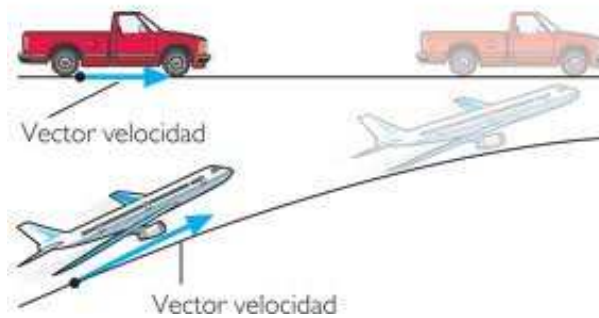


# CURSO DE NIVELACIÓN

Apunte teórico - práctico

## Módulo 6: Vectores



Facultad de Ciencias  
**Astronómicas  
y Geofísicas**  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

# VECTORES

Vamos a definir un vector como un segmento de recta orientado que queda definido por tres propiedades:

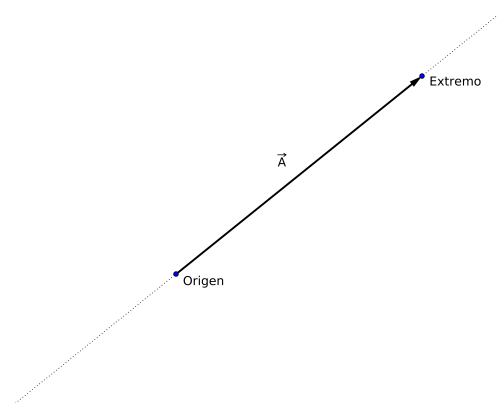
- Su **dirección**, determinada por la recta que contiene al vector.
- Su **sentido**, que determina el origen y el extremo del vector.
- Su **módulo**, determinado por su longitud.

Los vectores que estudiaremos en este curso son los llamados vectores geométricos o vectores euclidianos. Estos vectores se utilizan para representar magnitudes físicas como las fuerzas y las velocidades, entre otras.

Matemáticamente se simbolizan con una letra, por ejemplo la letra  $A$ , sobre la cual se escribe una flecha,  $\vec{A}$ ; también se suele escribir en negrita,  $\mathbf{A}$ .

$\vec{A}$  ó  $\mathbf{A}$  Se lee “vector  $A$ ”

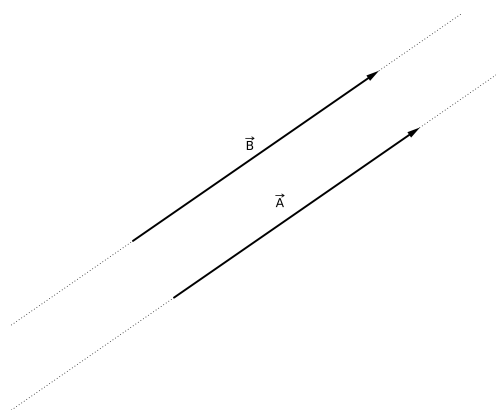
Gráficamente un vector se representa por una flecha que está determinada por dos puntos, el origen (donde nace la flecha) y el extremo (donde se ubica la punta de la flecha).



En la figura vemos que la recta punteada es la que define la dirección, la flecha indica el sentido, y la longitud del segmento de recta entre el origen y el extremo es el módulo.

De la definición dada para un vector se tiene que:

- **Dos vectores son iguales cuando tienen igual dirección, igual módulo e igual sentido.** Es importante ver que dos vectores pueden ser iguales aunque estén contenidos en rectas distintas, es decir que sus orígenes y sus extremos no coinciden.



- **Dos vectores son paralelos cuando tienen la misma dirección.** Es decir que deben estar contenidos en rectas paralelas. En particular cuando dos vectores tienen misma dirección y sentido contrario se dice que son vectores antiparalelos.
- **Dos vectores son perpendiculares cuando están contenidos en rectas perpendiculares.**

## Componentes de un vector

Las componentes de un vector se definen a partir de su origen y su extremo, y definen la dirección, el módulo y el sentido del vector en un sistema de coordenadas determinado. En este curso trabajaremos con un sistema de coordenadas cartesianas.<sup>1</sup> Pero antes de calcular estas componentes vamos a recordar cómo graficar un punto en un sistema de coordenadas cartesianas.

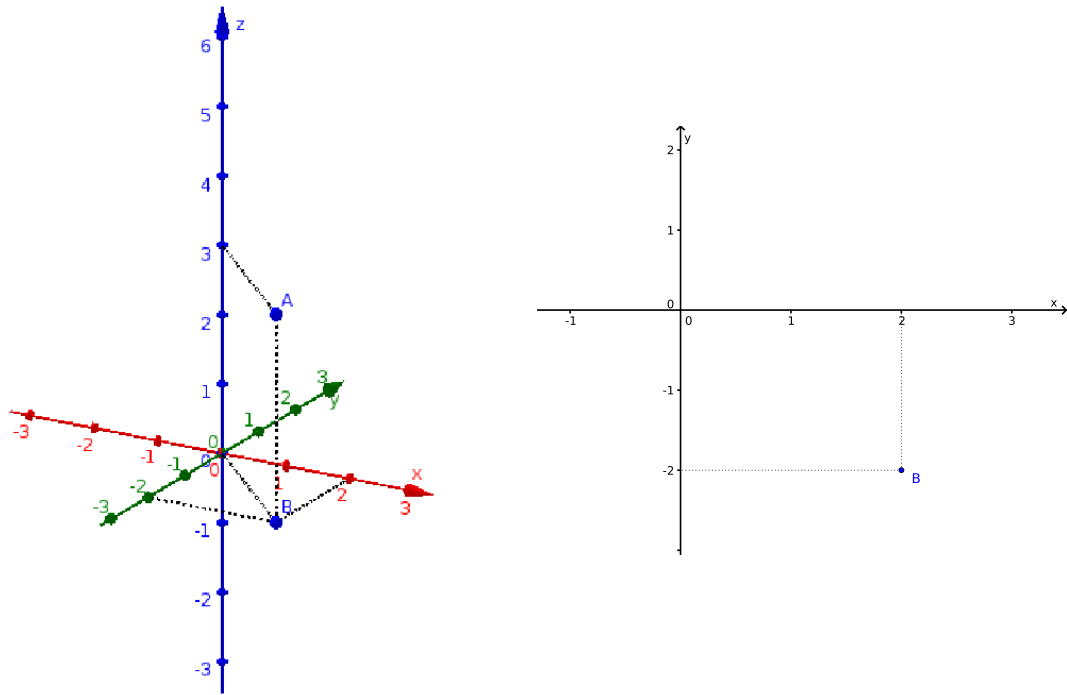
Como mencionamos anteriormente (en los capítulos en los que trabajamos con funciones). La representación geométrica de los sistemas de coordenadas consiste en dos o tres ejes perpendiculares entre sí y un origen de coordenadas que corresponde al punto en el cual dichos ejes se intersecan. De este modo las coordenadas se dan en forma de pares ordenados o ternas ordenadas, respectivamente. Cada elemento del par o de la terna se corresponde con uno de los ejes de manera unívoca.

---

<sup>1</sup>Existen otros sistemas de coordenadas como por ejemplo coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

---

**Ejemplo:** Supongamos que el punto  $A$  tiene coordenadas 2 en  $x$ ,  $-2$  en  $y$  y 3 en  $z$ ; y que el punto  $B$  tiene coordenadas 2 en  $x$  y  $-2$  en  $y$ . Esto se simboliza de la siguiente manera:  $A = (2, -2, 3)$  y  $B = (2, -2)$ .



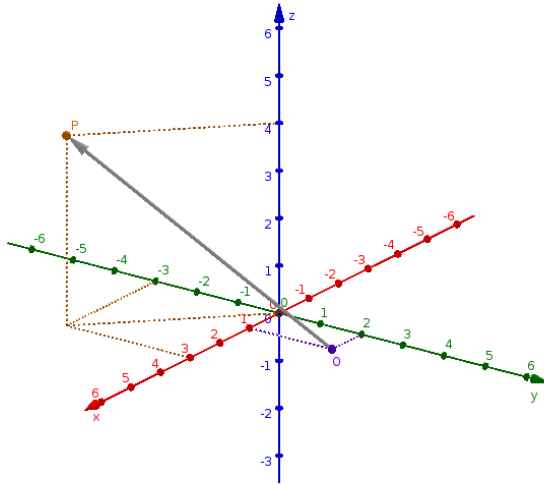
En la figura de la derecha estamos viendo el plano  $xy$ , mientras que en el gráfico de la izquierda el plano  $xy$  estaría perpendicular a la hoja. Las coordenadas del punto  $B$  en el espacio quedan representadas por la terna  $(2, -2, 0)$ .

---

Ahora, al comienzo de este capítulo dijimos que un vector se representa gráficamente como una flecha que une dos puntos, el origen y el extremo. De modo que las componentes  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  del vector  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  están dadas por la resta de las coordenadas del extremo y del origen. Esto se hace del siguiente modo: supongamos que el origen tiene coordenadas  $O = (O_x, O_y, O_z)$  y que el extremo tiene coordenadas  $P = (P_x, P_y, P_z)$ , entonces las componentes de  $\vec{A}$  serán

$$\begin{aligned} A_x &= P_x - O_x \\ A_y &= P_y - O_y \\ A_z &= P_z - O_z \end{aligned} \tag{1}$$

**Ejemplo:** Si el origen y el extremo son los puntos  $O = (1, 2, 0)$  y  $P = (3, -3, 4)$ , respectivamente. Entonces las componentes de  $\vec{A}$  serán



$$\begin{aligned} A_x &= P_x - O_x = 3 - 1 = 2 \\ A_y &= P_y - O_y = -3 - 2 = -5 \\ A_z &= P_z - O_z = 4 - 0 = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso, el vector  $\vec{A}$  se simboliza como  $\vec{A} = (2, -5, 4)$ .

## Ejercicio

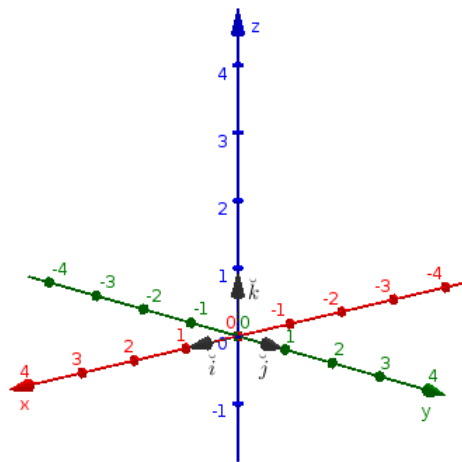
Completa el siguiente cuadro y representa los vectores en un sistema de ejes cartesianos:

Vector	Punto Inicial	Punto Final	Componentes del vector
$\vec{A}$	(1;3)	(3;5)	
$\vec{B}$	(2;-1)		(3;5)
$\vec{C}$		(-3;1/2)	(0;3/2)
$\vec{D}$		(-1;-3)	(-1;-3)
$\vec{E}$	(-2;1;-2)	(0;-1;-3)	
$\vec{F}$		(1;0;-3)	(2;-1;2)
$\vec{G}$	(2/3;-1/2;1)		(1;3/4;-2)

Una forma equivalente de escribir un vector es la siguiente:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \check{i} + A_y \check{j} + A_z \check{k} \quad (2)$$

donde  $\check{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\check{j} = (0, 1, 0)$  y  $\check{k} = (0, 0, 1)$  son los vectores que determinan la dirección y el sentido de los ejes cartesianos como se muestra en la figura siguiente. Este tipo de vectores se llaman **versores**. A veces los versores también se escriben como  $\check{e}_x$ ,  $\check{e}_y$  y  $\check{e}_z$ .



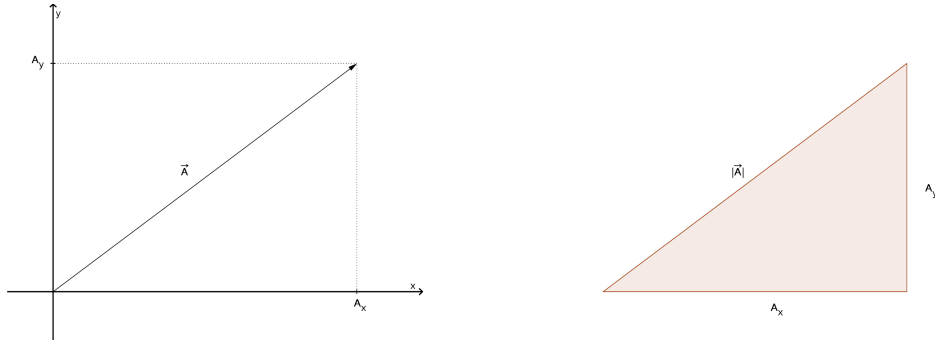
Se define al vector nulo como el vector que tiene todas sus componentes nulas y se simboliza como:

$$\vec{0} = (0, 0, 0) \quad (3)$$

**Los vectores quedan definidos por sus componentes, esto quiere decir que las tres propiedades que mencionamos, la dirección, el sentido y el módulo, se pueden determinar a partir de sus componentes.** La dirección y el sentido del vector quedan determinados por los puntos origen y extremo del mismo: la dirección estará definida por la recta que pasa por ambos puntos y el sentido será del origen hacia el extremo.

El módulo, como dijimos anteriormente, es la distancia entre el origen y el extremo (es la longitud geométrica de la flecha que representa al vector). Se simboliza como  $|\vec{A}|$ , también se simboliza con la letra del vector pero sin la flecha encima:  $|\vec{A}| = A$ . Para calcular el módulo a partir de las componentes del vector, primero vamos a considerar un vector en el plano, es decir, un vector que sólo tenga dos componentes, y luego calcularemos el módulo de un vector en el espacio (3 componentes).

Grafiquemos el vector  $\vec{A} = (A_x, A_y)$  en un sistema de coordenadas cartesianas.



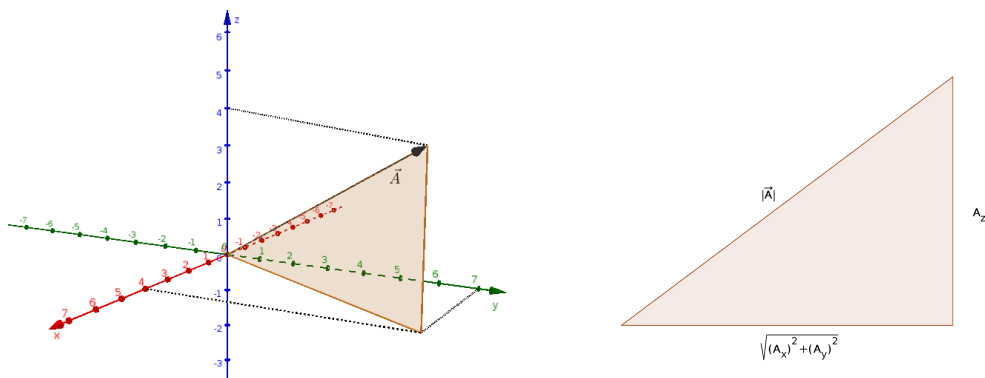
Como se puede ver en la figura, para calcular la longitud del vector podemos utilizar el triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos  $(0,0)$ ;  $(A_x, A_y)$  y  $(A_x, 0)$ . Luego, podemos calcular la distancia entre los puntos  $(0,0)$  y  $(A_x, A_y)$  utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$\left(|\vec{A}|\right)^2 = |\vec{A}|^2 = (A_x)^2 + (A_y)^2$$

Teniendo en cuenta que lo que estamos calculando es una distancia, y que las distancias son siempre positivas, aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros y obtenemos el módulo del vector:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \quad (4)$$

La misma idea vamos a utilizar para determinar el módulo de un vector en el espacio. En este caso, el vector es  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ , y el triángulo rectángulo que vamos a utilizar tiene como vértices a los puntos  $(0,0,0)$ ;  $(A_x, A_y, 0)$  y  $(A_x, A_y, A_z)$ .



Luego, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\vec{A}|^2 &= \left( \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \right)^2 + (A_z)^2 \\ |\vec{A}|^2 &= (A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el módulo de un vector queda definido por sus componentes del siguiente modo:

$$\boxed{|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}} \quad (5)$$

Es importante remarcar que el módulo de un vector representa una distancia, por lo tanto siempre será mayor o igual que cero.

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &\geq 0 \\ |\vec{A}| = 0 &\iff \vec{A} = \vec{0} \end{aligned} \quad (6)$$

Se dice que un vector es unitario cuando su módulo es igual a la unidad.

$$\vec{A} \text{ es unitario } \iff |\vec{A}| = 1$$

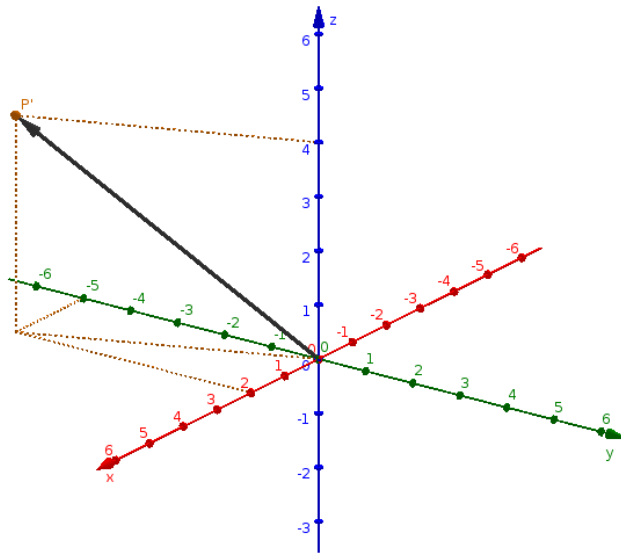
Los versores  $\check{i}$ ,  $\check{j}$  y  $\check{k}$  son vectores unitarios.

Anteriormente dijimos que dos vectores son iguales cuando tiene igual módulo, dirección y sentido. Por lo tanto de acuerdo a la definición de componentes dada, **dos vectores serán iguales cuando tengan las mismas componentes**. Por esta razón todos los vectores pueden trasladarse al origen de coordenadas y a todo punto del espacio se le puede asociar un vector.

---

**Ejemplo:** Al trasladar el vector  $\vec{A} = (2, -5, 4)$  del ejemplo anterior al origen de coordenadas, las coordenadas del punto  $P'$  correspondiente al extremo son iguales a las componentes del vector, por lo tanto el punto  $P'$  tiene coordenadas  $(2, -5, 4)$ .





## Ángulos de posición

Los ángulos de posición de un vector son aquellos que indican su dirección y su sentido (no indican el módulo de un vector). En el sistema de coordenadas cartesianas los ángulos de posición de un vector son  $\theta$  y  $\phi$  y se definen de la siguiente manera:

**Ángulo  $\theta$ :** se mide desde el eje  $z$  positivo hacia el vector.

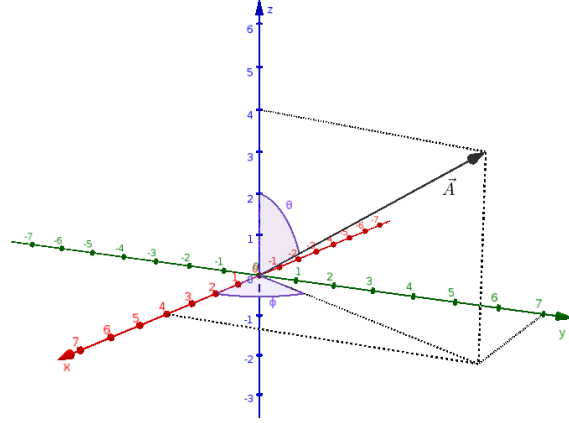
$$0 \leq \theta \leq \pi \quad (7)$$

**Ángulo  $\phi$ :** se mide en el plano  $xy$  desde el eje  $x$  positivo hacia la proyección del vector sobre el plano  $xy$ .<sup>2</sup>

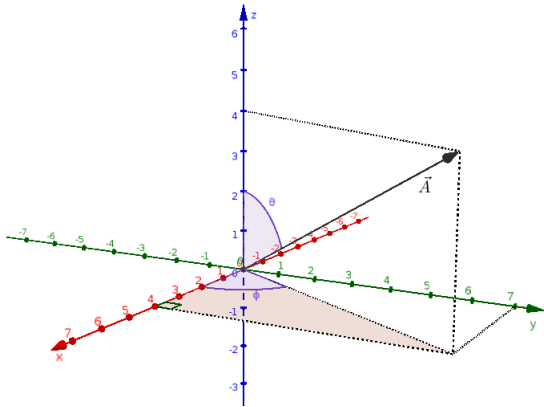
$$0 \leq \phi < 2\pi \quad (8)$$

---

<sup>2</sup>Si iluminamos al vector desde algún lugar la proyección del vector sería la sombra del vector. En este caso para obtener la proyección del vector sobre el plano  $xy$  deberíamos iluminar al vector desde arriba para que la sombra quede en dicho plano.

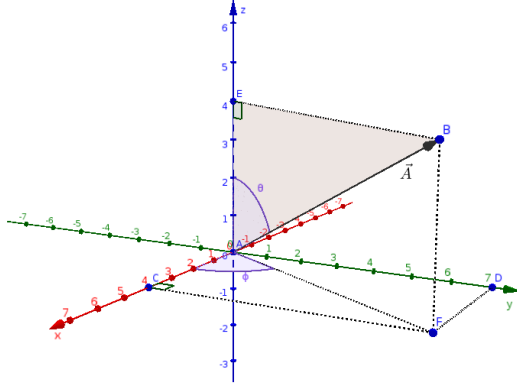


Los ángulos de posición se pueden escribir en función de las componentes del vector. Para determinar el ángulo de posición  $\phi$  del vector  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  utilizamos el triángulo rectángulo cuyos vértices son los puntos  $(A_x, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0)$  y  $(A_x, A_y, 0)$  que está sombreado en la figura siguiente.



$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{A_y}{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \\ \cos \phi &= \frac{A_x}{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \\ \tan \phi &= \frac{A_y}{A_x} \end{aligned} \quad (9)$$

De forma similar, para calcular el ángulo  $\theta$  utilizamos el triángulo rectángulo de vértices  $(0, 0, A_z)$ ,  $(0, 0, 0)$  y  $(A_x, A_y, A_z)$  que está sombreado en la figura siguiente.



$$\begin{aligned}
 \text{sen } \theta &= \frac{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}}{|\vec{A}|} \\
 \cos \theta &= \frac{A_z}{|\vec{A}|} \\
 \tan \theta &= \frac{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}}{A_z}
 \end{aligned} \tag{10}$$

De estas relaciones, se pueden deducir las expresiones de las componentes del vector en función de sus ángulos de posición. De las expresiones de  $\cos \phi$ ,  $\text{sen } \phi$  y  $\cos \theta$  despejamos  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= \frac{A_x}{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \implies A_x = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \cos \phi \\
 \text{sen } \phi &= \frac{A_y}{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}} \implies A_y = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \text{sen } \phi \\
 \cos \theta &= \frac{A_z}{|\vec{A}|} \implies A_z = |\vec{A}| \cos \theta
 \end{aligned}$$

Y de la expresión para el  $\text{sen } \theta$  obtenemos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}}{|\vec{A}|} \implies \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} = |\vec{A}| \text{sen } \theta$$

Reemplazando este resultado en las expresiones anteriores de  $A_x$  y  $A_y$  obtenemos las componentes del vector en función de sus ángulos de posición:

$$\begin{aligned}
 A_x &= |\vec{A}| \text{sen } \theta \cos \phi \\
 A_y &= |\vec{A}| \text{sen } \theta \text{sen } \phi \\
 A_z &= |\vec{A}| \cos \theta
 \end{aligned} \tag{11}$$

Por lo tanto, otra forma equivalente de definir un vector es dando los valores de su módulo y sus ángulos de posición.

---

## Ejercicios

1 Determina el módulo y los ángulos de posición de los siguientes vectores. Grafique.

a)  $\vec{A} = (2; 4)$

b)  $\vec{G} = (3; 1; 2)$

2 Determina las componentes de los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  sabiendo que:

a)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{4}$  y  $|\vec{A}| = 5$

b)  $B = \frac{2}{3}$ ,  $\text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\phi = 120^\circ$

---

## Operaciones con vectores

En esta sección veremos cómo operar con vectores. Los vectores se pueden sumar, restar, multiplicar por otro vector o por un un escalar (número real); pero no podemos dividir dos vectores.

A partir de ahora vamos a considerar que  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  y  $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$  son tres vectores cualesquiera y que  $k$  es una escalar.

Las demostraciones de las propiedades de cada una de las operaciones las dejaremos a cargo del lector. Algunas de ellas las describiremos en la lectura adicional “Más sobre vectores”.

**Suma algebraica entre vectores:** La suma de vectores se realiza componente a componente, esto quiere decir que **el resultado de la suma es otro vector**  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ .

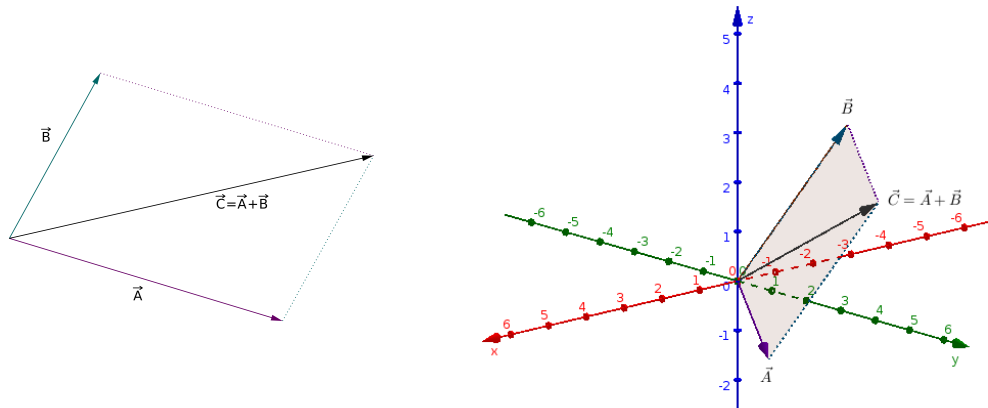
$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) \\ &= (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \end{aligned} \tag{12}$$

De modo que las componentes de  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  son:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

La representación gráfica de la suma de vectores sigue la **regla o ley del paralelogramo**: se grafican los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con el mismo origen. Desde el extremo de  $\vec{A}$  se grafica una recta

paralela al vector  $\vec{B}$ , y desde el extremo de  $\vec{B}$  se grafica una recta paralela a  $\vec{A}$ . De modo que el vector suma  $\vec{A} + \vec{B}$  es un vector cuyo origen coincide con el de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y su extremo es el punto de intersección de las rectas.



Es importante notar que los tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  siempre están contenidos en un mismo plano.

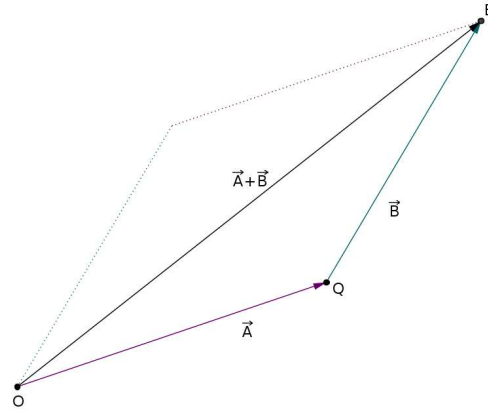
La regla del paralelogramo se puede demostrar fácilmente utilizando la definición de las componentes de un vector. Supongamos que el vector  $\vec{A}$  de componentes  $(A_x, A_y, A_z)$  tiene origen en el punto  $O$  y extremo en el punto  $Q$  y que las coordenadas de  $O$  son  $(x, y, z)$ . Como las componentes de un vector quedan determinadas por los puntos correspondientes a su origen y su extremo, podemos determinar las coordenadas del punto  $Q$  utilizando la relación 1:

$$\begin{aligned} Q_x &= O_x + A_x = x + A_x \\ Q_y &= O_y + A_y = y + A_y \\ Q_z &= O_z + A_z = z + A_z \end{aligned}$$

Así encontramos que el punto  $Q$  tiene coordenadas  $(x + A_x, y + A_y, z + A_z)$ . Ahora traslademos el vector  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  de modo que su origen coincida con el extremo de  $\vec{A}$ , es decir con el punto  $Q$ . Si llamamos  $E$  al extremo de  $\vec{B}$ , tenemos que las coordenadas del punto  $E$  serán  $E_x = x + A_x + B_x$ ,  $E_y = y + A_y + B_y$  y  $E_z = z + A_z + B_z$ . Luego las componentes del vector con origen en  $O$  y extremo en  $E$  son:

$$\begin{aligned} E_x - O_x &= A_x + B_x \\ E_y - O_y &= A_y + B_y \\ E_z - O_z &= A_z + B_z \end{aligned}$$

De este modo vemos que el vector suma  $\vec{A} + \vec{B}$  corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .



**Producto de un vector por un escalar:** Se multiplica cada componente del vector por el escalar. Como resultado se tiene otro vector.

Una manera intuitiva de ver cómo se calcula el vector  $k\vec{A}$  es la siguiente.

$$\begin{aligned}
 k\vec{A} &= \underbrace{\vec{A} + \vec{A} + \dots + \vec{A}}_{k \text{ veces}} \\
 &= \left( \underbrace{A_x + A_x + \dots + A_x}_{k \text{ veces}}, \underbrace{A_y + A_y + \dots + A_y}_{k \text{ veces}}, \underbrace{A_z + A_z + \dots + A_z}_{k \text{ veces}} \right) \\
 &= (kA_x, kA_y, kA_z)
 \end{aligned}$$

Sin embargo, esto sólo vale si  $k \in \mathbb{N}$ . Otra forma de calcularlo para  $k \in \mathbb{R}$  es:

$$\begin{aligned}
 k\vec{A} &= k(A_x \check{i} + A_y \check{j} + A_z \check{k}) \\
 &= kA_x \check{i} + kA_y \check{j} + kA_z \check{k} \\
 &= (kA_x, kA_y, kA_z)
 \end{aligned}$$

De modo que el producto de un vector por un escalar se calcula como:

$$\boxed{k\vec{A} = (kA_x, kA_y, kA_z)} \quad (13)$$

Por lo tanto esta operación da como resultado un vector  $\vec{C} = k\vec{A}$  cuyas componentes son:

$$\begin{aligned}
 C_x &= kA_x \\
 C_y &= kA_y \\
 C_z &= kA_z
 \end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta que el vector  $k\vec{A}$  es paralelo al vector  $\vec{A}$ .

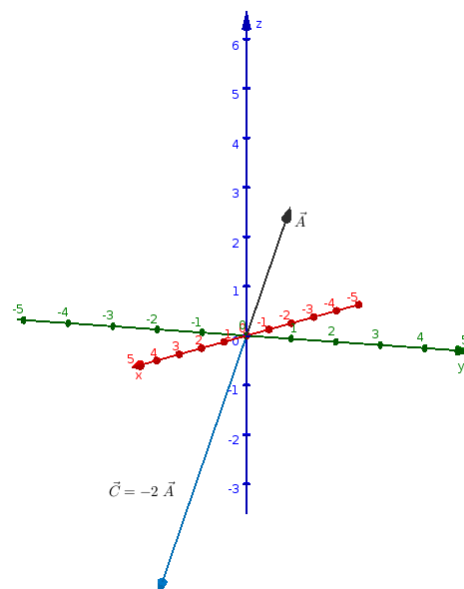
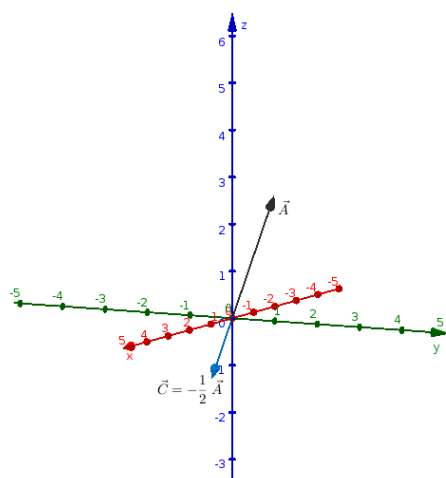
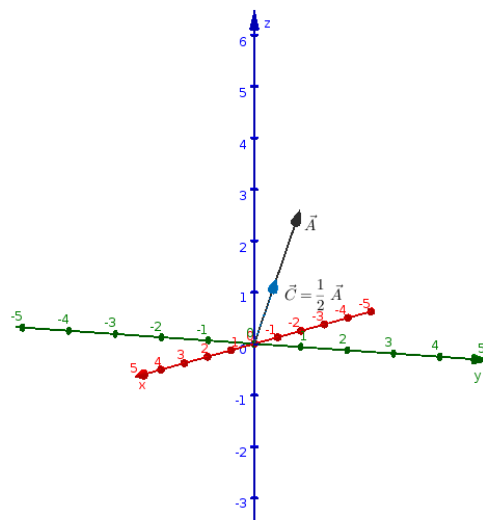
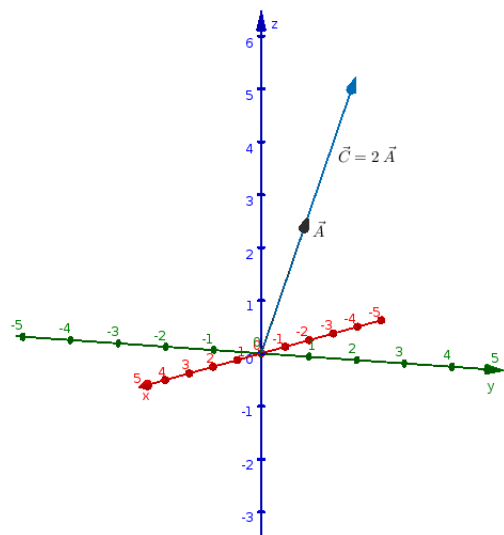
$$k\vec{A} \parallel \vec{A} \quad (14)$$

Esto se ve fácilmente utilizando la regla del paralelogramo. Para calcular  $k\vec{A}$  hay que alinear  $k$  vectores  $\vec{A}$  uno a continuación del otro. De aquí que **la multiplicación de un vector por un escalar sólo puede modificar el módulo o el sentido de un vector, pero nunca puede modificar su dirección:**

- Si  $1 < k$ , el vector aumenta su módulo,  $|k\vec{A}| > |\vec{A}|$ , manteniendo su sentido.
- Si  $0 < k < 1$ , el vector disminuye su módulo,  $|k\vec{A}| < |\vec{A}|$ , manteniendo su sentido.
- Si  $-1 < k < 0$ , el vector disminuye su módulo,  $|k\vec{A}| < |\vec{A}|$ , y cambia su sentido.
- Si  $k < -1$ , el vector aumenta su módulo,  $|k\vec{A}| > |\vec{A}|$ , y cambia su sentido.

---

**Ejemplo:** Supongamos que el vector  $\vec{A}$  tiene componentes (2,2,2) y veamos cómo se modifica al multiplicarlo por distintos escalares.





**Resta algebraica entre vectores:** El vector opuesto de  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  es  $-\vec{A}$ . Luego, si pensamos que  $-\vec{A} = (-1)\vec{A}$ , entonces haciendo el producto de un escalar por un vector encontramos que:

$$\boxed{\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \implies -\vec{A} = (-A_x, -A_y, -A_z)} \quad (15)$$

Por lo tanto los vectores  $\vec{A}$  y  $-\vec{A}$  tienen igual módulo, igual dirección y sentidos opuestos, es decir que son antiparalelos.

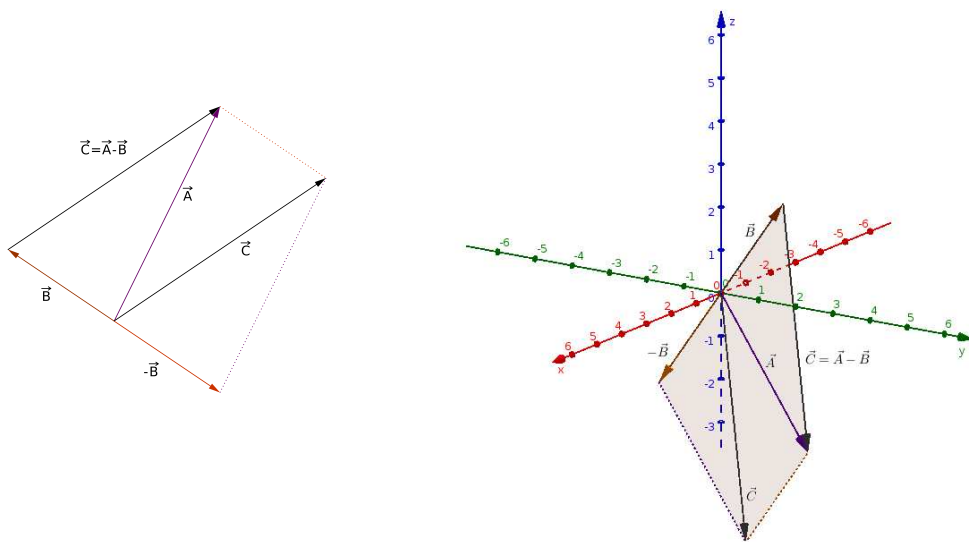
Con esta definición se puede ver que, al igual que para números reales, la resta entre vectores es la suma del opuesto. Esto es

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B} &= (A_x, A_y, A_z) + (-B_x, -B_y, -B_z) \\ &= (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \end{aligned}} \quad (16)$$

De este modo vemos que **el resultado de restar dos vectores es otro vector  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$**  cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x - B_x \\ C_y &= A_y - B_y \\ C_z &= A_z - B_z \end{aligned}$$

Utilizando la regla del paralelogramo para la suma de vectores se puede ver que los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$  forman un triángulo.



---

**Ejercicios**

Dados los vectores  $\vec{C} = (-1, 2, -3)$  y  $\vec{D} = (0, 4, \frac{1}{2})$  realiza las siguientes operaciones en forma gráfica y analítica:

- a)  $\frac{1}{2}\vec{D} - \vec{C}$   
 b)  $-\vec{D} + (-2)\vec{C}$
- 

**Producto entre vectores:** Se definen dos productos diferentes entre vectores de acuerdo al tipo de resultado que da la operación: el producto escalar y el producto vectorial. Como sus nombres lo indican **el resultado de un producto escalar es un escalar, mientras que el resultado del producto vectorial es un vector.**

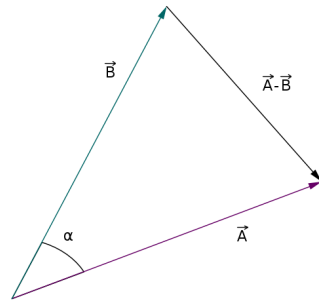
1. **Producto escalar o producto punto:** El producto escalar entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se simboliza como  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ . En este caso no puede obviarse el punto (como sucede en el producto entre escalares o en el producto entre un escalar y un vector). Esta operación se define como la suma del producto componente a componente:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \quad (17)$$

De esta definición se ve que el producto escalar de un vector cualquiera con el vector nulo es igual a cero.

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{0} &= 0 \\ \vec{0} \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

El producto escalar también puede expresarse en función del producto de los módulos y del ángulo subtendido entre los vectores. Para demostrarlo vamos a aplicar el teorema del coseno al triángulo formado por los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{A} - \vec{B}$ .



$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

Ahora, de la resta de dos vectores tenemos que:

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z)$$

Luego, el módulo de este vector será:

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

Por lo tanto, utilizando la fórmula del cuadrado de un binomio, la definición de módulo de un vector y la definición de producto escalar, resulta que:

$$\begin{aligned} |\vec{A} - \vec{B}|^2 &= (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \\ &= [(A_x)^2 - 2A_xB_x + (B_x)^2] + [(A_y)^2 - 2A_yB_y + (B_y)^2] \\ &\quad + [(A_z)^2 - 2A_zB_z + (B_z)^2] \\ &= [(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2] + [(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2] \\ &\quad - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\ &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} |\vec{A} - \vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha \\ |\vec{A} - \vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Luego, igualamos las dos expresiones,

$$\begin{aligned}
|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \\
|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \\
-2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= -2\vec{A} \cdot \vec{B} \\
|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha &= \vec{A} \cdot \vec{B}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el producto escalar entre dos vectores cualesquiera (de dos o tres componentes) se puede escribir como:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \alpha} \quad (19)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo subtendido entre los vectores.

De esta expresión se puede ver que si el ángulo subtendido es de  $90^\circ$  ó  $270^\circ$  el producto escalar resulta nulo. Por lo tanto **el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es nulo.**

$$\boxed{\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{A} \perp \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = 0} \quad (20)$$

## Ejercicios

- Calcula el producto  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  con los datos que se indican en cada caso:
  - $\vec{A} = (1; 5); |\vec{B}| = \sqrt{6}$  y  $\alpha = 45^\circ$
  - $|\vec{A}| = |\vec{B}| = 3$  y  $\alpha = 150^\circ$
- Determina cuáles de estos vectores son perpendiculares:  
 $\vec{H} = (1, -2, -1), \vec{I} = (-2, 1, -2), \vec{J} = (-\frac{11}{2}, -3, \frac{1}{2})$

## Propiedades del producto escalar:

### a) Conmutativo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (21)$$

### b) Distributivo con respecto a la suma y a la resta

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (22)$$

c) **Producto escalar por un escalar**

Sea  $k$  un número real cualquiera, luego,

$$k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) \quad (23)$$

d) **El producto escalar de un vector con sigo mismo es igual al cuadrado de su módulo**

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A})^2 = |\vec{A}|^2 = A^2 \quad (24)$$

2. **Producto vectorial o producto cruz:** El producto vectorial entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se simboliza como  $\vec{A} \times \vec{B}$  y su definición es:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\check{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\check{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\check{k}} \quad (25)$$

donde  $\check{i}$ ,  $\check{j}$  y  $\check{k}$  son los versores correspondientes a cada eje cartesiano. Es decir que el producto vectorial da como resultado un vector  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= -(A_x B_z - A_z B_x) = A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned}$$

De esta definición se ve que:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{0} &= \vec{0} \\ \vec{0} \times \vec{A} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (26)$$

**Propiedades del producto vectorial**

a) **Anticonmutativo**

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}) \quad (27)$$

b) **Distributivo con respecto a la suma y a la resta**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C} \quad (28)$$

c) **Producto vectorial por un escalar**

Sea  $k$  un número real cualquiera, luego

$$k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B}) \quad (29)$$

d) **El producto vectorial de un vector con sigo mismo es igual al vector nulo**

$$\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0} \quad (30)$$

- e) **El vector resultante del producto vectorial es perpendicular a los vectores involucrados en el producto**

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \implies \vec{C} \perp \vec{A} \text{ y } \vec{C} \perp \vec{B} \quad (31)$$

- f) **Doble producto vectorial**

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (32)$$

La regla nemotécnica para acordarse de esta propiedad es “**BACa menos CABa-llo**”. La idea de escribir “baca” en vez de “vaca” es para hacer referencia al primer término  $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})$ . Mientras que “caballo” hace referencia al segundo término  $\vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ .

- g) **Producto mixto**

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (33)$$

- h) **Módulo del producto vectorial**

Del mismo modo que el producto escalar se puede expresar en función del ángulo subtendido,  $\alpha$ , el módulo del producto vectorial se puede escribir como:

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \alpha} \quad (34)$$

Para demostrar esto vamos a calcular el cuadrado del módulo del producto vectorial, esto es:

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

donde hemos utilizado la propiedad 24. Luego realizando el producto mixto y utilizando la propiedad 32 resulta que:

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}|^2 &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= \vec{A} \cdot [\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})] \\ &= \vec{A} \cdot [\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{A})] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar es distributivo y conmutativo obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\vec{A} \times \vec{B}|^2 &= \vec{A} \cdot [\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{A})] \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{A}) \\ &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \end{aligned}$$

Ahora utilizando que  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \alpha$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\vec{A} \times \vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \\
&= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \cos^2 \alpha \\
&= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\
&= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \sin^2 \alpha
\end{aligned}$$

Como el ángulo subtendido entre dos vectores cumple que  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , resulta que  $\sin \alpha \geq 0$ . Por lo tanto, podemos tomar la raíz cuadrada en ambos miembros, entonces:

$$\begin{aligned}
|\vec{A} \times \vec{B}|^2 &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \sin^2 \alpha \\
\sqrt{|\vec{A} \times \vec{B}|^2} &= \sqrt{|\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 \sin^2 \alpha} \\
|\vec{A} \times \vec{B}| &= |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha
\end{aligned}$$

Así hemos logrado demostrar que el módulo del producto vectorial se puede escribir en función del ángulo subtendido entre los vectores. De aquí resulta que **si dos vectores son paralelos su producto vectorial es nulo**.

$$\boxed{\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{A} \parallel \vec{B} \iff \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}} \quad (35)$$

## Ejercicios

1 Calcula el producto  $\vec{A} \times \vec{B}$  con los datos que se indican en cada caso:

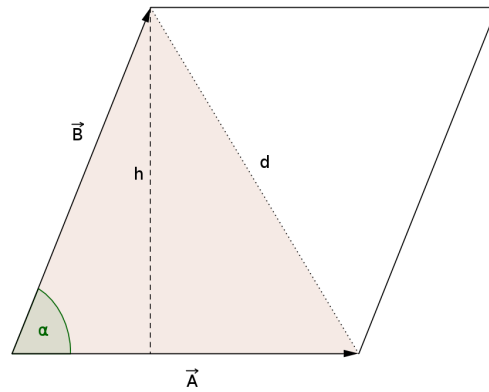
- a)  $\vec{A} = 2\vec{B}$  y  $\vec{A} = 3\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} - 1\vec{k}$   
b)  $\vec{A} = (4; -1; 2)$  y  $\vec{B} = (1; 2; -1)$

2 Determina cuáles de estos vectores son paralelos:

$$\vec{L} = (1, -2, 1), \vec{M} = (-2, 1, -2), \vec{N} = \left(-\frac{11}{2}, -3, \frac{1}{2}\right)$$

## Interpretación geométrica

La representación geométrica de  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes están representados por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

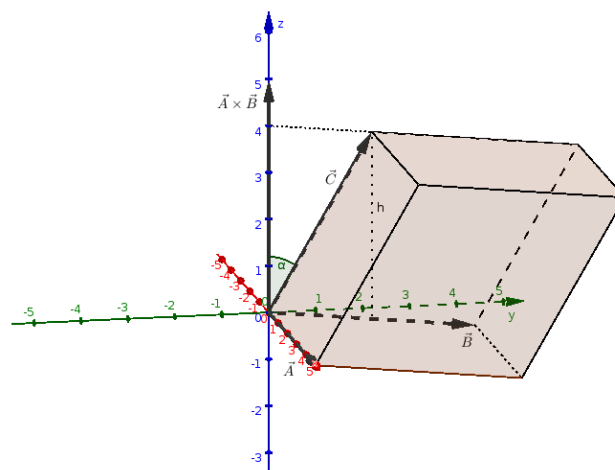


De la figura vemos que el área del paralelogramo es igual a dos veces el área del triángulo de lados  $|\vec{A}|$ ,  $|\vec{B}|$  y  $d$ . Tomando como base del triángulo el lado  $|\vec{A}|$ , la altura será  $h = |\vec{B}| \sin \alpha$ . Por lo tanto,

$$\text{Área} = 2 \frac{|\vec{A}|h}{2} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \alpha = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

Así el módulo del producto vectorial representa al área del paralelogramo de la figura anterior.

Del mismo modo se puede demostrar que el producto mixto  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  representa el volumen del paralelepípedo cuya base es el paralelogramo de la figura anterior.



El volumen de un paralelepípedo es igual al área de la base por la altura. En este caso el área de la base es igual a  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  y la altura es  $h = |\vec{C}| \cos \alpha$ . Entonces, el volumen es:

$$\text{Volumen} = |\vec{A} \times \vec{B}||\vec{C}| \cos \alpha = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$



## Resolución de problemas

**Problema 1:** Dados los vectores  $\vec{G} = (0; 1; 1)$ ,  $\vec{H} = (1; 0; -1)$  y  $\vec{J} = (1; -1; 1)$ , indica cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido justificando tu respuesta y resolviéndola en caso de ser posible.

1.  $\vec{G} \cdot (\vec{H} \times \vec{J}) + \vec{J}$
2.  $\vec{H} \cdot (\vec{J} + \vec{G})$

Para determinar qué operaciones son posibles hay que tener en cuenta que la suma (y la resta) y el producto vectorial entre vectores dan como resultado un vector, mientras que el producto escalar entre vectores da como resultado un escalar. Además la única operación posible entre un escalar y un vector es el producto.

1. Analicemos el primer caso:  $\vec{G} \cdot (\vec{H} \times \vec{J}) + \vec{J}$ . Como siempre el signo  $+$  separa en términos. Entonces para que la operación suma sea válida hay que ver que el primer término sea un vector. Para esto tenemos que resolver primero el producto vectorial  $\vec{H} \times \vec{J}$ . Esto da como resultado un nuevo vector. Luego podemos hacer el producto escalar entre  $\vec{G}$  y el vector resultante del producto vectorial. Finalmente, el resultado de este producto escalar da como resultado un escalar.

Por lo tanto, el primer caso no es una operación válida ya que tendremos la suma entre un escalar y un vector.

$$\underbrace{\vec{G} \cdot \overbrace{(\vec{H} \times \vec{J})}^{\text{vector}}}_{\text{escalar}} + \underbrace{\vec{J}}_{\text{vector}} \quad \text{No es válida la operación}$$

2. Veamos ahora el segundo caso:  $\vec{H} \cdot (\vec{J} + \vec{G})$ . Aquí el orden en el que hay que resolver las operaciones también está dado por el paréntesis. Luego la operación es válida ya que la suma entre vectores da como resultado un vector, y el producto escalar se puede realizar.

$$\underbrace{\vec{H}}_{\text{vector}} \cdot \underbrace{(\vec{J} + \vec{G})}_{\text{vector}} \quad \text{Es válida la operación}$$

Ahora hay que calcularla:

$$\vec{J} + \vec{G} = (1; -1; 1) + (0; 1; 1) = (1 + 0; -1 + 1; 1 + 1) = (1; 0; 2)$$

Luego,

$$\vec{H} \cdot (\vec{J} + \vec{G}) = (1; 0; -1) \cdot (1; 0; 2) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 1 - 2 = -1$$

**Problema 2:** Sean  $\vec{A} = (1; -3; 1)$ ,  $\vec{B} = (2, -1, 1)$  y  $\vec{V} = \vec{B} - \vec{A}$ . Determina un vector  $\vec{U}$  perpendicular a  $\vec{V}$  tal que  $|\vec{U}| = 1$ .

La forma más fácil de encontrar un vector perpendicular a  $\vec{V}$  es haciendo un producto vectorial entre  $\vec{V}$  y un vector cualquiera ya que el vector resultante será perpendicular a los dos vectores involucrados en el producto. Entonces elijamos un vector cualquiera (siempre conviene elegir un vector que simplifique el producto), pero en este caso vamos a demostrarlo de forma genérica. Tomemos un vector  $\vec{C} = (a, b, c)$  y hagamos el producto vectorial  $\vec{V} \times \vec{C}$  teniendo en cuenta que  $\vec{V} = \vec{B} - \vec{A} = (2, -1, 1) - (1; -3; 1) = (2 - 1; -1 - (-3); 1 - 1) = (1; 2; 0)$ .

$$\begin{aligned}\vec{V} \times \vec{C} &= (V_y C_z - V_z C_y)\vec{i} - (V_x C_z - V_z C_x)\vec{j} + (V_x C_y - V_y C_x)\vec{k} \\ &= [2 \cdot c - 0 \cdot b]\vec{i} - [1 \cdot c - 0 \cdot a]\vec{j} + [1 \cdot b - 2 \cdot a]\vec{k} \\ &= 2c\vec{i} - c\vec{j} + (b - 2a)\vec{k} = (2c; -c; b - 2a)\end{aligned}$$

Llamemos  $\vec{U}' = \vec{V} \times \vec{C} = (2c; -c; b - 2a)$ . El módulo de este vector es  $|\vec{U}'| = \sqrt{(2c)^2 + c^2 + (b - 2a)^2} = \sqrt{5c^2 + (b - 2a)^2}$ . Por lo tanto hay que conseguir un vector paralelo a  $\vec{U}'$  pero que tenga módulo igual a uno.

Para conseguir vector paralelo a  $\vec{U}'$  simplemente hay que multiplicar al vector  $\vec{U}'$  por un escalar cualquiera. Pero en este caso, como queremos que el módulo del vector resultante sea igual a 1, el escalar que vamos a elegir es  $|\vec{U}'|^{-1}$ , es decir que tomando el vector  $\frac{\vec{U}'}{|\vec{U}'|}$  conseguimos un vector paralelo a  $\vec{U}'$  y de módulo 1, ya que

$$\left| \frac{\vec{U}'}{|\vec{U}'|} \right| = \frac{|\vec{U}'|}{|\vec{U}'|} = 1$$

Por lo tanto el vector  $\vec{U}$  que buscamos (perpendicular a  $\vec{V}$  y de módulo 1) es:

$$\vec{U} = \frac{\vec{U}'}{|\vec{U}'|} = \frac{(2c; -c; b - 2a)}{\sqrt{5c^2 + (b - 2a)^2}}$$

Otra opción para resolver este ejercicio es utilizar el hecho de que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo. Entonces si ahora elegimos un vector  $\vec{U}' = (a, b, c)$ , el producto escalar entre  $\vec{U}'$  y  $\vec{V} = (1, 2, 0)$  será igual a:

$$\vec{U}' \cdot \vec{V} = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto

$$a + 2b = 0$$

Si despejamos  $b$  obtenemos que

$$b = -\frac{1}{2}a$$

De modo que el vector perpendicular a  $\vec{V}$  debe ser igual a  $(a, -\frac{1}{2}a, c)$  donde  $a$  y  $c$  son dos números reales cualesquiera. Luego, como queremos que además de ser perpendicular a  $\vec{V}$  queremos que tenga módulo igual a uno, tendremos que el vector  $\vec{U}$  buscado es igual a:

$$\vec{U} = \frac{\vec{U}'}{|\vec{U}'|}$$

1. Determina el módulo y los ángulos de posición de los siguientes vectores. Grafique.

a)  $\vec{C} = (-4; -3)$

b)  $\vec{D} = (8; -6)$

c)  $\vec{E} = (4; 4; -7)$

d)  $\vec{F} = (2/3; -5/2; 1)$

e)  $\vec{G} = (0, 0, 25)$

f)  $\vec{H} = (0, -3, 0)$

2. Dados los vectores  $\vec{A} = (-1; -2; 3)$ ,  $\vec{B} = (1; 0; -2)$  y  $\vec{C} = (1; 2; -3)$  calcula, de ser posible, las siguientes operaciones (en caso de no ser posible justificar la desición):

a)  $2\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$

b)  $2\vec{A} \cdot (\vec{B} - \vec{C}) \times \vec{A}$

c)  $2\vec{A} \cdot \vec{C} \times (\vec{B} - \vec{C})$

d)  $\vec{C} \times (\vec{C} - |\vec{A}|\vec{B})$

e)  $\vec{A} \cdot (2\vec{B}) \times \vec{C}$

f)  $B + \vec{A} \cdot \vec{C} - |\vec{A} \times \vec{B}|$

3. Verifica las siguientes afirmaciones:

a)  $\check{i} \times \check{j} = \check{k}, \check{j} \times \check{k} = \check{i}, \check{k} \times \check{i} = \check{j}$

b)  $\check{k} \times \check{j} = -\check{i}, \check{j} \times \check{i} = -\check{k}, \check{i} \times \check{k} = -\check{j}$

4. Halla  $(2; -3; 1) \times (\check{i} + \check{j} - 2\check{k})$
5. Dados los vectores  $\vec{A} = (2; 1; -3)$  y  $\vec{B} = (1; 0; 2)$  determina:
  - a) Un versor perpendicular a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  simultáneamente.
  - b) El área del triángulo formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $2\vec{B}$
6. Hallar el ángulo entre los vectores  $\vec{P} = (-2, 2, 4)$  y  $\vec{Q} = (5, 2, -3)$ .
7. Dados dos vectores tales que  $|\vec{A}| = \frac{1}{2}$  y  $|\vec{B}| = 3$  calcule el producto escalar entre ambos suponiendo que éste es positivo, sabiendo que el módulo del producto vectorial es igual a  $\frac{6}{5}$ .
8. Halla el perímetro y la amplitud de los ángulos interiores del triángulo ABC cuyos vértices son  $A = (5; 3; 0)$ ,  $B = (2; -3; 1)$  y  $C = (-5; -2; 1)$ .
9. Un avión vuela en dirección S  $30^\circ$ W con una velocidad de 500 Km/h ¿Cuáles son las componentes S y W de la velocidad?
10. Un río recto fluye al Este a una velocidad de 4 Km/h. Un nadador cruza en dirección Sur a una velocidad de 2,5 Km/h respecto al río. Determina la velocidad del nadador respecto a la orilla.
11. Encuentra la resultante de la actuación de las siguientes fuerzas sobre un punto  $P$  y explicita si el mismo se encuentra en equilibrio<sup>3</sup>:
  - a)  $\vec{F}_1 = (3; 2)$  y  $\vec{F}_2 = (5; -4)$
  - b)  $\vec{F}_1 = 2\check{i} + 5\check{j}$ ;  $\vec{F}_2 = -\check{i} + 2\check{j}$  y  $\vec{F}_3 = -\check{i} - 7\check{j}$
  - c)  $\vec{F}_1 = (1; -2; 3)$ ;  $\vec{F}_2 = (2; 5; -4)$  y  $\vec{F}_3 = -3\check{i} + 3\check{j} - \check{k}$
12. Un bloque que pesa 50 Kg está sostenido por dos cuerdas que forman con el techo ángulos de  $50^\circ$  y  $30^\circ$  respectivamente. Encuentra las tensiones en ambas cuerdas.
13. Demuestre las siguientes propiedades considerando que  $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$  y  $\vec{C} = (c_x, c_y, c_z)$  son tres vectores cualesquiera.
  - a)  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
  - b)  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \pm \vec{A} \cdot \vec{C}$
  - c)  $k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B})$  con  $k \in \mathbb{R}$ .
  - d)  $\vec{A} \cdot \vec{A} = (\vec{A})^2 = |\vec{A}|^2 = A^2$

---

<sup>3</sup>Un objeto se encuentra en equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

e)  $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

f)  $\vec{A} \times (\vec{B} \pm \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \vec{C}$

g)  $k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B})$  con  $k \in \mathbb{R}$ .

h)  $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$

i)  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \implies \vec{C} \perp \vec{A} \text{ y } \vec{C} \perp \vec{B}$