第 32 卷第 2 期
2002 年 3 月
东南大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SOUTHEAST UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol.32 No.2
Mar. 2002

Zernike 矩的快速算法

徐旦华　辜　嘉　李松毅　舒华忠

(东南大学生物科学与医学工程系,南京 210096)

摘要: 给出了 Zernike 矩求解的一种快速算法.利用 Zernike 多项式迭代性质,找出了 Zernike 正交矩之间的内在关系,这样,高阶的 Zernike 矩可由低价的 Zernike 矩求出,再在 Chan 等人提出的关于一维几何矩有效算法的基础上,得出了一种快速算法.与已有方法相比,该算法大大减少了求解过程中的乘法次数,降低了计算复杂度,从而提高了运算速度和效率;并可以有效用于模式识别、图像分析及重建等领域中.

关键词: Zernike 多项式; Zernike 矩; 正交矩; 快速算法

中图分类号: TP391　**文献标识码:** A　**文章编号:** 1001-0505(2002)02-0189-04

Fast algorithm for computation of Zernike moments

Xu Danhua　Gu Jia　Li Songyi　Shu Huazhong

(Department of Biology Science and Medical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: By using the recursive property of Zernike polynomials, the inter-relationship between Zernike moments is found, so Zernike moments of higher order could be deduced from those of lower order. Based on an efficient computation about one-dimensional geometric moments suggested by Chan, a fast computation of Zernike moments is concluded, reducing significantly the number of multiplication. The application to some examples shows that it is more efficient than the existing methods, and can be used in the field of pattern recognition and image analysis.

Key words: Zernike polynomials; Zernike moments; orthogonal moments; fast computation

自 Hu 提出了矩的不变量理论以来[1],矩和矩的函数在模式识别及图像分析等许多领域都有广泛而成功的应用.矩是描述图像特征的算子,它包含以下几种不同的类型:几何矩,复数矩,旋转矩及正交矩等.正交矩(包括 Legendre 矩和 Zernike 矩)由于具有如下 2 个特性因而较之其他类型的矩有更广泛的应用:①具有反变换;②利用正交矩描述的图像具有最少的信息冗余度.然而,迄今为止,有关正交矩的快速算法的研究还很少,这主要是由于正交矩的复杂性所致的.我们曾对 Legendre 矩的算法进行了较深入的研究[2,3],而 Zernike 矩因具有旋转不变性较 Legendre 矩在模式识别等领域有更广泛的应用,但迄今为止有关 Zernike 矩的快速算法还很少[4].本文旨在利用 Zernike 多项式的迭代性质,给出一种 Zernike 矩的快速算法.

收稿日期: 2001-09-19.
基金项目: 教育部青年骨干教师资助项目(2000-2001).
作者简介: 徐旦华(1969—),女,硕士生,工程师;舒华忠(联系人),教授,博士生导师,Shu.List@seu.edu.cn.

1　Zernike 矩的定义

Zernike 矩的概念首先由 Teague 于 1980 年引入[5].对于一密度函数为 $f(x, y)$ 的图像,其 n 阶 Zernike 矩的定义为

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} V_{nm}^{*}(x, y) f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{1}$$

式中, * 表示取共轭,Zernike 多项式 $V_{nm}(x, y)$ 由下式给出:

$$V_{nm}(x, y) = V_{nm}(r, \theta) = R_{nm}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\theta} \tag{2}$$

式中,n 为非负整数,$|m| \leqslant n$ 并满足 $n-|m|$ 为偶数, 实半径多项式 $R_{nm}(r)$ 的定义为

$$R_{nm}(r) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s!\left(\frac{(n+|m|)}{2}-s\right)!\left(\frac{(n-|m|)}{2}-s\right)!} r^{n-2s} \tag{3}$$

Zernike 多项式 $V_{nm}(x, y)$ 满足下述正交关系：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} V_{nm}^{*}(x,y)V_{pq}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{\pi}{n+1} & n=p;\ m=q \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{4}$$

式(1) 在极坐标形式下可表示为

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} R_{nm}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\theta}f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

从式(5) 容易看出，对于一实二维图像，其 Zernike 矩 Z_{nm} 为一复数，将其实部和虚部分别记为 C_{nm} 和 S_{nm}，则有[6]：

$$C_{nm} = \frac{2n+2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} R_{nm}(r)\cos(m\theta)f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{6}$$

$$S_{nm} = -\frac{2n+2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} R_{nm}(r)\sin(m\theta)f(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

根据正交性，式(1) 的反变换为

$$f(r,\theta) \approx \frac{C_{n0}}{2}R_{n0}(r) + \sum_{n=1}^{M}\sum_{m>0}(C_{nm}\cos m\theta + S_{nm}\sin m\theta)R_{nm}(r) \tag{8}$$

式中，M 表示所需使用的矩的最高阶数.

由于实际问题中所需处理的图像通常为数字图像，因而需要将式(6) 和(7) 离散化，又由于 Zernike 多项式在单位圆内正交，因此需要将所考虑的图像转换为单位圆内的极坐标形式，为此，Mukundan 和 Ramakrishnan 在文献[4] 中提出了如下形式的变换：对于任一 $N \times N$ 的图像 $f(x,y)$，不失一般性，令坐标原点位于图像的中心，则 $-N/2 \leqslant x, y \leqslant N/2$. 对于任一像素 (x,y)，引入 2 个参数 ρ 和 σ，它们惟一地对应该像素，其定义为

$$\rho = \max(|x|,|y|)$$

若 $|x| = \rho$，则

$$\sigma = 2(\rho - x)y/|y| + xy/\rho$$

若 $|y| = \rho$，则

$$\sigma = 2y - xy/\rho$$

容易看出，ρ 取值从 1 到 $N/2$，σ 取值从 1 到 8ρ. 由参数 ρ,σ 可定义相应的极坐标：

$$r = 2\rho/N, \qquad \theta = \pi\sigma/(4\rho)$$

经过该转换，式(6) 和(7) 可写成如下的离散形式：

$$C_{nm} = \frac{2n+2}{N^2}\sum_{\rho=1}^{N/2}R_{nm}(2\rho/N)\sum_{\sigma=1}^{8\rho}\cos\frac{\pi m\sigma}{4\rho}f(\rho,\sigma) \tag{9}$$

$$S_{nm} = -\frac{2n+2}{N^2}\sum_{\rho=1}^{N/2}R_{nm}(2\rho/N)\sum_{\sigma=1}^{8\rho}\sin\frac{\pi m\sigma}{4\rho}f(\rho,\sigma) \tag{10}$$

在文献[4] 中，Mukundan 和 Ramakrishnan 提出了利用式(9) 和(10) 直接计算 Zernike 矩的方法. 我们将看到，他们的方法还是需要较多的运算量，为减少计算量，我们在本文中提出一种更有效的方法.

2 Zernike 矩的快速算法

在描述我们的快速算法之前，首先给出 Zernike 多项式的有关性质.

1) 特殊性质[7]

$$R_{2n,0} = P_n(2r^2 - 1), \quad R_{nn}(r) = r^n \tag{11}$$

式中，$P_n(r)$ 为 n 阶 Legendre 多项式.

2) 迭代性质[8]

在文献[8] 中，Kintner 给出了下述 Zernike 迭代式：

$$K_1 R_{n+2,m}(r) = (K_2 r^2 + K_3)R_{nm}(r) + K_4 R_{n-2,m}(r) \tag{12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= n(n+m+2)(n-m+2)/2 \\ K_2 &= 2n(n+1)(n+2) \\ K_3 &= -m^2(n+1) - n(n+1)(n+2) \\ K_4 &= -(n+m)(n-m)(n+2)/2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

利用上面 2 个性质，可以给出一种有效计算由式(9) 和(10) 定义的 Zernike 矩. 为此，将式(9) 和(10) 合并成复数形式：

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{N^2}\sum_{\rho=1}^{N/2}\sum_{\theta=1}^{8\rho}R_{nm}(2\rho/N)f(\rho,\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi m\theta/(4\rho)} \tag{14}$$

将式(14) 分解成如下形式：

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{N^2}\sum_{\rho=1}^{N/2}R_{nm}(2\rho/N)g_m(\rho) \tag{15}$$

式中

$$g_m(\rho) = \sum_{\theta=1}^{8\rho}f(\rho,\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi m\theta/(4\rho)} \tag{16}$$

显然，由式(16) 定义的 $g_m(\rho)$ 是一个一维信号，它是关于 $f(\rho,\theta)$ 的离散傅立叶变换，因此，对

于较大值的 ρ,我们可以采用 FFT 来减少式(16) 的运算量.由式(15) 和(16) 容易看出,Zernike 矩的计算量主要取决于式(15) 右端的运算量,而后者的计算可通过式(11) 和(12) 有效地实现.为此,我们引入如下记号:

$$S_{nm}(\rho) = R_{nm}(2\rho/N)g_m(\rho) \tag{17}$$

由式(12) 容易推出

$$S_{nm}(\rho) = \left(\frac{4}{N^2}L_1(n,m)\rho^2 + L_2(n,m)\right)S_{n-2,m}(\rho) + L_3(n,m)S_{n-4,m}(\rho) \tag{18}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} L_1(n,m) &= \frac{4n(n-1)}{(n-m)(n+m)} \\ L_2(n,m) &= \frac{-2(n-1)(n^2-2n+m^2)}{(n+m)(n-m)(n-2)} \\ L_3(n,m) &= \frac{-n(n+m-2)(n-m-2)}{(n-m)(n+m)(n-2)} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

由于系数 $L_1(n, m)$, $L_2(n, m)$ 和 $L_3(n, m)$ 仅取决于 n 和 m, 将式(17)、(18) 代入式(15) 得

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{N^2}\Big(\frac{4}{N^2}L_1(n,m)\sum_{\rho=1}^{N/2}\rho^2 S_{n-2,m}(\rho) + L_2(n,m)\sum_{\rho=1}^{N/2}S_{n-2,m}(\rho) + L_3(n,m)\sum_{\rho=1}^{N/2}S_{n-4,m}(\rho)\Big) \tag{20}$$

由式(17),式(20) 等价于

$$Z_{nm} = \frac{4(n+1)}{N^4}L_1(n,m)\sum_{\rho=1}^{N/2}\rho^2 S_{n-2,m}(\rho) + \frac{n+1}{n-1}L_2(n,m)Z_{n-2,m} + \frac{n+1}{n-3}L_3(n,m)Z_{n-4,m} \tag{21}$$

式中,$Z_{n-2,m}$ 和 $Z_{n-4,m}$ 分别表示$(n-2)$和$(n-4)$阶 Zernike 矩,并且约定当 $l < m$ 时 $Z_{lm} = 0$.

式(21) 表明 $Z_{nm}(n > m)$ 的获取主要取决于该式右端的第 1 项.由于 $S_{n-2,m}(\rho)$ 可由式(18) 递推求出,因而 $\sum_{\rho=1}^{N/2}\rho^2 S_{n-2,m}(\rho)$ 很容易求得,于是对于 $n > m$ 时的 Z_{nm},即可由式(21) 递推得到.为了使用式(21),还需要知道它的初始值 Z_{mm}.由式(11) 和(15) 知 Z_{mm} 的定义为

$$Z_{mm} = \frac{n+1}{N^2}\sum_{\rho=1}^{N/2}\left(\frac{2\rho}{N}\right)^m g_m(\rho) = \frac{n+1}{N^2}\left(\frac{2}{N}\right)^m G_m \tag{22}$$

式中

$$G_m = \sum_{\rho=1}^{N/2}\rho^m g_m(\rho) \tag{23}$$

式中,$g_m(\rho)$ 由式(16) 给出.

式(22) 和(23) 表明,除一个常数因子外,Z_{mm} 是一维 m 阶几何矩,有关一维几何矩的快速算法很多,本文采用 Chan 等人提出的有效算法[9].采用该算法,在计算由式(23) 定义的几何矩时仅需要进行 $O(N)$ 次加法,而不需要进行乘法运算.限于篇幅,有关该算法的详细介绍请参见文献[9].

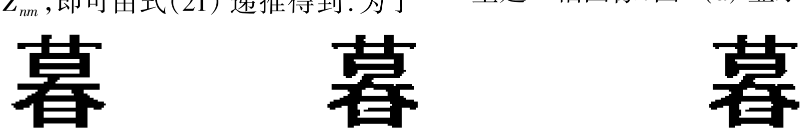
3　结果与结论

首先讨论本文所给方法所需要的计算复杂度.假设 M 为所需计算的矩的最高阶数,$N \times N$ 为图像的尺寸.显然,在计算由式(16) 定义的一维信号 $g_m(\rho)(0 \leqslant m \leqslant M,\ 1 \leqslant \rho \leqslant N/2)$ 时,这一步需要进行 $O(N^2)$ 次加法和乘法.

采用 Chan 等人的方法, 对于每个给定的 $m(m = 0,1,\cdots,M)$, 计算 Z_{mm} 只需要做$(N/2-1)(m+1)+1$ 次加法,因此,计算至 M 阶矩,需要 $N(M+1)(M+2)/4$ 次加法.当得到所有的 Z_{mm} 后,对于给定的(n,m), 利用式(15) 计算 Z_{nm} 需要 $2N$ 次乘法和 $3N/2$ 次加法,因而计算所有的 $Z_{nm}(1 \leqslant n \leqslant M,\ m < n)$,需要进行 $2M^2N$ 次加法和 $3/2M^2N$ 次乘法.

若采用由 Mukundan 和 Ramakrishnan 介绍的方法,即直接计算式(9) 和(10),则需要 $O(M^2N^2)$ 次加法和乘法,显然,该方法与本文介绍的方法相比运算量要大得多.

为了更清楚地说明问题,我们将 2 种方法用于重建一幅图像.图 1(a) 显示的是一幅 64×64 的原始图像, 用本文介绍的方法以及 Mukundan 和 Ram-akrishnan 的方法分别计算该图像的 Zernike 矩至 40 阶,即 $M = 40$, 并用式(8) 的反变换重建该图像,结果见图 1(b) 和 1(c).在一台 Pentium II PC 机上,2 种方法所需的计算时间分别为 1 s 和 3 s.



(a) 原始图像　　(b) 采用本文方法重建的图像　　(c)采用文献[4]中方法重建的图像

图 1　采用不同方法重建的图像与原始图像的比较

Zernike 矩由于具有正交性、旋转不变性等优

良性质,在许多领域有着非常广泛的应用,但因其涉及的计算量很大,在一定程度上限制了它的使用,尤其在一些需要实时解决的问题上的应用.本文提出了一种新的快速算法,与已有方法比,该算法降低了求解的复杂度,运算量要小得多,计算时间可减少近三分之二,因而更适合于解决实际中的许多问题.

参考文献(References)

[1] Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. *IRE Trans Inf Theory*, 1962,**8**(1):179 - 187.

[2] Shu H Z, Luo L M, Yu W X, et al. A new fast method for computing Legendre moments [J]. *Pattern Recognition*, 2000,**33**(2): 341 - 348.

[3] Shu H Z, Luo L M, Bao X D, et al. An efficient method for computation of Legendre moments [J]. *Graphical Models*, 2000,**62**:237 - 262.

[4] Mukundan R, Ramakrishnan K R. Fast computation of Legendre and Zernike moments [J]. *Pattern Recognition*, 1995,**28**(9): 1433 - 1442.

[5] Teague M R. Image analysis via the general theory of moments [J]. *Opt Soc Am*, 1980,**70**(8): 920 - 930.

[6] Khotanzad A, Hong Y H. Rotation invariant image recognition using features selected via a systematic method [J]. *Pattern Recognition*, 1990,**23**(10): 1089 - 1101.

[7] Born M, Wolf E (eds). *Principle of optics* [M]. Oxford: Pergamon Press,1980.465.

[8] Kintner E C. On the mathematical properties of Zernike polynomials [J]. *Optica Acta*, 1976,**23**(8): 679 - 680.

[9] Chan F H Y, Lam F K. An all adder systolic structure for fast computation of moments [J]. *J VLSI Signal Process*, 1996, **12**:159 - 175.