

## 統計力学1 第3回練習問題

1. どの目 (1~6) も等確率で出るサイコロを振ったときの、出る目の期待値と分散を計算せよ

2. ガウス分布関数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

のモーメント母関数を計算し、1次と2次のモーメントを計算せよ。

3. ガウス分布関数

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

のキュムラント母関数を計算し、1次と2次のキュムラントを計算せよ。また3次以上のキュムラントがゼロである事を確認せよ。

4. 非負の確率変数 (マイナスの値を取る確率がゼロである確率変数)  $\hat{X}$  について、 $a > 0$  として、Markov の不等式

$$\Pr[\hat{X} \geq a] = \int_a^{X_{max}} dX p(X) \leq \mathbf{E}[\hat{X}]/a$$

を示せ。(上の式では連続確率変数の場合の式を書いた。簡単のため連続確率変数についてのみ示せば良い。)

5. 下に凸な関数  $f(x)$  と離散確率変数  $\hat{X}$  に対して、 $\hat{X} = X_i$  となる確率分布が  $\{p_i\}$  ( $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ) であるとする。このとき以下で表される Jensen の不等式が成立する事を数学的帰納法 ( $n = 2$  からスタート) を用いて示せ。

$$f(\mathbf{E}[\hat{X}]) \leq \mathbf{E}[f(\hat{X})]$$