PROGRAMAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR
Geofísica Matemática y Computacional

Ángeles Rojo Yosselin Lizbeth
García Barragán José Andrés
Hernández Terán Oscar

Facultad de Ingeniería, UNAM

17 de noviembre de 2020

1. Objetivos

El presente trabajo se realizó con la intención de introducirnos a la resolución de problemas matemáticos a través de métodos numéricos, aplicando conocimientos de física, matemáticas y programación. Conocer como funciona el desarrollo de un proyecto, atravesando los 4 modelos vistos en clases, para obtener un resultado satisfactorio.

2. Introducción

La ecuación de calor es un modelo matemático que en su forma mas compleja y general, nos describe como fluye el calor y como se distribuye a través del tiempo. Es una ecuación diferencial en derivadas parciales que entra en la categoría de ecuaciones parabólicas. La ecuación esta escrita como:

$$C_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} + C_p\rho\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jT) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_j}) = S \tag{1}$$

En este modelo vemos los siguientes términos:

- C_p. Capacidad calorífica específica
- ρ. Densidad
- κ. Conductividad térmica
- S. Fuentes o sumideros
- x_j. Coordenada cartesiana
- t. Tiempo
- T. Temperatura
- u_j Velocidad

3. Discusión y análisis

La ecuación 1 se ve compleja en su inicio, pero la redujimos tomando en cuenta las siguientes consideraciones. El primer término se ve igualado a cero, ya que este trabajo toma en cuenta la resolución de un problema estacionario, es decir, las condiciones no varían en el tiempo. La segunda consideración corresponde al segundo término de la ecuación, este modela el flujo de calor debido a convección, un tipo de transferencia de energía que se da en fluidos, proceso que no tomamos en cuanta, por lo que el término también se hace cero.
Nos queda entonces, la ecuación a resolver de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} = \frac{-S}{k} \tag{2}$$

4. Métodos

Los códigos generados fueron 7. Para tener un mayor orden, el primero de estos es un archivo conjunto en donde englobamos todas las funciones que se usan, este código es el más largo de todos, en parte por la documentación de cada una de las funciones. Los otros 5 códigos corresponden a los siguientes casos:

- Problema sin fuentes o sumideros
- Problema con fuentes o sumideros
- Problema con condiciones de tipo Dirichlet
- Ecuación de Poisson, con condiciones tipo Neumman I
- Ecuación de Poisson, con condiciones tipo Neumman IV
- Problema con conductividad térmica κ no constante

El método utilizado para la resolución de la ecuación todos los casos fue el de las diferencias finitas.
Este método está basado en el cálculo del valor de la derivada en un punto a través de la razón de dos diferencias, fue propuesto por Leonard Euler en 1768. Para nuestro caso, usamos la siguiente aproximación a la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \tag{3}$$

Donde h es el tamaño de paso, o distancia entre nodos de la malla.
Dado que únicamente resolveremos la distribución en función de la posición, y para una dimensión, debemos fijar las condiciones.

- Paredes adiabáticas en todo el dominio
- Temperaturas fijas en los extremos de la barra
- Se desea calcular la temperatura interna del dominio

Con la correcta discretización del dominio (generación de nodos) y de las ecuaciones (aproximar las derivas por diferencias finitas) el modelo matemático que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ ... \\ Tn \\ Tn-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \\ ... \\ Qn \\ Qn-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Ta \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ -Tb \end{vmatrix} \tag{4}$$

Nótese que los coeficientes de la matriz están dados por la ecuación 3. El vector T es el resultado que deseamos, y es el vector que contendrá en los resultados en cada nodo.
Por último, podemos ver que el modelo computacional no es más que resolver:

$$AxT = b \tag{5}$$

Donde A es una matriz de NxN, con los coeficientes de la aproximación a la segunda derivada, T es el vector que contendrá los resultados, y b es la suma de las fuentes (en caso que existan) más las condicones de frontera.

5. Resultados

Los resultados finales de este trabajo se ven resumidos tanto en los códigos generados, así como en las gráficas resultantes. A partir de las soluciones analíticas en sus respectivos casos, se comprobó la eficacia de los algoritmos, generando un vector que contiene la diferencia entre las medidas obtenidas, e imprimiendo la suma de este. Además las gráficas que se obtuvieron tienen un formato de dos subgráficas, en donde la primera corresponde a la solución numérica, y la segunda a la analítica para un mejor análisis. Un ejemplo de las gráficas es la siguiente:

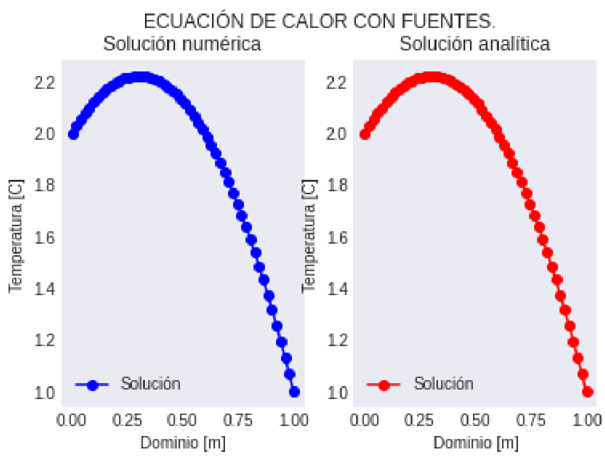

Figura 1: Ejemplo de gráfica generada por los códigos.

6. Conclusiones

Como parte del modelo de aprendizaje que se está trabajando en el curso, este primer proyecto cumple tanto con los objetivos particulares que se establecieron, así como con objetivos más generales para el desarrollo de futuros proyectos. Se profundizó en el desarrollo de programas, en el entendimiento de métodos numéricos, en como aplicarlos a través de un lenguaje de programación, y en como mostrar resultados, ya que en la mayoría de los casos el código es algo complejo de interpretar y que en caso de exposición, no es viable. Otro punto muy importante es la capacidad de desarrollar trabajo en equipo, haciendo uso de herramientas digitales y manteniendo una comunicación para la correcta realización de las tareas.
Como metodología de trabajo, este proyecto es muy valioso para mostrarnos como proceder a resolver problemas físicos a través de métodos numéricos y cómputo científico.