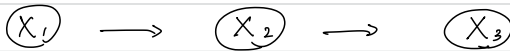


## 25章

例2 次のパス図を考える。



これに相当する構造方程式は、(25.2)である。

$$\begin{aligned} X_2 &= \alpha X_1 + u & \text{--- ①} \\ X_3 &= b X_2 + v & \text{--- ②} \end{aligned} \quad (25.2)$$

パス係数  $\alpha, b$  を求める。まず  $\alpha$  を求める。

① に  $X_1$  をかけて、期待値をとると、

$$\begin{aligned} E(X_1 X_2) &= \alpha E(X_1^2) + E(u X_1) \\ \Leftrightarrow E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) &= \alpha V(X_1) + E(u) \cdot E(X_1) \\ \Leftrightarrow \rho_{12} &= \alpha \cdot 1 + E(u) \cdot 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \rho_{12} \end{aligned}$$

次に  $b$  を求める。② に  $X_1$  をかけて期待値をとると、

$$\begin{aligned} E(X_1 X_3) &= b E(X_2 X_1) + v E(X_1) \\ \Leftrightarrow \rho_{13} &= b \rho_{12} + 0 \\ \Leftrightarrow b &= \rho_{13} / \rho_{12} \end{aligned}$$

このように変数をかけて期待値を取る方法を **操作変数法** という。

問 25.2

(1) 操作変数法の問題。構造方程式は次の通り。

$$Y = \alpha X + bW + u \quad (1)$$

$$Z = cX + dY + v \quad (2)$$

$X \cdot (1)$  より、

$$E(XY) = \alpha E(X^2) + b E(XW) + E(u)E(X)$$

$$\Leftrightarrow \rho_{xy} = \alpha \cdot 1 + b \cdot \rho_{xw} + E(u) \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow \rho_{xy} = \alpha + b \cdot 0 \quad (\because X \text{ と } W \text{ が独立})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \rho_{xy}$$

同様に、 $W \cdot (1)$  より、

$$b = \rho_{yw}$$

$c, d$  については、 $X \cdot (2)$  と  $Y \cdot (2)$  の連立方程式を解く。

$$\begin{cases} \rho_{xz} = c + d \rho_{xz} & \text{--- (3)} \\ \rho_{yz} = c \rho_{xy} + d & \text{--- (4)} \end{cases}$$

これを解くと、

$$\begin{cases} c = \frac{\rho_{xz} - \rho_{xz} \rho_{yz}}{1 - \rho_{xz}^2} \\ d = \frac{\rho_{yz} - \rho_{xz} \rho_{yz}}{1 - \rho_{xz}^2} \end{cases}$$

(2) (3) より、

$$\rho_{xz} = c + d \rho_{xz}$$

$$= \underbrace{c}_{\text{直接効果}} + \underbrace{d \alpha}_{\text{間接効果}}$$

$X \rightarrow Z$

$X \rightarrow Y \rightarrow Z$

ここで、XとWが独立であることを使ったが、実はグラフィカルモデルから独立を判断することができる。何も条件づけられていない場合、下図の左段のような関係が成り立つ。

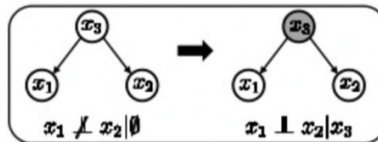
## 条件付き独立をグラフから読み取る

ベイジアンネットワーク

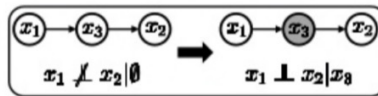
変数  $x_3$  を与えると依存関係はどう変化するか？

(なお条件付き独立は3変数以上あって初めて定義できることに注意)

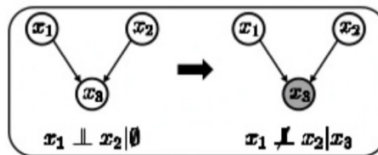
tail-to-tail



head-to-tail



head-to-head



上2つに対して条件付き独立かどうかの関係が反転する。

\*条件付き独立  $p(x_1, x_2 | x_3) = p(x_1 | x_3)p(x_2 | x_3)$  は  $x_1 \perp x_2 | x_3$  とも表記する ( $p$  を省略した表記)。  
 $x_1 \perp x_2 | \emptyset$  は空集合  $\emptyset$  を与えたときに条件付き独立、すなわち独立を意味する。

参照： [https://www.slideshare.net/Kawamoto\\_Kazuhiko/ss-35483453](https://www.slideshare.net/Kawamoto_Kazuhiko/ss-35483453)

- (3) p229 の定義に従ってモラルグラフを構築する。  
 モラルグラフを構築すると、条件付き独立の関係がわかる  
 というメリットがある。