25章

例2　次のパス図を考える。

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3$$

これに相当する構造方程式は (25.2) である。

$$
\begin{aligned}
X_2 &= aX_1 + u \quad \text{— ①} \\
X_3 &= bX_2 + v \quad \text{— ②}
\end{aligned}
\qquad (25.2)
$$

パス係数 a, b を求める。まず a を求める。
① に X_1 をかけて、期待値をとると、

$$E(X_1X_2) = aE(X_1^2) + E(uX_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = a\,V(X_1) + E(u)\cdot E(X_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_{12} = a\cdot 1 + E(u)\cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \rho_{12}$$

次に b を求める。② に X_1 をかけて期待値をとると、

$$E(X_1X_3) = bE(X_2X_1) + vE(X_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho_{13} = b\,\rho_{12} + 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \rho_{13}/\rho_{12}$$

このように変数をかけて期待値を取る方法を操作変数法という。

問 25.2

(1) 操作変数法の問題。構造方程式は次の通り。

$$Y = aX + bW + u \quad ①$$
$$Z = cX + dY + v \quad ②$$

$X \cdot ①$ より、

$$E(XY) = aE(X^2) + bE(XW) + E(u)E(X)$$
$$\Leftrightarrow \quad \rho_{xy} = a \cdot 1 + b \cdot \rho_{xw} + E(u) \cdot 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \rho_{xy} = a + b \cdot 0 \quad (\because X \text{ と } W \text{ が独立})$$
$$\Leftrightarrow \quad a = \rho_{xy}$$

同様に、$W \cdot ①$ より、

$$b = \rho_{yw}$$

c, d については、$X \cdot ②$ と $Y \cdot ②$ の連立方程式を解く。

$$\begin{cases} \rho_{xz} = c + d\rho_{xy} & \text{— ③} \\ \rho_{yz} = c\rho_{xy} + d & \text{— ④} \end{cases}$$

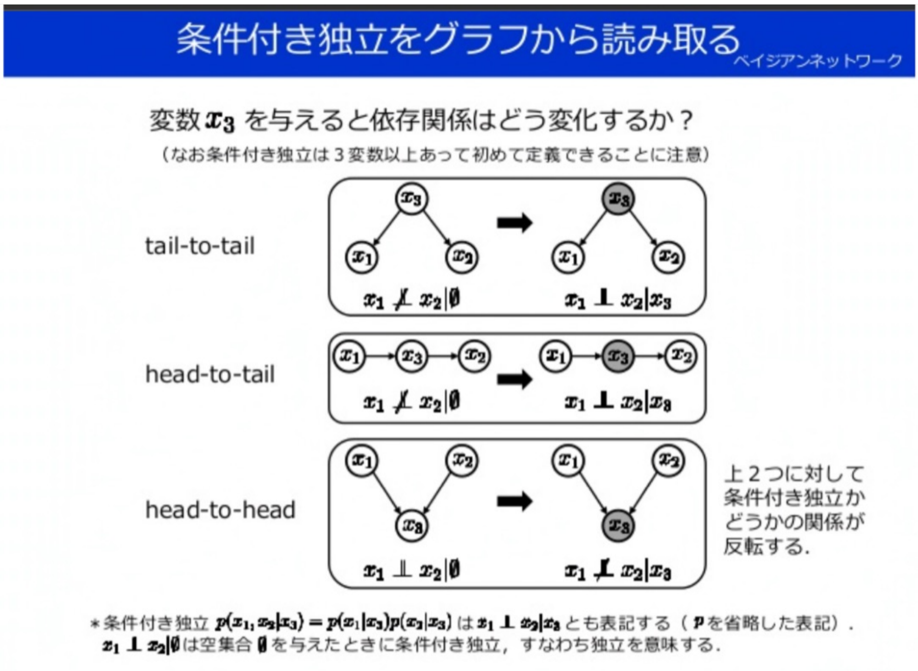
これを解くと、

$$\begin{cases} c = \dfrac{\rho_{xz} - \rho_{xy}\rho_{yz}}{1 - \rho_{xy}^2} \\ d = \dfrac{\rho_{yz} - \rho_{xy}\rho_{xz}}{1 - \rho_{xy}^2} \end{cases}$$

(2) ③ より、

$$\rho_{xz} = c + d\rho_{xy}$$
$$= \underbrace{c}_{\substack{\text{直接効果} \\ X \to Z}} + \underbrace{da}_{\substack{\text{間接効果} \\ X \to Y \to Z}}$$

ここで、XとWが独立であることを使ったが、実はグラフィカルモデルから独立を判断することができる。何も条件づけられていない場合、下図の左段のような関係が成り立つ。



参照： https://www.slideshare.net/Kawamoto_Kazuhiko/ss-35483453

(3)　P229 の定義に従ってモラルグラフを構築する。
モラルグラフを構築すると、条件付き独立の関係がわかるというメリットがある。