【(13.4)】

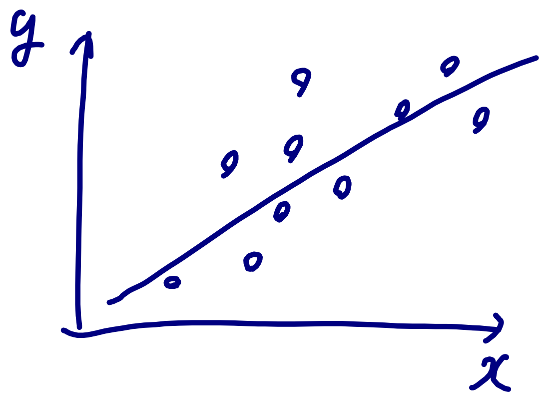
$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \underbrace{+ \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 - \hat{\beta}_0}_{0}$$

$$= \bar{y} + \hat{\beta}_1 (x_1 - \bar{x}_1) + \hat{\beta}_2 (x_2 - \bar{x}_2)$$

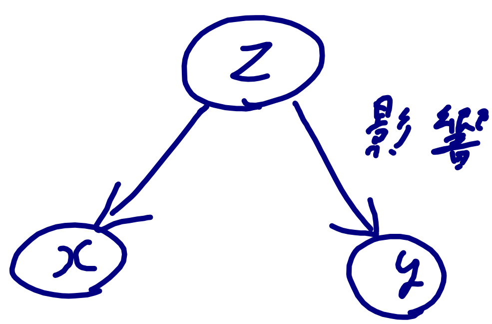
$$\underbrace{\frac{\hat{y} - \bar{y}}{S_y}}_{\hat{u}_y} = \underbrace{\hat{\beta}_1 \frac{S_{x_1}}{S_y}}_{b_1} \underbrace{\frac{(x_1 - \bar{x}_1)}{S_{x_1}}}_{\hat{u}_{x_1}} + \underbrace{\hat{\beta}_2 \frac{S_{x_2}}{S_y}}_{b_2} \underbrace{\frac{(x_2 - \bar{x}_2)}{S_{x_2}}}_{\hat{u}_{x_2}}$$

【(13.8) 〜 (13.12)】

x と y に相関がある.

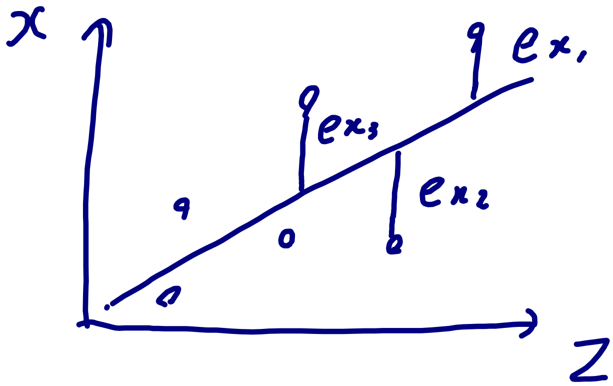


しかし. x と y には因果関係がなく,
背後の z と因果関係にあるケースがある.

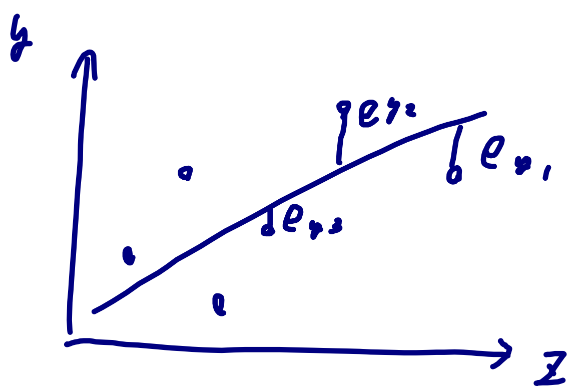


このとき. z の影響を取り除いたときの
x y の相関係数 : 偏相関係数に
興味がある.

$$\hat{x}_i = \bar{x} + \frac{S_{xz}}{S_{zz}}(z_i - \bar{z}) \qquad (13.9)$$



$$\hat{y}_i = \bar{y} + \frac{S_{yz}}{S_{zz}}(z_i - \bar{z}) \qquad (13.10)$$



e_{xi} と e_{yi} の相関係数を偏相関係数と呼ぶ

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}, \quad r_{xz} = \frac{S_{xz}}{\sqrt{S_{xx} S_{zz}}}, \quad r_{yz} = \frac{S_{yz}}{\sqrt{S_{yy} S_{zz}}}$$

に注意して.

$$S_{e_x e_x} = \sum_i (e_{x_i} - 0)^2$$

$$= \sum_i (x_i - \bar{x})^2 - 2\frac{S_{xz}}{S_{zz}} \sum_i (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})$$

$$+ \left(\frac{S_{xz}}{S_{zz}}\right)^2 \sum_i (z_i - \bar{z})^2$$

$$= S_{xx} - 2\frac{S_{xz}^2}{S_{zz}} + \frac{S_{xz}^2}{S_{zz}}$$

$$= S_{xx}(1 - r_{xz}^2)$$

同様に.

$$S_{e_y e_y} = S_{yy}(1 - r_{yz}^2)$$

また.

$$S_{e_x e_y} = \sum_i e_{x_i} e_{y_i}$$

$$= S_{xy} - \frac{S_{yz}}{S_{zz}} S_{xz} - \frac{S_{xz}}{S_{zz}} S_{yz} + \frac{S_{yz} S_{xz}}{S_{zz}}$$

$$= S_{xy} - \frac{S_{yz} S_{xz}}{S_{zz}}$$

これより、

$$r_{xy.z} = \frac{S_{e_x e_y}}{\sqrt{S_{e_x e_x} \quad S_{e_y e_y}}}$$

$$= \frac{S_{xy} - \dfrac{S_{xz} S_{yz}}{S_{zz}}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy} (1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

$$= \frac{\dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} - \dfrac{S_{xz}}{\sqrt{S_{xx} S_{zz}}} \cdot \dfrac{S_{yz}}{\sqrt{S_{yy} S_{zz}}}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

$$= \frac{r_{xy} - r_{xz} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}} \qquad (13.8)$$

□

目 相関の分解 目

- $E(x_i^2) = V(x_i) + (E(x_i))^2$

$= 1$ （$\because$ x_i は標準化されてる）

- （$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ より.）

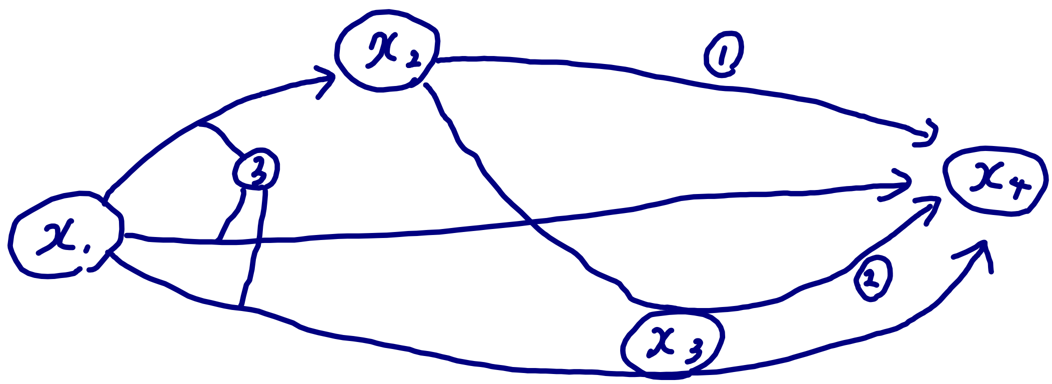
$E(x_i x_j) = Cov(x_i, x_j) - E(x_i)E(x_j)$

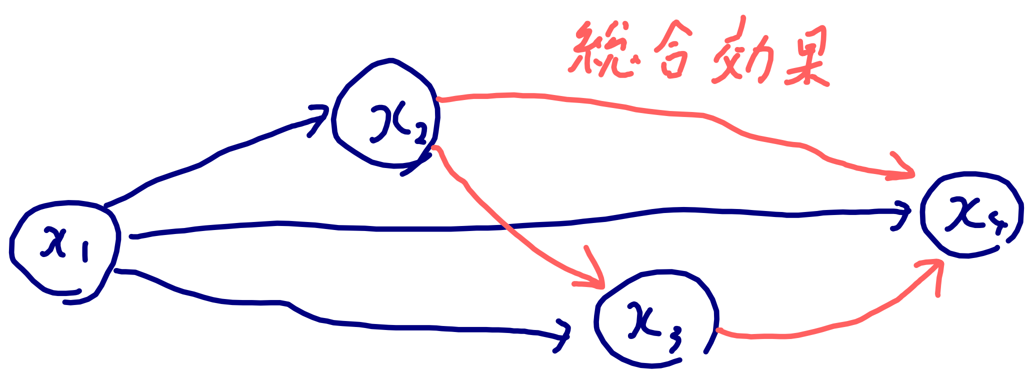
$= \dfrac{Cov(x_i, x_j)}{\sqrt{V(x_i)V(x_j)}}$

$= \rho_{ij}$

【(13.20)式】

$$\rho_{24} = \underbrace{\alpha_{42}}_{\text{直接効果 ①}} + \underbrace{\alpha_{43}\alpha_{32}}_{\text{間接効果 ②}} + \underbrace{\alpha_{21}\alpha_{41} + \alpha_{21}\alpha_{43}\alpha_{31}}_{\text{擬似相関 ③}}$$





【問題 13.5】

b_{11} は u_1 と f_1 との母相関係数、

b_{12} は u_1 と f_2 との母相関係数 を示す。

$$u_{i1} = b_{11} f_{i1} + b_{12} f_{i2} + \varepsilon_{i1}$$

$$\Big\downarrow \ i \text{を略}$$

$$u_1 = b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + \varepsilon_1$$

両辺に f_1 をかけて、期待値をとると、

$$E(u_1 f_1) = b_{11} E(f_1^2) + b_{12} E(f_1 f_2) + E(\varepsilon_1 f_1)$$

$$\rho_{u_1 f_1} = b_{11}\{V(f_1) + E(f_1)^2\} + b_{12} E(f_1) E(f_2)$$

($\because$ u_1, f_1 は標準化されてる)

$$+ E(\varepsilon_1) E(f_1)$$

$$\rho_{u_1 f_1} = b_{11} \cdot 1 + b_{12} \cdot 0 + 0$$

$$= b_{11}$$

u_1, f_2 についても同様に $\rho_{u_1 f_2} = b_{12}$ □

【「共通性」と「独自性」】

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & l_{1p} \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{p1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

の第j対角成分は、

次のように分解できる。

$$1 = \underbrace{b_{j1}^2 + b_{j2}^2}_{\text{共通性}} + \underbrace{d_j^2}_{\text{独自性}}$$

u_jの変動のうち、共通因子で説明できる部分　と　説明できない部分

$$u_j = \boxed{b_{j1} f_1 + b_{j2} f_2} + \boxed{\varepsilon}$$

【 $\hat{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, c_{11} & \sqrt{\lambda_2}\, c_{12} \\ \sqrt{\lambda_1}\, c_{21} & \sqrt{\lambda_2}\, c_{22} \\ \sqrt{\lambda_1}\, c_{31} & \sqrt{\lambda_2}\, c_{32} \\ \sqrt{\lambda_1}\, c_{41} & \sqrt{\lambda_2}\, c_{42} \end{bmatrix}$ と推定する 】

(9.30) では、

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に主成分分析する際の

相関係数が次のように求まることを示した。

$$\begin{cases} r_{z_1 x_1} = \sqrt{\lambda_1}\, a_1 \\ r_{z_1 x_2} = \sqrt{\lambda_1}\, a_2 \\ r_{z_2 x_1} = \sqrt{\lambda_2}\, a_1 \\ r_{z_2 x_2} = \sqrt{\lambda_2}\, a_2 \end{cases} \qquad (9.30)$$

相関係数

因子分析について、$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ の

特徴を抽出すると見立てると、

b_{11} は x_1 と f_1 の相関係数（因子負荷量）なので、

(9.30) のように固有値固有ベクトルを用いて、

$$b_{11} = \sqrt{\lambda_1}\, c_{11}$$

と推定できる（らしい）。

【因子負荷量がゼロに近いもの…】

国 $u_{i1} = \hat{b}_{11}^{*} f_{i1} + 0 \cdot f_{i2} + \varepsilon_{i1}$

英 $u_{i2} = \hat{b}_{21}^{*} f_{i1} + 0 \cdot f_{i2} + \varepsilon_{i2}$

数 $u_{i3} = 0 \cdot f_{i1} + \hat{b}_{32}^{*} f_{i2} + \varepsilon_{i3}$

理 $u_{i4} = 0 \cdot f_{i1} + \hat{b}_{42}^{*} f_{i2} + \varepsilon_{i4}$

↑ 文系　　　　↑ 理系

という解釈がしやすい。

式 (13.46) ~ (13.48) 関

ここで定義する寄与率は、主成分分析の寄与率とは別物と考えて良い…?

p103 より、 $\hat{b}_{j1}^{*2} + \hat{b}_{j2}^{*2} \ (= \hat{h}_j^2)$ は回転に対して不変なので、

$$(\text{累積寄与率}) = (\hat{h}_1^2 + \hat{h}_2^2 + \hat{h}_3^2 + \hat{h}_4^2)/4$$

も回転に対して不変.

【因子得点の算出】

- $S_{jk} = (n-1)\, r_{jk}$

$$\because\ \hat{r}_{jk} = \frac{\frac{S_{jk}}{n-1}}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \frac{\hat{\sigma}_{jk}}{\sqrt{\hat{\sigma}_j^2 \ \hat{\sigma}_k^2}}$$

- $S_{jf_1^*} = (n-1)\, \hat{b}^*_{j1}$

$$\because\ \hat{b}^*_{j1} = \hat{\sigma}_{u_j f_1^*} = \frac{\frac{S_{jf_1^*}}{n-1}}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \frac{\sigma_{1 f_1^*}}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2 \ \hat{\sigma}_{f_1^*}^2}}$$