2.5.1

【最小二乗推定量】

↳ 詳細は 2.2.1 節にある。　ってなんだっけ？

最小二乗法によって得られる
母数パラメータの推定量 $\hat{\theta}$
[つまり、$X'X\hat{\theta} = X'y$ を満たす]

の線形結合によって表わされる推定量

$l'\hat{\theta}$ のこと。

例）一元配置分散分析で
μ, α_i, $\mu+\alpha_i$
など。

単回帰で、
β_0, β_1, $\beta_0 + x\beta$
など。

2.5.1

【最小二乗推定量は、yの線形結合だから…】

$\ell'\theta$

↳ { Xがフルランクのとき、$\ell'(X'X)X'y$

〃 じゃないとき、推定可能関数であれば、その定義より yの線形式

2.5.2

【とくに射影行列 $I-\Pi_X$ の場合は、固有値は ν_e コの1と $n-\nu_e$ コの0から成る.】

Π_X は $L(X)$ への射影子で、固有値は

1 が $\mathrm{rank}(\Pi_X)=\mathrm{rank}(X)=q$ コ

0 が $n-q$ コ (P.69)

$I-\Pi_X$ は $L(X)$ の直交補空間への射影子となる。(図2.5)

$n-\mathrm{rank}(X)$ コの直交ベクトルから張られる

固有値は、

1 が $n-q=\nu_e$ コ

0 が $q=n-\nu_e$ コ

2.5.2

【式 (4)】

$$S(\hat{\theta}) = (y - X\hat{\theta})'(y - X\hat{\theta})$$

$$= ((I - \Pi_X) y)'((I - \Pi_X) y)$$

$$= y'(I - \Pi_X)'(I - \Pi_X) y$$

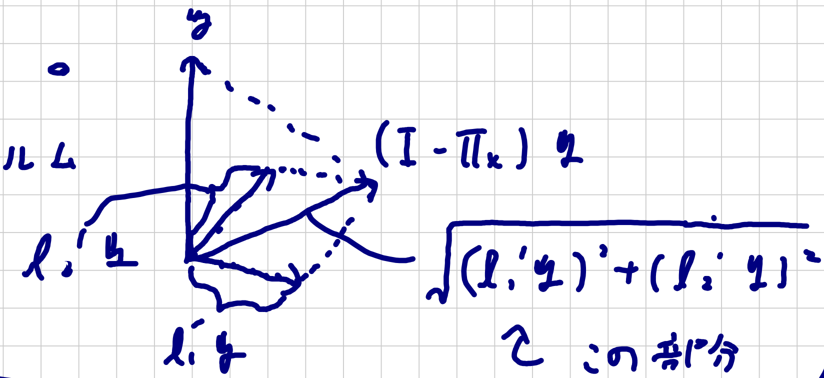
$$= y' \big(\underbrace{\textstyle\sum l_i l_i'}_{\text{行列の和}}\big) y \quad \left(\because \begin{array}{l} \cdot 対称性 \\ \cdot べき等性 \end{array} \right)$$

$$= \sum \underbrace{\overset{1\times n}{y'} \overset{n\times 1}{l_i}}_{\text{先に計算}} \underbrace{\overset{1\times n}{l_i'} \overset{n\times 1}{y}}$$ 和の中に入れる

$$= \sum_{i=1}^{\nu_e} (l_i' y)^2$$

意味：直交補空間への射影行列の各固有ベクトルとの内積をとったものの総和。

L_2 ノルム



2.5.2

【 $(I-\Pi_x)\overset{?}{X} = 0$ に (3) を代入するとわかるように 】

$$(I-\Pi_x)X = \left(\sum_{i=1}^{\nu_e} l_i l_i'\right) X = \underset{n\times n}{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu_e} \underset{n\times 1}{l_i} \underset{1\times n}{l_i'} \underset{n\times n}{X} = \underset{n\times n}{0}$$

どうやって $l_i' X = \underset{1\times n}{0}$ が出たかナゾだが.

l_i は $L(X)$ の直交補空間からとってきたベクトルなので.

$l_i' X = 0$ は当然な感じはする.

【 $l_i' y$ の期待値は. $E(l_i' y) = 0$ である 】

$$E(l_i' y) = E(\underbrace{l_i' X}_{0}\theta + l_i'\varepsilon)$$

$$= E(l_i'\varepsilon)$$

$$= l_i' E(\varepsilon)$$

$$= 0$$

2.5.2

?

【 $l_i' X = 0$ であることから, $S(\hat{\theta})$ の各成分と推定可能関数全体 $X\hat{\theta}$ は無相関 】

$$
\begin{aligned}
Cov(X\hat{\theta},\ y - X\hat{\theta}) &= Cov(\Pi_x y,\ (I - \Pi_x) y) \\
&= \Pi_x\ V(y)\ (I - \Pi_x)' \\
&= \sigma^2\ \Pi_x (I - \Pi_x) \\
&= \underset{n \times n}{0}
\end{aligned}
$$

$$
Cov(X\hat{\theta},\ y - X\hat{\theta}) = Cov(X\hat{\theta},\ \Sigma l_i l_i' y)
$$

$Cov(X\hat{\theta},\ S(\hat{\theta}))$ が出てこない!

1.5.2

【(8), (9) 読者はこれを確かめてほしい】

(10) $l_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$l_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$ とするとき.

$$S(\hat{\theta}) = (y - X\hat{\theta})'(y - X\hat{\theta})$$
$$= (y - \mathbb{1}\bar{y})'(y - \mathbb{1}\bar{y})$$
$$= y'(I - \Pi_j)'(I - \Pi_j)y$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu_e} (l_i' y)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{2} (l_i' y)^2$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + 0 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_3 \right)^2$$
$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 - y_1 y_2 + \frac{1}{6} y_1^2 + \frac{1}{6} y_2^2 + \frac{4}{6} y_3^2$$
$$+ \frac{2}{6} y_1 y_2 - \frac{4}{6} y_1 y_3 - \frac{4}{6} y_2 y_3$$
$$= \frac{4}{6} y_1^2 + \frac{4}{6} y_2^2 + \frac{4}{6} y_3^2 - \frac{4}{6} (y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)$$
$$= \frac{4}{6} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_3)$$

(11) $l_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)'$

$l_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)'$ とすると.

$$S(\hat{\theta}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_3^2 - y_1 y_3 + \frac{1}{6} y_1^2 + \frac{4}{6} y_2^2 + \frac{1}{6} y_3^2 - \frac{4}{6} y_1 y_2 + \frac{2}{6} y_1 y_3 - \frac{4}{6} y_2 y_3$$

$$= \frac{4}{6} \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3 - y_1 y_3 \right)$$

(10) と同じ.

2.6.1

【たとえば、仮説 (2.63) (2.66) はともに
(2.67) $H_0 : E(y) = j\mu$ で表わされる】

これまでは線形モデル

$$y = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & 0 & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \varepsilon \quad \text{——} (*)$$

に $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ (2.63) か
$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ (2.66) を考えた。

これらは (*) に代入すると、同じモデルに行き着くので
始めから。

$$H_0 : y = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{j} (\mu) + \varepsilon$$

としよう。ということ。

2.6.1

【 $L'y$ とは独立な不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ を σ^2 に代入した
$$t = \frac{L'y}{\sqrt{L'L\hat{\sigma}^2}}$$ は $t(\nu_e)$ に従う 】

(1) $L'y$ が $\hat{\sigma}^2$ と独立なことを示す.

$L'y$ は推定可能関数であった. (2.68)
推定可能関数は $X\theta$ の各要素およびその
線形結合全体である.
一方. (2.61) より. $\hat{\sigma}^2$ と $X\theta$ は独立である.
従って $\hat{\sigma}^2$ と $L'y$ は独立

(2) $$t = \frac{L'y}{\sqrt{L'L\hat{\sigma}^2}}$$ が $t(\nu_e)$ に従う.

$$t = \frac{L'y}{\sqrt{L'L\sigma^2}}\,\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} = Z\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}}$$

ここで $$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{S(\hat{\theta})}{\nu_e}\cdot\frac{1}{\sigma^2} = \underbrace{\frac{S(\hat{\theta})}{\sigma^2}}_{\sim\chi(\nu_e)}\frac{1}{\nu_e}$$ (∵2.59)

よって $$\frac{Z}{\sqrt{\chi(\nu_e)/\nu_e}}$$ の形になる.

2.6.1

【仮説の自由度】

2つ前のページで、

$$X = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & 0 & & \vdots \end{pmatrix} \text{ を } X_0 = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$ にする話が

あった。このとき、

$$p = \mathrm{rank}(X_0) = 1$$

$$q = \mathrm{rank}(X) = 3$$

$s = 3 - 1 = 2$ が仮説の自由度

【S_e および S_0 を求める。このとき、$S_0 > S_e$ である】

S_e：何も仮定ないときの残差平方和

S_0：帰無仮説時の残差平方和。

直感的には、

S_e より S_0 の方が自由に動かせるパラメータが少ないので、残差が大きくなる

2.6.1

(2.79) $S_e = u_1^2 + \cdots + u_{n-q}^2$

(2.80) $S_0 =$.

(3).(4) みたいに

$$I - \Pi_X = \sum^{n-q} l_{xi}' l_{xi}$$

$$I - \Pi_{X_0} = \sum^{n-p} l_{x_0 i}' l_{x_0 i}$$

とすると.

$$S_e = \sum^{n-q} (l_{xi}' y)^2 = u_1^2 + \cdots + u_{n-q}^2$$

$$S_0 = \sum^{n-p} (l_{x_0 i}' y)^2 = u_1^2 + \cdots + u_{n-q}^2 + \cdots + u_{n-p}^2$$

ここで $l_{xi} = l_{x_0 i}$ を使っている.

本当??

$L(X_0)$ は $L(X)$ に線形制約を加えたもの 図2.9

($X\theta$ のとるベクトル全体 $L(X)$ に対し. $K\theta = 0$ の制約)

つまり. $L(X_0) \subset L(X)$

それぞれの直交補空間をとると

$L(X_0)^\perp \supset L(X)^\perp$

$L(X)^\perp = \{ y \mid {}^\forall x \in L(X),\ x \cdot y = 0 \}$

$\forall y \in L(X)^\perp$ をとってくると.

$\forall x_0 \in L(X_0)$ に対し $x_0 \cdot y = 0$

よって $y \in L(X_0)^\perp$

$I-\Pi_x$, $I-\Pi_{x_0}$ はそれぞれ

$L(X)^{\perp}$, $L(X_0)^{\perp}$ への射影子である。

射影子の固有ベクトルは（おそらく）$L(X)^{\perp}$, $L(X_0)^{\perp}$ の

正規直交基底になっている。

$I-\Pi_x$ の固有値 1 に対応する固有ベクトル $\{l_{xi}\}_i$

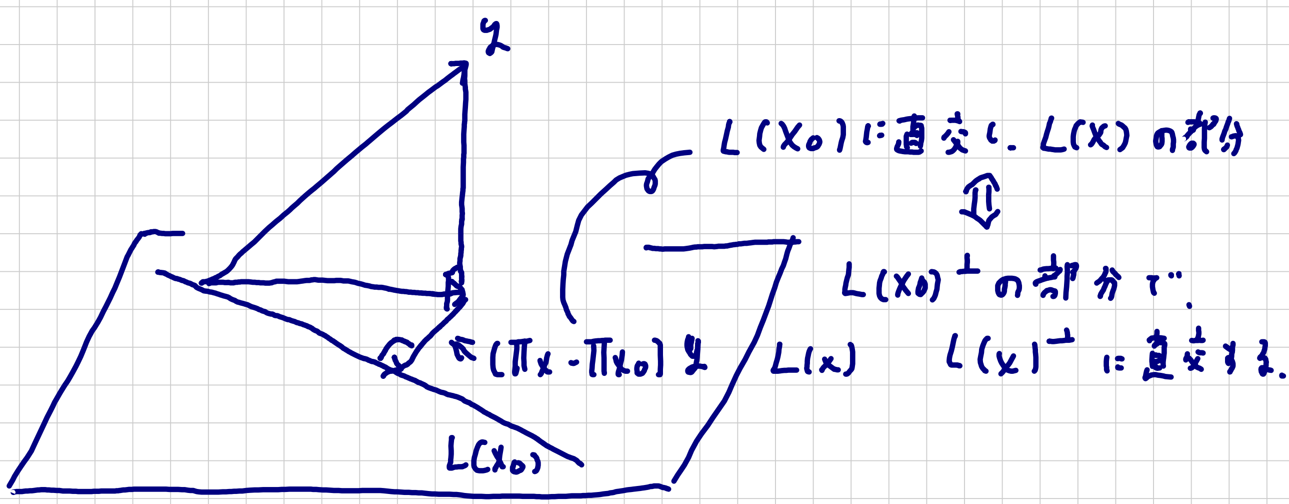
にいくつかのベクトルを加えることで、$L(X_0)^{\perp}$ の

基底を形成することができる。

よって、S_e と S_0 で、一部共通の $l_{xi}=l_{x_0 i}$ を

使っている。

【　図 2.9　】



【 H_0のもとで、F分布に従う統計量 … 】

$$F = \left(\frac{S_0 - S_e}{q - p}\right) \Big/ \left(\frac{S_e}{n - q}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{S_0 - S_e}{\sigma^2}}{S}\right) \Big/ \left(\frac{\frac{S_e}{\sigma^2}}{n - q}\right)$$

$$= \left[\frac{\chi^2(m)}{m} \Big/ \frac{\chi^2(n)}{n}\right] \text{の形}$$

【 (2.83) $t = \dfrac{S_{xy}/S_{x}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{xx}}}$ 】

2.64では、 $t = \dfrac{L' y}{\sqrt{L' L \hat{\sigma}^2}}$ となっているが、 L は…?

そもそも $L' y = l' \hat{\theta}$ としていて、今回 β_1 に

興味があるので、 $l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ よって

$$L' y = (0 \ \ 1) \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

また、 $L' y = l' (X' X)^{-1} X y$ ← P50

$$= (0 \ \ 1) \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & S_{xx}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} \\ & x_2 - \bar{x} \\ & \vdots \end{pmatrix}' y$$

$$= (0 \quad S_{xx}^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - \bar{x} & \cdots & x_n - \bar{x} \end{pmatrix} y$$

$$= \underbrace{\frac{1}{S_{xx}} (x_1 - \bar{x} \quad \cdots \quad x_n - \bar{x})}_{L'} y$$

よって $L'L = \left(\frac{1}{S_{xx}}\right)^2 \cdot S_{xx} = \frac{1}{S_{xx}}$

よって

$$t = \frac{S_{xy}/S_{xx}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{xx}}}$$

【一方 S_e は (2.56) で与えられるから】

$$S_0 = \sum y_i^2 - y_{\cdot}^2/n \qquad \text{(P53 例 2.10)}$$

$$S_e = \sum y_i^2 - y_{\cdot}^2/n - S_{xy}^2/S_{xx} \qquad (2.56)$$

よって $S_0 - S_e = \dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$

【$q = 2$, $p = 1$ だから】

元々. $E(y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} \\ 1 & x_2 - \bar{x} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - \bar{x} \end{pmatrix}}_{ランク2} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ 　今回 $E(y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{ランク1} (\beta_0)$

$n = ar$, $q = a$, $p = 1$ より.

n はデータ数なので $\underset{\text{水準数}}{a} \times \underset{\text{水準内サンプル数}}{r}$

q は $\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix} = \underset{\text{水準数}}{a}$

p は $H_0 : E(y) = j\mu$ (2.67) での

$\mathrm{rank}(j) = 1$