統計力学 1 第 2 回確認テスト

1. 下に凸な関数 $f(x)$ と確率変数 x に対して、$x = X_i$ となる確率分布が $\{p_i\}(\sum_i p_i = 1)$ であるとする。この時以下の不等式 (Jensen(イェンセン) の不等式) が成立する事を示せ。

$$f(E[x]) \leq E[f(x)] \quad \Big(f(\sum_{i=1}^{n} p_i X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(X_i)\Big)$$

2. キュムラント生成関数

$$C_A(\beta) = \log\Big[\int dX p(X) \exp[\beta A(X)]\Big]$$

をルジャンドル変換せよ。変換後の変数についての分布関数を定義し、それを用いてルジャンドル変換した関数を表現せよ。その際に Kullback-Leibler 情報量 (相互エントロピー) なる関数

$$D_{KL}(p|q) = \int dx p(x) \log[p(x)/q(x)]$$

を用いて表してみよ。

1. (i) $f(x)$ が下に凸 $\Leftrightarrow$ $f(x) \leq \dfrac{(x-a)f(b)+(b-x)f(a)}{b-a}$ ($\forall a \leq x \leq b$)

$\dfrac{b-x}{b-a} = p_a$ とすれば. $\dfrac{x-a}{b-a} = 1 - \dfrac{b-x}{b-a} = 1-p_a$, $x = p_a a + (1-p_a) b$ より

$p_b = 1-p_a$ として $f(p_a a + p_b b) \leq p_a f(a) + p_b f(b)$

よって. x_1, x_2 のうち大きい方を b とすれば良いので.

$n=2$ の時. Jensen の不等式が成立.

(ii) $n=k$ の時. Jensen の不等式が成立すると仮定すると

$n=k+1$ の時.

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i x_i + p_k x_k + p_{k+1} x_{k+1}\right)$$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{p_k + p_{k+1}}(p_k x_k + p_{k+1} x_{k+1}) := \bar{p}_k x_k + \bar{p}_{k+1} x_{k+1}$$

$$\bar{p}_k = \frac{p_k}{p_k + p_{k+1}}, \quad \bar{p}_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{p_k + p_{k+1}}, \quad \bar{p}_k + \bar{p}_{k+1} = 1$$

$\tilde{p}_k = p_k + p_{k+1}$ としておくと. $\sum_{i=1}^{k-1} p_i + \tilde{p}_k = 1$ より

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i x_i + \tilde{p}_k \hat{x}_k\right) \leq \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i) + \tilde{p}_k f(\hat{x}_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i) + \tilde{p}_k f(\bar{p}_k x_k + \bar{p}_{k+1} x_{k+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} p_i f(x_i) + \tilde{p}_k \left(\bar{p}_k f(x_k) + \bar{p}_{k+1} f(x_{k+1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i)$$

よって $n=k+1$ においても Jensen の不等式が成立

より 数学的帰納法より $n \geq 2$ について

Jensen の不等式 $f\left(\sum_i p_i x_i\right) \leq \sum_i p_i f(x_i)$

が示された.

統計力学1 第2回確認テスト

1. 下に凸な関数 $f(x)$ と確率変数 x に対して、$x = X_i$ となる確率分布が $\{p_i\}(\sum_i p_i = 1)$ であるとする。この時以下の不等式 (Jensen(イェンセン) の不等式) が成立する事を示せ。

$$f(E[x]) \leq E[f(x)] \quad \Big(f(\sum_i p_i X_i) \leq \sum_i p_i f(X_i)\Big)$$

2. キュムラント生成関数

$$C_A(\beta) = \log\Big[\int dX p(X) \exp[\beta A(X)]\Big]$$

をルジャンドル変換せよ。変換後の変数についての分布関数を定義し、それを用いてルジャンドル変換した関数を表現せよ。その際に Kullback-Leibler 情報量 (相互エントロピー) なる関数

$$D_{KL}(p|q) = \int dx p(x) \log[p(x)/q(x)]$$

を用いて表してみよ。