UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

Enrique Guzmán y Valle

Alma Máter del Magisterio Nacional

FACULTAD DE CIENCIAS

Escuela Profesional de Matemática e Informática

MONOGRAFÍA

Cálculo vectorial en R^2 y en R^3

Vectores en el plano y en el espacio. Adición y multiplicación de un vector por un real. Segmentos dirigidos y vectores. Vectores paralelos. Producto escalar. Vectores ortogonales. Norma de un vector. Bases y proyección ortogonal de vectores en $R^{2.}$ Ecuación vectorial de rectas en R^2 y en R^3. Producto vectorial en R^3 Triple producto escalar. Planos en R^3. Epistemología y didáctica de los vectores en el plano y en el espacio. Resolución de problemas.

Examen de Suficiencia Profesional Resolución Nº 0496-2019-D-FAC

Presentada por:

Gladys Grisell Génesis Espinoza Hernández

Para optar al Título Profesional de Licenciado en Educación

Especialidad: MATEMÁTICA

Lima, Perú

2019

MONOGRAFÍA

Cálculo vectorial en R^2 y en R^3

Vectores en el plano y en el espacio. Adición y multiplicación de un vector por un real. Segmentos dirigidos y vectores. Vectores paralelos. Producto escalar. Vectores ortogonales. Norma de un vector. Bases y proyección ortogonal de vectores en R^2. Ecuación vectorial de rectas en R^2 y en R^3. Producto vectorial en R^3 Triple producto escalar. Planos en R^3. Epistemología y didáctica de los vectores en el plano y en el espacio. Resolución de problemas.

Designación de Jurado Resolución Nº 0496-2019-D-FAC

Dr. Marcelino PÁUCAR ÁLVAREZ
PRESIDENTE

Lic. Vicente Carlos DÁVILA HUAMÁN
SECRETARIO

Dr. Carlos Javier VICENTE DE TOMÁS
VOCAL

Línea de investigación: Currículum y formación profesional en educación

El principio de la sabiduría es el temor a Jehová…….” (Proverbios 1:7)

Dedico este trabajo a mis amados padres Jaime y Gladys, quiénes en todo momento han estado a mi lado y me impulsaron a conseguir mi sueño, de ser una profesora de Matemática. A mis hermanos Elías y Josué, quiénes me han apoyado siempre. Gracias mi amada familia, son mi mayor bendición.

INDICE

Introducción

El presente trabajo monográfico se centra en el tema de vectores en R^2 y en R^3. Se parte del concepto de vector, presentando la interpretación matemática de n-adas ordenadas, y luego, se presenta la interpretación geométrica de segmento de recta orientado.

En este trabajo se abordan los principios del Álgebra Vectorial, que incluyen las operaciones de Adición, Sustracción de vectores y Multiplicación de un vector por un escalar. Asimismo, se presenta la definición y desarrollo de paralelismo de vectores y el concepto de ortogonalidad, así como el producto escalar, el producto vectorial y el triple producto escalar.

Cada uno de los tópicos está acompañado de ejemplos representativos, que ayudan a fijar los conceptos y las propiedades correspondientes.

También se abordan los temas de la recta y el plano, la formulación de la ecuación vectorial de cada una de ellas. Se ha hecho un esfuerzo para poder visualizar dichas relaciones en 3D, y se presentan una serie de ejemplos al respecto.

En la parte final se presenta la solución de 10 problemas resueltos típicos de un curso de vectores en R^2 y R^3.

Capítulo I

Cálculo vectorial en R^2 y en R^3

Los vectores son elementos desarrollados en las Matemáticas y que tienen una gran aplicación en el campo de la Física. En efecto, muchas de las leyes físicas, se expresan de una forma elegante y concisa a través de la notación vectorial, como la famosa ecuación de Newton que relaciona la fuerza con la aceleración de los cuerpos: $\vec{F} = m\,\vec{a}$.

1. Vectores. Concepto. Propiedades

En nuestras experiencias cotidianas, así como en el campo de la Ciencia, hay cantidades que se pueden expresar mediante un sólo número (Hasser, 2015), como, por ejemplo, la altura de una persona, el número de personas que hay en una sala; pero existen otras que necesitan más de un número para quedar completamente definidas. Así por ejemplo, la velocidad de los vientos, podría expresarse en función a dos números, tal como $\vec{v}$ = (3; –4) m/s, que nos estaría indicando que la velocidad del viento está constituida por dos componentes de velocidad dirigidas a lo largo de los ejes X e Y, siendo 3 la intensidad en la dirección de X y con intensidad 4, pero en el sentido contrario de la dirección Y.

Además. hay otras cantidades que requieren más de dos números, como la representación de una fuerza en el espacio, tal como: $\vec{F}$ = (10; –20; 30), puesto que la fuerza F se describe en función a tres componentes dirigidas a lo largo de los ejes X, Y y Z. Otro caso sería la posición de una partícula en el espacio y en un momento determinado, que necesitaría además el tiempo siendo entonces necesario de cuatro componentes. Si generalizamos esto, podríamos afirmar que hay cantidades que para ser descritas necesitan 2, 3, 4 o n componentes, dando lugar a la necesidad de trabajar con un espacio n-dimensional (Apostol, 2000).

Por consiguiente, un **vector** $\vec{V}_n$, en el espacio n-dimensional, se define como un elemento de **n** números reales, por lo tanto : $\vec{V}_n = (v_1 , v_2, v_3, \ldots\ldots\ldots, v_n)$

En el presente trabajo, nos limitaremos a trabajar con vectores con dos y tres componentes, es decir en R^2 y en R^3.

En la Geometría Analítica y en la Física, un vector se representa como un segmento de recta orientado, que se traza entre dos puntos definidos, digamos P y Q cuyas coordenadas son conocidas.

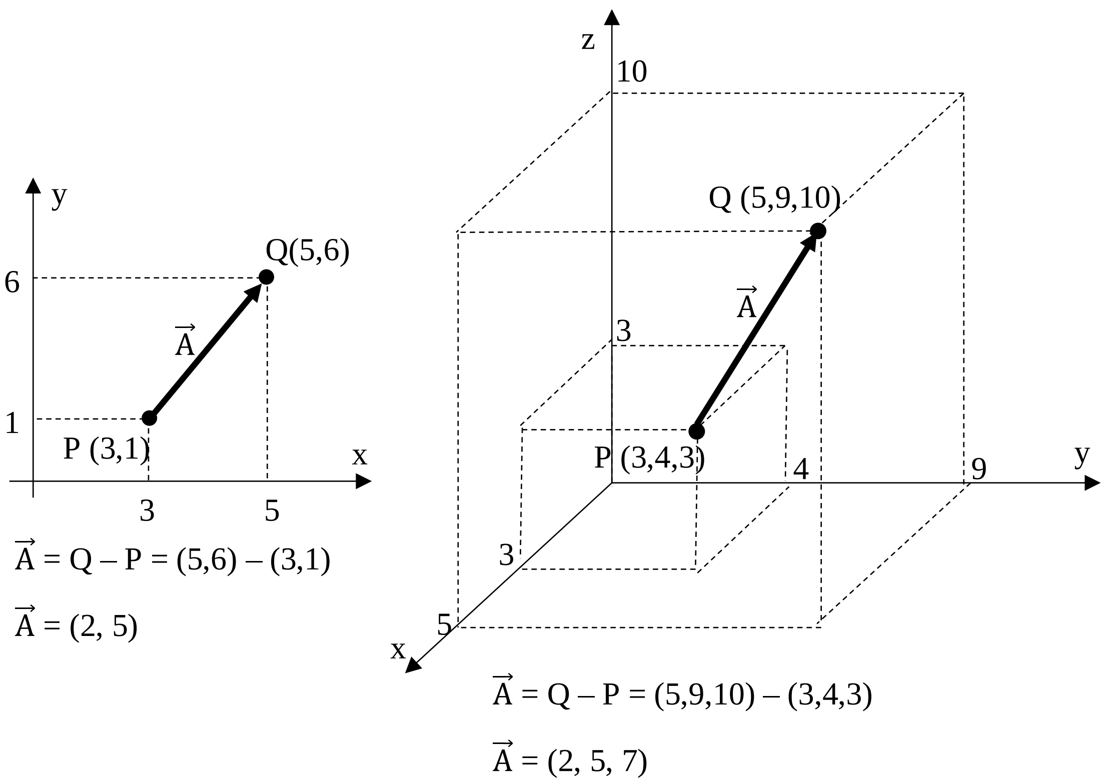


Figura 1

Un ejemplo se puede observar en la Figura 1, donde se muestra un vector en R^2 y otro en R^3. Tomamos como punto inicial a P y como punto final a Q, trazamos el segmento de recta orientado que tendrá su cola en P y la flecha en Q. Las componentes del vector trazado se encuentran restando las coordenadas del punto final menos las coordenadas del punto inicial.

¿Qué significado tienen las componentes de un vector en R^2 y R^3? Recordemos que un vector representa un segmento de recta orientado. Por consiguiente, una forma de encontrarle sentido a las componentes, es que cada una de ellas representa el desplazamiento que debemos seguir para ir del punto inicial al punto final. Por ejemplo, en referencia al vector $\vec{A} = (2, 5)$ de la Figura 1, para ir del punto P a Q, debemos movernos 2 u en paralelo al eje X positivo y luego 5 u en paralelo al eje Y positivo.

Algo similar sucede en R^3. Es importante tener en cuenta, que las componentes de un vector no representan un punto, sino por el contrario, los desplazamientos para ir de un punto a otro.

Por otro lado, los vectores no necesariamente están ligados a un punto inicial. Se tiene el caso de los vectores libres, que, al ser colocados en un punto inicial arbitrario, nos transportan hacía otro punto final, cuyas coordenadas se podría conocer; tal como se muestra en el siguiente ejemplo. También es importante precisar, que, si un vector tiene como punto inicial en el origen de coordenadas, entonces el vector toma el nombre de **radio vector** o **vector posición**.

Ejemplo:

Representar el vector $\vec{A} = (3\,;\,4)$, colocándolo sobre los siguientes puntos iniciales $P_1\ (0;0)$; $P_1\ (0; -3)$; $P_1\ (-2; 0)$. Determinar también las coordenadas del punto final P_2.

Solución:

Dado que el vector $\vec{A}$ se coloca entre el punto inicial P_1 y el punto final P_2, se tiene que:

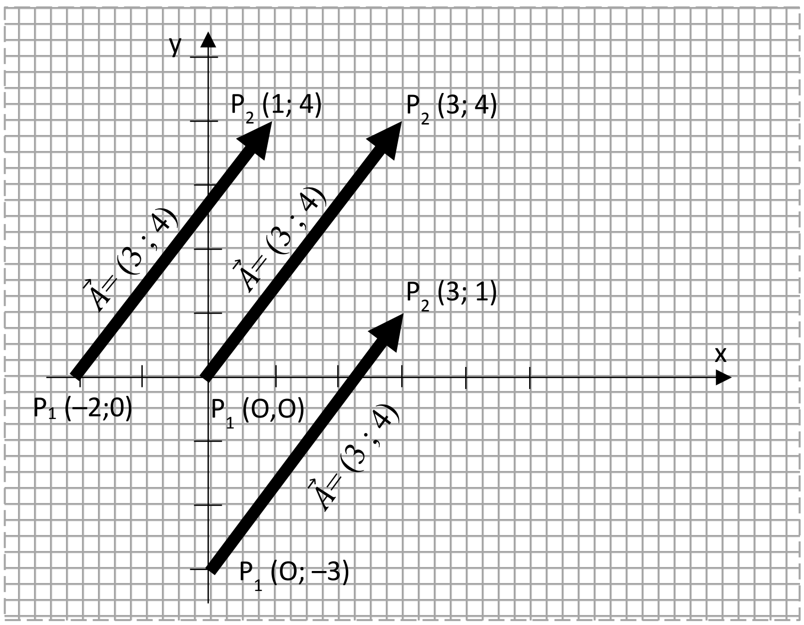
$$\vec{A} = P_2 - P_1 \;\rightarrow\; P_2 = P_1 + \vec{A}$$

Si el vector se coloca en $P_1(0,0) \rightarrow P_2 = (0, 0) + (3, 4) = (3, 4)$

Si el vector se coloca en $P_1(0,–3) \rightarrow P_2 = (0, –3) + (3, 4) = (3, 1)$

Si el vector se coloca en $P_1(–2, 0) \rightarrow P_2 = (–2, 0) + (3, 4) = (1, 4)$

Esto se muestra en el siguiente gráfico:



1.1 Igualdad de vectores

Dos vectores $\vec{A}_n = (a_1 , a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ y $\vec{B}_n = (b_1 , b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$ son iguales, si todas sus componentes, una a una son iguales.

Es decir, $\vec{A}_n = \vec{B}_n$ si $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots\ldots, a_n = b_n$.

Por ejemplo los vectores $\vec{A} = (10;20;30)$ y $\vec{B} = (10; 20; 30)$ son iguales entre sí, porque :

$a_1 = b_1= 10, a_2 = b_2 = 20, a_3 = b_3 = 30$ por lo que $\vec{A} = \vec{B}$.

1.2 Adición de vectores

La adición de dos vectores $\vec{A}_n = (a_1 , a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ y $\vec{B}_n = (b_1 , b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$, es una operación que a todo par de vectores le hace corresponder otro vector, $\vec{A}_n + \vec{B}_n$, llamado **suma** y que se define como:

$$\boxed{\vec{A}_n + \vec{B}_n = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots, a_n + b_n)}$$

Así, por ejemplo, si se tiene los vectores $\vec{A} = (-2 ; 3)$ y $\vec{B} = (-1; -5)$, entonces $\vec{A}+\vec{B} = (-3; -2)$.

El vector $\vec{S} = (-3; -2)$ se denomina vector suma de los vectores $\vec{A} = (-2 ; 3)$ y $\vec{B} = (-1; -5)$.

La suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se puede representar gráficamente, mediante el método del polígono. Este método consiste en unir el extremo de un vector con el origen del otro que se desea sumar. El vector suma es aquél que se traza del punto inicial del primer vector al punto final del segundo vector y se obtiene, como se muestra en la Figura 2. Este método se puede ampliar, para sumar dos o más vectores.

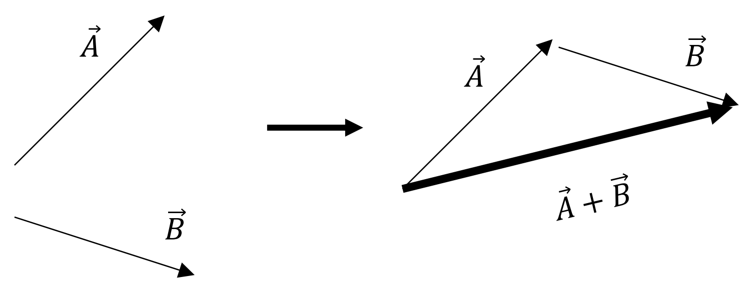


Figura 2

1.3 Multiplicación de un vector por un número real

Si **r** es un número real y el vector $\vec{V}_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\ldots, v_n)$, entonces se define:

$$\boxed{r\ \vec{V}_n = (r\,v_1,\ r\,v_2,\ r\,v_3,\ \ldots\ldots\ldots,\ r\,v_n)}$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{A} = (-2, 3, 1/2)$, y el vector $\vec{B} = (1, -4, -1)$, determinar $\vec{P}$, si: $\vec{P} = 4\vec{A} + 2\,\vec{B}$.

Solución:

$\vec{P} = 4\vec{A} + 2\,\vec{B} \;\rightarrow\; \vec{P} = 4\,(-2, 3, 1/2) + 2\,(1, -4, -1) = (-8, 12, 2) + (2, -8, -2) = (-6, 4, 0)$

1.4 Sustracción o resta de vectores

Dados los vectores $\vec{A}_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ y $\vec{B}_n = (b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$, se define la sustracción como la operación que a todo par de vectores le asigna otro vector llamado diferencia:

$$\boxed{\vec{A}_n - \vec{B}_n = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots\ldots,\ a_n - b_n)}$$

Ejemplo:

Si se tienen los vectores $\vec{A} = (-2, 3, 0)$ y $\vec{B} = (-1, -5, -2)$, determinar $\vec{A} - \vec{B}$.

Solución:

$\vec{A} - \vec{B} = (-2, 3, 0) - (-1, -5, -2) = (-1; 8, 2)$.

Las operaciones vectoriales, definidas hasta el momento, cumplen con las siguientes propiedades:

- Propiedad Conmutativa: $\vec{A}_n + \vec{B}_n = \vec{B}_n + \vec{A}_n$
- Propiedad Asociativa: $\vec{A}_n + (\vec{B}_n + \vec{C}_n) = (\vec{A}_n + \vec{B}_n) + \vec{C}_n$
- Propiedad Distributiva: $r\,(\vec{A}_n + \vec{B}_n) = r\,\vec{A}_n + r\,\vec{B}_n$
- Propiedad del elemento neutro para la Adición:

  $\vec{A}_n + \vec{O}_n = \vec{A}_n$, donde el vector $\vec{O}_n$ es el vector nulo.
- Propiedad del elemento unidad para la Multiplicación: $1\,\vec{A}_n = \vec{A}_n$
- Propiedad del vector opuesto o vector negativo:

  Para cada vector $\vec{A}_n$, hay un único vector $-\vec{A}_n$, denominado vector opuesto o negativo, tal que: $\vec{A}_n + (-\vec{A}_n) = \vec{O}_n$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{A} = (-3, 2)$, $\vec{B} = (4, 5)$ y $\vec{C} = (6, -2)$; determinar el resultado de las siguientes operaciones: a) $\vec{A} + \vec{B} - 2\,\vec{C}$, b) $3\,(\vec{A} - \vec{B}) + ½\,\vec{C}$

Solución:

a) $\vec{A} + \vec{B} - 2\,\vec{C} = (-3, 2) + (4, 5) - 2\,(6, -2) = (-11, 11)$

b) $3\,(\vec{A} - \vec{B}) + ½\,\vec{C} = 3[(-3,2) - (4,5)] + \frac{1}{2}(6, -2) =$

$$= 3[(-7,-3)] + (3, -1) = (-21, -9) + (3, -1) = (-18, -10)$$

2. Módulo o Norma de un vector

Dado un vector $\vec{A}_n = (a_1 , a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$, su módulo o norma se denota por $\|\vec{A}\|$ o simplemente por la letra A, sin la flecha superior, y se define así :

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}$$

En el caso de los vectores en R^2:

$$\vec{A} = (a_1 , a_2) \rightarrow A = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

En el caso de los vectores en R^3:

$$\vec{A} = (a_1 , a_2, a_3) \Longrightarrow A = \|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Para vectores en R^2 y en R^3, el módulo de un vector equivale a su longitud.

Si se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y un número real **r**, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\|\vec{A}\| \geq 0$. Si $\|\vec{A}\| = 0$, entonces $\vec{A} = \vec{O}$

b) $\|r\vec{A}\| = |r|\|\vec{A}\|$

c) $\|\vec{A} + \vec{B}\| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$ (Desigualdad triangular)

Ejemplo:

Dado el vector $\vec{A}$ = (60, –20, 30), determinar su módulo o su longitud.

Solución:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{60^2 + (-20)^2 + 30^2} = \sqrt{4900} = 70 \rightarrow \|\vec{A}\| = 70$$

3. Dirección de un vector R^2 y R^3

La dirección de un vector en R^2, se indica mediante el ángulo que forma dicho vector con el eje X positivo, medido en sentido antihorario, de las agujas del reloj, como se muestra en la Figura 3 (Leithold, 2000)

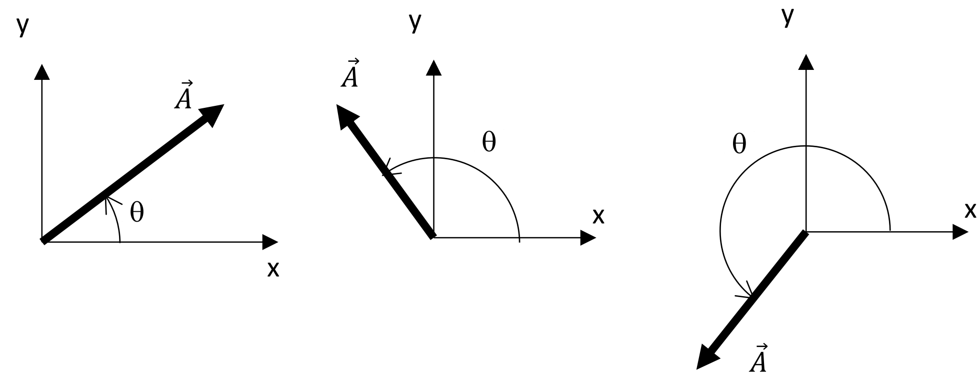


Figura 3

La dirección de un vector en R^3 se define mediante tres ángulos, denominados **ángulos directores:** θ_1 , θ_2 y θ_3 (Leithold, 2000), los cuales se muestran en la Figura 4.

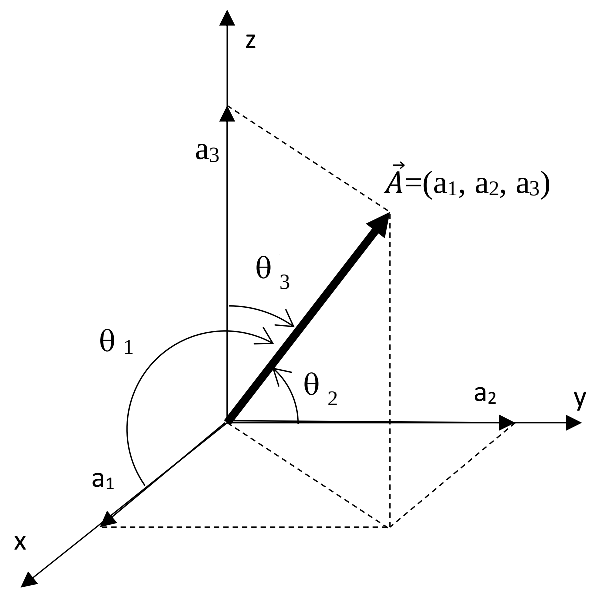


Figura 4. Angulos directores del vector A

Donde: $\cos\theta_1 = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|}$; $\cos\theta_2 = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|}$; $\cos\theta_3 = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|}$

Los tres números: $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ y $\cos\theta_3$ se denominan cosenos **directores** (Leithold, 2000). Además, es posible demostrar la siguiente relación:

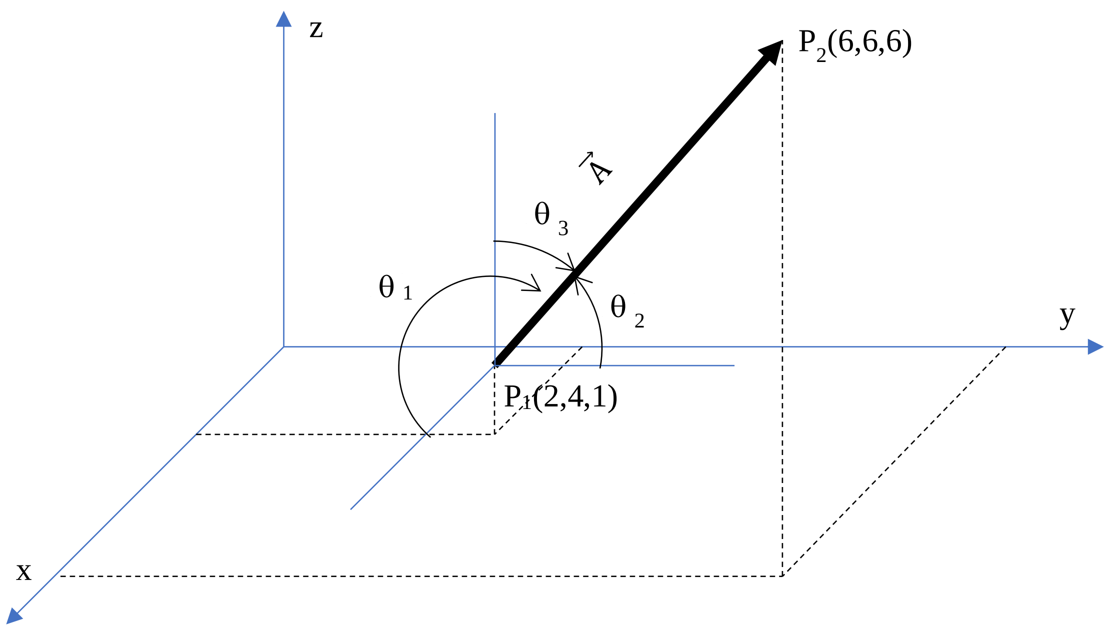
$$(\cos\theta_1)^2 + (\cos\theta_2)^2 + (\cos\theta_3)^2 = 1$$

Ejemplo:

Un vector $\vec{A}$ se traza entre los puntos P_1 (2, 4, 1) y P_2 (6, 6, 6) de P_1 a P_2. Determinar: a) las componentes del vector $\vec{A}$, b) el módulo de $\vec{A}$ y c) los tres ángulos directores de $\vec{A}$.

Solución:

Veamos un bosquejo del vector:



a) $\vec{A} = \overrightarrow{P_1P_2} = (a_1, a_2, a_3) = (6,6,6) - (2,4,1) \rightarrow \vec{A} = (4; 2; 5)$

b) $\|\vec{A}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{45}$

c) $\text{Cos } \theta_1 = \dfrac{4}{\sqrt{45}} \rightarrow \theta_1 = 53{,}4°$

$\text{Cos } \theta_2 = \dfrac{2}{\sqrt{45}} \rightarrow \theta_2 = 72{,}6°$

$\text{Cos } \theta_3 = \dfrac{5}{\sqrt{45}} \rightarrow \theta_3 = 41{,}8°$

4. Vectores Paralelos

Dos vectores $\vec{A}_n = (a_1 , a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ y $\vec{B}_n = (b_1 , b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$, son paralelos, si uno de ellos es igual al producto del otro por un número real (Haaser, 2010). Es decir, si los vectores cumplen con la condición: $\vec{A}_n = t\ \vec{B}_n$, donde t es número real.

Si el número real "t" es positivo ($t > 0$), los vectores $\vec{A}_n$ y $\vec{B}_n$ tendrán el mismo sentido; pero si "t" es un número negativo ($t < 0$), los vectores $\vec{A}_n$ y $\vec{B}_n$ tendrán sentidos opuestos.

Al respecto, cabe precisar que "el vector cero es el único que tiene la dirección de su opuesto y, por tanto, el único vector que tiene la dirección opuesta a sí mismo. El vector cero es el único vector paralelo al vector cero" (Apostol, 2000). En la Figura 5, se muestra el caso de varios vectores que son paralelos al vector $\vec{A} = (a_1, a_2)$.

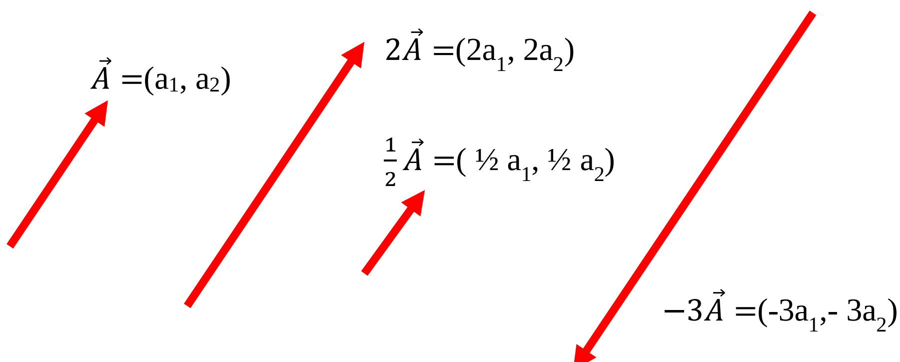


Figura 5

Ejemplo:

¿Son paralelos los vectores $\vec{A} = (-2 ; 5)$ y $\vec{B} = (-6 ; 15)$?

Solución:

Si $\vec{A}$ es paralelo al vector $\vec{B}$, entonces $\vec{B} = t\,\vec{A} \rightarrow (-6 ; 15) = t\,(-2 ; 5)$

De donde: $-6 = -2t \rightarrow t = 3$; así como $15 = 5\,t \rightarrow t = 3$.

Como t adquiere un valor único real, se dice que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

5. Producto Escalar (Producto punto o Producto interno)

Sean dos vectores $\vec{A}_n = (a_1 , a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$ y $\vec{B}_n = (b_1 , b_2, b_3, \ldots\ldots\ldots, b_n)$, el producto escalar de los dos vectores se denota como $\vec{A}_n \bullet \vec{B}_n$, el cual se define como:

$$\boxed{\vec{A}_n \bullet \vec{B} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n\, b_n}$$

Es importante observar, que el producto escalar de dos vectores, da como resultado un número real, y no un vector.

Ejemplo:

Obtener el producto escalar de los vectores $\vec{A} = (-2 ; 5; 3)$ y $\vec{B} = (-3, -2; -1)$.

Solución:

$\vec{A} \bullet \vec{B} = (-2)(-3) + (5)(-2) + (3)(-1) = 6 -10 -3 = -7$

$\vec{A} \bullet \vec{B} = -7$

Si se tienen los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$; el producto escalar cumple con las siguientes propiedades fundamentales:

a) $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$

b) $(r\,\vec{A}) \bullet \vec{B} = r\,(\vec{A} \bullet \vec{B})$

c) $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{A} \bullet \vec{C}$

d) $\vec{A} \bullet \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

Una de las aplicaciones importantes del producto escalar, es que nos permite calcular el ángulo entre dos vectores $\vec{A}\; y\; \vec{B}$.

Para ello utilicemos, la ley del paralelogramo, que nos permite identificar el vector suma de dos vectores y la ley de cosenos de la Trigonometría. Tal como se muestra en la Figura 6, se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se suman gráficamente, uniendo los orígenes de ambos vectores y trazando el vector resultante que cae sobre la diagonal del paralelogramo, que nace en el punto de concurrencia de los vectores. Si el ángulo que forman ambos vectores es θ , se tiene lo siguiente:

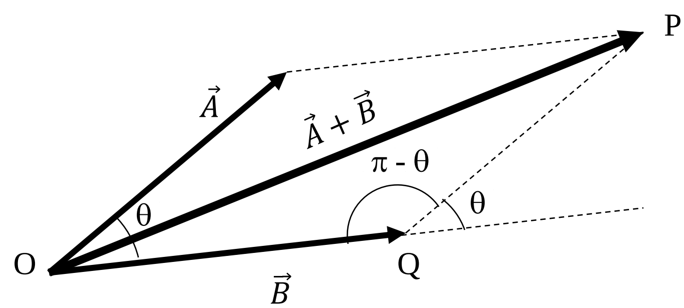


Figura No. 6

Aplicando la ley de Cosenos en el triángulo OPQ, se tiene que:

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\,\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\ \text{Cos}\ (\pi - \theta)\ .$$

Pero como Cos(π – θ) = –Cos θ , se reduce a:

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\,\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\ \text{Cos}\ \theta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1)}$$

Por otro lado, de la propiedad “d)” del producto escalar, se tiene que:

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = (\vec{A}+\vec{B}) \bullet (\vec{A}+\vec{B}) = \vec{A} \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \vec{B} + \vec{B} \bullet \vec{A} + \vec{B} \bullet \vec{B}$$

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + 2\,(\vec{A} \bullet \vec{B}) + \|\vec{B}\|^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(2)}$$

Igualando las expresiones (1) y (2), se obtiene:

$$\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\,\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\ \text{Cos}\ \theta = \|\vec{A}\|^2 + 2\,(\vec{A} \bullet \vec{B}) + \|\vec{B}\|^2$$

De donde: $\text{Cos}\ \theta = \dfrac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}$

Ejemplo:

Determinar el ángulo θ formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, ubicados sobre un cubo de arista L, tal como se indica en Figura 7.

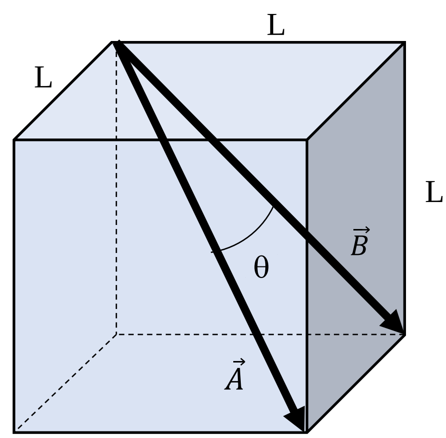
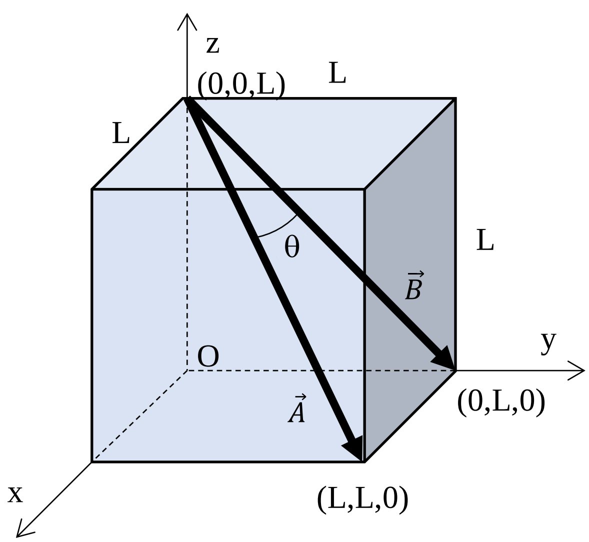


Figura 7

Solución:



Trazamos un sistema de coordenadas apropiado, y definimos las coordenadas de los puntos inicial y final de cada vector.

$\vec{A}$ = (L, L,0) – (0,0, L) = (L, L, –L)

$\vec{B}$ = (0, L,0) – (0,0, L) = (0, L, –L)

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{L^2 + L^2 + (-L)^2} = L\sqrt{3}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{0^2 + L^2 + (-L)^2} = L\sqrt{2}$$

$\vec{A} \bullet \vec{B}$ = (L)(0) + (L)(L) + (–L)(–L) $\rightarrow$ $\vec{A} \bullet \vec{B} = 2L^2$

$$Cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} \quad \rightarrow \quad \text{Cos } \theta = \frac{2L^2}{L\sqrt{3}L\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \rightarrow \theta = 35{,}3°$$

Observaciones:

A partir del ángulo formado entre dos vectores, puede inferirse que para vectores en R^2 y R^3:

a) Si $\vec{A} \bullet \vec{B} > 0$, el ángulo entre los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ es agudo (0° < θ < 90°)

b) Si $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$, el ángulo entre los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ es recto (θ = 90°)

c) Si $\vec{A} \bullet \vec{B} < 0$, el ángulo entre los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ es obtuso (90° < θ < 180°)

6. Vectores Ortogonales

Dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ son ortogonales cuando cumplen con la condición $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$. Es decir, si se trata de vectores en R^2 y R^3, dos vectores ortogonales, se dice también que son perpendiculares, por lo que deberán formar un ángulo de 90° entre sí.

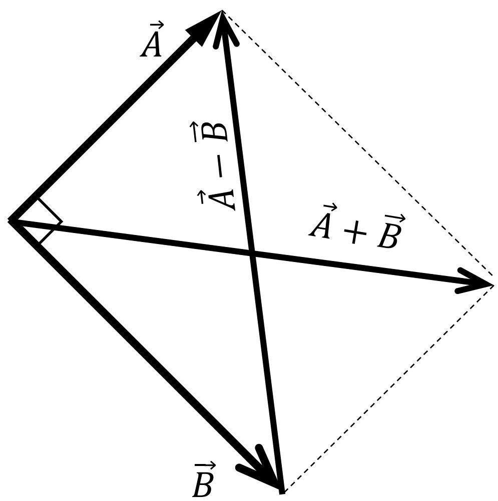


Figura 8

Gráficamente, es posible deducir otras relaciones para dos vectores ortogonales. Así pues, como se observa en la Figura 8, se tiene dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ ortogonales entre sí, donde se satisface que:

a) $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A} - \vec{B}\|$

b) $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{\|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2}$

Ejemplo:

Probar si los vectores $\vec{A}$ = (3; 2 ; 1) y $\vec{B}$ = (–4; 8 ¸–4) son ortogonales.

Solución:

$\vec{A} \bullet \vec{B}$ = (3)(–4) + (2)(8) + (1)(–4) = –12 + 16 –4 = 0.

Como $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$, ambos vectores son ortogonales.

Otra forma de evaluar dicha condición es: $\vec{A} + \vec{B}$ = (3; 2 ; 1) + (–4; 8 ¸–4) = (–1; 10; –3)

$$\|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{(-1)^2 + 10^2 + (-3)^2} = \sqrt{110}$$

$\vec{A} - \vec{B}$ = (3; 2 ; 1) – (–4; 8 ¸–4) = (7 ; –6; 5)

$$\|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{7^2 + (-6)^2 + 5^2} = \sqrt{110}$$

Como $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A} - \vec{B}\|$, entonces $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales.

Ejemplo:

Sean los vectores $\vec{A}$ = (3 ; 4) y $\vec{B}$ = (–1 ; 2). Si se cumple que $\vec{A} = \vec{R} - \vec{S}$, donde $\vec{R}$ es paralelo a $\vec{B}$ y ortogonal a $\vec{S}$, determinar $\vec{R} + \vec{S}$.

Solución:

Como $\vec{R}$ es paralelo a $\vec{B}$, entonces: $\vec{R} = t\,\vec{B}$ → $\vec{R}$ = (–t ; 2t)

Dado que: $\vec{A} = \vec{R} - \vec{S}$ → $\vec{S} = \vec{R} - \vec{A}$ → $\vec{S}$ = (–t ; 2t) – (3 ; 4) = (–t –3 ; 2t –4)

Como $\vec{R}$ es ortogonal a $\vec{S}$: $\vec{R} \bullet \vec{S} = 0$ → –t (–t–3) + 2t (2t –4) = 0

$t^2 + 3t + 4t^2 - 8t = 0$ → $5t^2 - 5t = 0$ → $t(t-1) = 0$ → t = 1 o t = 0

Si t = 0: $\vec{R}$ = (0;0) y $\vec{S}$ = (–3 ; –4) → $\vec{R} + \vec{S}$ = (–3 ; –4)

Si t = 1: $\vec{R}$ = (–1; 2) y $\vec{S}$ = (–4 ; –2) $\rightarrow$ $\vec{R}+\vec{S}$ = (–5 ; 0)

Observación:

En R^2, si se tiene un vector $\vec{A}$ = (a_1 , a_2), es posible demostrar que su vector ortogonal, es el vector que tiene la misma longitud o módulo que $\vec{A}$, y es el vector $\vec{A}^{\perp}$ = (–a_2, a_1).

Ejemplo:

Dado los vectores $\vec{A}$ = (3, 4) y $\vec{B} = (-2, 1)$, determinar $(\vec{A}^{\perp}+\vec{B})^{\perp}$

Solución:

$\vec{A}$ = (3, 4) $\rightarrow$ $\vec{A}^{\perp}$ = (–4, 3) $\rightarrow$ $(\vec{A}^{\perp}+\vec{B})$ = (–4, 3) + $(-2, 1)$ = (–6, 4)

$(\vec{A}^{\perp}+\vec{B})^{\perp}$ = (–4, 6)

7. Bases

Un vector cualquiera puede ser expresado como la combinación lineal de un conjunto de vectores que se toma como **base** y se denomina de la misma forma. El número de vectores **base,** dependerá de la dimensión del espacio vectorial. Así, por ejemplo, los vectores en R^2, pueden ser expresados en función a dos vectores que se toman como base, mientras que en R3 se necesitará de tres vectores base (Apostol, 2000)

Por ejemplo, todos los vectores en R^2, se pueden expresar como una combinación lineal de los vectores (0; 1) y (1; 0); como puede verse en los siguientes ejemplos:

$\vec{A}$ = (3; 4) = 3 (1 ; 0) + 4 (0 ; 1)

$\vec{B}$ = (–2 ; 5) = –2 (1 ; 0) + 5 (0 ; 1)

$\vec{C}$ = (0 ; –3) = 0 (1 ; 0) + (–3) (0 ; 1)

Por tanto, los vectores u_1 = (1;0) y u_2 = (0;1) constituirán una base para todos los vectores en R^2. Además, puede demostrarse que (1;0) y (0; 1) son ortonormales y tienen módulo igual a 1, por lo que se denomina una **base ortonormal unitaria.**

Entonces : **B = {** (1;0) , (0;1)}

Algo similar sucede en R^3, donde cualquier vector se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios e_1 = (1; 0; 0) ; e_2 = (0; 1; 0) y e_3 = (0; 0; 1). Así, por ejemplo:

$\vec{A}$ = (3 ; 4; 2) = 3 (1 ; 0; 0) + 4 (0 ; 1; 0) + 2 (0; 0; 1)

$\vec{B}$ = (–2 ; 5; 3) = –2 (1 ; 0; 0) + 5 (0 ; 1; 0) + 3 (0; 0; 1)

$\vec{C}$ = (0 ; –3; 1) = 0 (1 ; 0; 0) + (–3) (0 ; 1; 0) + 1 (0; 0; 1)

Ahora bien, desde Hamilton, se ha introducido la siguiente simbología:

En R^2: **i =** (1 ; 0) y **j =** (0 ; 1)

En R^3: **i** = (1 ; 0 ; 0) ; **j** = (0; 1; 0) ; **k** = (0 ; 0; 1)

Luego, los vectores también podrían representarse usando la simbología anterior como:

$\vec{A}$ = (3 ; 4) = 3 (1 ; 0) + 4 (0 ; 1) → Entonces : $\vec{A}$ = 3 **i** + 4 **j**

$\vec{B}$ = (–2 ; 5; 3) = –2 (1 ; 0; 0) + 5 (0 ; 1; 0) + 3 (0; 0; 1)

Por lo tanto, $\vec{B}$ = –2 **i** + 5 **j** + 3 **k**

La representación gráfica de los vectores **i**, **j** y **k**, se muestra en la Figura 9.

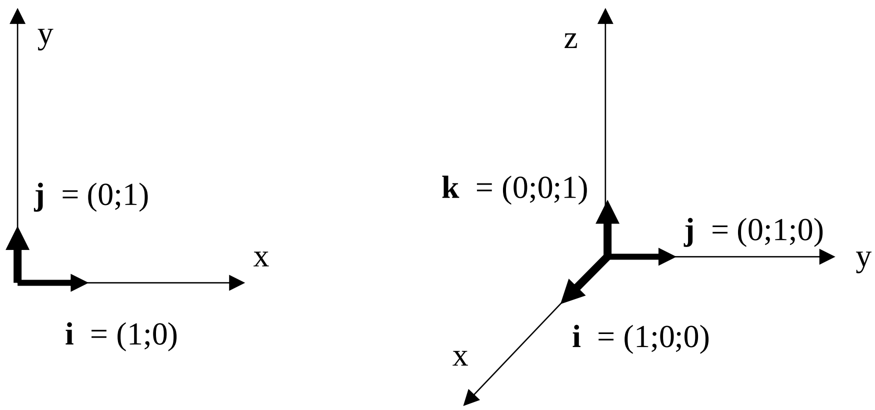


Figura 9

8. Vector unitario

El vector unitario $\vec{u}$ de un vector $\vec{A}$, es otro vector cuyo módulo o norma es igual a la unidad, pero que es paralelo al vector $\vec{A}$. La representación gráfica del vector unitario se muestra en la Figura 10.

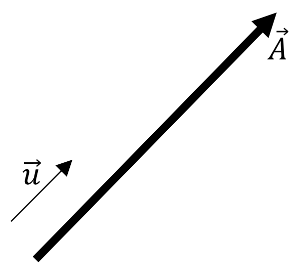


Figura 10

Operacionalmente, el vector unitario de $\vec{A}$ se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}}$$

Ejemplo: Dado el vector $\vec{A}$ = (3; –4) , encontrar su vector unitario.

Solución:

$\vec{A}$ = (3; –4) $\rightarrow$ $\|\vec{A}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$$\vec{u} = \frac{(3;4)}{5} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$$

Observación: Dos vectores paralelos tienen el mismo vector unitario.

Ejemplo:

Considere el vector $\vec{A}$ = (3; –4) y un vector $\vec{B}$, paralelo a $\vec{A}$, pero cuyo módulo o norma es 50. Determinar las componentes del vector $\vec{B}$.

Solución

Tenemos dos formas de resolver este problema. Una primera forma es usando el concepto de vector paralelo, los cuales cumplen con la condición que $\vec{A}$ = t $\vec{B}$. Luego:

(3; –4) = t $\vec{B}$ → $\vec{B}$ = (3/t ; –4/t).

Como $\|B\|$= 50 → 50 = $\sqrt{\left(\frac{3}{t}\right)^2 + \left(\frac{-4}{t}\right)^2}$ → 50 = $\frac{5}{t}$ → t = 1/10

Luego: $\vec{B}$ = (3/t ; –4/t) = $\left(\frac{3}{1/10}; \frac{-4}{1/10}\right)$ → $\vec{B}$ = (30 ; –40)

Otra forma, es sabiendo que al ser $\vec{B}$ paralelo a $\vec{A}$, ambos tienen el mismo vector unitario.

Es decir:

$$\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \rightarrow \vec{B} = \|\vec{B}\|\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \|\vec{B}\|\,\vec{u}_A$$

$$\vec{B} = 50\,\frac{(3;-4)}{5} = (30\,;\,-40)$$

9. Proyección ortogonal de un vector en R^2 y R^3

Consideremos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, que forman un ángulo θ entre sí. Supongamos que usamos una lámpara para iluminar desde $\vec{A}$ hacía $\vec{B}$ (ver Figura 11) , ¿qué es lo que observamos? Veríamos que se proyecta una sombra del vector $\vec{A}$ a lo largo del vector $\vec{B}$, que denominaremos la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$

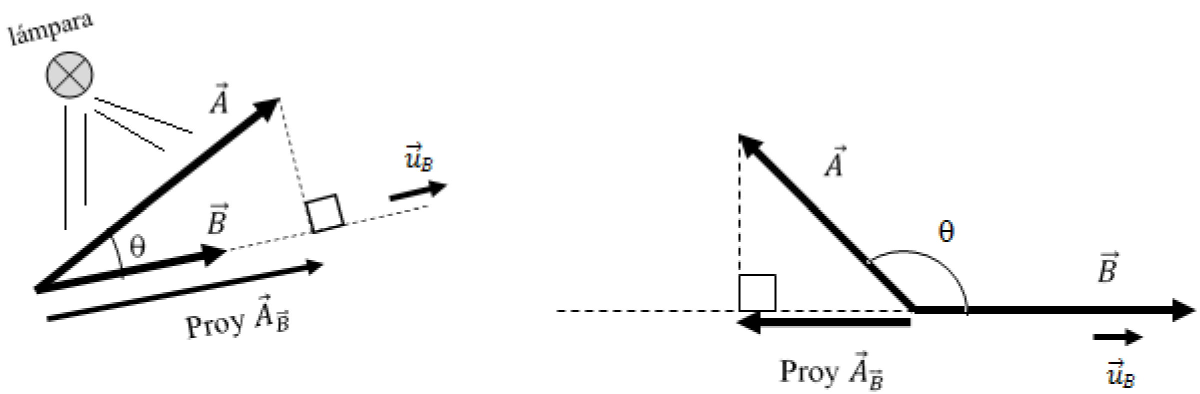


Figura 11. Proyecciones de un vector sobre otro vector

Como puede observarse en la Figura 11, el vector $Proy\ \vec{A}_{\vec{B}}$ tiene el mismo sentido que el vector $\vec{B}$ si el ángulo entre ambos vectores es agudo; pero sentido contrario, si el ángulo es obtuso. Además se cumple que el vector $Proy\ \vec{A}_{\vec{B}}$ y el vector $\vec{B}$, siempre son vectores paralelos.

Veamos cómo encontrar el módulo o la medida del vector proyección, a partir de la Trigonometría:

$\|Proy\ \vec{A}_{\vec{B}}\| = \|\vec{A}\| Cos\theta$, pero de lo visto anteriormente:

$$\text{Cos } \theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{A}\|\ \|\vec{B}\|} \quad \rightarrow \quad \|Proy\ \vec{A}_{\vec{B}}\| = \|\vec{A}\| \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{A}\|\ \|\vec{B}\|} = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$

Hasta el momento hemos obtenido la medida o módulo del vector proyección, el cual constituye un número real. Ahora bien, a fin de darle carácter vectorial, multiplicaremos el módulo de éste vector, por un vector unitario en la dirección de $\vec{B}$, quedando el vector Proyección definido como:

$$Proy\ \vec{A}_{\vec{B}} = \left[\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right] \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \left[\frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right] \vec{B}$$

Ejemplo: Dado el vector $\vec{A}$ = (2 ; 6) y el vector $\vec{B} = (3 ; 4)$; encontrar el vector Proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$.

Solución:

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (2)(3) + (6)(4) = 6 + 24 = 30$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \rightarrow Proy\ \vec{A}_{\vec{B}} = \left(\frac{30}{5^2}\right)(3 ; 4) = \left(\frac{90}{25}, \frac{120}{25}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

10. Rectas en R^2 y R^3

Una recta se define como un conjunto alineado de puntos todos ellos situados en una misma dirección. Esto concepto es válido tanto en R^2 como en R^3. Ahora bien, se dice que se conoce la ecuación de una recta, cuando es posible determinar la posición de un punto cualquiera sobre la recta. En el caso de las rectas en R^2, hay diversas ecuaciones, tales como la ecuación punto-pendiente, la ecuación simétrica y otras. En este trabajo, presentaremos la ecuación vectorial de la recta.

Consideremos una recta L que pasa por los puntos Po (x_o , y_o, z_o) y además se tiene un vector $\vec{a}$ = (a_1, a_2 , a_3), denominado vector director o vector direccional. Con esta información podemos ubicar cualquier punto P(x, y, z) de la recta que esté alineado con el vector $\vec{a}$, tal como se muestra en la Figura 12, donde para ubicar un punto cualquiera, sólo tendríamos que hacer variar la longitud y el sentido del vector $\vec{a}$:

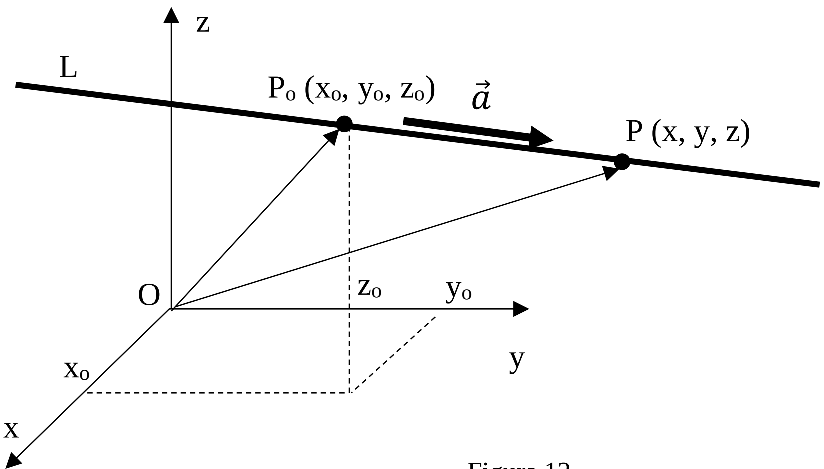


Figura 12

Se puede escribir la siguiente ecuación vectorial: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_o} + t\,\vec{a}$,o simplemente:

$P = P_o + t\,\vec{a}$, donde t es un número real, la cual corresponde a la ecuación vectorial de la recta.

De donde: $(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t\,(a_1, a_2, a_3)$

Dando lugar a las siguientes **ecuaciones paramétricas de la recta**:

$$x = x_o + t\,a_1 \; ; \qquad y = y_o + t\,a_2 \; ; \qquad z = z_o + t\,a_3$$

Si despejamos el parámetro **t** de las ecuaciones anteriores, es posible obtener la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}$$

Ejemplo:

Considere una recta L que pasa por el punto (2; –1; 1) y tiene como vector director al vector $\vec{a}$ = (2; –3; 1). Determinar: a) la ecuación vectorial, b) la ecuación paramétrica, c) la ecuación continua de la recta y d) el punto de intersección de dicha recta con el plano XY.

Solución:

a) P = (2; –1; 1) + t (2; –3; 1)

b) x = 2 + 2 t

y = –1 –3 t

z = 1 + t

c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

d) Cuando la recta corta el plano XY, z = 0. Luego:

z = 1 + t = 0

t = –1

x = 2 + 2(–1) = 0

y = –1-3(–1) = 2

Por consiguiente, el punto de intersección buscado es: (0; 2; 0).

Ejemplo:

Una recta L_1 pasa por el punto A (2 ; 3) y tiene como vector director al vector $\vec{a}$ = (3 ; 4). Otra recta L_2 pasa por el punto B (–10; 2) y tiene como vector director al vector $\vec{b}$ = (–4; 3).

Determinar: a) la ecuación vectorial de las rectas L_1 y L_2; b) las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

Solución:

a) Para la recta L_1: $P = P_o + t\,\vec{a} \;\rightarrow\; P_1 = A + t\,\vec{a}$

$$P_1 = (2; 3) + t\,(3\,; 4)$$

Para la recta L_2: $P = P_o + t\,\vec{a} \;\rightarrow\; P_2 = B + r\,\vec{b}$

$$P_2 = (–10; 2) + r\,(–4; 3)$$

b) Cuando las dos rectas se cruzan: $P_1 = P_2$

$(2; 3) + t\,(3\,; 4) = (–10; 2) + r\,(–4; 3)$

$2 + 3\,t = –10 – 4\,r$ y $3 + 4\,t = 2 + 3\,r$

De donde obtenemos el sistema de ecuaciones simultáneas:

$3t + 4\,r = –12$ y $4\,t –3\,r = –1$.

Resolviendo, se tiene: $t = –8/5$ y $r = –9/5$

Reemplazando estos valores en la ecuación de L_1 (aunque también puede trabajarse con L_2):

$P_1 = (2; 3) + (–8/5)\,(3; 4) = (–14/5; –17/5)$

Ejemplo:

Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A (3; 3; 0) y B (4; 0; 4).

Solución

Podemos elegir como punto de paso de la recta al punto A (3; 3; 0) mientras que el vector direccional $\vec{a}$ lo obtenemos por la diferencia entre las coordenadas de A y B, de modo que:

$\vec{a}$ = B – A = (3; 3; 0) – (4; 0; 4) = (–1; 3; –4), tal como se observa en el siguiente gráfico:

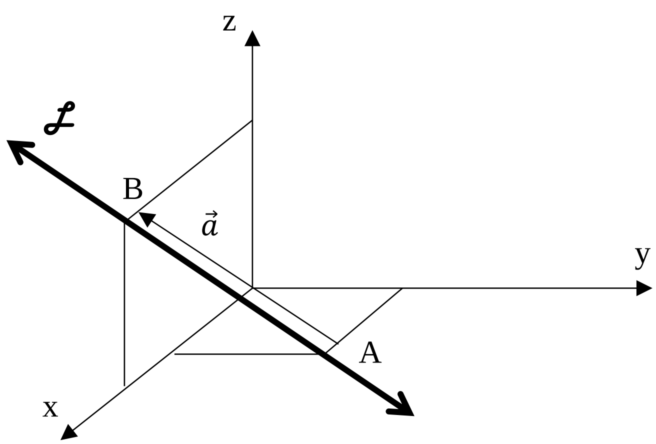


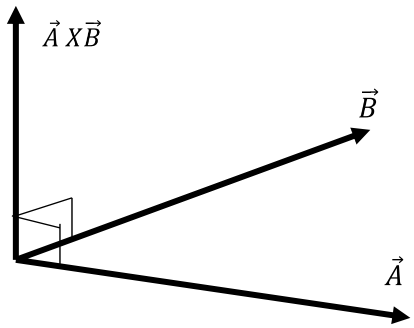
Figura 13

Luego la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ se escribe :

$$P = A + t\,\vec{a} = (3; 3; 0) + t(–1; 3; –4).$$

11. Producto Vectorial en R^3

Consideremos dos vectores $\vec{A}$ = (a_1, a_2, a_3) y $\vec{B}$=(b_1, b_2, b_3), y que estamos interesados en encontrar uno que sea ortogonal a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$, tal como se muestra en la Figura 13. Este vector ortogonal se obtiene a través de una nueva operación denominada producto vectorial y que se denota por $\vec{A}\,X\vec{B}$.



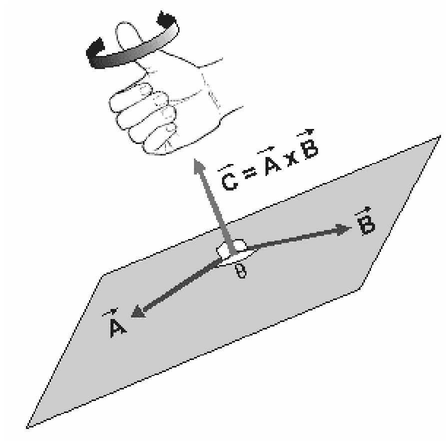


Figura 13

Como puede observarse, el resultado de esta operación es un nuevo vector, perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$, y cuyo sentido se determina por la regla de la mano derecha, según se muestra en la figura 13.

Operacionalmente, el producto vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define como:

$$\boxed{\vec{A}\,X\vec{B} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \;;\; a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \;;\; a_1\, b_2 - a_2\, b_1)}$$

Como $\vec{A}\,X\vec{B}$ es ortogonal a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$, debe cumplirse que:

$$\vec{A} \bullet \left(\vec{A}\,X\vec{B}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \vec{B} \bullet \left(\vec{A}\,X\vec{B}\right) = 0$$

Una regla nemotécnica para encontrar el producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es construir una matriz de orden 3 x 3, donde en la primera fila se colocan los vectores unitarios **i**, **j** y **k** , y en la segunda y tercera filas, las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, a continuación se procede a desdoblar dicha matriz, en tres submatrices de orden 2 x 2, según se muestra a continuación:

$$\vec{A}\,X\vec{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 \\ \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 & \mathrm{b}_3 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Desarrollando las submatrices 2 X 2, por determinantes se tiene:

$$\vec{A}\,X\vec{B} = \mathbf{i}\,(a_2\,b_3 - a_3\,b_2) - \mathbf{j}\,(a_1\,b_3 - a_3\,b_1) + \mathbf{k}\,(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{A}$ = (3; 2; –1) y $\vec{B}$= (2; 4; –2); encontrar un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución:

El vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se obtiene a través del producto vectorial $\vec{A}\,X\vec{B}$.

$$\vec{A}\,X\vec{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\vec{A}\,X\vec{B}$ = **i** $[(2)(-2)-(-1)(4)]$ –**j** $[(3)(-2)-(-1)(2)]$ + **k** $[(3)(4)-(2)(2)]$

$\vec{A}\,X\vec{B}$ = **i** [0] –**j** $[-4]$ + **k** [8] = (0; 4; 8)

Luego, el vector unitario perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ será:

$\vec{u} = \frac{\vec{A}X\vec{B}}{\|\vec{A}X\vec{B}\|} = \frac{(0;4;8)}{\sqrt{0^2+4^2+8^2}} = \frac{(0;4;8)}{\sqrt{80}}$ = 0 **i** + 0,44 **j** +0,89 **k**

Propiedades del Producto Vectorial

a) $\vec{A}\, X\vec{B} = -\vec{B}\, X\vec{A}$ (El producto vectorial no es conmutativo)

b) $(r\,\vec{A})\, X\,\vec{B}$= r $(\vec{A}\, X\vec{B})$

c) $\vec{A}\, X(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\, X\vec{B} + \vec{A}\, X\vec{C}$

d) $\|\vec{A}\, X\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \bullet \vec{B})^2$ (Identidad de Lagrange)

A partir de la identidad de Lagrange, podemos realizar la siguiente transformación propia del producto escalar:

$$\|\vec{A}\, X\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \bullet \vec{B})^2$$

$$\|\vec{A}\, X\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\|\vec{A}\|\|\vec{B}\| Cos\theta)^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 (1 - Cos^2\theta)$$

$$\|\vec{A}\, X\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 Sen^2\theta$$

$$\|\vec{A} X\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| Sen\theta$$

Aplicación geométrica del producto vectorial

Utilizando la propiedad deducida anteriormente: $\|\vec{A} X\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| Sen\theta$, para los vectores de la Figura 14, se observa a partir de la Trigonometría que: h = $\|\vec{A}\| Sen\theta$; esto nos conduce a la expresión: $\|\vec{A} X\vec{B}\| = h\, \|\vec{B}\|$= Área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

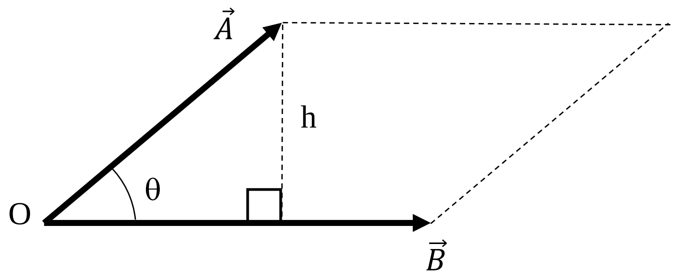


Figura No. 14

Ejemplo: Considere el paralelogramo ABCD, cuyos vértices son: A(1;1;1) ; B(4¸–3¸6) ; C(6; –4;7) y D(3;0;2). Se pide:

a) Demostrar que es un paralelogramo, y

b) Calcular su área.

Solución:

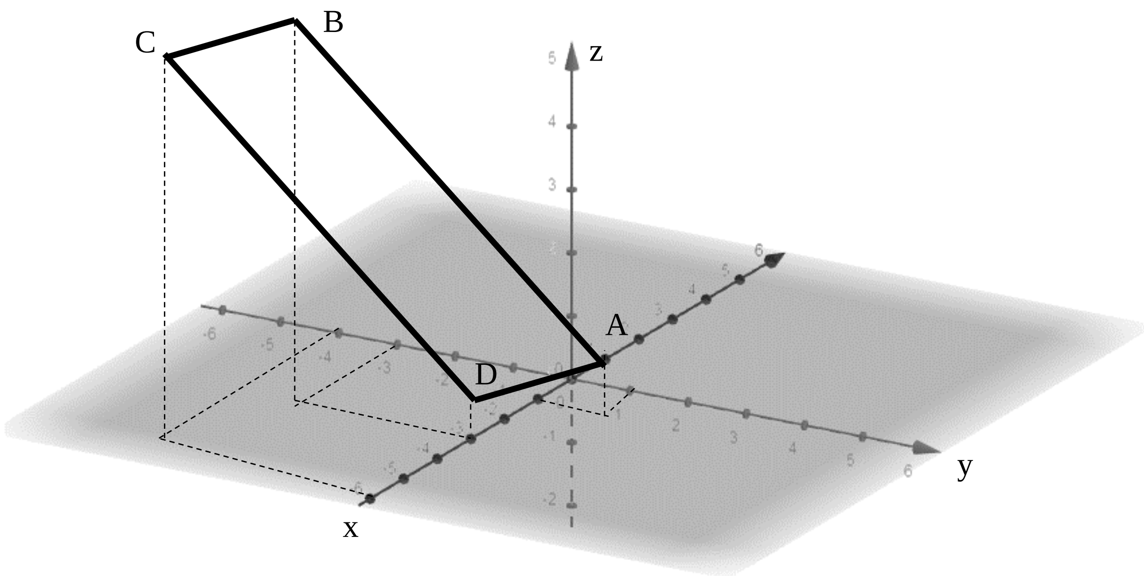
a) En un paralelogramo los lados son iguales en longitud dos a dos. Una gráfica del paralelogramo a analizar se muestra a continuación, donde podemos trazar los vectores:

$\overrightarrow{AB}$= B(4¸–3¸6) – A(1;1;1) = (3; –4;5) → $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$\overrightarrow{DC}$= C(6; –4;7) – D(3;0;2) = (3; –4;5) → $\left\|\overrightarrow{DC}\right\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$\overrightarrow{BC}$= C(6; –4;7) – B(4¸–3¸6) = (2; –1;1) → $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{AD}$= D(3;0;2) – A(1;1;1) = (2; –1;1) → $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$



Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, se demuestra que la figura es un paralelogramo.

b) Para encontrar su área aplicamos: Área = $\left\|\vec{A}X\vec{B}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}X\overrightarrow{AD}\right\|$

$$\overrightarrow{AB}X\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}X\overrightarrow{AD} =$ **i** (1) –**j** (–7) + **k** (3) = 1 **i** +7 **j** + 3 **k**

Área = $\left\|\overrightarrow{AB}X\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2}$ =59 u^2

Aplicación al paralelismo de vectores

Se sabe que el módulo del producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está dado por:

$\left\|\vec{A}X\vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|Sen\theta$, siendo θ el ángulo formado por ambos vectores. Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos; θ = 0, y entonces: Sen θ = 0 → $\left\|\vec{A}X\vec{B}\right\| = 0$ → $\vec{A}X\vec{B}$ = 0.

Por consiguiente, el producto vectorial de dos vectores paralelos, siempre es cero.

Ejemplo:

Determinar si los puntos A(5;1;0) ; B(7; 4; –1) y C(1; –5; 2) se encuentran ubicados en una misma recta.

Solución:

Si los puntos pertenecen a una misma recta, al trazar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, éstos deberían ser paralelos, por lo que el producto vectorial de ambos vectores debería ser cero. Veamos:

$\overrightarrow{AB}$= B(7; 4; –1) – A(5;1;0) = (2; 3; –1)

$\overrightarrow{AC}$= C(1; –5; 2) – A(5;1;0) = (–4; –6; 2)

$$\overrightarrow{AB} X \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} X \overrightarrow{AD}$ = **i** (0) –**j** (0) + **k** (0) = 0 **i** + 0 **j** + 0 **k**

Por lo que se concluye que los tres puntos, pertenecen a la misma recta, es decir, son colineales.

12. Triple producto escalar

Con tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, se puede definir un nuevo producto denominado triple producto escalar, el que se denota por $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$, y que se define así :

$$\boxed{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}] = \vec{A} \bullet (\vec{B} X \vec{C})}$$

Por consiguiente: $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$= $(a_1, a_2, a_3) \bullet (b_2 c_3 – b_3 c_2 ; b_3 c_1 – b_1 c_3 ; b_1 c_2 – b_2 c_1)$ =

$$= a_1\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} - a_2\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\left[\vec{A}\vec{B}\vec{C}\right] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

El Triple producto escalar goza de la siguiente propiedad cíclica:

$$\left[\vec{A}\vec{B}\vec{C}\right] = \left[\vec{B}\vec{C}\vec{A}\right] = \left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]$$

Interpretación geométrica del triple producto escalar

De acuerdo a lo que se muestra en la Figura 15, el triple producto escalar nos da el volumen del paralelepípedo que forman los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

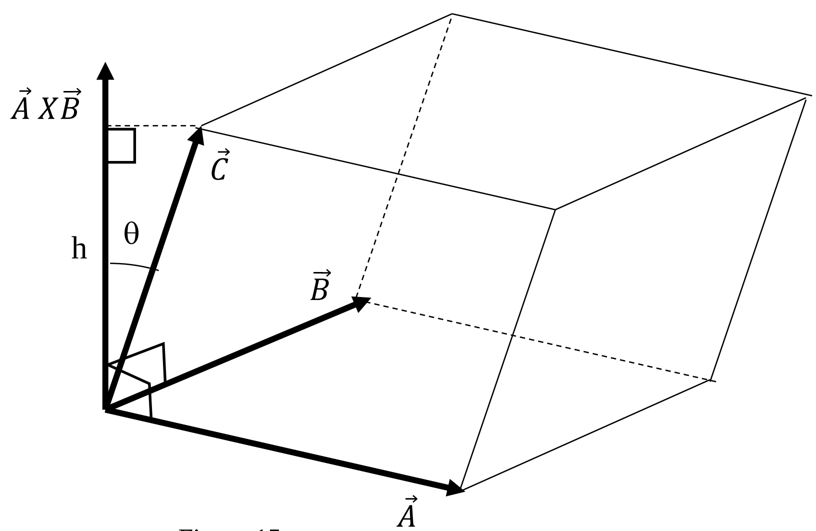


Figura 15

Usando las propiedades del producto escalar:

$$\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right] = \vec{C} \bullet (\vec{A}X\vec{B}) = \|\vec{C}\|\|\vec{A}X\vec{B}\|Cos\theta$$

Donde $\|\vec{A}X\vec{B}\|$ representa el área de la base del paralelepípedo y $h = \|\vec{C}\|$ Cos θ .

Por consiguiente, al multiplicar el área de la base por la altura, tendemos el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. Luego, como el volumen debe ser siempre una cantidad positiva, se tendrá que: Volumen del paralelepípedo = $\left|\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]\right|$

Observaciones:

a) Si los tres $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ estuvieran en un mismo plano, el volumen del supuesto paralelepípedo que forman dichos vectores sería cero. Por consiguiente, una forma de establecer si tres vectores son coplanares, es que su triple producto escalar debe ser cero.

b) Es posible demostrar que el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es 1/6 del volumen del paralelepípedo formado por los mismos vectores, como se observa en la Figura 16.

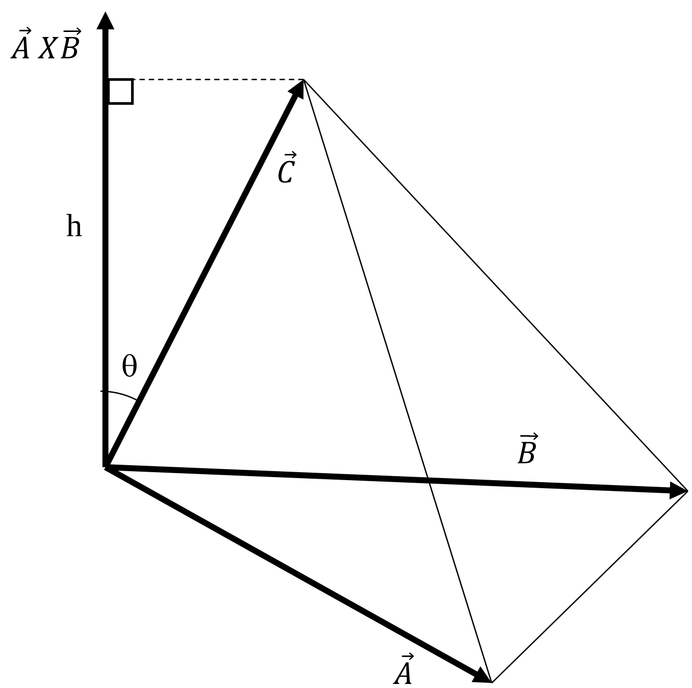


Figura 16

Se sabe que el volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{3}\ A_{base} \cdot h$. Luego:

$A_{base} = \frac{1}{2}\left\|\vec{A}X\vec{B}\right\|$ y $h = \left\|\vec{C}\right\|$ Cos θ $\rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left\|\vec{A}X\vec{B}\right\|\left\|\vec{C}\right\|$ Cos θ $= \frac{1}{6}\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]$

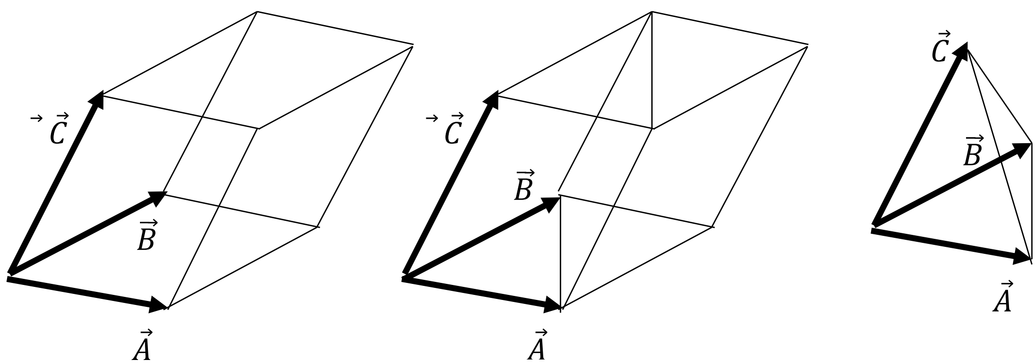
$$V = \frac{1}{6}\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]$$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{A} = 3\,\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}$, $\vec{B} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k}$ y $\vec{C} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\,\boldsymbol{k}$, determinar el volumen del paralelepípedo, prisma triangular y tetraedro formado por los tres vectores.

Solución:

Esquematizando con los tres vectores se tienen los siguientes gráficos:



Paralelepípedo Prisma Triangular Tetraedro

Donde: $V_{Paralelepípedo} = \left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]$; $V_{Prisma\ triangular} = \frac{1}{2}\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]$, $V_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right]$

$$\left[\vec{C}\vec{A}\vec{B}\right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = 3\,(1) + 2\,(5) + 5(17) = 98$$

$V_{Paralelepípedo} = 98\ u^3$

$V_{Prisma\ triangular} = \frac{1}{2}(98) = 49\ u^3$

$V_{Tetraedro} = \frac{1}{6}(98) = \frac{49}{3}\ u^3$

13. Planos en R^3

Mientras que para determinar una recta se requieren dos puntos de paso; un plano queda definido en base a tres puntos no colineales, llamemos P_o, P_1 y P_2. Con estos tres puntos, se puede determinar dos vectores direccionales $\vec{a}$ y $\vec{b}$, a partir de los cuales se puede encontrar cualquier punto P del plano, tal como se muestra en la Figura 17.

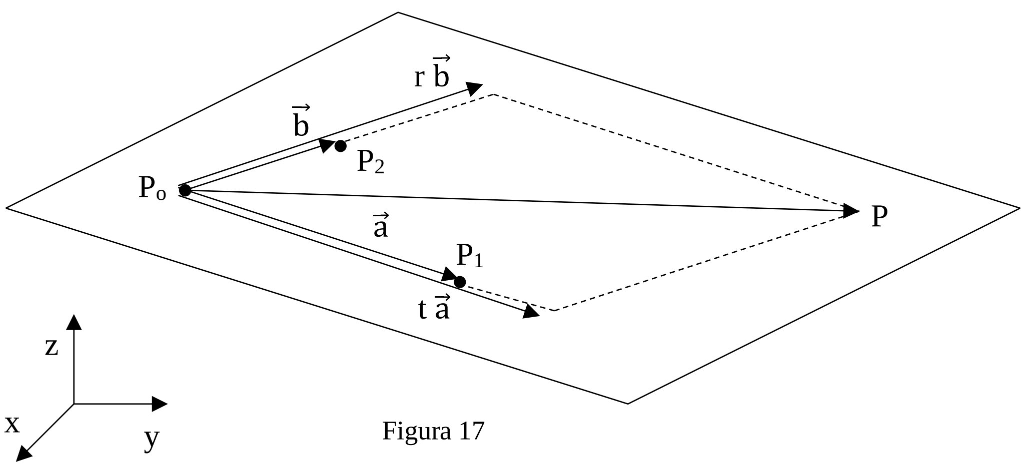


Figura 17

Como puede observarse, los vectores direccionales se definen como:

$\vec{a} = \overrightarrow{P_oP_1}$ = $P_1 - P_o$, y

$\vec{b} = \overrightarrow{P_oP_2}$ = $P_2 - P_o$.

Luego la ubicación de un punto P cualquiera del plano, estará dada por la siguiente ecuación vectorial: $P = P_o + \mathbf{t}\,\vec{a} + \mathbf{r}\,\vec{b}$, donde **t** y **r** son números reales.

Las ecuaciones paramétricas del plano, se obtienen a partir de la ecuación vectorial:

$P = P_o + t\,\vec{a} + r\,\vec{b}$

$(x; y; z) = (x_o ; y_o; z_o) + t\,(a_1 ; a_2; a_3) + r\,(b_1; b_2; b_3)$

De donde: $x = x_o + t\,a_1 + r\,b_1$; $y = y_o + t\,a_2 + r\,b_2$; $z = z_o + t\,a_3 + r\,b_3$

Observaciones:

a) Dado que los vectores direccionales $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pertenecen al plano, el prooducto vectorial de ellos $\vec{a} \times \vec{b}$ será un vector normal al plano. Por consiguiente, cualquier vector ortogonal o perpendicular al plano, deberá ser paralelo al vector $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Consideremos el plano mostrado en la Figura 18, donde se conoce un punto de paso P_o del plano y los vectores direccionales $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Con estos elementos, podemos determinar la posición de un punto cualquiera del plano P, dado que si trazamos el vector $\overrightarrow{P_oP}$, al ser éste ortogonal al vector normal al plano: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$, es posible obtener la siguiente ecuación: $\overrightarrow{P_oP} \bullet \vec{n} = 0 \rightarrow (P - P_o) \bullet \vec{n} = 0$. Esta ecuación se conoce como la ecuación normal del plano.

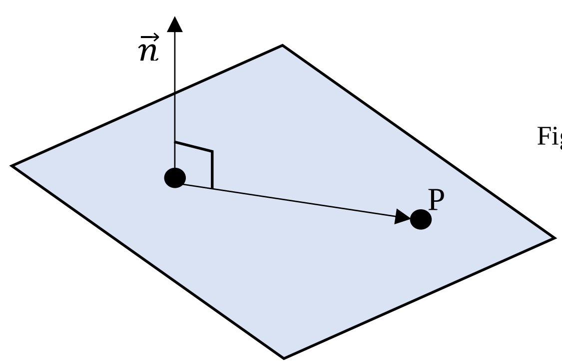


Figura No. 18

c) A partir de: $(P - P_o) \bullet \vec{n} = 0$, entonces $(x - x_o;\ y - y_o;\ z - z_o) \bullet (n_1;\ n_2;\ n_3)$, se obtiene: $(x - x_o)\,n_1 + (y - y_o)\,n_2 + (z - z_o)\,n_3 = 0$. Luego, $n_1\,x + n_2\,y + n_3\,z = d$, donde

$d = n_1x_0 + n_2y_o + n_3z_o$. La ecuación escrita de ésta última forma, se denomina la Ecuación General del Plano, con normal (n_1 , n_2 , n_3).

Ejemplo: Hallar la ecuación vectorial, la ecuación general y las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por los puntos (1; 2;–3) , (4; –2; 4) y (5; –3; –1).

Solución:

Consideremos que los puntos de paso sean P_o = (1; 2; –3); P_1 = (4; –2; 4) y P_2 = (5; –3; –1). Luego los vectores direccionales serían: $\vec{a} = \overrightarrow{P_oP_1}$ = (4; –2; 4) – (1; 2; –3) = (3; –4; 7) y

$\vec{b} = \overrightarrow{P_oP_2}$ = (5; –3; –1) – (1; 2;–3) = (4; –5; 2).

Por consiguiente, la ecuación vectorial del plano es:

$P = P_o + t\,\vec{a} + r\,\vec{b} \rightarrow P = (1; 2; -3) + t\,(3; -4; 7) + r\,(4; -5; 2)$.

Las ecuaciones paramétricas del plano, se obtienen a partir de la ecuación vectorial:

(x; y; z) = (1; 2; –3) + t (3; –4; 7) + r (4; –5; 2). De donde:

$x = 1 + 3\,t + 4\,r$; $y = 2 - 4\,t - 5\,r$; $z = -3 + 7\,t + 2\,r$

Para obtener la ecuación general del plano, determinamos primero el vector normal a él, donde $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Por lo que: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 7 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{i}\,(27) - \mathbf{j}\,(-22) + \mathbf{k}\,(1) = (27; 22; 1)$

Tomando los puntos P_o = (1; 2; –3) y un punto cualquiera del plano P(x; y; z), debe cumplirse que: $(P - P_o) \bullet \vec{n} = 0$. Entonces : $((x; y; z) - (1; 2; -3)) \bullet (27; 22; 1) = 0$.

$27\,(x - 1) + 22\,(y - 2) + 1\,(z + 3) = 0$

Por lo tanto, $27x + 22y + z = 68$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (1; –3; –2) y es perpendicular al plano $3x - 4y + 5z = 10$. Encuentre también el punto de intersección del plano con la recta.

Solución:

A partir de la ecuación general del plano: $3x - 4y + 5z = 10$, se infiere que la normal al plano es: $\vec{n} = (3; -4; 5)$. Luego, como la recta es perpendicular al plano, el vector $\vec{n}$ es paralelo a la recta, por lo que puede tomarse como el vector direccional de la recta.

Por lo cual la ecuación vectorial de la recta es: $P = P_o + t\,\vec{n}$.

Entonces, $(x; y; z) = (1; -3; -2) + t\,(3; -4; 5)$.

Luego, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = 1 + 3t \qquad y = -3 - 4t \qquad z = -2 + 5t.$$

El punto de intersección de la recta con el plano, se obtiene reemplazando las ecuaciones paramétricas de la recta, en la ecuación general del plano:

$3(1 + 3t) - 4(-3 - 4t) + 5(-2 + 5t) = 10$

Entonces, $9t + 16t + 25t = -5$

Por lo tanto, $t = -1/10$

Luego, las coordenadas del punto de intersección serán:

$$x = 1 + 3(-1/10) = 7/10 \qquad y = -3 - 4(-1/10) = -13/5 \qquad z = -2 + 5(-1/10) = -5/2$$

Posiciones relativas de rectas y planos:

a) Dos rectas L_1 : $P_o + t\vec{a}$ y L_2: $Q_o + r\vec{b}$ son paralelas, si sus vectores direccionales $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos. Dos rectas paralelas puede que sean coincidentes ($L_1 = L_2$) o simplemente son paralelas sin ningún punto de intersección ($L_1 \cap L_2 = \varnothing$). Si dos rectas paralelas, tienen un punto común, entonces serán coincidentes.

b) Si dos rectas L_1 y L_2 en el espacio no son paralelas, entonces hay la posibilidad que se intercepten en un punto o que simplemente no tengan ningún punto de corte. Si dos rectas no se intersecan, se dice que éstas se cruzan en el espacio.

c) Suponiendo que se tiene dos rectas L_1 : $P_o + t\vec{a}$ y L_2: $Q_o + r\vec{b}$, una forma práctica de conocer si se intersecan es encontrar el triple producto escalar $[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$, donde $\vec{c} = P_o - Q_o$. Si $[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] = 0$, tendríamos que los vectores $\vec{c}$, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ serían coplanares, por lo que deberían intersecarse. Si $[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}] \neq 0$, los vectores $\vec{c}$, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ pertenecerían a planos diferentes, por lo que las rectas sólo se cruzarían.

d) Dos planos P_1 y P_2, son paralelos, si sus vectores normales también son paralelos.

e) Dos planos paralelos, puedan que sean coincidentes o que sean paralelos con intersección nula.

f) Si dos planos se cortan en el espacio, su intersección será una recta.

14. Resolución de problemas

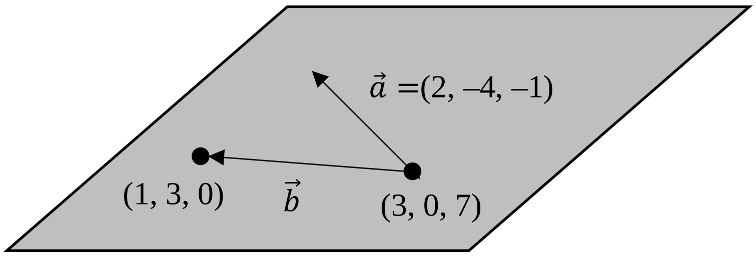
<u>**Problema 1:**</u>

Encontrar la ecuación general del plano que contiene al punto (1, 3, 0) y a la línea recta dada por la ecuación: $x = 3 + 2t$, $y = -4t$, $z = 7 - t$.

Solución:

La ecuación vectorial de la recta contenida en el plano es: (x, y, z) = (3, 0, 7) + t (2, –4, –1).

Luego, un bosquejo del plano se muestra en la siguiente gráfica:



Con los puntos (3,0,7) y (1, 3, 0) podemos definir el vector direccional

$\vec{b}$ = (1, 3, 0) – (3, 0, 7) = (–2, 3, –7).

La normal al plano está dado por el producto $\vec{a}x\vec{b}$:

$\vec{a}X\vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ = **i** (31) – **j** (–16) + **k** (–2) = (31, 16, –2).

La ecuación normal del plano es: $(P - P_o) \bullet \vec{n} = 0 \rightarrow ((x, y, z) - (3, 0, 7)) \bullet (31,16, -2) = 0$

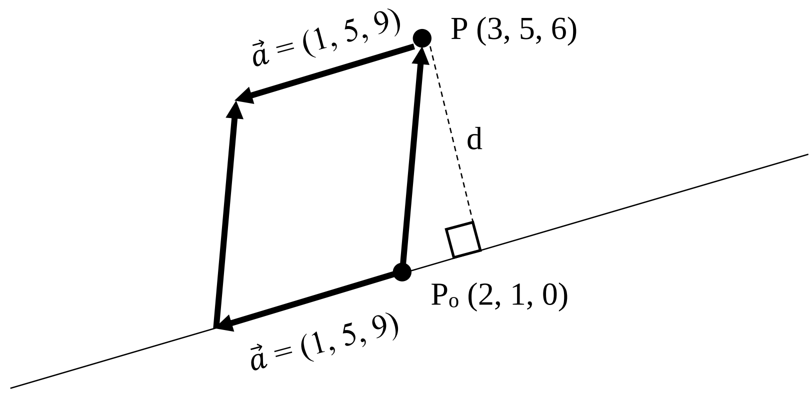
Operando: 31 (x – 3) + 16 (y – 0) –2 (z – 7) = 0 $\rightarrow$ 31 x + 16 y –2 z = 79

<u>Problema 2:</u>

Encontrar la distancia entre el punto P = (3, 5 , 6) y la recta dada por la siguiente ecuación: (2, 1, 0) + t (1, 5, 9).

Solución:

Vemos que la recta pasa por el punto P_o (2, 1, 0) y tiene como vector direccional al vector $\vec{a}$ = (1, 5, 9). Como se muestra en el siguiente esquema representativo, podemos trazar el vector $\overrightarrow{P_oP}$ = (3 , 5, 6) – (2, 1, 0) = (1, 4, 6). Con $\overrightarrow{P_oP}$ y el vector direccional $\vec{a}$ se puede formar un paralelogramo.



El área del paralelogramo estará dado por: Área = $\left\|\overrightarrow{P_o P} x \vec{a}\right\| = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} =$

$\|\mathbf{i}(6) - \mathrm{j}(3) + \mathbf{k}(1)\ \| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{46}$

Pero también se sabe por Geometría Elemental, que el área de un paralelogramo es

Área = base x altura , por lo que:

Área = $\|\vec{a}\|d = \sqrt{1^{\,2} + 5^2 + 9^2}\ .\ d = \sqrt{107}d$. Igualando, se obtiene:

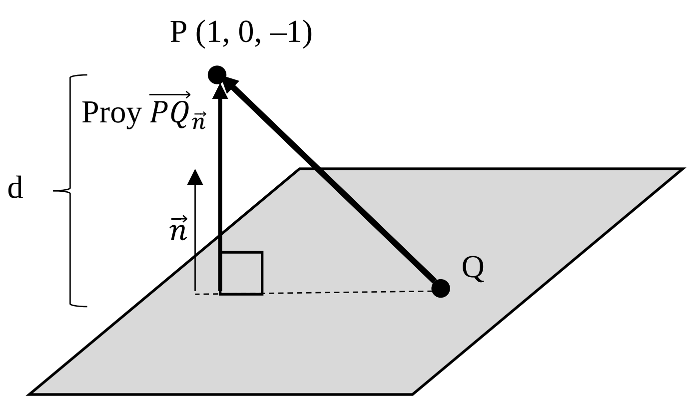
$\sqrt{107}d = \sqrt{46}\ \rightarrow d = \frac{\sqrt{46}}{\sqrt{107}}$ = 0,66 u

<u>Problema 3:</u>

Encontrar la distancia entre el punto P (1, 0, –1) y el plano definido por la siguiente ecuación general: 5x + 4 y + 3 z = 1.

Solución:

A partir de la ecuación del plano, se puede obtener el vector normal al plano: $\vec{n}$ = (5, 4, 3). A continuación, mostramos un esquema del problema, donde se observa la distancia **d** que se quiere encontrar:



En la figura se observa que la distancia d es el módulo del vector

Proy $\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}$, donde Q es un punto arbitrario del plano.

A fin de encontrar el punto Q, más fácil de determinar, podemos hacer en la ecuación del plano x = 0 e y = 0 $\rightarrow$ 5(0) + 4(0) + 3 z = 1 $\rightarrow$ z = 1/3, por lo que el punto es Q = (0, 0, 1/3), además: $\overrightarrow{QP}$ = (1, 0, –1) – (0, 0, 1/3) = (1, 0, – 4/3).

A continuación proyectamos el vector $\overrightarrow{QP}$ sobre la normal $\vec{n}$:

$$\left\|Proy\,\vec{A}_{\vec{B}}\right\| = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{\|\vec{B}\|} \quad \rightarrow \quad \left\|Proy\,\overrightarrow{QP}_{\vec{n}}\right\| = \frac{\overrightarrow{QP} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{5+3(-\frac{4}{3})}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$$

Luego, la distancia entre el punto P y el plano es $\frac{1}{\sqrt{50}}$ u.

<u>Problema 4:</u>

Encontrar la intersección de los dos planos:

x + y + z = –1 y x + 2y + 3z = –4.

Solución:

Se sabe por Geometría Elemental, que dos planos se intersecan a lo largo de una línea recta. Asimismo, la ecuación de los puntos ubicados sobre la recta, deben satisfacer las ecuaciones de los dos planos: x + y + z = –1 y x + 2y + 3z = –4.

A fin de determinar la ecuación paramétrica de la recta, la forma más rápida es suponer que: z = t , de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

x + y = –1 – t ……………………..(1)

x + 2 y = –4 –3 t ……………………..(2)

Restando (2) – (1), obtenemos: y = –3 –2 t.

Reemplazando en (1): x + (–3 –2 t) = –1 – t

Entonces, x = 2 + t

Por consiguiente, la ecuación vectorial de la recta que representa la intersección de ambos, queda expresada por: L = (2, –3, 0) + t (1, –2, 1)

Problema 5:

Un plano se define por la ecuación general: x – 2y + 3 z = 18. Determinar la ecuación vectorial del plano.

Solución:

Recordemos que la ecuación vectorial de un plano se define por $P = P_o + t\vec{a} + r\,\vec{b}$. Luego, para resolver el problema de la forma más directa, asignemos los siguientes parámetros:

$$x = t$$

$$y = r.$$

Bajo esta premisa, reemplazamos los valores asumidos en la ecuación general del plano:

$$x - 2y + 3\,z = 18$$

$$t - 2\,r + 3z = 18$$

$$z = 6 - 1/3\,t - 2/3\,r$$

Luego, la ecuación vectorial del plano queda como:

P = (0,0,6) + t (1, 0, –1/3) + r (0, 1, –2/3).

Problema 6:

¿Para qué valores de **a** los vectores en R^2 , (a–1, 2) y (a–4, 1) son ortogonales?

Solución:

Dos vectores ortogonales o perpendiculares deben cumplir con la condición que su producto escalar es cero. Luego:

$$(a-1, 2) \bullet (a-4, 1) = 0 \;\rightarrow\; (a-1)(a-4) + 2 = 0$$

$$a^2 - 5\,a + 6 = 0 \;\rightarrow\; (a-2)(a-3) = 0$$

Resolviendo: $a = 2$ y $a = 3$

Problema 7:

Encontrar el ángulo entre los planos P_1: $x + 2 = y - z$ y P_2: $2x - y = z$.

Solución:

El ángulo formado por los planos P_1 y P_2 será idéntico al ángulo formado entre sus normales.

Acomodando la ecuación de cada plano se tiene:

P_1: $x + 2 = y - z \rightarrow x - y + z = -2 \rightarrow \vec{n}_1 = (1, -1, 1)$

P_2: $2x - y = z \rightarrow 2x - y - z = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, -1, -1)$

El ángulo entre las normales se obtiene a partir del producto escalar:

$\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = (1)(2) + (-1)(-1) + (1)(-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

$\|\vec{n_1}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$; $\|\vec{n_2}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$\text{Cos } \theta = \dfrac{\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}{\|\vec{n_1}\| \, \|\vec{n_2}\|} \rightarrow \text{Cos } \theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} \rightarrow \theta = \text{Cos}^{-1} \left(\dfrac{2}{\sqrt{18}}\right)$

Problema 8:

Demostrar la siguiente relación que implica a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \frac{1}{4}\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2$$

Solución:

Sabemos que: $\vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$. Luego:

$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} + \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b}$

$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\, \vec{a} \bullet \vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2$ ……………………….(1)

$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{b} \bullet \vec{a} + \vec{b} \bullet \vec{b}$

$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\, \vec{a} \bullet \vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2$ ……………………………….(2)

Restando (1) – (2): $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 - \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = 4\,\vec{a} \bullet \vec{b}$

De donde: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \frac{1}{4}\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2$

Problema 9:

Dadas las rectas

L1: (1, 2, 3) + t (2, –1, 0) y

L2: (3, 2, 1) + r (–6, 3, 0)

Determinar: a) si las rectas son paralelas o no. b) En el caso de ser paralelas, determinar si las rectas son o no coincidentes. c) En el caso de que las rectas sean no coincidentes, determinar la distancia entre ellas.

Solución:

a) Dos rectas paralelas, deben tener sus vectores direccionales paralelos.

Si llamamos $\vec{a}$ = (2, –1, 0) al vector direccional de L1 y $\vec{b}$ = (–6, 3, 0) al vector direccional de L2, se observa que: $\vec{b} = 3\,\vec{a}$, siendo uno múltiplo del otro, por lo que se concluye que $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$, y por consiguiente L1 es paralela a L2.

b) Para ver si coincidentes, probemos si el punto (3, 2, 1) que pertenece a L2, también pertenece a L1.

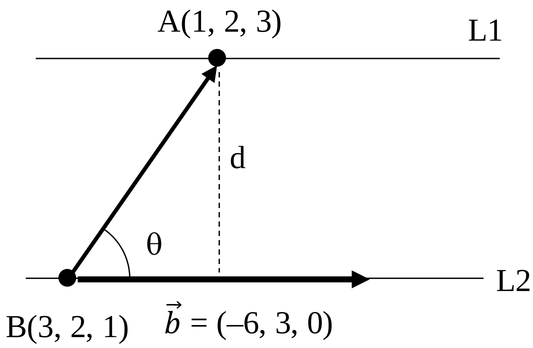
Luego: (3, 2, 1) = (1, 2, 3) + t (2, –1, 0)

$3 = 1 + 2\,t \rightarrow t = 1$

$2 = 1 - 1\,t \rightarrow t = -1;$

$1 = 3 + 0\,t \rightarrow$ t indefinido.

Por consiguiente, al no tener un único valor para **t**, L1 y L2 son paralelos, pero no coincidentes.



c) Para determinar la distancia entre las rectas, elaboremos un esquema gráfico, donde utilizaremos las propiedades del producto vectorial. Se puede observar que la distancia "d" buscada es:

d = $\|\overrightarrow{BA}\|$Senθ, donde $\overrightarrow{BA}$ = (–2, 0, 2)

Por otro lado: $\|\overrightarrow{BA}X\vec{b}\| = \|\overrightarrow{BA}\|\|\vec{b}\|Sen\theta \;\rightarrow\; \|\overrightarrow{BA}X\vec{b}\| = d\|\vec{b}\|$ → d = $\dfrac{\|\overrightarrow{BA}x\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$

$\overrightarrow{BA}X\vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ = **i** (–6) –**j** (12) + **k** (–6)

$\|\overrightarrow{BA}X\vec{b}\| = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = 216.$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{45}$ → d = $\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\dfrac{24}{5}}$

<u>Problema 10:</u>

Considere los siguientes vectores $\vec{a}$ = 1 **i** – 2 **j** + 3 **k** , $\vec{b}$ = (2, 0, –3) y $\vec{c}$ = (–3, 2, 0).

Determinar: a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, b) $\vec{a} - 2\,\vec{b} + 3\,\vec{c}$, c) ($\vec{a}$ X $\vec{b}$) ● $\vec{c}$, d) ($\vec{c}$ X $\vec{b}$) X $\vec{a}$

Solución:

a) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ = (1, –2, 3) + (2, 0, –3) – (–3, 2, 0) = (6, –4, 0)

b) $\vec{a} - 2\,\vec{b} + 3\,\vec{c}$ = (1, –2, 3) –2 (2, 0, –3) + 3 (–3, 2, 0) = (–12, 4, 9)

c) $\vec{a}$ X $\vec{b}$ = $\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ = **i** (6) – **j** (–9) + **k** (4) = (6, 9, 4)

($\vec{a}$ X $\vec{b}$) ● $\vec{c}$ = (6, 9, 4) ● (–3, 2, 0) = (6)(–3) + (9)(2) + (4)(0) = 0

d) $(\vec{c} \text{ X } \vec{b}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{i}\,(-6) - \mathbf{j}\,(9) + \mathbf{k}\,(-4) = (-6, -9, -4)$

$(\vec{c} \text{ X } \vec{b}) \text{ X } \vec{a} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -6 & -9 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{i}(-35) - \mathbf{j}\,(-14) + \mathbf{k}\,(21) = (-35, 14, 21)$

Capítulo II

Epistemología y aplicación didáctica

1. Epistemología y didáctica de los vectores en el plano y en el espacio

Es evidente que todos estamos de acuerdo en que la Matemática es el soporte de otras ciencias, como la Física. Sin embargo, antiguamente no se pensaba así. Por ejemplo, Aristóteles creía que los entes matemáticos eran entidades abstractas, que no tenían ninguna relación con la Física u otras ciencias naturales (Zea, 2012). Uno de los pensadores que contribuyó a cambiar este punto de vista fue Galileo, quién encontró en el lenguaje de las Matemáticas una forma de expresar lo que sucede en el mundo físico real.

Por ejemplo, los estudios del movimiento parabólico realizados por Galileo, daban a entender que dicho movimiento se componía de dos movimientos yuxtapuestos, que no se podían sumar por las reglas del álgebra ordinaria, problema que posteriormente fue resuelto gracias a los vectores.

Detrás de los vectores hay toda una historia, que tiene su origen en la Teoría de los Cuaterniones o Hipernúmeros, propuesta por Hamilton en 1843 (Marsden y Tromba, 2014), donde plantea la existencia de números complejos tridimensionales a + b i + c j + d **k** , siendo **a** un número real y **b, c** y **d** las componentes imaginarias, con la notación i = $\sqrt{-1}$, j = $\sqrt{-1}$, k = $\sqrt{-1}$. Hamilton desarrolló el fundamento de la suma y diferencia de los cuaterniones, pero tuvo complicaciones al tratar de definir el producto de dos cuaterniones.

Sin embargo, pese a ello, Mawwell encontró apropiado el uso de los cuaterniones al formular su Teoría del Electromagnetismo, aunque las ecuaciones se presentaban bastante complejas y engorrosas.

Fueron Heaviside y Gibbs, quienes en 1879, sentaron los fundamentos del análisis vectorial (Marsden y Tromba, 2014), definiendo dos nuevos tipos de multiplicación vectorial: el producto escalar y el producto vectorial. Al respecto, es preciso comentar, que Gibbs encontraba que la Matemática adquiría sentido cuando tenía una aplicación concreta a la realidad (Zea, 2011), lo que lo llevó a formular el Álgebra Vectorial en un lenguaje aplicativo y fácil de entender. Esta nueva propuesta tuvo una gran acogida por los físicos de ese entonces, lo cual perdura hasta el día de hoy.

Para ser justos, cabe precisar que la Teoría de los Cuaterniones propuesta por Hamilton, ha tenido gran acogida en el campo de la Mecánica Cuántica (Sánchez, 2011).

Por otro lado, surge la pregunta cómo abordar didácticamente la enseñanza de los vectores. Por experiencia propia, se sabe que los alumnos no tienen mayores dificultades en sumar o restar vectores, empleando las reglas del Álgebra Lineal; pero cuando se trata de enseñar el producto vectorial y escalar, la situación se vuelve compleja y abstracta para el alumno, que a veces no encuentra sentido a dichas operaciones.

Hay varios enfoques con el que se puede abordar la enseñanza de los vectores, tal como el enfoque geométrico, el enfoque analítico y el enfoque axiomático (Apostol, 2015). En el enfoque geométrico, los vectores se representan mediante segmentos de recta orientados, y las operaciones de adición y sustracción, así como la multiplicación de un escalar por un vector, pueden visualizarse muy bien, utilizando el método del paralelogramo o el método del polígono para la suma vectorial.

En el enfoque analítico, los vectores son tratados como diadas o triadas; en donde un vector es un conjunto de números que representan a una cierta cantidad. Si tomamos como base, los principios de la Geometría Analítica, los vectores podrían ser representados en un sistema de coordenadas y definir sus operaciones en base a ello.

En el enfoque axiomático, los vectores se tratan como entidades matemáticas, que satisfacen un conjunto de axiomas, que sientan la base de las operaciones vectoriales. De esta forma, a veces no surge la necesidad de representar un vector, sino que uno construye todo un espacio vectorial, que define en base a ciertas reglas.

El enfoque didáctico dependerá de la experiencia de cada docente y de los intereses del curso, aunque desde el punto de vista personal de la autora de este trabajo, es bueno proporcionar los tres enfoques al alumno, a fin de cubrir los diferentes estilos de aprendizaje de nuestros estudiantes; además de mostrar la conexión de la Matemática con otras ciencias como la Física y las actividades de la vida cotidiana.

2. Aplicación didáctica

Dado que actualmente, la autora del presente trabajo, se encuentra laborando en la Escuela Naval del Perú, presentaremos una aplicación didáctica con relación a dicha labor efectuada, seleccionando la clase inicial que sobre el tema se desarrolla en la semana 4. En las semanas previas, los estudiantes desarrollan tópicos de Geometría Analítica y Sistemas de Coordenadas. El curso de Matemática Básica que llevan los estudiantes del primer ciclo, es la base para un curso de Física Universitaria del segundo ciclo.

Guía de sesión de clase

I: Datos informativos

1.1. Institución : Escuela Naval

1.2. Año : 1er Año

1.3. Asignatura : **M**atemática Básica

1.4. Docente Responsable : Gladys Grisell Génesis ESPINOZA HERNANDEZ

1.5. Fecha : **S**emana 4

1.6. Duración : 90 min

II: Competencia, contenido, capacidades, indicadores

Competencia	Capacidades aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Actúa y piensa matemáticamente en situaciones reales de su entorno.	Comunica y representa ideas matemáticas.	Representa un vector en R2 y R3, efectuando operaciones de adición, diferencia y producto.
	Elabora y usa estrategias	Resuelve problemas de vectores en R2 y R3, a través de un proceso secuenciado y ordenando, interpretando sus resultados.

III: Secuencia didáctica

Momentos	Estrategias	Recursos	Tiempo
Inicio	• La docente entra al aula, saluda cordialmente a los alumnos y pasa la asistencia. • La docente pregunta a los estudiantes ¿Qué es un vector? La docente sistematizará las respuestas de los estudiantes y les dirá ¿Cómo se calcula la suma vectorial? Se recogen los saberes previos sobre el tema a través de una lluvia de ideas. • La docente provoca el conflicto cognitivo con la pregunta: ¿Es posible tener un vector en 4 dimensiones? ¿O en dimensiones mayores? • La docente presenta el propósito de la sesión "Representa vectores en R2 y R3,y resuelve problemas a través de un proceso secuenciado y ordenando, interpretando sus resultados."	Pizarra Plumón	5 min
Proceso	•Utilizando el proyector multimedia se presenta la teoría sobre vectores y el álgebra vectorial buscando la participación activa de los estudiantes en todo momento. •Se muestra una animación multimedia que muestra el significado de la resultante vectorial, así como del producto de un escalar por un vector. • La docente resuelve un par de ejercicios y solicita a los estudiantes que se dividan en grupos de 5 alumnos, para desarrollar un	Pizarra Plumón Diapositivas Proyector multimedia Simulaciones Lista de cotejo.	70 min.

	conjunto de ejercicios sobre vectores y el álgebra vectorial. La docente monitorea los trabajos grupales, brindando la asesoría necesaria. • Los estudiantes presentan la solución de los problemas asignados, con los comentarios pertinentes del docente.		
Cierre	• Se efectúa una metacognición sobre los vectores y el álgebra vectorial, preguntando cuánto han aprendido y cuáles han sido sus dificultades. • El docente promueve la reflexión del estudiante con las siguientes preguntas finales: ¿El producto de un escalar por un vector da como resultado, un escalar un vector? Si al sumar los vectores por el método gráfico se obtiene un polígono cerrado, ¿cuál es la resultante? • Se asigna un conjunto de problemas de tarea de la separata, para que los alumnos lo resuelvan para la siguiente clase.	Separata de vectores	15 min.

Síntesis

Si bien es cierto, el tema de vectores en R^2 y en R^3, no se imparte, por lo general, en la Educación Básica Regular, sin embargo, deben cursar obligatoriamente los alumnos de las carreras de Ciencias e Ingenierías en su formación universitaria.

Los vectores, son elementos que han sido desarrollados por los matemáticos en los siglos XVIII y XIX, pero que tienen una aplicación fundamental en la Física y en la Mecánica. Aristóteles pensaba que el estudio de la Matemática y la Física, no tenían nada de común, porque tratan sobre entidades totalmente diferentes. Pero fue Galileo, quién avizoró la conexión entre estas ramas del conocimiento, lo cual quedó expresado en su famosa frase: "*El libro del Universo está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin cuya mediación es humanamente imposible comprender ni una palabra*".

El estudio de los vectores en R^3 no es tan simple como con los vectores en R^2. Los alumnos, por lo general, tienen serias dificultades para visualizar y ubicarse en el espacio tridimensional. Pero ello es un esfuerzo necesario que tienen que asumir, pues el mundo real es un mundo tridimensional. Inclusive, es posible trabajar con vectores en un espacio n – dimensional mayor a 3, como se da en el campo de la Mecánica Cuántica o de la Economía, en donde no solo juegan las variables de posición, sino que intervienen otras como el tiempo o el estado de una partícula.

En el presente trabajo monográfico, se ha tratado de presentar el tema de los vectores, con un enfoque múltiple, de modo que el material sea digerible por los alumnos. Es así que nuestro enfoque abarca tanto el aspecto axiomático, como geométrico. De este modo, los alumnos comprenden las reglas básicas del álgebra vectorial en un espacio n – dimensional, que está más allá de la representación geométrica, cuando por ejemplo se trata de encontrar la suma o el producto escalar de vectores en 10 dimensiones. Pero también presentamos un enfoque geométrico, que le permite al estudiante visualizar o entender el vector, como un segmento de recta orientado, que puede tener una representación, y una aplicabilidad a otros campos de la ciencia.

A través de este enfoque, por ejemplo, el estudiante encuentra la teoría vectorial como una herramienta poderosa para resolver problemas geométricos, como el cálculo del ángulo que forman dos rectas en el espacio, que sin el conocimiento del producto escalar, el cálculo de dicho ángulo se tornaría demasiado complejo.

También se abordó el tema del producto vectorial o producto cruz. Generalmente, como resultado de nuestra experiencia docente, hemos encontrado que los alumnos no tienen problemas en captar el desarrollo o proceso algorítmico del producto vectorial, pero sí tienen dificultades en su aplicación e interpretación geométrica. Entender este tipo de operación demanda un esfuerzo del alumno, que podría facilitarse con la ayuda de algunas simulaciones o el empleo de un software especializado como GeoGebra. El uso de la mano derecha para determinar la dirección del producto vectorial, puede ser mejor entendida empleando algún material didáctico preparado al respecto.

Una de las aplicaciones más interesante de los vectores, se da en el tema de rectas y planos. Solo a través de los vectores podemos definir una recta y un plano en tres dimensiones, y resolver una serie de situaciones, por más complejas que parezcan, tales como encontrar si dos rectas son paralelas, o si se cruzan, o la distancia de un punto a una recta, o la distancia entre dos planos. Los matemáticos han desarrollado así una poderosa herramienta como la teoría vectorial, que aun cuando a veces no se pueda visualizar de la mejor manera un problema, solo nos queda confiar en el ingenio matemático que nos llevará a encontrar la solución del problema planteado.

Pero el estudio de los vectores, va más allá de la simple Geometría. Como decíamos al comenzar, sin los vectores sería imposible expresar las ecuaciones de la Teoría Electromagnética, de la forma tan simple y elegante como lo conocemos hoy. Pero también, sin los vectores no se hubiera podido desarrollar la Cinemática o el estudio descriptivo del movimiento. En un estudio más avanzado del movimiento, se sabe que una partícula móvil tiene tres vectores asociados mientras se mueve por una trayectoria cualquiera, el vector tangencial, el vector normal y el vector binormal. Además, para comprender los vectores en toda su dimensión, los matemáticos han desarrollado las aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral a los vectores.

Apreciación crítica y sugerencias

Siempre se ha proclamado, que el desarrollo de los pueblos vendrá a través de la educación, y que, sin ciencia ni investigación tecnológica, nuestro país seguirá sumergido en el subdesarrollo. A nuestro parecer, esta premisa es cierta, sólo la educación y podrá cambiar el rostro del Perú.

Sin embargo, esa educación que todos los peruanos quisieran, debe ser una educación de calidad, con un profesorado debidamente capacitado e idóneo que sienten la base de la educación peruana. Lamentablemente, esto no se da en todos los niveles. Es tristísimo admitir que el alumno que egresa de la Educación Básica Regular de un colegio estatal, no tiene el mismo nivel de preparación que otro alumno que egresa de un colegio privado, por lo que el acceso de aquellos jóvenes a una universidad nacional u otras instituciones de nivel superior está restringido.

Por ejemplo, el tema de los vectores en R^2 y en R^3, no están presentes en el Currículo de Matemática de la EBR, y sólo se trata de una forma muy superficial en el curso de Física. Pero si revisamos lo que se desarrolla en colegios privados, como el Colegio Saco Oliveros, por citar una institución privada, los alumnos van desarrollando el tema vectorial de una forma que ellos llaman helicoidal, pero que les permite ir incrementando el nivel y los aprendizajes esperados sobre el tema, en cada grado de estudios. Además, estas instituciones privadas, preparan sus propios libros de texto acorde con lo que necesitan, y los distribuyen a sus estudiantes. Es obvio que el estudiante de estos colegios, está en ventaja frente los estudiantes que provienen de una institución pública.

Nos parece obligatorio efectuar una revisión del currículo de la EBR, a fin de que sea actualizado, tanto en temas como en contenido, e ir diseñando estrategias para que el nivel de educación matemática en los colegios estatales, sea el más adecuado. Sin embargo, no sólo es currículo, también se necesita una capacitación o actualización docente en los temas que desarrollará con sus alumnos, porque si somos sinceros, el nivel de muchos profesores está muy por debajo de lo esperado, para un Profesor de Matemática de la Educación Secundaria.

La autora del presenta trabajo se siente en deuda con la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, donde ha recibido una formación de alto nivel académico en su formación matemática. Particularmente el tema de los vectores en R^2 y R^3, ha sido tratado en los cursos de Álgebra Lineal y Matemática Aplicada. Aun así, espero algún día, éstas asignaturas puedan desarrollarse en la universidad usando las TICs, y sueño también que en mi Alma Máter, muy pronto tengamos un aula virtual multiplataforma, donde nos pongamos a la vanguardia de la Tecnología Educativa.

Conclusiones

- El Álgebra Vectorial en R^2 y R^3 tiene importantes aplicaciones en diversos campos de la ciencia, por lo que su estudio es relevante, tanto para profesores de Matemática, como para estudiantes de Ciencias e Ingeniería.
- El lenguaje vectorial, permite expresar de una forma mucho más sencilla, compacta y elegante, una diversidad de ecuaciones del mundo físico real.
- La teoría vectorial, permite resolver importantes problemas de la Geometría y Trigonometría, de una forma más sencilla.
- Mediante los vectores podemos sumergirnos en el mundo tridimensional, y efectuar cálculos que van más allá de nuestra visualización, pero que nos conducirán a una solución óptima de los problemas en 3D.
- Si bien es cierto, la enseñanza de los vectores es bastante compleja por la dificultad inherente de los alumnos de captar temas tridimensionales, con la ayuda de la tecnología y de la simulación es posible acceder a un mejor entendimiento de realidad tridimensional.

Bibliografía

Apostol Tom. (2000). *Cálculo con funciones de varias variables y Álgebra lineal.* España. Editorial Reverté

Costa Viviana Angélica. (2011). *Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la Ingeniería.* Argentina. Universidad Nacional de La Plata.

Haaser Norman y Lasalle Joseph. (2010). *Análisis Matemático (Curso Intermedio).* México. Editorial Trillas.

Leithold Louis. (2000). *El Cálculo.* México. Editorial Universidad Iberoamericana.

Marsden Jerrold. (2004). *Cálculo Vectorial*. Estados Unidos. Editorial Addison Wesley.

Martínez Sierra Gustavo (2008). *Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial.* México. Universidad Autónoma de Guerrero.

Parraguez Gonzáles Marcela. (2019). *Comprensión del producto vectorial desde los Modos de Pensamiento: El caso de profesores en formación inicial*. Chile. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Purcell Edwin y Varberg Dale. (2007). *Cálculo.* México. Editorial Prentice Hall.

Ramirez Urrego Jeason. (2016). *Secuencia didáctica para la enseñanza del algebra vectorial a partir de la geometría Euclidiana y Analítica*. Universidad Nacional de Colombia.

Rodríguez Milagros Elena. (2011). *La Matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico.* Universidad del Oriente. http://www.sinewton.org/numeros.

Sánchez Muñoz José. (2011). *Historias de Matemáticas: Hamilton y el Descubrimiento de los*

Cuaterniones. Revista de Investigación: España. Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid.

Stewart James. (2009). Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas. México. Editorial Paraninfo.

Zea Saldarriaga Carlos. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático.* Colombia. Universidad del Valle.