統計力学1 第0回確認問題

1. 微分の定義：$\lim_{\delta t \to 0}$ を用いて、ある十分滑らかな関数 $f(t, x(t))$ についての偏微分 $\frac{\partial f}{\partial t}|_{(t,x)}$ と全微分 $\frac{df}{dt}|_{(t,x)}$ を書き表せ。

2. 微分の連鎖率：1の結果を用いて全微分の式を (偏微分の式+お釣りの項) に分解し、表せ。ただし、$f(t,x)$ は x について、$x(t)$ は t について十分滑らかであるとして、$f(t+\delta t, x(t+\delta t)) \simeq \frac{\partial f}{\partial t}(x(t+\delta t) - x(t))$ を用いて良い。

3. 2の結果の一般化として、関数 $f(x(t), y(t))$ について、$\frac{df}{dt}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ。

4. 積分変数の変換：ある (少なくとも1回微分可能な) 関数 g を用いて $x = g(y)$ の変数変換する事を考える。この変換を行った時に積分計算 $\int dx f(x)$ を新たな変数 y での積分の形に書き直せ。

5. x, y がベクトル変数の場合を考える。この時上と同様に $\vec{x} = \vec{g}(\vec{y})$ のような変換を行った時に、微小変異 $d\vec{x}$ は $d\vec{x} = M d\vec{y}$ を満たすが、行列 M の中身を書き下せ。(簡単のため $\vec{x} = [x_1, x_2], \vec{y} = [y_1, y_2], \vec{g}(\vec{y}) = [g_1(\vec{y}), g_2(\vec{y})]$ として良い。)

6. 行列の対角化：対角化可能な行列 M は、$M = VDV^{-1}$ (D は対角行列) のように表すことができる。この時 V を M の固有ベクトル $\vec{v}$ を用いて表せ。(簡単のため M は2*2の行列として、その固有ベクトル $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ を用いて良い。)

7. 具体例：

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   について実際に計算して V, D を求め、上の結果があっている事を確かめよ

8. V はベクトル $[1,0], [0,1]$ をどのように変換するか？$\vec{v_1}, \vec{v_2}$ を用いて表せ。この事から VDV^{-1} はどのような変換か?適当なベクトル $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$ に作用させた時の変換を図示し言葉で表現せよ。

9. これまでの結果を踏まえて、4の問題について、x, y をベクトルに一般化した場合にどうなるかを式で示せ。ただし高次元での積分 $\int d\vec{x}$ の $d\vec{x}$ は、微小体積要素を表すことに注意せよ。