No.

Date

統計応用 2019年
問4
[1]

まず対角成分(つまり分散項)を計算する.

$V[X_t] = \tau^2$ とおく.

$$\tau^2 = V[X_t]$$
$$= V[\phi X_{t-1} + \epsilon_t] \quad (\because (1))$$
$$= \phi^2 V[X_{t-1}] + V[\epsilon_t] \quad (\because 独立性)$$
$$= \phi^2 \tau^2 + \sigma^2 \quad (\because 定常性)$$

$$\tau^2 = \phi^2\tau^2 + \sigma^2$$
$$(1-\phi^2)\tau^2 = \sigma^2$$
$$\tau^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

次に非対角成分(つまり共分散項)を計算する.

いきなり $Cov[X_i, X_j]$ を考えるのは難しいので

$Cov[X_t, X_{t+1}]$, $Cov[X_t, X_{t+2}]$ などで試行実験を行う.

$$Cov[X_t, X_{t+1}] = Cov[X_t, \phi X_t + \epsilon_t] \quad (\because (1))$$
$$= \phi\, Cov[X_t, X_t] \quad (\because 独立性)$$
$$= \phi\, V[X_t]$$
$$= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi \quad \cdots (☆)$$

No.

Date

$$\mathrm{Cov}[X_t, X_{t+2}] = \mathrm{Cov}[X_t, \phi X_{t+1} + \epsilon_{t+1}]$$

$$= \phi \, \mathrm{Cov}[X_t, X_{t+1}] \quad (\because 独立性)$$

$$= \phi \cdot \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi \quad (\because (☆))$$

$$= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^2$$

以下同様にして

$$\mathrm{Cov}[X_t, X_{t+k}] = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^k$$

$k = |i-j|$ とすると

$$\mathrm{Cov}[X_t, X_{t+|i-j|}] = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^{|i-j|}$$

$$\text{"} \quad ?$$

$$\mathrm{Cov}[X_i, X_j]$$

コレが定常性？

よって定常性より

$$\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^{|i-j|}$$

自己相関係数は自己共分散を自己分散で割ればいい。

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\phi^{|i-j|} \Big/ \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} = \phi^{|i-j|}$$

[2] ムリ

[3] 2次形式を書き下す.

パッと書ける方法教えてくれ…

$$Q_A = x'Ax$$

$$= x_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1}(1+\phi^2)x_i^2 + x_n^2 - 2\phi\sum_{i=2}^{n} x_i x_{i-1} \quad \cdots (※)$$

ここで小休止。次の変形がややトリッキーなので作戦を立てる.

No.

Date

2次形式の見た目から $\sum(\cdots)^2$ という項を作りたくなる。

$\sum_{i=2}^{n}$ でそろえるとする。

$$(*) = x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(1+\phi^2)x_i^2 - (1+\phi^2)x_n^2 + x_n^2 - 2\phi\sum_{i=2}^{n}x_i x_{i-1}$$

狙いとしては

$\sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2$ という項を作り出したい。

そのためには上式の青部分を調整してやる必要がある。

作り出したい部分を展開すると

$$\sum_{i=2}^{n}(x_i^2 - 2\phi x_i x_{i-1} + \phi^2 x_{i-1}^2)$$

赤部分から $\phi^2 x_1^2$ という項が出てくるが $(*)$ には含まれていない。したがってこの項を帳尻合わせで入れこむことにする。

$$(*) = x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(1+\phi^2)x_i^2 - \phi^2 x_1^2 + \phi^2 x_1^2 - \phi^2 x_n^2 - 2\phi\sum_{i=2}^{n}x_i x_{i-1}$$

$$= (1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}x_i^2 + \sum_{i=2}^{n}\phi^2 x_i^2 + \phi^2 x_1^2 - \phi^2 x_n^2 - 2\phi\sum_{i=2}^{n}x_i x_{i-1}$$

$$= (1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}x_i^2 + \sum_{i=2}^{n}\phi^2 x_{i-1}^2 - 2\phi\sum_{i=2}^{n}x_i x_{i-1}$$

$$= (1-\phi^2)x_1^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_i - \phi x_{i-1})^2$$

$|\phi| < 1$ ゆえ全ての項が正である。以上より $Q_A > 0$

[4], [5] は読み合わせ。