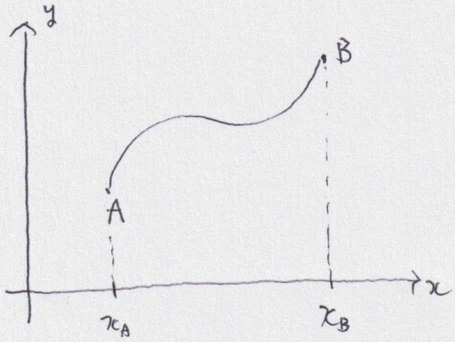
1.5.5 補足

変分計算の適用事例について、具体的な問題設定を通じて説明する。

事例；「2点間を結ぶ曲線のうち長さが最小となるのは線分であることを示す」

カンタンのため2次元で考える。



曲線ABの長さは x, y 方向の微小要素を dx, dy とすると、積分を使って次のように表せる。

$$\int_{A\to B} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (\because \text{三平方の定理})$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

これを

$$F[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

とする。Fは関数 $y(x)$ の形を変えることで、その出力値が変化する。Fを汎関数と呼び引数の括弧には '[ ]' を用いる。

今 $F[y(x)]$ の最小を考えたい。そのための条件は $y(x)$ を微小変化させたとき、どのような δy に対しても、$\delta F = 0$ が成立することである。※

※厳密には最小条件ではなく極値条件だが細かいことは気にしない。

F内の被積分関数を $f(y')$ とおく。$y(x)$ を $y(x) + \delta y(x)$ へ関数を微小変化させると、

$$\delta F = F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)]$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} f(y' + \delta y')\, dx - \int_{x_A}^{x_B} f(y')\, dx$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left\{ f(y') + \frac{d}{dy'} f(y')\, \delta y' \right\} dx - \int_{x_A}^{x_B} f(y')\, dx \quad (\because \text{テーラー展開で一次項まで拾う})$$

$$= \cancel{\int_{x_A}^{x_B} f(y') dx} + \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dy'} f(y') \delta y' dx - \cancel{\int_{x_A}^{x_B} f(y') dx}$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{d}{dy'} \sqrt{1+(y')^2} \right\} \delta y' dx$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dy'} \sqrt{1+(y')^2} \frac{d}{dx}(\delta y) dx \qquad \left(\because \delta y' = \frac{d}{dx} \delta y \right)$$

よく使います。

部分積分によって

$$= \left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \delta y \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) \delta y \, dx$$

端点A, Bは固定されているので $\delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0$ ゆえ 表面項は消える。

よく使います。

$\delta F = 0$ となるためには

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) \delta y \, dx = 0$$

被積分関数 $= 0$ であれば恒等的に上式は成立するので

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{const.}$$

$$y'^2 = C(1+y'^2) \qquad (C : 定数)$$

$$y'^2 = \text{const.}$$

$$y' = \text{const}$$

$$\therefore \ y(x) = C_1 x + C_2 \qquad (C_1, C_2 : 定数)$$

したがってAとBを結ぶ曲線の中で最小のものは線分となる。