CV勉強会

6-3-1 「ローパスフィルタ」
~ 6-3-2 「空間フィルタリングによる平滑化との関係」

株式会社エム・ソフト
近藤陽志

2016/9/3

担当範囲

- 6-3-1　ローパスフィルタ
- 6-3-2　空間フィルタリングによる平滑化との関係

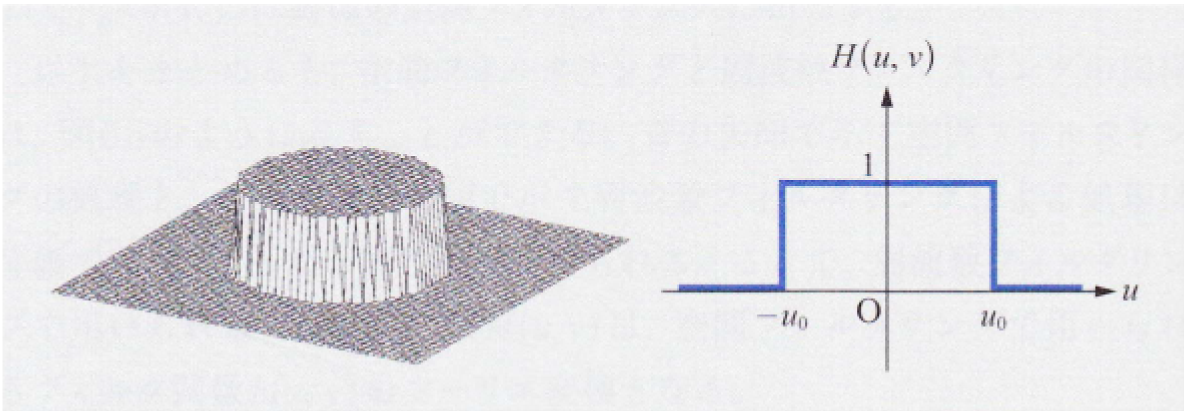
周波数フィルタの具体例として、画像に含まれる空間周波数のうち、ある特定範囲の周波数を残すようなタイプのフィルタについて解説

6-3-1ローパスフィルタ

ローパスフィルタ

＝低周波成分（u < u_0）は残して、

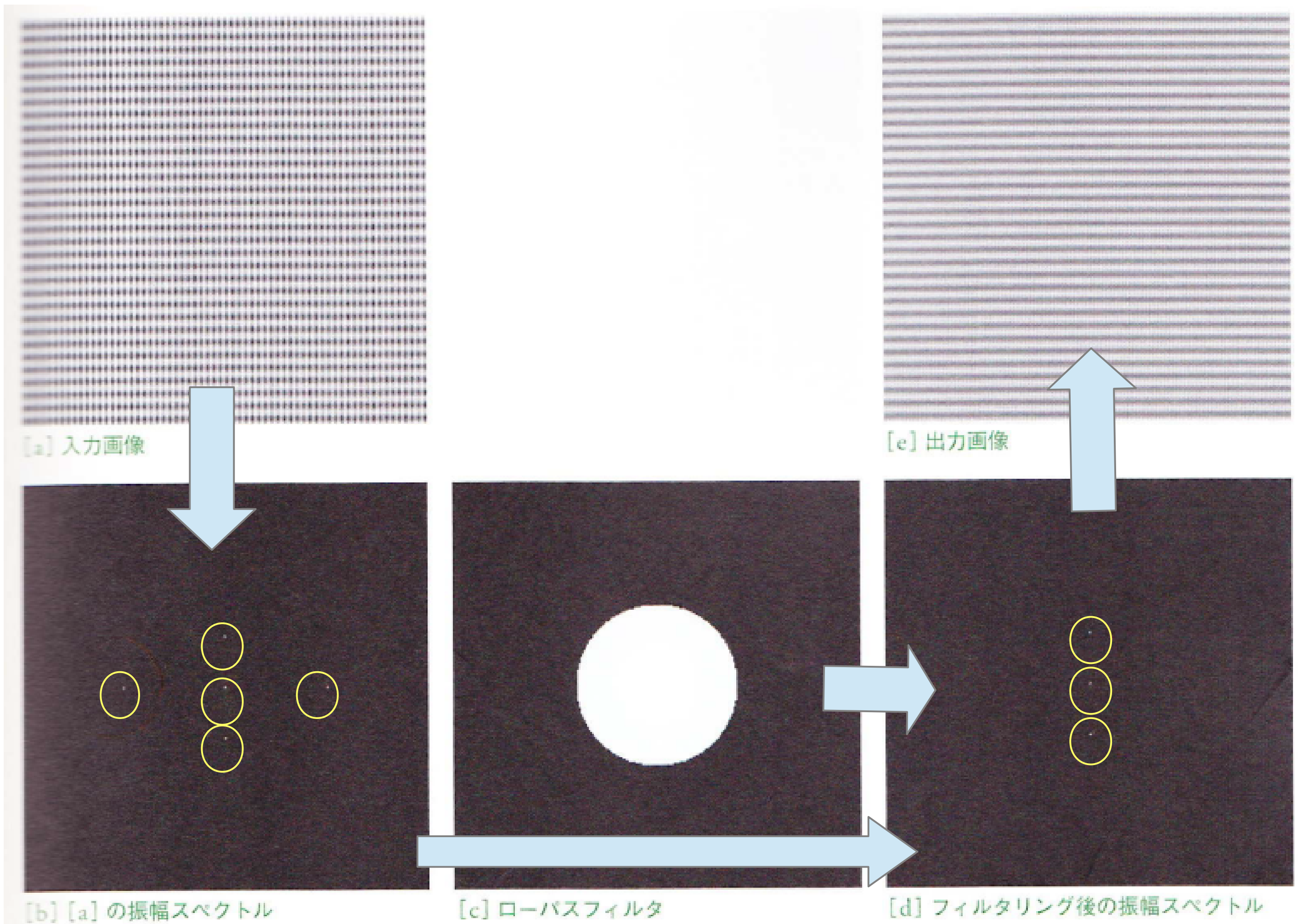
高周波成分（u > u_0）を除去



6-3-1ローパスフィルタ

入力画像

フーリエ変換



出力画像

逆フーリエ変換

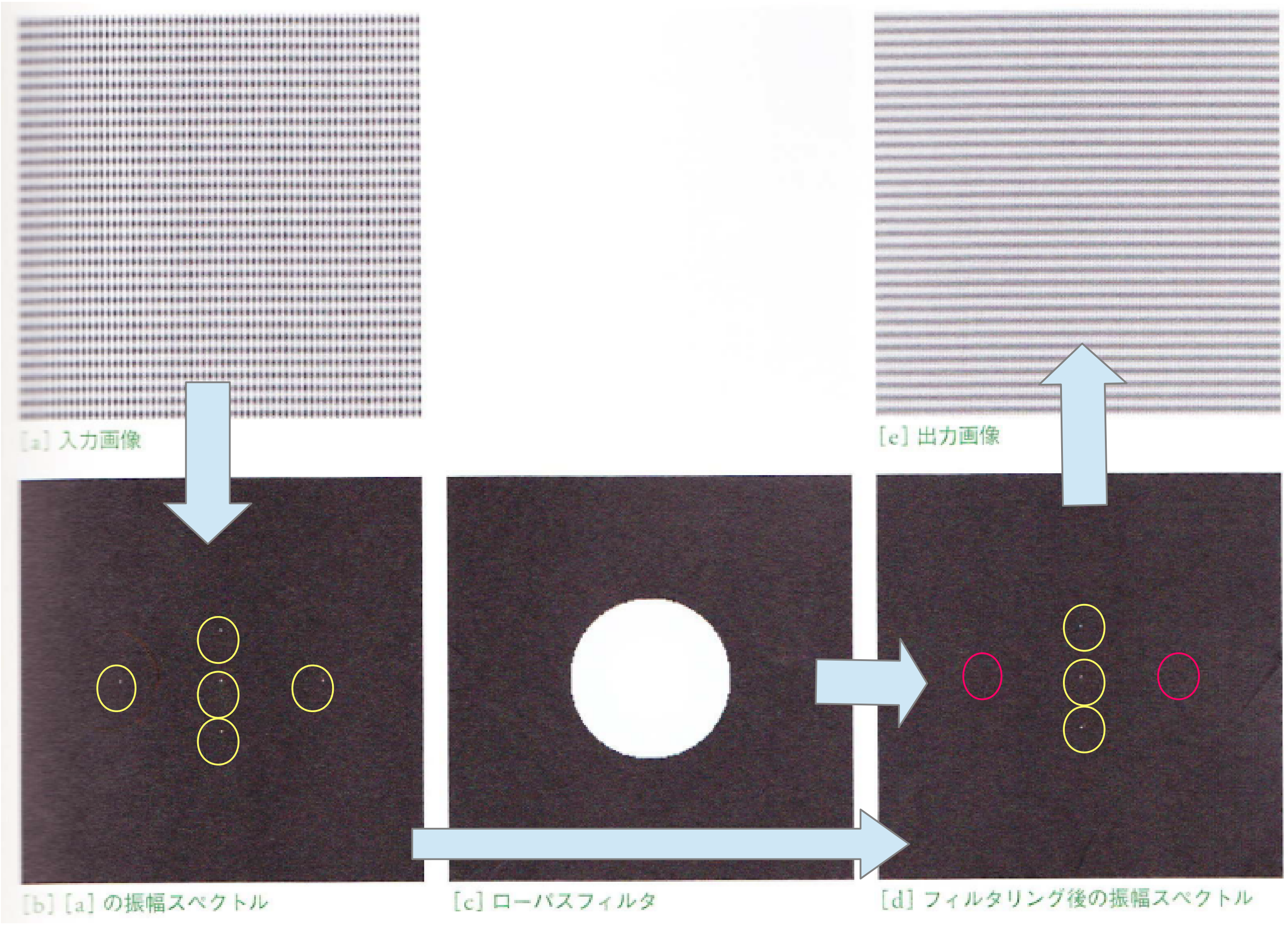
入力画像の
フーリエ変換

ローパスフィルタとの積

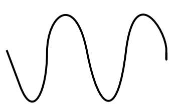
6-3-1ローパスフィルタ

入力画像

入力画像の
フーリエ変換



出力画像

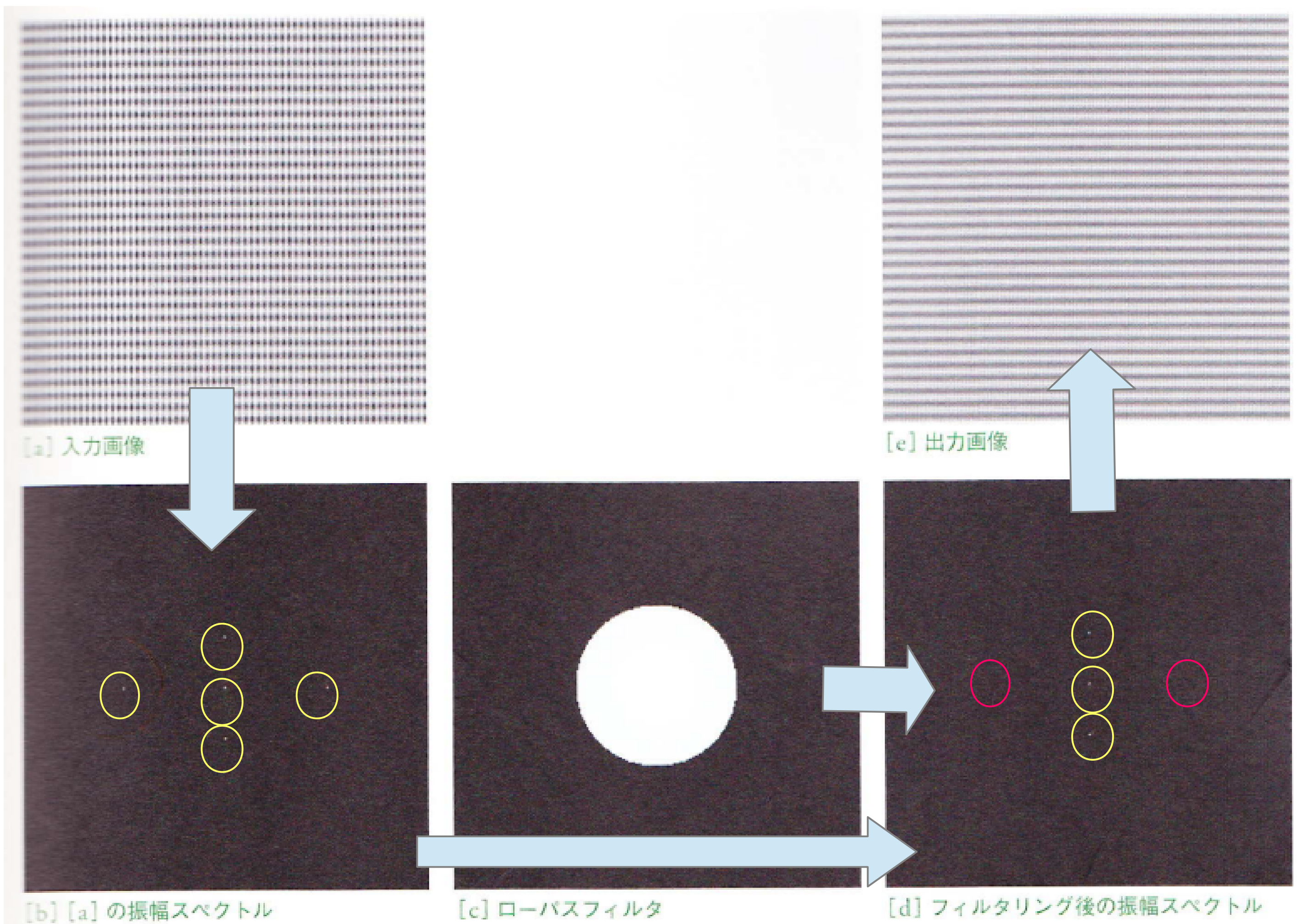


横方向の成分
が消えている

6-3-1ローパスフィルタ

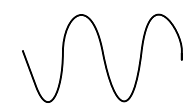
入力画像

入力画像の
フーリエ変換



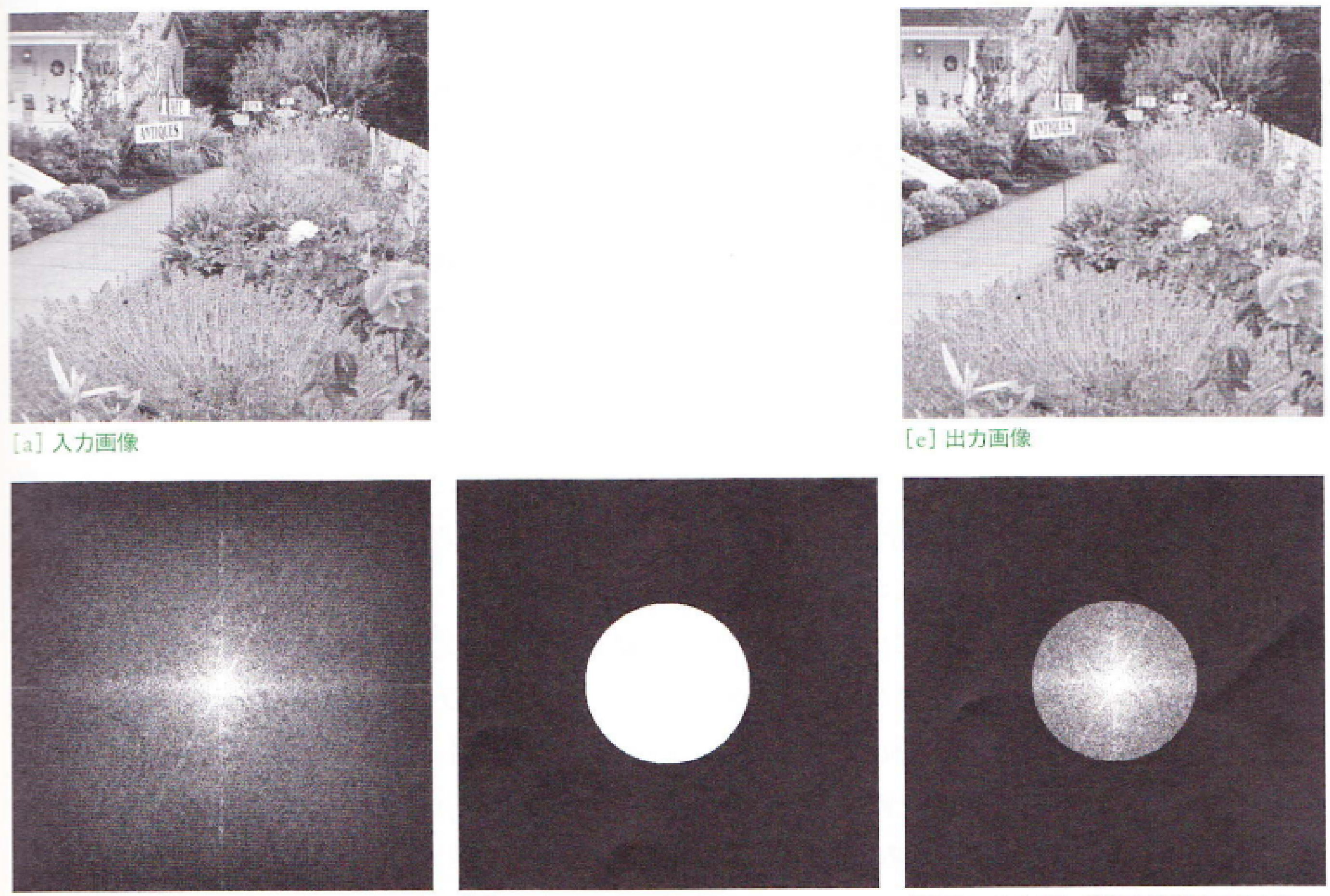
出力画像

横縞だけの
画像となる



横方向の成分
が消えている

6-3-1ローパスフィルタ



[a] 入力画像
[e] 出力画像
[b] [a] の振幅スペクトル
[c] ローパスフィルタ
[d] フィルタリング後の振幅スペクトル

出力画像

高周波成分が除去されて、平滑化された画像が得られる

6-3-1ローパスフィルタ

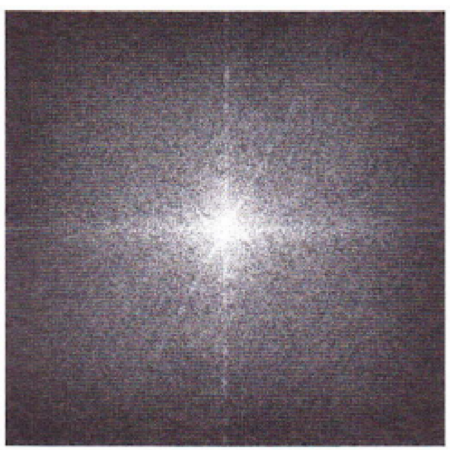
[a] 入力画像

[e] 出力画像

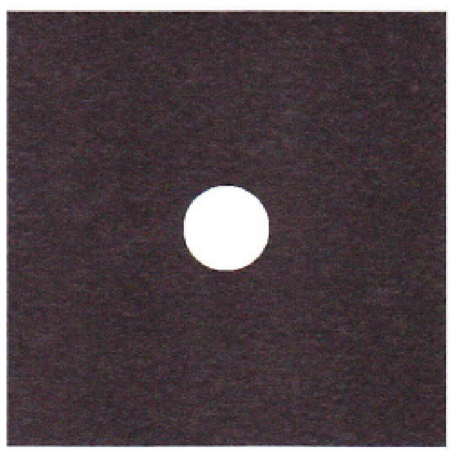
出力画像

高周波成分が除去されて、平滑化された画像が得られる

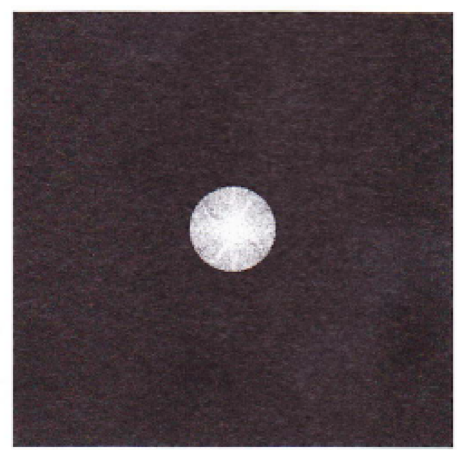
遮断周波数が1/2
⇒より強い平滑化



[b] [a] の振幅スペクトル



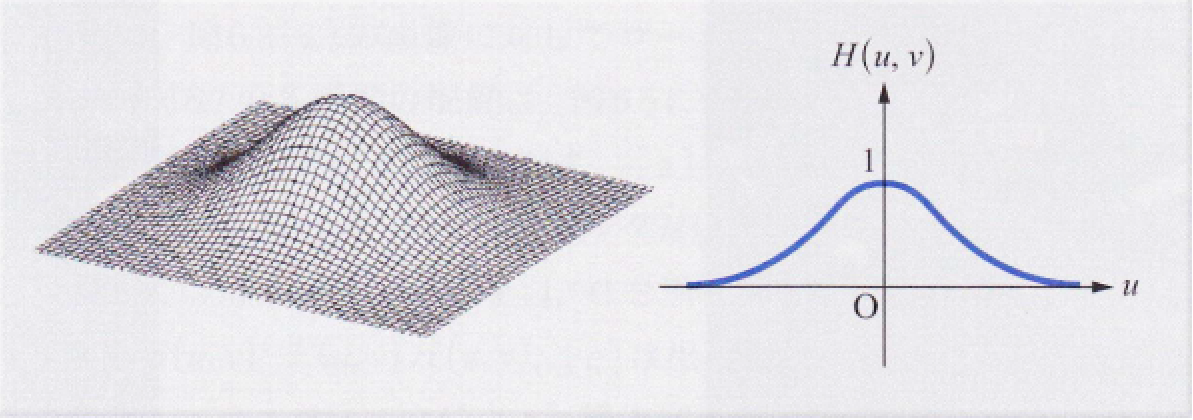
[c] ローパスフィルタ



[d] フィルタリング後の振幅スペクトル

6-3-1ローパスフィルタ

ガウス分布型ローパスフィルタ

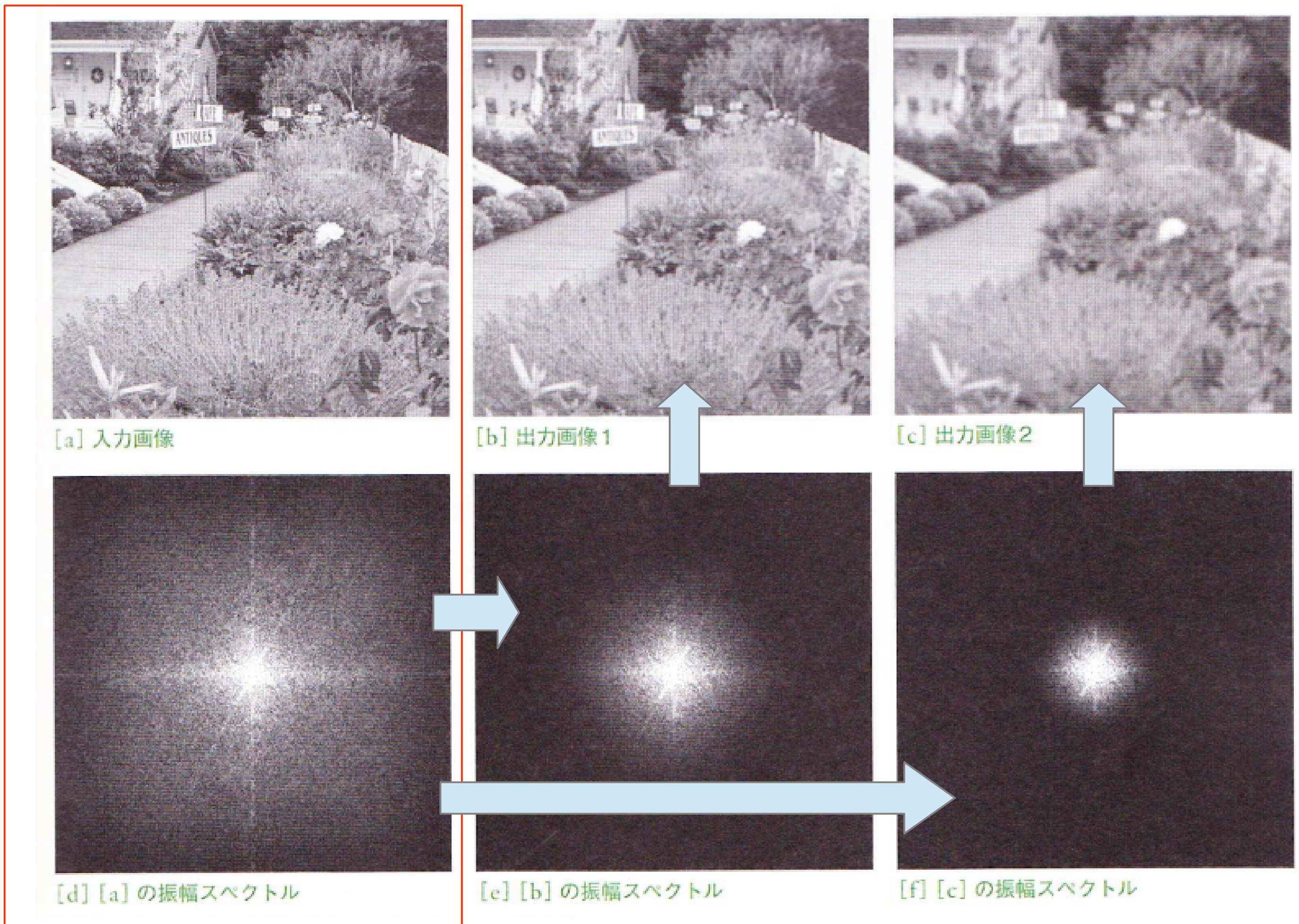


- 滑らかな重み
- u=v=0で1のため、結果画像は平均的な明るさが保たれる

6-3-1ローパスフィルタ

ガウス分布型ローパスフィルタ

入力画像



結果画像

ガウス分布型ローパスフィルタ

6-3-2 空間フィルタリングによる平滑化との関係

ガウシアンフィルタ(5.4)

$$h_g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

を、フーリエ変換すると、

$$H_g(u, v) = \exp\left(-2\pi^2\sigma^2(u^2+v^2)\right)$$

・ガウシアンのフーリエ変換はガウシアン

・分布の広がりは反比例関係（σ <-> 1/2πσ）

6-3-2 空間フィルタリングによる平滑化との関係

平均化フィルタ

$$h_{ave}(x,y)=\frac{1}{w^2}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{w},\frac{y}{w}\right)$$

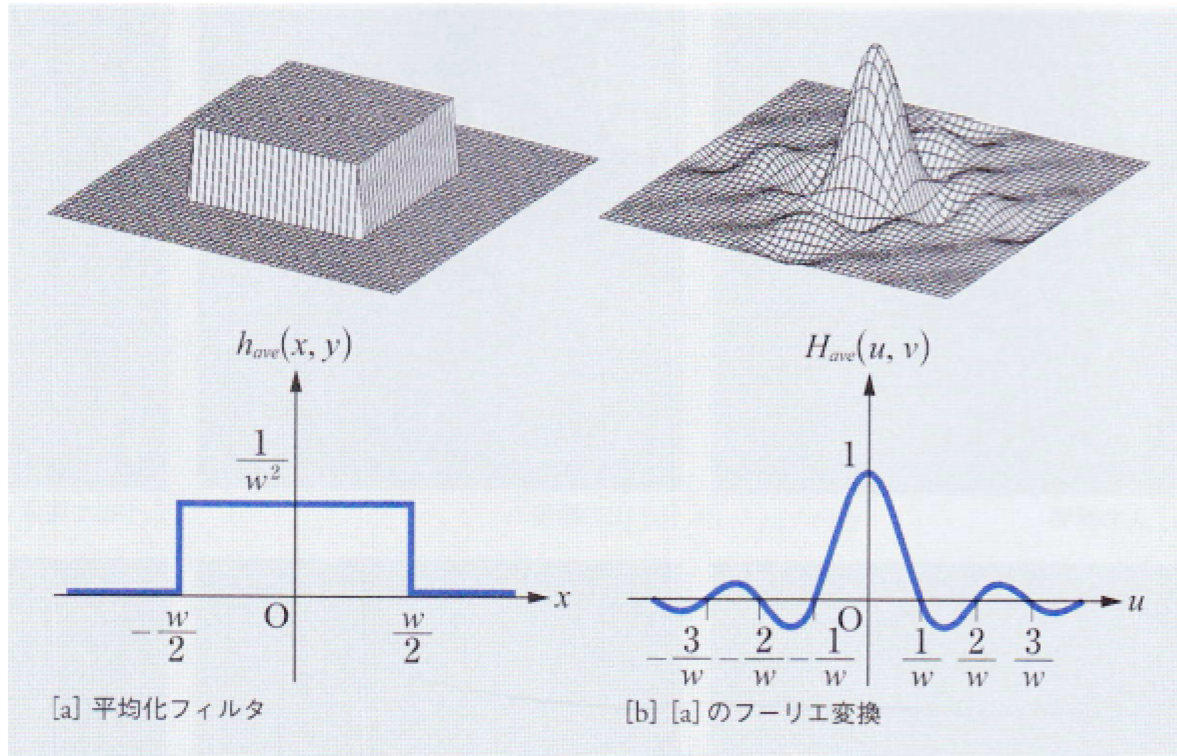
$$\mathrm{rect}(x,y)=\begin{cases}1 & |x|\leqq\frac{1}{2}\ \text{かつ}\ |y|\leqq\frac{1}{2}\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

をフーリエ変換すると、

$$H_{ave}(u,v)=\frac{\sin\pi wu}{\pi wu}\frac{\sin\pi wv}{\pi wv}$$

6-3-2 空間フィルタリングによる平滑化との関係

平均化フィルタ



[a] 平均化フィルタ

[b] [a] のフーリエ変換

性質

・u,vが大きいと減衰＝ローパスフィルタ

・wが大きい＝広い平均化、狭いローパスフィルタ

参考:

ガウシアンのフーリエ変換

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} h_g(x) e^{-iux} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-iux} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+i\sigma^2 u)^2} e^{\frac{(i\sigma^2 u)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+iu\sigma^2)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \sqrt{2\pi\sigma^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} h_g(x) e^{-2\pi iux} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi^2\sigma^2 u^2}
$$

参考:

平均化フィルタのフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}h_{ave}(x)e^{-iux} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{w}rect\left(\frac{x}{w}\right)e^{-iux}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}dxe^{-iux}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{w}\left[\frac{1}{-iu}e^{-iux}\right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{w}\frac{e^{iwu2}-e^{-i\frac{wu}{2}}}{iu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{wu}\frac{e^{iwu2}-e^{-i\frac{wu}{2}}}{2i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{wu}\sin\left(\frac{wu}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}h_{ave}(x)e^{-2\pi iux} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\pi wu)}{\pi wu}$$