ver como las materias de electrónica vuelven a aparecer en una materia que al inicio aparentaba que no tenían correlación, fue una grata experiencia poder visualizar la SFT de esa forma, pero ahora que lo pienso intentar hacerlo físicamente es complicado ya que necesitaríamos varias fuentes generadoras de señales y también comprendimos como es que los primeros términos de la SFT son los que dan una señal muy parecida de la funcion a la cual le sacamos la SFT y los términos posteriores son las que afinan la señal para que se vea mas exacta, una práctica bastante complementaria de lo que hemos visto en el curso.

BIBLIOGRAFIA

[1]. Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos, A. Cañada, Granada España, 08/21/2009 documentos PDF [online] https://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Historia_series_Fourier_Canada.pdf

[1] P.P. Pedro. (2018, octubre 29). Fourier, Cantor, las series trigonométricas y la teoría de conjuntos [Online]. Available: https://institucional.us.es/blogimus/2018/10/__trashed/

[3]. Hsu, H.P.(1998). Análisis de Fourier(1ª. Ed).México: Prentice-Hall.ISBN-13:9684443560

[4]. Proakis, J. G., Manolakis, D. (2006). Procesamiento Digital de señales (4ª Edición.) USA:Ed. Prentice Hall.ISBN: 0-13-198842-5.