統計力学 1 第 6 回練習問題

1. 前回の授業で Maxwell-Boltzmann 分布を用いて伝導度を計算したが、同様の手法は、別の分布に対しても適用できる。フェルミ分布関数と呼ばれる以下の分布について考えよう。(フェルミ分布関数については後期に習うはずである。)

   $$f(\epsilon(\vec{p})) = 1/(1 + \exp[\beta(\epsilon(\vec{p}) - \mu_F)])$$

   空間を 2 次元として、系の粒子数が N である時の μ_F を求めよ。($\cancel{N = \int d\vec{p} f(\epsilon(\vec{p}))}$ を解け)

   ⊕ ただし $\epsilon(\vec{p}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$ とする

   $$\frac{N}{V} = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^d} f(\epsilon(\vec{p}))$$

2. μ_F をそのまま ((1) の表式を使わずに) 用いて、低温 ($\beta \to \infty$) における伝導度を緩和時間近似を使って計算せよ。緩和時間は τ とし、$\lim_{\beta\to\infty} \partial f/\partial\epsilon = -\delta(\epsilon - \mu_F)$ を用いて良い。

3. ~~$J < 0$ の場合の 1 次元 Ising 模型について、転送行列の方法により分配関数を計算せよ。~~

(1) $d=2$ の時、

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} 2\pi \int_0^\infty dp\, p \cdot f(\varepsilon(p))$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{p}{m} \Rightarrow dp \cdot p = m d\varepsilon \right)$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu_F)}}$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu_F)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu_F)}}$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left(-\frac{1}{\beta}\right) \left[\ln \left(1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu_F)} \right) \right]_0^\infty$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \cdot \ln \left[1+e^{\beta\mu_F} \right]$$

$$\Rightarrow 1+e^{\beta\mu_F} = \exp\left[\frac{2\pi\hbar^2\beta N}{mV} \right]$$

$$\Rightarrow \mu_F = \frac{1}{\beta} \ln \left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar^2\beta N}{mV} \right) - 1 \right]$$

($\frac{\beta N}{V} \gg 1$ で exp の中身が大きい時、

$$\mu_F \simeq \frac{1}{\beta} \cdot \frac{2\pi\hbar^2\beta N}{mV} = \frac{2\pi\hbar^2 N}{mV}$$)

(2) 緩和時間近似より $\dfrac{df}{dt} = -\dfrac{f-f_0}{\tau}$ —①

$\dfrac{df}{dt} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\nabla_p f = e\mathbb{E}\cdot\nabla_p f$

今 $\varepsilon(\mathbf{p}) = \dfrac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = \varepsilon(p)$ より等方的なので $\mathbb{E} = (E_x, 0, 0)$ として

一般性を失わない

よって $\dfrac{df}{dt} = eE_x \dfrac{\partial}{\partial p_x} f(\varepsilon(\mathbf{p}))$

今 E_x は小さいとして $f = f_0 + f_1\cdot E_x + O(E_x^2)$ と得て.

E_x の一次までを考えると ① より.

$eE_x \dfrac{\partial f_0}{\partial p_x} = -\dfrac{f_1}{\tau}E_x \qquad f_1 E_x = -eE_x\tau\dfrac{p_x}{m}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)$

よって 電流密度の期待値

$\langle j_x\rangle = \displaystyle\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2}\frac{ep_x}{m}f \simeq \int_0^{2\pi} d\theta \int \frac{dp\,p}{(2\pi\hbar)^2}\frac{ep\cos\theta}{m}\cdot eE_x\tau\frac{p\cos\theta}{m}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right)$

$= \pi e^2 E_x\tau \displaystyle\int \frac{d\varepsilon}{(2\pi\hbar)^2}\cdot 2\varepsilon\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{e^2\tau\mu_F}{2\pi\hbar^2}E_x$

$\sigma = \left.\dfrac{\langle j_x\rangle}{E_x}\right|_{E_x\to 0} = \dfrac{e^2\tau\mu_F}{2\pi\hbar^2}$