20章

問20.2

（1）水準はAのみなので、Aの主効果のみを導入したモデルを考えれば良い。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

帰無仮説は、Aの全水準で効果が等しい、つまり $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ である。

対立仮説は、上記等号のうちいずれかの等号が成り立たないことである。

（2）分散分析表を作成し、それを元にF検定を実施する。

誤差平方和 S_E は、

$$S_E = 5.2 + 6.8 + 5.0 + 2.0$$
$$= 19.0$$

である。 $S_T = 40.47$ より、

$$S_A = S_T - S_E = 21.47$$

	S	自由度	平均平方	F
A	21.47	3	$V_A = 7.156$	$4.898 > F_{0.05}(3, 13) \fallingdotseq 3.5$
誤差	19.0	13	$V_E = 1.461$	
計	40.47	16		

よって有意である

（3）各水準で分散が一定であるという仮定の元で問題を解く。期待値の推定量は表から17.5と求まるが、分散の推定量は他の水準も加味して算出する。

$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ とすると、

$E(V_E) = \sigma^4$ であることを利用する。

$$\overline{y_{3\cdot}} = \frac{1}{4}(y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34})$$ より、

$$V(\overline{y_{3\cdot}}) = \frac{1}{4^2}(V(y_{31}) + V(y_{32}) + V(y_{33}) + V(y_{34}))$$
$$= \frac{1}{4^2} 4\sigma^4$$
$$= \frac{\sigma^2}{4}$$

従って、$\frac{V_E}{4}$ は $V(\overline{y_{3\cdot}})$ の不偏推定量となり、

$$\frac{\overline{y_{3\cdot}} - 17.5}{\sqrt{\frac{V_E}{4}}} \sim t(\nu_E)$$ を使い、

注意

$$17.5 \pm t_{0.025}(13)\sqrt{\frac{1.462}{4}}$$

に挟まれた区間が信頼区間となる。

問20.4

（1）平方和を与えてくれているので、これを使って分散分析表を作る。

	S	ν	V	F	α
A	3.0	1	3.0	4.48	$< F_{0.05}(1,6) \fallingdotseq 6.5$
B	18.0	2	9.0	13.4	$> F_{0.05}(2,6) \fallingdotseq 5.6$
$A \times B$	32.0	2 $(=1\times 2)$	16.0	23.9	$> F_{0.05}(2,6) \fallingdotseq 5.6$
誤差	4.0	6	0.67		
計	57.0	11			

Bの主効果と、AとBの交互作用が有意に効果がある。

（2）交互作用が有意に効果ありなので、AとBの組み合わせのうち、最も効果が高いA2とB3の組み合わせを選択するのが良い。

問20.6

実験時に交絡する因子が存在すると、どちらの影響によるものか判断できなくなる。検出したい効果について交絡が起こらないように計画するために直交表が使われる。直交表についてなぜ上手くいくのかはさておき、方法論として理解しておきたい。

L_8 直交表を使う場合、3因子までは迷わず構成できるが、4因子目以降はなんらかの因子と交絡を起こしてしまうので、実験の目的に応じて決定する必要がある。

(1) L_8 直交表の最大サイズの直交表を記述したのちに、設問で問われた因子の列を抜き出すと良い。

	A	B		C			D
No	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a		a		a		a
		b	b			b	b
				c	c	c	c

a ベクトルと
b ベクトルの
XOR をとる。

A ⊕ B ⊕ C の形になっている。

DとA、B、Cがそれぞれ直交することは、各組み合わせが同数表れていることを確認すれば良い。例えばDとAの場合、 (1,1), (1,2),(2,1),(2,2) がそれぞれ2回ずつ出現している。

（2）因子が交絡しているか否かは、直交表の下に記した成分が一致しているか否かで判断する。例えば、A D の交互作用については、成分 (a) ベクトルと成分 (a,b,c) ベクトルの XOR である (b,c) 成分が該当する。これは B D の交互作用の成分と一致するので、これらは交絡する。交絡する因子は次の3つである。

■ A Bの交互作用と、C Dの交互作用

A XOR B と C XOR D の両者とも、成分が (a, b) の形になっているため、これらは交絡していると判断できる。

■ A　Cの交互作用と、B　Dの交互作用

成分が (a, c) となり交絡している。

■ B　Cの交互作用と、A　Dの交互作用

成分が (b, c) となり交絡している。

主効果については、3因子交互作用を考えない限りはどことも交絡しない。

（3）今度は D=A x B = (第[3]列)として直交表を構築する。

	A	B	D	C			
No	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
成分	a		a		a		a
		b	b			b	b
				c	c	c	c

2因子交互作用までで交絡するのは次の因子である。

■ AとB D

■ BとA D

■ DとA B

（5）（4）の結果に基づくと、Cの主効果と2因子交互作用は、どの因子とも交絡しない。よって、Cの効果について特に興味がある場合は、（3）の計画を実施すべきである。一方で、いずれの因子にも満遍なく興味がある場合は（1）の計画を実施するのが良い。