

Problemas resueltos de subespacios vectoriales, base y dimensión. Matemáticas I curso 2012-13

29. Calcular la dimensión, una base, unas ecuaciones implícitas y unas ecuaciones explícitas (paramétricas) de los siguientes subespacios. ¿En qué espacio vectorial están contenidos?

(a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0, -x + y - z = 0\}$ Dato: Tenemos "las candidatas" a ec. implícitas.
 E_1 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Buscamos las ecuaciones paramétricas

De E_1 nos dan "las candidatas" a ecuaciones implícitas, para que lo sean habrá que "limpiarlas":

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Mirando el menor principal concluimos que las dos ecuaciones son l.i. y la variable libre es z

$$\begin{cases} x + 2y = -z \\ -x + y = z \end{cases} \rightarrow \text{hacemos } z = \alpha \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -\alpha \\ -x + y = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\alpha \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ ecuaciones paramétricas

Buscamos una base y la dimensión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{E_1} = \{(-1, 0, 1)\} \quad \dim E_1 = 1$$

Otra forma de saber la dimensión del subespacio:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3 = \dim \text{subespacio} + \underbrace{n^o \text{ de ecuaciones implícitas l.i.}}_2 \rightarrow \dim E_1 = 1$$

(b) $E_2 = \langle(1, 1, 1), (-1, 0, 1)\rangle$ Dato: Tenemos un sistema generador.

E_2 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Buscamos una base y la dimensión

Tenemos un sistema generador, hay que "limpiarlo", es decir, eliminar los vectores l.d. para obtener una base.

Para ello estudiamos el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema generador.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 2 \rightarrow \text{los dos vectores son l.i.} \rightarrow$$

$B_{E_2} = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$ y $\dim E_2 = 2$

Buscamos las ecuaciones paramétricas

Cualquier vector del subespacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base:

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(-1, 0, 1)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Buscamos las ecuaciones implícitas (conociendo la base)

$$\text{Como } \dim E_2 = 2, \text{ exigimos que } \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} \right) = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

Sabíamos que iba a salir 1 ec. implícita ya que $\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3 = \underbrace{\dim \text{subesp.}}_2 + n^o \text{ de ec. implícitas l.i.} \rightarrow$

$n^o \text{ de ec. implícitas l.i.} = 1$

Problemas resueltos de subespacios vectoriales, base y dimensión. Matemáticas I curso 2012-13

(c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y, 2x - 2y = 0\}$ Dato: Tenemos "las candidatas" a ecuaciones implícitas.

E_3 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Buscamos las ecuaciones paramétricas

De E_3 nos dan "las candidatas" a ecuaciones implícitas, para que lo sean habrá que "limpiarlas":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

Mirando el menor principal concluimos que sólo hay una ecuación l.i. y las variables libres son "y" y "z"

La ecuación implícita será $x - y = 0$

Resolvemos el sistema: $x - y = 0 \rightarrow x = y \rightarrow$ hacemos $\begin{cases} y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ecuaciones paramétricas}$

Buscamos una base y la dimensión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{E_3} = \{(1,1,0), (0,0,1)\} \quad \dim E_3 = 2$$

Otra forma de saber la dimensión del subespacio:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3 = \dim \text{subespacio} + \underbrace{n^o \text{ de ecuaciones implícitas l.i.}}_1 \rightarrow \dim E_3 = 2$$

(d) $E_4 = \langle (1, 0, 1), (2, 0, 2) \rangle$

Dato: Tenemos un sistema generador.

E_4 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Buscamos una base y la dimensión

Tenemos un sistema generador, hay que "limpiarlo", es decir, eliminar los vectores l.d. para obtener una base.

Para ello estudiamos el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema generador.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 1 \rightarrow \text{sólo hay un vector l.i.} \rightarrow$$

$$B_{E_4} = \{(1,0,1)\} \quad \dim E_4 = 1$$

Buscamos las ecuaciones paramétricas

Cualquier vector del subespacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base:

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,1)$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Buscamos las ecuaciones implícitas (conociendo la base)

$$\text{Como } \dim E_4 = 1, \text{ exigimos que } \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z - x = 0 \end{cases} \quad \text{ec. implícitas}$$

Sabíamos que iban a salir 2 ec. implícitas ya que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3 = \underbrace{\dim \text{subesp.}}_1 + n^o \text{ de ecuaciones implícitas l.i.} \rightarrow n^o \text{ de ec. implícitas l.i.} = 2$$

Problemas resueltos de subespacios vectoriales, base y dimensión. Matemáticas I curso 2012-13

(e) $E_5 = \{(2\alpha + 3\beta, 2\alpha + 3\beta, \alpha) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ Dato: Tenemos "las candidatas" a ec. paramétricas.

E_5 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Buscamos una base y la dimensión

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha + 3\beta \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{(2,2,1), (3,3,0)\}$ sistema generador de E_5 , Tenemos que "limpiar" el sistema generador, es decir, eliminar los vectores l.d. para tener una base.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \rightarrow \text{los 2 vectores son l.i.} \rightarrow$$

$$B_{E_5} = \{(2,2,1), (3,3,0)\} \text{ y } \dim E_5 = 2$$

Buscamos las ecuaciones implícitas (a partir de la base).

$$\text{Como } \dim E_5 = 2, \text{ exigimos que } rg \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3y - 3x = 0$$

Sabíamos que iba a salir 1 ec. implícita ya que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3 = \underbrace{\dim \text{subespacio}}_2 + n^{\text{o}} \text{ de ecuaciones implícitas l.i.} \rightarrow n^{\text{o}} \text{ de ecuaciones implícitas l.i.} = 1$$

(f) $E_6 = \{(\lambda, \mathbf{0}, \lambda + \mu, -\mu) / \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ Dato: Tenemos "las candidatas" a ec. paramétricas.

E_6 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

Buscamos una base y la dimensión

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda + \mu \\ t = -\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\{(1,0,1,0), (0,0,1,-1)\}$ sistema generador de E_6 , Tenemos que "limpiar" el sistema generador, es decir, eliminar los vectores l.d. para tener una base.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \rightarrow \text{los 2 vectores son l.i.} \rightarrow$$

$$B_{E_6} = \{(1,0,1,0), (0,0,1,-1)\} \text{ y } \dim E_6 = 2$$

Buscamos las ecuaciones implícitas (a partir de la base).

$$\text{Como } \dim E_6 = 2, \text{ exigimos que } rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t - x + z = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Sabíamos que iban a salir 2 ec. implícita ya que $\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_4 = \underbrace{\dim \text{subesp.}}_2 + n^{\text{o}} \text{ de ecuaciones implícitas l.i.} \rightarrow$

n^{o} de ecuaciones implícitas l.i. = 2

(g) $E_7 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_4 = 0, x_1 + 2x_3 = 0\}$ Dato: Tenemos "las candidatas" a ecuaciones implícitas.

E_7 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

Buscamos las ecuaciones paramétricas

De E_7 nos dan "las candidatas" a ecuaciones implícitas, para que lo sean habrá que "limpiarlas":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

Mirando el menor principal concluimos que las dos ecuaciones son l.i. y las variables libres son x_3 y x_4

$$\text{Resolvemos el sistema: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -x_4 \\ x_1 = -2x_3 \end{cases} \quad \text{hacemos } x_3 = \alpha \text{ y } x_4 = \beta$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -\beta \\ x_1 = -2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\text{La solución del sistema es: } \begin{cases} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -2\alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ecuaciones paramétricas}$$

Buscamos una base y la dimensión

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B_{E_7} = \{(-2, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\} \quad \dim E_7 = 2$$

Otra forma de saber la dimensión del subespacio:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_4 = \dim \text{subesp.} + \underbrace{n^o \text{ de ecuaciones implícitas l.i.}}_2 \rightarrow \dim E_7 = 2$$

(h) $E_8 = \langle (1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0) \rangle$ Dato: Tenemos un sistema generador.

E_8 es subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 .

Buscamos una base y la dimensión

Tenemos un sistema generador, hay que "limpiarlo", es decir, eliminar los vectores l.d. para obtener una base.

Para ello estudiamos el rango de la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema generador.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rg(A) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow rg(A) \geq 3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A) = 3 \end{cases}$$

$$B_{E_8} = \{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 0)\} \text{ y } \dim E_8 = 3$$

Buscamos las ecuaciones paramétricas

Cualquier vector del subespacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base:

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 2, 0) + \beta(0, 1, 1, 0) + \gamma(2, 1, 0, 0)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = \alpha + 2\gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = 2\alpha + \beta \\ t = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Buscamos las ecuaciones implícitas (conociendo la base)

$$\text{Como } \dim E_8 = 3, \text{ exigimos que } \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ec. implícita}$$

Sabíamos que iba a salir 1 ec. implícita ya que $\underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_4 = \underbrace{\dim \text{subesp.}}_3 + \text{nº de ecuaciones implícitas l.i.} \rightarrow$

nº de ec. implícitas l.i = 1