2019年　理工学

問1

[1]

$S(t)$ と $f(t)$ の関係式をヒントに方針を考える。

$$\begin{cases} S(t) = 1 - F(t) \\ f(t) = \dfrac{d}{dt} F(t) \end{cases}$$

より、$S(t)' = -f(t)$ である。これを使い、

$$E[T] = \int_0^\infty t f(t)\, dt = \int_0^\infty S(t)\, dt$$

を示したい。$f(t) \Rightarrow S(t)$ と積分されていることより、部分積分を行う。

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty t f(t)\, dt \\ &= -\left[t S(t) \right]_0^\infty + \int_0^\infty S(t)\, dt \\ &= 0 + \int_0^\infty S(t)\, dt \end{aligned}$$

ここで、$\lim_{t \to \infty} t S(t) = 0$ を使っているが、

$E[T] < \infty$ よりどうやって示すかナゾ…

$$E[T] = \int_0^\infty t f(t)\, dt < \infty$$

より、$\lim_{t \to \infty} t P(T = t) = 0$ はわかるが、

$\lim_{t \to \infty} t P(T > t) = 0$ はなぜ？

[2]

条件付き期待値の定義を思い出す。

$$E[T \mid T > t] = \int_0^\infty x \, P(T = x \mid T > t) \, dx$$

$$= \int_0^\infty x \frac{P(T = x, T > t)}{P(T > t)} dx$$

$$= \int_t^\infty x \frac{P(T = x)}{P(T > t)} dx \qquad (*)$$

この変形さえ出来れば解けそう。

$$m(t) = E[T - t \mid T > t]$$

$$= \int_t^\infty (x - t) \frac{P(T = x)}{P(T > t)} dx$$

$$= \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty (x - t) f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{S(t)} \left\{ \underbrace{\int_t^\infty x f(x) \, dx}_{\text{部分積分}} - t \underbrace{\int_t^\infty f(x) \, dx}_{= S(t)} \right\}$$

$$= \frac{1}{S(t)} \left\{ \Big[x(-S(x)) \Big]_t^\infty + \int_t^\infty S(x) dx - t S(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{S(t)} \left\{ t S(t) + \int_t^\infty S(x) dx - t S(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty S(x) \, dx$$

次に $m(t) = \int_0^\infty \exp[H(t) - H(t+x)]\, dx$ を示す.

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{f(t)}{S(t)} \\ H(t) = \displaystyle\int_0^t h(s)\, ds \\ m(t) = \dfrac{1}{S(t)} \displaystyle\int_t^\infty S(x)\, dx \end{cases}$$

あたりがヒントになるが. exp が出る点など非常にムズイ.
実は, $H(t) = -\log S(t)$ という関係があり,
これを導くことができれば解ける。

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$= -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

$$= -(\log S(t))'$$

よって,

$$H(t) = \int_0^t h(t)\, dt = \left[-\log S(t)\right]_0^t$$

$$= -\log S(t) + 0 \qquad (\because S(0) = 1)$$

これを使うと,

$$\int_0^\infty \exp[H(t) - H(t+x)]\,dx$$

$$= \int_0^\infty \exp[-\log S(t) + \log S(t+x)]\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\exp[\log S(t+x)]}{\exp[\log S(t)]}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{S(t+x)}{S(t)}\,dx$$

$$= \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty S(x)\,dx \qquad (t+x = x' \text{ で変換})$$

$$= m(t)$$

//

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t \frac{1+m'(x)}{m(x)}\,dx\right]$$ を示す。

$-\log$ とって、$H(t) = \int_0^t \cdots dx$ の形にできそう。

$\frac{1+m'(x)}{m(x)}$ がどういう形になるか気になる。

素直に解くと、直前に得られた $m(t)$ を t で微分してみたくなるが、
特に有益なものは得られない。

$$m'(t) = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \exp[H(t) - H(t+x)]\,dx$$

$$= \int_0^\infty \exp[H(t) - H(t+x)]\,(h(t) - h(t+x))\,dx$$

→ 解答参照。

[3]

(1) 解答参照

(2)

$H(t)$ が凸関数 $\Rightarrow$ $H''(t) \geq 0$

$\Rightarrow$ $h'(t) \geq 0$

$\Rightarrow$ $h(t)$ は増加関数である.

$\Rightarrow$ 寿命分布はIFRである.

$H(t)$ が凹関数のとき、同様に寿命関数がDFRであることが言える.

[4]

$P(X \leq x) = 1 - e^{-x}$ から, $T = X^{\frac{1}{\beta}}$ の変数変換をし,

T の確率密度関数 $g_\beta(t)$ を得る.

$$
\begin{aligned}
g_\beta(t) &= \frac{d}{dt} P(T \leq t) \\
&= \frac{d}{dt} P(X \leq t^\beta) \\
&= \frac{d}{dt} (1 - e^{-t^\beta}) \\
&= -e^{-t^\beta}(-\beta) t^{\beta-1} \\
&= \beta t^{\beta-1} e^{-t^\beta}
\end{aligned}
$$

ハザード関数 $h_\beta(t)$ は、

$$h_\beta(t) = \frac{d}{dt} H_\beta(t)$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{-\log S(t)\right\}$$

ここで、

$$S(t) = P(T > t)$$
$$= 1 - P(T \leq t)$$
$$= 1 - (1 - e^{-t^\beta})$$
$$= e^{-t^\beta}$$

より、

$$h_\beta(t) = \frac{d}{dt}\left\{-\log e^{-t^\beta}\right\}$$
$$= \frac{d}{dt}(t^\beta)$$
$$= \beta t^{\beta-1}$$

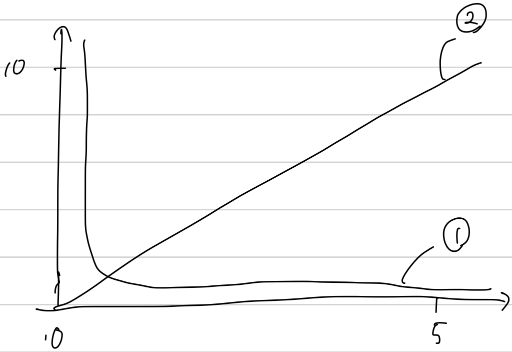
となる。

$0 < \beta < 1$ のとき、$h_\beta(t)$ は単調減少より、DFR.

$\beta = 1$ のとき、$h_\beta(t)$ は定数 .（指数分布）

$\beta > 1$ のとき、$h_\beta(t)$ は単調増加より IFR.

$$\begin{cases} h_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} & \cdots \text{①} \\ h_2(t) = 2t & \cdots \text{②} \end{cases}$$



問3

(1)

分散分析表は次のようになる。

	S(平方和)	ν(自由度)	V(平均平方)	F値
A	5	1	5	2.5
B	4	1	4	2.0
C	1	1	1	0.5
D	1	1	1	0.5
誤差	6 (=2+1+3)	3	2	
計		7(=8−1)		

実験順序のうち、完全無作為なのは 2 。

(2)

A×B の列は成分記号が a, b の [3] 列に対応する。

	S(平方和)	ν(自由度)	V(平均平方)	F値
A	5	1	5	
B	4	1	4	
C	1	1	1	
D	1	1	1	
A×B	2	1 (=(2−1)×(2−1))	2	1.0
誤差	4	2	2	
		7		

[3] [4]

解答参照

[5]

解答を参照する限り、次のような分散分析表ができる。

	S	ν	V	F
A	5	1	5	2.5 (= 5/2)
B	4	1	4	4 (= 4/1)
C	1	1	1	1 (= 1/1)
D	1	1	1	1 (= 1/1)
一次誤差	4 (= 2 + 2)	2	2	
二次誤差	1	1	1	
計	16	7		

適用

問5

<解答参照>