Práctico - Ejercicios resueltos. Espacios vectoriales

Algebra Lineal (Universidad de Sevilla)

Espacios vectoriales

Ejercicio 135 Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{n\times n}$ son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Las matrices simétricas.
2. Las matrices no singulares.
3. Las matrices triangulares.
4. Las matrices diagonales.
5. Las matrices singulares.
6. Las matrices triangulares superiores.
7. Todas las matrices que conmutan con una matriz dada.
8. Todas las matrices tales que $A^2 = A$.
9. Todas las matrices tales que traza$(A) = 0$.

Solución 135 Como son subconjuntos L de un espacio vectorial, debemos comprobar las dos condiciones que son equivalentes a tener estructura de subespacio vectorial:

- Si $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in L$, entonces $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in L$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{v} \in L$, entonces $\alpha \boldsymbol{v} \in L$.

1. Sean A, B matrices simétricas. Entonces
   - $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$,
   - $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$,

   por lo que se verifican ambas condiciones. Entonces es un subespacio vectorial.
2. Sean A, B matrices no singulares. Puede ocurrir que la suma sea singular. Por ejemplo,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = -A,$$
   son matrices no singulares, pero su suma es singular.
3. La suma de una matriz triangular superior con una matriz triangular inferior no es, en general, triangular. Por ejemplo,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Sean A, B matrices diagonales. Entonces $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ para $i \neq j$, y
   - $a_{ij} + b_{ij} = 0$ para $i \neq j$, y
   - $\alpha a_{ij} = 0$ para $i \neq j$,

   por lo que es subespacio vectorial.
5. La suma de dos matrices singulares puede ser no singular. Por ejemplo,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A + B = I_2 \text{ no singular.}$$

6. Triangulares superiores. Sí.

7. Matrices que conmutan con una dada. Sean entonces B_1 y B_2 matrices que conmutan con una matriz dada A. En primer lugar, $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = AB_1 + AB_2 = A(B_1 + B_2)$, por lo que la suma es una operación interna. Análogamente, $(\lambda B)A = \lambda(BA) = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

8. Matrices tales que $A^2 = A$.

9. Matrices con traza nula. Sean B_1 y B_2 matrices con traza nula. Como $\operatorname{traza}(B_1 + B_2) = \operatorname{traza}(B_1) + \operatorname{traza}(B_2)$, y $\operatorname{traza}(\lambda B_1) = \lambda \operatorname{traza}(B_2)$, el conjunto es un subespacio vectorial.

Ejercicio 136 Determine cuáles de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices 2×2 son subespacios vectoriales. Para los que sean, calcule un conjunto generador minimal. Para los que no, explique con un ejemplo cuál es la condición en la que falla.

$$1. \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad 2. \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a + b = 0 \right\},$$
$$3. \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a + b = 5 \right\}, \quad 4. \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a + b = 0, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solución 136

1. Sea L_1 el conjunto propuesto. Si $A_1, A_2 \in L_1$, podemos expresarlas como

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix},$$

y

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in L_1, \alpha A_1 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 \end{pmatrix} \in L_1.$$

Por tanto, es un subespacio vectorial.

2. Sea L_2 el conjunto dado, y A_1, A_2 como en el caso anterior, con la condición adicional $a_1 + b_1 = 0, a_2 + b_2 = 0$. Entonces

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in L_2, \text{ porque } a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0,$$
$$\alpha A_1 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 \end{pmatrix} \in L_2, \text{ porque } \alpha a_1 + \alpha b_1 = \alpha(a_1 + b_1) = 0.$$

3. Sea L_3 el conjunto propuesto. No es subespacio vectorial, porque la matriz nula no está en L_3. Por ejemplo,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pero $A_1 + A_2 \notin L_3$.

4. Para L_4 sí se cumplen las condiciones de subespacio vectorial, pues si

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, a_1 + b_1 = 0, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, a_2 + b_2 = 0,$$

entonces

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in L_4, \text{ porque } a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0,$$
$$\alpha A_1 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha c_1 \\ 0 & \alpha b_1 \end{pmatrix} \in L_4, \text{ ya que } \alpha a_1 + \alpha b_1 = 0.$$

Veamos ahora un conjunto generador minimal para estos subespacios vectoriales. Se tiene que

$$L_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$L_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$L_4 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Ejercicio 137 ¿Cuáles de los siguientes son conjuntos generadores de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,1,1)^t\}$.
2. $\{(1,0,0)^t,(0,0,1)^t\}$.
3. $\{(1,0,0)^t,(0,1,0)^t,(0,0,1)^t,(1,1,1)^t\}$.
4. $\{(1,2,1)^t,(2,0,-1)^t,(4,4,1)^t\}$.
5. $\{(1,2,1)^t,(2,0,-1)^t,(4,4,0)^t\}$.

Solución 137 Para que un conjunto de vectores sea generados de $\mathbb{R}^3$, todo vector del espacio se tiene que poner como combinación lineal de los vectores de dicho conjunto. Esto es equivalente a que la matriz cuyas columnas son los vectores dados tenga rango tres. En este caso,

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=1,\qquad \operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=2,\qquad \operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=3,$$
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&1\end{pmatrix}=2,\quad \operatorname{rango}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&0&4\\1&-1&0\end{pmatrix}=3.$$

Ejercicio 139 Compare los subespacios vectoriales definidos por $L_1=\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\rangle, L_2=\langle \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\rangle$, donde

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}44\\-22\\-31\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Solución 139 Consideremos las matrices

$$A_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3&\boldsymbol{v}_4\end{pmatrix}\text{ y }A_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1&\boldsymbol{u}_2\end{pmatrix},$$

cuyos espacios de columnas respectivos generan a L_1 y L_2.

- Comprobemos si $L_1\subset L_2$. Para ello, consideramos la matriz concatenada $T_1=\begin{pmatrix}A_2&A_1\end{pmatrix}$. Si los pivotes de su forma escalonada reducida por filas se encuentran en la parte correspondiente a A_2, entonces se tendrá la contención.

$$T_1\overset{\text{rref}}{\to}\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{2}{53}&-\frac{1}{53}&-\frac{3}{53}\\0&1&1&-\frac{9}{53}&\frac{128}{53}&-\frac{93}{53}\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

  Por tanto,se tiene la inclusión.

- Para comprobar si $L_2\subset L_1$, procedemos análogamente con $T_2=\begin{pmatrix}A_1&A_2\end{pmatrix}$. Como

$$T_2\overset{\text{rref}}{\to}\begin{bmatrix}1&0&5/2&-3/2&-9/2&1\\0&1&1/2&3/2&-\frac{53}{2}&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

  no hay pivotes en la parte de A_2, y tenemos la otra inclusión.

La igualdad de ambos espacios se puede ver directamente comparando las filas no nulas de $\operatorname{rref}(A_1^t)$ y $\operatorname{rref}(A_2^t)$, según sabemos de teoría. En efecto,

$$A_1^t\overset{\text{rref}}{\to}\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},A_2^t\overset{\text{rref}}{\to}\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 140 Determine una base de los espacios vectoriales $\mathrm{Col}(A), \mathrm{null}(A), \mathrm{Col}(A^t), \mathrm{null}(A^t)$ asociados a

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & -1 & -12 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & -10 & 1 & 12 & -4 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución 140 Una base de $\mathrm{Col}(A)$ está formada por las columnas básicas de A.

$$A \stackrel{\mathrm{rref}}{\to} E_A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las columnas básicas de A son A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}.

El sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es equivalente a $E_A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Entonces

$$\left\{ \begin{array}{cccccl} x_1 & -2x_2 & & +3x_4 & & = 0, \\ & & x_3 & -3x_4 & & = 0, \\ & & & & x_5 & = 0 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & 2x_2 & -3x_4, \\ x_2 & = & x_2, & \\ x_3 & = & & 3x_4, \\ x_4 & = & & x_4, \\ x_5 & = & 0 & \end{array} \right. ,$$

y entonces $\mathrm{null}(A) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2} \rangle$, donde $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0,0,0)^t, \boldsymbol{v}_2 = (-3,0,3,1,0)^t$.

Procedemos análogamente con A^t.

$$A^t \stackrel{\mathrm{rref}}{\to} E_{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las columnas básicas de A^t son $A^t_{*1}, A^t_{*2}, A^t_{*3}$. El espacio nulo de A^t se obtiene del sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} x_1 & & & -4x_4 & = 0, \\ & x_2 & & -4x_4 & = 0, \\ & & x_3 & -2x_4 & = 0, \end{array} \right.$$

que tiene como solución $\mathrm{null}(A^t) = \langle (4,4,2,1)^t \rangle$.

Ejercicio 141 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & 7 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule un sistema generador de $\mathrm{Col}(A), \mathrm{null}(A), \mathrm{Col}(A^t)$ y $\mathrm{null}(A^t)$.
2. Calcule matrices P y Q tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } r = \mathrm{rango}(A).$$

Solución 141 Para todos estos espacios, necesitamos la forma escalonada reducida por filas de A:

$$A \stackrel{\text{rref}}{\longrightarrow} E_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 7/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El espacio $\text{Col}(A)$ está generado por las columnas básicas de A, que son la primera y la tercera, las posiciones de los pivotes en E_A.

$$\text{Col}(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle.$$

Para el espacio nulo $\text{null}(A)$, tenemos que resolver $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, que es equivalente a $E_A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Despejamos las variables básicas x_1 y x_3 en función de las libres, esto es,

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_2 \ -\frac{7}{4}x_4 \ -\frac{3}{4}x_5, \\ x_2 & = & x_2, \\ x_3 & = & \frac{3}{4}x_4 \ -\frac{1}{4}x_5, \\ x_4 & = & x_4, \\ x_5 & = & x_5, \end{array}\right\}, \text{ de donde } \boldsymbol{x} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2\boldsymbol{h}_1 + x_4\boldsymbol{h}_2 + x_5\boldsymbol{h}_3.$$

Entonces $\text{null}(A) = \langle \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3 \rangle$.

El espacio $\text{Col}(A^t)$ está generado por las filas no nulas de E_A. Entonces

$$\text{Col}(A^t) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \rangle.$$

Para $\text{null}(A^t)$, calculamos E_{A^t}:

$$E_{A^t} \stackrel{\text{rref}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & 2y_3 \ -y_4, \\ y_2 & = & -y_3 \ +y_4, \\ y_3 & = & y_3, \\ y_4 & = & y_4, \end{array}\right\}, \text{ y } \text{null}(A^t) = \langle \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Para el cálculo de las matrices que transforman A en su forma normal del rango, obtenemos en primer lugar la matriz P tal que $PA = E_A$. Para ello, hay que calcular la forma escalonada reducida por filas de $[A|I_4]$.

$$[A|I_4] \stackrel{\text{rref}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 7/4 & 3/4 & 0 & 0 & -\frac{7}{12} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 0 & 0 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [E_A|P], \text{ por lo que } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{7}{12} & -1 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora hay que realizar transformaciones por columnas en E_A para llevar, en primer lugar, los pivotes a las primeras columnas. En este caso, basta intercambiar la segunda y la tercera columna:

$$E_A P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 7/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para eliminar los elementos que están a la derecha, multiplicamos por la matriz

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -7/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y obtenemos } E_A P_{23} Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que es la forma buscada. Entonces

$$Q = P_{23} Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -7/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como nota final, recordemos que el espacio $\text{null}(A^t)$ está relacionado con las $4-2$ últimas filas de la matriz P. En efecto,

$$\text{null}(A^t) = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle.$$

Ejercicio 148 Consideremos la matriz A y el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 & -6 & -36 \\ -10 & 7 & -3 & -2 & -11 \\ 2 & -4 & -5 & -10 & 19 \\ 6 & -6 & -3 & -9 & 21 \\ -1 & 9 & -8 & -9 & 22 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} -12 \\ 13 \\ 6 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -24 \\ 7 \\ 15 \\ -35 \end{bmatrix}.$$

1. Pruebe que $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ son vectores linealmente independientes que pertenecen a $\text{Col}(A)$.
2. Extienda el conjunto $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ a una base de $\text{Col}(A)$.

Solución 148 El conjunto $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ es linealmente independiente porque los vectores forman una matriz de rango 2. Para ver que $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ pertenecen a $\text{Col}(A)$, basta verificar que $\text{rango}(A) = \text{rango}(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix})$, o bien, que en la forma reducida por filas de $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix}$ no aparezcan pivotes en las posiciones correspondientes a $\boldsymbol{w}_1$ ni $\boldsymbol{w}_2$. En efecto

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} \overset{\text{rref}}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tenemos también que las primeras cuatro columnas de A constituyen una base de $\mathrm{Col}(A)$, y que $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ son linealmente independientes.

Para efectuar la ampliación, consideramos ahora la matriz $\left[\begin{array}{cc|cccc} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & A_{*1} & A_{*2} & A_{*3} & A_{*4} \end{array}\right]$, y calculamos su forma reducida por filas.

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & A_{*1} & A_{*2} & A_{*3} & A_{*4} \end{array}\right] \overset{\text{rref}}{\to} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, A_{*1}, A_{*4}\}$ forman una base de $\mathrm{Col}(A)$.

Ejercicio 151 Consideremos el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} ,1 \\ ,4 \\ ,7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ,2 \\ ,5 \\ ,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ,3 \\ ,6 \\ ,901 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Use aritmética exacta para determinar si es un conjunto linealmente independiente.
2. Con aritmética de tres dígitos (sin pivoteo ni escalado) determine si es linealmente independiente.

Ejercicio 152 Determine la dimensión del espacio generado por el conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución 152 Sea $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5\}$. El espacio generado por $\mathcal{S}$ es lo mismo que el espacio de columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 & \boldsymbol{v}_5 \end{pmatrix}$. Una base de $\mathrm{Col}(A)$ está formada por las columnas básicas, y la dimensión es el rango de A. Calculamos entonces la forma escalonada reducida por filas

$$A \overset{\text{rref}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las columnas básicas son A_{*1}, A_{*2}, A_{*4}, por lo que una base de $\mathcal{S}$ es $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4\}$, y la dimensión es 3.

¿Qué ocurre si colocamos los vectores como filas? Tenemos entonces que calcular una base del espacio de filas de la matriz asociada

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que una base la conseguimos con las filas no nulas de la forma escalonada reducida por filas.

$$B \overset{\text{rref}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_B.$$

Entonces una base está formada por

$$\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Es un conjunto diferente. ¿Cómo podemos estar seguros de que generan el mismo espacio? Ya tenemos la forma reducida por filas del espacio de filas de $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$. Calculemos la de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = E_C.$$

Las filas no nulas de E_C coinciden con las de E_B, como era de esperar.

Ejercicio 153 Consideremos la matriz y los vectores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

y la aplicación lineal definida por $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

1. Pruebe que el vector $\boldsymbol{v}$ pertenece a $\text{null}(A)$.
2. Calcule una base de $\text{null}(A)$ que contenga a $\boldsymbol{v}$.
3. Pruebe que el vector $\boldsymbol{w}$ pertenece a $\text{Col}(A)$.
4. Calcule una base de $\text{Col}(A)$ que contenga a $\boldsymbol{w}$.
5. ¿Es posible calcular una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$?

Solución 153

1. La condición $\boldsymbol{v} \in \text{null}(A)$ es equivalente a $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, que es un sencillo cálculo.
2. Para obtener una base de $\text{null}(A)$, calculamos la forma escalonada reducida por filas de A.

$$A \xrightarrow{\text{rref}} E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las variables básicas son x_1 y x_2, y las variables libres x_3 y x_4. Las soluciones tienen la forma

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & -x_3 & -2x_4, \\ x_2 & = & \frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4, \\ x_3 & = & x_3, & \\ x_4 & = & & x_4, \end{array}, \text{ de donde } \boldsymbol{x} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3\boldsymbol{h}_1 + x_4\boldsymbol{h}_4.$$

Entonces $\text{null}(A) = \langle \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2 \rangle$. Para ampliar el vector $\boldsymbol{v}$ a una base de $\text{null}(A)$, consideramos la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{h}_1 & \boldsymbol{h}_2 \end{pmatrix}$, y calculamos su forma escalonada reducida por filas: las columnas básicas son los componentes de la base.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{h}_1 & \boldsymbol{h}_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la base buscada es $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}_1\}$.

3. Recordemos que $\text{Col}(A) = \{A\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4\}$. Por tanto, para comprobar que $\boldsymbol{w} \in \text{Col}(A)$, tenemos que encontrar un vector $\boldsymbol{u}$ tal que $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$, en otras palabras, tenemos que comprobar la compatibilidad del sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes igual a A y término independiente definido pro $\boldsymbol{w}$.

$$[A|\boldsymbol{w}] \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como no hay pivotes en la columna correspondiente al término independiente, $\boldsymbol{w}$ se puede expresar como combinación lineal de las columnas de A; en concreto, $\boldsymbol{w} = 2A_{*1} - 5A_{*2}$.

4. En el apartado anterior tenemos ya calculada una base de $\text{Col}(A)$, pues la forman sus columnas básicas A_{*1} y A_{*2}. Para calcular la ampliación de $\boldsymbol{w}$ a una base de $\text{Col}(A)$, consideramos la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{w} & A_{*1} & A_{*2} \end{pmatrix}$, y calculamos la forma escalonada reducida por filas.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w} & A_{*1} & A_{*2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces la ampliación es $\{\boldsymbol{w}, A_{*1}\}$.

5. Una base de $\mathbb{R}^4$ es la estándar, dada por $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, 3, 4\}$. Procedemos como sigue:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/10 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/5 & -2/5 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ es la base buscada. Observemos que no hemos comprobado previamente la independencia lineal de $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, pero la deducimos del cálculo anterior.

Ejercicio 157 Determine si el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del espacio generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución 157 Para comprobar si el conjunto $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ dado es base del subespacio generado por los vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$, consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 \end{pmatrix}$. Si en la forma reducida por filas E_A vemos que los pivotes ocupan las dos primeras columnas, esto significa que

- el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente,
- y que los vectores $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ dependen linealmente de ellos,

por lo que sería base del subespacio. En otro caso no sería base. Pasemos entonces a los cálculos.

$$A \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces el conjunto $\mathcal{B}$ es base del espacio indicado.

Ejercicio 160 Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y\\ y-x\\ x-z\end{pmatrix},$$

y consideremos el vector

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \text{ y la base } \mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

1. Calcule $[f]_{\mathcal{B}}$ y $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$.
2. Calcule $[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}}$ y verifique que $[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}=[f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}}$.

Solución 160 Nos centraremos primero en el cambio de coordenadas de $\boldsymbol{v}$. Llamemos $\mathcal{S}=\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ a la base estándar de $\mathbb{R}^3$, y notemos $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$. Sabemos que

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{S}}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\text{ y escribamos } [\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que $\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3$, que traducido a coordenadas en $\mathcal{S}$ significa

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{S}}=M\cdot[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Observemos que $M=\begin{pmatrix}[\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{S}} & [\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{S}} & [\boldsymbol{v}_3]_{\mathcal{S}}\end{pmatrix}$, y la notaremos por $M(\mathcal{B},\mathcal{S})$, matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$. La fórmula queda como

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{S}}=M(\mathcal{B},\mathcal{S})\cdot[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}.$$

La matriz M es no singular, porque sus columnas son una base del espacio, y el sistema anterior tiene solución única. En este caso, $\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=0$.

Para el cálculo de la matriz de f respecto de la nueva base $\mathcal{B}$, lo haremos de dos formas (aunque esencialmente son iguales).

- Sabemos que $[f]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[f(\boldsymbol{v}_1)]_{\mathcal{B}} & [f(\boldsymbol{v}_2)]_{\mathcal{B}} & [f(\boldsymbol{v}_3)]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$. Escribamos entonces

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3,\\
&\left\{\begin{array}{rcl}1&=&1\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3\\-1&=&0\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3\\0&=&1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3\end{array}\right.,\\
f(\boldsymbol{v}_2) &= \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\beta_1\boldsymbol{v}_1+\beta_2\boldsymbol{v}_2+\beta_3\boldsymbol{v}_3,\\
&\left\{\begin{array}{rcl}-1&=&1\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2+1\cdot\beta_3\\1&=&0\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2+1\cdot\beta_3\\-1&=&1\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3\end{array}\right.,\\
f(\boldsymbol{v}_3) &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\gamma_1\boldsymbol{v}_1+\gamma_2\boldsymbol{v}_2+\gamma_3\boldsymbol{v}_3,\\
&\left\{\begin{array}{rcl}0&=&1\cdot\gamma_1+0\cdot\gamma_2+1\cdot\gamma_3\\0&=&0\cdot\gamma_1+1\cdot\gamma_2+1\cdot\gamma_3\\1&=&1\cdot\gamma_1+1\cdot\gamma_2+0\cdot\gamma_3\end{array}\right.,
\end{aligned}$$

Tenemos que resolver tres sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes, y diferentes términos independientes. Basta calcular la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada con dichos términos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right].$$

La solución de cada sistema aparece en las columnas de la derecha, y entonces

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

- Vamos a aplicar la fórmula que relaciona la matriz de la aplicación lineal f con respecto a cada una de las bases. Sabemos que
$$[f]_{\mathcal{B}} = M(\mathcal{S},\mathcal{B})[f]_{\mathcal{S}}M(\mathcal{B},\mathcal{S}),$$
donde $M(\mathcal{B},\mathcal{S})$ es la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$, y $M(\mathcal{S},\mathcal{B})$ es la inversa. Tenemos que
$$[f]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} [f(\boldsymbol{v}_1)]_{\mathcal{S}} & [f(\boldsymbol{v}_2)]_{\mathcal{S}} & [f(\boldsymbol{v}_3)]_{\mathcal{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
y
$$M(\mathcal{B},\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{S}} & [\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{S}} & [\boldsymbol{v}_3]_{\mathcal{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M(\mathcal{S},\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},\mathcal{S})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$
Entonces
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Como era de esperar, llegamos al mismo resultado.

Vamos ahora a verificar la fórmula $[f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [f(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{B}}$. Por un lado,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3, \\ & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 \\ 0 &=& 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 \\ -1 &=& 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $a_1 = -1/2, a_2 = -1/2, a_3 = 1/2$.

Por otro lado,

$$[f]_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

y tenemos lo que queríamos.

Ejercicio 164 Consideremos la aplicación lineal

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ -y \\ x + 7z \end{pmatrix}.$$

1. Calcule $[f]_{\mathcal{S}}$, donde $\mathcal{S}$ es la base estándar de $\mathbb{R}^3$.

2. Calcule $[f]_{\mathcal{S}'}$ y la matriz no singular Q tal que $[f]_{\mathcal{S}'} = Q^{-1}[f]_{\mathcal{S}}Q$, con

$$\mathcal{S}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución 164 La expresión de $[f]_{\mathcal{S}}$ es

$$[f]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$P(\mathcal{S}', \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y $[f]_{\mathcal{S}'} = P(\mathcal{S}, \mathcal{S}')[f]_{\mathcal{S}}P(\mathcal{S}', \mathcal{S})$, por lo que $Q = P(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Si hacemos los cálculos

$$[f]_{\mathcal{S}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 170 Determine si las siguientes aplicaciones son inyectivas o sobreyectivas.

1. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c+d \end{pmatrix}.$$

2. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ definida por

$$S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a - c.$$

3. $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+b \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

4. $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definida por

$$L \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ b+c+d \\ a+d \\ a+b+c+d \end{pmatrix}.$$

5. $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix}.$$

Solución 170 Recordemos que una aplicación lineal es inyectiva si y solamente si su espacio nulo es el vector cero. Calculemos el espacio nulo de cada una de estas aplicaciones.

1.

$$\operatorname{null}(T) \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & & & = & 0, \\ & x_2 & +x_3 & & = & 0, \\ & & x_3 & +x_4 & = & 0, \end{array} \right.$$

La matriz del sistema (que es la de la aplicación T) es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y su forma escalonada reducida por filas es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & -x_4, \\ x_2 & = & x_4, \\ x_3 & = & -x_4, \\ x_4 & = & x_4, \end{array} \right. \text{ y } \operatorname{null}(T) = \langle \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Como $\operatorname{null}(T) \neq \mathbf{0}$, la aplicación T no es inyectiva. A partir de la fórmula

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{null}(T) + \dim \operatorname{im}(T),$$

deducimos que $\dim \operatorname{im}(T) = 4 - 1 = 3$. Como $\operatorname{im} T \subset \mathbb{R}^3$, y coinciden en dimensión, deducimos que son iguales. Por tanto, T es sobreyectiva. Vamos a ver este resultado mediante cálculo directo. Para ello, sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Tenemos que encontrar $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{b}$, que traducido a coordenadas es

$$T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 + u_3 \\ u_3 + u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \text{ o bien } \left\{ \begin{array}{ccccccc} u_1 & +u_2 & & & = & b_1, \\ & u_2 & +u_3 & & = & b_2, \\ & & u_3 & +u_4 & = & b_4, \end{array} \right. .$$

Es un sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que es la matriz de la aplicación T. Su rango, como ya sabemos, es igual a 3, que coincide con el de la matriz ampliada, independientemente de los valores del vector $\boldsymbol{b}$. Por tanto, el sistema es compatible, y siempre podemos encontrar el vector $\boldsymbol{u}$. En consecuencia, T es sobreyectiva.

Indicamos las operaciones para las siguientes aplicaciones.

2.

Matriz de la aplicación $S : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$\operatorname{null}(S) \equiv \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & = & & x_3, \\ x_2 & = & x_2, & \\ x_3 & = & & x_3, \end{array} \right. \quad \operatorname{null}(S) = \langle \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$\dim \operatorname{null}(S) = 2,$ por lo que la aplicación S no es inyectiva.
$\dim \operatorname{im}(S) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{null}(S) = 1 = \dim \mathbb{R}^1,$ y la aplicación S es sobreyectiva.

3.

$$\text{Matriz de la aplicación } U : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{null}(U) \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 0, \\ x_2 & = & 0, \end{array} \right. \quad \operatorname{null}(S) = \langle \mathbf{0} \rangle,$$

$\dim \operatorname{null}(U) = 0,$ y U es inyectiva.
$\dim \operatorname{im}(U) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{null}(U) = 2 < \dim \mathbb{R}^4,$ y no es sobreyectiva.

4.
$$\text{Matriz de la aplicación } L : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\operatorname{null}(L) \equiv \begin{cases} x_1 &= 0, \\ x_2 &= -x_3, \\ x_3 &= x_3, \\ x_4 &= 0, \end{cases} \quad \operatorname{null}(L) = \langle \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$
$\dim \operatorname{null}(L) = 1,$ y L no es inyectiva.
$\dim \operatorname{im}(L) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{null}(L) = 3 < \dim \mathbb{R}^4,$ y no es sobreyectiva.

5.
$$\text{Matriz de la aplicación } M : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\operatorname{null}(M) \equiv \begin{cases} x_1 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0, \end{cases} \quad \operatorname{null}(M) = \mathbf{0},$$
$\dim \operatorname{null}(M) = 0,$ y la aplicación M es inyectiva.,
$\dim \operatorname{im}(M) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{null}(M) = 4 = \dim \mathbb{R}^4,$ y la aplicación es sobreyectiva.

Por tanto, M es biyectiva y existe M^{-1}. La matriz de M^{-1} es la matriz inversa de la matriz de M, es decir
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 171 Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales definidas con respecto a la base estándar $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^2$ como
$$g \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 3a \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}.$$

1. Calcule las matrices de $g \circ f$ y $f \circ g$ con respecto a la base $\mathcal{S}$.
2. Pruebe que $g \circ f$ es biyectiva, y calcule la matriz de $(g \circ f)^{-1}$ con respecto a $\mathcal{S}$.

Solución 171 1. Las matrices de las aplicaciones f y g respecto de la base $\mathcal{S}$ son
$$[f]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, [g]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces
$$[g \circ f]_{\mathcal{S}} = [g]_{\mathcal{S}} \cdot [f]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$
y
$$[f \circ g]_{\mathcal{S}} = [f]_{\mathcal{S}} \cdot [g]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. La aplicación $g \circ f$ es biyectiva, pues $\operatorname{null}(g \circ f) = \{\mathbf{0}\}$, y $\operatorname{im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$. Entonces existe la función inversa $(g \circ f)^{-1}$, y
$$[(g \circ f)^{-1}]_{\mathcal{S}} = ([g \circ f]_{\mathcal{S}})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 173 Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
2. Si A es semejante a B, y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.
3. Si A es semejante a B, entonces A^2 es semejante a B^2.
4. Si A es semejante a B, entonces A^t es semejante a B^t.
5. Si A es semejante a B y A es no singular, entonces B es no singular y A^{-1} es semejante a B^{-1}.

Solución 173

1. Existe P no singular tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces $PBP^{-1} = A$, y para $Q = P^{-1}$ se tiene que $A = Q^{-1}BQ$.
2. Existe P no singular tal que $B = P^{-1}AP$ y Q no singular tal que $C = Q^{-1}BQ$. Entonces $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = R^{-1}AR$ para $R = PQ$, que es no singular.
3. Existe P no singular tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces $B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$, y tenemos el resultado.
4. Existe P no singular tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces $B^t = P^tA^t(P^{-1})^t = P^tA^t(P^t)^{-1} = Q^{-1}A^tQ$, donde $Q = (P^t)^{-1}$.
5. Existe P no singular tal que $B = P^{-1}AP$. Si A es no singular, el producto anterior es no singular, por lo que B es no singular. Entonces $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, y tenemos el resultado.

Ejercicio 177 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida como $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 13 & 16 & -10 \\ 22 & 26 & -17 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Pruebe que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calcule la matriz de paso de la base estándar a $\mathcal{B}$.
3. Calcule la matriz de la aplicación f respecto de la base $\mathcal{B}$.

Solución 177

1. Como la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ es igual a 3, y el conjunto $\mathcal{B}$ tiene tres vectores, basta probar que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello, el rango de la matriz formada por sus componentes debe tener rango igual a tres. Ene efecto,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Tenemos tres pivotes, por lo que el rango es igual a tres.

2. Este apartado lo podemos hacer de dos maneras. Sea $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^3$. Nos dan las expresiones de $\boldsymbol{u}_i, i = 1, 2, 3$ con respecto a la base estándar, pues sabemos que

$$[\boldsymbol{u}_1]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{u}_2]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{u}_3]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$ es

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nos piden la matriz de paso $P(\mathcal{S},\mathcal{B})$, que es la inversa de $P(\mathcal{B},\mathcal{S})$. Por tanto, basta calcular la matriz inversa de $P(\mathcal{B},\mathcal{S})$ para obtener la respuesta:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(\mathcal{B},\mathcal{S}) & I_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_3 & P(\mathcal{S},\mathcal{B}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$P(\mathcal{S},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La segunda forma de hacerlo es a partir de la expresión

$$P(\mathcal{S},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{e}_1]_{\mathcal{B}} & [\boldsymbol{e}_2]_{\mathcal{B}} & [\boldsymbol{e}_3]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz que contiene las coordenadas de cada vector de la base estándar con respecto a la base $\mathcal{B}$. Para ello, se plantean los sistemas de ecuaciones asociados a las igualdades

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \alpha_3\boldsymbol{u}_3, \\
\boldsymbol{e}_2 &= \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \beta_2\boldsymbol{u}_2 + \beta_3\boldsymbol{u}_3, \\
\boldsymbol{e}_3 &= \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2 + \gamma_3\boldsymbol{u}_3.
\end{aligned}$$

Esto es equivalente a resolver simultáneamente tres sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes $P(\mathcal{B},\mathcal{S})$, y términos independientes iguales a $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Esto es precisamente lo que hemos hecho antes, y obtenemos el mismo resultado.

3. Este apartado se puede hacer aplicando la fórmula del cambio de base, o la definición de matriz de una aplicación lineal con respecto a una base.

   - Por la definición, se tiene que

     $$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [f(\boldsymbol{u}_1)]_{\mathcal{B}} & [f(\boldsymbol{u}_2)]_{\mathcal{B}} & [f(\boldsymbol{u}_3)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}.$$

     Se tiene que

     $$\begin{aligned}
     f(\boldsymbol{u}_1) = A\boldsymbol{u}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \\
     f(\boldsymbol{u}_2) = A\boldsymbol{u}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \\
     f(\boldsymbol{u}_3) = A\boldsymbol{u}_3 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.
     \end{aligned}$$

Ahora hay que calcular las coordenadas de estos vectores respecto de la base $\mathcal{B}$, por lo que planteamos los sistemas de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3,$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \mu_2 \boldsymbol{u}_2 + \mu_3 \boldsymbol{u}_3,$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \nu_1 \boldsymbol{u}_1 + \nu_2 \boldsymbol{u}_2 + \nu_3 \boldsymbol{u}_3.$$

Para resolverlos, hacemos la operación

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Por la fórmula del cambio de base, sabemos que

$$[f]_{\mathcal{B}} = P(\mathcal{S}, \mathcal{B})[f]_{\mathcal{S}} P(\mathcal{B}, \mathcal{S}).$$

La matriz $[f]_{\mathcal{S}}$ no es más que la matriz A dada. Entonces

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 13 & 16 & -10 \\ 22 & 26 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 179 Consideremos las bases $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \boldsymbol{u}'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{u}'_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}'_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

2. Calcule las coordenadas $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}}$, donde

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix},$$

y aplique la fórmula del cambio de base para calcular $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'}$.

3. Calcule las coordenadas $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'}$ directamente y compruebe el resultado con el apartado anterior.

Solución 179 1. Sea $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matriz de paso de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Entonces

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \left(\; [\boldsymbol{u}_1]_{\mathcal{B}'} \quad [\boldsymbol{u}_2]_{\mathcal{B}'} \quad [\boldsymbol{u}_3]_{\mathcal{B}'} \; \right),$$

por lo que tenemos que calcular las coordenadas de cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}$ respecto de la base $\mathcal{B}'$. Si denominamos

$$[\boldsymbol{u}_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{u}_2]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, [\boldsymbol{u}_3]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix},$$

entonces tenemos los sistemas de ecuaciones

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1' + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2' + \alpha_3 \boldsymbol{u}_3', \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \beta_1 \boldsymbol{u}_1' + \beta_2 \boldsymbol{u}_2' + \beta_3 \boldsymbol{u}_3', \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \gamma_1 \boldsymbol{u}_1' + \gamma_2 \boldsymbol{u}_2' + \gamma_3 \boldsymbol{u}_3', \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dichos sistemas tiene la misma matriz de coeficientes, por lo que para resolverlos calculamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \overset{\text{rref}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right].$$

Por tanto,

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Si llamamos

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{u}_3,$$
$$\begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que es un sistema de ecuaciones, cuyas soluciones se obtienen mediante

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

A partir de la fórmula

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'} = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}},$$

tenemos que

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 23/2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. El cálculo directo de $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'}$ nos lleva a considerar

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\boldsymbol{w} = \mu_1 \boldsymbol{u}_1' + \mu_2 \boldsymbol{u}_2' + \mu_3 \boldsymbol{u}_3',$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \\ -5 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 23/2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 23/2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

que coincide con el resultado obtenido en el apartado anterior.

Ejercicio 180 Sea $\mathcal{S}$ la base estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ la base dada por

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule la matriz de paso $M(\mathcal{B}, \mathcal{S})$.
2. Calcule la matriz de paso $M(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ mediante la expresión de los vectores de la base estándar $\mathcal{S}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$.

3. Compruebe que $M(\mathcal{S},\mathcal{B}) = M(\mathcal{B},\mathcal{S})^{-1}$.

4. Sea

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}}$ a partir de la definición y use la matriz de paso correspondiente para obtener $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{S}}$.

5. Sea

$$\boldsymbol{w}' = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $[\boldsymbol{w}']_{\mathcal{S}}$ y use la matriz de paso correspondiente para obtener $[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}}$.

Solución 180 1. Recordemos que la matriz de paso $M(\mathcal{B},\mathcal{S})$ es igual a

$$M(\mathcal{B},\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{S}} & [\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{S}} & [\boldsymbol{v}_3]_{\mathcal{S}} \end{pmatrix},$$

y sabemos que, de forma directa,

$$[\boldsymbol{v}_1]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{v}_2]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{v}_3]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$M(\mathcal{B},\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. El cálculo mediante la definición de la matriz de paso $M(\mathcal{S},\mathcal{B})$ precisa de la resolución de los sistemas de ecuaciones

$$\boldsymbol{e}_1 = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2 + \beta_3\boldsymbol{v}_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \gamma_1\boldsymbol{v}_1 + \gamma_2\boldsymbol{v}_2 + \gamma_3\boldsymbol{v}_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

para lo que calculamos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \stackrel{\text{rref}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$M(\mathcal{S},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Basta comprobar que $M(\mathcal{S},\mathcal{B})M(\mathcal{B},\mathcal{S}) = I_3$. Observemos que la resolución de los sistemas en el apartado anterior es equivalente al cálculo de la matriz inversa de la matriz $M(\mathcal{B},\mathcal{S})$.

4. Si
$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$
entonces $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$, lo que implica
$$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$
que es un sistema de ecuaciones. Para resolverlo,
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -239 \\ 0 & 1 & 0 & 77 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right], \text{ de donde } [\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -239 \\ 77 \\ 30 \end{bmatrix}.$$
Además,
$$[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{S}} = M(\mathcal{B},\mathcal{S})[\boldsymbol{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -239 \\ 77 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},$$
como era de esperar.

5. Ahora lo hacemos al revés. Por el carácter especial de la base estándar, es inmediato que
$$[\boldsymbol{w}']_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Entonces
$$[\boldsymbol{w}']_{\mathcal{B}} = M(\mathcal{S},\mathcal{B})[\boldsymbol{w}']_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 64 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 181 Consideremos la matriz
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
y la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por
$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$
Calcule una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $P = M(\mathcal{B}',\mathcal{B})$ y una base $\mathcal{B}''$ tal que $P = M(\mathcal{B},\mathcal{B}'')$.

Solución 181 Sea $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'\}$. Como
$$P = M(\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{u}_1']_{\mathcal{B}} & [\boldsymbol{u}_2']_{\mathcal{B}} & [\boldsymbol{u}_3']_{\mathcal{B}} \end{pmatrix},$$

esto implica que conocemos los coeficientes con los que cada vector $\boldsymbol{u}_i', i = 1, 2, 3$ se expresa como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$. En concreto,

$$\boldsymbol{u}_1' = 1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2' = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 3 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3' = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda parte se hace de la misma forma al tener en cuenta que $P^{-1} = M(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$. Si escribimos $\mathcal{B}'' = \{\boldsymbol{u}_1'', \boldsymbol{u}_2'', \boldsymbol{u}_3''\}$, y dado que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

obtenemos

$$\boldsymbol{u}_1'' = 1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2'' = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3'' = 0 \cdot \boldsymbol{u}_1 + (-2) \cdot \boldsymbol{u}_2 + 3 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$