統計力学 1 第 4 回練習問題

1. Maxwell-Boltzmann の運動量分布 $f(\vec{p}) = \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}} N \exp[-\frac{\beta}{2m}\epsilon(\vec{p})]$ から運動エネルギ- $\epsilon(\vec{p}) = \vec{p}^2/2m$ の期待値を求めよ。

2. (1) の結果と、授業でやった Lagrange の未定乗数法で導いた α, β の値を $S/k_B = (1+\alpha)N + \beta E$ に代入し、エントロピーの表式を導け。

3. (2) で導いた表式には実は問題がある。導いたエントロピーの表式が負になってしまう条件を書け。またそのエントロピーが負になってしまう状況下で、(2) を導出するまでに (授業中に) 用いた条件・仮定のうち、どれが破綻したためにこのような問題が生じるのかを考察せよ。

(1)

$$\langle E\rangle = \int dp^3 \frac{|p|^2}{2m} f(p)$$

$$= 4\pi N\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dp\, p^2 \frac{p^2}{2m} \exp\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right]$$

$$= \quad 〃 \quad \cdot 2m \cdot \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\int_0^\infty dp \exp\left[-\frac{\beta p^2}{2m}\right]\right)$$

$$= \quad 〃 \quad 2m \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2m\pi} \cdot \frac{3}{4}\beta^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}N\beta^{-1} = \frac{3}{2}Nk_BT$$

(2) $e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\left(\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\beta = \frac{1}{k_BT}$ と求めたので.

$$S/k_B = N\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + 1\right) + \frac{3}{2}N$$

$$\Rightarrow S = Nk_B\left(\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{5}{2}\right)$$

(3) $S \leq 0$ となるのは.

$$e^{-\frac{5}{2}} \geq \frac{V}{N}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow k_BT \leq \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-\frac{5}{3}} \quad - ⊛$$

粗視化したエネルギー準位 E_e に属する粒子数 N_e が.
エネルギー準位における状態数 M_e に対し. $N_e \ll M_e$ という仮定をおいた.
低温においては. $f(p)$ の関数形より. 低エネルギーの準位に粒子数が集中するので. $N_e \ll M_e$ が破綻し. ⊛ が満たされ. エントロピーが負となる

また 粒子数密度 $\frac{N}{V}$ が大きい場合も $N_e \ll M_e$ が破れるので.
⊛ が満たされ. エントロピーが負となる