27章

問 27.2

「共分散を求めよ」→「ラグhに対する自己相関係数を求めよ」に読み替える。
また、U_t は分散 σ^2 の ホワイトノイズとして扱う。

<h=0のとき>

$$
\begin{aligned}
\gamma_{h=0} &= Cov(Y_t, Y_t) = V(Y_t) \\
&= E(Y_t^2) - E(Y_t)^2 \\
&= E(Y_t^2) - \{E(U_t) + \theta_1 E(U_{t-1}) + \theta_2 E(U_{t-2})\}^2 \\
&= E(Y_t^2) - 0 \qquad (\because U_t \text{ がホワイトノイズ}) \\
&= E\{(U_t + \theta_1 U_{t-1} + \theta_2 U_{t-2})(U_t + \theta_1 U_{t-1} + \theta_2 U_{t-2})\}
\end{aligned}
$$

（ここで 交差項の期待値：$E(U_t U_{t-1})$ などは、ホワイトノイズの性質より 0 となる。）

$$
\begin{aligned}
&= E(U_t^2) + \theta_1^2 E(U_{t-1}^2) + \theta_2^2 E(U_{t-2}^2) \\
&= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + \theta_2^2 \sigma^2 \\
&= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{h=1} &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\
&= E(Y_t Y_{t-1}) - E(Y_t)E(Y_{t-1}) \\
&= E(Y_t Y_{t-1}) - 0 \qquad (\because h=0 \text{ のとき同様}) \\
&= E\{(U_t + \theta_1 U_{t-1} + \theta_2 U_{t-2})(U_{t-1} + \theta_1 U_{t-2} + \theta_2 U_{t-3})\} \\
&= \theta_1 E(U_{t-1}^2) + \theta_1 \theta_2 E(U_{t-2}) + \underbrace{0}_{\text{交差項の期待値}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{h=2} &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) \\
&= E(Y_t Y_{t-2}) \\
&= E\{(U_t + \theta_1 U_{t-1} + \theta_2 U_{t-2})(U_{t-2} + \theta_1 U_{t-3} + \theta_2 U_{t-4})\} \\
&= \theta_2 E(U_{t-2}^2) + \underbrace{0}_{\text{交差項の期待値}} \\
&= \theta_2 \sigma^2
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{h=3} = E(Y_t Y_{t-3})$$

展開後の全ての項が交差項の期待値となる

$$= 0$$

$h > 2$ については同様に $\gamma_h = 0$

問 27.4

AIC = −2 <対数尤度> + 2 <パラメータ数> は、
小さい程良いので、AR(3) が良い。

<相談：AICって 0 以上になるはずでは？>

$$0 \leq [\text{尤度}] \leq 1$$
$$\Rightarrow \log[\text{尤度}] \leq 0$$
$$\Rightarrow -2\log[\text{尤度}] \geq 0$$
$$\Rightarrow -2\log[\text{尤度}] + 2M \geq 0$$