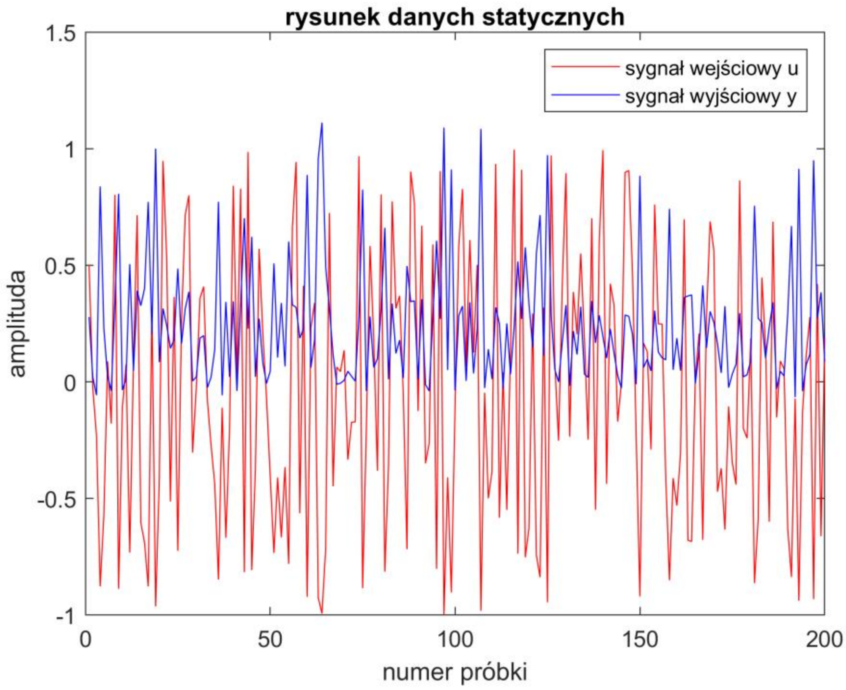
MODI projekt 2

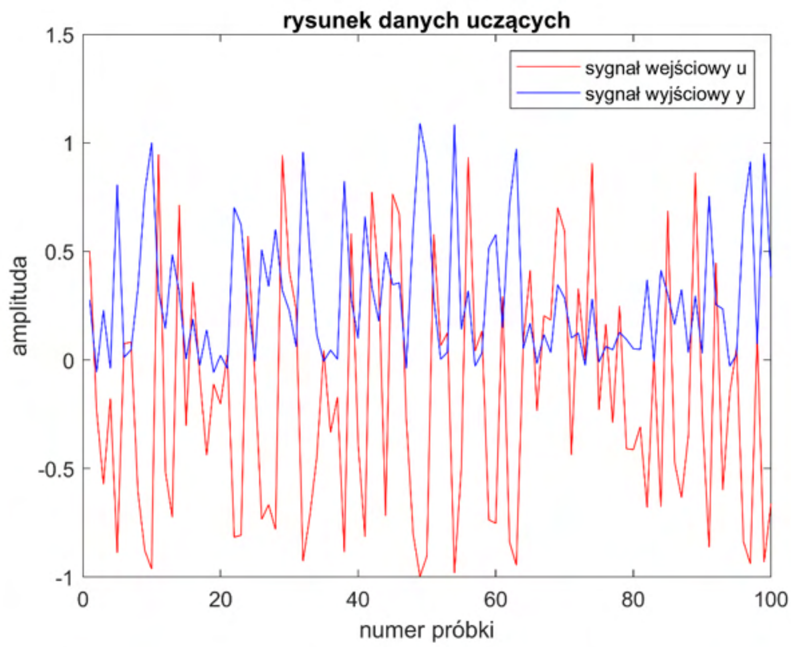
Zadanie 1 Kacper Marchlewicz

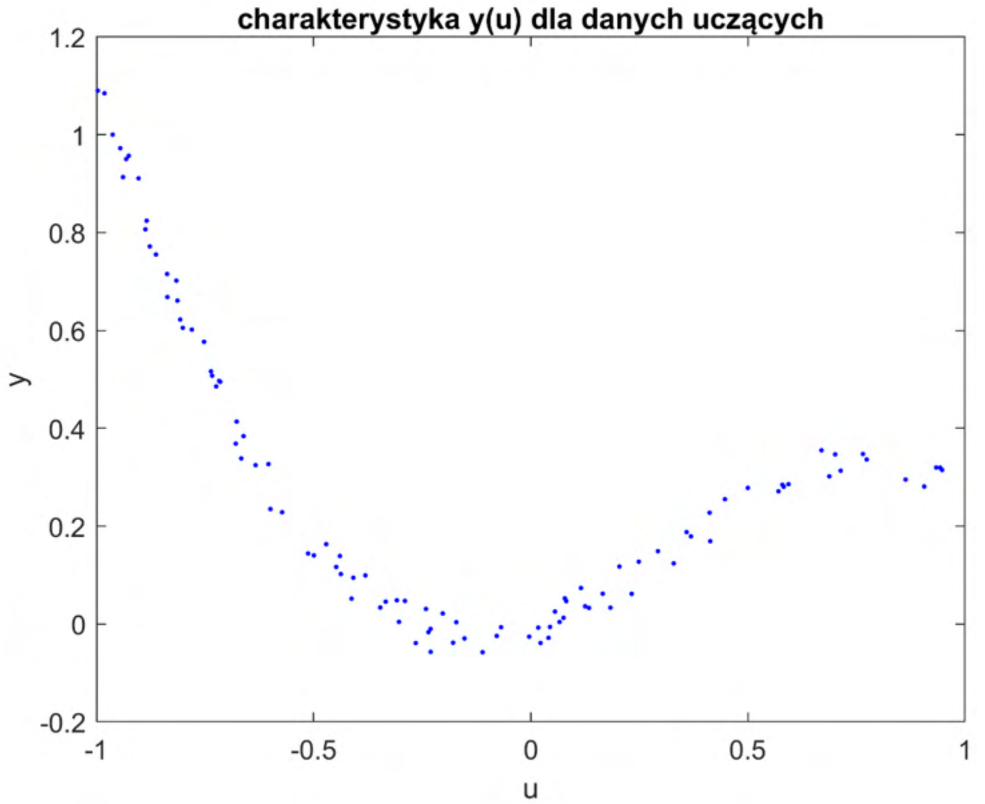
1. Identyfikacja modeli statycznych

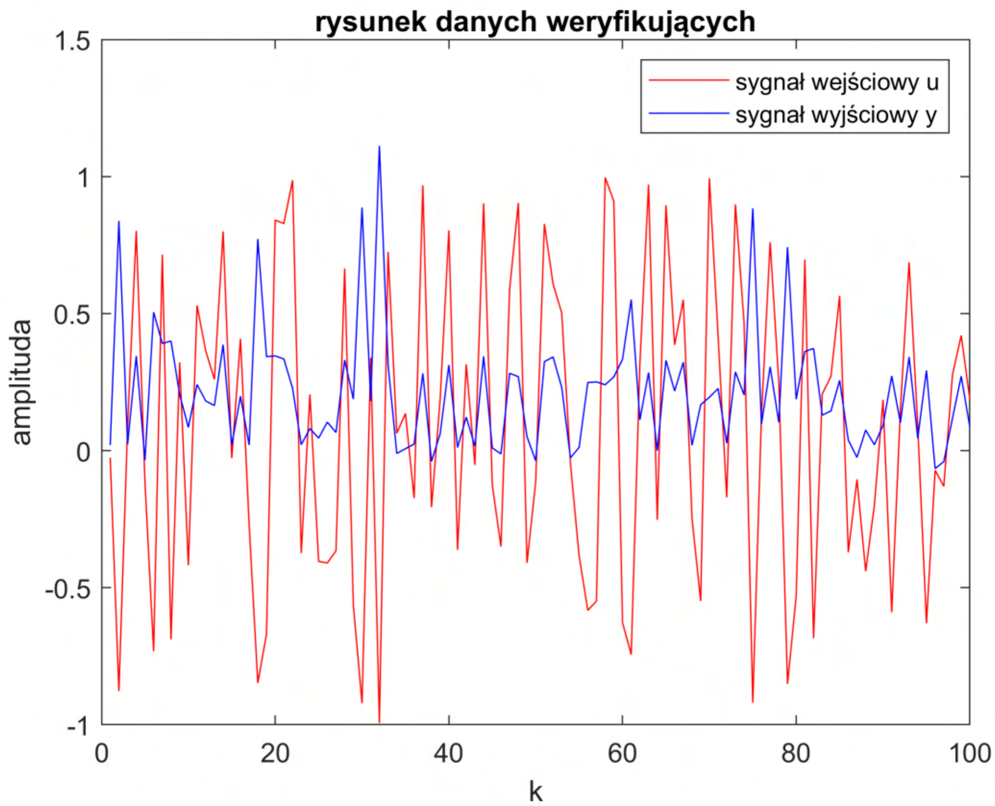
a) Dane statyczne

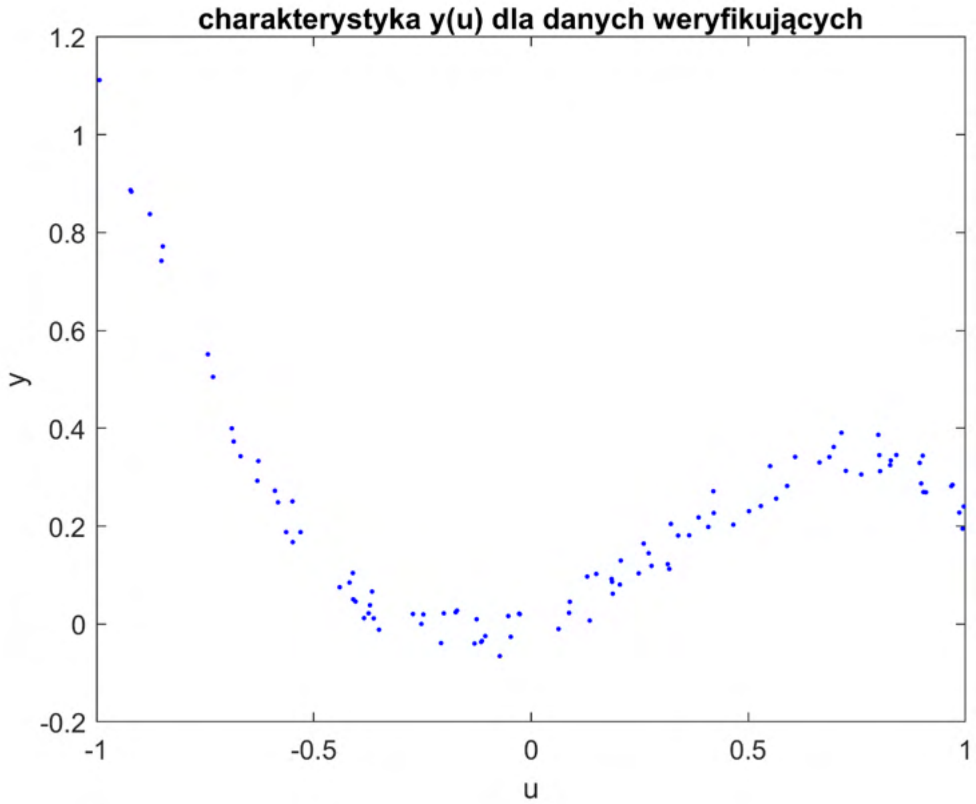


Aby dane zbiór danych uczących był jak najbardziej podobny do zbioru danych weryfikujących postanowiłem podzielić zbiór całkowity na dwie równe części (co drugą próbkę wstawiałem do zbioru weryfikującego).




charakterystyka y(u) dla danych uczących
y
u
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.5
0
0.5
1


rysunek danych weryfikujących
sygnał wejściowy u
sygnał wyjściowy y
amplituda
k
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
20
40
60
80
100



b) Metoda Najmniejszych Kwadratów, statyczny model liniowy

Model statyczny jest postaci:

$$y(u) = a_0 + \ a_1 u$$

Funkcję liniową odpowiadającą modelowi wyznaczyłem za pomocą Metody Najmniejszych Kwadratów. Korzystając z następujących wzorów:

$$E = \sum_{i=1}^{P} (y_i^{mod} - y_i)^2 = \ ||Y^{mod} - Y||^2 = ||MW - Y||^2$$

$$W = M \backslash Y$$

Gdzie:

Y jest macierzą sygnału wyjściowego y.

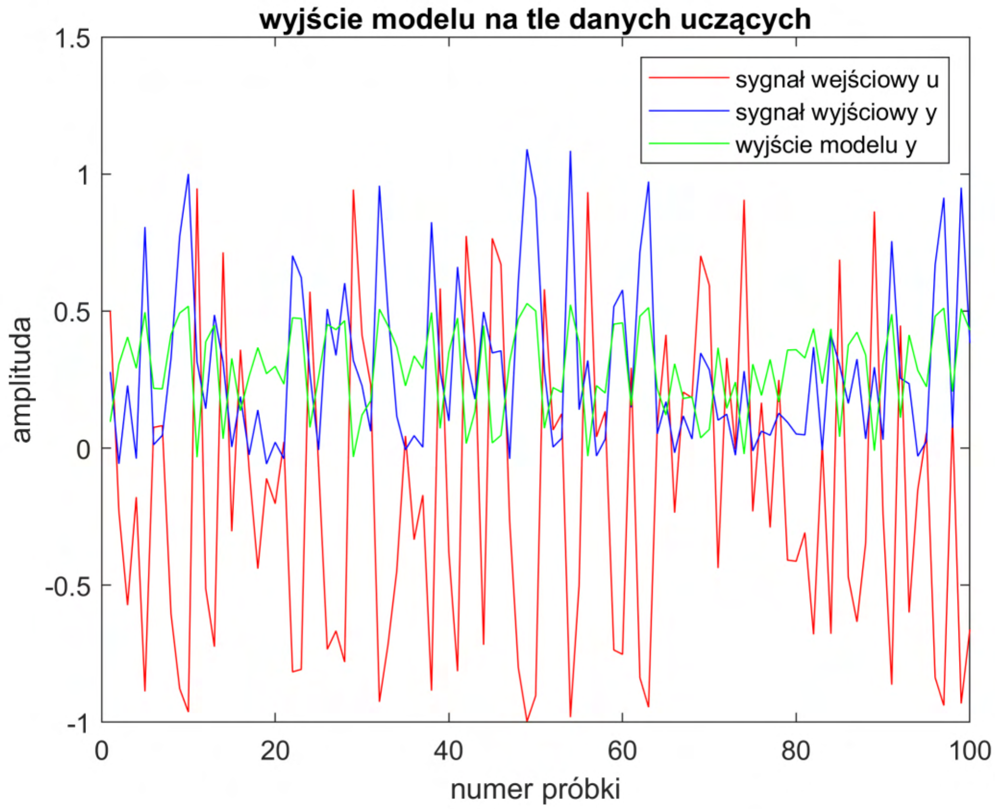
M jest macierzą sygnału wejściowego u, pierwsza kolumna jest kolumną liczby 1.

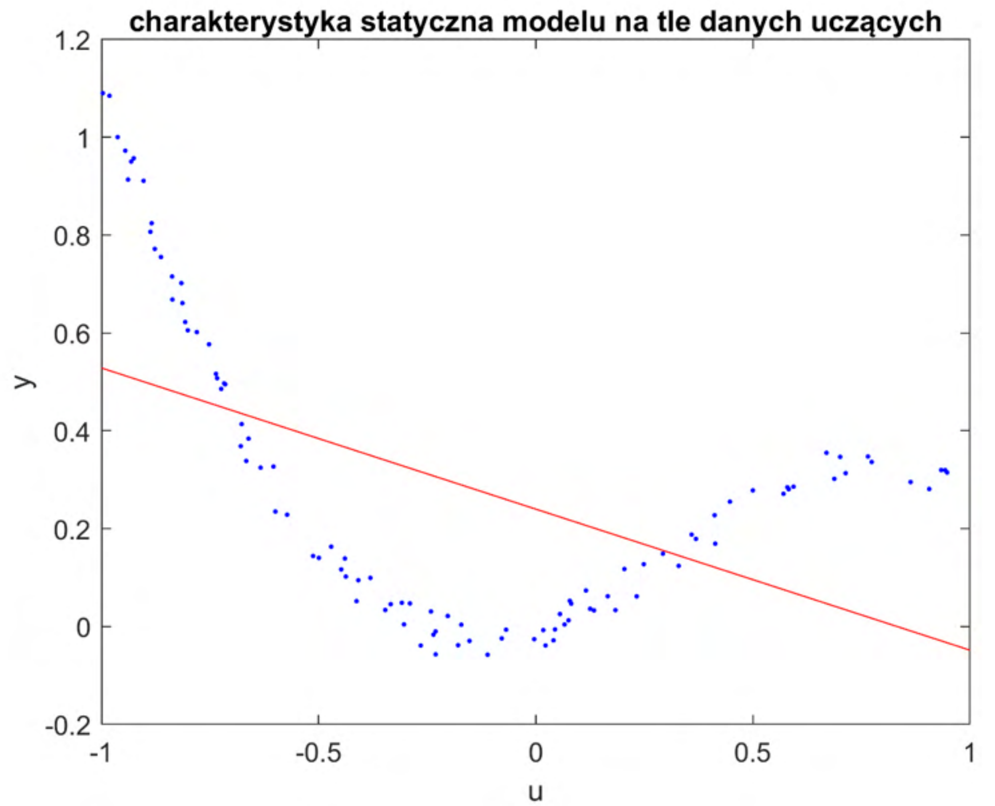
W jest macierzą zawierającą współczynniki a_0 i a_1.

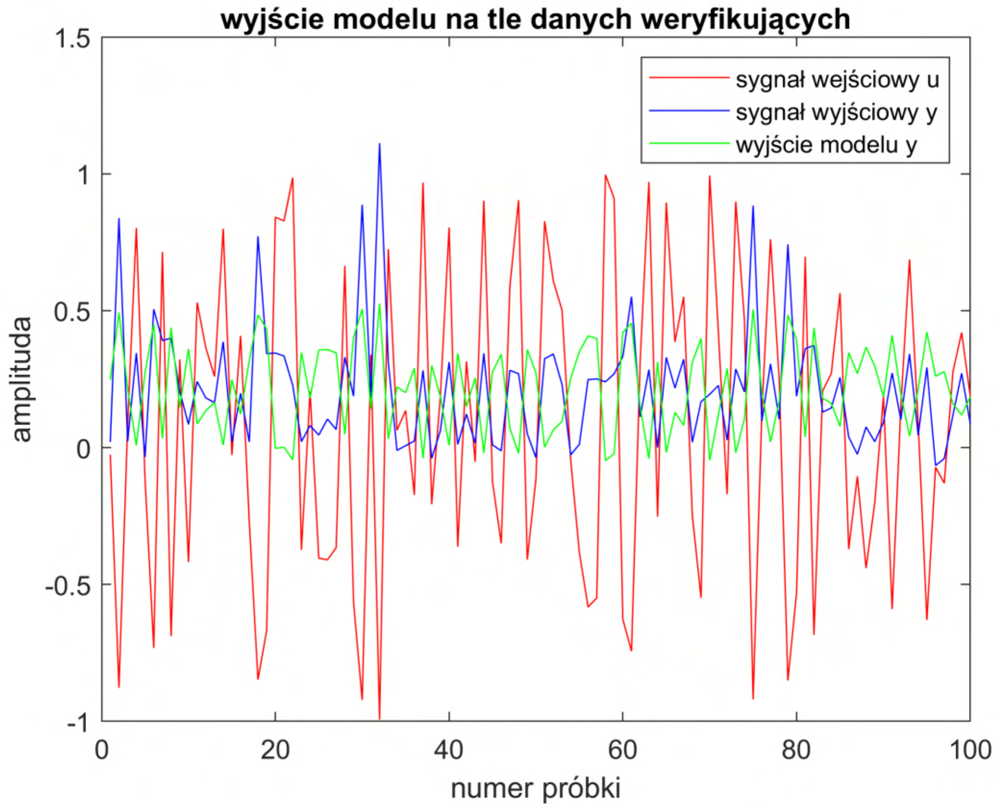
Obliczone współczynniki wynoszą:

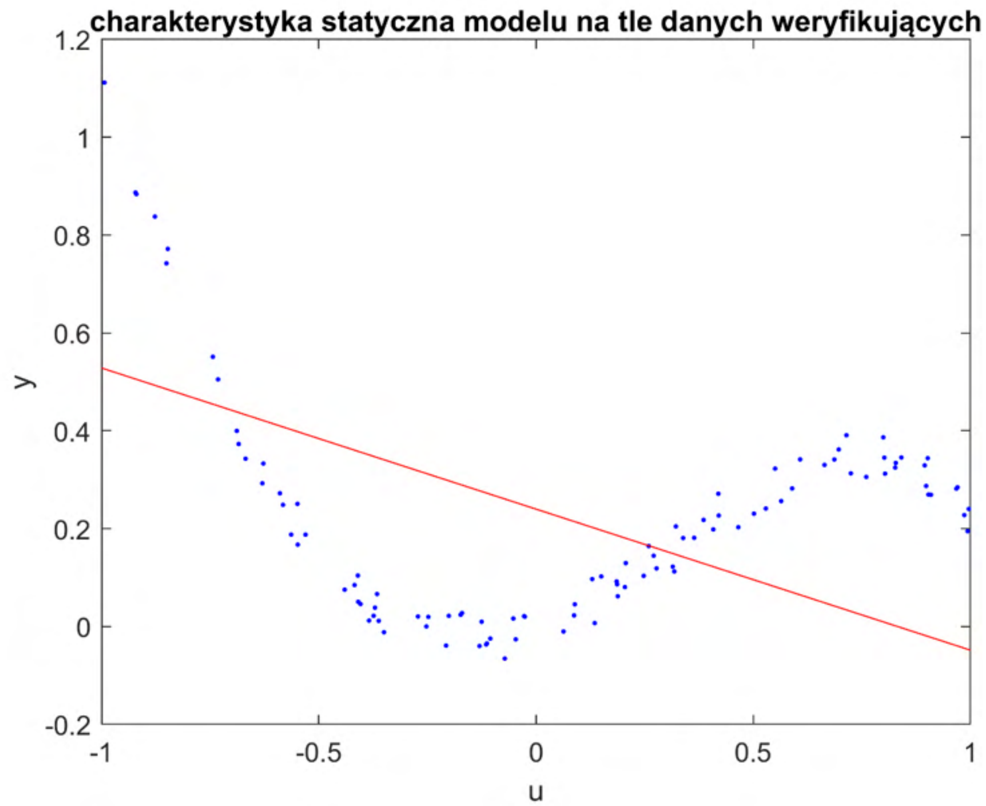
$$a_0 = 0.2399$$

$$a_1 = -0.2884$$


wyjście modelu na tle danych uczących
sygnał wejściowy u
sygnał wyjściowy y
wyjście modelu y
amplituda
numer próbki


charakterystyka statyczna modelu na tle danych uczących
y
u


wyjście modelu na tle danych weryfikujących
sygnał wejściowy u
sygnał wyjściowy y
wyjście modelu y
amplituda
numer próbki
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
20
40
60
80
100


charakterystyka statyczna modelu na tle danych weryfikujących
y
u
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.5
0
0.5
1

$$E_{ucz} = 6{,}6858$$

$$E_{wer} = 6{,}3349$$

Model liniowy bardzo niedokładnie odwzorowuje dane. Linia prosta nie pokrywa się ze śladem danych. Błędy są wysokie. Po kształcie danych widać, że powinniśmy skłonić się ku modelom nieliniowym.

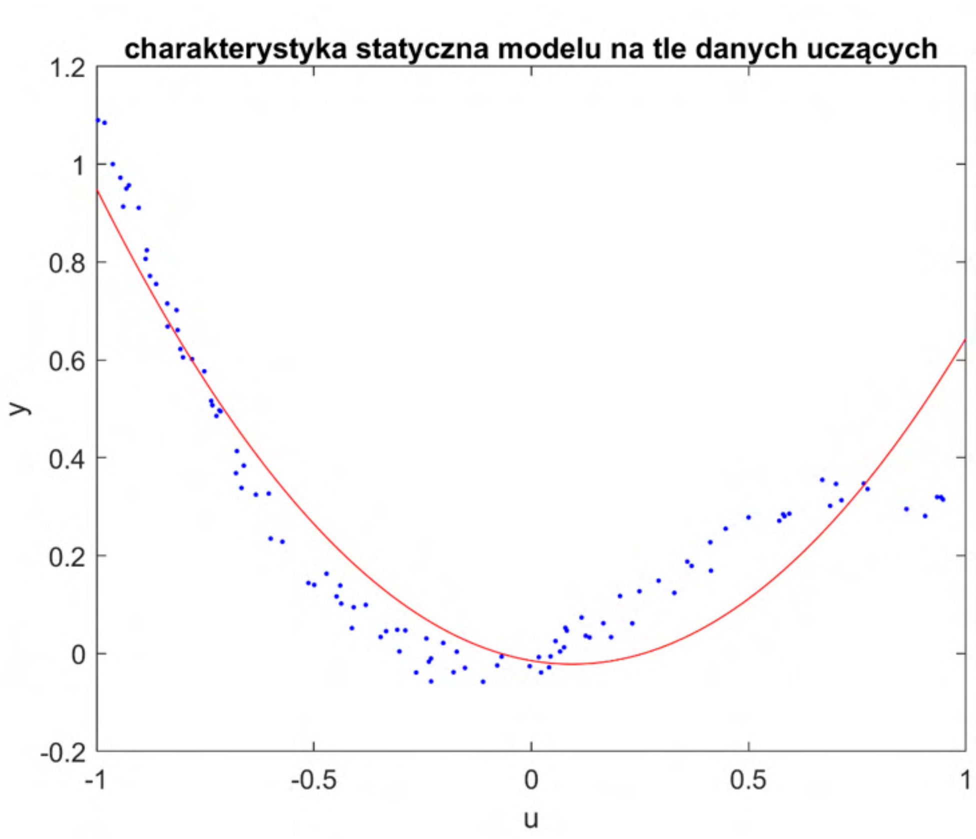
c) Metoda Najmniejszych Kwadratów, statyczny model nieliniowy

Model statyczny jest postaci:

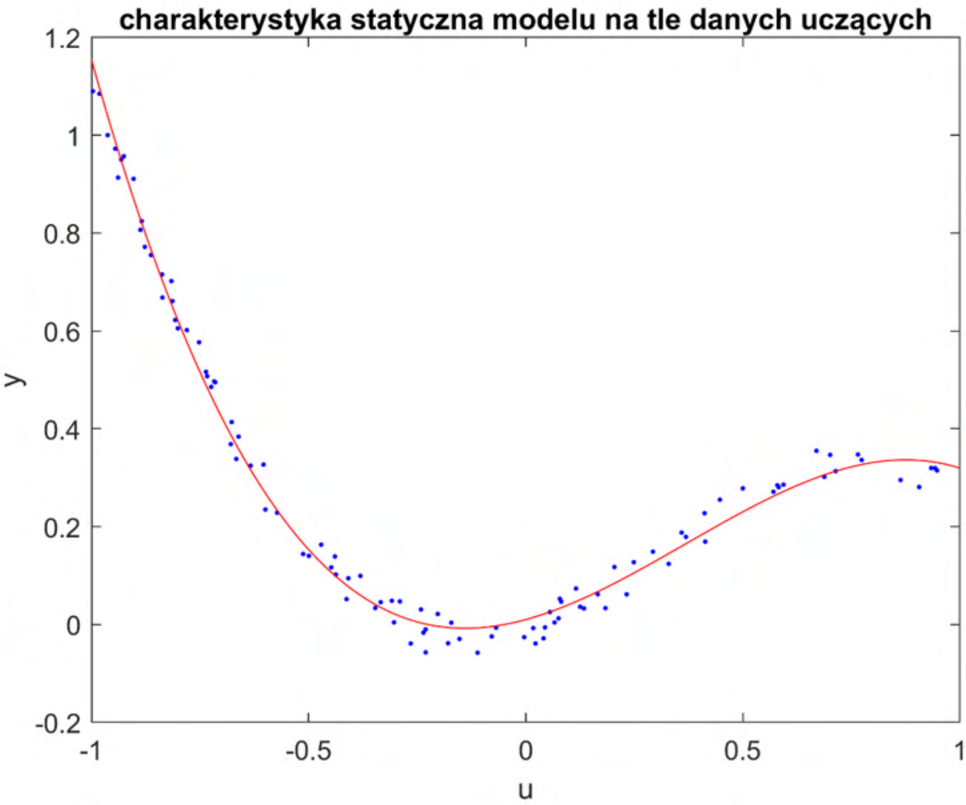
$$y(u) = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i u^i$$

Korzystałem z wzorów jak w poprzednim podpunkcie, obliczenia przeprowadzałem analogicznie.

N = 2

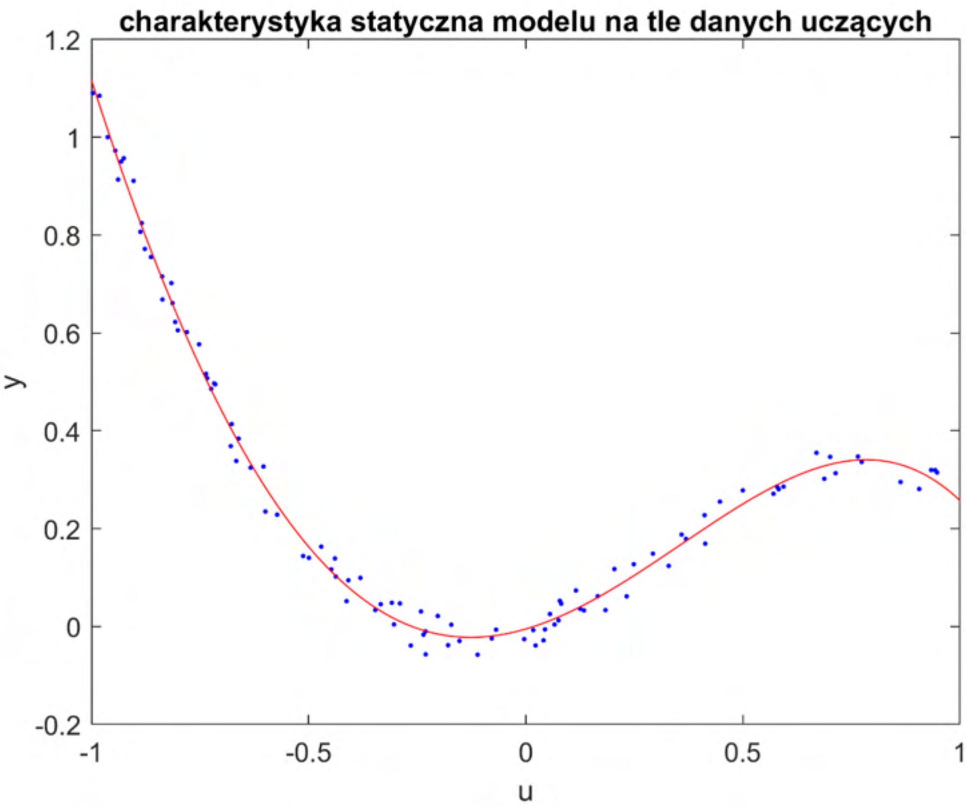


N = 3



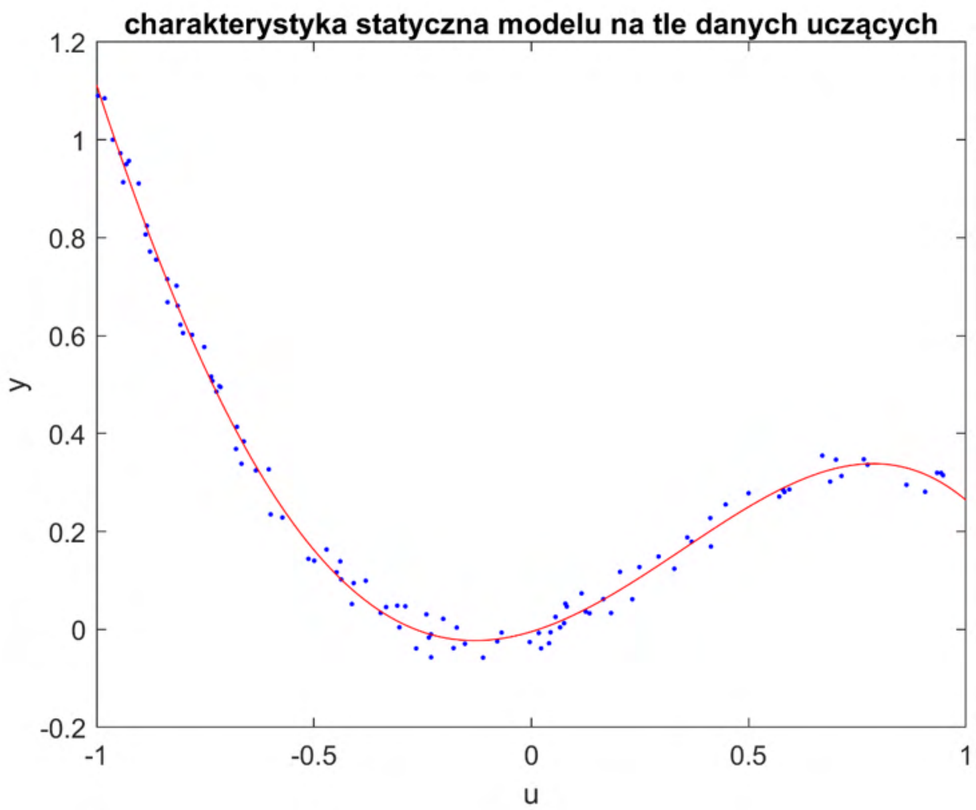
charakterystyka statyczna modelu na tle danych uczących
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
y
-1
-0.5
0
0.5
1
u

N = 4



charakterystyka statyczna modelu na tle danych uczących
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
y
-1
-0.5
0
0.5
1
u

N = 5



Charakterystyki dla wyższych współczynników (większych od 5) wyglądają praktycznie identycznie, więc zamieściłem dla nich tylko wyniki w tabeli

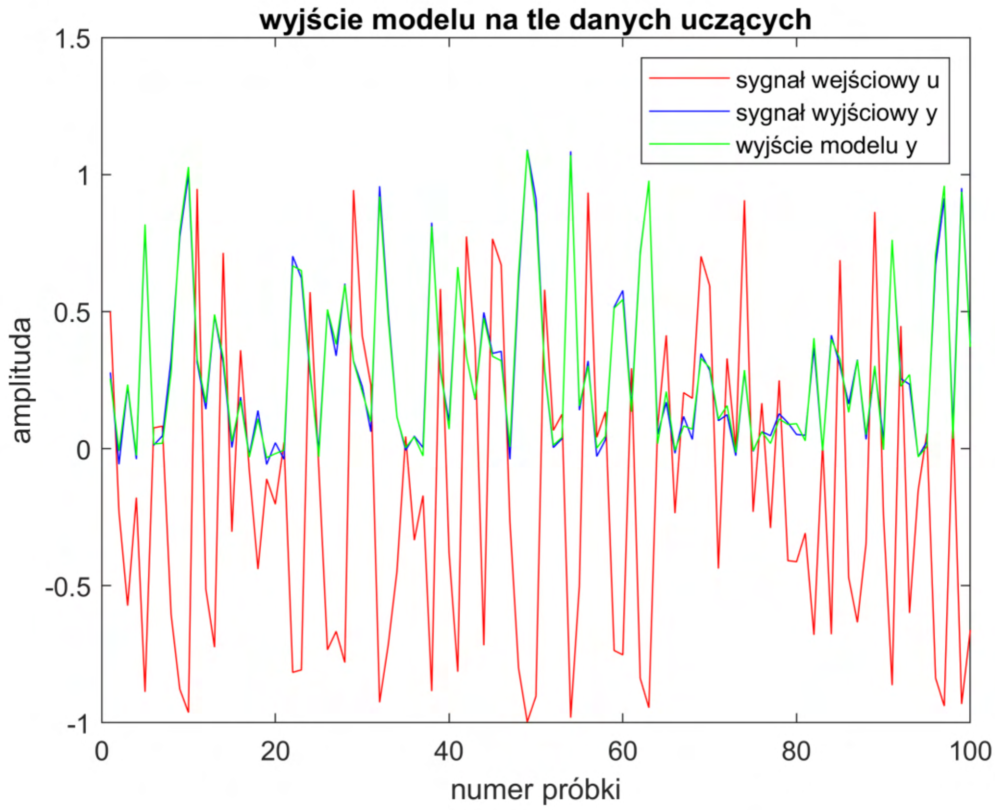
Błąd modelu w zależności od stopnia wielomianu

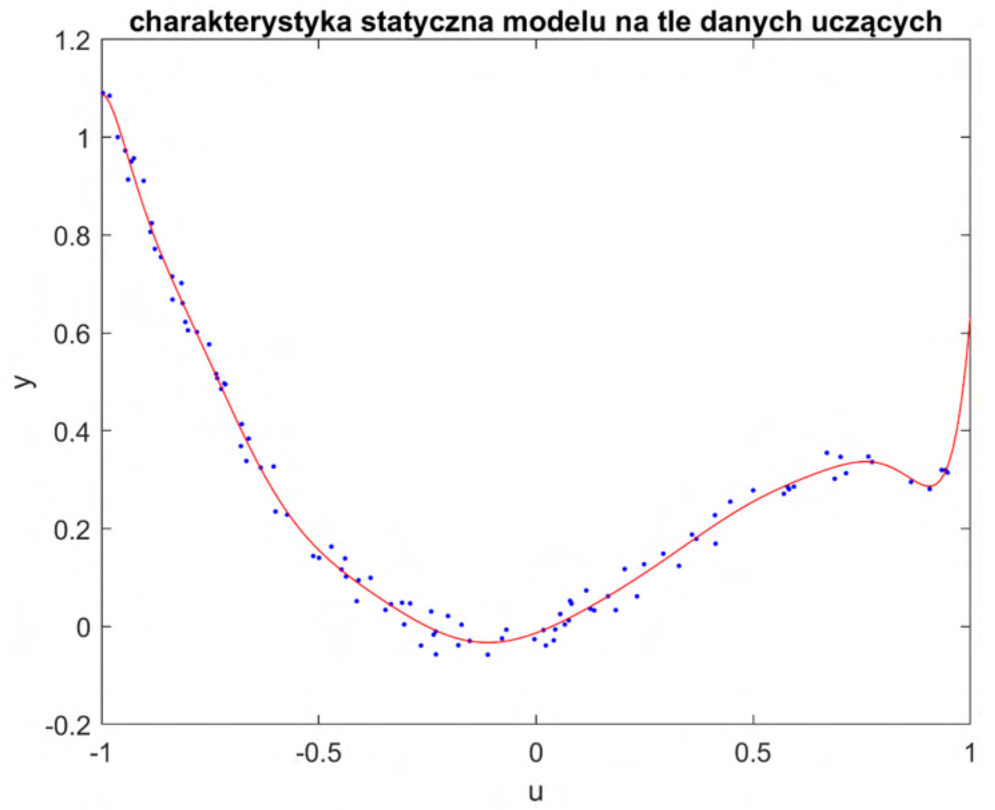
Stopień wielomianu	Błąd uczący	Błąd weryfikujący
1	6,6858	6,3349
2	0,9721	1,8692
3	0,0875	0,1418
4	0,0648	0,0977
5	0,0646	0,0985
6	0,0637	0,1082
7	0,0623	0,1251
8	0,0623	0,1267
9	0,0621	0,1441
10	0,0603	0,2419

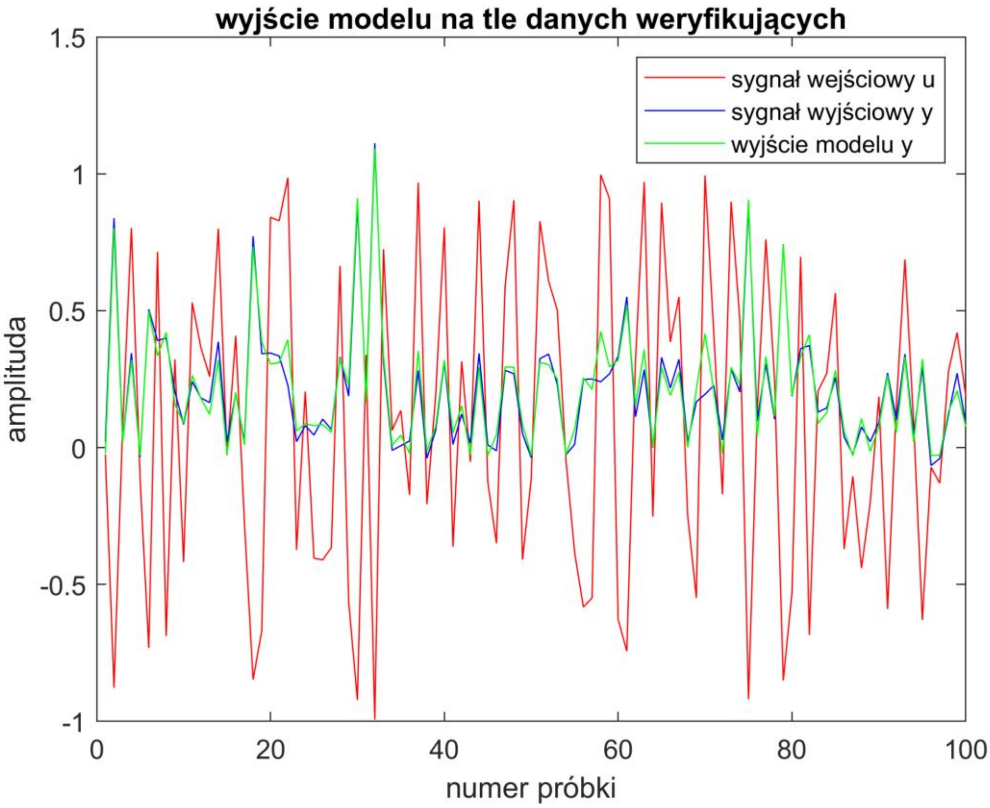
Błąd uczący maleje wraz ze wzrostem stopnia wielomianu. Z błędem weryfikującym z początku jest podobnie, lecz od stopnia 4 zaczyna rosnąć.

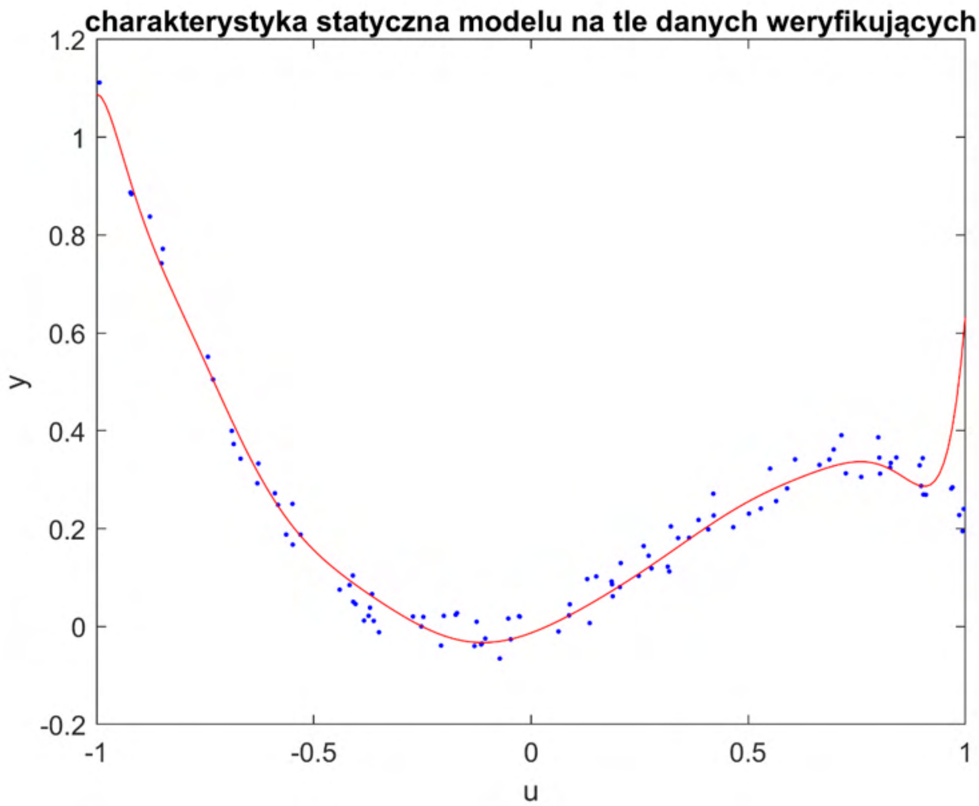
Przykładowy model dla którego stopień jest zbyt wysoki

N = 14



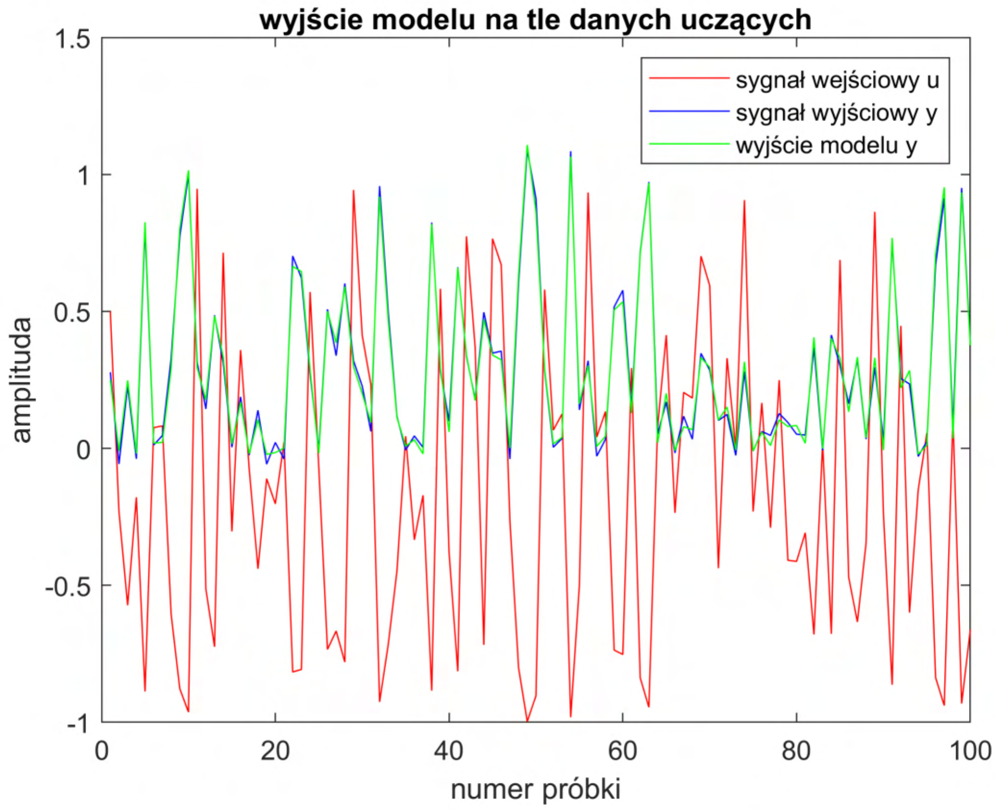


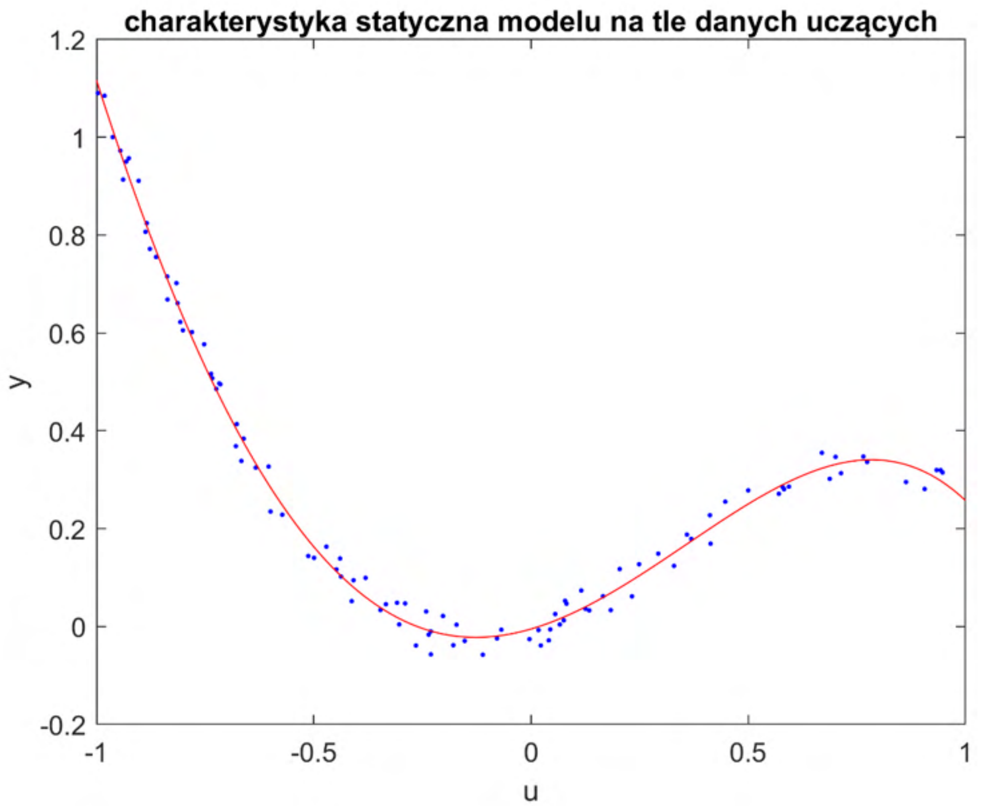


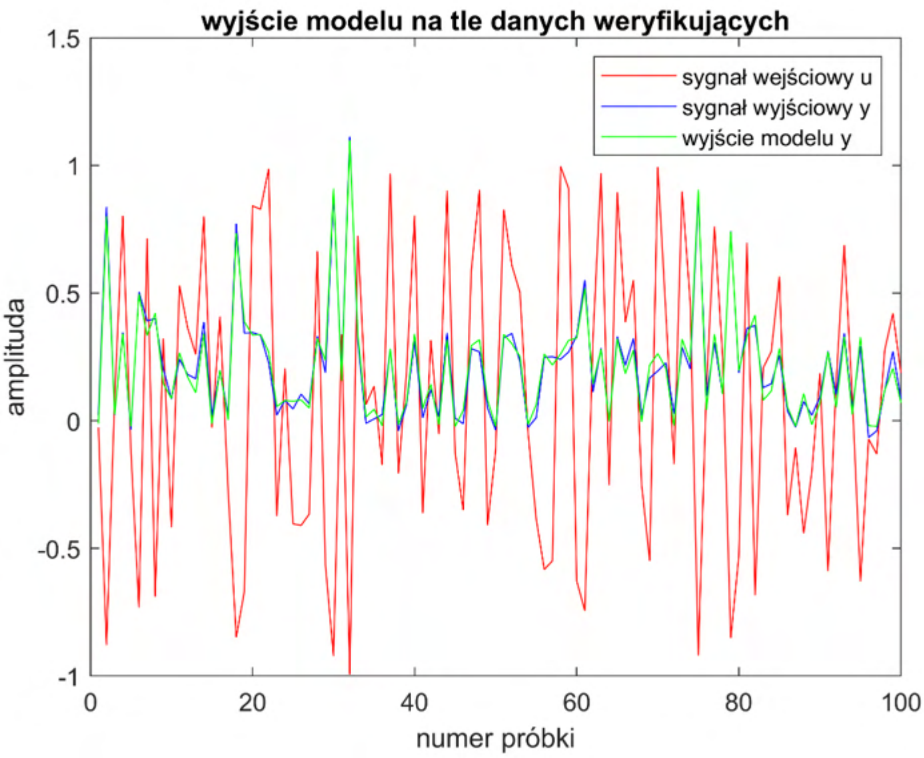


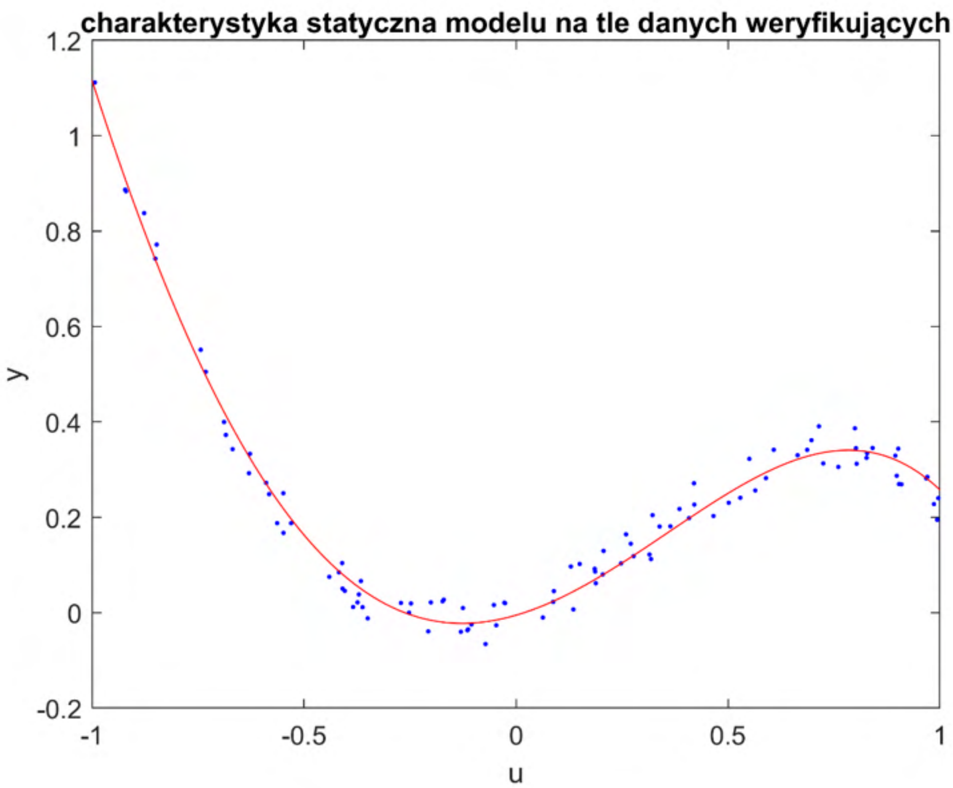
Najlepszy model statyczny:

N = 4


wyjście modelu na tle danych uczących
sygnał wejściowy u
sygnał wyjściowy y
wyjście modelu y
amplituda
numer próbki
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
20
40
60
80
100


charakterystyka statyczna modelu na tle danych uczących
y
u
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-1
-0.5
0
0.5
1

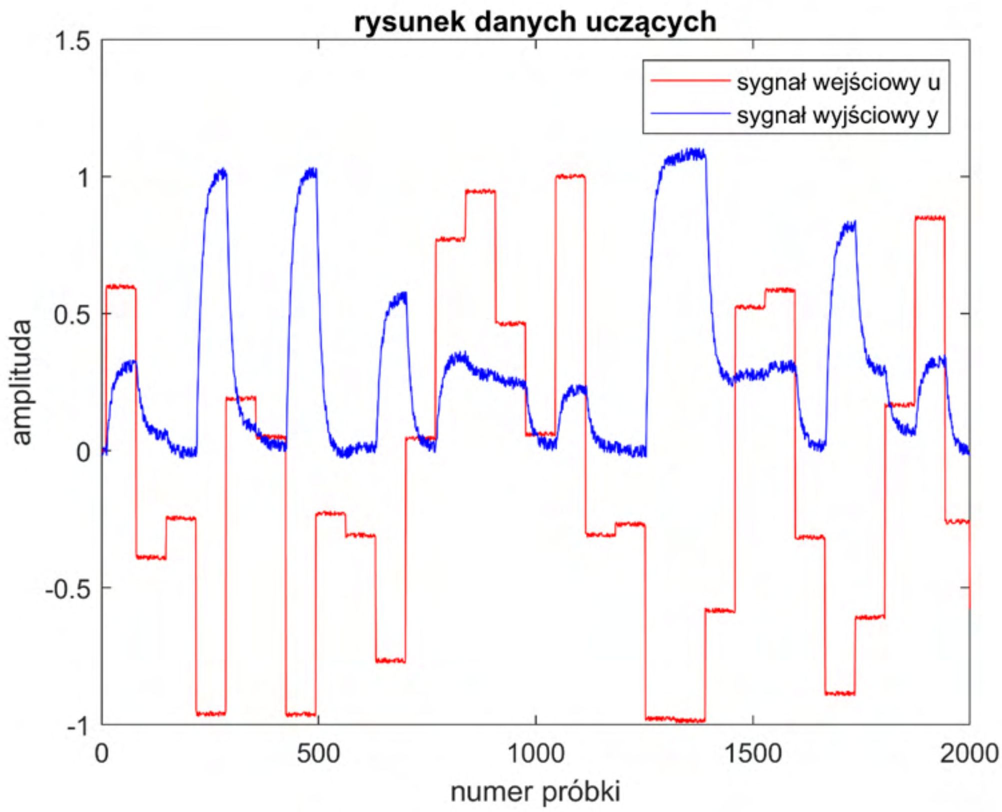


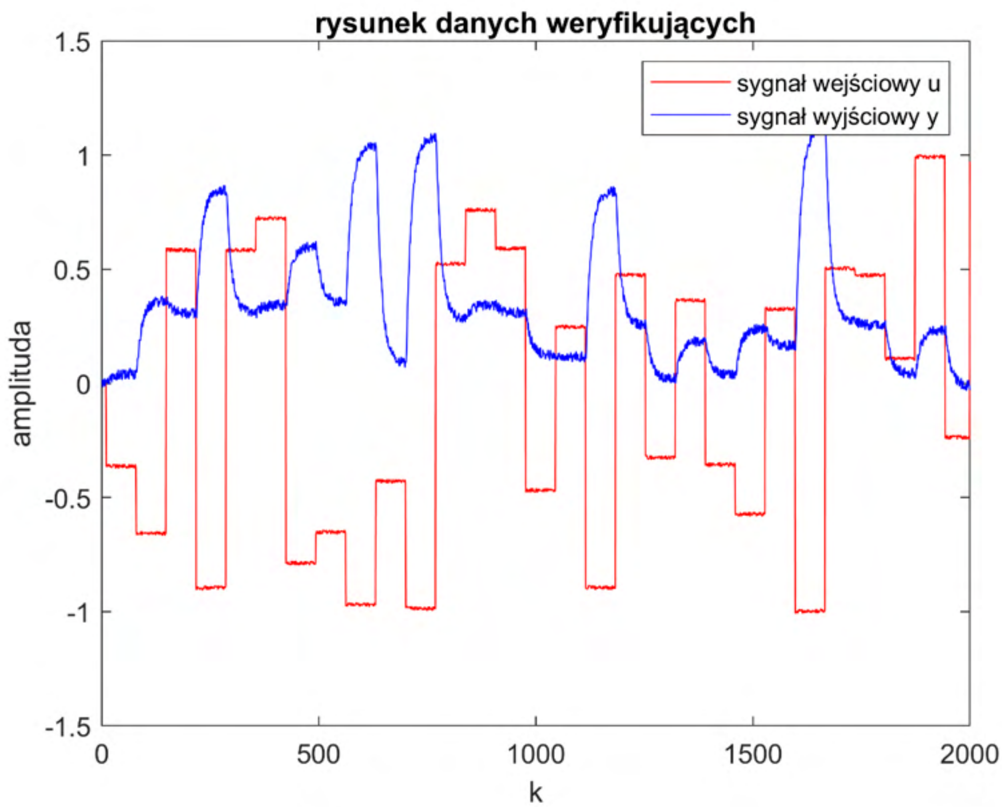


Zdecydowałem się na model stopnia 4, gdyż dla niego mamy najmniejszy błąd weryfikujący. Dla stopni wyższych błąd uczący maleje, lecz rośnie weryfikujący. W identyfikacji kierujemy się najlepszym odwzorowaniem danych, błędem wzoru weryfikującego. Dla stopnia większego od 4 błąd ten rośnie.

2. Identyfikacja modeli dynamicznych

a) Zbiory danych





b) Metoda Najmniejszych Kwadratów, dynamiczny model liniowy

Modele są postaci:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i)$$

Korzystam ze wzorów jak dla modeli statycznych , z różnicą:

Macierz $M = [U_M \; Y_M]$, gdzie:

$$U_M = \begin{bmatrix} u(k_{min}-1) & \dots & u(k_{min}-1)^d & \dots & u(k_{min}-n) & \cdots & u(k_{min}-n)^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k_{max}-1) & \dots & u(k_{max}-1)^d & \dots & u(k_{max}-n) & \cdots & u(k_{max}-n)^d \end{bmatrix}$$

$$Y_M = \begin{bmatrix} y(k_{min}-1) & \dots & y(k_{min}-1)^d & \dots & y(k_{min}-n) & \cdots & y(k_{min}-n)^d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k_{max}-1) & \dots & y(k_{max}-1)^d & \dots & y(k_{min}-n) & \cdots & y(k_{max}-n)^d \end{bmatrix}$$

n – rząd dynamiki, d – stopień wielomianu (w tym podpunkcie wynosi 1)

Dla modeli bez rekurencji zastosowałem predykcję jeden krok do przodu – ARX:

$$y_{mod}(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i)$$

Dla modeli z rekurencja zastosowałem predykcję wiele kroków do przodu – OE:

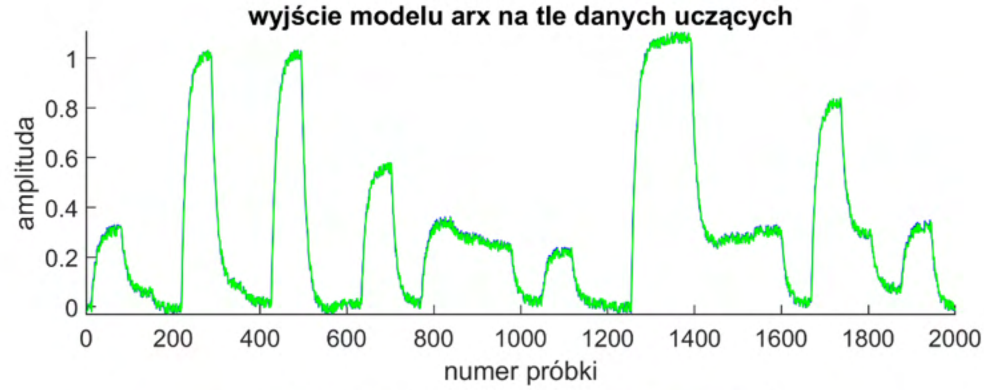
$$y_{mod}(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_A} a_i y_{mod}(k-i)$$

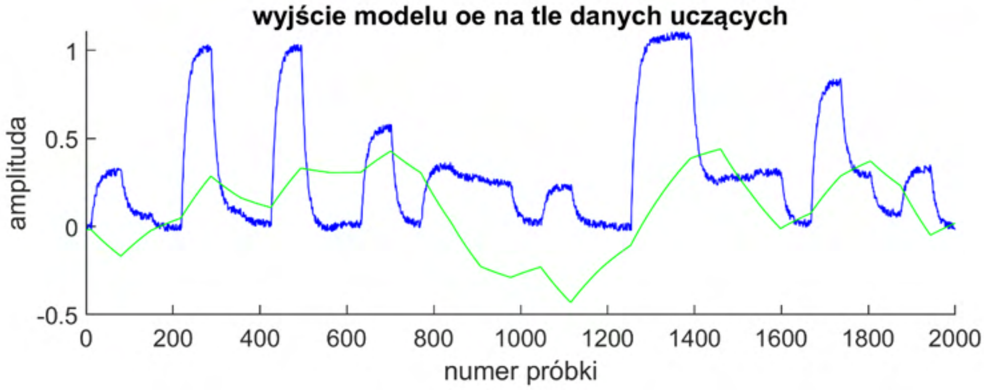
Błąd obliczam analogicznie jak dla modeli statycznych.

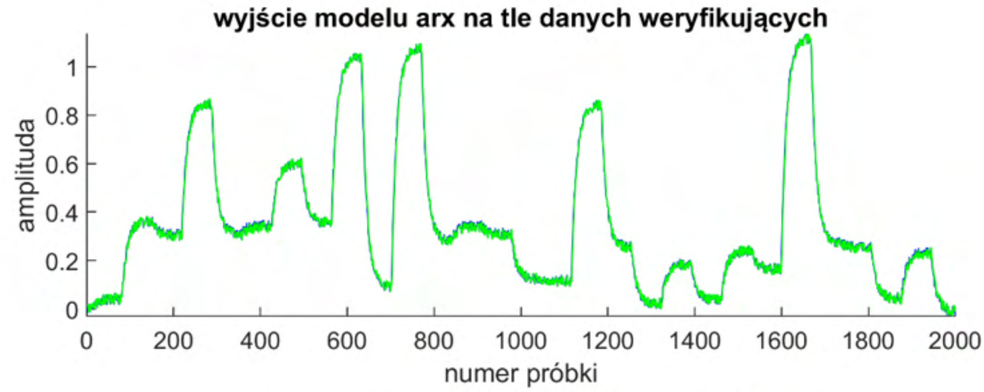
Model	Bez rekurencji		Z rekurencją	
Rząd dynamiki	Błąd uczący	Błąd weryfikujący	Błąd uczący	Błąd weryfikujący
1	1.203	1.065	300.527	244.382
2	1.193	1.045	299.316	237.590
3	1.136	1.022	291.940	251.543

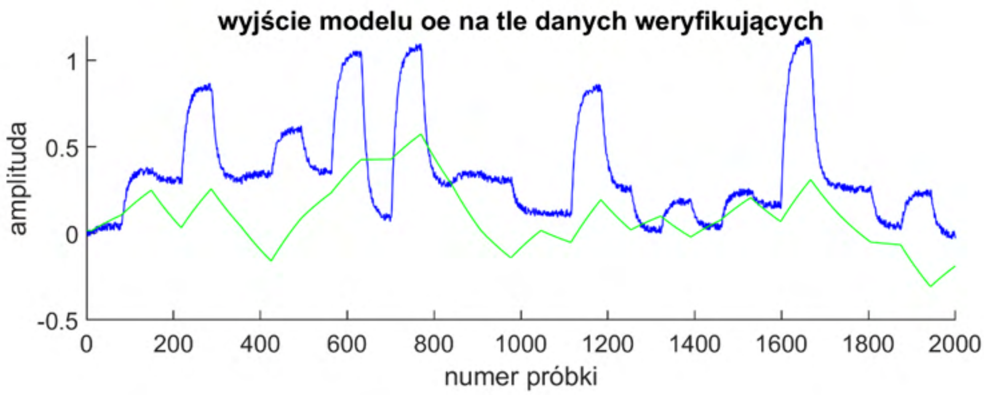
Modele rekurencyjne słabo się sprawdzają dla modeli liniowych, mają bardzo duże błędy. Dla modeli bez rekurencji widać wzrost dokładności wraz ze wzrostem rzędu. Błąd uczący w obu maleje ze wzrostem rzędu. W przypadku błędów weryfikujących modele z rekurencją się poprawiały do pewnego rzędu. Najlepszym modelem z rekurencją jest model stopnia drugiego (lecz nadal działa kiepsko).

$$n_A = n_B = 1$$

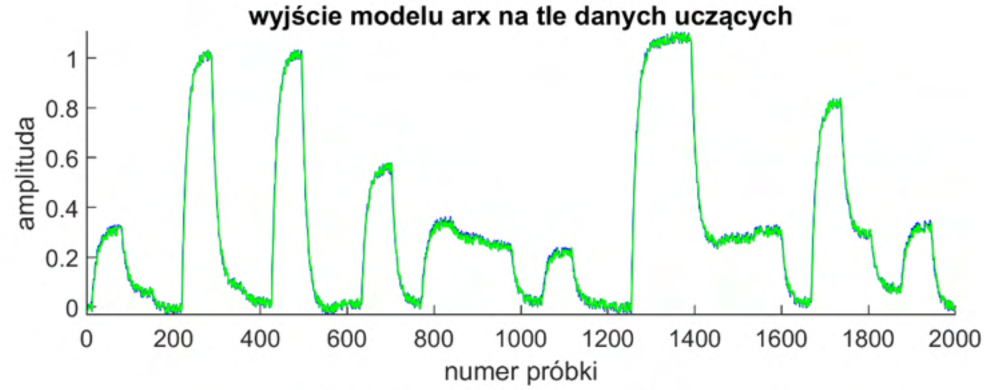

wyjście modelu arx na tle danych uczących
amplituda
numer próbki
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
0 200 400 600 800 1000 1200 1400 1600 1800 2000

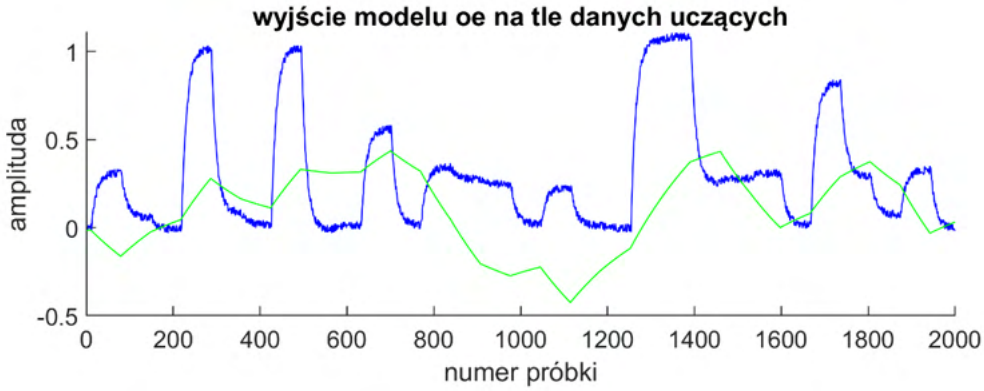

wyjście modelu oe na tle danych uczących
amplituda
numer próbki
-0.5 0 0.5 1
0 200 400 600 800 1000 1200 1400 1600 1800 2000

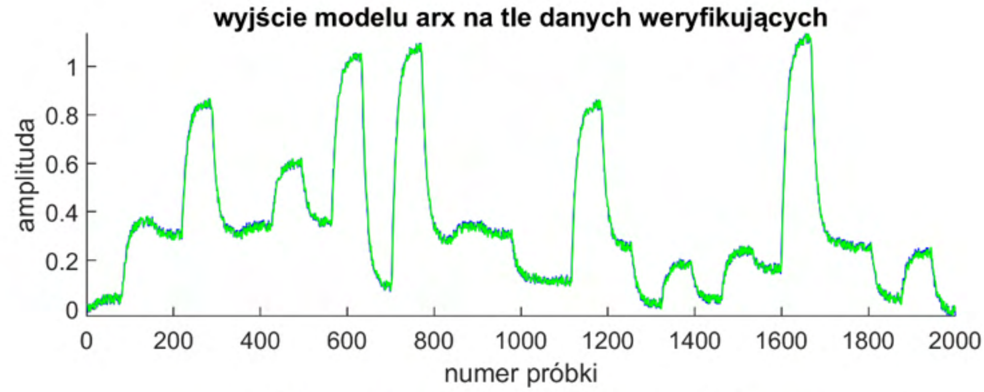

wyjście modelu arx na tle danych weryfikujących
amplituda
numer próbki
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
0 200 400 600 800 1000 1200 1400 1600 1800 2000

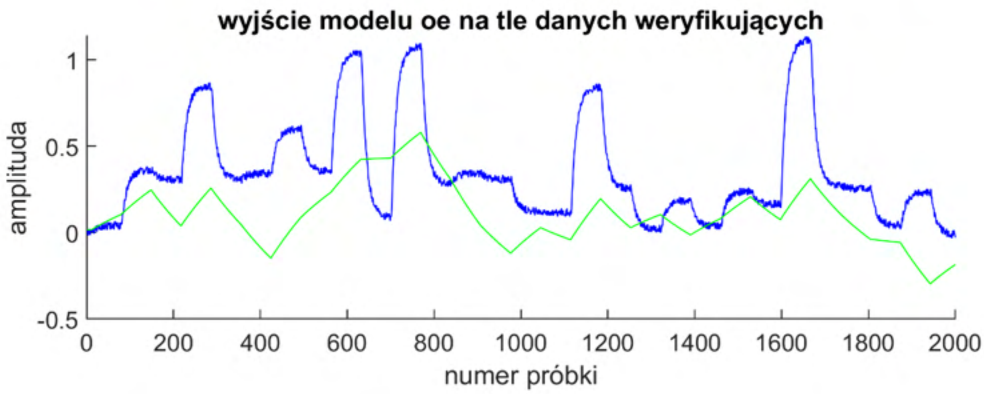

wyjście modelu oe na tle danych weryfikujących
amplituda
numer próbki
-0.5 0 0.5 1
0 200 400 600 800 1000 1200 1400 1600 1800 2000

$$n_A = n_B = 2$$

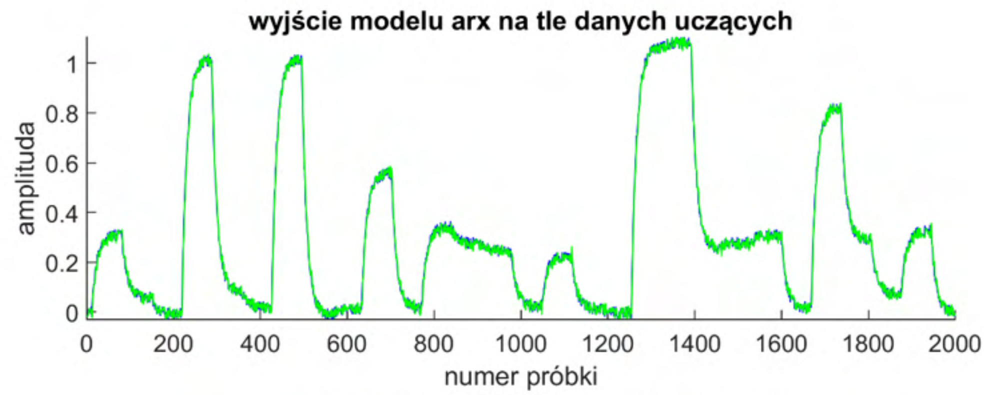

wyjście modelu arx na tle danych uczących
amplituda
numer próbki

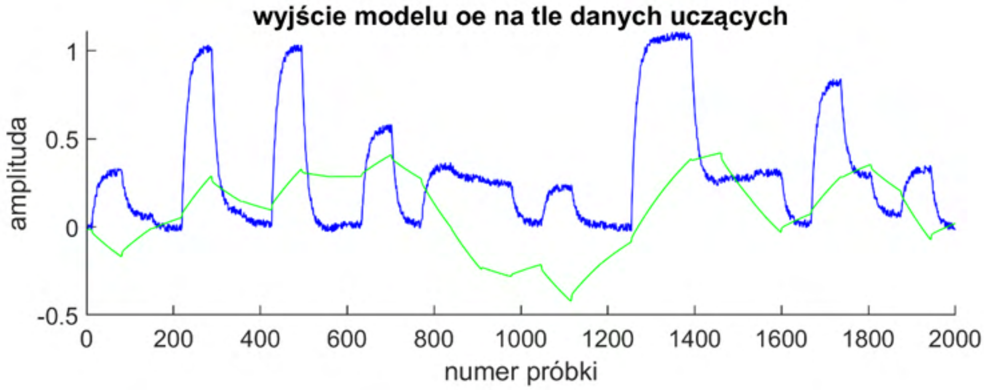

wyjście modelu oe na tle danych uczących
amplituda
numer próbki

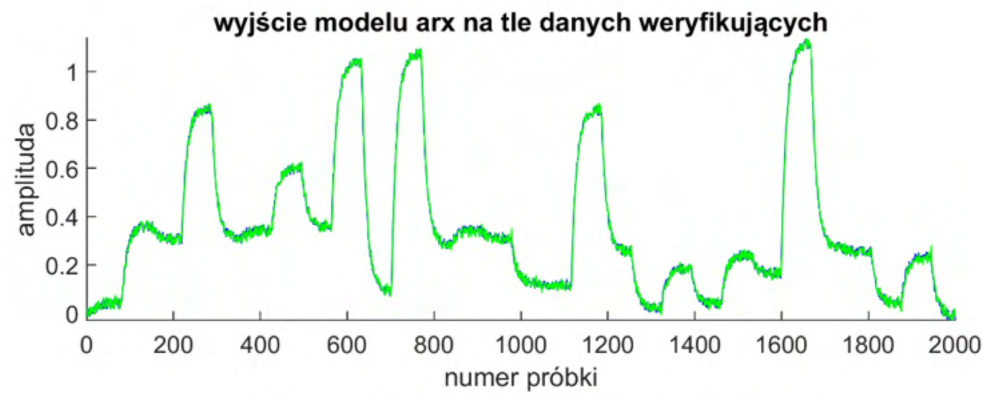

wyjście modelu arx na tle danych weryfikujących
amplituda
numer próbki

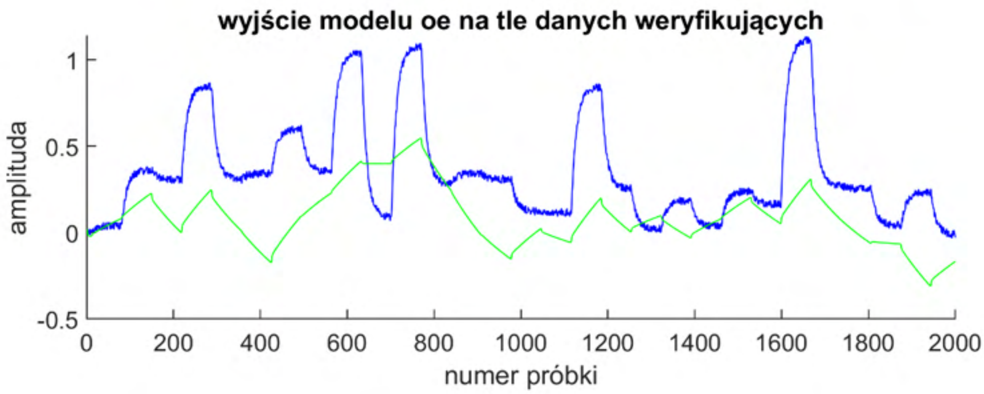

wyjście modelu oe na tle danych weryfikujących
amplituda
numer próbki

$$n_A = n_B = 3$$


wyjście modelu arx na tle danych uczących
amplituda
numer próbki


wyjście modelu oe na tle danych uczących
amplituda
numer próbki


wyjście modelu arx na tle danych weryfikujących
amplituda
numer próbki


wyjście modelu oe na tle danych weryfikujących
amplituda
numer próbki

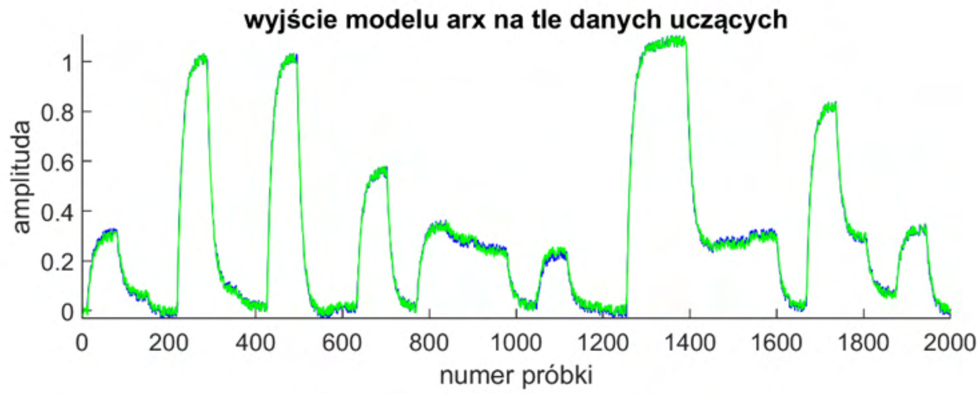
c) Metoda Najmniejszych Kwadratów, dynamiczny model nieliniowy

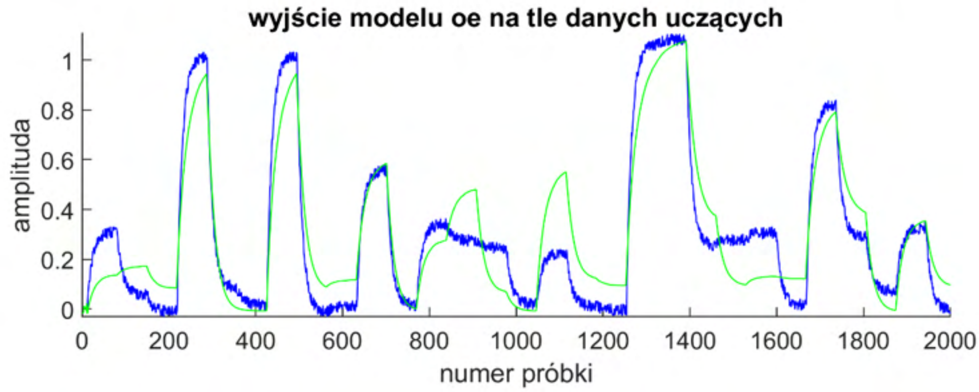
Korzystam ze wzorów jak w poprzednim podpunkcie, dokonuję analogicznych obliczeń. Wyrazów mieszanych nie zastosowałem.

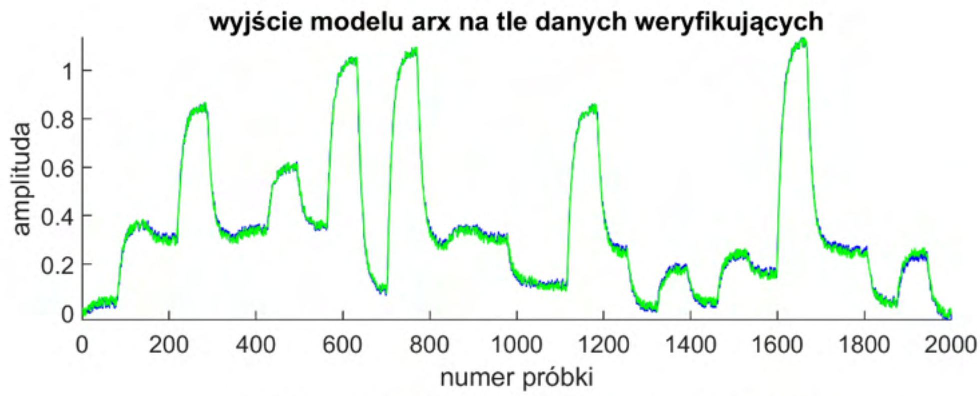
Model		Bez rekurencji		Z rekurencją	
Rząd dynamiki	Stopień wielomianu	Błąd uczący	Błąd weryfikujący	Błąd uczący	Błąd weryfikujący
1	2	0.999	0.932	30.022	32.397
	3	0.852	0.790	1.271	1.523
	4	0.843	0.778	0.900	0.918
2	2	0.896	0.853	29.946	32.256
	3	0.614	0.594	0.786	0.839
	4	0.603	0.581	0.484	0.457
3	2	0.878	0.842	28.753	31.135
	3	0.532	0.505	0.730	0.756
	4	0.519	0.490	0.453	0.418

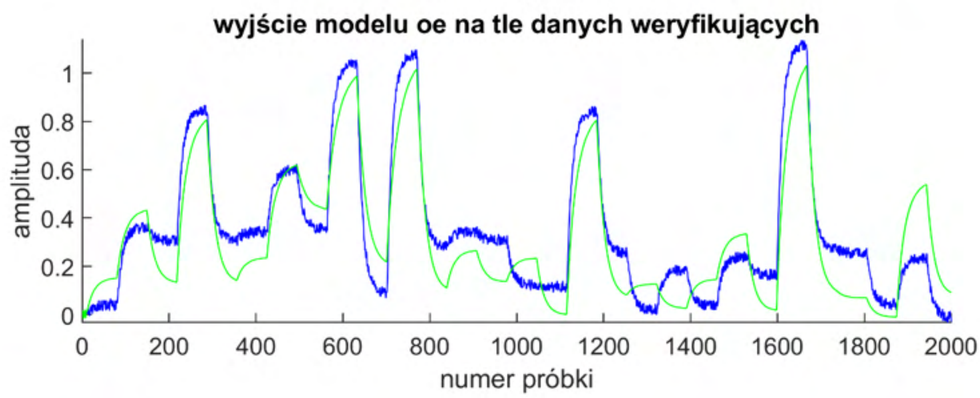
Dla modeli bez rekurencji błędy maleją wraz ze wzrostem rządu i stopnia wielomianu. Dla modeli nieliniowych wyższego stopnia, rekurencyjne modele zaczynają działać coraz lepiej. Najlepszym modelem z rekurencją jest model rządu dynamiki równego 3 i stopnia równego 4. Daje on również lepsze wyniki od modelu bez rekurencji.

1 rząd, 2 stopień

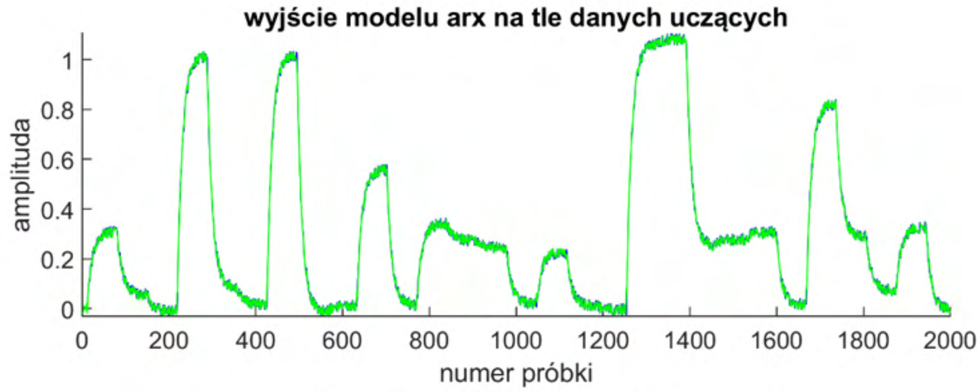


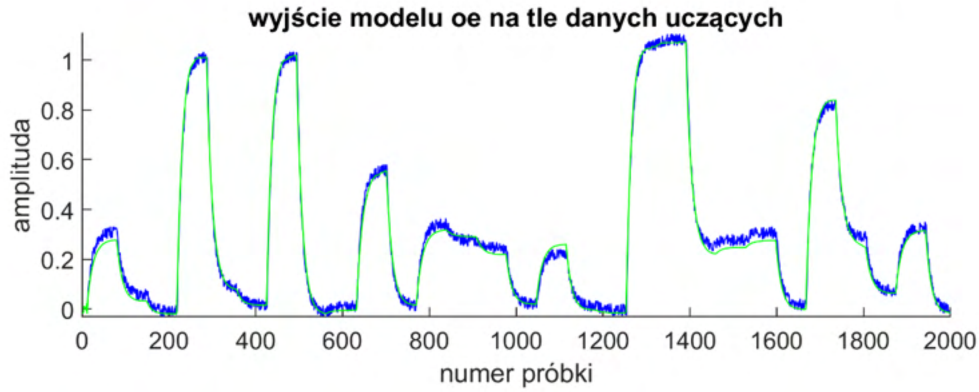


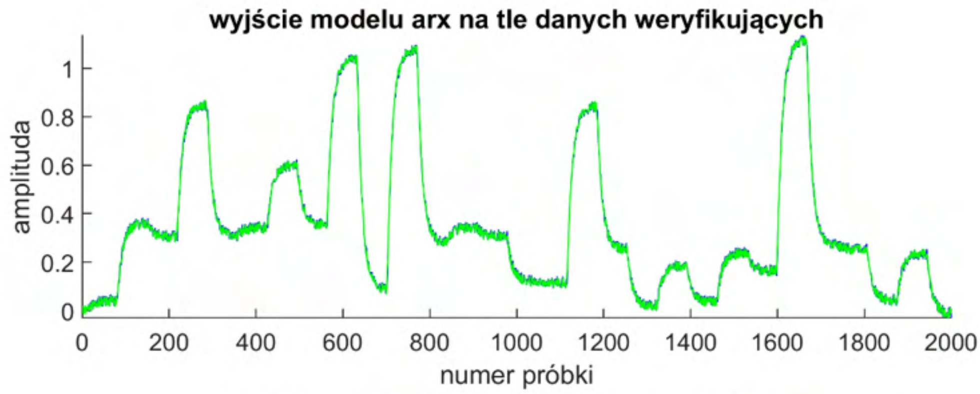


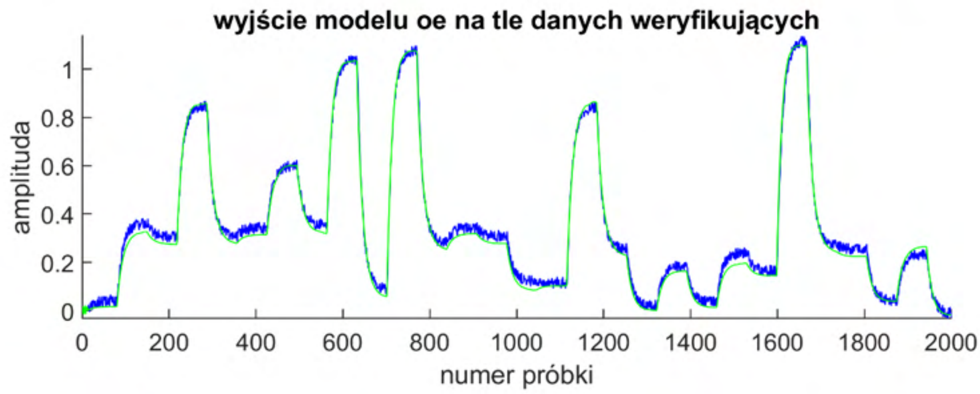


1 rząd, 3 stopień

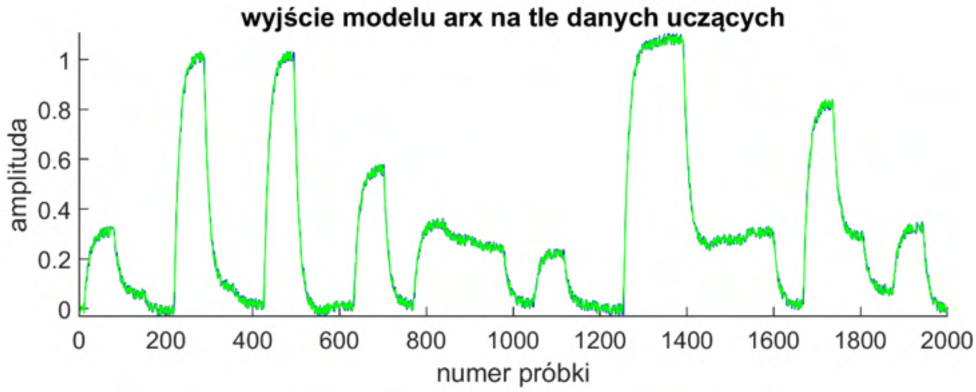


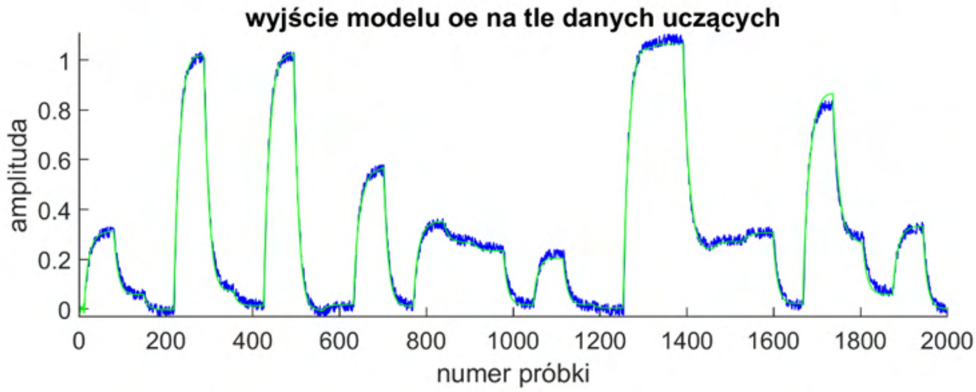


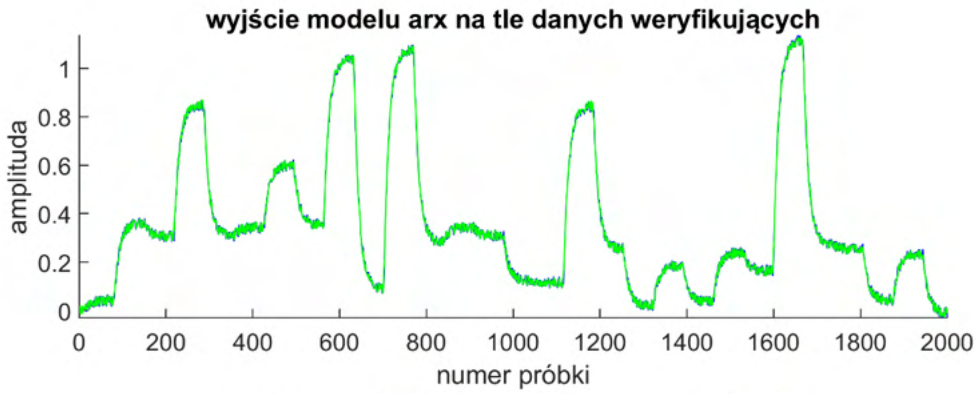


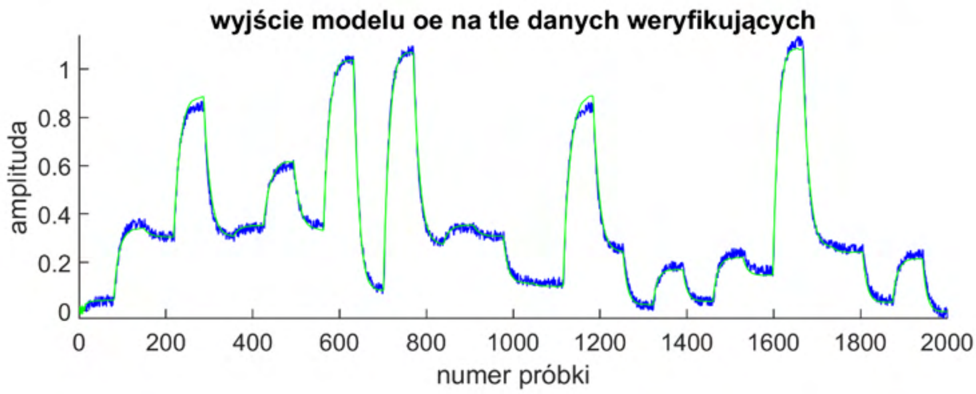


1 rząd, 4 stopień

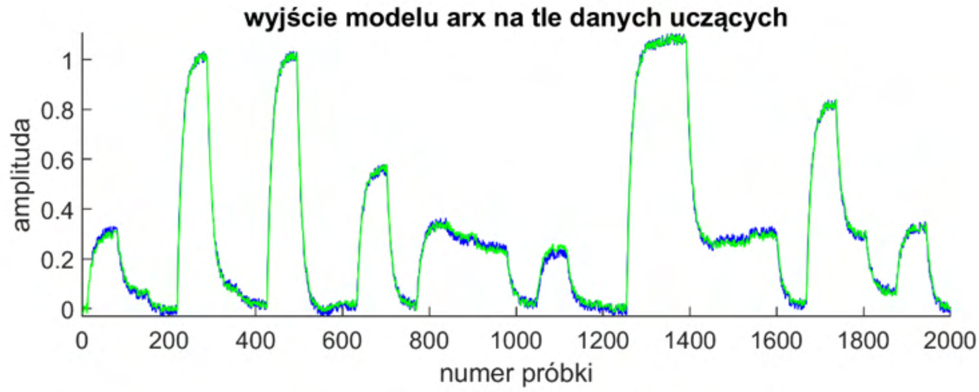


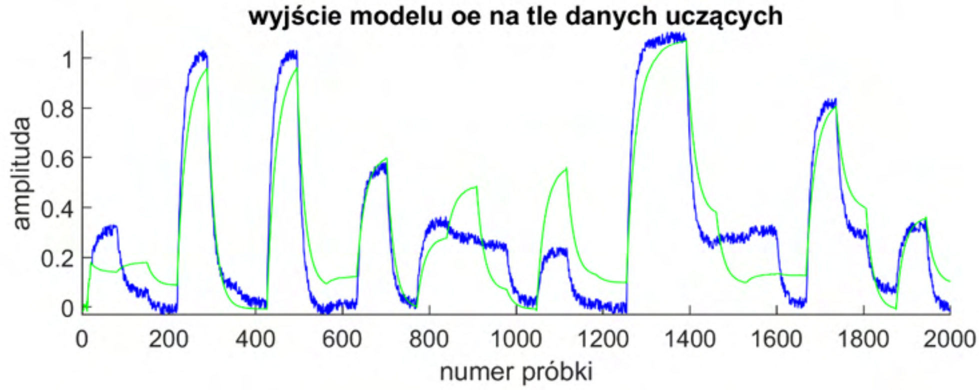


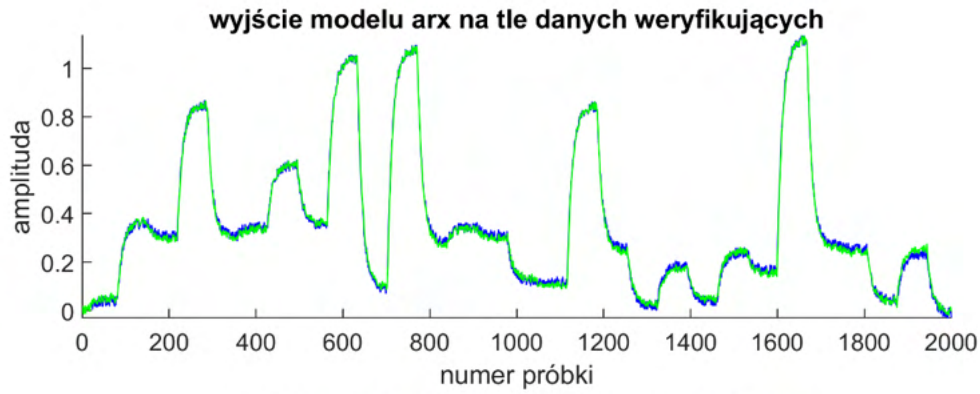


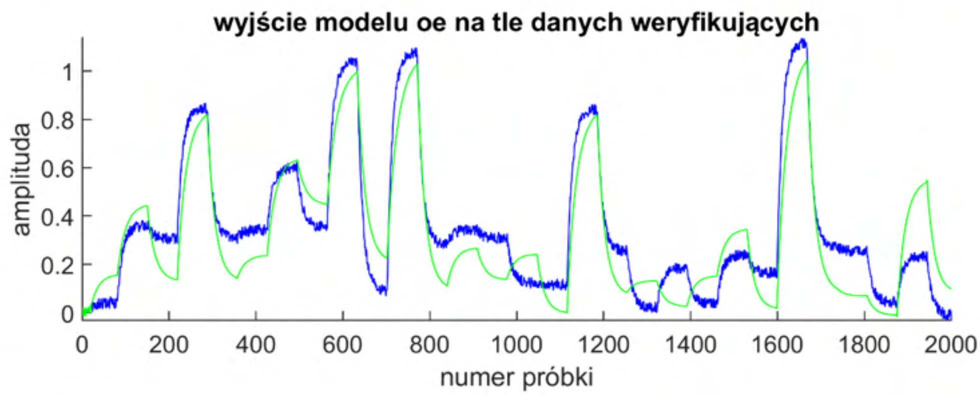


2 rząd, 2 stopień

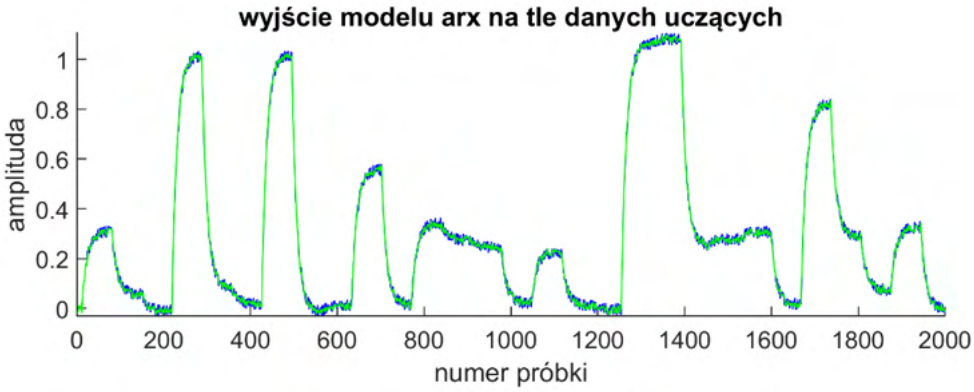


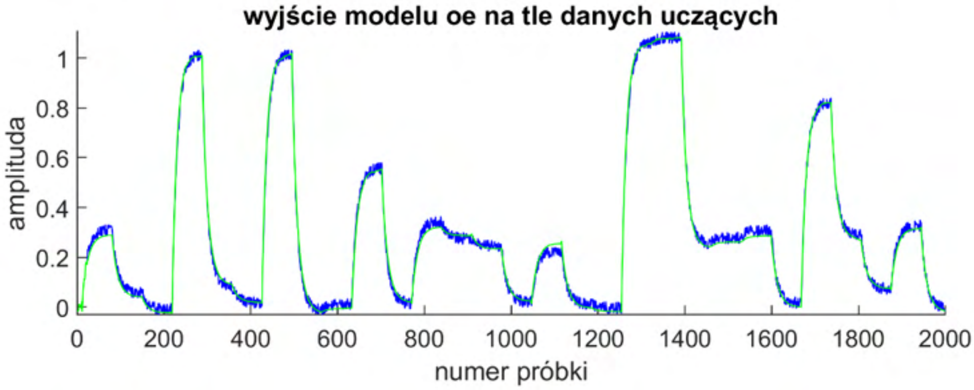


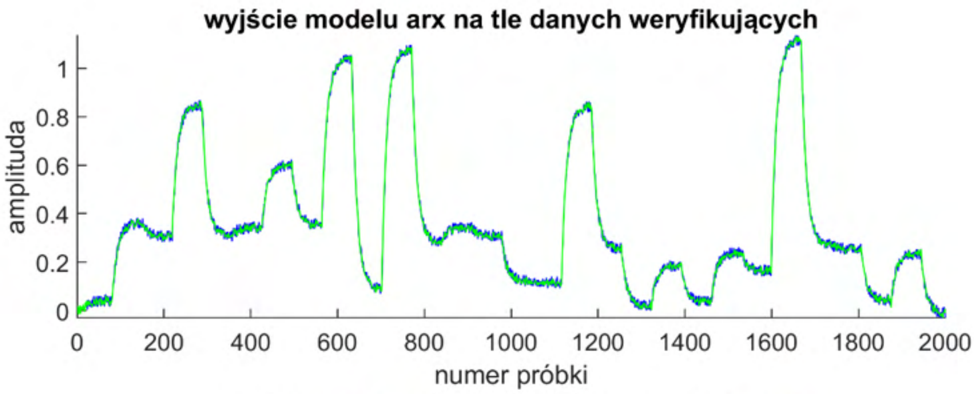


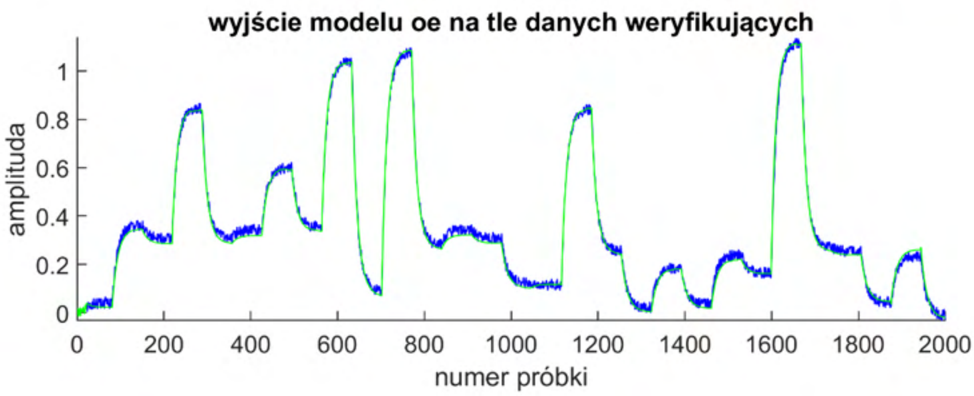


2 rząd, 3 stopień



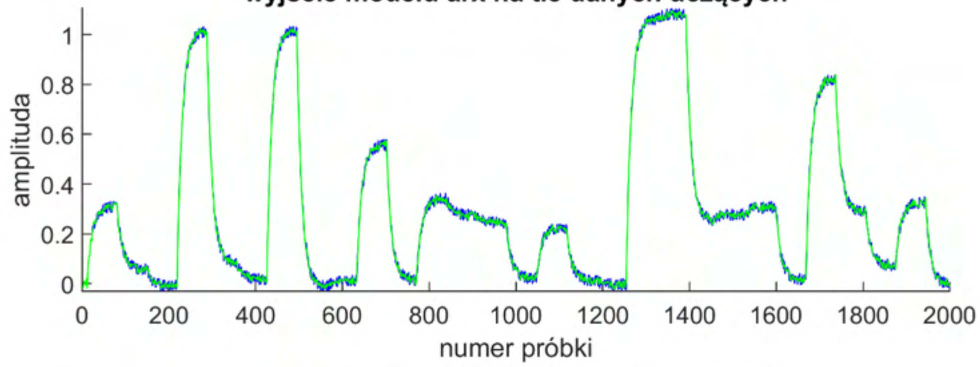




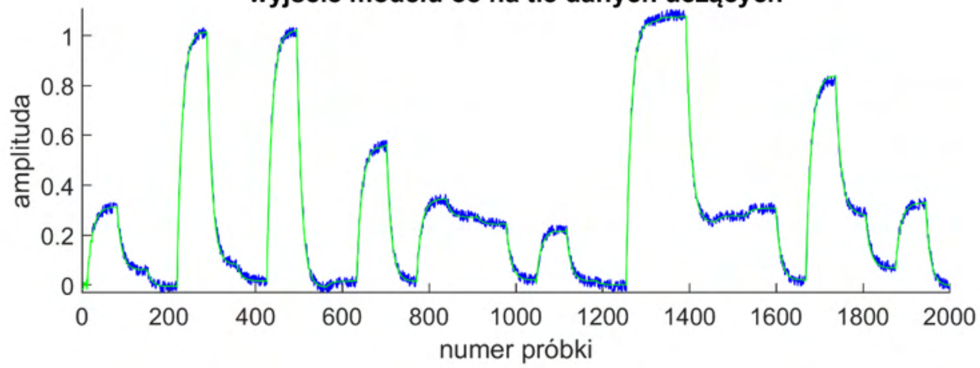


2 rząd, 4 stopień

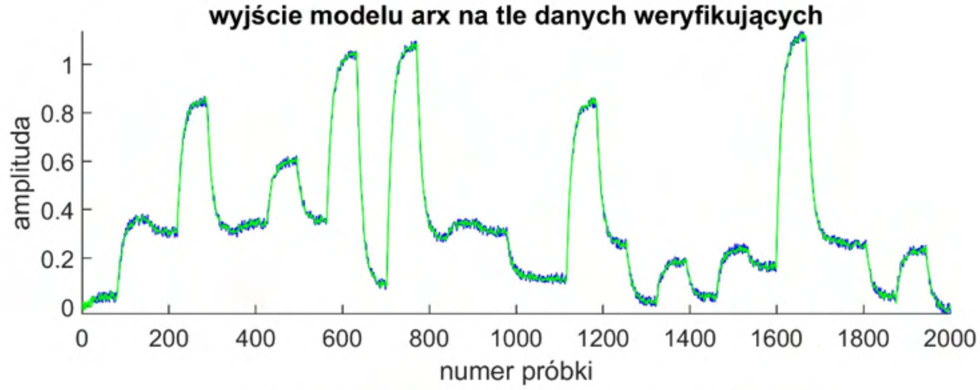
wyjście modelu arx na tle danych uczących



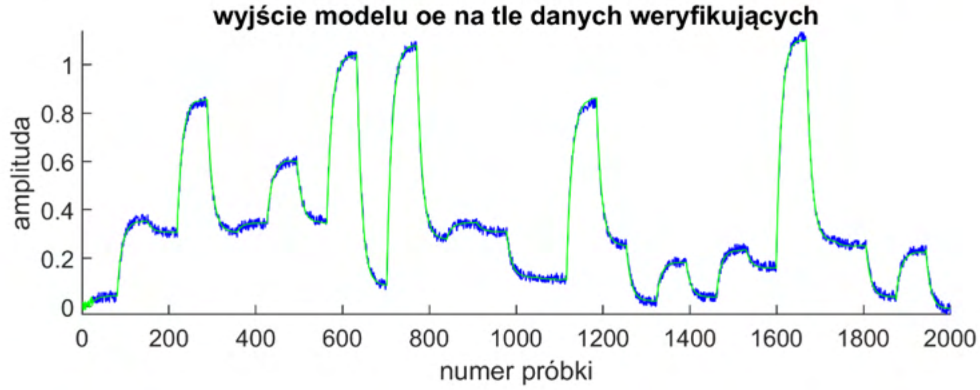
wyjście modelu oe na tle danych uczących



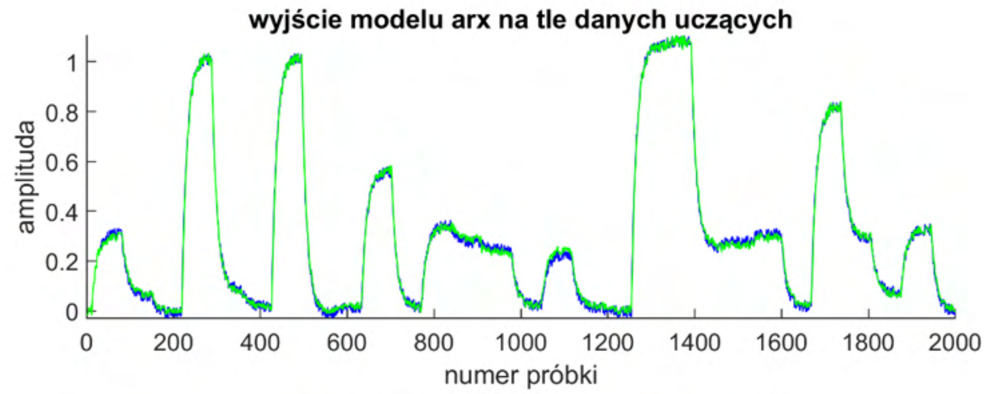
wyjście modelu arx na tle danych weryfikujących

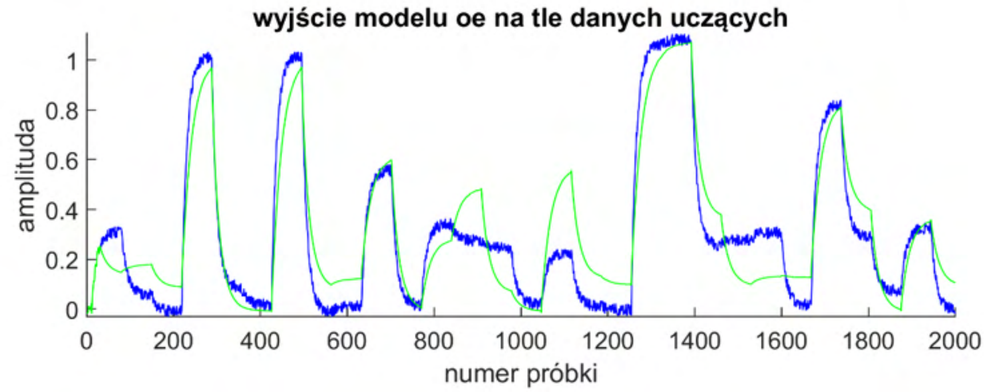


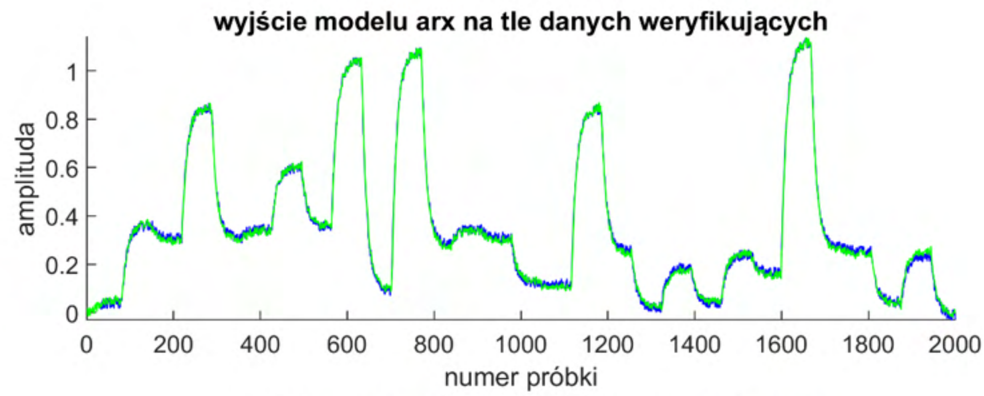
wyjście modelu oe na tle danych weryfikujących

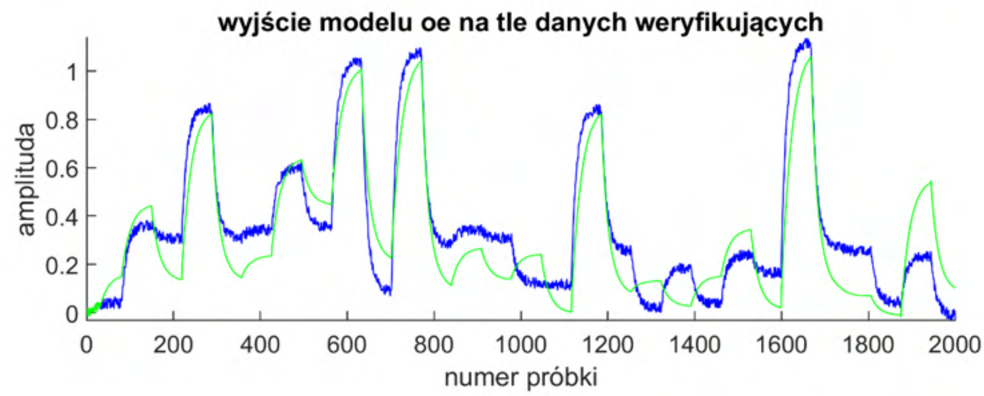


3 rząd, 2 stopień

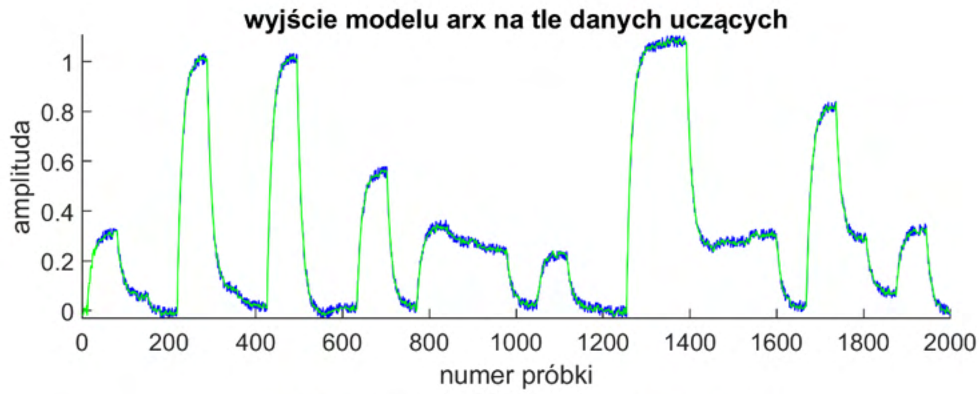


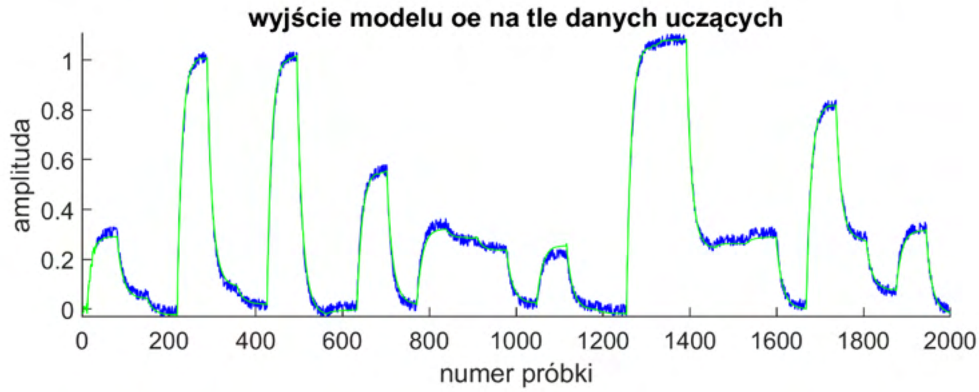


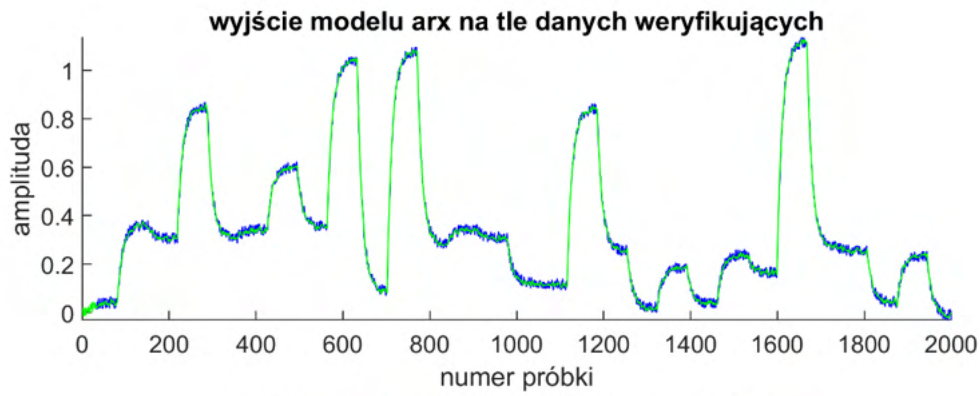


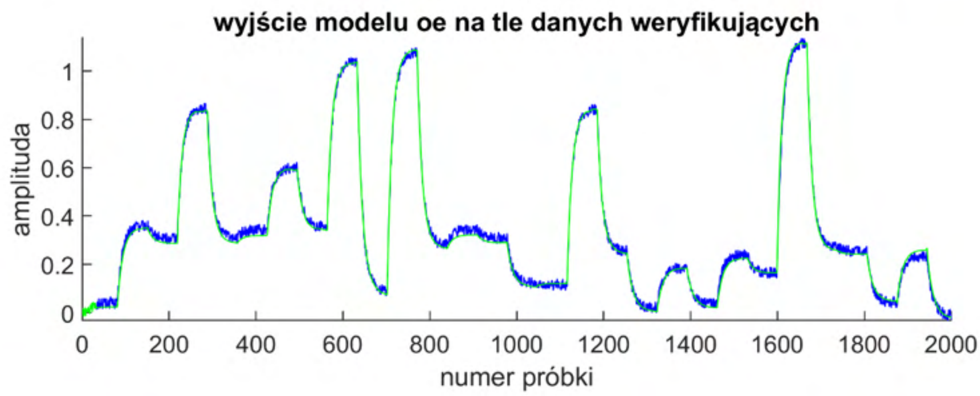


3 rząd, 3 stopień

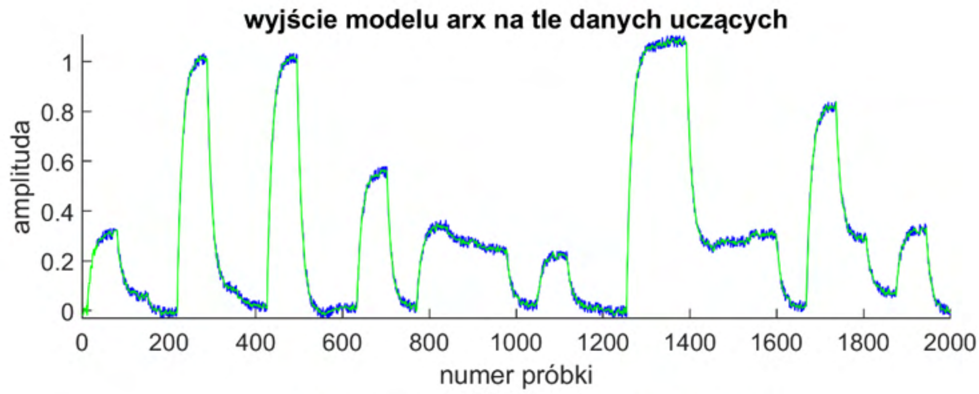


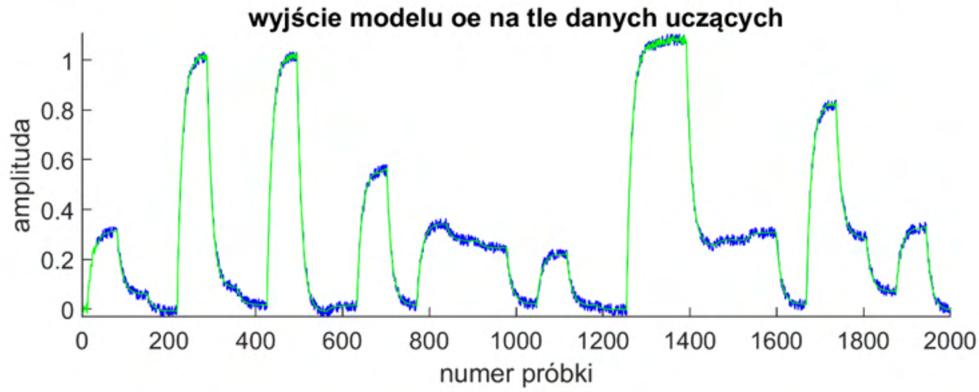


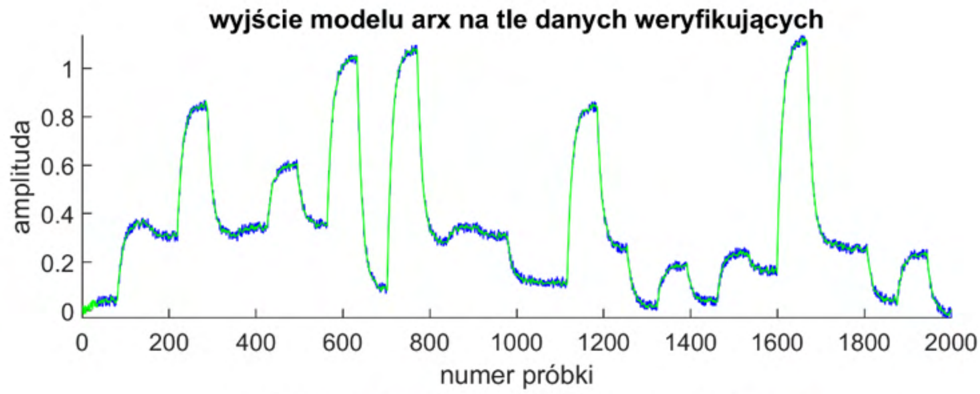


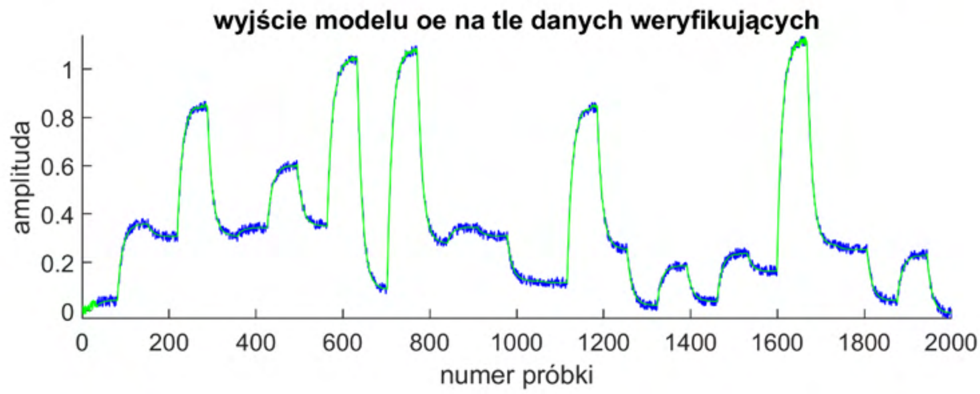


3 rząd, 4 stopień









d) Statyczny model nieliniowy

W poprzednim podpunkcie najlepszy okazał się model rządu dynamiki równego 3 i stopnia równego 4.

Korzystając z następującej własności:

$$y(k-1) = y(k) \ = \ldots = \ const \ = y, \qquad u(k-1) = u(k) = \ldots = const = u$$

Otrzymałem charakterystykę statyczną: