3.4.1

【 μ_{ij}, $\mu_{i.}$, $\mu_{.j}$, μ, α, β .... など 】

	B_1	B_2	B_3	B_4		主効果
A_1	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}	$\mu_{1.}$	$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu$
A_2	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	μ_{24}	$\mu_{2.}$	$\alpha_2 = \mu_{2.} - \mu$
A_3	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	μ_{34}	$\mu_{3.}$	⋮
...						
	$\mu_{.1}$	$\mu_{.2}$	$\mu_{.3}$	$\mu_{.4}$	$\underbrace{\mu}_{\text{一般平均}}$	

主効果 $\beta_1 = \mu_{.1} - \mu$ ..

交互作用 $(\alpha\beta)_{ij} = \underbrace{\mu_{ij}}_{\text{水準の値}} - (\underbrace{\mu + \alpha_i + \beta_j}_{\text{一般平均 + 各水準の主効果}})$

【 $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad j = 1, \dots, b$ 】

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_i (\mu_{ij} - \overline{\mu_{i.}} - \overline{\mu_{.j}} + \mu)$$

$$= a \cdot \overline{\mu_{.j}} - a\mu - a\overline{\mu_{.j}} + a\mu$$

$$= 0$$

【 $S_T = \sum\sum\sum \cdots$ 】

$$S_t = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$$
$$= \sum \sum \sum_k \{ (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) - (\bar{y}_{...} - \bar{y}_{ij.}) \}^2$$
$$= \sum \sum \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$
$$- 2 \sum \sum \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \underbrace{(\bar{y}_{...} - \bar{y}_{ij.})}_{} \to 0$$
$$+ \sum \sum \sum_k (\bar{y}_{...} - \bar{y}_{ij.})^2$$

$\sum_k$ の外に出る.

$$= \underbrace{r \sum_i \sum_j (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{...})^2}_{S_{AB}} + \underbrace{\sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2}_{S_e}$$

S_{AB} : A, B の水準間平方和　　S_e : 誤差平方和

$$S_{AB} = r \sum \sum (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{..})^2$$
$$= r \sum \sum \{ (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})$$
$$+ (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})$$
$$+ (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) \}^2$$

A　B　C

$$= \underbrace{r \sum \sum A^2}_{S_{A \times B}} + \underbrace{br \sum_i B^2}_{S_B} + \underbrace{ar \sum_j C^2}_{S_A}$$

(ABの項) $r \sum \sum AB = r \sum_i B \sum_j A$

$$= r \sum_i B \{ b\bar{y}_{i..} - b\bar{y}_{i..} - b\bar{y}_{...} + b\bar{y}_{...})$$
$$= 0$$

→ AC. BC も同様.

【 $S_A = \sum y_{i..}^2 / br - CT$, … 】

$$
\begin{aligned}
S_A &= br \sum_i \left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} \right)^2 \\
&= br \left(\sum \bar{y}_{i..}^2 - 2\, \bar{y}_{...} \sum_i \bar{y}_{i..} + \sum_i \bar{y}_{...}^2 \right) \\
&= br \left\{ \sum \bar{y}_{i..}^2 - a\, \bar{y}_{...}^2 \right\} \\
&= br \left\{ \sum \left(\frac{y_{i..}}{br} \right)^2 - a \left(\frac{y_{...}}{abr} \right)^2 \right\} \\
&= \sum y_{i..}^2 / br - \underbrace{y_{...}^2 / abr}_{CT}
\end{aligned}
$$

$ab - a - b + 1$

3.4.3 $\quad ab - (a-1) - (b-1) - 1$

【 $\nu_{A\times B} = (a-1)(b-1)$ 】

$\nu_{A\times B}$ を考えるには、$S_{A\times B}$ の独立な成分の個数を数えれば良い。(p91)

$$S_{AB} = r \sum_i \sum_j (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2$$

は ab この成分からなる。このうち独立なものの個数を知りたい。

$i \backslash j$	1	2	3	4	
1	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{12\cdot}$	$\bar{y}_{13\cdot}$	$\bar{y}_{14}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
2	$\bar{y}_{21\cdot}$	$\bar{y}_{22\cdot}$	$\bar{y}_{23\cdot}$	$\bar{y}_{24\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
3	$\bar{y}_{31\cdot}$	$\bar{y}_{32\cdot}$	$\bar{y}_{33\cdot}$	$\bar{y}_{34\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot\cdot}$
	$\bar{y}_{\cdot1\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot2\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot3\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot4\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$

$i:2 \quad j:3$ のとき、 $\bar{y}_{2\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot3\cdot} - \bar{y}_{2\cdot\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$

$i:1,\dots,a$ において、

$$\sum_j (\underbrace{\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot}}_{\Sigma\text{で}0} \underbrace{- \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}}_{\Sigma\text{で}0}) = 0$$

よって、$(i,j) : (1,b), (2,b), \dots, (a,b)$ の成分は別の成分で表わされる。

$i \backslash j$	1	2	3	4	
1	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{12\cdot}$	$\bar{y}_{13\cdot}$	$\bar{y}_{14\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
2	$\bar{y}_{21\cdot}$	$\bar{y}_{22\cdot}$	$\bar{y}_{23\cdot}$	$\bar{y}_{24\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
3	$\bar{y}_{31\cdot}$	$\bar{y}_{32\cdot}$	$\bar{y}_{33\cdot}$	$\bar{y}_{14\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot\cdot}$
	$\bar{y}_{\cdot 1\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 2\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 3\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 4\cdot}$	$\bar{y}_{\cdots}$

別の成分で表せる

次に $j=1,2,\dots,b-1$ において、

$$\sum_i \left(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots} \right) = 0$$

よって $(i,j)=(a,1),(a,2),\dots,(a,b-1)$ の項は別の成分で表すことができる。

$i \backslash j$	1	2	3	4	
1	$\bar{y}_{11\cdot}$	$\bar{y}_{12\cdot}$	$\bar{y}_{13\cdot}$	$\bar{y}_{14\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
2	$\bar{y}_{21\cdot}$	$\bar{y}_{22\cdot}$	$\bar{y}_{23\cdot}$	$\bar{y}_{24\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
3	$\bar{y}_{31\cdot}$	$\bar{y}_{32\cdot}$	$\bar{y}_{33\cdot}$	$\bar{y}_{14\cdot}$	$\bar{y}_{3\cdot\cdot}$
	$\bar{y}_{\cdot 1\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 2\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 3\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 4\cdot}$	$\bar{y}_{\cdots}$

別の成分で表せる。

よって独立な成分は $(a-1)(b-1)$ //

【 $\nu_e = ab(r-1)$ 】

$$S_e = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2$$

ここで、全ての i, j の組み合わせにおいて、

$$\sum_k (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot}) = 0$$

より $\sum_k$ の総和の成分を1つ消せる。

独立な成分の個数は $a \cdot b \cdot (r-1)$

【 容易に示されるように…

本当に容易か…？ 】

P.109の式を使う。

$$\bar{y}_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}$$

ここで $\bar{\varepsilon}_{ij\cdot} = \frac{1}{r}\sum_k^r \varepsilon_{ijk}$ 　$\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{br}\sum_j^b \sum_k^r \varepsilon_{ijk}$ に注意

$$E(S_A) = E\left\{ br \sum_i (\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2 \right\}$$

$$= br \sum_i E(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot})^2 \quad \text{(線形)}$$

$$= br \sum_i E(\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \mu - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot})^2 \quad \text{(P109)}$$

$$= br \sum_i E(\alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot})^2$$

$$= br\sum_i E\left(\alpha_i + \frac{1}{br}\sum_j^b\sum_k^r \varepsilon_{ijk} - \frac{1}{abr}\sum\sum\sum \varepsilon_{ijk}\right)^2$$

$$= br\sum_i E\left\{\alpha_i + \left(\frac{1}{br}\right)^2 \sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}^2 + \left(\frac{1}{abr}\right)^2 \sum\sum\sum \varepsilon^2 - 2\left(\frac{1}{br}\right)\left(\frac{1}{abr}\right)\sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk}^2\right\}$$

（$\because$ $E(\varepsilon_{ijk})=0$ で消える項を消去）

$$= br\left\{\alpha_i^2 + \left(\frac{1}{br}\right)^2 \underbrace{\sum^a\sum^b\sum^r E(\varepsilon_{ijk}^2)}_{abr\sigma^2} + \left(\frac{1}{abr}\right)^2 \cdot a\sum\sum\sum E(\varepsilon_{ijk}^2) - 2\left(\frac{1}{abr}\right)^2 \cdot a\sum\sum\sum E(\varepsilon_{ijk}^2)\right\}$$

$$= br\alpha_i^2 + br\left\{\left(\frac{1}{br}\right)^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{br}\right)^2\right\} abr\sigma^2$$

$$= br\alpha_i^2 + \left(\frac{1}{b^2r^2} - \frac{1}{ab^2r^2}\right) ab^2r^2\sigma^2$$

$$= br\alpha_i^2 + (a-1)\sigma^2 \quad //$$

$E(S_B)$ $E(S_{A\times B})$ $E(S_e)$ もまったく同じようにできるはず…！（やりたくない）

【 $\hat{\mu}_{ij.} = \bar{y}_{i..} + \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$ の分散が $\sigma^2(a+b-1)/abr$ 】

$$V(\hat{\mu}_{ij.}) = V(\mu + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_{i..} + \mu + \beta_j + \bar{\varepsilon}_{.j.} - \mu - \bar{\varepsilon}_{...})$$

$$= V(\bar{\varepsilon}_{i..} + \bar{\varepsilon}_{.j.} - \bar{\varepsilon}_{...})$$

$$= V\left(\frac{1}{br}\sum_j\sum_k \varepsilon_{ijk} + \frac{1}{ar}\sum_i\sum_k \varepsilon_{ijk} - \frac{1}{abr}\sum\sum\sum \varepsilon_{ijk}\right)$$

k, j →, i ↓

	1 …	j	… b
1 ⋮	$-\frac{1}{abr}$	$\frac{1}{ar} - \frac{1}{abr}$	$-\frac{1}{abr}$
i	$\frac{1}{br} - \frac{1}{abr}$	$\frac{1}{ar} + \frac{1}{br} - \frac{1}{abr}$	
⋮ a	$-\frac{1}{abr}$		$-\frac{1}{abr}$

太字部の和を求めずに.

$$(\text{各係数の二乗和}) = r(a-1)(b-1)\left(-\frac{1}{abr}\right)^2$$

$$+ r(a-1)\left(\frac{1}{ar} - \frac{1}{abr}\right)^2 \to (a-1)\left(\frac{b-1}{abr}\right)^2$$

$$+ r(b-1)\left(\frac{1}{br} - \frac{1}{abr}\right)^2 \to (b-1)\left(\frac{a-1}{abr}\right)^2$$

$$+ r\left(\frac{1}{ar} + \frac{1}{br} - \frac{1}{abr}\right)^2 \to \left(\frac{a+b-1}{abr}\right)^2$$

$$= r\{(a-1)(b-1)(1 + b - 1 + a - 1) + (a+b-1)^2\} / (abr)^2$$

$$= r(a+b-1)\{ab - a - b + 1 + a + b - 1\} / (abr)^2$$

$$= (a+b-1)/abr$$