Tomando como referencia la teoría de vectores en el plano, se obtienen definiciones y propiedades de los vectores en el espacio.

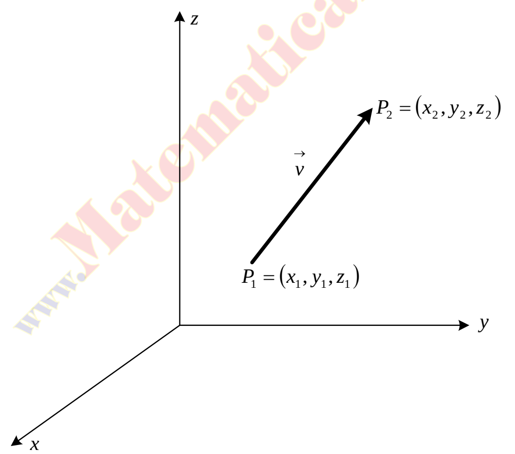
1.1 DEFINICIÓN

> Un vector de R^3 es una terna ordenada de números reales. Denotada de la siguiente manera:
>
> $$\vec{v} = (x, y, z)$$

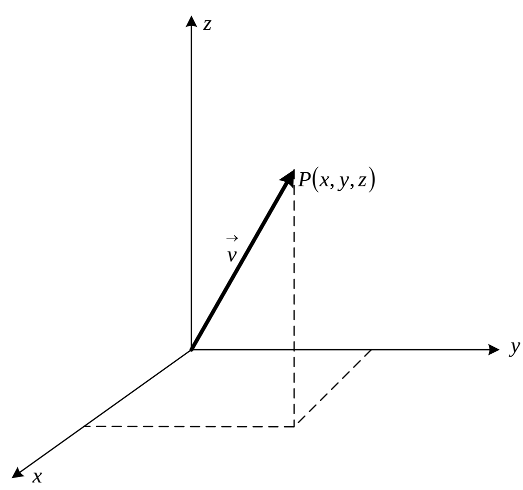
1.2 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Geométricamente a un vector de R^3 se lo representa en el Espacio como un segmento de recta dirigido.

Suponga que se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Si trazamos un segmento de recta dirigido desde P_1 hacia P_2 tenemos una representación del vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1, z_1 - z_2)$



Este vector puede tener muchas otras representaciones equivalentes en el espacio. Una representación equivalente útil es aquella que se realiza ubicando al vector con el origen como punto de partida.



1.2.1 Magnitud o norma

Sea $\vec{v} = (x, y, z)$. La *magnitud o norma* de $\vec{v}$ denotada como $\left\|\vec{v}\right\|$, se define como:

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

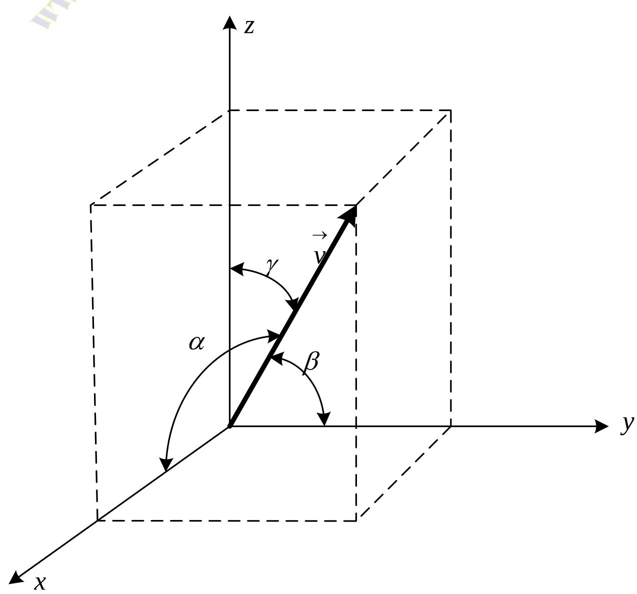
Note que la norma sería la longitud del segmento de recta que define el vector. Es decir, sería la distancia entre los puntos que lo definen.

Para $\vec{v} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ sería:

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.2.2 Dirección

La *dirección* de $\vec{v} = (x, y, z)$ está definida por la medida de los ángulo que forma la línea de acción del segmento de recta con los ejes x, y, z



Los ángulos α, β y γ son llamados **Ángulos Directores.**

Observe que:

$$Cos\alpha = \frac{x}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\beta = \frac{y}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\gamma = \frac{y}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ejercicio.

Demostrar que $\boxed{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1}$

1.2.3 Sentido

El *sentido* de $\vec{v}$ lo define la flecha dibujada sobre el segmento de recta.

1.3 IGUALDAD DE VECTORES DE R^3

Dos vectores $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$

1.4 OPERACIONES

1.4.1 Suma

Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ dos vectores de R^3 tales que $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ entonces la suma de $\vec{v_1}$ con $\vec{v_2}$, denotada como $\vec{v_1} + \vec{v_2}$, se define como:

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

1.4.1.1 Propiedades

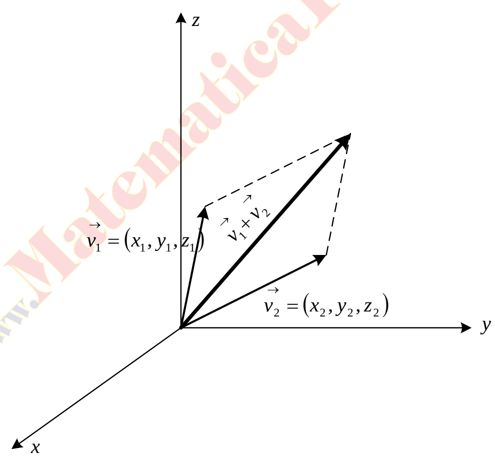
Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de R^3, entonces:

1. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ la suma es conmutativa
2. $\vec{v}_1 + \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) + \vec{v}_3$ la suma es asociativa
3. $\exists \vec{0} \in R^3$, $\forall \vec{v} \in R^3$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,

   Donde $\vec{0} = (0,0,0)$ es llamado **Vector Neutro**
4. $\forall \vec{v} \in R^3$, $\exists\left(-\vec{v}\right) \in R^3$ tal que $\vec{v} + \left(-\vec{v}\right) = \vec{0}$

   Donde $\left(-\vec{v}\right)$ es llamado **Vector Inverso Aditivo** de $\vec{v}$

Geométricamente:



Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sustentan un paralelogramo, el vector de la **diagonal mayor** es el **Vector Suma** y el vector de la **diagonal menor** es el **Vector Diferencia**.

1.4.2 Multiplicación por escalar

Sea $\alpha \in R$ y $\vec{v} = (x, y, z)$ un vector de R^3 entonces:

$$\alpha \vec{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

1.4.2.1 Propiedades

1. $\forall \alpha \in R, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R^3 \left[\alpha\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = \alpha \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 \right]$
2. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{v} \in R^3 \left[(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v} \right]$
3. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{v} \in R^3 \left[\alpha\left(\beta \vec{v}\right) = (\alpha\beta)\vec{v} \right]$

Cualquier vector de R^3, $\vec{v} = (x, y, z)$, puede ser expresado en combinación lineal de los vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$

$$\vec{v} = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

1.4. 3. Producto Escalar. Producto Punto o Producto Interno

Sean $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de R^3. El Producto escalar de $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ denotado como $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$ se define como:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Ejemplo

Si $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ y $\vec{v}_2 = (-1,4,0)$ entonces

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = (3)(-1) + (1)(4) + (-2)(0) = -3 + 4 + 0 = 1$$

1.4.3.1 Propiedades

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores de R^3. Entonces:

1. $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_1$

$$2.\ \vec{v}_1 \bullet \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$$

$$3.\ \left(\alpha \vec{v}_1\right) \bullet \left(\beta \vec{v}_2\right) = \alpha\beta\left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)$$

Si $\vec{v} = (x, y, z)$ entonces:

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = (x, y, z) \bullet (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Por lo tanto $\vec{v} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{v}\right\|^2$ o también $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$

1.4. 4. Producto Vectorial. Producto Cruz

Sean $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de R^3. El Producto Vectorial de $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ denotado como $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ se define como:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(y_1 z_2 - z_1 y_2, -\left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right), x_1 y_2 - y_1 x_2\right)$$

Una manera práctica para obtener el resultado de la operación Producto Cruz entre dos vectores es resolver el siguiente determinante, para la primera fila:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo.

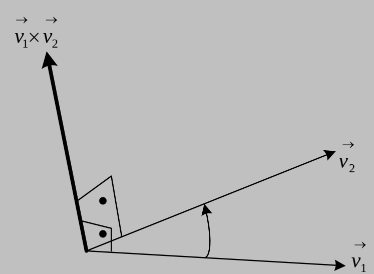
Sea $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$ y $\vec{v}_2 = (2, -1, 0)$ entonces

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$$

1.4.4.1 Propiedades.

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de R^3

1. El vector $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ es tanto perpendicular a $\vec{v}_1$ como a $\vec{v}_2$
2. El sentido del vector $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ se lo puede obtener empleando la mano derecha. Mientras los dedos se dirigen desde $\vec{v}_1$ hacia $\vec{v}_2$, el pulgar indica la dirección de $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$.



3. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1\right)$
4. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{0}$
5. Si $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$ entonces $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$
6. $\left(\alpha_1 \vec{v}_1\right) \times \left(\alpha_2 \vec{v}_2\right) = \alpha_1 \alpha_2 \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$
7. $\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) + \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3\right)$
8. $\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)^2$

De la última expresión, empleando la propiedad del producto escalar, se obtiene un resultado muy importante:

$$\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|^2=\left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2-\left(\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2\right)^2$$

$$=\left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2-\left(\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta\right)^2$$

$$=\left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2-\left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2\cos^2\theta$$

$$=\left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2\left[1-\cos^2\theta\right]$$

$$\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|^2=\left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2 sen^2\theta$$

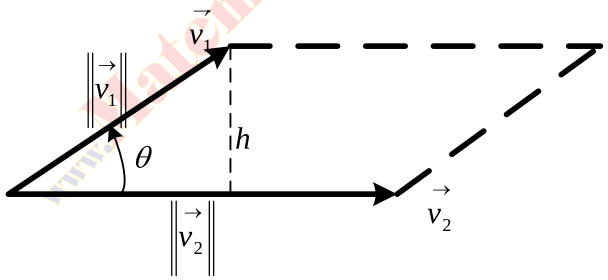
Finalmente:

$$\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|=\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\| sen\theta$$

1.5 APLICACIONES

1.5.1 CALCULO DEL ÁREA DEL PARALELOGRAMO SUSTENTADO POR DOS VECTORES.

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores, no paralelos. Observe la figura:



Tomando como base a $\vec{v}_2$, tenemos:

$$Area = base \bullet altura$$

$$=\left\|\vec{v}_2\right\| h$$

Observe que $\boxed{sen\theta=\dfrac{h}{\left\|\vec{v}_1\right\|}}$ entonces $\boxed{Area=\left\|\vec{v}_2\right\|\left\|\vec{v}_1\right\| sen\theta}$

Y por la propiedad del producto cruz:

$$Area=\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|$$

Ejemplo 1

Hallar el área del triángulo sustentado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$ y $\vec{v}_2 = (2,-1,0)$

SOLUCIÓN:

El área del triángulo sustentado por dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ es la mitad del área del paralelogramo sustentado por los vectores, es decir:

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2}$$

Como $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$

entonces

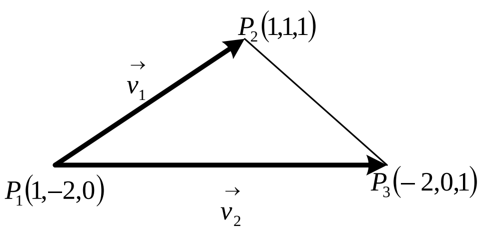
$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Ejemplo 2

Hallar el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $(1,-2,0)$, $(1,1,1)$ y $(-2,0,1)$

SOLUCIÖN:

Primero se forman dos vectores entre los puntos dados, tomando arbitrariamente el orden de estos puntos; luego se procede de manera análoga a lo mencionado anteriormente debido a que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



En este caso, $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (1-1, 1-(-2), 1-0) = (0,3,1)$

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_2P_3} = (-2-1, 0-(-2), 1-0) = (-3,2,1)$$

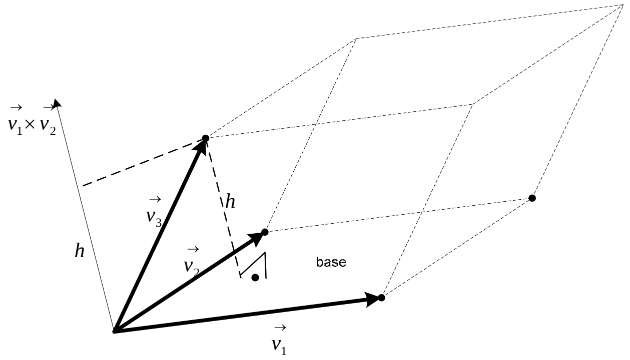
Entonces,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j - 9k$$

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$

1.5.2 CALCULO DEL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO SUSTENTADO POR TRES VECTORES

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ tres vectores. Observe la figura.



Tomando como base el paralelogramo sustentado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, la altura h del paralelepípedo será la proyección escalar $\vec{v}_3$ sobre $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, entonces:

$$Volumen = Area\ base \times altura$$

Donde $Area\ base = \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|$

$$altura = h = \left| \operatorname{Proy}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \vec{v}_3 \right| = \left| \frac{\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3}{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|} \right|$$

Por tanto.

$$Volumen = \left| \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\| \frac{\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3}{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|} \right|$$

Finalmente, simplificando resulta:

$$Volumen = \left| \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3 \right|$$

Esta última expresión es denominada, EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, y su interpretación es el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Observe además que no importa el orden de operación de los vectores, ¿por qué?.

Ejemplo

Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,-2,1)$, $\vec{v}_2 = (2,0,-1)$ y $\vec{v}_3 = (1,2,3)$.

<u>SOLUCIÖN.</u>

Por lo definido anteriormente,

$$Volumen = \left|\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) \bullet \vec{v}_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 14 + 4 = 20u^3$$

Ejercicios propuestos

1. Sean los vectores $\vec{V}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$.

   a) Determinar la proyección vectorial de $\vec{V}_1$ sobre el vector $\vec{V}_2$.

   b) Calcular la componente de $\vec{V}_1$ perpendicular a $\vec{V}_2$.

   Resp. a) $\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{V}_2} \vec{V}_1} = \left(-\frac{15}{22}, -\frac{15}{22}, \frac{10}{22}\right)$ b)

2. Sean los vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - B_z\hat{k}$. Calcule los valores de A_x y B_z para los cuales $\vec{A} \times \vec{B}$ es paralelo a: a) al eje x b) al eje y

   Resp. a) $A_x = \frac{15}{2}$ $B_z = \frac{4}{5}$ b) $A_x = \frac{15}{2}$ $B_z = \frac{4}{5}$

3. Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos (-3,2,4); (2,1,7) ; (4,2,6)

   Resp. $Area = \frac{\sqrt{174}}{2}$

4. Dados tres vectores $V_1 = (5,2,6)$, $V_2 = (-1,8,3)$, $V_3 = (2,-7,4)$ forman un tetraedro con vértice en el origen. Determinar su altura desde el origen. Resp. $h = \frac{77}{\sqrt{746}}$

5. Un tetraedro tiene por base el triángulo de vértices (3.-6,-1) , (4,4,-2) y (-3,-1,2); Si el vértice opuesto es el punto (8,10,6) , determine su altura. Resp. $h = \frac{938}{\sqrt{5459}}$

6. Sean u y v vectores no nulos, diferentes tales que: $w_1 = u + v$, $w_2 = u - v$, $w_3 = \frac{1}{2}(u + v)$. Hallar $w_1 \bullet (w_2 \times w_3)$ Resp. 0

7. Sea $\vec{V}$ un vector diferente de cero, entonces, demostrar que si $\vec{U}$ es un vector cualquiera, el vector $\vec{W} = \vec{U} - \frac{\vec{U} \bullet \vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|^2}\vec{V}$ es ortogonal a $\vec{V}$.

8. Demuestre que si $\vec{U}$ es ortogonal a $\vec{V}$ y a $\vec{W}$, entonces $\vec{U}$ es ortogonal a $c\vec{V} + d\vec{W}$ para escalares cualquiera c y d.

9. Demostrar que el área del triángulo, cuyos vértices son los extremos de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, es $\frac{1}{2}\left|\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \times \left(\vec{C} - \vec{A}\right)\right|$

10. Demostrar que el volumen del tetraedro de aristas $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{B} + \vec{C}$ y $\vec{C} + \vec{A}$ y es el doble del volumen del tetraedro de aristas $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

11. Pruebe que las diagonales de un rombo (paralelogramo con lados iguales) son perpendiculares.