obtener B y C simplemente se evalúa el primer miembro de (1) enmarcando, a su vez, $s-2$ y $s+3$:

$$\left.\frac{s^2+4s-1}{(s-1)\boxed{(s-2)}(s+3)}\right|_{s=2} = B \quad \text{o} \quad B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{s^2+4s-1}{(s-1)(s-2)\boxed{(s+3)}}\right|_{s=-3} = C \quad \text{o} \quad C = -\frac{1}{5}.$$

Observe detenidamente que en el cálculo de C evaluamos en $s = -3$. Al entrar en detalles para llegar a esta última expresión se verá por qué esto es así. Puede verificarse también por otros métodos que

$$\frac{s^2+4s-1}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{-1}{s-1} + \frac{11/5}{s-2} + \frac{-1/5}{s+3}.$$

Este **método de enmarcado** es una versión simplificada del resultado conocido como **teorema de desarrollo de Heaviside.***

EJERCICIOS 7.2

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 597

En los Problemas 1-34 utilice el Teorema 7.3 para evaluar las transformadas inversas dadas.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}$

2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\}$

3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{48}{s^5}\right\}$

4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s^3}\right)^2\right\}$

* **Oliver Heaviside** (1850-1925) Muchos de los resultados que se presentan en este capítulo se deben al ingeniero eléctrico inglés Oliver Heaviside, y aparecieron en 1899 en su tratado *Electromagnetic Theory* (Teoría electromagnética). Originalmente Heaviside utilizó la transformada de Laplace como medio para resolver las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, que surgieron en su investigación sobre líneas de transmisión eléctrica. Puesto que muchos de sus resultados no contaban con una demostración formal, el *cálculo operacional* de Heaviside, como se les llamó a sus procedimientos, inicialmente fue visto con desconfianza y menosprecio por los matemáticos. A su vez, el irascible Heaviside, a esos científicos del "establishment" los llamó "cabezas de palo". Cuando Heaviside, usando sus métodos simbólicos fue capaz de obtener respuestas a problemas que los matemáticos no habían podido resolver, el rencor de aquellos se convirtió en censura, y dejaron de publicarse sus artículos en las publicaciones de matemáticas. Heaviside fue también el descubridor en la alta atmósfera de una capa de densidad electrónica máxima, llamada ahora *capa de Heaviside*, que refleja las ondas de radio de regreso a la superficie de la Tierra. Vivió los últimos años de su vida como un ermitaño, en la pobreza y olvidado por la comunidad científica y tecnológica. Murió en una cálida casa sin calefacción, en 1925.

De acuerdo con su naturaleza, los matemáticos terminaron por tomar en cuenta sus ideas y darles una más sólida fundamentación matemática, procediendo después a generalizarlas en una teoría abstracta.

5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s-2}\right\}$

8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s}+\dfrac{6}{s^5}-\dfrac{1}{s+8}\right\}$

9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{4s+1}\right\}$

10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{5s-2}\right\}$

11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+49}\right\}$

12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{10s}{s^2+16}\right\}$

13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s}{4s^2+1}\right\}$

14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{4s^2+1}\right\}$

15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-16}\right\}$

16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{10s}{s^2-25}\right\}$

17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{s^2+2}\right\}$

19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+3s}\right\}$

20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+s-20}\right\}$

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right\}$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$

27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\}$

28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}\right\}$

29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}$

30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$

32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4-9}\right\}$

33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s+3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

La transformada inversa de Laplace puede no ser única. En los problemas 35 y 36 evalúe $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

35. $f(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\ t\neq 1,\ t\neq 2\\ 3, & t=1\\ 4, & t=2\end{cases}$

36. $f(t)=\begin{cases}e^{3t}, & t\geq 0,\ t\neq 5\\ 1, & t=5\end{cases}$

Derivando y simplificando, obtenemos

$$\mathscr{L}\{t^2 \operatorname{sen} kt\} = \frac{6ks^2 - 2k^3}{(s^2 + k^2)^3}.$$

(d)

$$\mathscr{L}\{te^{-t} \cos t\} = -\frac{d}{ds} \mathscr{L}\{e^{-t} \cos t\}$$

$$= -\frac{d}{ds} \mathscr{L}\{\cos t\}_{s \to s+1} \quad \text{primer traslación del teorema}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1}\right)$$

$$= \frac{(s+1)^2 - 1}{[(s+1)^2 + 1]^2}$$

EJERCICIOS 7.3

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 597

En los Problemas 1-44 encuentre $F(s)$ o $f(t)$ según se indique.

1. $\mathscr{L}\{te^{10t}\}$
2. $\mathscr{L}\{te^{-6t}\}$
3. $\mathscr{L}\{t^3 e^{-2t}\}$
4. $\mathscr{L}\{t^{10} e^{-7t}\}$
5. $\mathscr{L}\{e^t \operatorname{sen} 3t\}$
6. $\mathscr{L}\{e^{-2t} \cos 4t\}$
7. $\mathscr{L}\{e^{5t} \operatorname{senh} 3t\}$
8. $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\cosh t}{e^t}\right\}$
9. $\mathscr{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$
10. $\mathscr{L}\{e^{2t}(t-1)^2\}$
11. $\mathscr{L}\{e^{-t} \operatorname{sen}^2 t\}$
12. $\mathscr{L}\{e^t \cos^2 3t\}$
13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$
14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^4}\right\}$
15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 - 6s + 10}\right\}$
16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\}$
17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 4s + 5}\right\}$
18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s + 5}{s^2 + 6s + 34}\right\}$
19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2}\right\}$
20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s-2)^2}\right\}$
21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s - 1}{s^2(s+1)^3}\right\}$
22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$
23. $\mathscr{L}\{(t-1)\mathscr{U}(t-1)\}$
24. $\mathscr{L}\{e^{2-t}\mathscr{U}(t-2)\}$
25. $\mathscr{L}\{t\mathscr{U}(t-2)\}$
26. $\mathscr{L}\{(3t+1)\mathscr{U}(t-3)\}$
27. $\mathscr{L}\{\cos 2t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$
28. $\mathscr{L}\left\{\operatorname{sen} t\,\mathscr{U}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$
29. $\mathscr{L}\{(t-1)^3 e^{t-1}\mathscr{U}(t-1)\}$
30. $\mathscr{L}\{te^{t-5}\mathscr{U}(t-5)\}$

31. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

32. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}\right\}$

33. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

34. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}\right\}$

35. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$

36. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}\right\}$

37. $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$

38. $\mathscr{L}\{t\,\mathrm{senh}\,3t\}$

39. $\mathscr{L}\{t^2\,\mathrm{senh}\,t\}$

40. $\mathscr{L}\{t^2\cos t\}$

41. $\mathscr{L}\{te^{2t}\,\mathrm{sen}\,6t\}$

42. $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$

43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$

44. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$

En los Problemas 45-50 identifique la gráfica dada con una de las funciones en (a)-(f). La gráfica de $f(t)$ está dada en la Figura 7.18.

(a) $f(t)-f(t)\mathscr{U}(t-a)$ $= f(t) - \begin{cases} 0, & 0\le t<a \\ f(t), & t\ge a\end{cases} = \begin{cases} f(t), & 0\le t<a \\ 0, & t\ge a\end{cases}$

(b) $f(t-b)\mathscr{U}(t-b)$

(c) $f(t)\mathscr{U}(t-a)$

(d) $f(t)-f(t)\mathscr{U}(t-b)$

(e) $f(t)\mathscr{U}(t-a)-f(t)\mathscr{U}(t-b)$

(f) $f(t-a)\mathscr{U}(t-a)-f(t-a)\mathscr{U}(t-b)$

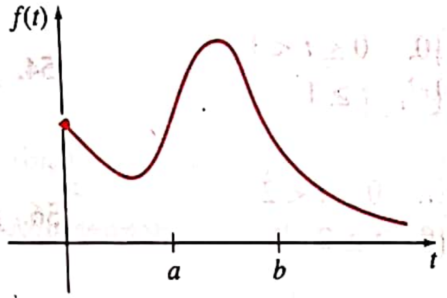


Figura 7.18

45.

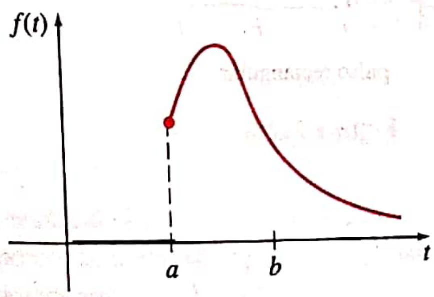


Figura 7.19

46.

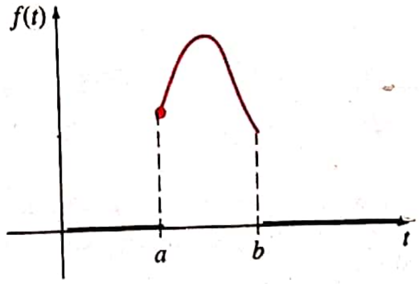


Figura 7.20

47.

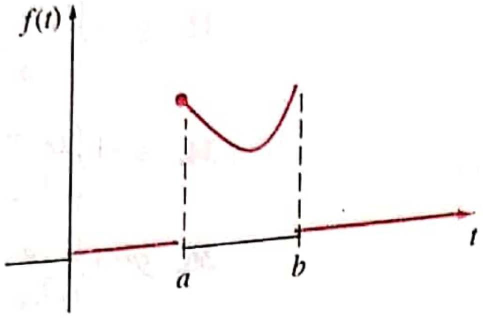


Figura 7.21

48.

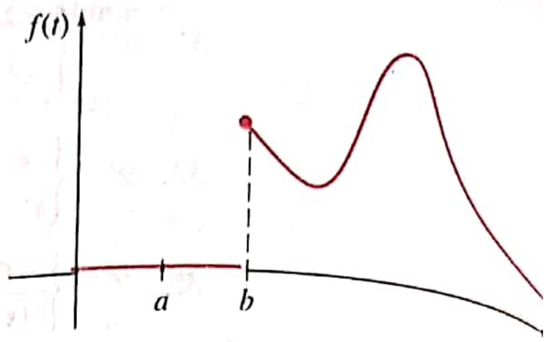


Figura 7.22

49.

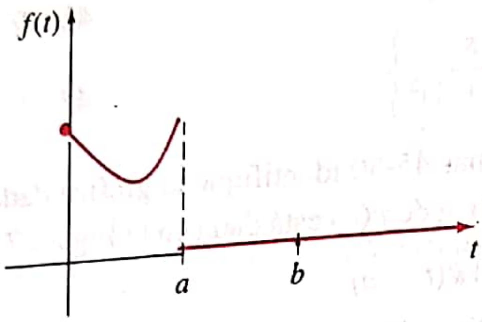


Figura 7.23

50.

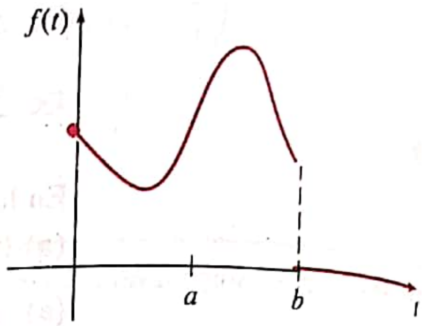


Figura 7.24

En los Problemas 51-58 escriba cada función en términos de funciones escalón unitario. Encuentre la transformada de Laplace de las funciones dadas.

51. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & t \ge 3 \end{cases}$

52. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases}$

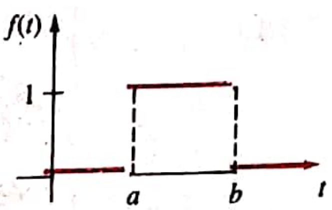
53. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$

54. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \dfrac{3\pi}{2} \\ \operatorname{sen} t, & t \ge \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

55. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$

56. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

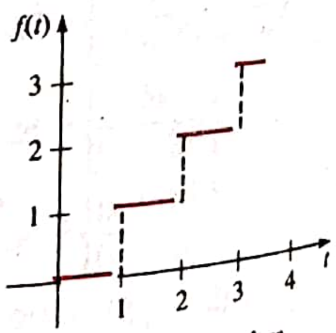
57.



pulso rectangular

Figura 7.25

58.



función escalera

Figura 7.26

En los Problemas 59 y 60 trace la gráfica de la función dada.

59. $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}\right\}$ **60.** $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{3e^{-s}}{s^2} + \frac{5e^{-2s}}{s^2}\right\}$

En los Problemas 61-64 utilice el Teorema 7.7 en la forma ($n = 1$)

$$f(t) = -\frac{1}{t}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

para evaluar la transformada inversa de Laplace.

61. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\}$ **62.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}\right\}$

63. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{2}\right\}$ **64.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \cot^{-1}\frac{4}{s}\right\}$

7.4 TRANSFORMADAS DE DERIVADAS, INTEGRALES Y FUNCIONES PERIÓDICAS

Nuestra meta es utilizar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Con ese fin es necesario evaluar cantidades tales como $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ y $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$. Por ejemplo, si f' es continua para $t \geq 0$, entonces integrado por partes se obtiene

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt \\ &= e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

o bien
$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{1}$$

Aquí se ha supuesto que $e^{-st}f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Similarmente,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f''(t)\,dt \\ &= e^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt \\ &= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\} \\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)\end{aligned}$$

o
$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

Los resultados en (1) y (2) son casos especiales del siguiente teorema, el cual proporciona la transformada de Laplace de la n-ésima derivada de f. Se omite la demostración.