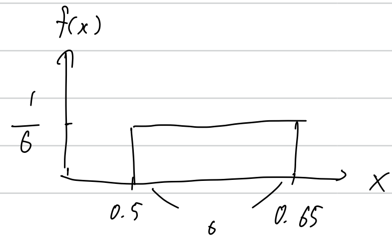
アクチュアリー 2020 数学 保数

問題1 - 保数

(2) $X \sim U(0.5, 0.65)$



$P(Y=y) = \frac{1}{6}$ $(y = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

である。

$E(Y) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$

$V(Y) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - (3.5)^2$

$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$

$= \frac{35}{12}$

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \int_{0.5}^{1.5} x \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} dx$

$+ \int_{1.5}^{2.5} x \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} dx$

$+ \cdots + \int_{5.5}^{6.5} x \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} dx - (3.5)^2$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0.5}^{1.5} + \frac{2}{6}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1.5}^{2.5}$$

$$+ \cdots + \frac{6}{6}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{5.5}^{6.5} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}\left\{(1.5^2 - 0.5^2) + 2(2.5^2 - 1.5^2) + \cdots\right\} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

↓和と差の積

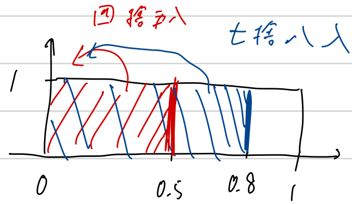
$$= \frac{1}{12}\left\{1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 6\cdot 1 + 4\cdot 8\cdot 1 + 5\cdot 10\cdot 1 + 6\cdot 12\cdot 1\right\} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{35}{12}$$

(4)

(ア) $X \sim U(0, 1)$



X_A : X を四捨五入した値
X_B : X を七捨八入した値　とする。

$$E(X_A - X_B) = (0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5) - (0 \cdot 0.8 + 1 \cdot 0.2)$$
$$= 0.3$$ (D)。

$X_A - X_B$ のとりうる値は、0 or 1 であり、

$$P(X_A - X_B = 0) = P(0 < X < 0.5) + P(0.8 < X < 1)$$
$$= 0.5 + 0.2$$
$$= 0.7$$

$$P(X_A - X_B = 1) = P(0.5 < X < 0.8)$$
$$= 0.3$$ (D)。

よって、　　0.09

$$V(X_A - X_B) = (0 - 0.3)^2 \cdot 0.7 + (1 - 0.3)^2 \cdot 0.3$$
$$= 0.21$$ (A)

3

(6)

母分散未知の95%検定時の信頼区間は、

$$\mu \pm t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$$ である。

幅は、 $$L = 2t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$$

幅が 1.5σ 以下の確率が95%以上なので、

$$P(L < 1.5\sigma) \geq 0.95$$

$$P\left(2t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}} < 1.5\sigma\right) \geq 0.95$$

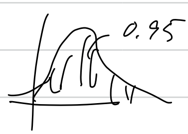
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X})^2$ より、

χ^2 分布の形を作りたい。

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{n} < \left(\frac{3\sigma}{4t_{0.025}(n-1)}\right)^2\right) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_i (X_i - \bar{X})^2 < \left(\frac{3\sigma}{4t_{0.025}(n-1)}\right)^2\right) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\underbrace{\sum_i^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2}_{\sim \chi^2(n-1)} < n(n-1)\left(\frac{3}{4t_{0.025}(n-1)}\right)^2\right) \geq 0.95$$



よって、 $$\chi^2_{0.05}(n-1) < n(n-1)\left(\frac{3}{4t_{0.025}(n-1)}\right)^2$$

を満たす最小の n を求めれば良い。(大変)

(8)

実際の平均 μ が、帰無仮説の平均 μ_0 より、10% 増加したとき、
つまり、$\mu = 1.1\mu_0$ のとき、検出確率 99% 以上としたい。

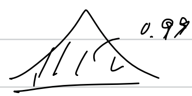
$$P(\underbrace{\bar{X} > c}_{\text{棄却域}} \mid \mu = 1.1\mu_0) > 0.99 \quad \text{—} (※)$$

ここで、有意水準 5% の片側検定であることより、

$$P(\bar{X} > c \mid H_0) = 0.05$$

$$\therefore \quad c = \mu_0 + z_{0.05}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

であることに注意する。



$$(※) \iff P\left(\frac{\bar{X} - 1.1\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{c - 1.1\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) > 0.99$$

$$\therefore \quad \frac{c - 1.1\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} < -z_{0.01}$$

$$\iff c < 1.1\mu_0 - z_{0.01}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\iff \mu_0 + z_{0.05}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} < 1.1\mu_0 - z_{0.01}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\iff 0.1\mu_0\sqrt{n} > \sigma(z_{0.05} + z_{0.01})$$

$$\iff n > \{10 \cdot 0.143(1.64 + 2.33)\}^2$$

$$\iff n > 32.228$$

$$\underline{n \geq 33 \quad (D).}$$

(10)

AR(2) モデル : $Y(t) = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ を、
MR(∞) モデル : $Y(t) = \xi_0 + \varepsilon_t + \xi_1 \varepsilon_{t-1} + \xi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$
として表現するとき、$\{\xi_i\}$ を求める。

方針 : 操作変数法 を用いる。
構造方程式の両辺に変数をかけ、期待値をとることでパラメータ推定する。

ARモデルに期待値をとると、

$$E(Y(t)) = \phi_0 + \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 E(Y_{t-2}) + 0$$

$$= \phi_0 + \phi_1 E(Y_t) + \phi_2 E(Y_t) + 0$$

$$\therefore E(Y(t)) = \frac{\phi_0}{1-(\phi_1+\phi_2)}$$

MRモデルに期待値をとると、

$$E(Y(t)) = \xi_0$$

したがって、

$$\xi_0 = \frac{\phi_0}{1-(\phi_1+\phi_2)} = \frac{1.5}{1-0.9+0.14} = \frac{1.5}{0.24}$$

$$= 6.25 \quad \text{(B)}$$

ARモデルの

ξ_i を求めるために、両辺 ε_{t-i} をかけて期待値をとる。

$$E(\varepsilon_{t-i}Y_t) = 0 + \phi_1 E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-1}) + \phi_2 E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-2}) + 0$$

$$= 0.9E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-1}) - 0.14E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-2})$$

特性方程式

$x^2 = 0.9x - 0.14$ を解いて、

$x = 0.7,\ 0.2$

(A) $E(\varepsilon_{t-i}Y_t) - 0.7E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-1}) = 0.2\{E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-1}) - 0.7E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-2})\}$

$$= 0.2^i\{E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-i}) - 0.7E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-i-1})\}$$

$$= 0.2^i\{E(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i}) - 0\}$$

$$= 0.2^i V(\varepsilon_t)$$

(B) $E(\varepsilon_{t-i}Y_t) - 0.2E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-1}) = \cdots = 0.7^i V(\varepsilon_t)$

(B) − (A) より、

$$0.5E(\varepsilon_{t-i}Y_{t-1}) = (0.7^i - 0.2^i)V(\varepsilon_t)$$

$$E(\varepsilon_{t-(i-1)}Y_t) = 2V(\varepsilon_t)(0.7^i - 0.2^i)$$

$$E(\varepsilon_{t-i}Y_t) = 2V(\varepsilon_t)(0.7^{i+1} - 0.2^{i+1}) \quad ―①$$

($i = i+1$ を代入)

次にMRモデルの両辺に ε_{t-i} をかけて期待値をとると、

$$E(\varepsilon_{t-i} Y_t) = \xi_i E(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i})$$

$$= \xi_i V(\varepsilon_{t-i}) \quad -②$$

①、②より、

$$\xi_i = 2(0.7^{i+1} - 0.2^{i+1})$$

$$= \underset{\text{(E)}}{\frac{1}{0.5}} \left(\underset{\text{(G)}}{0.7}^{i+1} - \underset{\text{(B)}}{0.2}^{i+1} \right)$$

(12)

モンテカルロ積分では、積分 $\int_A f(x)\,dx$ の値を、
$X \sim U(A)$ の平均 $\bar{X}$ と f で近似できる。

参考: https://aidiary.hatenablog.com/entry/20140728/1406555863

簡単な積分計算例

関数 f(x) の区間 [a, b] の以下の定積分をモンテカルロ法で求めてみよう。

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

この式は先の期待値を求める式と違って確率分布 p(x) が入っていない。入っていないなら入れてしまおう！区間 [a, b] の一様分布を p(x) とすると I は下のように変形できる。

$$I = (b-a)\int_a^b p(x)dx \int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_a^b p(x)f(x)dx \simeq (b-a)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

上の式変形は間違い！正しい式変形は↓（コメント参照）

$$I = (b-a)\int_a^b f(x)\frac{1}{b-a}dx = (b-a)\int_a^b f(x)p(x)dx \simeq (b-a)\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

ここで、一様分布の [a, b] での~~定積分~~確率密度が 1/(b-a) であることを利用している。モンテカルロ積分のサンプル生成は与えられた区間の一様分布から生成することになる。手元の公式集の定積分の例をいくつか確かめてみよう。scipy.integrateで計算した場合と答えが一致することも確認しておいた。

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = \int_0^1 (x+1)e^x \cdot 1 \, dx$$
$$= \int_0^1 (x+1)e^x \cdot P(U=x)\, dx$$
$$= E_U[(U+1)e^U]$$
$$\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{(U_i+1)e^{U_i}\}$$

期待値を平均で近似

これの分散は、

$$V\left[\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32}\{(U_i+1)e^{U_i}\}\right]$$
$$= \frac{1}{32}V[(U+1)e^U]$$
$$= \frac{1}{32}\left[E\{(U+1)^2 e^{2U}\} - E^2\{(U+1)e^U\}\right]$$

ここで、

$$E\{(U+1)e^U\} = \int_0^1 (u+1)e^u du$$
$$= \left[(u+1)e^u\right]_0^1 - \int_0^1 e^u du$$
$$= 2e - 1 - (e-1)$$
$$= e$$

$$E\left\{(U+1)^2 e^{2U}\right\} = \int_0^1 (u+1)^2 e^{2u}\,du$$

$$= \left[\frac{1}{2}(u+1)^2 e^{2u}\right]_0^1 - \int_0^1 (u+1)e^{2u}\,du$$

$$= 2e^2 - \frac{1}{2} - \left\{\left[\frac{1}{2}(u+1)e^{2u}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2u}\,du\right\}$$

$$= 2e^2 - \frac{1}{2} - \left\{e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2u}\right]_0^1\right\}$$

$$= 2e^2 - \frac{1}{2} - e^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

よって.

$$V\left[\frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32}(U_i+1)e^{U_i}\right] = \frac{1}{32}\left\{\frac{5}{4}e^2 - \frac{1}{4} - e^2\right\}$$

$$= \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}(e^2-1)$$

$$= \frac{1}{128}(e^2-1)$$

$$\fallingdotseq 0.050$$

負の相関法はよくわからず…

問題2

(1) $P(X_A=1) = \left(\frac{1}{M}\right)^N = \frac{1}{M^N}$ （N回連続で正解）

①

$$P(X_A=2) = \left(1-\frac{1}{M^N}\right)\frac{1}{M^N}$$

② ③

1回目で正解しない　2回目で正解する

$$P(X_A=k) = \left(1-\frac{1}{M^N}\right)^{k-1}\frac{1}{M^N}$$

④ ⑤ ⑥

$$E[X_A] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(X_A=k)$$

$$= \frac{1}{M^N}\sum_{k=1}^{\infty} k\underbrace{\left(1-\frac{1}{M^N}\right)}_{a\text{とおく}}^{k-1}$$

$$= \frac{1}{M^N}\sum_{k=1}^{\infty} k\,a^{k-1}$$

$$= \frac{1}{M^N}\frac{1}{(1-a)^2}$$

☆ポイント
（ $f(a)=(1-a)^{-2}$ を
$a=0$ 周りで展開 ）

$$= \frac{1}{M^N}\frac{1}{\left(\frac{1}{M^N}\right)^2}$$

$$= M^N$$

$E[X_A{}^2]$ についてもテイラー展開を使い求める.
（解答参照）

(2)

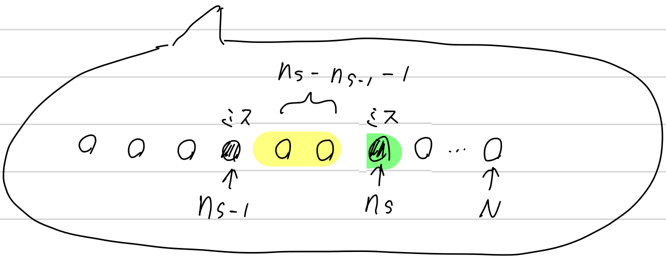
Bさんが新しい問題に直面するたび毎回間違えるとき、
k の最大値を達成するので、 $1 \leq k \leq N+1$ 」⑨

$$P(Z_1 = n_1) = \left(\frac{1}{M}\right)^{n_1 - 1}\left(1 - \frac{1}{M}\right)$$ 」⑩⑪⑫

1回目の挑戦で、 n_1 問目に不正解

$$P(Z_s = n_s \mid Z_{s-1} = n_{s-1}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= P(Z_s = n_s \mid Z_{s-1} = n_{s-1})$$ ∵マルコフ性



$$= \left(\frac{1}{M}\right)^{n_s - n_{s-1} - 1} \cdot \left(\frac{M-1}{M}\right)$$ 」⑬⑭⑮

$$P(Z_{k-1} = n_{k-1}, Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

$$= P(Z_1 = n_1)\,P(Z_2 = n_2 \mid Z_1 = n_1) \cdot \cdots$$

$$\cdot\, P(Z_{k-1} = n_{k-1} \mid Z_{k-2} = n_{k-2}, \cdots, Z_1 = n_1)$$

(∵ガウスの公式)

$$= P(Z_1 = n_1) \cdot \prod_{s=2}^{k-1} \left(\frac{1}{M}\right)^{n_s - n_{s-1}} \frac{M-1}{M^2}$$

$$\underbrace{n_{k-1} - n_{k-2} + n_{k-2} \cdots - n_1}_{\text{消える}}$$

$$= \frac{1}{M^{n_1-1}} \cdot \left(\frac{M-1}{M}\right) \left(\frac{1}{M}\right)^{n_{k-1}-n_1} \frac{M-1}{M^2}$$

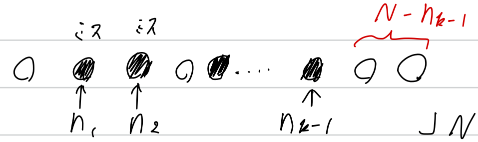
$$= \cdots$$

$$= \frac{(M-1)^{k-1}}{M^{n_{k-1}}}$$

┘ ⑯ ⑰

$$P(X_B = k) = \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_{k-1} \le N} P(Z_{k-1} = n_{k-1}, \cdots, Z_1 = n_1) \cdot \left(\frac{1}{M}\right)^{N - n_{k-1}}$$

N問目までで $k-1$ 回ミスしてる.



$$= \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_{k-1} \le N} \frac{(M-1)^{k-1}}{M^{n_{k-1}}} \cdot \frac{1}{M^{N-n_{k-1}}}$$

$$= \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_{k-1} \le N} \frac{(M-1)^{k-1}}{M^N}$$

Nコから $k-1$ 個の選び方

$$= \binom{N}{k-1} \frac{(M-1)^{k-1}}{M^N}$$

┘ ⑱ ⑲ ⑳

$$E(X_B) = \sum_{k=1}^{N+1} k\, P(X_B = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N+1} k \binom{N}{k-1} \frac{(M-1)^{k-1}}{M^N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} (k+1) \binom{N}{k} \frac{(M-1)^{k}}{M^N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} \frac{(M-1)^{k}}{M^N} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(M-1)^{k}}{M^N}$$

★ポイント. $k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$ を使うために分ける.

$$= \frac{N}{M^N} \sum_{k=1}^{N} \binom{N-1}{k-1} (M-1)^{k-1} \cdot 1^{N-k} \cdot (M-1)$$

$$+ \frac{1}{M^N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (M-1)^{k} \cdot 1^{N-k}$$

$$= \frac{N}{M^N} (M-1) \{ (M-1) + 1 \}^{N-1}$$

$$+ \frac{1}{M^N} \{ (M-1) + 1 \}^{N}$$

$$= \frac{M^{N-1}}{M^N} \{ N(M-1) + M \}$$

$$= N + 1 - \frac{N}{M} \quad 」 \qquad (21)$$

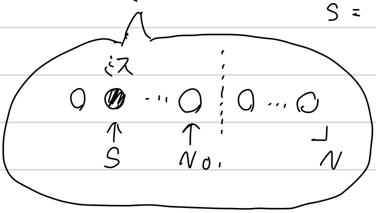
(3)

$P(X_c = 2)$ = P(<1回目で N_0 問以下まで解答> かつ <2回目で完答>)

+ P(<1回目で (N_0+1) 問以上解答> かつ <2回目で完答>)

= (A) + (B)

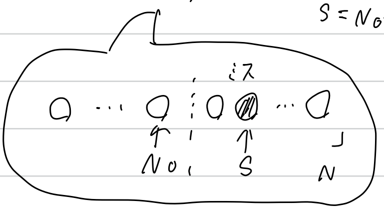
$$(A) = \sum_{s=1}^{N_0} \left(\frac{1}{m}\right)^{s-1} \left(1-\frac{1}{m}\right) \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{N-s}$$



$$= \sum_{s=1}^{N_0} \frac{1}{m^{N-1}} \cdot \frac{m-1}{m}$$

$$= N_0 \frac{m-1}{m^N}$$

$$(B) = \sum_{s=N_0+1}^{N} \left(\frac{1}{m}\right)^{s-1} \left(1-\frac{1}{m}\right) \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{N-N_0}$$



$$= \frac{m-1}{m^{N-N_0+1}} \sum_{s=N_0+1}^{N} \left(\frac{1}{m}\right)^{s-1}$$

$$= \frac{m-1}{m^{N-N_0+1}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{m}\right)^{N-N_0}}{1-\frac{1}{m}} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{N_0}$$

$$= \frac{m-1}{m^{N+1}} \cdot m \cdot \frac{1}{m-1} \left(1-\frac{1}{m^{N-N_0}}\right)$$

$$= \frac{1}{m^N} \left(1-\frac{1}{m^{N-N_0}}\right)$$

よって,

$$P(X_c=2) = A + B$$

$$= N_0 \frac{M-1}{M^N} + \frac{1}{M^N}\left(1 - \frac{1}{M^{N-N_0}}\right)$$

$$= \frac{1}{M^N}\left\{N_0(M-1) + 1 - \frac{1}{M^{N-N_0}}\right\}$$ 」22 23 24

残りは解答参照.
場合分けゲーな感じがするのでパスでもOK.