2016年 一級 夼数.

問1

実験計画問題と最良推定量問題を組み合わせた問い。

(1) 解答参照

(2)

$T_4 = a_1 Y_{13} + a_2 Y_{33} + a_3 Y_{43} + a_4 Y_{24} + a_5 Y_{34} + a_6 Y_{44}$ とおき.

$E[T_4] = \tau_1 - \tau_2$ の元で. $V[T_4]$ を最小化する。

$$
\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 &= E[T_4] \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)\mu \\
&\quad + a_1 \tau_1 + a_4 \tau_2 + (a_2 + a_5)\tau_3 + (a_3 + a_6)\tau_4 \\
&\quad + (a_1 + a_2 + a_3)\beta_3 + (a_4 + a_5 + a_6)\beta_4
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 \\
a_1 = 1 \\
a_4 = -1 \\
a_2 + a_5 = 0 \\
a_3 + a_6 = 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\
a_4 + a_5 + a_6 = 0
\end{cases}
$$

$a_2 = c$ とおくと.

$$
\begin{cases}
a_1 = 1 \\
a_2 = c \\
a_3 = -1 - c \\
a_4 = -1 \\
a_5 = -c \\
a_6 = 1 + c
\end{cases}
$$

これより、分散 $V(T_4)$ は、

$$V(T_4) = \sigma^2\{1 + c^2 + (1+c)^2 + 1 + c^2 + (1+c)^2\}$$
$$= \sigma^2(4c^2 + 4c + 4)$$
$$= 4\sigma^2(c^2 + c + 1)$$
$$= 4\sigma^2\left\{\left(c+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}$$

これを最小にする c は、$c = -\frac{1}{2}$ なので、

$$T_4 = Y_{13} - \frac{1}{2}Y_{33} - \frac{1}{2}Y_{43} - Y_{24} + \frac{1}{2}Y_{34} + \frac{1}{2}Y_{44}$$

分散は、

$$V[T_4] = 4\sigma^2\left(\frac{3}{4}\right) = 3\sigma^2$$

(3)

T が $T_1 - T_2$ の不偏推定量であることは、(1)、(2) の結果より、わかる。

$$E[T] = \frac{1}{3+w}\underbrace{E[T_1 + T_2 + T_3]}_{(1)\text{ より、}3\times(T_1 - T_2)} + \frac{w}{3+w}\underbrace{E[T_4]}_{(2)\text{ より }T_1 - T_2}$$

$$= \frac{3(T_1 - T_2)}{3+w} + \frac{w(T_1 - T_2)}{3+w}$$

$$= T_1 - T_2$$

$V[T]$ が最小となる w は、$V[T]$ の w に関する停留点を求めることにより求まる。

$$V[T] = \left(\frac{1}{3+w}\right)^2 \cdot 3 \times \sigma^2 + \left(\frac{w}{3+w}\right)^2 \cdot \sigma^2$$

$\frac{d}{dw}V[T] = 0$ より、 $w = \frac{2}{3}$

また，$V[T]$ は，

$$V[T] = \left(\frac{1}{3+\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot 3\sigma^2 + \left(\frac{\frac{2}{3}}{3+\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot \sigma^2$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{6}{11}\sigma^2$$

[4]

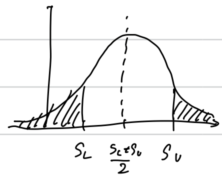
読み合わせ．

問3

(1)

正規分布の平均μが、S_UとS_Lの中点のとき、

不良率（右図斜線部）は最小となる。



(2)

(不良率) $= P(X < S_L) + P(X > S_U)$ である。(1)の条件より、

$$
\begin{aligned}
(\text{不良率}) &= 2 \cdot P(X > S_U) \\
&= 2 \cdot P\left(\frac{X - \frac{S_U+S_L}{2}}{\sigma} > \frac{S_U - \frac{S_U+S_L}{2}}{\sigma} \right) \\
&= 2 \cdot P\left(Z > \frac{S_U - S_L}{2\sigma} \right) \quad (\text{ここで、} Z \sim N(0,1)) \\
&= 2 \cdot P(Z > 3 \cdot C_p) = 2 \cdot P(Z > 2) \\
&= 2 \cdot 0.0228 = 0.0456 。
\end{aligned}
$$

(3)

$P(\alpha^- \leq C_p \leq \alpha^+) = 0.95$ を満たすような α^-, α^+ を求める。

$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ より、

$$
P\left(\chi^2_{0.975}(n-1) \leq \underbrace{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}_{\to\ \text{ここを } C_p \text{ に変形していく。}} \leq \chi^2_{0.025}(n-1) \right) = 0.95
$$

$$
\Leftrightarrow P\left(\sqrt{\frac{\chi^2_{0.975}(n-1)}{n-1}} \leq \frac{1}{\sigma} \underbrace{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}}_{=S} \leq \sqrt{\frac{\chi^2_{0.025}(n-1)}{n-1}} \right) = 0.95
$$

$$
\Leftrightarrow P\left(\frac{S_U - S_L}{6S} \sqrt{\frac{\chi^2_{0.975}(n-1)}{n-1}} \leq \frac{S_U - S_L}{6\sigma} \leq \frac{S_U - S_L}{6S} \sqrt{\frac{\chi^2_{0.025}(n-1)}{n-1}} \right) = 0.95
$$

$$
\Leftrightarrow P\left(\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi^2_{0.975}(n-1)}{n-1}} \leq C_p \leq \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi^2_{0.025}(n-1)}{n-1}} \right) = 0.95
$$

よって示せた。

(4)

$$\hat{C}_p = \frac{12.6 - 12.0}{6 \cdot 0.05} = \frac{0.6}{0.3} = 2.0$$

C_pの信頼区間は，(3)より，

$$\left(\hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi^2_{0.975}(19)}{19}} ,\ \hat{C}_p \sqrt{\frac{\chi^2_{0.025}(19)}{19}} \right) \fallingdotseq (1.37,\ 2.63)$$

C_pは1.33以上が望ましいので，管理状態は良好と言える。

(5)

$$E[\hat{C}_p] = E\left[\frac{S_U - S_L}{6s}\right] = \frac{S_U - S_L}{6} E\left[1 \Big/ \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right]$$

$$= \frac{S_U - S_L}{6\sigma}\sqrt{n-1}\, E\left[\frac{1}{\sqrt{Y_{n-1}}}\right] \qquad (Y_{n-1} \sim \chi^2(n-1) \text{ とする})$$

$$= C_p \sqrt{n-1}\, E\left[\frac{1}{\sqrt{Y_{n-1}}}\right]$$

$$= C_p \sqrt{n-1} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}\, dy$$

$$= C_p \sqrt{n-1} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^\infty y^{\underset{\alpha = \frac{\nu-1}{2}}{\underbrace{\frac{\nu-1}{2}}} - 1} e^{-\frac{y}{\underset{\beta = 2}{\underbrace{2}}}}\, dy$$

$$= C_p \sqrt{n-1} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \cdot 2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= C_p \sqrt{n-1} \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}$$

$$= \underbrace{\sqrt{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}}_{= a} C_p$$

問5

(1)

$y_i \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ とすると、$\bar{y} \sim N(\mu_B, \frac{1}{n_B}\sigma_B^2)$ となる。

これより、μ_B の信頼区間は、

$$\bar{y} \pm t_{0.025}(14)\sqrt{\frac{10^2}{15}} = 20 \pm 2.145\frac{10}{\sqrt{15}}$$

$$= (\underbrace{14.46}_{(ア)}, \underbrace{25.54}_{(イ)})$$

(2)

分散は未知だが等しいとき、S_x, S_y の標準偏差をプールして、一つの推定量 S として扱う。

$$S^2 = \frac{(n_A-1)S_x^2 + (n_B-1)S_y^2}{n_A+n_B-2} = \frac{S_x^2+S_y^2}{2} = 82.0$$

検定統計量に何を使うか考える。

$$\bar{x}-\bar{y} \sim N(\mu_A-\mu_B, \frac{1}{n_A}\sigma^2 + \frac{1}{n_B}\sigma^2)$$

$$\sim N(\mu_A-\mu_B, \frac{2}{15}\sigma^2) \quad — \quad ※$$

であることを用いて、次式を検定統計量とする。

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{2}{15}S^2}} \sim t(\underbrace{15+15-2}_{\text{プールした分散の自由度}}) \quad (H_0\text{の元で})$$

実際の統計値は、

$$t = \frac{27-20}{\sqrt{\frac{2}{15}82}} \fallingdotseq 2.117 > t_{0.025}(28)$$

よって H_0 は棄却される。

$\mu_A - \mu_B$ の信頼区間は、㊉ を用いると、

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{2}{15}S^2} \fallingdotseq (0.23,\ 13.77)$$

(3)

[前提] $\begin{cases} n_x = n_y = n \\ S_x = S_y = S \end{cases}$

「$\underbrace{\mu_A \text{ と } \mu_B \text{ の信頼区間に重なりがない}}_{(A)}$」 ⇒ 「(2) の t 検定が有意になる」 を検証する。

簡単のため、$\mu_A > \mu_B$ のときのみ考える。($\mu_A < \mu_B$ のときは対照性より同様に議論できる。)

$$(A) \iff \bar{y} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}} < \bar{x} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

(方針) $t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{2}{n}S^2}} > t_{0.025}(2n-2)$ となるかを見たい。

$$\iff \bar{x} - \bar{y} > 2t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

$$\iff \underbrace{\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{2}{n}S^2}}}_{\sim t(2n-2)} > 2t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\ t_{0.025}(n-1)$$

$$> \sqrt{2}\ t_{0.025}(2n-2)$$

$$> t_{0.025}(2n-2)$$

よって棄却される。

(後半読み合わせ)