MODI projekt 1

Zadanie 16 Kacper Marchlewicz

1. Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

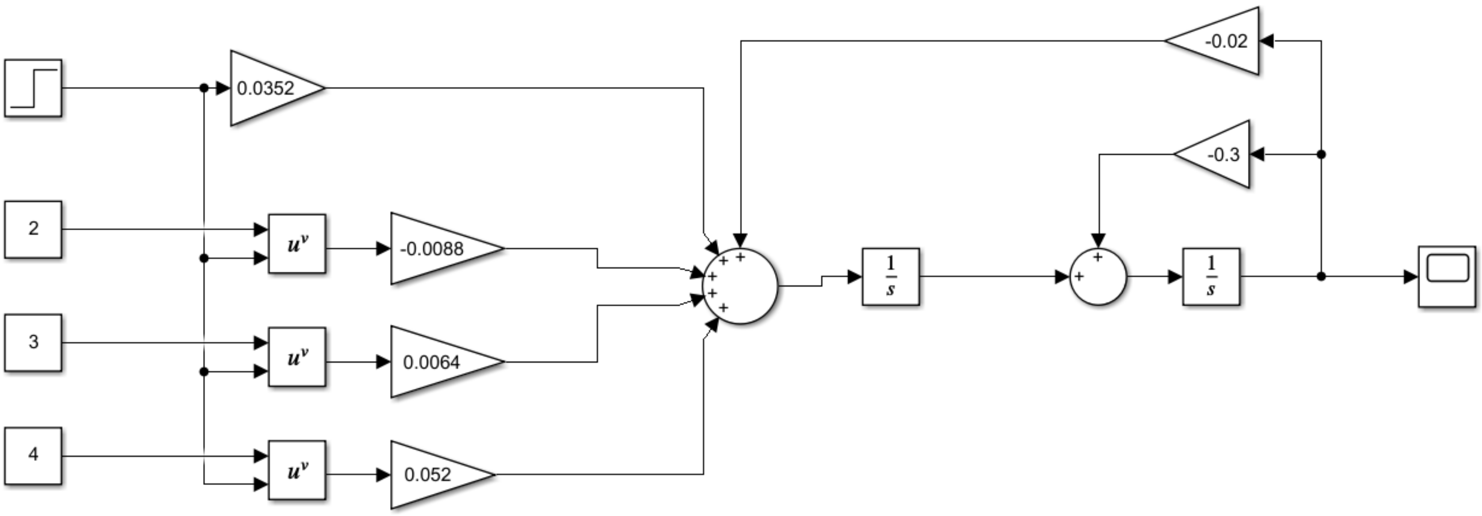
Model w przestrzeni stanu:

$$\dot{x}_1(t) = -0.3x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -0.02x_1(t) + 0.0352u(t) - 0.0088u^2(t) + 0.0064u^3(t) + 0.052u^4(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Reprezentacja graficzna:



2. Dynamiczny model dyskretny

Korzystając z zależności:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\mathrm{x_1(k+1)\ +\ x_1(k)}}{T}$$

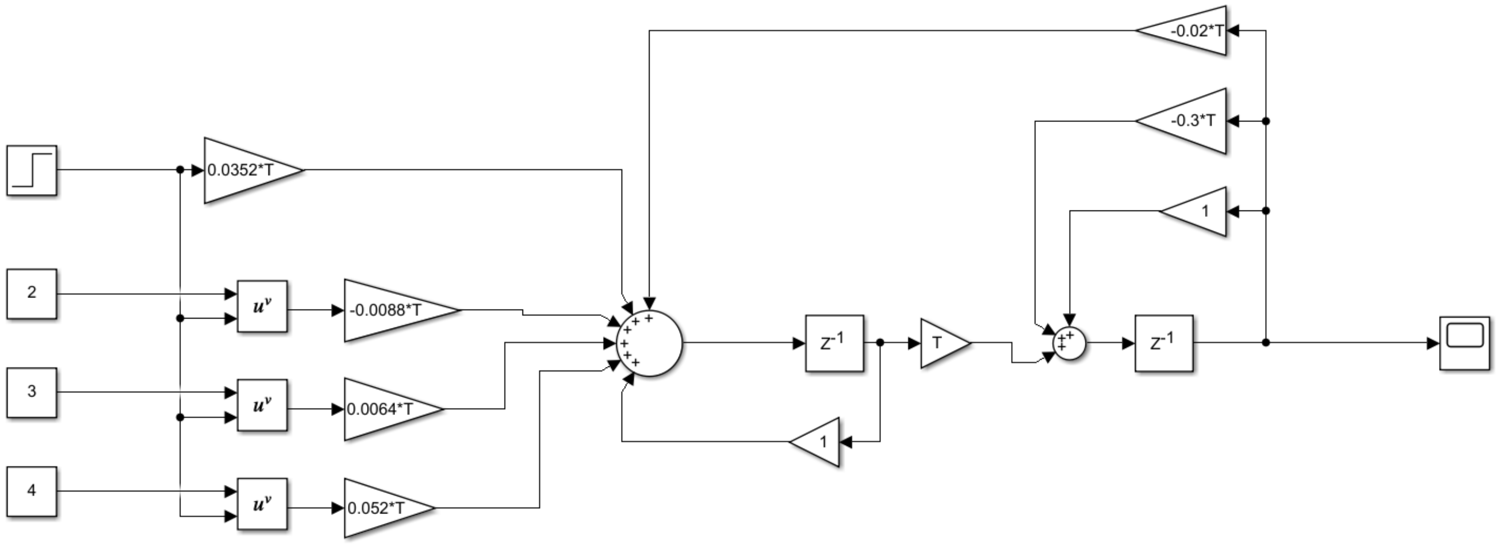
Przekształciłem równania i otrzymałem następujący model w przestrzeni stanu:

$$\mathrm{x_1(k+1) = x_1(k) - 0.3Tx_1(k) + Tx_2(k)}$$

$$\mathrm{x_2(k+1) = x_2(k) - 0.02Tx_1(k) + 0.0352Tu(k) - 0.0088Tu^2(k) + 0.0064Tu^3(k) + 0.052Tu^4(k)}$$

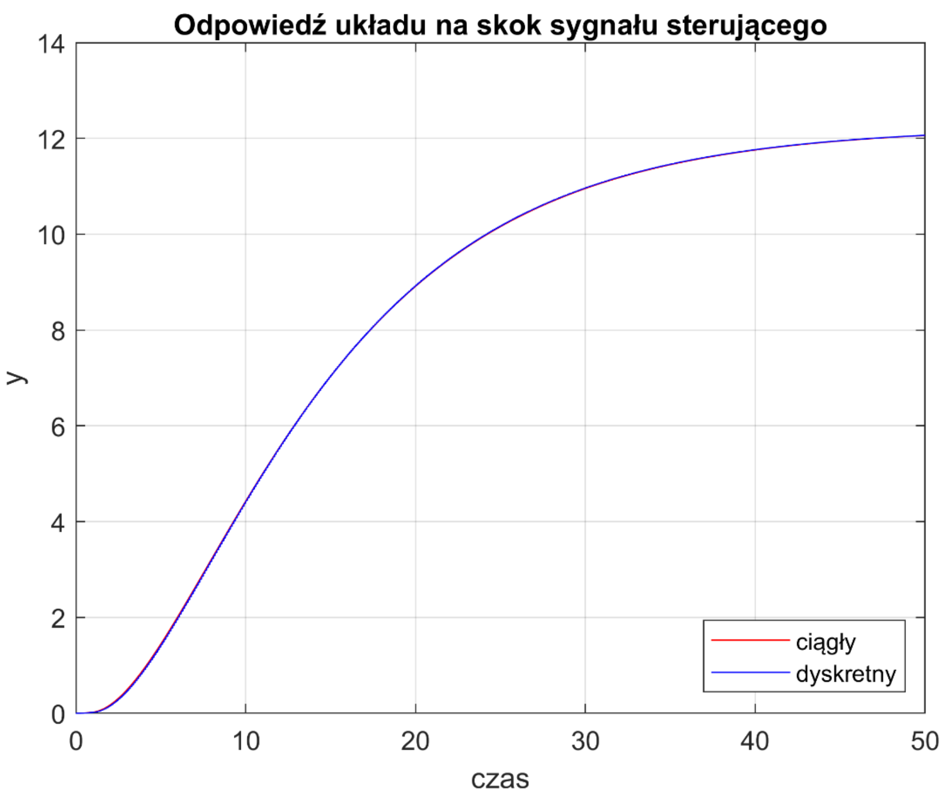
$$\mathrm{y(k) = x_1(k)}$$

Reprezentacja graficzna:

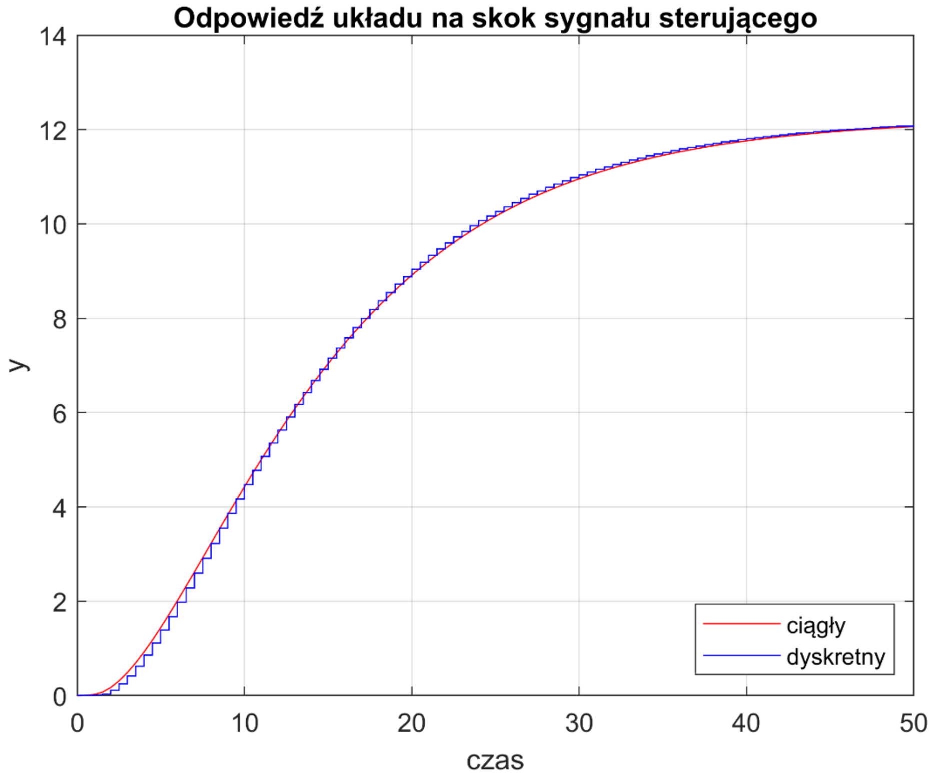


3. Symulacja dynamicznego modelu ciągłego i dyskretnego dla poszczególnych czasów próbkowania T

T=0.1 s

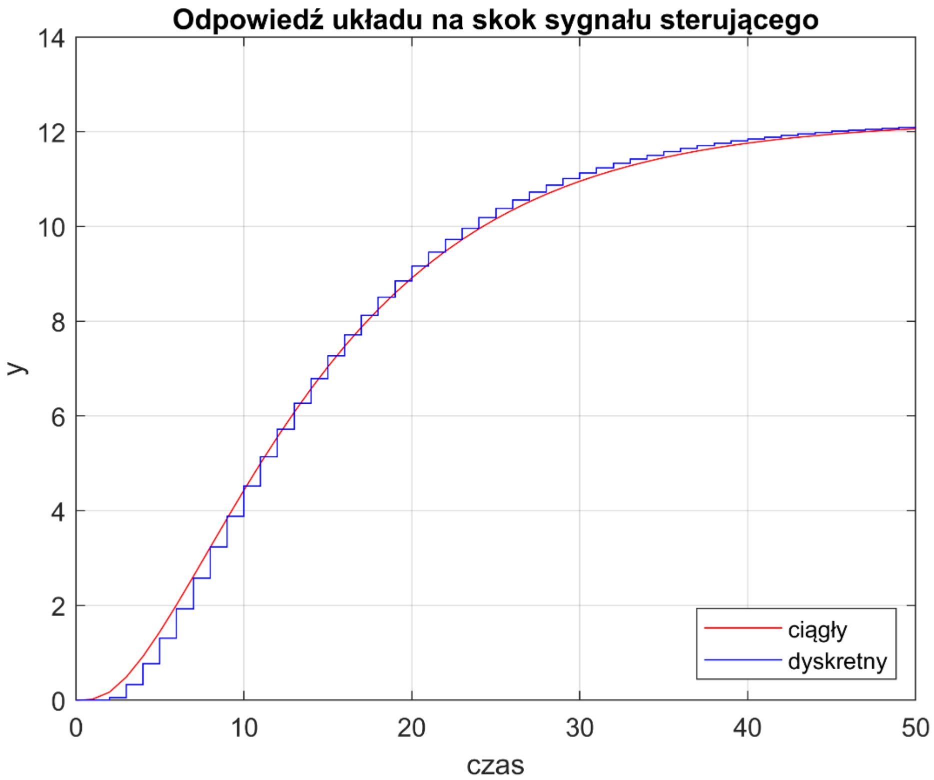


T=0.5 s



Odpowiedź układu na skok sygnału sterującego
14
12
10
8
6
4
2
0
y
0
10
20
30
40
50
czas
ciągły
dyskretny

T=1s



Odpowiedź układu na skok sygnału sterującego
14
12
10
8
6
4
2
0
y
0
10
20
30
40
50
czas
ciągły
dyskretny

Zwiększając czas próbkowania otrzymujemy coraz mniej dokładną symulację modelu dyskretnego. Wykres się rozjeżdża, pojawiają się schodki.

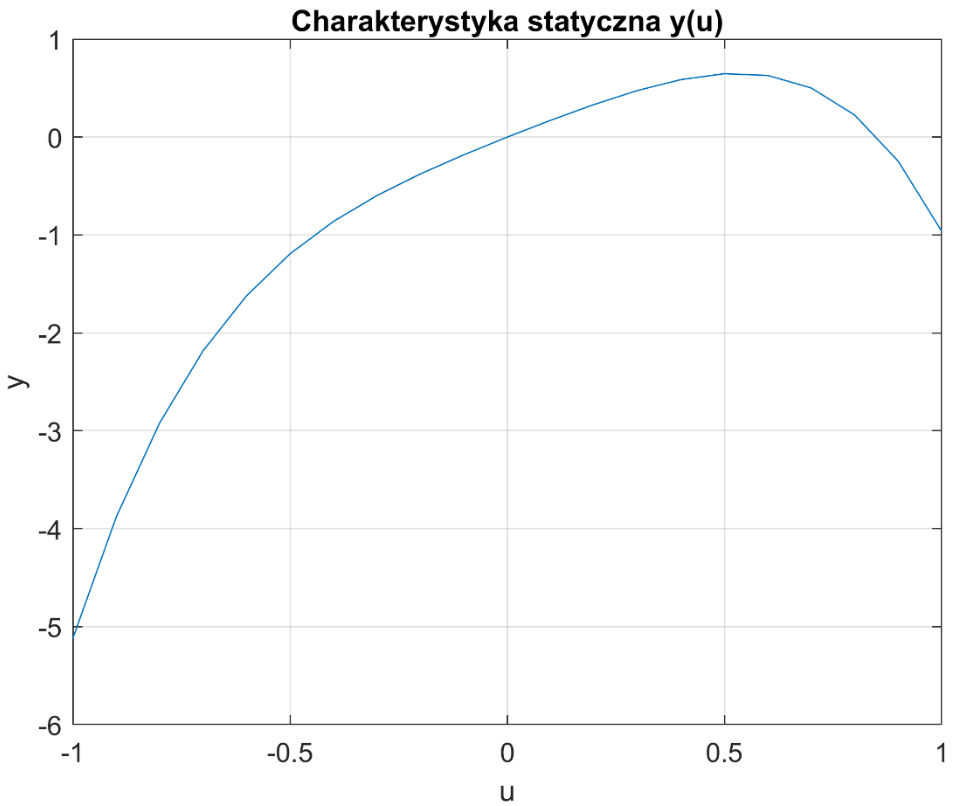
4. Charakterystyka statyczna modelu y(u)

Korzystając z zależności statycznej modelu dyskretnego: x(k+1)=x(k)=x(k-1)=…=const

Model statyczny:

$$y(u) = 1.76u - 0.44u^2 + 0.32u^3 - 2.6u^4$$

Wykres:



5. Charakterystyka statyczna zlinearyzowana

Dokonuję linearyzacji nieliniowych elementów funkcji:

$$u^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})$$

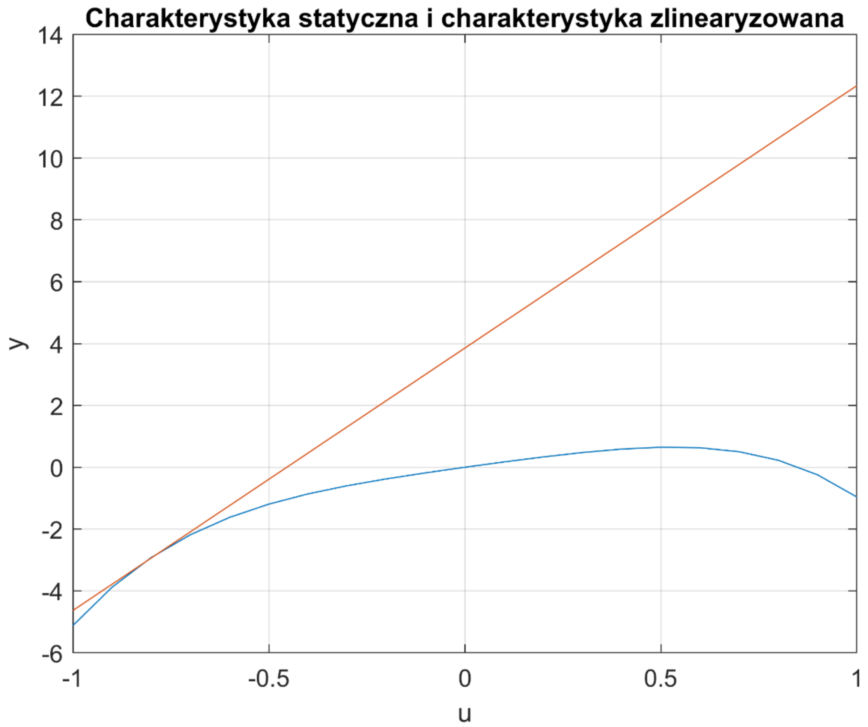
$$u^3 = \bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})$$

$$u^4 = \bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u})$$

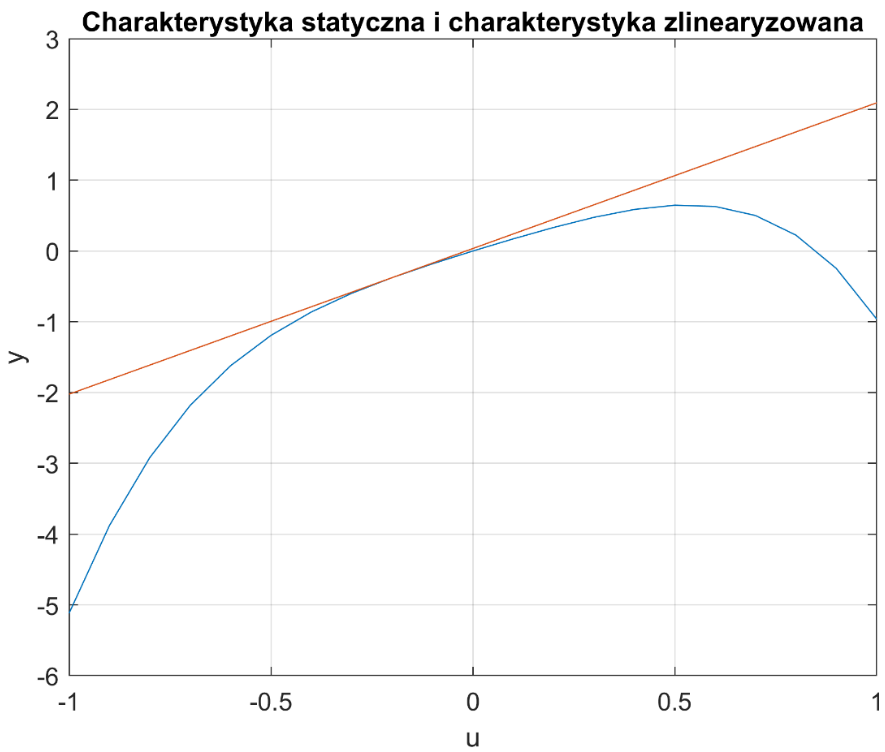
$$\begin{aligned} y(u) &= 1.76u - 0.44\left(\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})\right) + 0.32\left(\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})\right) - 2.64\left(\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u})\right) \\ &= (1.76 - 0.886\bar{u} + 0.96\bar{u}^2 - 10.56\bar{u}^3)u + 0.44\bar{u}^2 - 0.64 + 7.92\bar{u}^4 \end{aligned}$$

6. Zlinearyzowana charakterystyka statyczna w punkcie $\bar{u}$

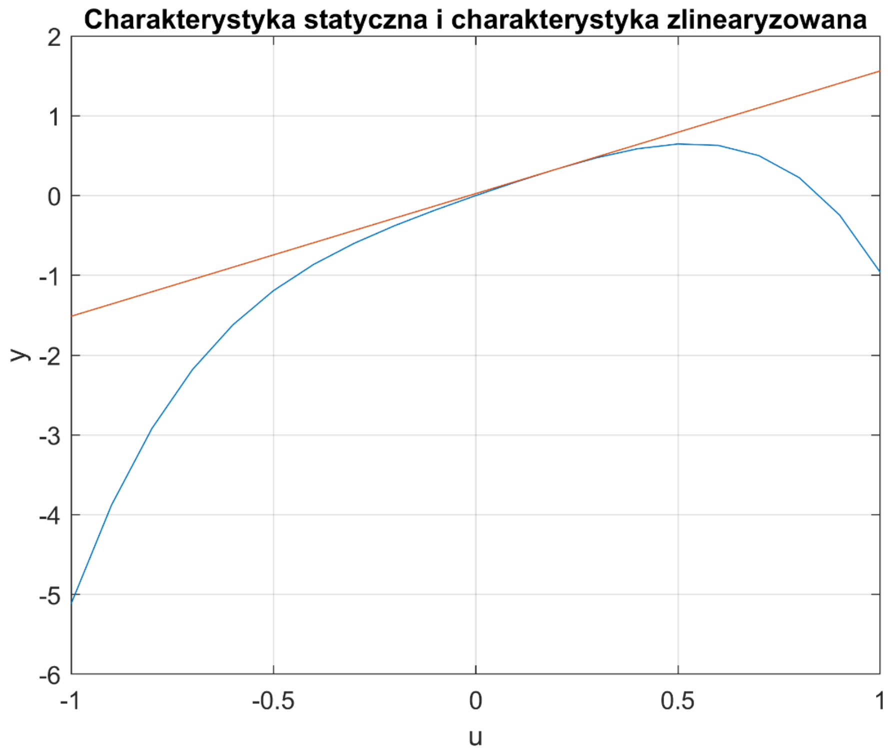
$$\bar{u} = -0.8$$



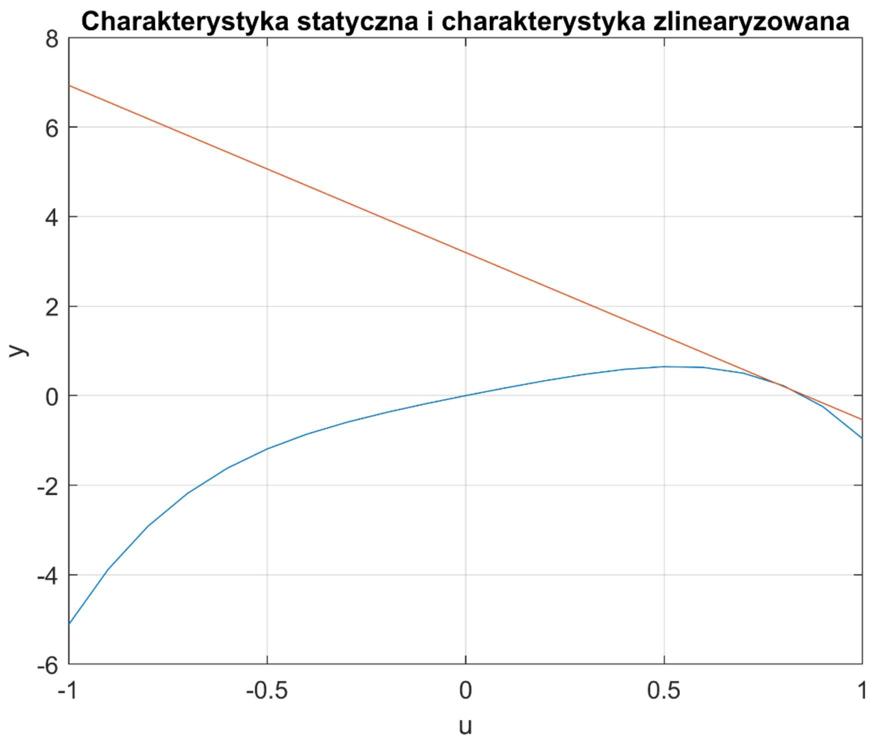
$$\bar{u} = -0.2$$



$$\bar{u} = 0.2$$



$$\bar{u} = 0.8$$



Funkcja jest dość ciężka do zlinearyzowania ze względu na swoje zagięcia na końcach. W miarę dobrym (lecz dalej słabym) przybliżeniem jest linia idącą środkiem ciała funkcji, czyli okolice punktu $\bar{u} = -0.2$.

7. Dyskretny model zlinearyzowany

Dokonuję analogicznych działań jak w poprzednim zadaniu.

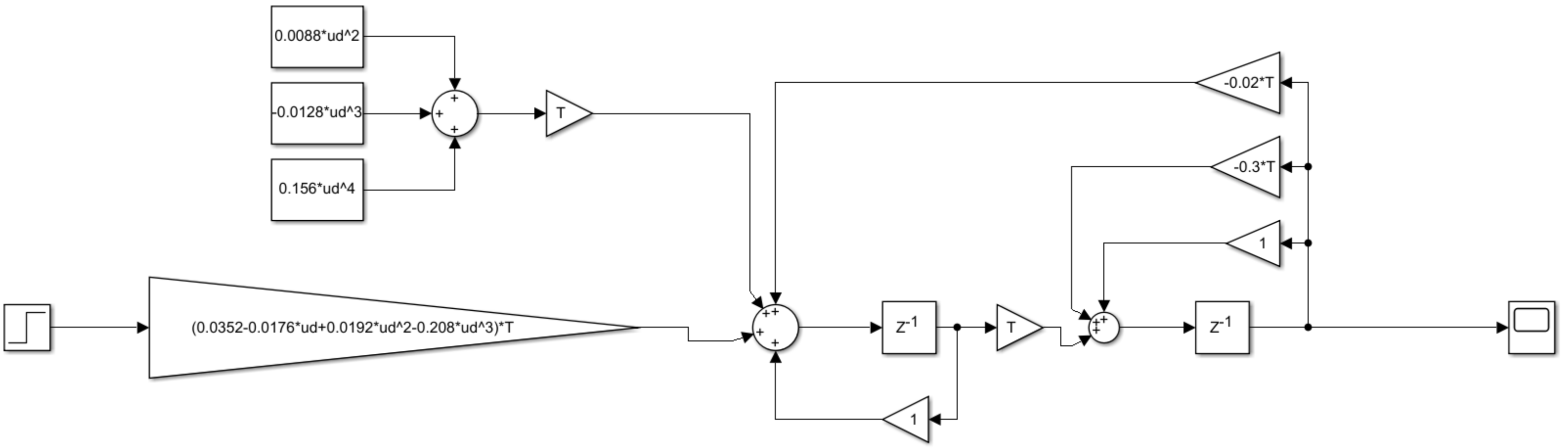
Model zlinearyzowany:

$x_1(k+1) = x_1(k) - 0.3Tx_1(k) + Tx_2(k)$

$x_2(k+1) = x_2(k) - 0.02Tx_1(k) + (0.0352 - 0.0176\bar{u} + 0.0192\bar{u}^2 - 0.208\bar{u}^3)Tu(k) + (0.0088\bar{u}^2 - 0.0128\bar{u}^3 + 0.156\bar{u}^4)T$

$y(k) = x_1(k)$

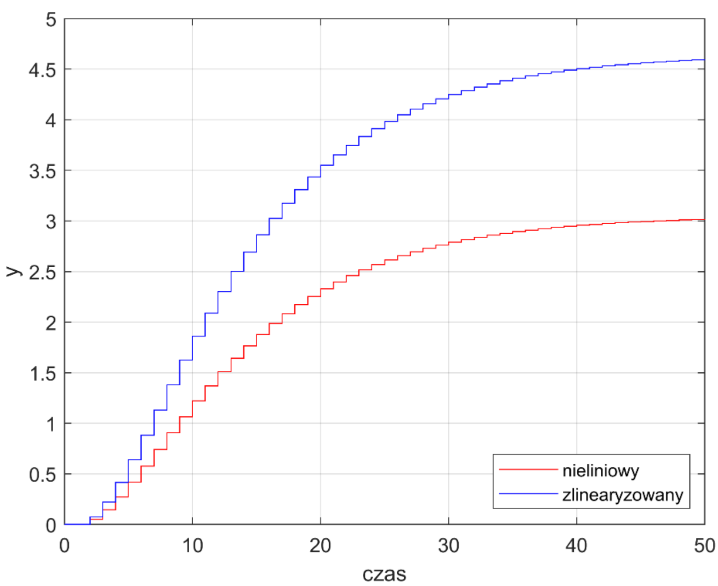
8.Reprezentacja graficzna dyskretnego modelu zlinearyzowanego



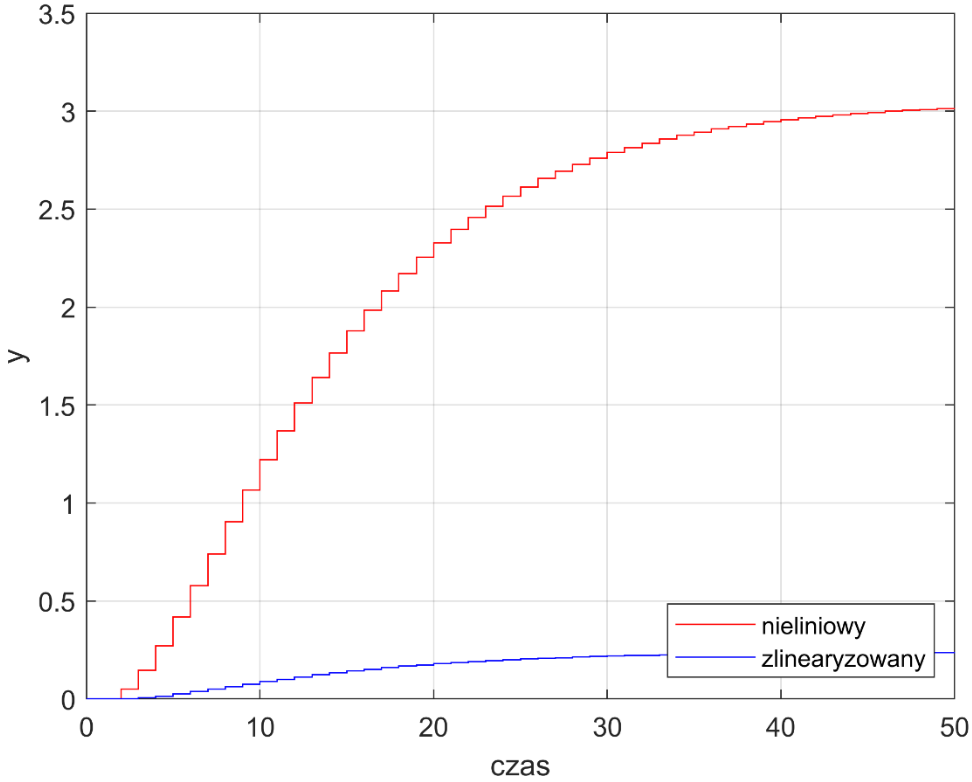
9. Symulacja dynamicznego modelu dyskretnego w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej (okres próbkowania T=1 s)

Dla skoku u: 0 -> 0.1

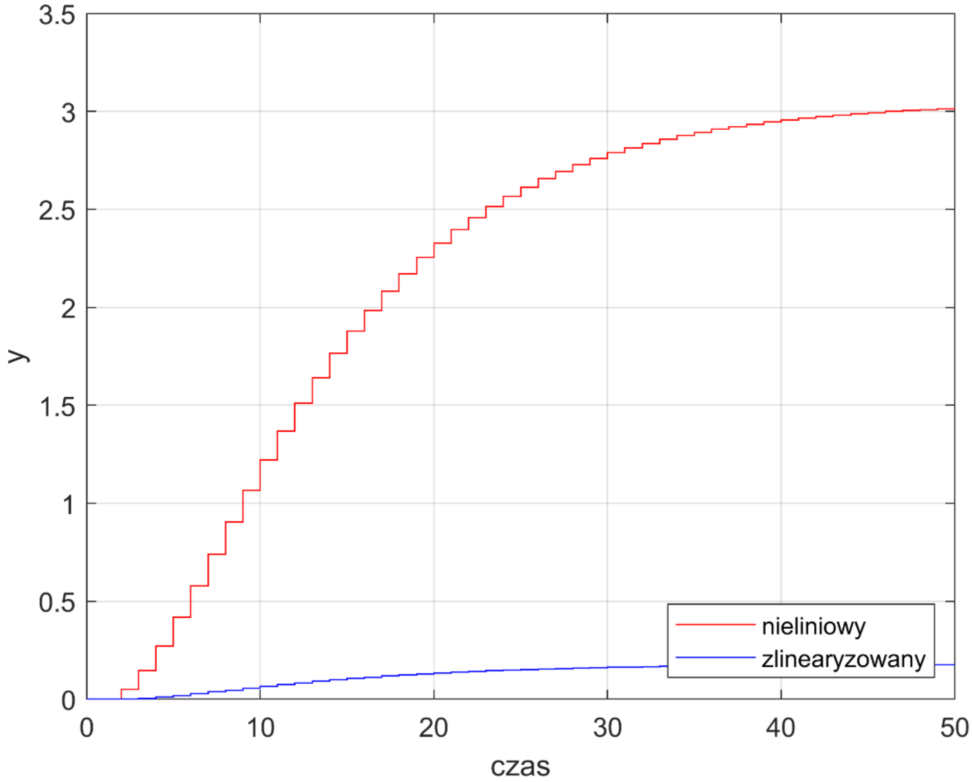
$$\bar{u} = -0.8$$



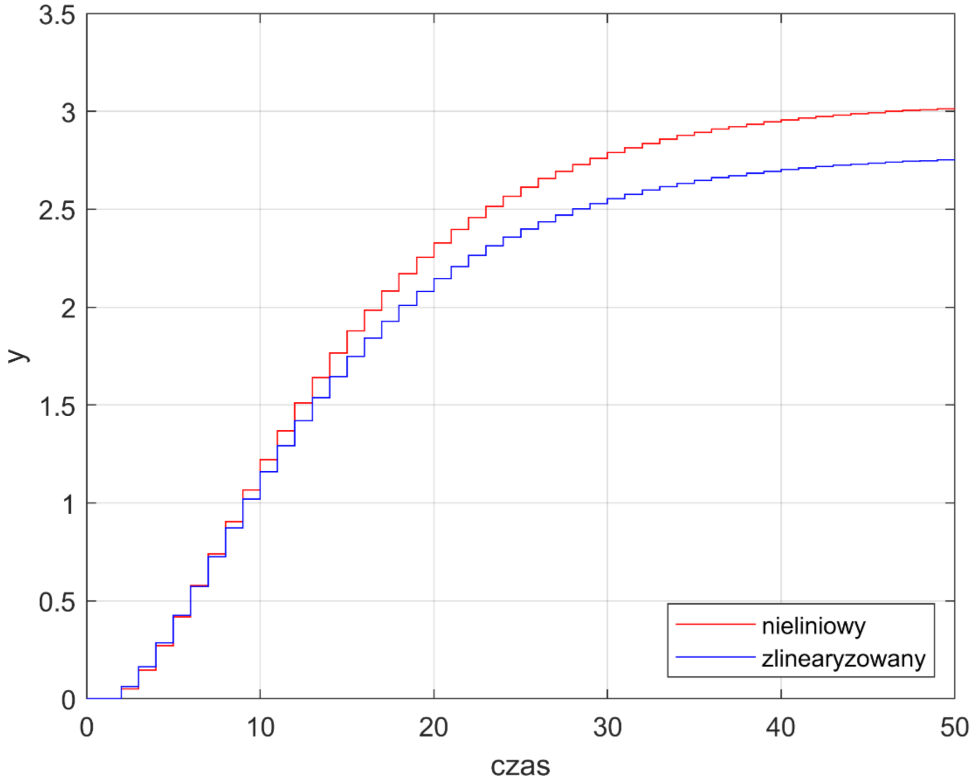
$$\bar{u} = -0.2$$



$$\bar{u} = 0.2$$

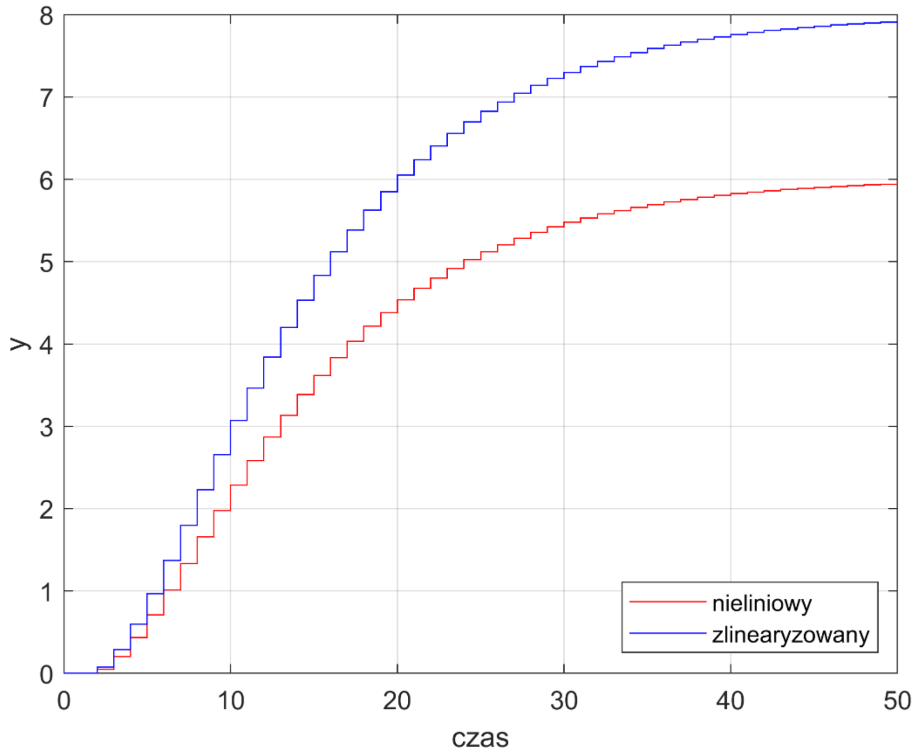


$\bar{u} = 0.8$

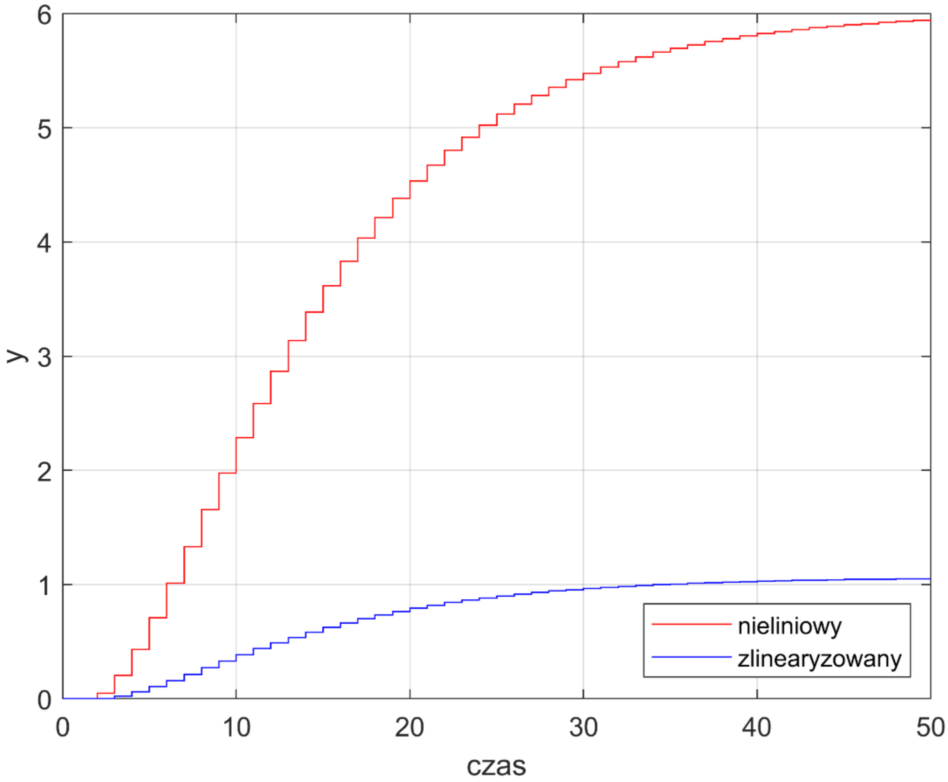


Dla skoku u: 0 -> 0.5

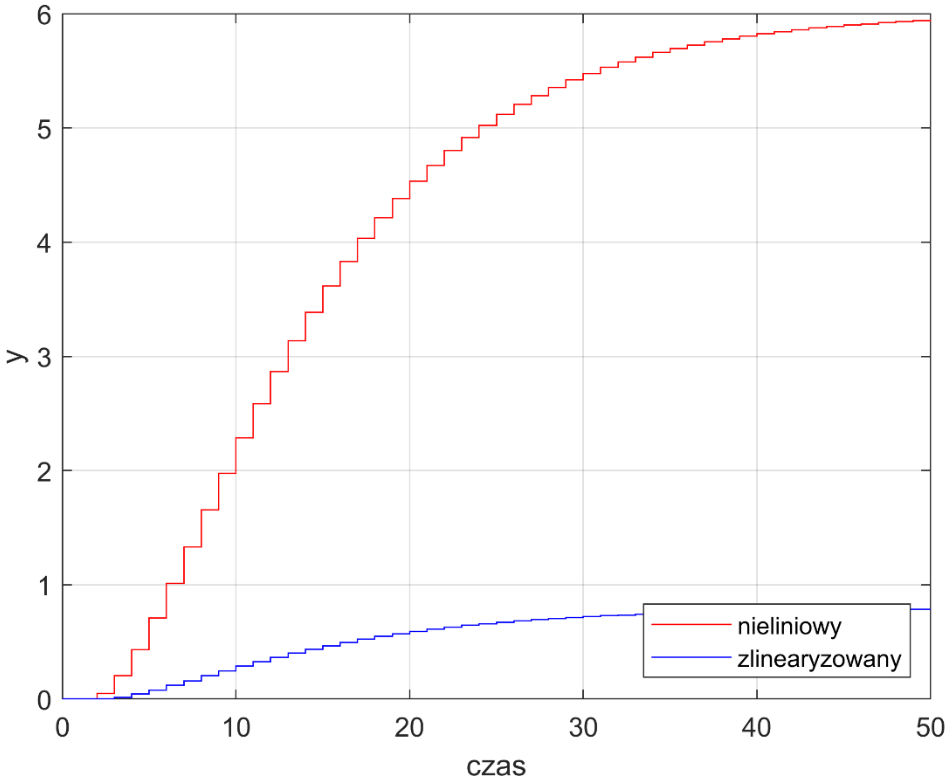
$\bar{u} = -0.8$



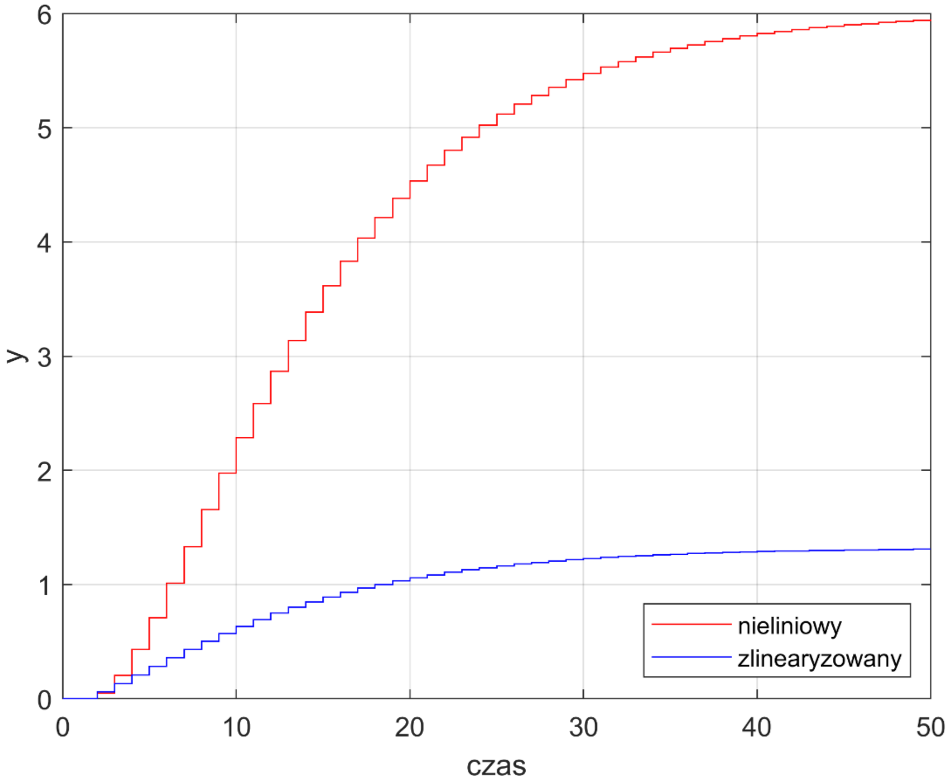
$$\bar{u} = -0.2$$



$$\bar{u} = 0.2$$

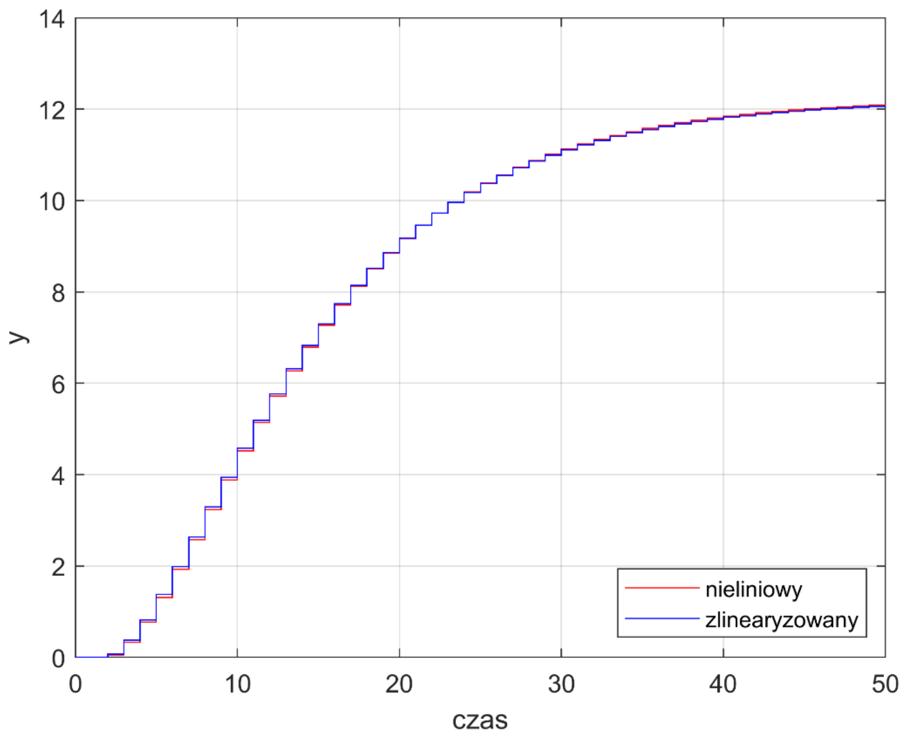


$$\bar{u} = 0.8$$

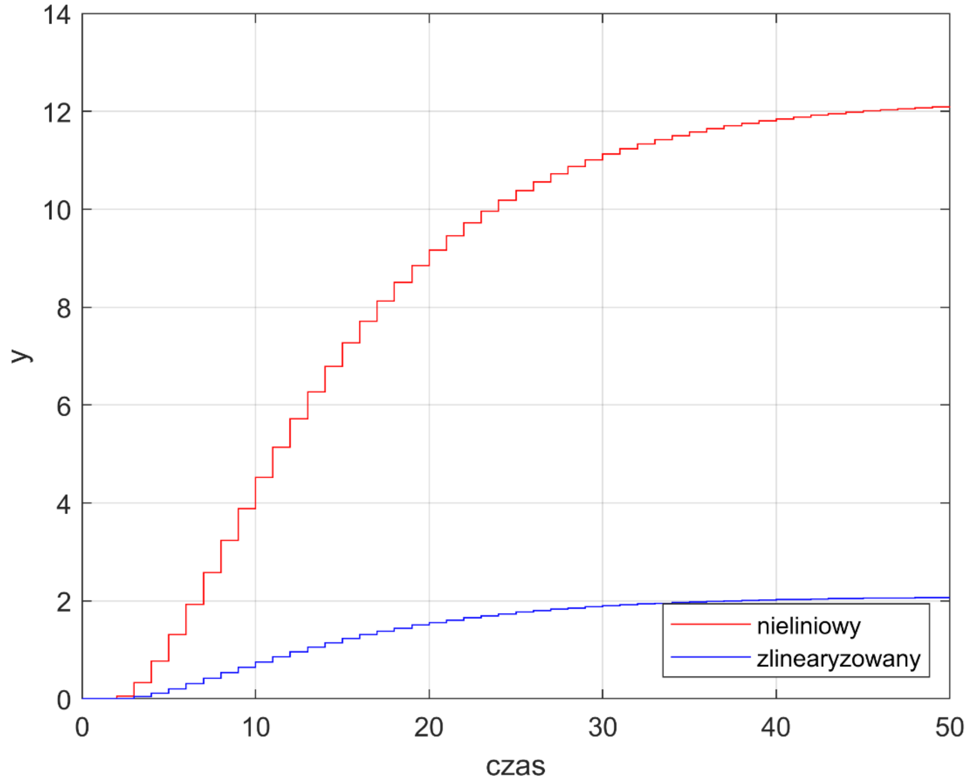


Dla skoku u: 0 -> 1

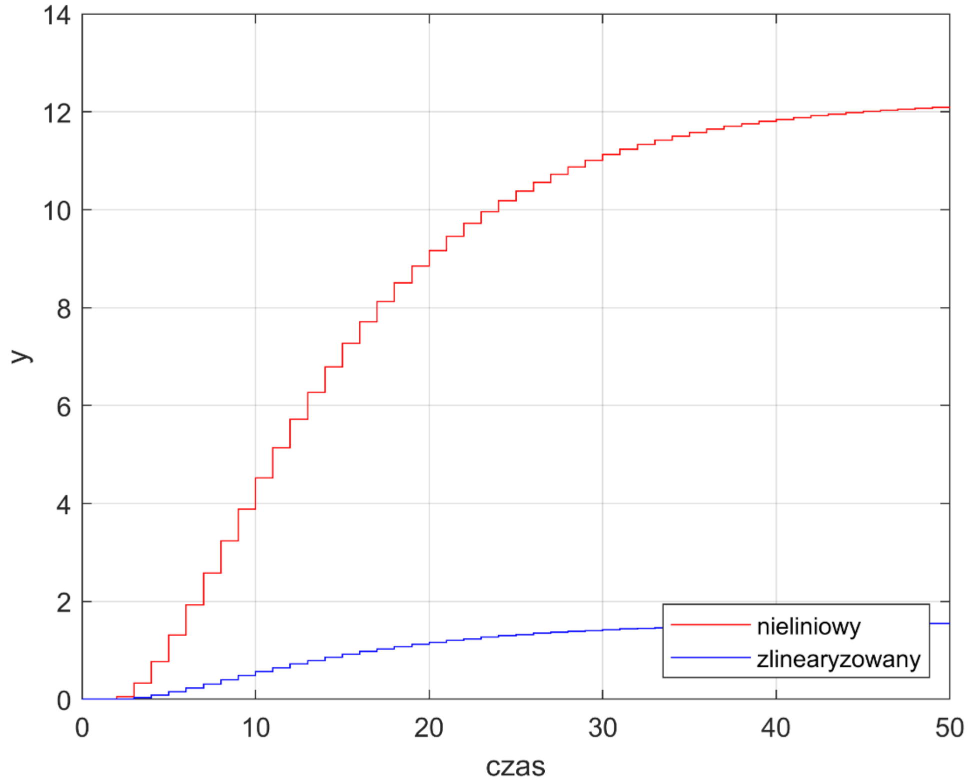
$$\bar{u} = -0.8$$



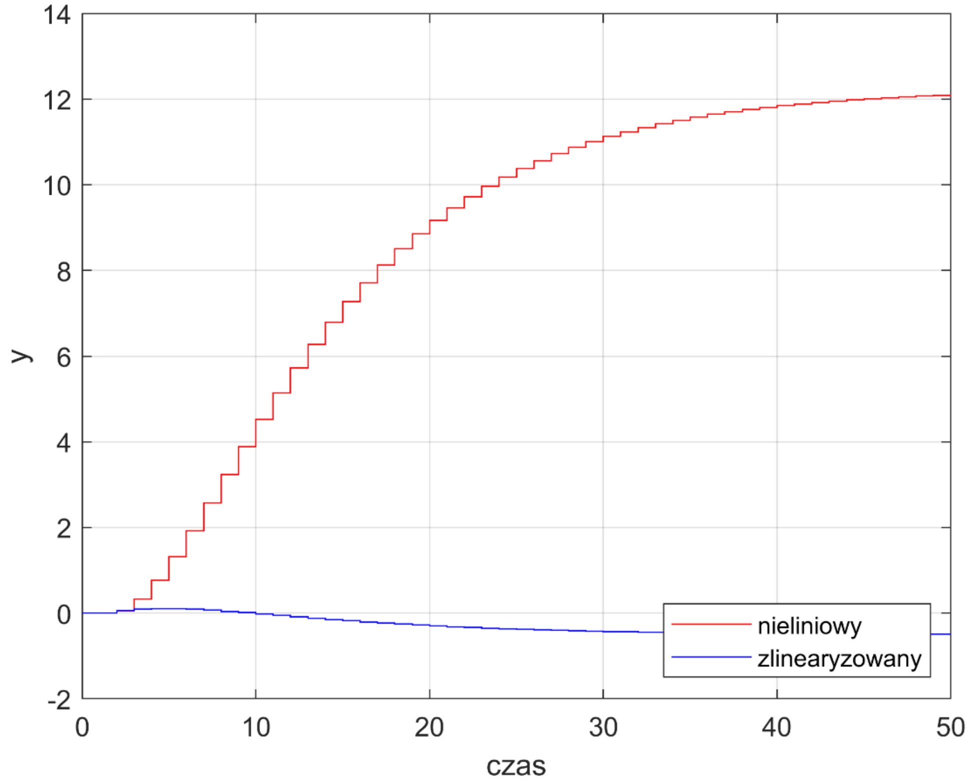
$\bar{u} = -0.2$



$\bar{u} = 0.2$



$$\bar{u} = 0.8$$



Możemy zauważyć, że oprócz punktu linearyzacji, skok sygnału sterującego także wpływa na linearyzację funkcji. Widać również, że funkcja zlinearyzowana nie jest linią prostą jak w przypadku funkcji ciągłej.

10. Transmitancja w punkcie $\bar{u}$

Korzystają z następującego równania:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D,$$

Z macierzami A,B,C,D:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 0.3T & T \\ -0.02T & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0352T - 0.0176T\bar{u} + 0.0192T\bar{u}^2 - 0.208T\bar{u}^3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Obliczyłem następujące G(z):

$$G(z) = \frac{T^2(1.76 - 0.88\bar{u} + 0.96\bar{u}^2 + 10.4\bar{u}^3)}{T^2 + 15Tz - 15T + 50z^2 - 100z + 50}$$

11. Wzmocnienie statyczne K transmitancji w zależności od punktu linearyzacji $\bar{u}$

Korzystając ze wzoru:

$$K_{stat} = \lim_{z \to 1} G(z) = 1.76 - 0.88\bar{u} + 0.96\bar{u}^2 + 10.4\bar{u}^3$$

Wykres: