

ESPACIOS VECTORIALES

Espacio vectorial real.

Es un conjunto V no vacío cuyos elementos reciben el nombre de vectores dotado de dos operaciones:

1^a.- Una interna llamada suma que cumple las siguientes propiedades:

- I. Asociativa: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- II. Conmutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- III. Elemento neutro: Hay un elemento $\mathbf{0}$ en V tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- IV. Elemento opuesto: Cada elemento \mathbf{u} tiene su elemento opuesto $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, es decir, $(V, +)$ es un grupo conmutativo.

2^a Una operación externa llamada producto de números reales por vectores que asocia a cada número real α y a cada vector \mathbf{u} el vector $\alpha\mathbf{u}$ y que verifica las siguientes propiedades:

- I. Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
- II. Distributiva respecto a la suma de vectores: $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
- III. Asociativa para escalares: $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
- IV. Elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

A los números reales se les llama escalares.

Por cumplir las propiedades mencionadas diremos que la terna $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplos:

En el conjunto R^2 definimos las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \lambda.(x_1, x_2) &= (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{aligned}$$

puede comprobarse que se verifican todas las propiedades enunciadas por lo que la terna $(R^2, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.

Igualmente ocurre si consideramos $R^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1, x_2, x_3 \in R\}$ con las operaciones:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\ \lambda.(x_1, x_2, x_3) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \end{aligned}$$

En general, el conjunto $R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$ con las operaciones habituales definidas en los ejemplos de antes es un espacio vectorial.

Son también espacios vectoriales:

- El conjunto de todas las funciones polinómicas con las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

- El conjunto de los números complejos.
- El conjunto de los vectores libres del plano o del espacio.
- etc.

Subespacio vectorial.

Dado un espacio vectorial V , un subconjunto S , es un subespacio vectorial de V cuando es espacio vectorial respecto de las operaciones definidas en V .

Para comprobar si un subconjunto es subespacio vectorial, no es necesario comprobar las ocho propiedades fundamentales. El siguiente teorema sirve para caracterizar los subespacios vectoriales:

Un subconjunto S es un subespacio vectorial de V si se verifican estas dos propiedades:

1^a Si u y v son elementos de S entonces $u+v \in S$

2^a Si $\lambda \in R$ y $u \in S$ entonces $\lambda u \in S$

Combinaciones lineales.

Consideremos un espacio vectorial V y sea $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un conjunto de vectores de V . Se llama combinación lineal de estos al vector x obtenido de la siguiente forma:

$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son números reales.

Ejercicio:

Sean los vectores $u = (-2, 1)$; $v = (0, 5)$ y $w = (7, -3)$ vectores de R^2 . Forma combinaciones lineales con ellos.

Solución:

Haremos 2 combinaciones lineales de estos vectores eligiendo números reales cualesquiera, por ejemplo,

$$x = u - v + 2w = (-2, 1) - (0, 5) + 2(7, -3) = (12, -10)$$

$$y = -5u + 0v + 2w = -5(-2, 1) + 0(0, 5) + 2(7, -3) = (24, -11)$$

El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de u_1, u_2, \dots, u_n se representa por $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ o bien por $L(u_1, u_2, \dots, u_n)$ y es un subespacio vectorial de V. Se le llama subespacio engendrado por u_1, u_2, \dots, u_n y el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es un sistema de generadores de dicho subespacio.

Ejemplo:

Si consideramos los vectores de R^3 $u_1 = (1, -2, 1)$; $u_2 = (1, 2, 3)$, cualquier vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $L(u_1, u_2)$ cumplirá la siguiente relación:

$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, -2, 1) + \beta(1, 2, 3)$, y de ahí resulta:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha + \beta \\x_2 &= -2\alpha + 2\beta \\x_3 &= \alpha + 3\beta\end{aligned}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones paramétricas del subespacio.

Dependencia lineal.

Un conjunto de vectores u_1, u_2, \dots, u_n de un espacio vectorial V se dice que es **libre** si la relación

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \text{ implica que } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

es decir, que no hay ninguna combinación lineal de ellos que dé como resultado el vector cero, salvo las que tienen todos los coeficientes nulos.

En este caso se dice que los vectores u_1, u_2, \dots, u_n son **linealmente independientes**.

Un conjunto de vectores es ligado si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, no todos nulos, que verifican la relación $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$. También se dice que los vectores citados son **linealmente dependientes**.

Teorema: *Un conjunto de vectores son linealmente dependientes si y solo si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros.*

Ejercicio:

Tres vectores de un espacio vectorial u, v y w verifican la relación $2u - 4v + w = 0$. ¿Son linealmente dependientes?

Solución:

Es claro que son linealmente dependientes porque la relación indicada es una combinación que da como resultado el vector cero y existen coeficientes no nulos. (es este caso todos).

Además, se puede expresar alguno de ellos como combinación lineal de los otros. Basta con despejarlo en la relación dada: $2u-4v+w=0$; $w = -2u + 4v$

Propiedades de la dependencia lineal.

- Si entre los vectores u_1, u_2, \dots, u_n figura el vector 0, son linealmente dependientes.
- Un solo vector, si es distinto de cero, es linealmente dependiente.
- Dos vectores de \mathbb{R}^2 son linealmente dependientes sí y solo sí tienen las respectivas componentes proporcionales.

Estudio de la dependencia lineal.

La dependencia lineal de un conjunto de vectores podemos estudiarla aplicando las transformaciones de Gauss. Si llegamos a obtener un cuadro de vectores de modo que en la diagonal no haya ningún cero y debajo de la diagonal todas las componentes sean nulas, el conjunto de vectores es libre. Si resulta algún vector con todas sus componentes nulas se trata de un conjunto ligado.

Ejemplo:

Estudiemos la dependencia lineal de los vectores $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$ y $(2, 1, -3)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En la última transformación hemos cambiado el orden de los vectores segundo y tercero.

Ahora tenemos todos los elementos de la diagonal principal **distintos de cero** y debajo de dicha diagonal **ceros**, por tanto, los vectores son linealmente independientes.

Base y dimensión de un espacio vectorial.

Sea V un espacio vectorial. Un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base de V si se cumple:

1º) Los vectores son linealmente independientes.

2º) Todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de u_1, u_2, \dots, u_n .

Ejemplo:

En el espacio vectorial R^2 los vectores $(1, 2)$ y $(0, 3)$ constituyen una base ya que se verifican las dos condiciones señaladas:

- Son linealmente independientes.
- Cualquier vector (x, y) de R^2 puede expresarse como combinación lineal de ellos; en

$$\text{efecto, } (x, y) = \alpha(1, 2) + \beta(0, 3) \text{ y resolviendo se obtiene } \alpha = x; \quad \beta = \frac{y - 2x}{3}$$

Existen los números buscados (escalares) y por tanto, $(x, y) = x(1, 2) + \frac{y - 2x}{3}(0, 3)$

Estos escalares reciben el nombre de coordenadas del vector (x, y) respecto de la base $\{(1, 2), (0, 3)\}$

Un espacio vectorial puede tener muchas bases distintas pero todas tienen el mismo número de vectores.

Teorema de la base: *Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.*

Dimensión de un espacio vectorial es el número de vectores que forman la base.

La dimensión del espacio vectorial R^2 es dos.

En el espacio vectorial R^3 los vectores $(2, 1, 3)$, $(0, 4, 1)$ y $(0, 0, 6)$ constituyen una base como puede comprobarse. La dimensión de R^3 es tres.

Bases canónicas:

En R^2 los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ forman una base que recibe el nombre de base canónica de R^2 .

En R^3 la base canónica la forman los vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.

En general, la base canónica de R^n la forman los vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$$

.....

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Debe advertirse la diferencia entre sistema de generadores y una base.

Dos vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^2 forman una base del espacio vectorial \mathbb{R}^2 .

Tres vectores l. i. de \mathbb{R}^3 forman una base del espacio vectorial \mathbb{R}^3 .

En general, n vectores l. i. constituyen una base de \mathbb{R}^n .

Rango de un sistema de vectores.

Se llama rango de un sistema de vectores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ al número máximo de vectores l. i. que hay entre ellos, es decir, es la dimensión del espacio vectorial que engendran.

Para calcular el rango podemos utilizar el método de Gauss. Una vez conseguida la matriz escalonada, el rango es el número de vectores (filas) no nulos.

Ejemplo:

Halla el rango del sistema de vectores:

$$S = \{(-1, 1, -1, 1), (-1, 1, -1, 0), (2, -2, 2, -1), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0)\}$$

Solución:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim (\text{intercambiamos filas adecuadamente}) \\ \sim \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Una vez escalonada la matriz vemos que hay cuatro filas no nulas, luego el rango es 4.

Ejercicios resueltos.

1.- Determina x e y para que el vector $(3, 2, x, y)$ pertenezca al subespacio engendrado por los $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, 1)$

Solución:

El vector $(3, 2, x, y)$ ha de ser combinación lineal de $(1, 4, -5, 2)$ y de $(1, 2, 3, 1)$, luego

$(3, 2, x, y) = \alpha(1, 4, -5, 2) + \beta(1, 2, 3, 1)$ y resulta el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 2\beta = 2 \\ -5\alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = -6 \\ 4\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \quad \text{y sumando se obtiene } 2\alpha = -4; \alpha = -2;$$

$$-8 + 2\beta = 2; 2\beta = 10; \beta = 5$$

y llevando los valores obtenidos a las ecuaciones tercera y cuarta obtenemos:

$$x = -5\alpha + 3\beta = 10 + 15 = 25$$

$$y = 2\alpha + \beta = -4 + 5 = 1$$

2.- Sea $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Halla las ecuaciones paramétricas de $L(S)$.

Solución:

Cualquier vector (x_1, x_2, x_3) de $L(S)$ cumplirá la siguiente relación:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 1)$$

y de ahí

$$x_1 = \alpha$$

$$x_2 = \alpha + \beta$$

$$x_3 = \beta$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio $L(S)$.

3.- Halla un sistema de generadores del espacio vectorial

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = t - s; x_2 = t + s; x_3 = t + s; t, s \in \mathbb{R}\}$$

Solución:

$$(x_1, x_2, x_3) = (t - s, t + s, t + s) = (t, t, t) + (-s, s, s) = t(1, 1, 1) + s(-1, 1, 1)$$

luego un sistema de generadores es $S = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$

4.- Prueba que los vectores $(1, 1, 2, 0)$, $(1, 1, 0, 6)$, $(-1, 2, 0, 1)$ y $(1, 1, 1, 3)$ son linealmente dependientes. Escribe la relación de dependencia.

Solución:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De la 2^a matriz pasamos a la 3^a simplemente intercambiando filas.

Finalmente obtenemos una fila formada por ceros, luego los vectores son linealmente dependientes.

Necesariamente uno de ellos será combinación lineal de los otros restantes. Probamos la siguiente relación:

$(1, 1, 2, 0) = \alpha.(1, 1, 0, 6) + \beta.(-1, 2, 0, 1) + \lambda.(1, 1, 1, 3)$ lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \lambda = 1 \\ \alpha + 2\beta + \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ 6\alpha + \beta + 3\lambda = 0 \end{cases}$$

y operando en las dos primeras ecuaciones con el valor de λ que resulta, llegamos a

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2 = 1 \\ \alpha + 2\beta + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \text{ y se obtiene } \alpha = -1; \quad \beta = 0$$

Podemos comprobar también que los valores obtenidos de α y de β verifican la 4^a ecuación del sistema, por tanto, la relación de dependencia es:

$$(1, 1, 2, 0) = -1.(1, 1, 0, 6) + 0.(-1, 2, 0, 1) + 2.(1, 1, 1, 3)$$

$$\text{O bien, } 1.(1, 1, 2, 0) + 1.(1, 1, 0, 6) - 0.(-1, 2, 0, 1) - 2.(1, 1, 1, 3) = (0, 0, 0, 0)$$

$$1.v_1 + 1.v_2 - 0.v_3 - 2.v_4 = 0$$

La relación de dependencia puede obtenerse directamente al aplicar el método de Gauss como vamos a ver:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 + v_1 \\ v_4 - v_1 \end{matrix}$$

Intercambiamos filas y las ponemos en el orden que se indica:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

v_1
 $v_3 + v_1$
 $v_4 - v_1$
 $v_2 - v_1$

v_1
 $v_3 + v_1$
 $v_4 - v_1$
 $-2(v_4 - v_1) + v_2 - v_1$

Vemos que la expresión $-2(v_4 - v_1) + v_2 - v_1$ conduce al vector cero, por tanto,
 $-2v_4 + 2v_1 + v_2 - v_1 = 0$, es decir, $1.v_1 + 1.v_2 - 0.v_3 - 2.v_4 = 0$
que es la misma relación que hemos obtenido antes.

5.- En el espacio vectorial \mathbb{R}^4 consideramos el conjunto

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x + 3y + z - 2t = 0\}$$

Prueba que F es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4

Solución:

Si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') son elementos de F se verifica que :

$$2x + 3y + z - 2t = 0$$

$$2x' + 3y' + z' - 2t' = 0$$

Y entonces sumando, $2(x + x') + 3(y + y') + (z + z') - 2(t + t') = 0$

lo que implica que el vector $(x + x', y + y', z + z', t + t') \in F$

o lo que es lo mismo $(x, y, z, t) + (x', y', z', t') \in F$ y se cumple la 1^a propiedad.

Si (x, y, z, t) es un elemento de F se cumple que $2x + 3y + z - 2t = 0$

Para cualquier número real λ se cumplirá que $\lambda.(2x + 3y + z - 2t) = 0$

$$\text{y de ahí que } 2.(\lambda x) + 3(\lambda y) + \lambda z - 2(\lambda t) = 0$$

luego el vector $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \in F$ o bien $\lambda.(x, y, z, t) \in F$ y se cumple la 2^a propiedad

que caracteriza a todo subespacio vectorial.

luego F es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

6.- Demuestra el siguiente teorema: “Un conjunto de vectores son linealmente dependientes si y solo si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros”

Solución.

- Supongamos que son linealmente dependientes. Entonces,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r = 0 \quad \text{y algún } \alpha_i \neq 0$$

Si suponemos que $\alpha_1 \neq 0$ podemos escribir:

$$u_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} u_3 - \dots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1} u_r \quad \text{luego } u_1 \text{ es combinación lineal de } u_2, u_3, \dots, u_r$$

- Supongamos ahora que uno de ellos es combinación lineal de los demás, por ejemplo,

$$u_1 = \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \dots + \lambda_r u_r. \quad \text{Entonces podemos poner:}$$

$1 \cdot u_1 - \lambda_2 u_2 - \lambda_3 u_3 - \dots - \lambda_r u_r$, donde ya hay un coeficiente distinto de cero y, por tanto, u_1, u_2, \dots, u_r son l.d.

Ejercicios propuestos.

1.- En el conjunto \mathbb{R}^2 se definen las operaciones siguientes:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'); \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Comprueba que \mathbb{R}^2 no es espacio vectorial respecto de las operaciones definidas.

2.- Sea $v = (-1, 5, 2, 0)$. Determina si $v \in \langle(-1, 2, 3, 0), (4, 3, 0, 1), (0, 3, 2, 0)\rangle$

3.- Prueba que los vectores $u_1 = (1, 2, -6)$, $u_2 = (0, 5, -1)$ y $u_3 = (2, -1, 0)$ son l.i.

4.- Dados los vectores $u_1 = (1, 1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 0)$ de \mathbb{R}^4

- a) Determina si forman un conjunto libre o ligado.
- b) Da un vector, v , no nulo, de modo que $\{u_1, u_2, u_3, v\}$ sea un conjunto ligado.
- c) Da un vector, w , de modo que $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ sea libre.
- d) Expresa $x = (1, 2, 4, 3)$ como combinación lineal de u_1, u_2, u_3 y w .

5.- Calcula x e y para que los siguientes vectores de \mathbb{R}^4 sean l.d.

$$u_1 = (5, x, -4, -3), u_2 = (1, 0, x, 1) \text{ y } u_3 = (-1, y, -1, 3)$$

6.- Determina por el método de Gauss la dimensión y una base del subespacio vectorial engendrado por los vectores $(1, 1, 2, 0)$, $(1, 1, 0, 6)$, $(-1, 2, 0, 1)$ y $(1, 1, 1, 3)$

7.- Sea el conjunto $H = \{(1, 2, 3), (2, 5, 7), (1, -1, 0)\}$

- a) Estudia si constituye un sistema de generadores de \mathbb{R}^3 .
- b) Halla una base y la dimensión de $L(H)=\langle H \rangle$.

8.- Sea el conjunto $F = \{(x - 2y, x, 2y, -y) \in \mathbb{R}^4; x, y \in \mathbb{R}\}$. Deduce una base de F.

9.- Halla la dimensión y una base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x + 3y + z - 2t = 0\}$

10.- Dados los vectores $(2, -2, 3)$, $(0, 4, -5)$ y $(1, 1, -1)$ de \mathbb{R}^3 , hallar una base del subespacio que engendran y completarla hasta obtener una base de \mathbb{R}^3 .

11.- Da una base del subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 siguiente:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 - x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$