Содержание

1 Монотонность

Определение: Назовем функцию $f(x)$ монотонно возрастающей на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна и для любых чисел x_1 и x_2 таких, что $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ и убывающей, если $f(x_2) < f(x_1)$.
Предлагаю заострить внимание на некоторых свойствах монотонно возрастающей функции. Да, скажу сразу, что аналогичные свойства будут работать и для монотонно убывающей функции для всех принципов кроме 4-го.

Принцип 1: Если функция $f(x)$ – монотонно возрастающая на отрезке $[a;b]$, то уравнение вида $f(x) = c$ имеет одно решение, для любых чисел таких, что $f(a) \leq c \leq f(b)$.
Пример: Решите уравнение $\sin x = x$.
Исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x - x = 0$. Исследуем функцию $f(x) = \sin x - x$ и заметим, что ее производная имеет вид $f'(x) = \cos x - 1$. Далее заметим, что $f'(x)$ всегда неотрицательна, и, следовательно, $f(x)$ возрастает на всей числовой оси, а это значит, что по первому принципу уравнение $\sin x - x = 0$ имеет одно решение. И, наконец, заметим, что $x = 0$ — это решение.

Принцип 2: Если функция $f(x)$ – монотонно возрастающая на отрезке $[a;b]$, то справедливо неравенство $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, если $a \leq x \leq b$.
Пример: Докажите, что при x из отрезка $[1;2]$ неравенство $x^3 + \ln x + x \geq 2$.
Заметим, что $x^3, \ln x, x$ – монотонно возрастают на отрезке $[1;2]$, следовательно и их сумма будет монотонно возрастать (а если бы они были убывающими, то их сумма убывала бы и раз уж мы заговорили про свойства такого типа, то полезно будет обозначить, что произведение монотонно возрастающих не всегда будет монотонно возрастающей, но если бы мы взяли положительные монотонно возрастающие функции, то тогда бы их произведение стало бы монотонно возрастающей функцией (докажите это), но вернемся к исходному примеру). Теперь воспользуемся принципом 2. По нему $f(x) = x^3 + \ln x + x$ на отрезке $[1;2]$ будет удовлетворять ограничению $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$. Осталось лишь заметить, что $f(1) = 2$. Неравенство доказано.

Принцип 3: Если функция $f(x)$ – монотонно возрастающая на отрезке $[a;b]$ и функции $g(x)$ и $k(x)$ удовлетворяют неравенству $a \leq g(x), k(x) \leq b$, то уравнению $f(g(x)) = f(k(x))$ на ОДЗ равносильно уравнение $g(x) = k(x)$.
Пример: Решите неравенство $\frac{1}{x^2+|x|+2} + x^2 + |x| + 2 \geq \frac{1}{|x|+3} + |x| + 3$.
Заметим, что это неравенство можно переписать в виде $f(g(x)) \geq f(k(x))$, где $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + |x| + 2, k(x) = |x| + 3$. Осталось лишь заметить, что $f(x)$ монотонно возрастает при $x \geq 1$ и значения функций $g(x)$ и $k(x)$ всегда больше или равны единице, следовательно, исходное неравенство по принципу 3 равносильно неравенству $g(x) \geq k(x)$, которое уже имеет вполне приятный вид $x^2 + |x| + 2 \geq |x| + 3 <=> x^2 - 1 \geq 0$ (да, мы вводили принцип 3 для уравнений, но если вы его честно осознали, то я уверен, что и его применение к решению неравенств для вас более чем понятно (главное не забывать, что для монотонно убывающих $f(x)$ знак необходимо менять).

Принцип 4: Если функция $f(x)$ – монотонно возрастающая, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.
Пример: Решите уравнение $(x^3 + 3x)^3 + 3(x^3 + 3x) = x$.

Заметим, что данное уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, где $f(x) = x^3 + 3x$ и является монотонно возрастающей, как сумма двух монотонно возрастающих, поэтому данное уравнение равносильно $x^3 + 3x = x$. Отсюда, $x = 0$. Да, иногда полезно пользоваться тем, что для любой функции $f(x)$ все корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями уравнения $f(f(x)) = x$ (но не наоборот!).

Принцип 5: если функция $f(x)$ имеет вид $a_1|x-b_1|+\ldots+a_n|x-b_n|$ и $|a_1| \geq |a_2|+\ldots+|a_n|$, то функция f(x) имеет ту же монотонность, что и функция $a_1|x-b_1|$.
Пример: Исследуйте функцию $f(x) = 5|x-1| + |2x+a^2| + 2x + a$ на монотонность при всех знамениях параметра a.
В глаза сразу бросается, что первый модуль умножается на 5, что больше, чем сумма коэффициентов при оставшихся модулях. Поэтому если первый модуль раскрывается со знаком $"+"$, то как бы ни раскрылись оставшиеся модули, итоговый коэффициент при x будет положительным, а поскольку на каждом конкретном промежутке мы имеем дело с линейной функцией, которая возрастает, когда коэффициент при x положительный, то при $x \geq 1$ функция $f(x)$ будет возрастать. Аналогично, при $x \leq 1$ $f(x)$ убывает при любых значениях параметра a.

Эти принципы (докажите их, пользуясь данным определением, или просто убедите себя в их правильности пристально посмотрев на график монотонной функции) звучат достаточно просто, но при этом очень сильно помогают при работе с некоторыми задачами приведенными ниже. Материалы взяты из цикла олимпиад РСОШ, ДВИ и ЕГЭ прошлых лет.

Применение принципов 1 и 2:

1. Решите уравнение
$$4^x + 3^x = 5^x.$$

2. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{16}} \geq -2^{-x}.$$

3. Решите неравенство
$$x^{10} + \sqrt{x-1} \geq 33.$$

4. Решите уравнение
$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}.$$

5. Решите уравнение
$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x).$$

6. Решите уравнение
$$(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4)\sin x = 0.$$

7. Найдите область значений функции $\cos(\cos(\cos x))$.

8. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение
$$\sqrt{x^3 - a^3} + \sqrt{x+2} = 2$$
имеет хотя бы одно решение.

9. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых неравенство
$$a\log_3 x + \log_{\frac{1}{2}} x > 1$$
имеет решения, причем среди решений нет больших 1.

10. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2y(x-a) + a^2 = 0 \\ 2^{-2-y} \cdot \log_2 x < 1 \end{cases}$$
имеет решения, и найдите эти решения.

11. Найдите сумму всех корней уравнения
$$x^2 - 31x + 220 = 2^x(31 - 2x - 2^x).$$

12. Решите уравнение

$$\sqrt{a^2+c-1-2x-x^2}+\sqrt{b^2+c-1-2x-x^2}=\sqrt{x^2+2x+1-x+(a+b)^2},$$

где $a, b, c > 0$.

13. При каких значениях параметра a все решения уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежат отрезку $[1;3]$?

14. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geq 0$$

имеет 1 решение?

15. Найдите все целые значения x из отрезка $[19;29]$, удовлетворяющие неравенству $\frac{a^6+8a^5-2}{a^x}\leq 1$, где a - корень уравнения $y^{17}+2y^{11}+4y^5=1$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y^2-y^4=e^x \\ \arccos x+2\operatorname{arctg} y=0. \end{cases}$$

17. Чему равно $x+y$, если выполняется следующее условие

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1?$$

18. Найдите наибольшее значение выражения $a+b+c+d-ab-bc-cd-da$, если каждое из чисел a, b, c и d принадлежат отрезку $[0,1]$.

19. Докажите, что справедливо неравенство

$$\cos(\cos(\cos(\cos x)))>\sin(\sin(\sin(\sin x))).$$

Применение принципов 1 и 2 с рассмотрением промежутков:

20. Решите уравнение

$$10^x+6^x=7^x+9^x.$$

21. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^9+ax^2+5=0$$

имеет 4 решения?

22. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{2}{x^2}?$$

23. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\sqrt{3}?$$

24. Решите неравенство

$$4\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{x}.$$

25. Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}, 2^{x^2-9x+11}, \left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$$

— арифметическая прогрессия.

26. Найдите все пары (a, b), при которых множество решений неравенства

$$\log_{2014}(x-a)>2x^2-x-b$$

совпадает с промежутком $(0; 1)$.

27. Решите уравнение

$$3^{x^2+x-2}-3^{x^2-4}=80.$$

28. Решите уравнение

$$2^x=2x.$$

29. Докажите, что справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1},$$

где n — натуральное число и $n \geq 3$.

30. Докажите, что

$$2^x>x.$$

31. Докажите, что справедливо неравенство

$$2ab\ln\frac{b}{a}<b^2-a^2$$

при условии, что $0<a<b$.

32. Найдите сумму всех корней уравнения

$$(f(x)-2)(f(x)-4)-(f(x)-2012)=1,$$

где $f(x)=\sqrt{x^2-x}$.

Применение принципа 3:

33. Решите уравнение

$$\sin(x^2)-\sin(2x)=2x-x^2$$

34. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^{10}+(a-2|x|)^5+x^2-2|x|+a=0$$

имеет более 3 решений?

35. Решите уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

36. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x-2x^2-a}{3}\right)-\cos(2x+a)=x^2-8x-a$$

имеет единственное решение.

37. Решите уравнение $f\left(\sqrt{x+9}\right)=f(3x)$, где $f(t)=3t-t^2$ при всех действительных t.

38. Решите уравнение

$$11^{\log_6(2x-1)}-6^{\log_{11}(2x+4)}=5.$$

39. Решите неравенство

$$\frac{4^{-|x-3|}}{\sqrt{x^2-9}+2}\leq\frac{2^{1-|x|}}{\sqrt{x^2+12x}+4}.$$

В ответ запишиту сумму длин интервалов решения, принадлежащих множеству $[-2018;2018]$. Если неравенство не имеет решений, то запишите -1.

40. Решите неравенство

$$x+\sqrt{x^2+4}\geq\left(2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2}\right)\cdot 8^{x+1}.$$

41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 \\ x^6+x^2=8y^3+2y. \end{cases}$$

42. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|}\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+4)+2^{x^2-2x}\log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3)=0$$

имеет ровно три решения?

43. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{7}}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

44. Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2+2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2+2x-3).$$

Применение принципа 4:

45. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$$

имеет решения?

46. Решите уравнение

$$x^3-2=\sqrt[3]{x+2}.$$

47. Решите уравнение

$$e^{e^x-1}=x+1.$$

48. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+x+6=8y \\ y^3+y+6=8z \\ z^3+z+6=8x. \end{cases}$$

Применение принципа 5:

49. Найдите минимальное значение $f(x)$, если

$$f(x)=10|x|+2|x-1|+3|x-2|+4|x-3|.$$

50. При каких значениях параметра a при всех значениях $(x;y)$ верно неравенство

$$13\sin x-7|\sin x+y-2a|+3|\sin x-2y-a-1|\le 16?$$

51. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2 - 5a + 5\sqrt{2x^2 + 25} = 3|x - 5a| - 6|x|$$

имеет 1 и более решений?

52. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

53. При каких значениях параметра b для любого числа из отрезка $[-3; 2]$ верно неравенство

$$5x^3 + 11x + 3|2x - b + 4| - 2|x - 2b + 1| - \sqrt[3]{2 - 5x} \leq 21?$$

54. Найдите минимум выражения

$$|3x - y| + |x + y| + |y + \frac{1}{3}|.$$