Cours d ’électronique analogique

ESIL – Filière Matériaux

Licence de Physique et Applications

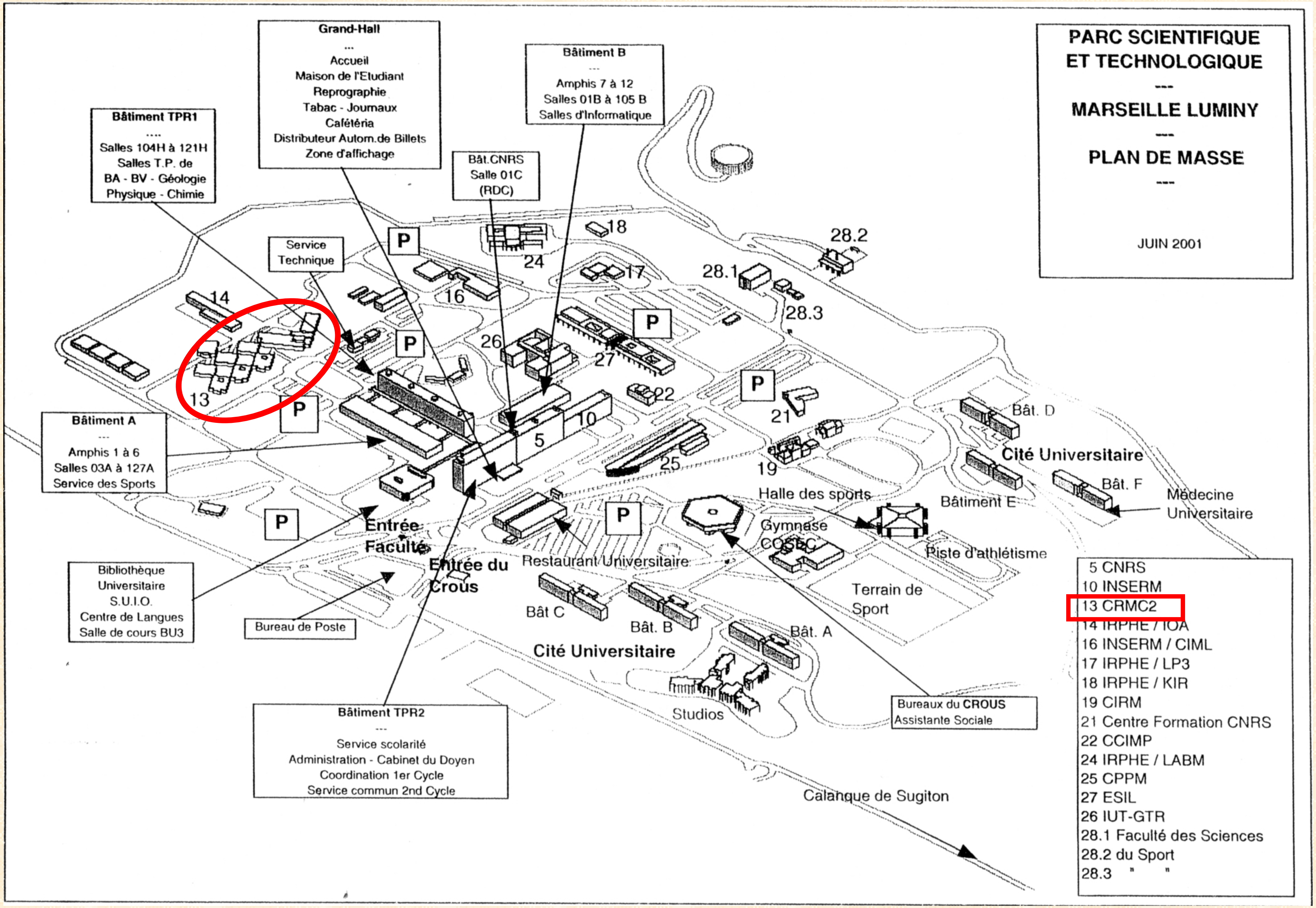
Prof. François ARNAUD d ’AVITAYA

CRMCN 13288 MARSEILLE cedex 9

Tél : 04 91 17 28 08, Fax: 04 91 41 89 16

Email :davitaya@crmcn.univ-mrs.fr

http://www.crmcn.univ-mrs.fr/electro


PARC SCIENTIFIQUE ET TECHNOLOGIQUE

MARSEILLE LUMINY

PLAN DE MASSE

JUIN 2001
Grand-Hall
...
Accueil
Maison de l'Etudiant
Reprographie
Tabac - Journaux
Cafétéria
Distributeur Autom.de Billets
Zone d'affichage
Bâtiment B

Amphis 7 à 12
Salles 01B à 105 B
Salles d'Informatique
Bâtiment TPR1
....
Salles 104H à 121H
Salles T.P. de
BA - BV - Géologie
Physique - Chimie
Bât.CNRS
Salle 01C
(RDC)
Service Technique
Bâtiment A

Amphis 1 à 6
Salles 03A à 127A
Service des Sports
Bibliothèque
Universitaire
S.U.I.O.
Centre de Langues
Salle de cours BU3
Bureau de Poste
Entrée Faculté
Entrée du Crous
Restaurant Universitaire
Bât C
Bât. B
Bât. A
Cité Universitaire
Studios
Bâtiment TPR2

Service scolarité
Administration - Cabinet du Doyen
Coordination 1er Cycle
Service commun 2nd Cycle
Bureaux du CROUS
Assistante Sociale
Calanque de Sugiton
Halle des sports
Gymnase
COSEC
Terrain de Sport
Piste d'athlétisme
Bâtiment E
Bât. D
Bât. F
Cité Universitaire
Médecine Universitaire
5 CNRS
10 INSERM
13 CRMC2
14 IRPHE / IOA
16 INSERM / CIML
17 IRPHE / LP3
18 IRPHE / KIR
19 CIRM
21 Centre Formation CNRS
22 CCIMP
24 IRPHE / LABM
25 CPPM
27 ESIL
26 IUT-GTR
28.1 Faculté des Sciences
28.2 du Sport
28.3 " "

CONTENU (1)

- **Rappels de généralités**
  - Résistance et Loi d 'Ohm
    - Conduction d 'un métal
  - Lois de Kirchhoff
    - Loi des mailles
    - Loi des nœuds
  - Sources de tensions et de courant
    - Parfaites
    - Réelles
    - Résistance de source, de charge
    - Adaptation de résistance (d'impédance)
  - Principe de SUPERPOSITION
  - Théorème de THEVENIN
  - Théorème de NORTON
  - Les trois composants passifs fondamentaux
    - Résistance
    - Inductance (self)
    - Capacité
  - Un composant très utilisé :
    - le transformateur
  - Signaux périodiques
    - Régime sinusoïdal et réponse fréquencielle
      - Diagrammes de BODE
      - Un exemple: le circuit RLC ou circuit oscillant
    - Régime transitoire et permanent et réponse temporelle
    - Analyse de FOURIER

CONTENU (2)

- **<u>Le Dipole</u>**
  - Définition
  - Régime statique et courbe caractéristique
    - Notion de résistance différentielle
    - Dipoles à résistance différentielle négative
  - Régime dynamique
    - Exemple de la capacité et de la self
- **<u>Le Quadripole</u>**
  - Définition
  - Le quadripole en statique
    - Caractéristiques
    - Point de polarisation d 'un quadripole
  - Le quadripole en dynamique
    - Cas des signaux de faible amplitude et de basse fréquence
    - Notation matricielle
    - Association de quadripoles
      - Série
      - Parallèle
      - Série-parallèle
      - Parallèle-série
      - Cascade
    - Cas des signaux de haute fréquence
  - Le quadripole en régime sinusoïdal
    - Utilisation du quadripole
    - Superposition du signal à la polarisation
    - Extraction du signal traité

CONTENU (3)

- Grandeurs caractéristiques d 'un quadripole en fonction des paramètres hybrides
- Notion d 'impédance caractéristique (ou itérative)
- Bande passante

- Les Semiconducteurs
  - Rappels
    - De l 'atome à la molécule et au cristal
    - Notion de structure de bande
    - Différence entre un métal et un isolant
    - Statistique de FERMI-DIRAC
    - Qu 'appelle-t-on semiconducteur (SC)?
  - Conduction électrique dans les semiconducteurs
    - Notion de trou
    - La conduction dans un SC intrinsèque
  - Dopage des semiconducteurs
    - Le semiconducteur extrinsèque ?
    - Dopage de type n
    - Dopage de type p
    - Conductivité d 'un semiconducteur extrinsèque
  - Durée de vie des porteurs
  - Longueur de diffusion des porteurs
- La jonction PN
  - La jonction PN à l 'équilibre
  - La jonction PN polarisée
    - Polarisation directe
    - Polarisation indirecte
    - Tension de rupture

CONTENU (4)

    - Capacités de la jonction PN
  - Les approximations de la diode
  - Utilisation des diodes
    - Redressement
      - Mono-alternance
      - Bi-alternance
    - Filtrage
    - Autres applications
- <u>Le transistor bipolaire</u>
  - Définition
  - Le transistor bipolaire à l'équilibre
  - Le transistor bipolaire polarisé
    - Principe du fonctionnement
  - Les représentations du transistor
  - Les réseaux de caractéristiques du transistor bipolaire
  - Le transistor idéal !
  - Principe de l 'amplification par transistor
    - Quelques recommandations
  - Le transistor en dynamique - schéma équivalent
    - Signaux de faible amplitude et de faible fréquence
    - Comportement à haute fréquence - schéma de giacoletto
  - Les limites du transistor bipolaire
  - Le bilan de puissance - quelques grandeurs caractéristiques
  - Problèmes liés à la puissance (à la température)
    - Stabilisation du transistor

CONTENU (5)

- Les trois montages amplificateurs fondamentaux
  - Montage émetteur commun
  - Montage base commune
  - Montage collecteur commun
- **Les classes d'amplification**
  - Classe A
    - Petits signaux
    - Forts signaux
    - Un exemple de montage de puissance en classe A : le montage Darlington
  - Classe B (AB)
    - Le montage push-pull
    - Notion de miroir électronique
  - Classe C
    - Amplificateur accordé
  - Les bilans de puissance des différentes classes
- **Réaction, contre-réaction**
  - La contre-réaction (CR) comme moyen de stabilisation
    - Ce que l'on gagne
    - Ce que l'on perd
    - Ce qui est nécessaire
    - Les différents modes de CR
      - Série
      - Parallèle
      - Série-parallèle
      - Parallèle-série
- **Un montage utile: l 'amplificateur différentiel**
  - Montage de base et équations
  - Améliorations

CONTENU (6)

- **L’amplificateur opérationnel**
  - Qu’est-ce que c’est ?
  - L’amplificateur opérationnel idéal
  - L’amplificateur opérationnel réel
  - Les différents montages
    - Avec contre-réaction
    - Avec réaction positive
- **Les transistors à effet de champ (FET)**
  - Le FET à jonction
    - Canal n
    - Canal p
  - Fonctionnement du FET
    - Grille court-circuitée
    - Grille polarisée
    - Le point de polarisation d ’un FET à jonction
  - Le MOSFET (« Metal Oxide Semi-conductor FET- FET à grille isolée)
    - Les deux régimes de fonctionnement
      - La déplétion
      - L ’enrichissement
  - Le FET à grille isolée et à régime d ’enrichissement seul

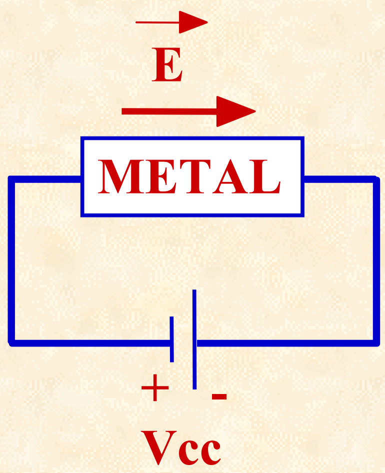
CONTENU (7)

- Polarisation des FET
  - FET à jonction
    - Polarisation automatique
    - Polarisation par source de courant
  - MOSFET
  - FET à grille isolée et à enrichi-ssement seul
- Amplification des FET
  - Montage source commune
  - Montage drain commun
  - Montage grille commune

- Diode Schockley
  - Structure du composant
  - Caractéristiques
  - Equivalent à transistor
- Thyristor
  - La suite logique de la diode Schockley

Rappels de généralités

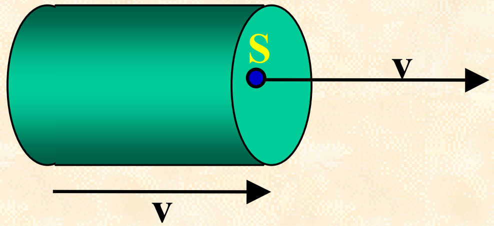
- **Résistance et Loi d 'Ohm**
  - La résistance est, avec la capacité et la self, l 'un des trois éléments passifs clefs de l 'électronique. La résistance est constituée d 'un matériau conducteur dont on fait varier la section et la longueur de telle manière à l 'adapter à la valeur désirée.



$$\boxed{\vec{F} = -e\vec{E}}$$

Cependant il y a des chocs avec les ions du réseau ce qui se traduit par un échauffement (effet Joule).
La vitesse des électrons, v, est alors donnée par: $\boxed{\vec{V} = \mu\vec{E}}$ **où µ est la mobilité .**

Résistance et Loi d 'Ohm (suite)



Soit un matériau possédant <u>n charges par cm³</u>.
Considérons un cylindre de longueur v et de base S

Le nombre de charges N qui traversent la surface S par unité de temps est donné par:

$$N = Svn = S\mu En$$

Le courant qui circule est donc égal à :

$$I = Ne = S\mu Ene$$

(où e est la charge de l'électron = 1.6 10^{-19}C

$$I = S\mu Ene = S\gamma E$$

où $\gamma = \mu en$ est la conductivité

Comme $E = \frac{Vcc}{l}$ **(l, longueur du cylindre de métal), il vient :** $\boxed{I = \gamma S \frac{V_{cc}}{l} = \frac{V_{cc}}{R}}$

en posant = $\frac{1}{R} = \frac{\gamma S}{l}$.

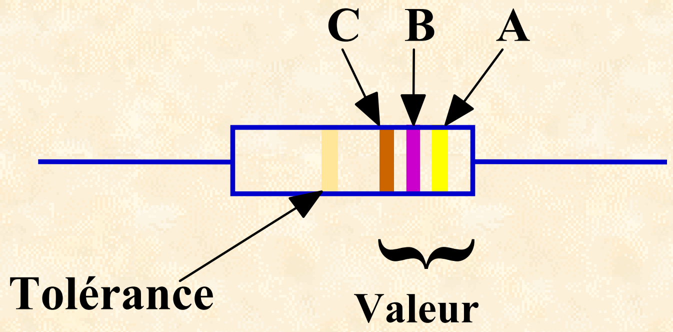
Loi d 'Ohm

La résistivité ρ est donnée par : $\rho = \frac{1}{\gamma}$ **et donc :** $R = \frac{\rho l}{S}$

Résistance et Loi d 'Ohm (suite)

- ## L 'élément <u>Résistance</u>

- **Se présente, à l 'exception de modèles de puissance, sous la forme d 'un cylindre pourvu de connexions à ses deux extrémités et sur lequel on peut voir généralement 4 (parfois 5) zones colorées comme sur la figure suivante**



Pour la tolérance :

Couleur ARGENT: 10%

Couleur OR: 5%

Chaque couleur est associée à un chiffre. La table suivante donne les correspondances couleur-chiffre

Noir	0
Marron	1
Rouge	2
Orange	3
Jaune	4

Vert	5
Bleu	6
Violet	7
Gris	8
Blanc	9

La lecture de la valeur se fait de la manière suivante: $\text{Valeur} = AB.10^{C}$

Ainsi dans l 'exemple ci dessus, la valeur est:

$$47.10^{1} = 470\Omega$$

Résistance et Loi d 'Ohm (suite)

- **L 'élément <u>Résistance (suite)</u>**

Toutes les valeurs n'existent pas. Les valeurs normalisées sont les suivantes:

1	**2,7**	**6,8**
1,2	**3,3**	**8,2**
1,5	**3,9**	**10**
1,8	**4,7**	
2,2	**5,6**	

Bien sûr il suffit de multiplier par la puissance de dix appropriée pour trouver l'ensemble des résistances normalisées existantes.

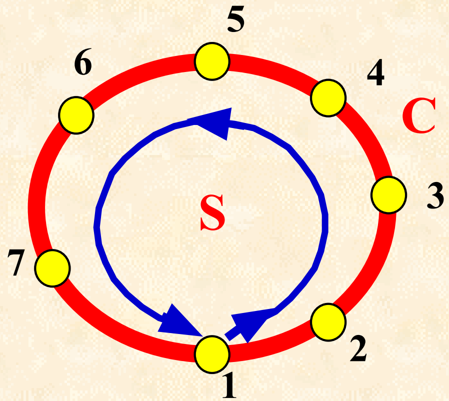
Lois de Kirchhoff

Loi des mailles $\sum_{\text{maille}} \text{tensions} = 0$ **(Tension = différence de potentiel [ddp])**

Justification physique

$$\oint_C \vec{E}dl = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}dS \rightarrow 0$$

$$\oint_C \vec{E}dl = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$$



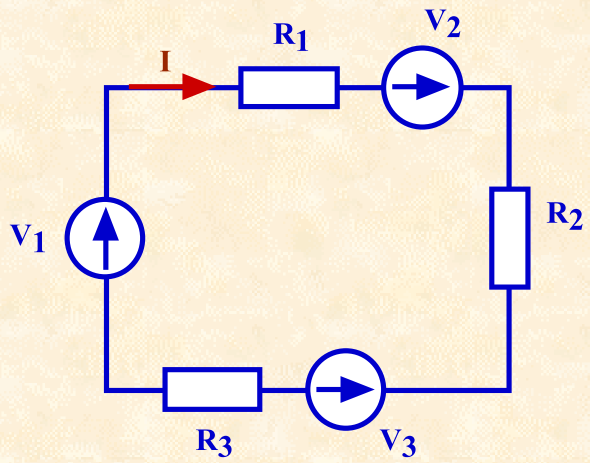
$$\oint_C \vec{E}dl = \int_1^2 \vec{E}dl + \int_2^3 \vec{E}dl + \ldots + \int_7^1 \vec{E}dl$$

$$= V_2 - V_1 + V_3 - V_2 + \ldots + V_1 - V_7 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{maille}} \text{tensions} = 0$$

Lois de Kirchhoff

- <u>**Loi des mailles (suite)**</u>
  - **Dans un circuit uniquement constitué de résistances et de générateurs de tension, la loi des mailles devient:**



$$\sum_{Circuit} \overline{ddp}_{générateurs} = \sum_{n=1}^{N} R_n \bar{I}$$

Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

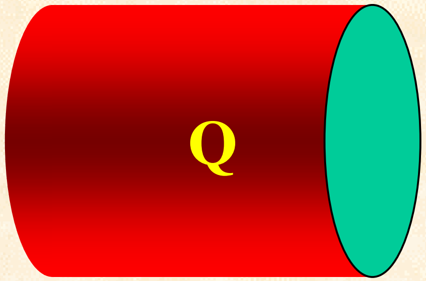
$$\sum_{S\text{fermée}} \text{courants} = 0$$

Volume enfermé par la surface S
Q : charge à l 'intérieur de ce volume

Conservation de la charge

(J densité de courant à travers S)

$$\frac{dQ}{dt} + \oiint_S JdS = 0$$



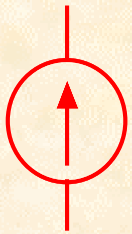
Si on considère de petites variations de courant

$$\frac{dQ}{dt} \approx 0 \Rightarrow \oiint_S JdS = 0$$

$$\sum_{S\text{fermée}} \text{courants} = 0$$

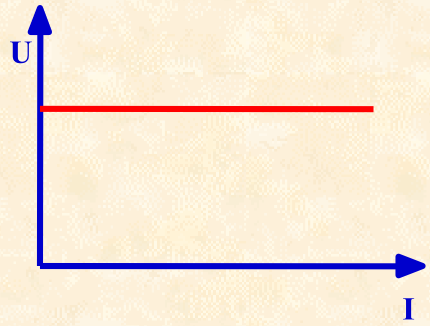
Générateurs de tension et de courant

- ## Représentation des générateurs



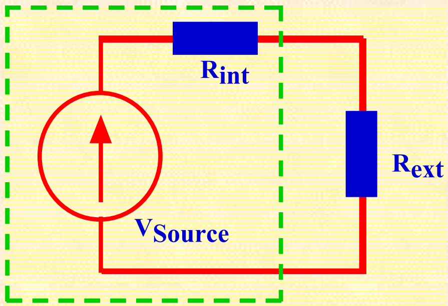
Générateur de tension

Caractéristique idéale ⇒



La tension est indépendante du courant débité donc la résistance interne est nulle

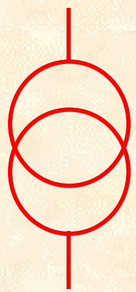
Démonstration



$$\boxed{V_{R_{ext}} = V_{Source}\frac{R_{ext}}{R_{int}+R_{ext}}}$$

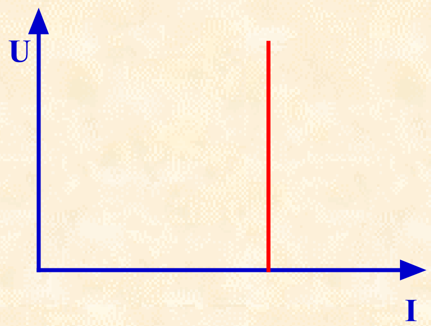
Si $R_{int} << R_{ext}$ alors $V_{R_{ext}} = V_{Source}$

$$\boxed{\text{Si on veut } V_{R_{ext}} = V_{Source}\ \forall\ I,\ \text{il faut } R_{int}=0}$$



Générateur de courant

Caractéristique idéale ⇒



Le courant est indépendant de la tension appliquée

Générateurs de tension et de courant

•En résumé:

–Un générateur de tension idéal a une résistance interne nulle

–Par un raisonnement identique on peut démontrer qu'un générateur de courant idéale doit avoir une impédance interne infinie.

–Une source de tension réelle aura une résistance interne faible mais non nulle

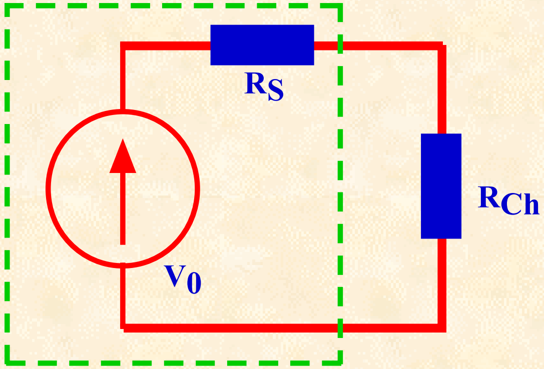
–Une source de courant réelle aura une résistance interne grande mais non infinie

C'est cette résistance interne que l'on désignera par la suite sous le terme de Résistance de source

De même, le récepteur branché sur la source est essentiellement caractérisé par sa résistance interne. On dit alors que l 'on charge le générateur (la source) par le récepteur. Par extension tout récepteur sera assimilé à sa résistance interne et sera désigné par le terme de Résistance de charge.

Générateurs de tension et de courant

- **Adaptation d 'impédance**



$$I = \frac{V_0}{R_S + R_{Ch}}$$

$$P = R_{Ch}.I^2 = \frac{R_{Ch}.V_0^2}{(R_S + R_{Ch})^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_{Ch}} = \frac{V_0^2.(R_S + R_{Ch})^2 - 2.R_{Ch}V_0^2.(R_S + R_{Ch})}{(R_S + R_{Ch})^4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_{Ch}} = \frac{V_0^2.(R_S + R_{Ch}).(R_S - R_{Ch})}{(R_S + R_{Ch})^4}$$

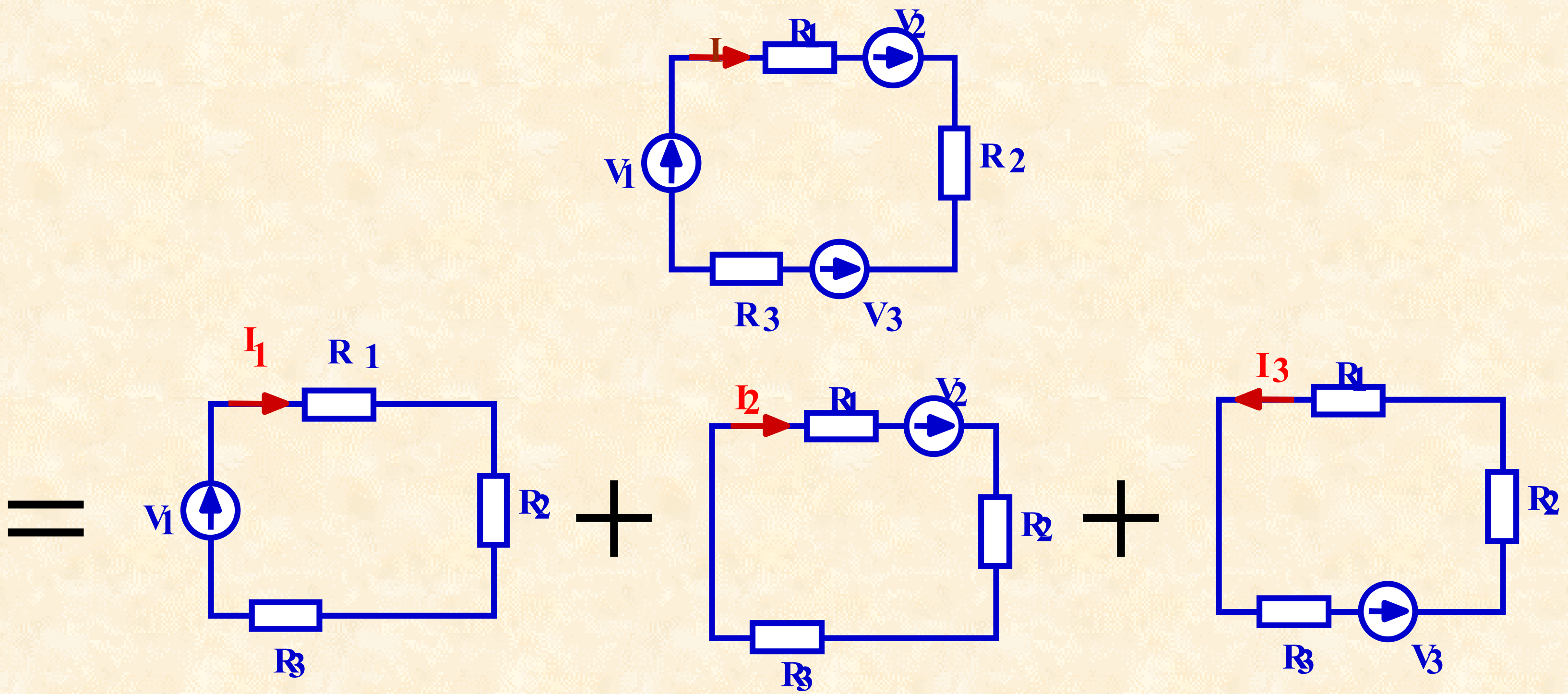
La puissance P est donc maximum si: $\boxed{\frac{\partial P}{\partial R_{Ch}} = 0}$

C 'est à dire si: $\boxed{R_{Ch} = R_S}$

Principe de superposition

Soit un circuit renfermant un certain nombre de générateurs (continus ou alternatifs de même fréquence ou de fréquences différentes).

Le courant qui traverse une branche quelconque du circuit est la somme des courants fournis par chacun des générateurs pris isolément, les autres générateurs n'étant présents dans le circuit que par leurs résistance (impédance) interne.



Théorème de Thévenin

Considérons un circuit comportant plusieurs générateurs à la même fréquence et divers éléments passifs (résistances, condensateurs, inductances).

Ce circuit complexe peut être remplacé par un circuit ne comportant qu'un seul générateur de tension et une seule impédance en série avec ce générateur.

Cette impédance est appelée impédance de Thévenin et le générateur de tension générateur de Thévenin (on parlera aussi de tension de Thévenin).

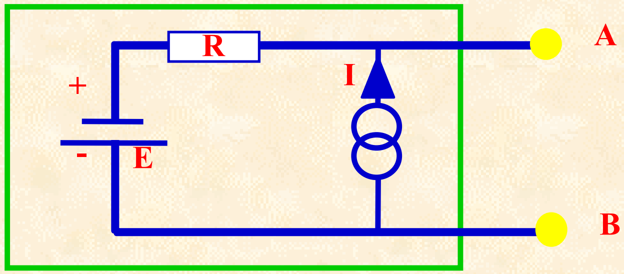
Le calcul de la tension de Thévenin fait souvent appel au théorème de superposition.

Le calcul de la résistance de Thévenin se fait en annulant les sources.

Si les générateurs sont idéaux:

- **Annuler un générateur de tension revient à le remplacer par un court circuit**
- **Annuler un générateur de courant revient à la remplacer par un circuit ouvert**

Théorème de Thévenin (suite)

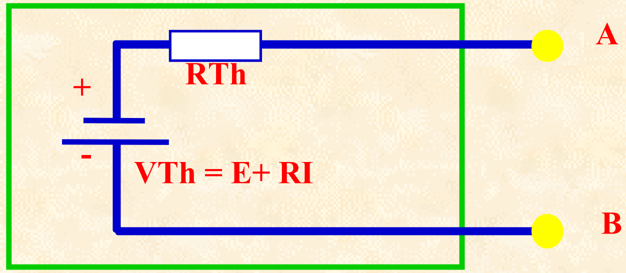


Calcul de la tension de Thévenin

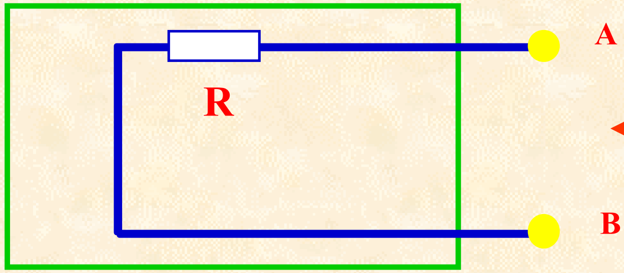
$V_R = RI$

$V_{Th} = E + RI$

Circuit équivalent de Thévenin:



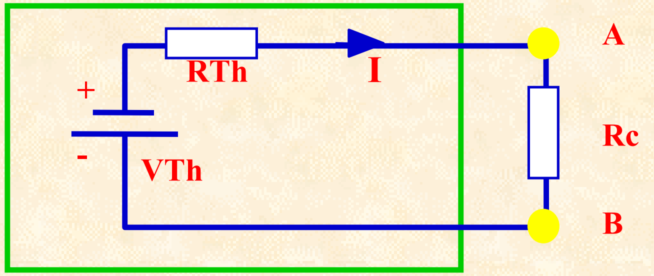
Pour avoir R_{Th} on annule les sources:



$$R_{Th} = R$$

Théorème de NORTON

- On considère le circuit de Thévenin débitant dans une résistance (impédance) R_C (Z_C).



Théorème: Le générateur de Thévenin (qui est un générateur de tension) peut être remplacé par un générateur de courant à condition de brancher l'impédance de Thévenin en parallèle sur la charge.

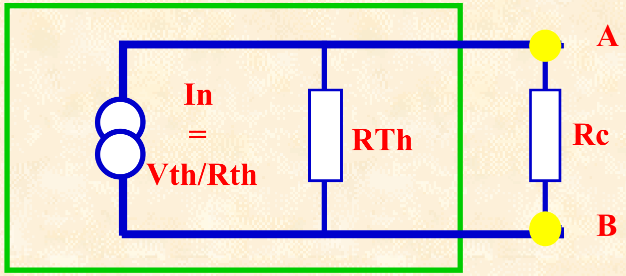
Démonstration: Calculons le courant qui circule dans (1) → $I = \dfrac{V_{Th}}{R_{Th} + R_C}$

Mettons en court circuit les points A et B

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

$$I = \frac{I_N . R_{TH}}{R_{Th} + R_C}$$

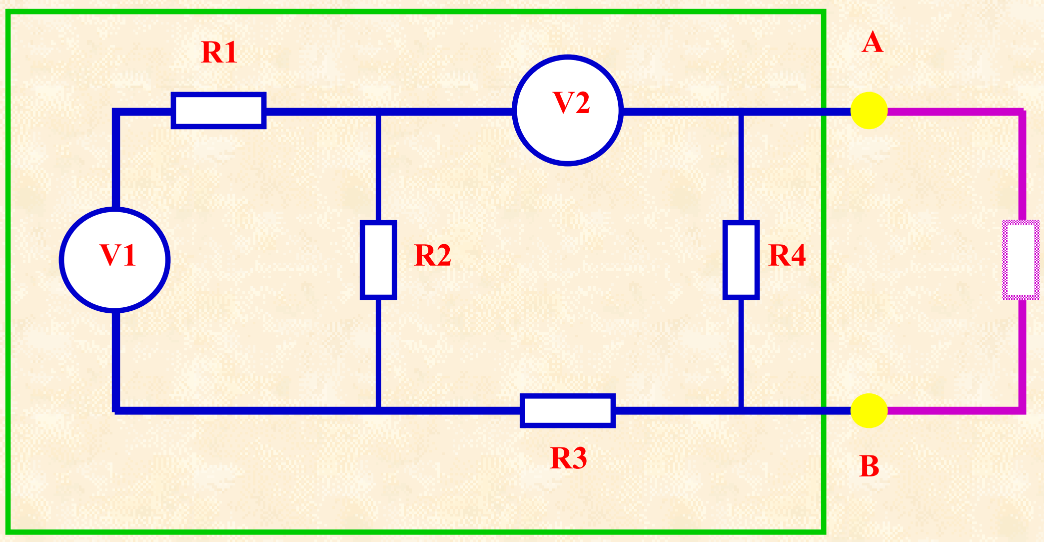
$$VAB = RC.I = \frac{I_N.R_{Th}.R_C}{(R_{Th}+R_C)}$$



R_{Th} et R_C sont donc bien en parallèle.

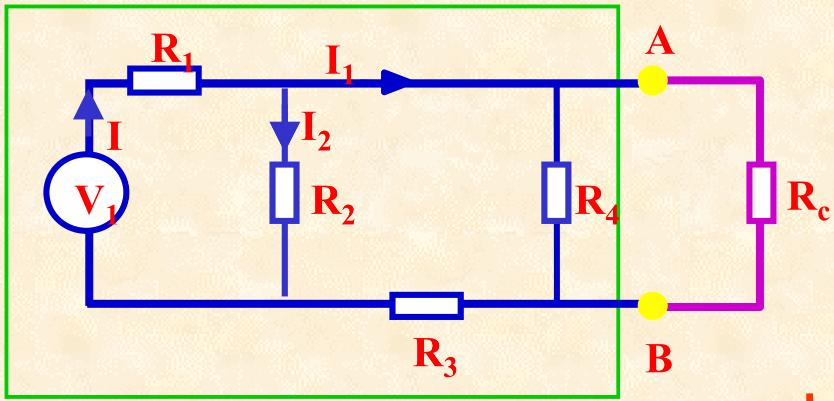
Exemple d'utilisation des théorèmes précédents

- **<u>Soit le circuit suivant</u>**



Exemple (suite)

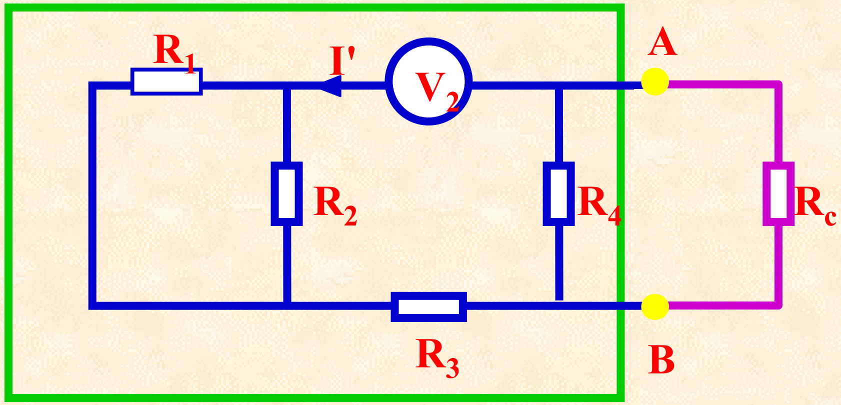
Le théorème de superposition permet la simplification suivante:



$$I' = \frac{V_2}{\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}+R_3+R_4}$$

$$I = \frac{V_1}{R_1 + \frac{R_2.(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}$$

+



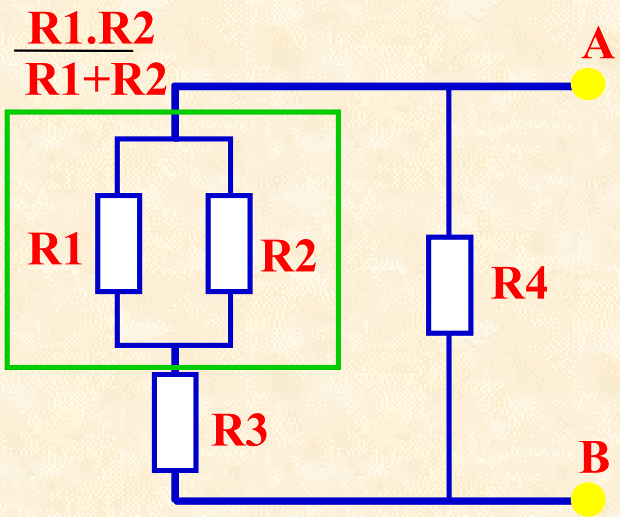
$I = I_1+I_2$ $(R_4+R_3).I_1 = R_2.I_2$

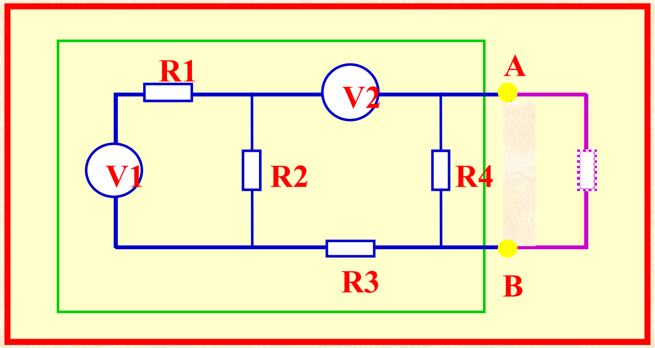
$$I_1 = \frac{R_2.I}{R_2+R_3+R_4}$$

Superposition ----> Tension de Thévenin : $V_{Th}=R_4(I_1+I')$

Exemple (suite)

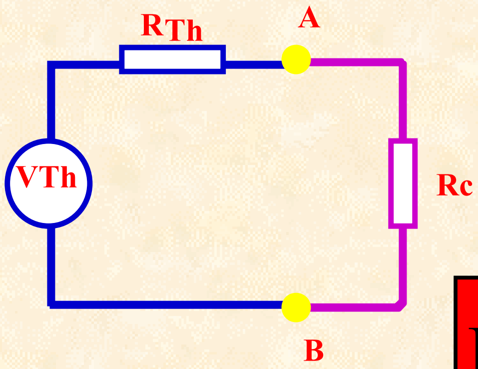
- **Résistance de Thévenin**

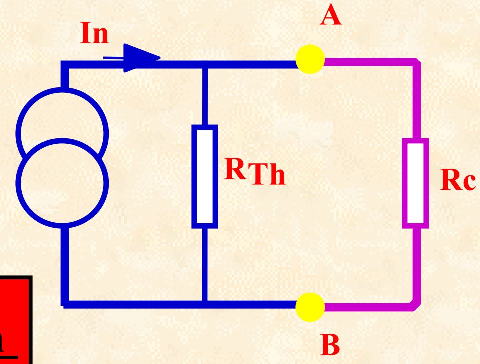




$$R_{Th}=\frac{R_4\left(\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}+R_3\right)}{R_4+\left(\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}+R_3\right)}$$

NORTON





$$I_N=\frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

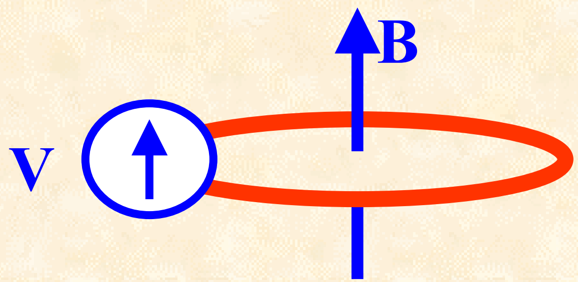
Les trois composants passifs fondamentaux

- **La résistance**
  - **Loi d'Ohm: $u(t)=R.i(t)$ (u(t) en Volt, R en Ohms - Ω -, i(t) en Ampères).**
  - **Puissance: $p(t)=u(t).i(t)=R.i^2(t)$**
  - **Variation de la résistance d'un conducteur avec la température (en K):**

$$R=R_0(1+\alpha(T-T_0))$$

    - **R_0 : Résistance à la température T_0**
    - **A : coefficient thermique (en K^{-1})**

- **La self**



Si V = v(t) variable dans le temps, B, le champ d'induction magnétique l'est aussi

⟹ **Self-induction**

Les trois composants passifs fondamentaux

- **La self (suite)**

Le flux d'induction magnétique est donné par:

$$\Phi(t)=\iint_S B(t)dS$$

Ici, S est la surface sous-tendue par le conducteur et dS un élément de cette surface

Le coefficient de self-induction, en HENRY, est donné par:

$$L(t)=\frac{\Phi(t)}{i(t)}$$

I(t) est le courant générant le champ d'induction magnétique, B(t) et par conséquent le flux d'induction magnétique Φ(t).

- **Caractéristique courant-tension d'une self, L**
  - **La caractéristique courant-tension d'une self (constante) est donnée par:**

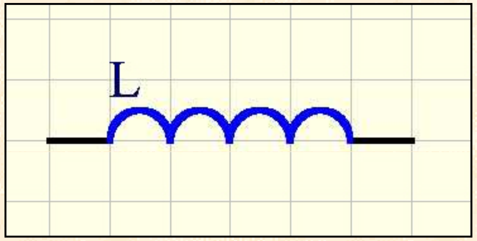
$$u(t)=L.\frac{di(t)}{dt}$$

Les trois composants passifs fondamentaux

- **La self (suite)**
  - **Energie accumulée**

    Elle vaut: $$E(t)=\frac{1}{2}L.i^2(t)$$

  - **Symbole de la self**



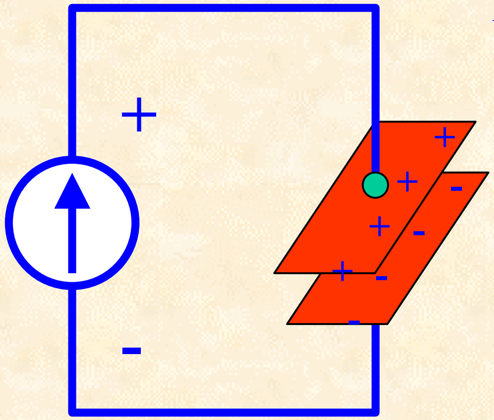
  - **Calcul d'une self bobinée (solénoïde)**

$$L=\frac{\mu N^2 S}{l}$$

l : longueur en mètres du solénoïde
S : section en mètres carrés
N : nombre de spires de la self bobinée
μ : permittivité du milieu en $VsA^{-1}m^{-1}$

Les trois composants passifs fondamentaux

- <u>La Capacité (condensateur)</u>



Egalité des charges positives et négatives

$$C=\frac{Q}{V}$$

Q : charge positive stockée exprimée en Coulomb

V : ddp aux bornes du système

La capacité C est exprimée en Farad (F)

•<u>Caractéristique courant-tension de la capacité</u>

$$i(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{dCV(t)}{dt}=C\frac{dV(t)}{dt}$$

soit :

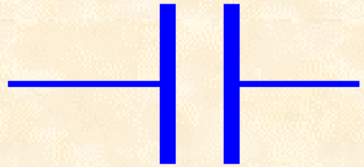
$$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^T i(t)dt$$

Les trois composants passifs fondamentaux

- **La capacité (suite)**
  - **Energie accumulée**

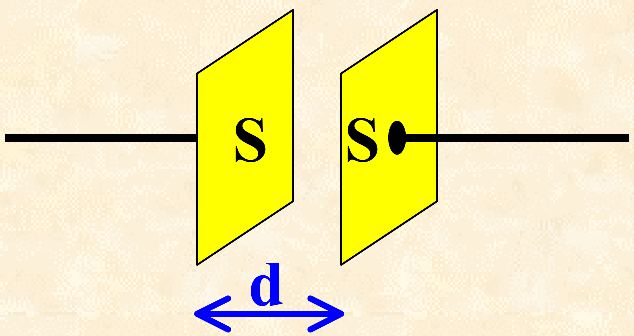
Elle vaut $E(t)=\frac{1}{2}.C.v^2(t)$

  - **Symbole de la capacité**



  - **Calcul d'un condensateur plan**

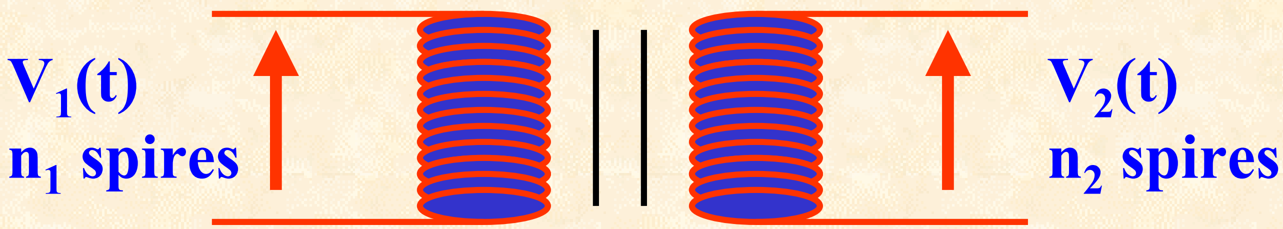
$$C=\varepsilon.\frac{S}{d}$$



S surface des plaques en m2
d distance entre plaque en m
ε constante diélectrique en $AsV^{-1}m^{-1}$

Le transformateur

- **Symbole**

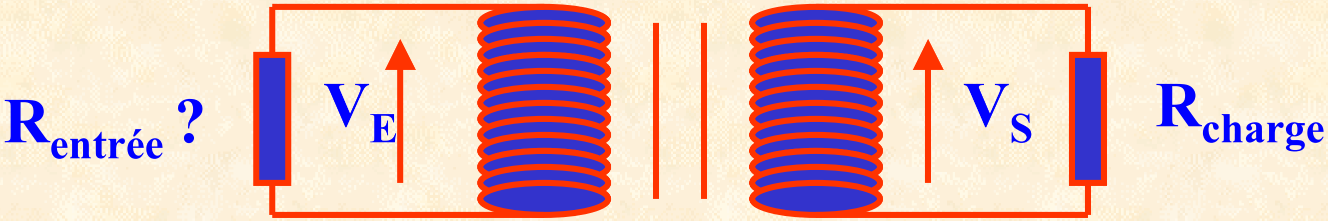


- **Relation entre entrée et sortie**

$$\boxed{V_2(t) = V_1(t).\frac{n_2}{n_1}}$$

Le transformateur

- **Puissances et adaptation d'impédance**



Puissance en sortie

$$P_{Sortie} = \frac{V_S^2}{R_{Charge}} = \frac{V_E^2}{R_{Charge}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}$$

Puissance en entrée

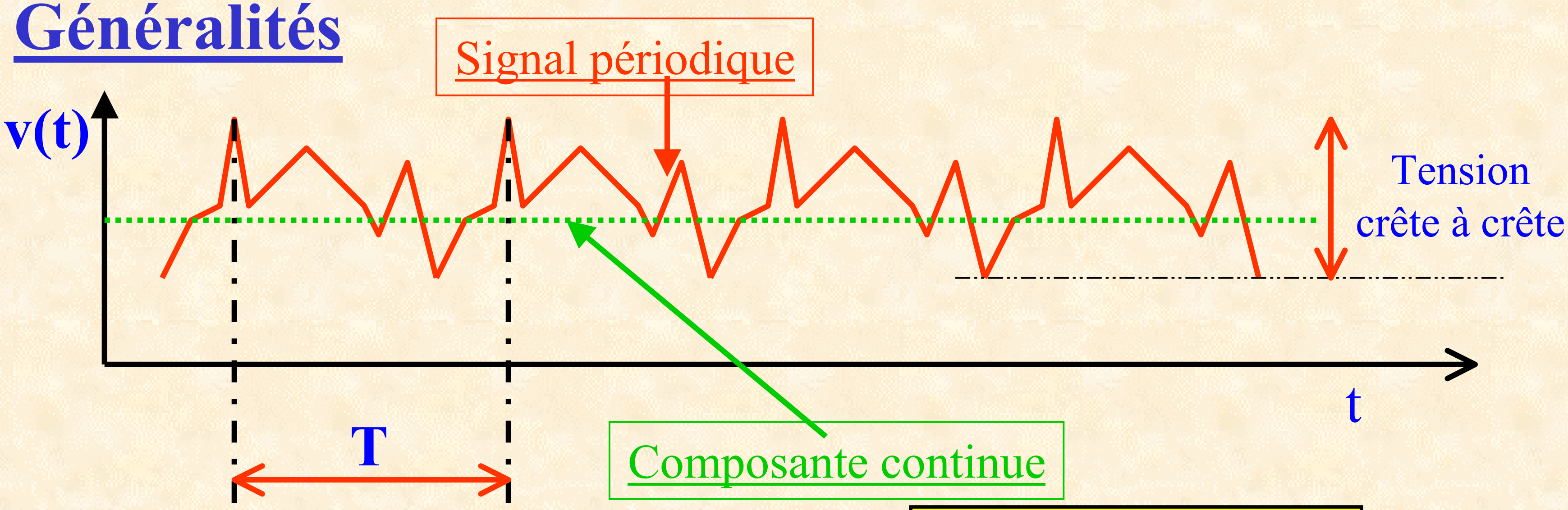
$$P_{Entrée} = \frac{V_E^2}{R_{entrée}}$$

$$P_{Entrée} = P_{Sortie}$$

$$R_{entrée} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 . R_{sortie}$$

Signaux périodiques

- **Généralités**



•**Fréquence** : $f = \dfrac{1}{T}$

Valeur moyenne : $V_{moyen} = \dfrac{1}{T}\int_T v(t)\,dt$

C'est la composante continue

Tension efficace : $V_{efficace} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\cdot\int_T v^2(t)\,dt}$

Signal sinusoïdal

- **Dans le cas d 'un signal sinusoïdal la tension peut s'exprimer de manière générale par :**

V_0 : amplitude du signal sinusoïdal $\boxed{v(t)=v_0.\sin(\omega t+\phi)}$

Fréquence : $\boxed{f=\frac{\omega}{2\pi}}$

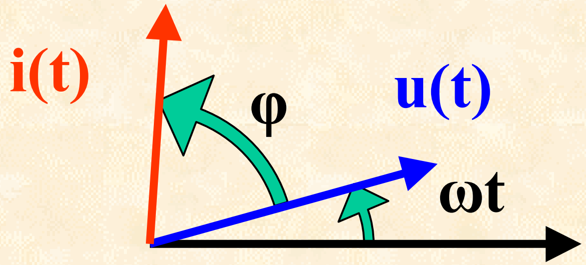
Tension crête à crête : $\boxed{v_{càc}=2.v_0}$

Valeur moyenne : $\boxed{\overline{v_{moy}}=0}$

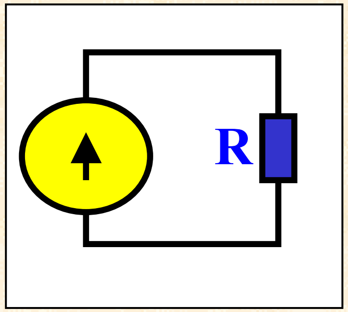
Valeur efficace : $\boxed{V_{efficace}=\frac{v_0}{\sqrt{2}}}$

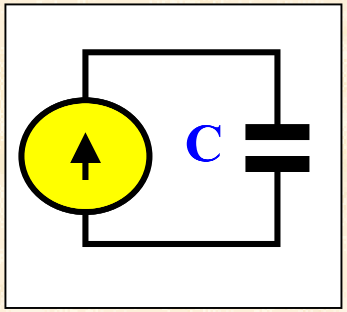
Signal sinusoïdal

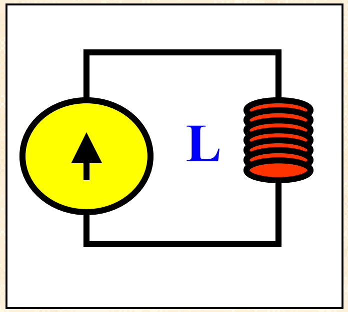
- **Représentations**
  - **Représentation de Fresnel**

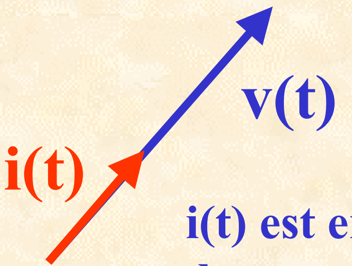


  - **Si $v(t)=v_0\sin(\omega t)$ alors de manière générale $i(t)=i_0.\sin(\omega t+\varphi)$**

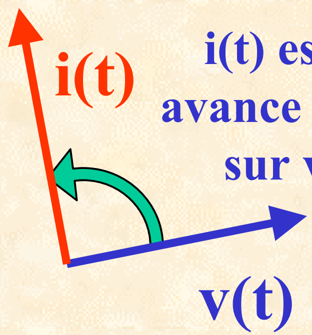




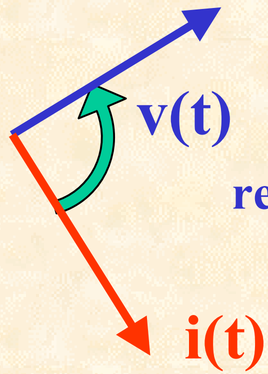




i(t) est en phase avec v(t)



i(t) est en avance de π/2 sur v(t)



i(t) est en retard de π/2 sur v(t)

Signal sinusoïdal

- **Notation complexe**

$$v(t)=v_0.\cos(\omega t+\varphi) \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} v(t) = v_0 e^{j(\omega t+\varphi)} \\ v(t) = v_{complexe} e^{j\omega t} \end{array} \right.$$

- La loi d'Ohm peut se généraliser sous la forme : $v(t) = Z.i(t)$

où Z est appelée l'impédance complexe

- Si $i(t) = i_0 e^{j\omega t}$ on peut calculer l'impédance complexe des trois éléments fondamentaux que sont la résistance, la self et la capacité, soit :

Résistance

$$v(t)=R.i(t)$$

Self

$$v(t)=L.\frac{di(t)}{dt}=j\omega L.i_0 e^{j\omega t}$$

$$v(t)=jL\omega.i(t)$$

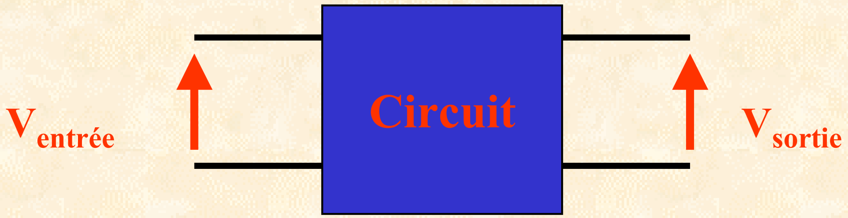
Capacité

$$v(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt=\frac{1}{jC\omega}i_0 e^{j\omega t}$$

$$v(t)=\frac{1}{jC\omega}.i(t)$$

Réponse fréquentielle

•**Considérons un circuit composé de résistances, selfs et capacité** (nous traiterons plus loin le cas général des quadripoles).



Ce circuit est attaqué par un signal sinusoïdal d'entrée, $v_{entrée}(t) = v_{in}\sin(\omega t)$. On obtient alors en sortie un signal $v_{sortie}(t) = v_{out}\sin(\omega t+\varphi)$.

On peut donc étudier la réponse du circuit, c'est à dire étudier la transformation, par le circuit, du signal d'entrée

- **Soit en amplitude**
- **Soit en phase (diagramme de BODE)**

Réponse fréquentielle

•**On définit ainsi :**

– **Gain du système :**

$$G = \frac{Signal_{sortie}}{Signal_{entrée}}$$

– **Les signaux d'entrée et de sortie peuvent être des tensions, des courants ou des puissances**

- **Dans ce dernier cas on utilise généralement le décibel (dB) dont la définition est:**

$$G = 10.Log\left(\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}\right)$$

Gain en puissance

•**Comme :** $P_{sortie} = \frac{V^2_{sortie}}{R_{sortie}}$ **et que** $P_{entrée} = \frac{V^2_{entrée}}{R_{entrée}}$

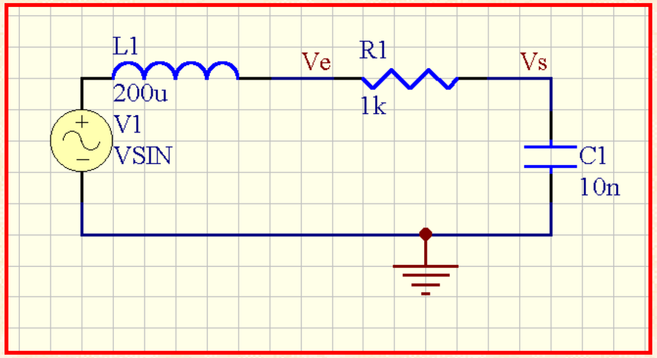
Alors si Rsortie = Rentrée on peut définir un équivalent pour les tensions et le gain devient alors:

$$G(dB) = 20.Log\left(\frac{V_{sortie}}{V_{entrée}}\right)$$

Réponse fréquentielle (suite)

- <u>**Diagrammes de Bode**</u>
  - **Ce sont les diagrammes qui montrent la variation du gain en dB et du déphasage en fonction du Log de la pulsation**

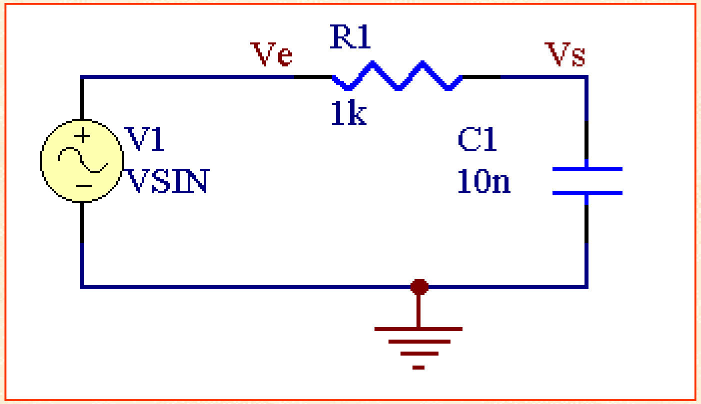
Exemple: circuit RLC



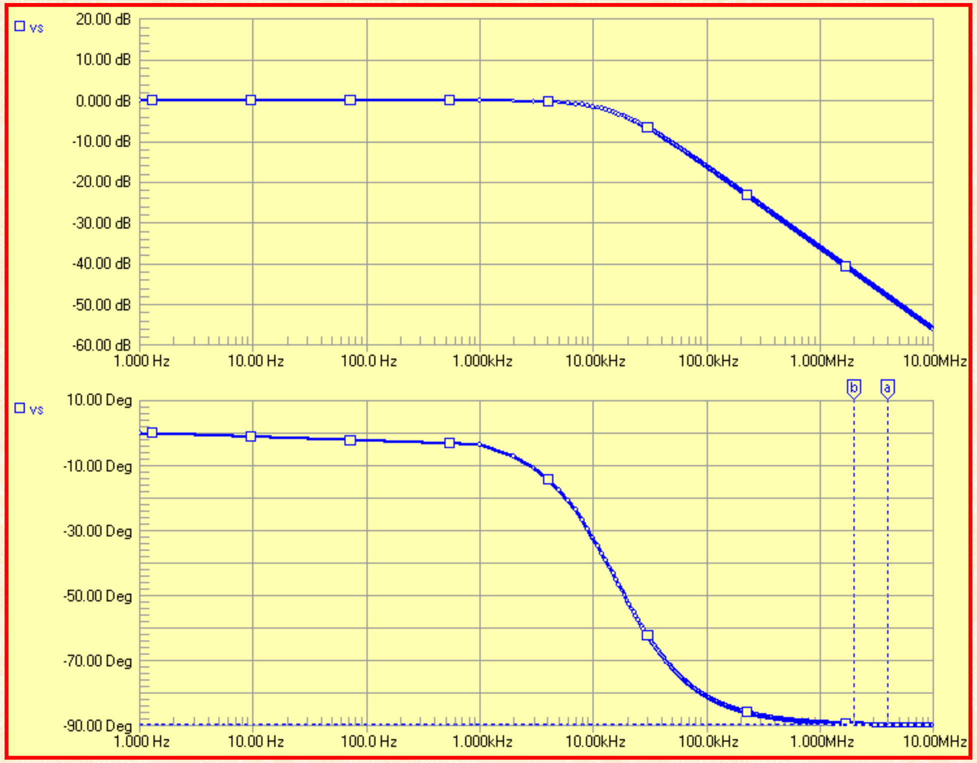
Réponse fréquentielle (suite)

$\tau = R.C$

- **Le circuit RC**
  - **Passe-bas**



$$V_S = \frac{Z_C}{R+Z_C} V_e = \frac{1}{RjC\omega+1} V_e = \frac{1}{j\omega\tau+1} V_e$$



$$G = \frac{1}{j\omega\tau+1}$$

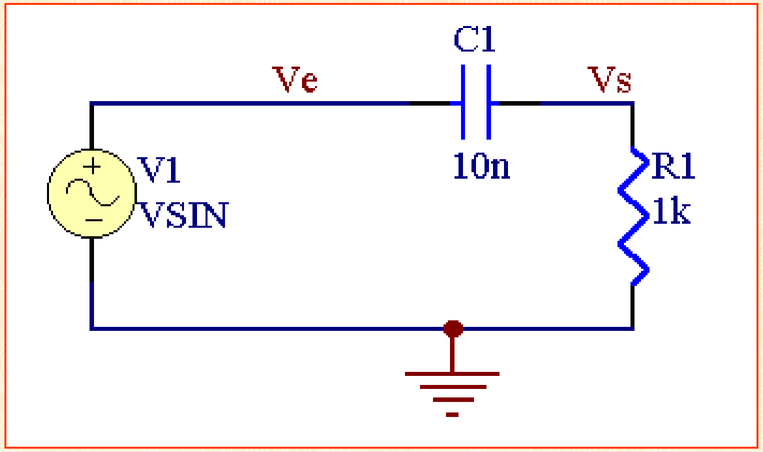
Amplitude : $$|G| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}$$

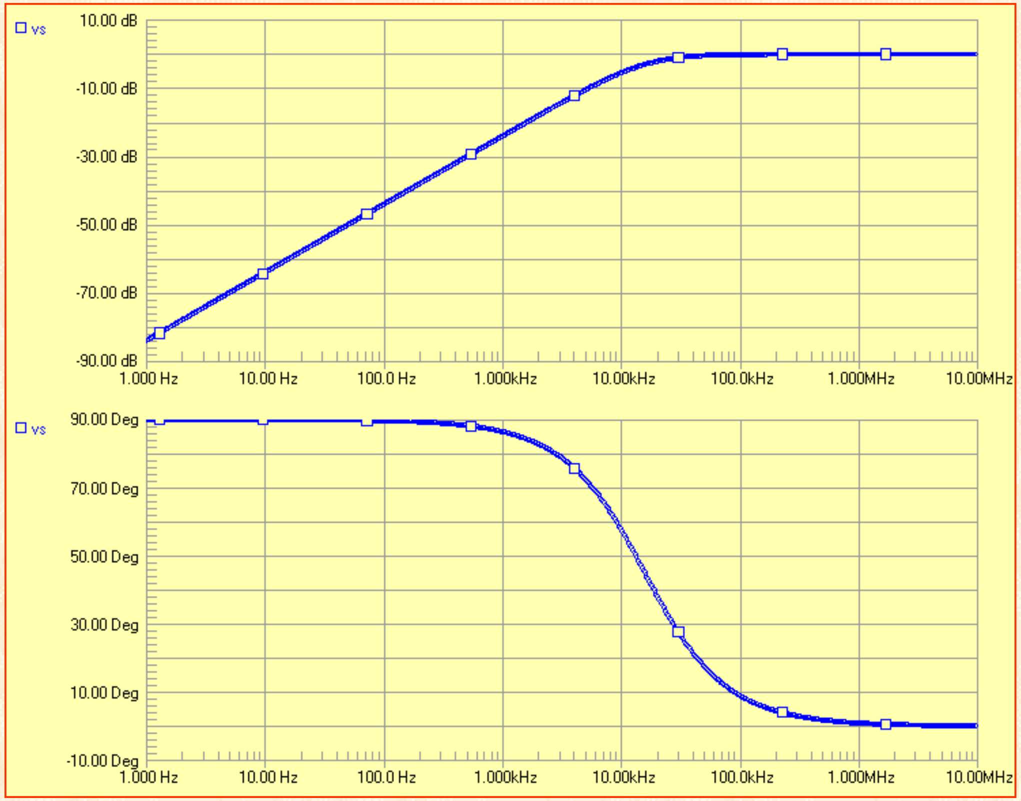
Déphasage : $$tg\phi = \frac{Im(G)}{Re(G)} = -\omega\tau \longrightarrow \phi = -arctg(\omega\tau)$$

Réponse fréquentielle (suite)

- **Le circuit RC (suite)**
  - **Passe-haut**

$$V_S=\frac{R}{R+Z_C}V_e=\frac{j\omega RC}{j\omega RC+1}V_e=\frac{j\omega\tau}{j\omega\tau+1}V_e$$





$$G=\frac{j\omega\tau}{j\omega\tau+1}$$

Amplitude : $$|G|=\frac{\omega\tau}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}$$

Déphasage : $$\mathrm{tg}\phi=\frac{\mathrm{Im}(G)}{\mathrm{Re}(G)}=\frac{1}{\omega\tau}$$

$$\phi=\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(\omega\tau)$$

Réponse fréquentielle (suite)

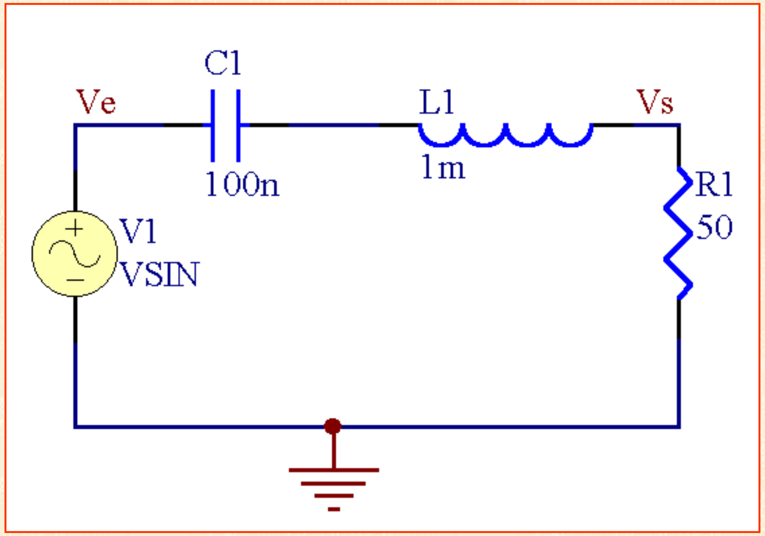
•**Le circuit RLC série:**

On applique à ce dipole une tension e = eo cos ωt.

$\omega = 0 \dashrightarrow I = 0$

L'impédance du dipole est donnée par :

$$Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$



Elle est minimum si :

$$\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right) = 0 \Longrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

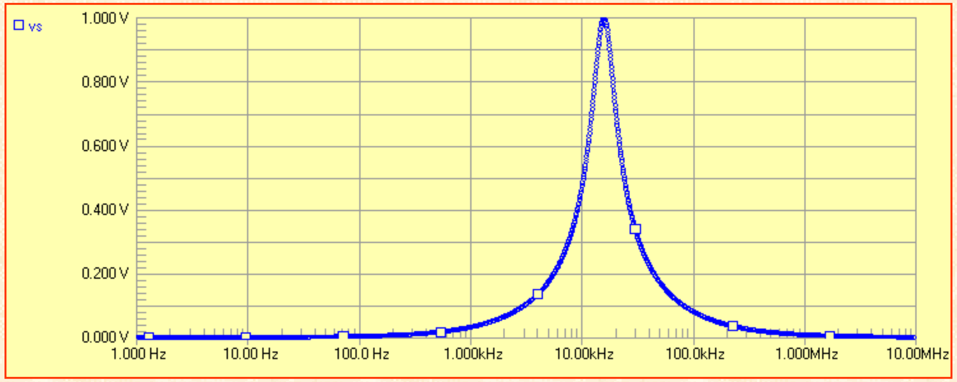
Si $\omega < \omega_0$	**la partie capacitive l'emporte**
Si $\omega > \omega_0$	**la partie inductive l'emporte**
Si $\omega = \omega_0$	**le circuit se comporte comme une simple résistance R**

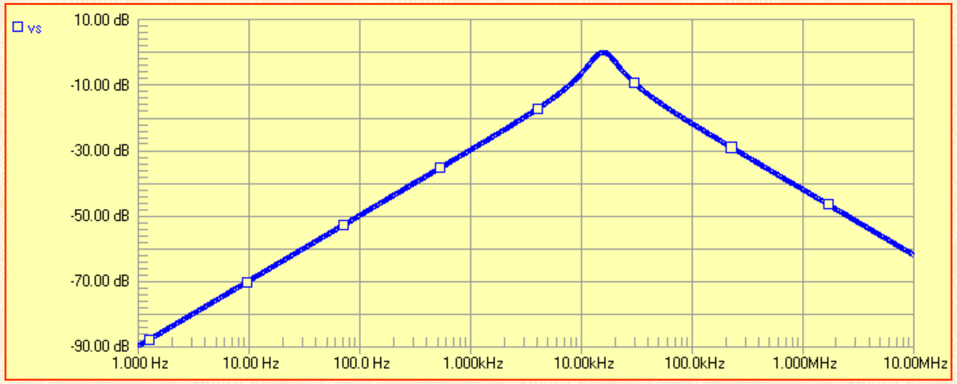
Réponse fréquentielle (suite)

• **Le circuit RLC série:**

Le module du courant, est donné par

$$|i| = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$





il est donc maximum quand $\omega = \omega_0$

C'est le phénomène de résonance.

ω_0 est appelée pulsation de résonance.

A la résonance = $|i| = \frac{e_0}{R}$

Un filtre est caractérisé par la valeur de la fréquence à laquelle il transmet "un maximum", ω_0, mais aussi par sa largeur (bande passante). Par définition on choisit de mesurer la largeur lorsque l'amplitude est égale à 1/√2 fois l'intensité du maximum (Gain = -3dB).

Réponse fréquentielle (suite)

On a donc : $$\frac{e_0}{R\sqrt{2}}=\frac{e_0}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$$

soit : $$R^2=(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2$$ $$L\omega-\frac{1}{C\omega}=\pm R$$

$$LC\omega^2-RC\omega-1=0$$
$$LC\omega^2+RC\omega-1=0$$

dont on ne considère que les racines positives :

$$\omega_1=\frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$$ $$\omega_2=\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2LC}$$

on a aussi : $$\omega_1-\omega_2=\frac{R}{L}$$ et $$\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0}=\frac{R}{L\omega_0}$$

On pose généralement $$Q=\frac{L\omega_0}{R}$$ et Q est appelé coéfficient de surtension.

Réponse fréquentielle (suite)

•Circuit RLC (suite)

Afin de comprendre le terme Q analysons quelle est la tension aux bornes du condensateur. On a $v=Z_C i=\frac{i}{jC\omega}$ **et donc :** $|v|=\frac{e_0}{C\omega\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$

La tension aux bornes de la capacité sera maximum quand $C\omega\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}$ **sera minimum, donc que :** $\frac{d}{d\omega}(C\omega.\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}$

On trouve que cette condition est réalisée si : $LC\omega^2=1-\frac{R^2C}{2L}$

Expression qui devient ……………………

Réponse fréquentielle (suite)

•**Circuit RLC (suite)**

expression qui devient, si on remplace $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ par ω_0 et $\frac{L\omega_0}{R}$ par Q

$$LC\omega_{max}^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

si Q >>1 alors : $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$

Dans ce cas on a : $|v| = \frac{e_0}{RC\omega_0} = \frac{e_0 L\omega_0}{R} = Qe_0$

A la résonance la tension aux bornes de la capacité est très supérieure à la tension appliquée au circuit.

$$v_{self} = Z_{self}.i = jL\omega \frac{e}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

Si $\omega = \omega_0$ alors : $v_{self} = \frac{jL\omega_0 e}{R}$

et $|v_{self}| = \frac{L\omega_0 e_0}{R} = Qe_0$

Réponse temporelle

On peut distinguer différent régimes de fonctionnement d'un circuit.

Il y a :

- **Le régime permanent qui correspond au fonctionnement du circuit long-temps après que les signaux ont été appliqués à ce même circuit. Ce que l'on a étudié avant correspond justement à ce régime permanent.**

- **Le régime transitoire qui correspond à ce qui se passe autour du temps t_0 c'est à dire à l'instant où les signaux sont appliqués au circuit et ce jusqu'à ce que l'on ait atteint le régime permanent. Etudier ce régime transitoire revient à résoudre mathématiquement des équations ou des systèmes d'équations différentielles d'ordre 1 ou supérieur.**

Cette résolution est grandement facilitée par l'utilisation du calcul opérationnel dont la <u>Transformée de Laplace</u> est un élément essentiel

TRANSFORMATION DE LAPLACE

(Régime transitoire)

A une fonction f(t) telle que :

$$\begin{cases} f(t)=0 & \text{si} \quad t\leq 0 \\ f(t)\neq 0 & \text{si} \quad t>0 \end{cases}$$

on fait correspondre une fonction F(p) où p est une variable complexe. Cette fonction F(p) est appelée la transformée de Laplace de la fonction f(t) et est notée :

$$F(p)=Lf(t) \quad \text{ou encore} \quad f(t)]F(p)$$

Cette fonction F(p) est définie comme :

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Propriétés

1. <u>Si</u> $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

   alors $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$

2. La transformée de Laplace F'(p) de <u>f'(t)</u> (<u>dérivée de f(t)</u>) est égale à:

$$F'(p) = pF(p) - f(0)$$

<u>Si</u> $f(0) = 0$ alors $F'(p) = pF(p)$

De même $F''(p) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$

Si $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ alors $F''(p) = p^2F(p)$

Plus généralement, si f(t) et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n s'annulent pour t = 0 alors :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad] \quad p^n F(p)}$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Propriétés (suite)

Démonstration de F'(p) = pF(p)-f(0)

Soit la fonction f'(t). Sa transformée de Laplace est donc par définition:

$$F'(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt$$

En utilisant la méthode d'intégration par parties on obtient:

$$\int_0^\infty e^{-pt}.f'(t)dt=\left[e^{-pt}.f(t)\right]_0^\infty-\int_0^\infty -pe^{-pt}.f(t)dt=-f(0)+p\int_0^\infty e^{-pt}.f(t)dt$$

f'(t)] p.F(p)

C.Q.F.D

F(p)

Par définition transformée de Laplace de f(t)

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Propriétés (suite)

3. Considérons l'intégrale $\int_0^t f(s)ds$ $\left(\int_0^t f(s)ds = 0 \quad \text{pour} \quad t=0\right)$

Alors $\int_0^t f(s)ds \quad] \quad \frac{F(p)}{p}$

Et plus généralement :

$$\int_a^t f(s)ds \quad] \quad \frac{F(p)}{p} - \int_0^a f(s)ds$$

Démonstration

$f(t) \quad] \quad F(p)$

$\int_0^t f(s)ds \quad] \quad \varphi(p)$

$f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(s)ds \quad] \quad p\varphi(p)$

Et donc : $$p\varphi(p) = F(p)$$

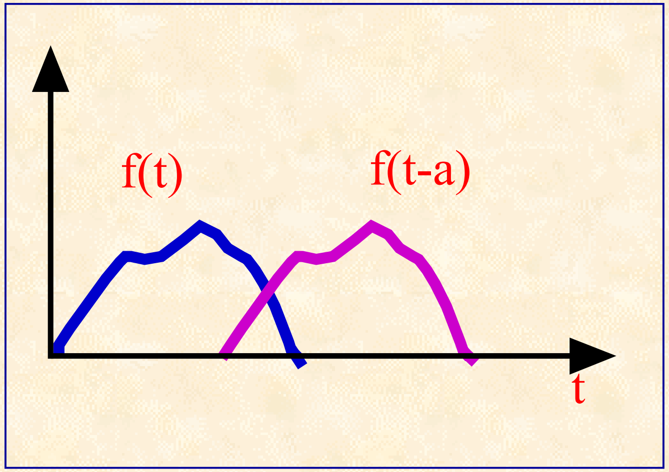
TRANSFORMATION DE LAPLACE

Propriétés (suite)

- **Théorème du retard**

Considérons une fonction f(t) telle que :

$$f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t < 0$$



Alors : $$Lf(t-a) = e^{-ap} Lf(t)$$

Démonstration :

Par définition : $Lf(t-a) = \int_0^\infty f(t-a)e^{-pt}dt$ **Posons :** $z = t-a$ avec $a>0$

Ce qui donne :

$$\int_{-a}^{\infty} f(z)e^{-p(a+z)}dz = \boxed{\int_{-a}^{0} f(z)e^{-p(a+z)}dz} + \int_0^\infty f(z)e^{-p(a+z)}dz$$

= 0 car f(z)=0 pour zΩ0

$$= e^{-ap}\int_0^\infty f(z)e^{-pz}dz = e^{-ap}Lf(t)$$

Le théorème du retard est très utile pour trouver les transformées de Laplace des fonctions périodiques

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Original f(t)	Transformée F(p)		Original f(t)	Transformée F(p)	
1	$\frac{1}{p}$		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	ω réel
t	$\frac{1}{p^2}$		$e^{i\omega t}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	ω réel
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	n entier	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	ω réel
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$		$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	ω réel
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	a réel ou complexe	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$	
te-at	$\frac{1}{(p+a)^2}$	a réel ou complexe	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$	
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	a réel ou complexe	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$	
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	ω réel			

TRANSFORMATION DE LAPLACE

EXEMPLES

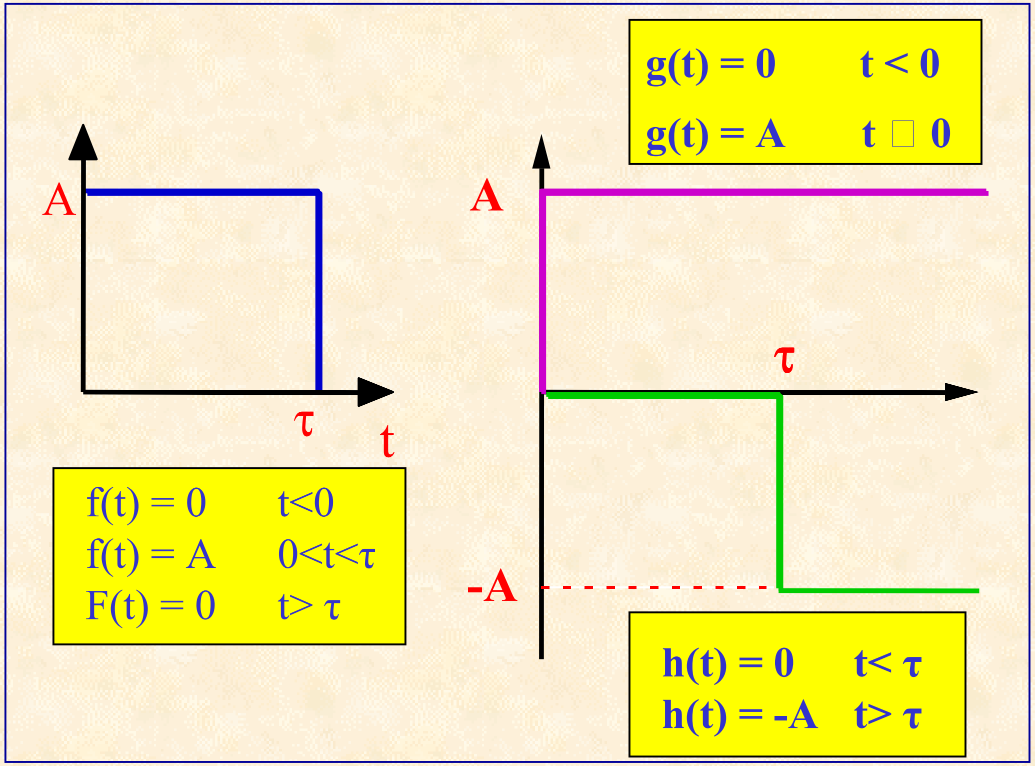
1. Transformée de Laplace d'un échelon

$h(t) = -\, g(t - \tau)$

La fonction échelon f(t) est égale à :
$f(t) = g(t) - g(t - \tau)$

Donc :

$$Lf(t) = F(p) = L\{g(t) - g(t - \tau)\}$$
$$= G(p) - e^{-\tau p} G(p)$$



En se reportant à la table des transformées de Laplace, il vient:

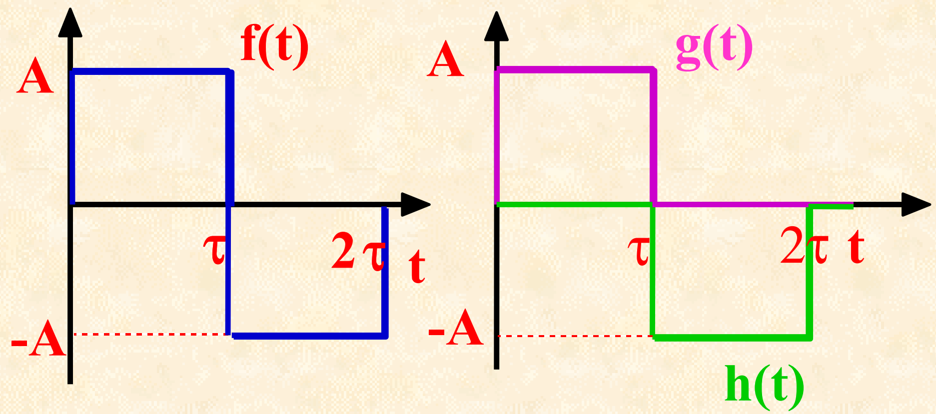
$$Lf(t) = F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p} e^{-\tau p} = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-\tau p}\right)$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE

2. Transformée de Laplace d'un signal rectangulaire

$h(t) = g(t-\tau)$

$F(t) = g(t) - g(t-\tau)$



$$F(p) = G(p) - e^{-\tau p} G(p) = \frac{A}{p}(1 - e^{-\tau p})(1 - e^{-\tau p}) = \frac{A}{p}(1 - e^{-\tau p})^2$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE

2. Transformée de Laplace d'un signal rectangulaire périodique de période T=2τ

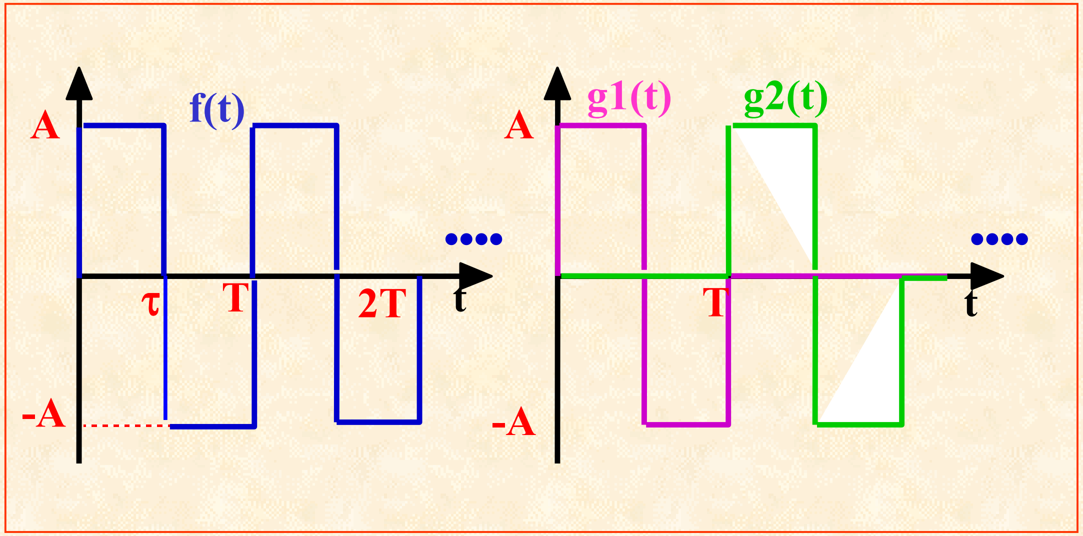
$g_2(t) = g_1(t-T)$

$g_3(t) = g_2(t-T) = g_1(t-2T)$

.....

.....

.....



Et soit G(p) la transformée de Laplace de la fonction $g_1(t)$: $G(p) = Lg_1(t)$

On a donc : $F(p) = G(p)[1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \ldots\ldots]$ ⟸ **Progression géométrique**

$$F(p)=G(p)\frac{1}{1-e^{-pT}}$$

avec

$$G(p)=\frac{A}{p}(1-e^{-\frac{Tp}{2}})^2$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Application de la transformée de Laplace au circuit oscillant

Soit un circuit RLC série. A l'instant t = 0 appliquons au circuit une tension continue V. On a i(0) = 0. L'évolution du courant répond alors à l'équation :

$$V = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

Appliquons la transformation de Laplace à cette équation. On obtient alors:

$$\frac{V}{p} = Ri(p) + Lpi(p) + \frac{1}{Cp}i(p) \Longrightarrow i(p) = \frac{V}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$$

Cherchons les racines p_1 et p_2 du dénominateur

$$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C} \Longrightarrow$$

$\Delta>0$	2 racines réelles négatives
$\Delta<0$	2 racines imaginaires conjuguées
$\Delta=0$	1 racine double réelle négative
$R=0$	2 racines imaginaires pures

TRANSFORMATION DE LAPLACE

Application de la transformée de Laplace au circuit oscillant

Dans le cas général (2 racines p1 et p2) on pourra mettre i(p) sous la forme:

$$i(p)=\frac{V}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{A}{(p-p_1)}+\frac{B}{(p-p_2)}=i_1(p)+i_2(p)$$

où

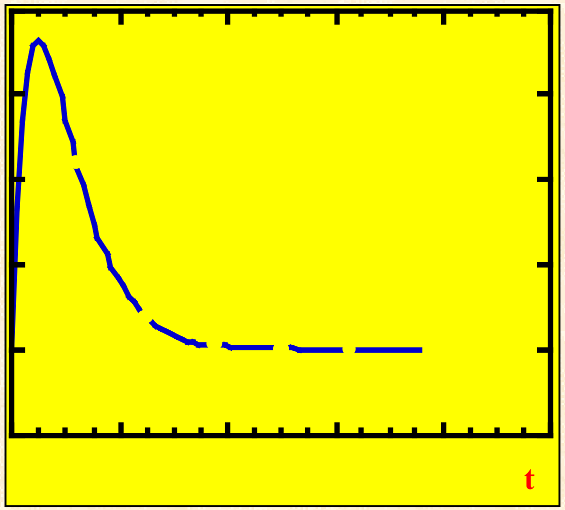
$$A=\frac{V}{p1-p2}$$

$$B=-\frac{V}{p1-p2}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse L^{-1} on obtient :

$$L^{-1}\left[i_1(p)+i_2(p)\right]=i_1(t)+i_2(t)=i(t)=Ae^{p_1t}+Be^{p_2t}$$

Si $\Delta > 0$ p_1 et p_2 réels négatifs **Amortissement**



TRANSFORMATION DE LAPLACE

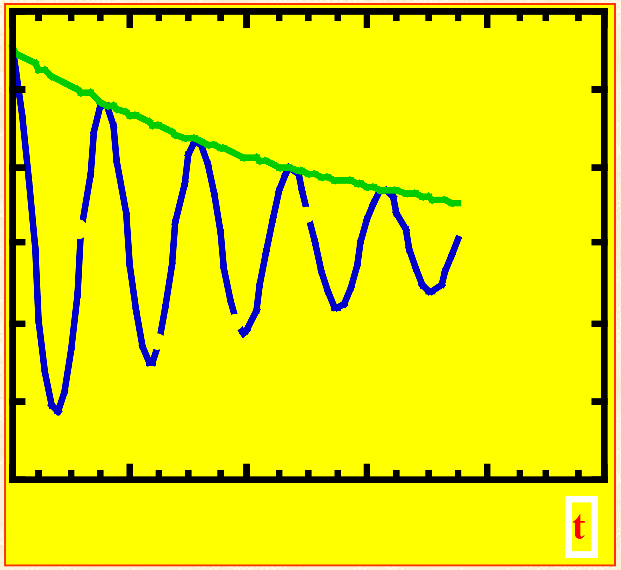
Application de la transformée de Laplace au circuit oscillant (suite)

Si $\Delta < 0$ p_1 et p_2 imaginaires conjugués

Oscillations amorties

$$p1 = -a + i\,\alpha$$
$$p2 = -a - i\,\alpha$$

$$i(t) = e^{-at}(Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t})$$



TRANSFORMATION DE LAPLACE

Application de la transformée de Laplace au circuit oscillant (suite)

Si $\Delta = 0$ 1racine double réelle négative p_0

Amortissement critique

$$i(p)=\frac{V}{(p-p_1)^2}$$

$$i(t)=te^{p_0 t}$$

Si R = 0

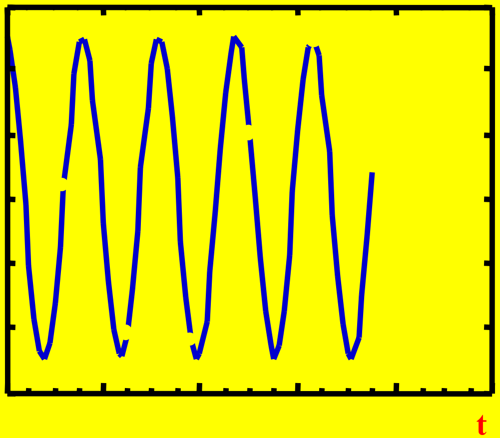
$p1 = i\,\alpha$
$p2 = -\,i\,\alpha$

Oscillations non amorties

$$i(p)=\frac{A}{p-i\alpha}+\frac{B}{p+i\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$i(t) = Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}$$



TRANSFORMATION DE LAPLACE

Original f(t)	Transformée F(p)		Original f(t)	Transformée F(p)	
1	$\frac{1}{p}$		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	ω réel
t	$\frac{1}{p^2}$		$e^{i\omega t}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	ω réel
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	n entier	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	ω réel
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$		$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	ω réel
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	a réel ou complexe	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$	
te-at	$\frac{1}{(p+a)^2}$	a réel ou complexe	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$	
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	a réel ou complexe	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$	
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	ω réel			