2019年一級　統計数理

問2

変数変換を題材にした問題。

(1)

$$E(U) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \quad (\because 指数分布の期待値)$$

$$= \frac{2}{\lambda}$$

(2)

X_1, X_2 を U に変数変換する。

$$\begin{cases} U = X_1 + X_2 \\ V = X_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = V \\ X_2 = U - V \end{cases}$$

とすると、ヤコビ行列の行列式は、

$$|J| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

よって U, V の同時確率密度関数 $g(u, v)$ は、

$$g(u, v) = f(v, u-v)\,|J|$$

$$= \lambda e^{-\lambda v} \cdot \lambda e^{-\lambda(u-v)} \cdot 1$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda u}$$

これより、

$$g(u) = \int_0^u \lambda^2 e^{-\lambda u} \, dv$$

$$= \lambda^2 u e^{-\lambda u} \quad (\text{但し}、u \geq 0 \text{のとき})$$

$u < 0$ のとき $g(u) = 0$ より、

$$g(u) = \begin{cases} \lambda^2 u e^{-\lambda u} & (u \geq 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

(3)

$$E\left[\frac{1}{U}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{u} g(u) \, du$$

$$= \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda u} \, du$$

$$= \lambda \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda u} \, du$$

$$= \lambda$$

(4)

R を α で表した後、最小化を行う。

$$R(\alpha, \theta) = E[L(\alpha \overline{X}, \theta)]$$

$$= E\left[\frac{\alpha \overline{X}}{\theta} + \frac{\theta}{\alpha \overline{X}} - 2\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\theta} E[\overline{X}] + \frac{\theta}{\alpha} E\left[\frac{1}{\overline{X}}\right] - 2$$

$$= \frac{\alpha}{2\theta} E[U] + \frac{2\theta}{\alpha} E\left[\frac{1}{U}\right] - 2$$

$$= \cdots$$

$$= \alpha + \frac{2}{\alpha} - 2$$

$\frac{d}{d\alpha} R(\alpha, \theta) = 0$ を解くと、

$$\alpha = \sqrt{2}$$

問4

最強力検定にまつわる問題. (4)でネイマン・ピアソンの基本定理を覚えているかがキーとなる。

(1)

$$\alpha = P(x \in R \mid H_0)$$

本当はH_0なのに棄却してしまう.

$$= \int_1^3 f_{\theta=0}(x)\, dx$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

$\theta = \tan^{-1} x$ と変換する。

$$= \int_{\tan^{-1} 1}^{\tan^{-1} 3} \frac{1}{\pi}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 1\right)$$

$$= \frac{1}{3.1416}\left(1.249 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\fallingdotseq 0.148$$

(2)

$$1-\beta = 1 - P(x \notin R \mid H_1)$$

$$= P(x \in R \mid H_1)$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\{1+(x-1)\}^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{\pi} (\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 0)$$

$$\fallingdotseq 0.352$$

(3)

$$\lambda(x) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)}$$

$$= \frac{1+x^2}{1+(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2-2x+2}$$

$$\lambda(1) = \frac{1+1}{1-2+2} = 2$$

$$\lambda(3) = \frac{9+1}{9-6+2} = \frac{10}{5} = 2$$

また、 $\lim_{x \to +\infty} \lambda(x) = \lim_{x \to -\infty} \lambda(x) = 1$

さらに、

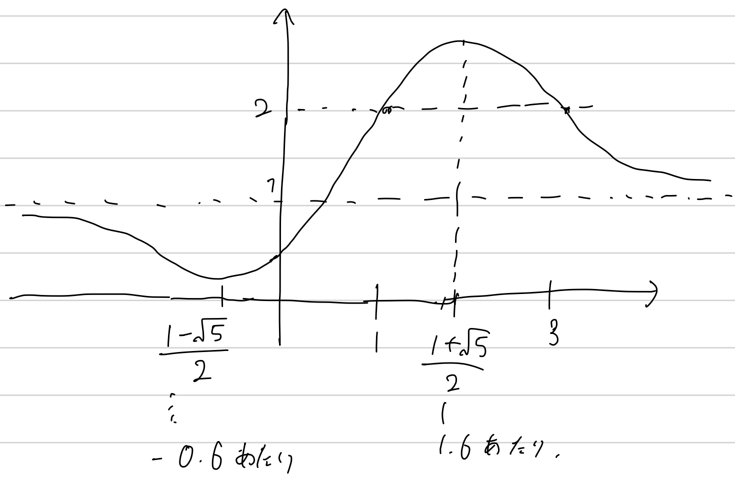
$$\lambda'(x) = \cdots = \frac{-2(x^2 - x - 1)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

より、

$$\lambda'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \lambda'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

また、

$$\lim_{x \to -\infty} \lambda'(x) = \lim_{x \to +\infty} \lambda'(x) = 0$$



(4)

『自然科学の統計学』で以下用語を確認する。

最強力検定

- 同じ有意水準の元で、検出力が最大の検定。

ネイマン・ピアソンの補題

- $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$ のとき、次の検定方法が最強力検定となる。

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} > k \text{ ならば 棄却}$$

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \leq k \text{ ならば 採択}$$

R は $\dfrac{f_1(x)}{f_0(x)} > 2$ の棄却域と一致する $(\because (3))$

よって、ネイマン・ピアソンの補題より、[1] の検定は最強力検定となる。