

Н. Я. ВИЛЕНКИН  
А. Н. ВИЛЕНКИН, П. А. ВИЛЕНКИН

# КОМБИНАТОРИКА

«ФИМА» · МЦНМО  
Москва  
2006

УДК 519.1

ББК 22.17

Б44

**Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А.**

**Б44      Комбинаторика.** – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.

– 400 с.

ISBN 5-89492-014-0 («ФИМА»), ISBN 5-94057-230-8 (МЦНМО)

В книге в популярной форме рассказывается о комбинаторике, методах решения комбинаторных задач, о рекуррентных соотношениях и производящих функциях. Материал частично захватывает области, выходящие за рамки элементарной математики, однако изложение доступно хорошему ученику средней школы. Книга содержит более 400 упражнений.

Книга будет полезна школьникам старших классов, интересующимся математикой, учителям, студентам первых курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также всем, сталкивающимся в своей практической работе с комбинаторными задачами.

ББК 22.17

*Виленкин Наум Яковлевич*

*Виленкин Александр Наумович*

*Виленкин Павел Александрович*

## КОМБИНАТОРИКА

Редактор *A. B. Семенов*

Дизайн обложки *У. В. Солова*

ООО «ФИМА» 121248, г. Москва, Украинский бульв., д. 3/5, корп. 2  
E-mail: pub-fima@yandex.ru

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования  
119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11

Тел. 241-74-83, E-mail: biblio@mccme.ru

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано к печати 03.02.2006 г. Формат 60×90/16.

Печать офсетная. Объем 25 печ. л. Тираж 3 000 экз. Заказ №  
Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП Типография «Наука»  
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6

ISBN 5-89492-014-0 («ФИМА»)  
ISBN 5-94057-230-8 (МЦНМО)

© «ФИМА», 2006  
© МЦНМО. Обложка, 2006

Комбинаторика — важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам, инженерам и многим другим научно-техническим работникам. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

Книга может быть использована как дополнительная литература по разделам комбинаторики и теории вероятностей, изучаемым в школьном курсе математики, а также как источник упражнений по информатике — многие вычислительные задачи, приведенные в книге, удобнее всего решать на компьютере в программах электронных таблиц.

**ISBN 5–89492–014–0**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .</b>                                | <b>7</b>  |
| <b>ГЛАВА I</b>  |           |
| <b>ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ . . . . .</b>                | <b>9</b>  |
| 1. Суеверный председатель . . . . .                         | 9         |
| 2. Лото . . . . .   | 10        |
| 3. Команда космического корабля . . . . .                   | 11        |
| 4. Правила суммы и произведения . . . . .                   | 12        |
| 5. Размещения с повторениями . . . . .                      | 18        |
| 6. Секретный замок . . . . .                                | 18        |
| 7. Системы счисления и передача информации . . . . .        | 19        |
| 8. Вокруг ЭВМ . . . . .                                     | 20        |
| 9. Морской семафор . . . . .                                | 22        |
| 10. Точки—тире телеграфные . . . . .                        | 22        |
| 11. Задачи о шашках . . . . .                               | 26        |
| 12. Сколько человек не знают иностранных языков? . . . . .  | 27        |
| 13. Формула включений и исключений . . . . .                | 29        |
| 14. Анализ отчета . . . . .                                 | 31        |
| 15. Решето Эратосфена . . . . .                             | 32        |
| 16. Проблемы комбинаторики . . . . .                        | 34        |
| 17. Множества и кортежи . . . . .                           | 36        |
| <b>Глава II</b>   |           |
| <b>РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ . . . . .</b>       | <b>40</b> |
| 18. Первенство по футболу . . . . .                         | 40        |
| 19. Размещения без повторений . . . . .                     | 41        |
| 20. Перестановки . . . . .                                  | 43        |
| 21. Лингвистические проблемы . . . . .                      | 45        |
| 22. Перестановки с повторениями . . . . .                   | 46        |
| 23. Сочетания без повторений . . . . .                      | 49        |
| 24. Бином Ньютона . . . . .                                 | 52        |
| 25. Покупка пирожных . . . . .                              | 54        |
| 26. Сочетания с повторениями . . . . .                      | 56        |
| 27. Генуэзская лотерея . . . . .                            | 58        |
| 28. «Спортлото» . . . . .                                   | 61        |
| 29. Снова футбольное первенство . . . . .                   | 63        |
| 30. Перестановки с ограничениями . . . . .                  | 63        |
| 31. Постройка лестницы . . . . .                            | 65        |
| 32. Рыцари короля Артура . . . . .                          | 67        |
| 33. Свойства сочетаний . . . . .                            | 70        |
| 34. Частный случай формулы включений и исключений . . . . . | 79        |
| 35. Знакопеременные суммы сочетаний . . . . .               | 80        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава III</b>  |            |
| <b>РАСКЛАДКИ . . . . .</b>                                | <b>90</b>  |
| 36. Шары и лузы . . . . .                                 | 90         |
| 37. Сбор яблок . . . . .                                  | 91         |
| 38. Букет цветов и сбор грибов . . . . .                  | 93         |
| 39. Задача о числе делителей . . . . .                    | 94         |
| 40. Домино и преферанс . . . . .                          | 95         |
| 41. Раскладка по ящикам . . . . .                         | 97         |
| 42. Сушка грибов . . . . .                                | 98         |
| 43. Разные статистики . . . . .                           | 99         |
| 44. Распределение нагрузки . . . . .                      | 101        |
| 45. Посылка фотографий . . . . .                          | 102        |
| 46. Числа Стирлинга . . . . .                             | 103        |
| 47. Комбинаторика классификаций . . . . .                 | 104        |
| 48. Флаги на мачтах . . . . .                             | 105        |
| 49. Полное число сигналов . . . . .                       | 107        |
| 50. Общая задача о ладьях . . . . .                       | 108        |
| 51. Симметричные расстановки . . . . .                    | 109        |
| 52. Восемь ферзей . . . . .                               | 112        |
| 53. Вся королевская конница . . . . .                     | 113        |
| 54. Два коня . . . . .                                    | 115        |
| <b>Глава IV</b>   |            |
| <b>РАЗБИЕНИЯ . . . . .</b>                                | <b>120</b> |
| 55. Задача о наклейке марок . . . . .                     | 120        |
| 56. Разбиение чисел на слагаемые . . . . .                | 122        |
| 57. Жетоны в мешке . . . . .                              | 123        |
| 58. $m$ -арифметический треугольник . . . . .             | 124        |
| 59. Счастливые троллейбусные билеты . . . . .             | 126        |
| 60. Некоторые свойства чисел $C_m(n, N)$ . . . . .        | 128        |
| 61. Проблема абитуриента . . . . .                        | 130        |
| 62. Уплата денег . . . . .                                | 130        |
| 63. Покупка конфет . . . . .                              | 132        |
| 64. Как разменять гривенник? . . . . .                    | 133        |
| 65. Диаграммная техника . . . . .                         | 135        |
| 66. Двойственные диаграммы . . . . .                      | 137        |
| 67. Формула Эйлера . . . . .                              | 138        |
| <b>Глава V</b>  |            |
| <b>СМЕЩЕНИЯ, СУБФАКТОРИАЛЫ И ЗАПРЕТНЫЕ ЗОНЫ . . . . .</b> | <b>144</b> |
| 68. Девушка спешит на свидание . . . . .                  | 144        |
| 69. Сеанс телепатии . . . . .                             | 146        |
| 70. Общая задача о смещении . . . . .                     | 148        |
| 71. Субфакториалы . . . . .                               | 149        |
| 72. Запретные зоны и ладейные числа . . . . .             | 151        |
| 73. Общая формула . . . . .                               | 152        |
| 74. За обеденным столом . . . . .                         | 154        |
| 75. Диаграммы Юнга . . . . .                              | 156        |
| 76. Караван в пустыне . . . . .                           | 158        |
| 77. Катание на карусели . . . . .                         | 160        |
| 78. Затруднение мажордома . . . . .                       | 161        |

---

Глава VI**БЛУЖДАНИЯ, ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА И ОБОЩЕНИЯ  
БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ . . . . .**

|  |     |
|--|-----|
| 79. Человек бродит по городу . . . . .               | 165 |
| 80. Броуновское движение . . . . .                   | 166 |
| 81. Блуждания и свойства сочетаний . . . . .         | 168 |
| 82. Очередь в кассу . . . . .                        | 170 |
| 83. Задача о двух шеренгах . . . . .                 | 175 |
| 84. Очереди и свойства сочетаний . . . . .           | 177 |
| 85. У Шемаханской царицы . . . . .                   | 178 |
| 86. Поглощающая стенка и игры на разорение . . . . . | 181 |
| 87. Блуждания по бесконечной плоскости . . . . .     | 181 |
| 88. Арифметический квадрат . . . . .                 | 183 |
| 89. Фигурные числа . . . . .                         | 184 |
| 90. Расширенный арифметический треугольник . . . . . | 185 |
| 91. Шашка в углу . . . . .                           | 188 |
| 92. Арифметический пятиугольник . . . . .            | 189 |

**Глава VII****РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ . . . . .**

|   |     |
|---|-----|
| 93. Снова перестановки без повторений . . . . .                   | 194 |
| 94. Кролики Фибоначчи . . . . .                                   | 195 |
| 95. Разбиения фигур . . . . .                                     | 198 |
| 96. Расстановка скобок . . . . .                                  | 200 |
| 97. Задача о непересекающихся хордах . . . . .                    | 202 |
| 98. Новое решение задачи мажордома . . . . .                      | 203 |
| 99. Рекуррентные таблицы . . . . .                                | 207 |
| 100. Третье решение проблемы мажордома . . . . .                  | 207 |
| 101. Решение рекуррентных соотношений . . . . .                   | 209 |
| 102. Случай постоянных коэффициентов . . . . .                    | 211 |
| 103. Случай равных корней характеристического уравнения . . . . . | 214 |
| 104. Рекуррентные соотношения и передача информации . . . . .     | 216 |

**Глава VIII****РЯДЫ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ . . . . .**

|   |     |
|---|-----|
| 105. Деление многочленов . . . . .                                    | 217 |
| 106. Алгебраические дроби и степенные ряды . . . . .                  | 218 |
| 107. Действия над степенными рядами . . . . .                         | 222 |
| 108. Применение степенных рядов для доказательства тождеств . . . . . | 225 |
| 109. Производящие функции . . . . .                                   | 226 |
| 110. Производящие функции и биномиальные коэффициенты . . . . .       | 227 |
| 111. Дробные предметы . . . . .                                       | 229 |
| 112. Ряд Ньютона . . . . .  | 230 |
| 113. Извлечение квадратных корней . . . . .                           | 233 |
| 114. Производящие функции и рекуррентные соотношения . . . . .        | 236 |
| 115. Разложение на элементарные дроби . . . . .                       | 237 |
| 116. Производящие функции и задача о разбиениях . . . . .             | 240 |
| 117. Полиномиальная формула . . . . .                                 | 241 |
| 118. Производящие функции и разбиения чисел . . . . .                 | 245 |
| 119. Производящие функции и наборы гирь . . . . .                     | 251 |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>Глава IX</b>                                 |            |
| <b>КОМБИНАТОРИКА ОРБИТ</b>                      | <b>257</b> |
| 120. Преобразования и орбиты . . . . .          | 257        |
| 121. Хоровод . . . . .                          | 258        |
| 122. Раскраска куба . . . . .                   | 259        |
| 123. Черно-белый квадрат . . . . .              | 259        |
| 124. Орбиты и группы преобразований . . . . .   | 261        |
| 125. Неподвижные элементы . . . . .             | 262        |
| 126. Черно-белый куб . . . . .                  | 264        |
| 127. Сопряжение и циклы . . . . .               | 265        |
| <b>Глава X</b>                                  |            |
| <b>ВОЗМОЖНОЕ И НЕВОЗМОЖНОЕ В КОМБИНАТОРИКЕ</b>  | <b>271</b> |
| 128. Магические квадраты . . . . .              | 271        |
| 129. Офицерское каре . . . . .                  | 275        |
| 130. Посев пшеницы . . . . .                    | 277        |
| 131. Принцип Дирихле . . . . .                  | 278        |
| 132. Научная переписка . . . . .                | 280        |
| 133. Выбор представителей . . . . .             | 281        |
| 134. Графическое решение . . . . .              | 284        |
| 135. Прерывания IRQ . . . . .                   | 286        |
| 136. Общие представители . . . . .              | 287        |
| 137. Игра в 15 . . . . .                        | 288        |
| 138. Острова и мосты . . . . .                  | 291        |
| 139. Кругосветное путешествие . . . . .         | 292        |
| 140. Четыре краски . . . . .                    | 294        |
| 141. Код Хемминга . . . . .                     | 294        |
| <b>Глава XI</b>                                 |            |
| <b>ИЗ ИСТОРИИ КОМБИНАТОРИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ</b> | <b>304</b> |
| 142. Дела давно минувших дней... . . . . .      | 304        |
| 143. Таинственная черепаха . . . . .            | 305        |
| 144. Комбинаторика в Древней Греции . . . . .   | 306        |
| 145. Мистики, астрологи, каббалисты . . . . .   | 308        |
| 146. Комбинаторика и схоластики . . . . .       | 309        |
| 147. Комбинаторика в странах Востока . . . . .  | 310        |
| 148. Liber Abaci . . . . .                      | 311        |
| 149. Игра в кости . . . . .                     | 312        |
| 150. Игрок и ученые . . . . .                   | 314        |
| 151. Новая ветвь математики . . . . .           | 315        |
| 152. Комбинаторика и шифры . . . . .            | 316        |
| 153. Анаграммы . . . . .                        | 317        |
| 154. Иероглифы и клинопись . . . . .            | 319        |
| 155. Комбинаторика в биологии . . . . .         | 321        |
| 156. Модель ДНК . . . . .                       | 322        |
| 157. Генетический код . . . . .                 | 323        |
| 158. Химический пасьянс . . . . .               | 327        |
| 159. Комбинаторика эпохи компьютеров . . . . .  | 328        |
| <b>ОТВЕТЫ.</b>                                  | <b>329</b> |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов. Начальнику цеха надо распределить несколько видов работ между имеющимися станками, агроному — разместить посевы сельскохозяйственных культур на нескольких полях, заведующему учебной частью школы — составить расписание уроков, ученому-химику — рассмотреть возможные связи между атомами и молекулами, лингвисту — учесть различные варианты значений букв незнакомого языка и т. д. Область математики, в которой изучаются закономерности создания подобных комбинаций, называется *комбинаторикой*.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни тогдашнего общества большое место занимали азартные игры. В карты и кости выигрывались и проигрывались золото и бриллианты, дворцы и имения, породистые кони и дорогие украшения. Широко были распространены всевозможные лотереи. Понятно, что первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр — вопросов, насколько часто можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или получить двух королей в данной карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики и теории вероятностей.

Большим подспорьем для математиков являлось то, что решения задач такого рода можно было проверять на практике — во время игр. Зачастую происходило так, что во время многочасовых игр замечались определенные закономерности (например, что определенные комбинации карт или костей появляются чаще других), о которых игроки сообщали математикам, а последние объясняли эти наблюдения.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Никколо Тарталья (ок. 1499 — 1557). Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Блеза Паскаля (1623 — 1662), Пьера Ферма (1601 — 1665), Якоба Бернулли (1654 — 1705), Готфрида Вильгельма Лейбница (1646 — 1716) и Леонарда Эйлера (1707 — 1783). Однако и у них основную роль играли приложения к различным играм (лото, солитер и др.), а также большое количество занимательных задач и головоломок. Долгое время казалось, что комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений.

Положение дел резко изменилось после появления во второй половине XX века электронных вычислительных машин и связанного с этим расцвета дискретной математики. С этого момента комбинаторика переживает период бурного развития.

Комбинаторные методы находят множество применений. Они используются для решения транспортных задач (в частности задач по составлению расписаний), для составления планов производства и реализации продукции, в теории случайных процессов, статистике, вычислительной математике, планировании экспериментов, шахматных программах для ЭВМ и т. д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории кодирования и теории информации. Значительную роль комбинаторные методы играют и в чисто математических вопросах — при изучении конечных геометрий, теории групп и их представлений, неассоциативных алгебр и т. д.

\* \* \*

Существует достаточно много книг по комбинаторике, однако эти книги предъявляют высокие требования к математической подготовке читателя. Популярные же книги обычно охватывают лишь немногие начальные сведения.

В предлагаемой вниманию читателя книге о комбинаторных проблемах рассказывается в занимательной, популярной форме. Тем не менее в ней разбираются и некоторые довольно сложные комбинаторные задачи,дается понятие о методах рекуррентных соотношений и производящих функций.

Основой книги являются две книги Н. Я. Виленкина: «Комбинаторика» (М., 1969) и «Популярная комбинаторика» (М., 1975). В конце 80-х годов Наум Яковлевич начал работать над новой книгой, в которую должен был войти материал обеих книг и решения задач ... Завершать эту работу пришлось потомкам.

В этой книге сохранен (а где-то восстановлен) неформальный стиль изложения первой книги. Большинство понятий введено в связи с конкретными задачами. Однако эти задачи подобраны так, чтобы они оставляли ясной математическую суть дела. Для некоторых вопросов найдены новые, более простые решения. Задачи для самостоятельного решения собраны из обеих книг, распределены по главам и почти все снабжены ответами или указаниями.

# ГЛАВА I

## ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

### 1. Суеверный председатель

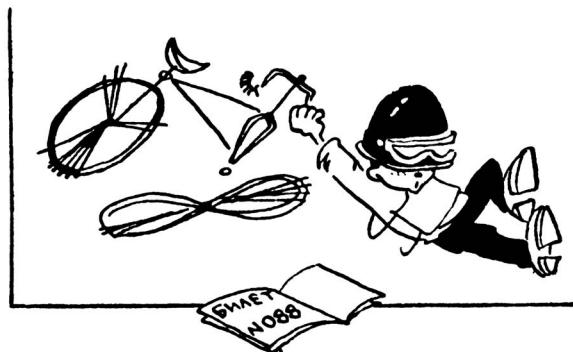
«Опять восьмерка!» — горестно воскликнул председатель клуба велосипедистов, взглянув на погнутое колесо своего велосипеда. «А все почему? Да потому, что у меня членский билет № 088 — по восьмерке на каждое колесо! И теперь не проходит и месяца, чтобы то на одном, то на другом колесе не появилась восьмерка. Надо менять номер билета! А чтобы меня не обвинили в суеверии, проведу-ка я перерегистрацию всех членов клуба и буду выдавать только билеты с номерами, в которые ни одна восьмерка не входит. Не знаю только, хватит ли на всех номеров — ведь у нас в клубе почти 600 членов, а номера должны быть трехзначными. Неужели придется выписывать все номера от 000 до 999, а затем вычеркивать из них все номера с восьмерками?»

Попробуем помочь председателю. Нам нужно решить такую комбинаторную задачу: сколько существует трехзначных номеров, не содержащих цифры 8?

Для решения этой задачи определим сначала, сколько однозначных номеров не содержит восьмерку. Ясно, что таких номеров девять: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер 8 пропускается, а билет с номером 0 мы допускаем). А теперь найдем все двузначные номера, не содержащие восьмерок. Их можно составить так: взять любой из найденных однозначных номеров и написать после него любую из девяти допустимых цифр. В результате из каждого однозначного номера получится девять двузначных. А так как однозначных номеров тоже 9, то получится  $9 \cdot 9 = 9^2$  двузначных номеров без восьмерок. Вот они:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09,  
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19,  
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29,  
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39,  
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49,  
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59,  
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69,  
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79,  
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99.

Итак, существует  $9^2 = 81$  двузначный номер без цифры 8. Но за каждым из них снова можно поставить любую из девяти допустимых цифр. В результате получим  $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$  трехзначных номеров, не содержащих цифру 8. Значит, таких членских билетов хватит на 729 членов клуба.



А если взять не трехзначные, а четырехзначные номера, то номеров, не содержащих восьмерок, будет  $9^4 = 6561$ , а пятизначных —  $9^5 = 59\ 049$ .

Заместитель председателя был еще суевернее. Так как число 0 похоже на вытянутое колесо, он предложил отказаться и от этой цифры и попробовать обойтись восемью цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. А это у него не получится, потому что эта задача похожа на решенную выше, только вместо девяти цифр у нас всего восемь. Поэтому и в ответе надо заменить 9 на 8, так что трехзначных номеров билетов, не использующих цифры 0 и 8, существует  $8^3 = 512$ , а членов клуба почти 600.

## 2. Лото

Зоя Петровна и ее дочь Нина часто играли в лото. Каждая брала по три карточки, Нина хорошо перемешивала бочонки в мешке, затем доставала из мешка очередной бочонок с числом (от 1 до 90), называла его, и тот, у кого на карточке обнаруживалось это число, закрывал его бочонком.

Играли они часто, помнили, как начинались многие игры (кто первым и какой брал себе бочонок), уже не раз первым попадался один и тот же бочонок, но первые два бочонка каждый раз извлекались другие. И однажды Нина задумалась — много ли способов извлечь один за другим два бочонка из мешка, если в нем 90 бочонков?

Первый можно извлечь 90 способами — это понятно, а дальше? Ведь если бочонок 28 уже извлечен, то второй раз его извлечь нельзя. Но Нина как раз в тот день готовила таблицу первенства школы по баскетболу, в которой клетки на диагонали перечеркивались (ведь играть сама с собой команда не может), и сообразила, что тот же метод годится и здесь. Она представила себе таблицу  $90 \times 90$ , в которой слева написаны возможные номера (от 1 до 90) бочонка, извлеченного первым, а сверху — возможные номера бочонка, извлеченного вторым.

Тогда каждая клетка задает один вариант выбора двух бочонков, вот только клетки на диагонали надо зачеркнуть (дважды один бочонок извлечь нельзя).

В этой таблице  $90 \cdot 90 = 8\ 100$  клеток, 90 зачеркнуты, значит, остается 8 010 вариантов. Это и есть число способов извлечь один за другим два бочонка из 90.

Табл. 1

| <b>1\2</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>...</b> | <b>89</b> | <b>90</b> |
|------------|----------|----------|----------|----------|------------|-----------|-----------|
| 1          | x        | 1; 2     | 1; 3     | 1; 4     | ...        | 1; 89     | 1; 90     |
| 2          | 2; 1     | x        | 2; 3     | 2; 4     | ...        | 2; 89     | 2; 90     |
| 3          | 3; 1     | 3; 2     | x        | 3; 4     | ...        | 3; 89     | 3; 90     |
| 4          | 4; 1     | 4; 2     | 4; 3     | x        | ...        | 4; 89     | 4; 90     |
| ...        | ...      | ...      | ...      | ...      | ...        | ...       | ...       |
| 89         | 89; 1    | 89; 2    | 89; 3    | 89; 4    | ...        | x         | 89; 90    |
| 90         | 90; 1    | 90; 2    | 90; 3    | 90; 4    | ...        | 90; 89    | x         |

А затем Нина сообразила, что можно рассуждать иначе. Первый бочонок можно извлечь 90 способами. После этого в мешке останется 89 бочонков, правда, каких — зависит от того, какой бочонок извлечен первым. Но способов извлечь второй бочонок всегда будет 89 для каждого из 90 способов извлечь первый бочонок, а всего способов будет  $90 \cdot 89 = 8\ 010$ .

### 3. Команда космического корабля

В случае, когда число возможных выборов на каждом шагу сложным образом зависит от того, какие элементы были выбраны ранее, удобно изображать процесс составления комбинаций в виде «дерева». Сначала из одной точки проводят столько отрезков, сколько различных выборов можно сделать на первом шагу (таким образом, каждый отрезок соответствует одному элементу). Из конца каждого отрезка проводят столько отрезков, сколько можно сделать выборов на втором шагу, если в первый раз был выбран данный элемент, и т. д.

В результате такого построения получается «дерево», рассмотрение которого дает число решений нашей задачи.

Рассмотрим следующий пример. Известно, что при составлении команд многоместных космических кораблей возникает вопрос о психологической совместности участников космического путешествия. Даже вполне подходящие порознь люди могут оказаться непригодными для длительного совместного путешествия. Предположим, что надо составить команду космического корабля из трех человек: командира, инженера и врача. На место командира есть четыре кандидата:  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ; на место инженера — 3 кандидата:  $b_1, b_2, b_3$  и на место

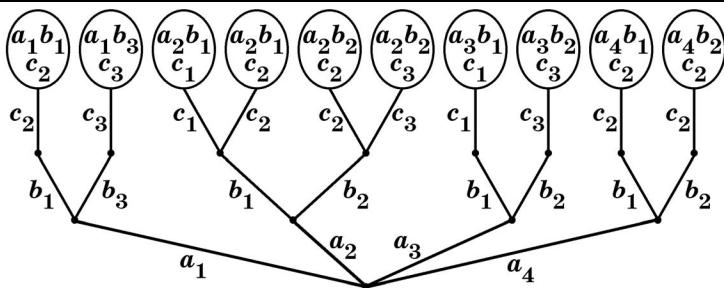


Рис. 1

врача — тоже 3 кандидата:  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ . Проведенная проверка показала, что командир  $a_1$  психологически совместим с инженерами  $b_1$  и  $b_3$  и врачами  $c_2$ ,  $c_3$ ; командир  $a_2$  — с инженерами  $b_1$  и  $b_2$  и всеми врачами; командир  $a_3$  — с инженерами  $b_1$  и  $b_2$  и врачами  $c_1$ ,  $c_3$ ; командир  $a_4$  — со всеми инженерами и врачом  $c_2$ . Кроме того, инженер  $b_1$  психологически несовместим с врачом  $c_3$ , инженер  $b_2$  — с врачом  $c_1$  и инженер  $b_3$  — с врачом  $c_2$ . Сколькими способами при этих условиях может быть составлена команда корабля?

Соответствующее дерево изображено на рис. 1. Оно показывает, что есть лишь 10 допустимых комбинаций. При этом после каждого выбора командира  $a_i$  у нас есть 2 варианта выбора инженера  $b_j$ , поэтому появляется 8 пар командир-инженер, а дальше для каждой пары в 6 случаях врач  $c_k$  определен единственным образом (в силу требования совместимости), а в 2 случаях есть выбор из двух врачей.

Если бы не было ограничения совместимости, то после каждого из 4 возможных способов выбора командира  $a_i$  у нас было бы 3 варианта выбора инженера  $b_j$ , а затем по 3 варианта выбора врача  $c_k$ , и комбинаций было бы  $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ .

#### 4. Правила суммы и произведения

Как мы увидим дальше, комбинаторные задачи бывают самых разных видов. Но большинство задач решается с помощью двух основных правил — правила суммы и правила произведения.

**Правило суммы.** Если на блюде лежат три яблока, то выбрать одно яблоко можно тремя способами (взять одно из трех яблок). Если на другом блюде лежат две груши, то выбрать одну грушу можно двумя способами (взять одну из двух груш). А выбрать один фрукт можно пятью способами

(выбирая из пяти фруктов — трех яблок и двух груш). Это и есть правило суммы, которое можно сформулировать так.

*Если некоторый объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами, а другой объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор «либо  $A$ , либо  $B$ » можно осуществить  $m + n$  способами.*

Правило суммы применяют, когда удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. Ясно, что в этом случае общее количество комбинаций равно сумме количеств комбинаций во всех классах.

Например, при выборе команды космического корабля мы могли разбить экипажи на 4 группы (по способу выбора командира). Тогда в первой группе (командир  $a_1$ ) будет 2 комбинации ( $a_1 b_1 c_2$  и  $a_1 b_3 c_3$ ), во второй — 4 комбинации, в третьей и четвертой — по 2 комбинации, а всего  $2 + 4 + 2 + 2 = 10$  комбинаций.

При использовании правила суммы надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта  $A$  не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта  $B$  (или, как мы говорили раньше, чтобы ни одна комбинация не попала сразу в два класса). Если такие совпадения есть, правило суммы утрачивает силу, и мы получаем лишь  $m + n - k$  способов выбора, где  $k$  — число совпадений.

**Правило произведения.** Это правило несколько сложнее, хотя мы уже его фактически применяли в задачах о числе номеров билетов клуба велосипедистов и в задаче про лото.

Часто при составлении комбинации из двух элементов известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент, и сколькими способами второй, причем число способов выбора второго элемента не зависит от того, как именно выбран первый элемент. Пусть первый элемент можно выбрать  $m$  способами, а второй  $n$  способами. Тогда пару этих элементов можно выбрать  $mn$  способами. Иными словами:

*Если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то выбор пары  $(A; B)$  в указанном порядке можно осуществить  $mn$  способами.*

Для доказательства заметим, что каждый из  $m$  способов выбора объекта  $A$  можно скомбинировать с  $n$  способами выбора объекта  $B$ . А это и приводит к  $mn$  способам выбора пары  $(A; B)$ . Наглядно этот выбор можно представить с помощью таблицы 2.

В ней через  $A_1, \dots, A_m$  обозначены  $m$  способов выбора объекта  $A$ , а через  $B_{i1}, \dots, B_{in}$  обозначены  $n$  способов выбора объекта  $B$ , если объект  $A$  выбран  $i$ -м способом. Ясно, что эта таблица содержит все способы выбора пары  $(A; B)$  и состоит

из  $m n$  элементов — каждому способу выбора пары  $(A; B)$  в таблице 2 соответствует одна клетка с парой  $(A_i; B_{ik})$ .

Табл. 2

|       | $B_1$           | $B_2$           | ... | $B_k$           | ... | $B_n$           |
|-------|-----------------|-----------------|-----|-----------------|-----|-----------------|
| $A_1$ | $(A_1; B_{11})$ | $(A_1; B_{12})$ | ... | $(A_1; B_{1k})$ | ... | $(A_1; B_{1n})$ |
| $A_2$ | $(A_2; B_{21})$ | $(A_2; B_{22})$ | ... | $(A_2; B_{2k})$ | ... | $(A_2; B_{2n})$ |
| ...   | ...             | ...             | ... | ...             | ... | ...             |
| $A_i$ | $(A_i; B_{i1})$ | $(A_i; B_{i2})$ | ... | $(A_i; B_{ik})$ | ... | $(A_i; B_{in})$ |
| ...   | ...             | ...             | ... | ...             | ... | ...             |
| $A_m$ | $(A_m; B_{m1})$ | $(A_m; B_{m2})$ | ... | $(A_m; B_{mk})$ | ... | $(A_m; B_{mn})$ |

Если способы выбора объекта  $B$  не зависят от того, как выбран объект  $A$ , то получается более простая таблица — все  $B_{ik}$  по столбцам одинаковы,  $B_{ik} = B_k$ .

Разумеется, может случиться, что нам надо составить не пары, а комбинации из большого числа элементов. Тогда мы приходим к следующей задаче.

*Необходимо последовательно выбрать  $k$  элементов. Первым можно выбрать элемент  $a_1$  одного из  $n_1$  различных видов, вторым — элемент  $a_2$  одного из  $n_2$  различных видов, ...,  $k$ -м — элемент  $a_k$  одного из  $n_k$  различных видов. При этом два способа выбора считаются различными, если хотя бы на одном месте в них стоят разные элементы. Сколькоими способами можно произвести такой выбор?*

Эта задача решается так же, как задача о клубе велосипедистов. Первый элемент можно выбрать  $n_1$  способами. Каждый из выбранных элементов  $a_1$  можно соединить с любым из  $n_2$  видов элементов  $a_2$ , что дает  $n_1 n_2$  пар. Каждую такую пару можно соединить с любым из  $n_3$  видов элементов  $a_3$ , что дает  $n_1 n_2 n_3$  троек. Продолжая далее, мы получим в конце концов  $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$  способов.

Так как для подсчета числа всевозможных способов приходится перемножать числа  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , то выведенный результат называют «правилом произведения». Он является одним из важнейших в комбинаторике. На нем основан вывод многих формул этой науки.

**Замечания.** 1. Строгое доказательство этого правила проводится методом математической индукции по числу  $k$  выбираемых элементов.

2. Иногда возможности выбора элемента  $a_2$  определяются лишь после выбора элемента  $a_1$ ; возможности выбора элемента  $a_3$  определяются после выбора элементов  $a_1$  и  $a_2$  и т. д. Но при этом, как бы мы ни выбрали элемент  $a_1$ , выбор элемента  $a_2$  возможен  $n_2$  способами; при любом выборе элементов  $a_1$  и  $a_2$  на третье место имеется  $n_3$  кандидатов и т. д. И в этом случае ответ получится тот же самый: общее число различных способов оказывается равным  $n_1 n_2 \dots n_k$ . Поэтому сформулируем правило произведения в более общем виде.

*Если элемент  $a_1$  можно выбрать  $n_1$  способами, после каждого выбора этого элемента следующий за ним элемент  $a_2$  можно выбрать  $n_2$  способами, ..., после выбора элементов  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  элемент  $a_k$  выбирается  $n_k$  способами, то все  $k$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  можно выбрать  $n_1 n_2 \dots n_k$  способами.*

В задаче о велосипедистах надо было выбрать три элемента (цифру сотен, цифру десятков и цифру единиц). На каждом шагу мы могли выбрать одну из девяти допустимых цифр. Поэтому и получилось  $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$  номеров.

В задаче о лото надо было выбрать два элемента (число на первом бочонке, а затем число на втором бочонке). На первом шагу мы могли выбрать один из 90 бочонков, а на втором — один из оставшихся 89. Поэтому и получилось  $90 \cdot 89 = 8010$  вариантов.

А вот еще два примера.

*Сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет)?*

При этом учитываются не только слова, имеющие смысл, но и такие бессмысленные, как «транук» и т. п. В этом случае на первое место у нас 33 кандидата. Но после того как первая буква выбрана, вторую можно выбрать лишь 32 способами — ведь повторять первую букву нельзя. На третье место тоже 32 кандидата — первую букву уже можно употребить, а вторую — нельзя. Так же убеждаемся, что на все места, кроме первого, имеется 32 кандидата. А так как число этих мест равно 5, то получаем ответ  $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 33 \cdot 32^5 = 1\,107\,296\,256$ .

*Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т. е. чтобы какое-то число очков встречалось на обеих kostях)?*

Сначала выберем одну кость. Это можно сделать 28 способами. При этом в 7 случаях выбранная кость окажется «дублем», т. е. костью вида 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5, 6|6, а в 21 случае — костью с различными числами очков (например, 0|5, 1|3 и т. д.). В первом случае вторую кость можно выбрать

6 способами (например, если на первом шагу выбрана кость 1|1, то на втором шагу можно взять одну из костей 0|1, 1|2, 1|3, 1|4, 1|5, 1|6). Во втором же случае вторую кость можно выбирать 12 способами (для кости 3|5 подойдут как кости 0|3, 1|3, 2|3, 3|3, 4|3, 6|3, так и 5|0, 5|1, 5|2, 5|4, 5|5, 5|6). По правилу произведения в первом случае получаем  $7 \cdot 6 = 42$  выбора, а во втором  $21 \cdot 12 = 252$  выбора. Значит, по правилу суммы получаем  $42 + 252 = 294$  способа выбора пары (столькими способами могут быть сделаны первые два хода в игре в домино).

В проведенном рассуждении учитывался и порядок, в котором выбирались кости. Поэтому каждая пара костей появлялась дважды (например, первый раз 0|1 и 1|6, а второй раз 1|6 и 0|1). Если не учитывать порядок выбора костей, то получим вдвое меньше способов выбора, т. е. 147 способов.

### Задачи

1. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

2. Из города *A* в город *B* ведут пять дорог, а из города *B* в город *C* — три. Сколько путей, проходящих через *B*, ведут из *A* в *C*?

3. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

4. В группе из 16 детей 7 родились в Москве, 4 — в Санкт-Петербурге, 3 — в Киеве и 2 — в Минске. Сколькими способами можно выбрать из них 4 детей так, чтобы в группе были уроженцы всех 4 городов?

5. Сколько слов, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, т. е. такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?

6. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»? А из слова «камзол»?

7. Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

8. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с нее? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что подъем и спуск происходят по разным дорогам.

9. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи (все разной упитанности). Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

10. На шахматную доску надо поставить короля и ферзя. Сколькими способами это можно сделать, если короля надо поставить на белое поле, а ферзя — на черное? А если на цвет полей нет ограничений? А если обе фигуры надо поставить на белые поля?

11. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белое и черное поля, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

12. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего нужно выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

13. Из 3 типов ручек, 7 типов карандашей и 7 типов ластиков надо выбрать ручку, карандаш и ластик. Сколькими способами это можно сделать?

14. В букинистическом магазине лежат 6 разных изданий романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 издания его же романа «Дворянское гнездо» и 4 издания романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 разных сборников, в каждом из которых есть романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 сборников с романами «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

А если в магазине есть еще 3 сборника, содержащие романы «Рудин» и «Отцы и дети», и 5 книг, содержащих все три романа?

15. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

16. Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Их одновременно запустили. Сколькими различными способами они могут упасть? Сколько среди них способов, при которых по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1?

17. У англичан принято давать ребенку несколько имен. Сколькими способами в Англии можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен? Хватит ли этих наборов на всех англичан (57 млн чел.) или непременно найдутся англичане с одинаковыми именами?

18. Сколько есть чисел от 0 до 999 999, в которых нет двух рядом стоящих одинаковых цифр?

19. Какое наибольшее число различных шаров можно построить в пространстве так, чтобы они касались трех данных плоскостей и данного шара?

20. Можно ли выписать девять чисел 1, 2, ..., 9 по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

21. В соревнованиях по хоккею участвовали пять команд: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. В конкурсе знатоков один участник предположил, что они займут места в порядке *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, а другой предсказал порядок *D*, *A*, *E*, *C*, *B*. После окончания соревнований оказалось, что первый не угадал не только место хотя бы одной из команд, но даже какую-либо пару следующих друг за другом команд. Второй же угадал места двух команд и две пары следующих друг за другом команд. В каком порядке расположились команды?

22. Квадрат разделен на 16 равных квадратов. Сколькими способами можно раскрасить их в белый, черный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

## 5. Размещения с повторениями

Задача о номерах билетов в клубе велосипедистов относится к следующему типу задач. Имеется бланк, в котором  $k$  мест: 1-е, 2-е, ...,  $k$ -е. Все места вакантны. Их надо заполнить элементами. На каждое место можно разместить элемент одного из  $n$  видов (элементов каждого вида достаточное количество, поэтому элементы могут повторяться). Два способа заполнения считаются различными, если хотя бы на одном месте в них стоят разные элементы. Сколько существует способов заполнить такой «бланк»?

Каждый способ заполнения дает нам так называемое *размещение с повторениями из  $n$  элементов по  $k$*  или, как мы иногда будем говорить,  $k$ -размещение с повторениями из  $n$  элементов ( $k$  — число элементов, возможно, повторяющихся, вошедших в размещение). Число всех таких размещений обозначают  $\bar{A}_n^k$ . Нам надо его найти.

$A$  — первая буква французского слова *arrangement* — размещения, а черта сверху ставится, чтобы отличить их от числа размещений без повторений, о которых мы расскажем позднее.

В первой задаче о номерах билетов в клубе велосипедистов число мест в бланке (билета) равнялось трем, а число видов элементов равнялось 9 (мы брали любые цифры, кроме 8). Как было показано, в этом случае число размещений равно  $\bar{A}_9^3 = 9^3$ . Естественно предположить, что если число видов элементов равно  $n$ , а число мест равно  $k$ , то можно составить  $n^k$  размещений с повторениями. Это верно, и сразу вытекает из правила произведения — производится последовательный выбор  $k$  элементов, каждый можно выбрать  $n$  способами (ведь элементы могут повторяться), поэтому число способов выбрать размещение равно произведению  $k$  сомножителей, каждый из которых равен  $n$ . Итак, верна формула

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1)$$

Формула (1) помогает разобраться в целом ряде вопросов. Мы расскажем сейчас о некоторых из них.

## 6. Секретный замок

Для запирания сейфов и автоматических камер хранения багажа применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово» или тайный набор цифр. Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых нанесены буквы или цифры.

Пусть число букв на каждом диске равно 12, а число дисков равно 5. Сколько неудачных попыток может быть

*сделано человеком, не знающим секретного слова и подбирающим его наудачу?*

Из условия задачи видно, что порядок выбираемых букв существен (одно дело набрать на первом диске букву «а», а на втором букву «б», а другое — набрать эти же буквы в обратном порядке). Поэтому мы имеем здесь размещение с повторениями. Так как по условию буква на каждом диске может быть выбрана 12 способами, а дисков 5, то по формуле (1) получаем, что число комбинаций равно  $12^5 = 248\ 832$ . Значит, неудачных попыток может быть 248 831. Считая по 6 секунд на одну попытку, получаем, что для открытия сейфа понадобится более 400 часов непрерывной работы. Впрочем, обычно сейфы делают так, чтобы после первой же неудачной попытки раздавался сигнал тревоги.

## 7. Системы счисления и передача информации

Наряду с десятичной системой счисления применяются и другие — двоичная, троичная, восьмеричная и т. д. В десятичной системе счисления число раскладывается по степеням числа 10, т. е.  $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$  (черта сверху обозначает, что это число, записанное цифрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а не произведение  $a \cdot b \cdot c$ ), при этом используются 10 цифр (от 0 до 9, а  $9 + 1$  — это уже 10). В  $n$ -ичной системе счисления число раскладывается по степеням числа  $n$ , т. е.  $\overline{abc} = a \cdot n^2 + b \cdot n^1 + c \cdot n^0$ , при этом используются  $n$  цифр. Например, программистам при написании программ для ЭВМ удобно пользоваться шестнадцатеричной системой счисления, в ней 16 «цифр»: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

Подсчитаем, сколько в  $n$ -ичной системе натуральных чисел, записываемых ровно  $k$  знаками<sup>1)</sup>.

Если допустить записи, начинающиеся с нуля, то каждое  $k$ -значное число в  $n$ -ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из  $k$  цифр, причем цифры бывают  $n$  видов. По формуле (1) получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно  $n^k$ . Но для натуральных чисел не применяют записей, начинающихся с нуля. Поэтому из полученного значения  $n^k$  надо вычесть количество чисел,  $n$ -ичная запись которых начинается с нуля. Если отбросить у этих чисел первую цифру — нуль, то получим  $(k - 1)$ -значное число (быть может, также начинающееся с нуля). Таких чисел по формуле (1) будет  $n^{k-1}$ . Значит,

---

<sup>1)</sup> Ради удобства мы относим здесь 0 к натуральным числам.

общее количество  $k$ -значных чисел в  $n$ -ичной системе счисления равно  $n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n - 1)$ .

Например, в десятичной системе счисления имеем  $10^3 \cdot 9 = 9000$  четырехзначных чисел — из 10 000 чисел от 0 до 9 999 надо отбросить тысячу чисел, а именно числа от 0 до 999, остаются числа от 1000 до 9999.

Полученную нами формулу можно вывести иным способом. Первой цифрой в  $k$ -значном числе, записанном по  $n$ -ичной системе счисления, может быть любая из цифр 1, 2, ...,  $n - 1$ . Второй же и дальнейшими — любые из цифр 0, 1, 2, ...,  $n - 1$ . Таким образом, на первое место у нас  $n - 1$  кандидатов, а на остальные  $k - 1$  мест — по  $n$  кандидатов. Отсюда по правилу произведения получаем, что искомых чисел может быть  $(n - 1)n^{k-1}$ .

В качестве примера рассмотрим такую задачу. Предположим, что тайный набор цифр к замку из предыдущего пункта хотят передать в виде сообщения из  $k$  знаков, каждое одного из двух видов: 0 или 1. *Каково наименьшее нужное для этого число знаков?*

Мы уже знаем, что из  $k$  таких знаков можно составить  $2^k$  различных комбинаций, каждая — некоторое двоичное  $k$ -значное число. Каждому возможному набору цифр замка должно соответствовать свое  $k$ -значное число, поэтому минимальное число знаков, с помощью которых можно передать требуемую информацию, должно быть таким, чтобы выполнялось неравенство  $2^k \geq 248\,832$ . Это будет при  $k \geq 18$ . Итак, для передачи такого «пароля» с помощью знаков двух видов надо использовать не менее 18 знаков.

Подобная оценка важна, когда передача информации сопряжена с большими техническими трудностями (например, при передаче фотографического снимка с космического корабля) и каждый знак идет «на вес золота». Тогда приходится рассматривать различные возможности такой передачи и выбирать наиболее экономные. Эти вопросы изучаются в разделе математики, называемом *теорией передачи информации*.

## 8. Вокруг ЭВМ

Электронная вычислительная машина (сейчас часто называемая компьютером) может решать самые различные задачи. На одной и той же ЭВМ можно разгадывать надписи на незнакомых языках, делать расчет плотины и обрабатывать данные о движении ракеты. Чем объясняется такая гибкость в использовании компьютера? Главным образом тем, что все эти задачи сводятся к вычислениям, к действиям над числами. Но почему же компьютер может решать столько задач, да еще при самых различных числовых данных? В скольких различных состояниях может находиться компьютер?

Для ответа на этот вопрос возьмем, например, один из первых компьютеров — ЭВМ «Стрела».

Оперативная память этой машины состояла из 2048 ячеек, в каждой из которых 43 двоичных разряда (бита). Каждый такой разряд может содержать или 0, или 1. Всего мы имеем  $43 \cdot 2048 > 87\,000$  различных мест, а число типов заполнений ячеек равно двум (0 или 1). По формуле (1) получаем, что ЭВМ «Стрела» могла находиться более чем в  $2^{87\,000}$  различных состояниях. Трудно представить себе, как велико это число. Достаточно сказать, что число нейtronов, которые можно плотно упаковать в шар с радиусом, равным расстоянию до самой удаленной из известных нам туманностей, меньше  $2^{500}$ .

Если взять одну-единственную ячейку памяти, то понадобилась бы десятилетняя работа миллионной армии машинисток, чтобы напечатать все числа, которые могут появиться в этой ячейке (считая, что машинистки работают семь часов в день и на запись одного 43-значного числа тратят 10 секунд).

В современных компьютерах информация хранится в виде байтов — слов, содержащих 8 битов, каждый бит — один из двух знаков (0 или 1). Для каждого шрифта имеется «кодовая таблица», содержащая 256 знаков — такая таблица показывает, как будет изображаться на дисплее каждый возможный байт. А почему в этой таблице 256 знаков? Ответ опять дает формула числа размещений с повторениями. Здесь два знака (0 и 1) надо разместить на 8 местах байта. Число возможных вариантов равно  $\bar{A}_2^8 = 2^8 = 256$ .

Теперь посмотрим на дисплей компьютера. Информация на него поступает через видеокарту, позволяющую отображать определенный объем информации, например, 4 мегабайта. Единицы «мегабайт» и «килобайт» возникли для удобства измерения больших объемов информации в компьютере, когда заметили, что  $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ . Килобайт — это 1024 байт, а мегабайт — это 1024 килобайт, т. е.  $1024^2 = 1\,048\,576$  байт<sup>1)</sup>.

Оценим, что может такая видеокарта. Если навести курсор мыши на значок дисплея на панели задач, то он покажет, например, следующее: 800×600 True Color (32 бита). Это означает, что на мониторе отображается сетка из 800 точек по горизонтали и 600 точек по вертикали, причем информация о цвете каждой точки содержит 32 бита (и цвет каждой точки произведен — не зависит от цвета других). Мы получаем, что

---

<sup>1)</sup> Как говорят, начинающий программист считает, что в килобайте 1000 байт, а законченный — что в килограмме 1024 грамма.

видеокарта должна вместить  $800 \times 600 \times 32$  бит, или  $480\,000 \times 4$  байт, т. е. 1 920 000 байт. Это данная видеокарта может.

Но многие мониторы позволяют отображать сетку из 1600 точек по горизонтали и 1200 точек по вертикали. Чтобы отобразить ее при тех же 32 битах на точку, видеокарта должна хранить  $1600 \times 1200 \times 32$  бит, т. е. 7 680 000 байт. Это больше 4 мегабайт, так что наша видеокарта этого не сможет (в режиме  $1600 \times 1200$  она переключится на меньшую глубину цвета). Такой монитор потребует видеокарты с памятью 8 мегабайт.

Сколько же различных изображений может отобразить наша видеокарта? Ответ ясен —  $2^{4 \cdot 1\,048\,576} > 10^{400\,000}$ .

## 9. Морской семафор

На флоте иногда применяют семафор флагами. Каждой букве при этом соответствует определенное положение двух флагов. Как правило, флаги находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Однако при передаче некоторых букв (б, д, к, х, ю, я) оба флагка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение? Ответ на этот вопрос дает та же формула размещений с повторениями. Дело в том, что различных положений каждого флагка пять — вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно (рис. 2). Так как у нас два флагка, то общее число комбинаций основных положений равно  $\bar{A}_5^2 = 5^2 = 25$ . При этом еще надо отбросить положение, когда оба флагка направлены вниз — оно служит для разделения слов. Всего получаем 24 комбинации, а этого недостаточно для передачи всех букв русского алфавита. Поэтому для некоторых букв и пришлось направить оба флагка в одну сторону.

## 10. Точки—тире телеграфные

При передаче сообщений по телеграфу используют какой-либо код, позволяющий представлять каждую букву, цифру и знак препинания последовательностью из сигналов двух типов (короткого или длинного — «точка» или «тире»). Первый такой код был предложен в 1838 году изобретателем электрического телеграфа американцем С. Морзе. В этом коде число символов для кодирования одной буквы меняется от 1 до 5. Для букв, которые встречаются часто, выбраны коды с малым числом символов, а для редко встречающихся букв — с большим числом символов. Например, в русском варианте буква «Е» передается одной точкой «.», а редко встречающаяся буква «Э» — набором из 5 символов «...—..». Это позволяет экономно передавать текст, используя символы «.» и «—».

Как же определить, какие буквы используются часто, а какие — редко? Морзе не утруждал себя глубокими исследо-

ваниями этого вопроса — он просто пошел в ближайшую типографию и подсчитал число литер каждой буквы в наборных кассах (в то время книги набирались вручную — из металлических литер, на каждой из которых было выпуклое изображение одной буквы, и наборщик должен был иметь достаточный запас всех букв, но одних букв уходило много, а других мало). Лишь в 40-х годах XX века американский ученый Клод Шеннон построил теорию информации и на ее основе рассчитал, какой же код окажется самым выгодным; для этого ему пришлось учитывать не только частоту, с которой встречаются отдельные буквы, но и частоты сочетаний букв по две, по три и т. д.

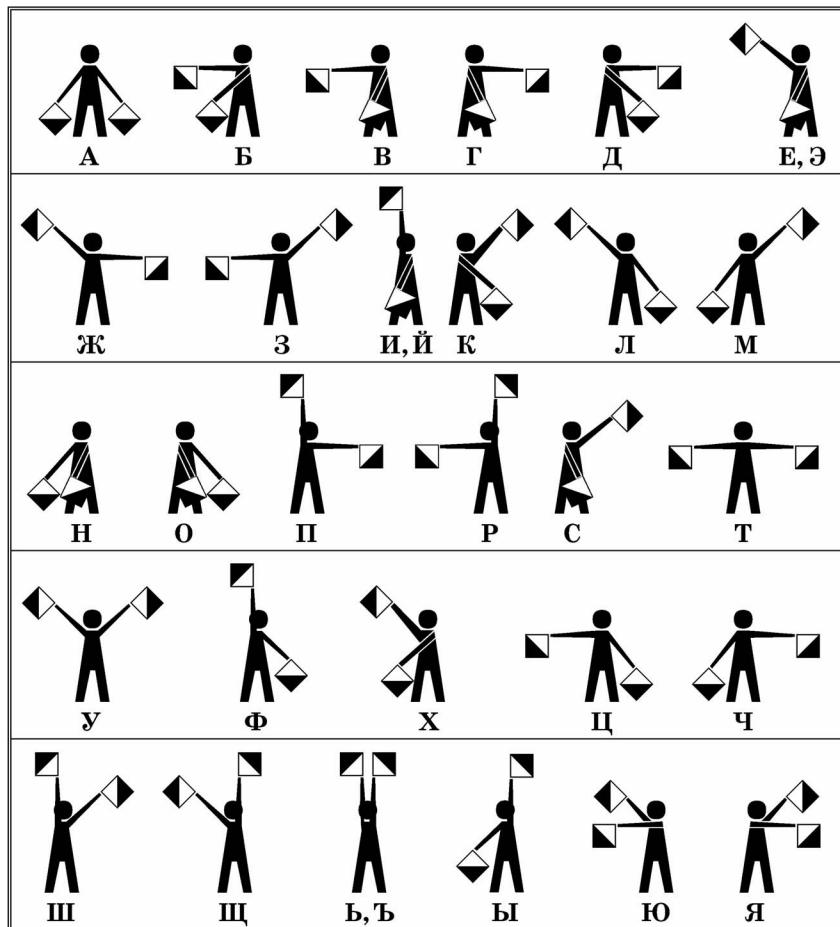


Рис. 2

А откуда в коде Морзе взялось число 5? Почему нельзя передавать сообщения, используя лишь комбинации точек и тире, содержащие не более 4 знаков? Ответ на этот вопрос дает формула для числа размещений с повторениями. Из формулы (1) следует, что  $\bar{A}_2^1 = 2$ . Иными словами, только две буквы можно передать с помощью одного знака (Е «.» и Т «—»). С помощью двух знаков можно передавать  $2^2 = 4$  буквы, трех знаков —  $2^3 = 8$  букв и четырех знаков —  $2^4 = 16$ . Поэтому общее число букв, которые можно передавать комбинациями из не более чем четырех знаков, равно  $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ . А в русском алфавите 33 буквы, да еще надо передавать цифры и знаки препинания. Ясно, что символов из четырех знаков не хватит. А если брать и символы из 5 знаков, то к полученным 30 прибавится еще 32 символа. Полученных 62 символов вполне достаточно для телеграфирования.

Есть для телеграфирования и пятизначный код, в котором каждая буква изображается в точности пятью символами. При пользовании этим кодом имеем ровно  $2^5 = 32$  комбинации. Их хватает для передачи букв (без буквы «ё», заменяемой на «е»). А для передачи цифр, знаков препинания и т. д. используют те же комбинации, что и для букв. Поэтому телеграфные аппараты пятизначного кода имели специальное устройство для перевода аппарата с букв на цифры и обратно.

### Задачи

**23.** Сколькими способами можно разложить в два кармана девять монет различного достоинства?

**24.** Надо срочно доставить 6 пакетов разным адресатам. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров? (Курьер сам решает, в каком порядке доставлять данные ему письма.)

**25.** Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что все студенты экзамен сдали (получив отметку 3, 4 или 5)?

**26.** Из Лондона в Брайтон ведут 2 шоссе, соединенные 10 проселочными дорогами (рис. 3). Сколькими способами можно проехать из Лондона в Брайтон так, чтобы дорога не пересекала себя?

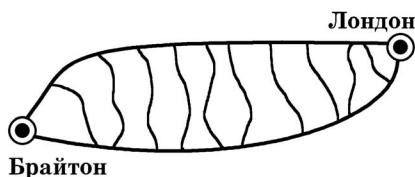


Рис. 3

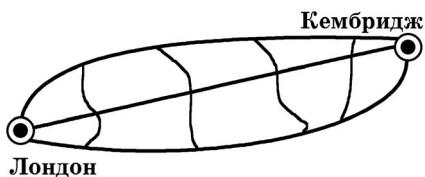


Рис. 4

27. Пусть при том же условии два путешественника выезжают из Лондона по разным шоссе. Сколькими способами может произойти путешествие так, что ни один участок шоссе они не проезжают в одном и том же направлении?

28. Из Лондона в Кембридж ведут 3 шоссе, пересекаемые 4 проселочными дорогами (рис. 4). Сколькими способами можно совершить путешествие, если ни по одному участку шоссе не едут в направлении Лондона и ни один участок не проезжают дважды?

29. Когда-то автомобильные номера состояли из одной, двух или трех букв и следующих за ними четырех цифр. Найдите число таких номеров, если использовались 32 буквы.

30. В 2004 году в России давали автомобильные номера типа 77x451xo, в которых употреблялись цифры и кириллические буквы, имеющие аналог в латинском алфавите (таких 12). Первые два элемента — цифры (код региона), затем идет буква, затем трехзначное число и под конец еще две буквы.

а) Сколько таких автомобильных номеров могли выдать в России?

б) На Москву были выделены коды региона 77, 97 и 99. Сколько номеров могли выдать в Москве?

31. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения этого государства (во рту человека может быть не более 32 зубов)?

32. Сколько чисел, меньших миллиона, можно написать с помощью цифр:

а) 8 и 9;

б) 7, 8, 9;

в) 0, 8, 9 (с цифры 0 число начинаться не может)?

33. Троє юношій і дві дівчата вибирають собі місце роботи. В місті є три заводи, де потрібуються робочі (туди беруть лише чоловіків), два магазини, куди беруть лише жінки, і дві фірми, куди потрібуються і чоловіки, і жінки. Сколькими способами вони можуть розподілитися між цими підприємствами?

34. Имеется три курицы, четыре утки и два гуся. Сколькими способами можно выбрать из них несколько птиц так, чтобы среди выбранных оказались и куры, и утки, и гуси?

35. На перекрестке имеется  $m$  светофоров. Сколько может быть различных состояний этих светофоров, если каждый светофор (независимо от остальных) имеет три возможных состояния: 1) горит зеленый; 2) горит желтый; 3) горит красный?

Решите ту же задачу, если допускаются всевозможные комбинации огней каждого светофора (например, горит одновременно зеленый и красный или ничего не горит).

36. Сколько можно составить из 32 букв шестибуквенных слов, содержащих хотя бы один раз букву «а»?

37. В селении проживает 1000 жителей. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

38. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в первых 3 цифрах которых не встречаются цифры 0 и 9?

## 11. Задачи о шашках

Решим следующую задачу.

Сколькими способами можно поставить на доску две шашки — белую и черную так, чтобы белая шашка могла бить черную?

По шашечным правилам шашки ставятся на черные поля и одна шашка бьет другую, перепрыгивая через нее и вставая на следующее поле (рис. 5). Если же шашка достигла последней, восьмой горизонтали, то она превращается в дамку и может бить все шашки, стоящие на одной диагонали с ней, кроме шашек, стоящих в конце диагоналей.

Сложность этой задачи состоит в том, что для разных положений белой шашки есть разное число расположений черной шашки, при которых эту шашку можно бить. Например, если белая шашка стоит на поле а1, то существует лишь одно расположение черной шашки, при котором она находится под боем. А если белая шашка стоит на поле с3, то число искомых расположений черной шашки равно 4. Наконец, если белая шашка прошла в дамки на поле h8, то имеется 6 расположений черной шашки, на которых ее может бить эта дамка.

Поэтому здесь проще всего указать для каждого расположения белой шашки число возможных расположений черной шашки и сложить полученные результаты. На рис. 6 изображена доска с указанием соответствующих чисел. Складывая их, получаем 87. Значит, искомая расстановка возможна 87 способами.

Ясно, что ровно столько же расположений, при которых черная шашка может бить белую.

А расположений, при которых обе шашки могут бить друг друга, меньше. Например, если белая шашка стоит на краю доски, то ее нельзя бить, где бы ни стояла черная шашка. Поэтому всем полям на краю доски соответствует число 0. Точно так же находим числа, соответствующие другим черным полям. Они изображены на рис. 7. Складывая эти числа, получаем, что искомая расстановка возможна 50 способами.

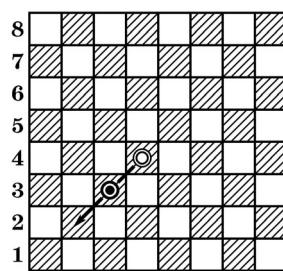


Рис. 5

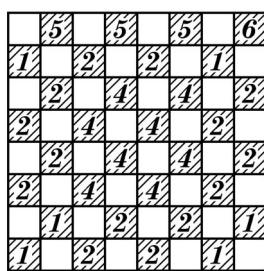


Рис. 6

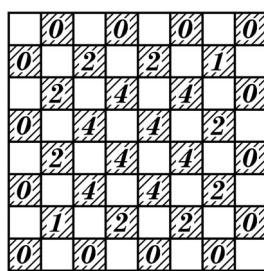


Рис. 7

Наконец, найдем число положений белой и черной шашек, при котором ни одна из них не может бить друг друга. Эту задачу можно было бы решить так же, как и предыдущие, ставя белую шашку на каждое из черных полей и подсчитывая, сколькими способами можно поставить черную шашку так, чтобы ни одна из этих шашек не могла бить другую. Но здесь проще применить «принцип чайника» и свести эту задачу к уже решенной.

Рассказывают, что однажды математик спросил у физика: «Перед Вами пустой чайник и незажженная газовая плита; как вскипятить воду?» «Наполнить чайник водой, зажечь газ и поставить чайник на плиту», — отвечал физик. «Правильно», — сказал математик. «А теперь решите вторую задачу: перед зажженной плитой стоит наполненный чайник. Как вскипятить воду?» «Это еще проще — надо поставить чайник на плиту». «Ничего подобного!» — воскликнул математик. «Надо погасить плиту, вылить воду из чайника, и мы придем к первой задаче, которую уже умеем решать!». Поэтому, когда новую задачу сводят к уже решенным, в шутку говорят, что применяют «принцип чайника».



Сначала найдем общее число расположений на доске одной белой и одной черной шашки. Белую шашку можно поставить на любое из 32 черных полей. После этого для черной шашки останется 31 поле. Поэтому в силу правила произведения расстановка возможна  $32 \cdot 31 = 992$  способами. Но среди этих способов есть 87, при которых белая шашка может бить черную, и 87 способов, при которых черная шашка может бить белую. Поэтому надо отбросить  $2 \cdot 87 = 174$  способа. Однако следует учсть, что при этом некоторые способы оказываются отброшенными дважды — из-за того, что в них и белая шашка может бить черную, и черная может бить белую. Мы видели, что существует 50 положений, в которых обе шашки могут бить друг друга. Поэтому число положений, в которых ни одна шашка не может бить другую, равно  $992 - 174 + 50 = 868$ .

## 12. Сколько человек не знают иностранных языков?

Метод, которым мы решили последнюю из задач о шашках, часто применяется для решения комбинаторных задач. Рассмотрим следующий пример:

*В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык и 23 — оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языка?*

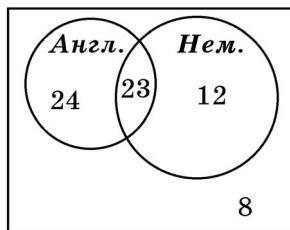


Рис. 8

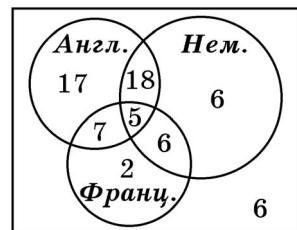


Рис. 9

Для решения этой задачи надо разбить весь коллектив сотрудников института на части, не имеющие общих элементов. Первую из них составят те, кто знает только английский язык, вторую — те, кто знает только немецкий язык, третью — те, кто знает оба языка, и четвертую — те, кто не знает ни одного из этих языков (рис. 8). Нам дано, что оба языка знают 23 человека. Но так как английский язык знают 47 человек, то только английским языком владеют  $47 - 23 = 24$  человека. Точно так же только немецким языком владеют  $35 - 23 = 12$  человек. Отсюда следует, что общее число людей, владеющих хоть одним из этих языков, равно  $23 + 24 + 12 = 59$  человек. А так как всего в институте работают 67 человек, то на долю последней части приходится  $67 - 59 = 8$  человек. Итак, 8 человек не знают ни английского, ни немецкого языка.

Полученный ответ можно записать в виде

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12).$$

Но 24 мы получили, вычитая 23 из 47, а 12 — вычитая 23 из 35. Поэтому

$$8 = 67 - 23 - (47 - 23) - (35 - 23) = 67 - 47 - 35 + 23.$$

Теперь видна закономерность — из общего числа сотрудников вычитается число знающих английских языка и число знающих немецкий язык. При этом некоторые сотрудники попадают в оба списка и оказываются «вычтеными» дважды. Это как раз те полиглоты, которые знают оба языка. Прибавляя их число, мы получаем число лиц, не знающих ни одного из этих языков.

Усложним разобранную задачу, добавив еще один язык. Пусть среди тех же сотрудников французский язык знают 20 человек, английский и французский — 12 человек, немецкий и французский — 11 человек, а все три языка — 5 человек (рис. 9). Ясно, что тогда только английский и французский (без немецкого) знают  $12 - 5 = 7$  человек, а только немецкий и французский знают  $11 - 5 = 6$  человек. Значит, только один французский язык знают  $20 - 7 - 6 - 5 = 2$  человека. Эти люди

входят в состав тех 8 человек, которым неведомы английский и немецкий языки. Значит, число людей, не знающих ни одного из трех языков, равно  $8 - 2 = 6$ .

Полученный ответ можно записать так:

$$\begin{aligned} 6 &= 8 - 2 = 67 - 47 - 35 + 23 - (20 - 7 - 6 - 5) = \\ &= 67 - 47 - 35 + 23 - 20 + (12 - 5) + (11 - 5) + 5 = \\ &= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5. \end{aligned}$$

А теперь закон совершенно ясен. Сначала из общего числа сотрудников вычитается число тех, кто знает один из языков (и, может быть, другие). При этом некоторые оказываются «вычтеными» дважды, поскольку знают два языка. Поэтому прибавляем числа 23, 12, 11, показывающие, сколько человек владеют двумя языками (и, может быть, еще третьим). Но лица, владеющие тремя языками, оказываются сначала трижды «вычтеными», а потом трижды «прибавленными». Так как их надо все-таки вычесть, то приходится еще отнять число 5.

### 13. Формула включений и исключений

Разобранные примеры позволяют сформулировать общий закон. Пусть имеется  $N$  предметов, каждый из которых может обладать свойствами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . При этом каждый предмет может обладать одним или несколькими свойствами, а может не обладать ни одним из этих свойств.

Обозначим через  $N(a_i a_j \dots a_k)$  количество предметов, обладающих свойствами  $a_i, a_j, \dots, a_k$  (и, быть может, еще некоторыми из других свойств). Если нам надо будет отметить, что берутся лишь предметы, не обладающие некоторым свойством, то это свойство пишем с чертой сверху. Например, через  $N(a_1 a_2 \bar{a}_4)$  обозначено количество предметов, обладающих свойствами  $a_1$  и  $a_2$ , но не обладающих свойством  $a_4$  (вопрос об остальных свойствах остается открытым).

Число предметов, не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается по этому правилу через  $N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n)$ . Общий закон состоит в том, что

$$\begin{aligned} N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) &= N - N(a_1) - N(a_2) - \dots - N(a_n) + \\ &+ N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + \dots + N(a_1 a_n) + N(a_2 a_3) + \dots + N(a_{n-1} a_n) - \\ &- N(a_1 a_2 a_3) - N(a_1 a_2 a_4) - \dots - N(a_{n-2} a_{n-1} a_n) + \dots + \\ &+ (-1)^n N(a_1 a_2 \dots a_n). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь алгебраическая сумма распространена на все комбинации свойств  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (без учета их порядка), причем если число учитываемых свойств четно, то ставится знак «+», а если это число нечетно, то ставится знак «-». Например,  $N(a_1a_3a_6a_8)$  входит со знаком «+», а  $N(a_3a_4a_{10})$  — со знаком «-». Формулу (2) называют *формулой включений и исключений* — сначала исключаются все предметы, обладающие хотя бы одним из свойств  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , потом включаются предметы, обладающие по крайней мере двумя из этих свойств, исключаются имеющие по крайней мере три и т. д.

Докажем формулу (2). Доказательство ведется с помощью индукции по числу свойств. При одном свойстве формула очевидна. Каждый предмет либо обладает этим свойством, либо не обладает им, поэтому  $N(\bar{a}) = N - N(a)$ .

Предположим теперь, что формула (2) доказана для случая, когда число свойств равно  $n - 1$ :

$$\begin{aligned} N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}) &= N - N(a_1) - \dots - N(a_{n-1}) + N(a_1a_2) + \dots + N(a_{n-2}a_{n-1}) - \\ &- N(a_1a_2a_3) - \dots - N(a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-1}N(a_1a_2 \dots a_{n-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим совокупность предметов, среди которых все обладают свойством  $a_n$ . Их будет  $N(a_n)$ . Остальных свойств будет  $n - 1$ , для них по предположению справедлива формула (3), принимающая в этом случае вид

$$\begin{aligned} N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}a_n) &= N(a_n) - N(a_1a_n) - \dots - N(a_{n-1}a_n) + \\ &+ N(a_1a_2a_3) + \dots + N(a_{n-2}a_{n-1}a_n) - N(a_1a_2a_3a_4) - \dots - N(a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n) + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1}N(a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n) \end{aligned} \quad (4)$$

(добавляется указание, что в каждом случае берутся лишь предметы, обладающие свойством  $a_n$ ). Вычтем из равенства (3) равенство (4). В правой части получим то, что нам нужно — правую часть формулы (2). А в левой части получим разность

$$N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}) - N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}a_n). \quad (5)$$

Но  $N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1})$  — это число предметов, не обладающих свойствами  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  и, быть может, обладающих свойством  $a_n$ . А  $N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}a_n)$  — это число предметов, которые тоже не обладают свойствами  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , но наверняка обладают свойством  $a_n$ . Значит, разность (5) как раз равна числу предметов, не обладающих ни одним из свойств  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ . Иными словами,

$$N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}) - N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}a_n) = N(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_{n-1}\bar{a}_n).$$

Таким образом, после вычитания и в левой части получается левая часть формулы (2). Тем самым эта формула доказана для случая, когда число свойств равно  $n$ .

Итак, соотношение (2) справедливо для  $n$  свойств, коль скоро оно справедливо для  $n - 1$ , а при  $n = 1$  оно уже доказано; поэтому доказана справедливость этого соотношения для любого набора свойств.

Формулу (2) можно представить в символической форме следующим образом:

$$N(\bar{a} \bar{b} \dots \bar{m}) = N(1 - a)(1 - b) \dots (1 - m). \quad (6)$$

Здесь после раскрытия скобок надо произведения  $Nab \dots k$  писать в виде  $N(ab \dots k)$ . Например, вместо  $Nabcst$  пишем  $N(abcm)$ .

## 14. Анализ отчета

Староста одного класса дал следующие сведения об учениках.

«В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. Учатся на хорошо и отлично 30 школьников, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, среди которых 18 мальчиков и 17 школьников, учащихся на хорошо и отлично. Учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом 15 мальчиков».

Через несколько дней его вызвал к себе классный руководитель (который, как назло, вел математику) и сказал, что в сведениях есть ошибка. Попробуем выяснить, как он это узнал. Обозначим через  $m$  принадлежность к мужскому полу, через  $y$  — хорошую успеваемость и через  $c$  — увлечение спортом. Подсчитаем, сколько девочек не занимаются спортом и получают время от времени тройки (а быть может, и двойки), т. е. найдем, чему равно  $N(\bar{m} \bar{y} \bar{c})$ .

По условию задачи имеем  $N(m) = 25$ ,  $N(y) = 30$ ,  $N(c) = 28$ ,  $N(my) = 16$ ,  $N(mc) = 18$ ,  $N(yc) = 17$ ,  $N(myc) = 15$ .

Значит, по формуле включений и исключений получаем, что  $N(\bar{m} \bar{y} \bar{c}) = 45 - 25 - 30 + 16 + 18 + 17 - 15 = -2$ . Но отрицательным ответ быть не может! Поэтому в данных сведениях есть внутреннее противоречие, они неверны!

По данным отчета можно построить полную диаграмму для всех комбинаций выполнения и невыполнения свойств  $m$ ,  $y$ ,  $c$  (рис. 10). По ней видно, что в классе должно быть не меньше 47 школьников.

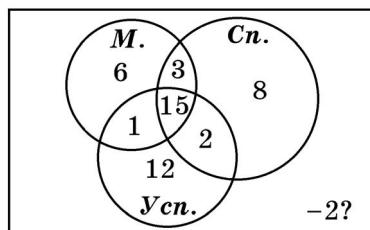


Рис. 10

## 15. Решето Эратосфена

Одной из самых больших загадок математики является расположение простых чисел в ряду всех натуральных чисел. Иногда два простых числа отличаются только на 2 (например, 17 и 19, 29 и 31), а иногда подряд идет миллион составных чисел. Сейчас специалисты по теории чисел знают уже довольно много о том, сколько простых чисел содержится среди первых  $N$  натуральных чисел. Но уже более 100 лет тому назад великому русскому математику П. Л. Чебышеву удалось узнать многое о распределении простых чисел, используя совершенно элементарные методы. В его исследованиях оказался весьма полезным метод отыскания простых чисел, восходящий к древнегреческому ученому Эратосфену (он жил в III веке до новой эры в египетском городе Александрии).

Эратосфен занимался самыми различными вопросами — ему принадлежат интересные исследования в области математики, астрономии и других науках (например, он измерил длину одного градуса широты). Впрочем, такая разносторонность привела его к некоторой поверхностности, она не позволяла получать очень глубоких результатов, и современники называли Эратосфена несколько иронически «бета», т. е. «во всем второй» (второй математик после Евклида, второй астроном после Гиппарха и т. д.) или «многоборец».

В математике Эратосфена интересовал как раз вопрос о том, как найти все простые числа среди натуральных чисел от 1 до  $N$  (Эратосфен считал 1 простым числом, сейчас математики считают 1 числом особого вида, не относящимся ни к простым, ни к составным числам). Он придумал для этого следующий способ. Сначала вычеркивают все числа, делящиеся на 2, исключая само число 2, т. е. все идущие после 2 числа через одно. Потом берут первое из оставшихся чисел (а именно 3). Ясно, что это число простое. Вычеркивают все идущие после 3 числа через два на третье (т. е. все числа, делящиеся на 3, кроме 3). Первым оставшимся числом будет 5 (рис. 11). Начиная с этого числа, вычеркивают каждое пятое число (т. е. все числа, делящиеся на 5, кроме 5) и т. д. Числа, которые уцелеют после всех вычеркиваний, и являются простыми.

|     |     |     |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 2   | 3   | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  |
| 16  | 17  | 18  | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  |
| 31  | 32  | 33  | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  | 41  | 42  | 43  | 44  | 45  |
| 46  | 47  | 48  | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55  | 56  | 57  | 58  | 59  | 60  |
| 61  | 62  | 63  | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  | 71  | 72  | 73  | 74  | 75  |
| 76  | 77  | 78  | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85  | 86  | 87  | 88  | 89  | 90  |
| 91  | 92  | 93  | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 |
| 106 | 107 | 108 |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |     |

Рис. 11

Так как во времена Эратосфена писали на восковых табличках и не вычеркивали, а выкалывали цифры, то табличка после описанного процесса напоминала решето. Поэтому метод Эратосфена для нахождения простых чисел получил название «решето Эратосфена».

Вот это решето и применил П. Л. Чебышев для изучения вопроса о распределении простых чисел. Ведь, применяя формулу включений и исключений, легко подсчитать, сколько чисел, меньших  $N$ , останется после  $k$  вычеркиваний.

Подсчитаем, например, сколько чисел уцелеет в первой сотне после трех циклов вычеркиваний, т. е. если мы вычеркнем по методу Эратосфена числа, делящиеся на 2, 3 и 5 (но не сами эти числа). Для этого достаточно найти, сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5. Эта задача решается по формуле включений и исключений.

Обозначим через  $a_2$  свойство числа делиться на 2, через  $a_3$  — делимость на 3 и через  $a_5$  — делимость на 5. Тогда  $a_2a_3$  означает, что число делится на 6,  $a_2a_5$  означает, что оно делится на 10, и  $a_3a_5$  — что оно делится на 15. Наконец,  $a_2a_3a_5$  означает, что число делится на 30. Нам надо найти, сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, т. е. не обладает ни одним из свойств  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_5$ .

По формуле (2) имеем

$$\begin{aligned} N(\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_5) = 100 - N(a_2) - N(a_3) - N(a_5) + \\ + N(a_2a_3) + N(a_2a_5) + N(a_3a_5) - N(a_2a_3a_5). \end{aligned}$$

Но чтобы найти, сколько чисел от 1 до  $N$  делится на  $n$ , надо разделить  $N$  на  $n$  и взять целую часть получившегося частного. Поэтому

$$N(a_2) = 50, \quad N(a_3) = 33, \quad N(a_5) = 20,$$

$$N(a_2a_3) = 16, \quad N(a_2a_5) = 10, \quad N(a_3a_5) = 6, \quad N(a_2a_3a_5) = 3,$$

и значит,  $N(\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_5) = 26$ .

Таким образом, 26 чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Эти числа и уцелеют после первых трех шагов процесса Эратосфена. Кроме них, останутся сами числа 2, 3 и 5. Всего останется 29 чисел.

А из первой тысячи после первых трех шагов процесса Эратосфена останется 269 чисел. Это следует из того, что в этом случае

$$\begin{aligned} N(a_2) = 500, \quad N(a_3) = 333, \quad N(a_5) = 200, \quad N(a_2a_3) = 166, \\ N(a_2a_5) = 100, \quad N(a_3a_5) = 66, \quad N(a_2a_3a_5) = 33. \end{aligned}$$

**Задачи**

**39.** Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

**40.** В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык: 6 человек знают английский, 7 — французский, 6 — немецкий, 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский? Сколько человек знает ровно 1 язык?

**41.** На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром — 38 человек, с ветчиной — 42 человека, с сыром и колбасой — 28 человек, с колбасой и ветчиной — 31 человек, с сыром и ветчиной — 26 человек. Все три вида бутербродов взяли с собой 25 человек, а остальные вместо бутербродов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

**42.** Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7? А сколько чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

## 16. Проблемы комбинаторики

Мы рассказали о некоторых методах и решаемых ими комбинаторных задачах. Однако о том, что же такое комбинаторика, какие математические задачи к ней относятся, а какие — нет, практически ничего не сказали. Стого определить, какие математические вопросы относятся к комбинаторике, а какие — к другим областям математики, очень трудно. Это объясняется большим разнообразием комбинаторных проблем, затрудняющим формулировку единого определения, которое охватывало бы все частные случаи, а также тем, что многие комбинаторные задачи имеют пограничный характер, относясь и к комбинаторике, и к смежным областям знания.

В первом приближении можно сказать, что комбинаторика (а иногда говорят «комбинаторный анализ» или даже «комбинаторная математика») изучает способы выборки и расположения предметов, свойства различных конфигураций, которые можно образовать из элементов, причем элементами могут быть числа, точки, отрезки, шахматные фигуры и т. д. Характерной чертой комбинаторных задач является то, что в них речь идет всегда о конечном множестве элементов.

Одной из общих задач комбинаторики является следующая:

**1. Найти конфигурацию элементов, обладающую заранее заданными свойствами.**

В некоторых случаях такую конфигурацию удается найти сразу. Например, если требуется расположить 10 точек и 5 отрезков так, чтобы на каждом отрезке было по 4 точки, то

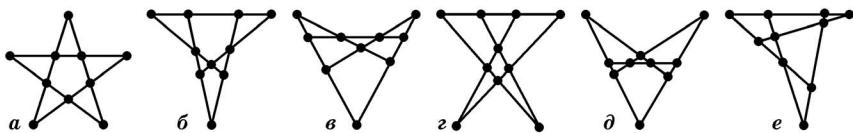


Рис. 12

после недолгих размышлений мы вспоминаем фигуру пятиконечной звезды и располагаем элементы так, как показано на рис. 12а. Иногда для отыскания той или иной конфигурации оказываются полезными соображения симметрии.

Если не удается найти решение из простых соображений, в ход пускается «тяжелая артиллерия»: теория чисел, теория групп и т. д. Бывает, однако, что и она не помогает — искомая конфигурация никак не складывается. Конечно, если задача возникла из практики, то в большинстве случаев можно быть уверенным в существовании решения. Гораздо хуже в этом отношении положение шахматиста, рассчитывающего спасительную комбинацию, или специалиста по шифрам, придумывающего новый код с заранее заданными свойствами. Они не знают заранее, существует ли то, что они ищут, не являются ли их труды поисками черной кошки в темной комнате, где кошки и в помине не было. Таким образом, возникает вторая проблема комбинаторики.

### *2. Доказать существование или отсутствие конфигурации с заданными свойствами.*

Во многих случаях, однако, бывает недостаточно найти одну конфигурацию с заданными свойствами, а требуется описать все такие конфигурации и найти их число. Например, можно потребовать найти не одно, а все возможные расположения 10 точек на 5 отрезках, при которых на каждом отрезке лежат по 4 точки. Можно доказать, что кроме изображенной на рис. 12а пятиконечной звезды есть еще пять расположений с таким свойством. Они изображены на рис. 12б—е. Любое другое расположение с требуемыми свойствами отличается от одного из указанных шести лишь размерами отрезков, но не их взаимным расположением.

Итак, мы пришли к двум проблемам комбинаторики, которые в XVIII и XIX веках исчерпывали все содержание этой науки.

### *3. Найти общее число конфигураций с заданными свойствами.*

### *4. Описать все способы решения данной комбинаторной задачи, дать алгоритм их перечисления.*

Бурное развитие экономических приложений математики привело к возникновению и изучению обширного (и, быть может, сейчас самого важного) класса комбинаторных задач — задач на оптимизацию.

**5. Из всех решений данной комбинаторной задачи выбрать оптимальное по тем или иным параметрам.**

Например, существует очень много способов организовать закупку угля и доставку его от шахт к потребителю. Экономист будет стремиться минимизировать расходы.

Одной из классических оптимизационных задач является «задача о коммивояжере», в которой требуется наметить путь бродячего торговца, обезжающего заданные  $n$  городов, причем он должен по одному разу побывать в каждом городе и проделать весь путь за наименьшее время. Несмотря на усилия многих специалистов, до сих пор нет достаточно общего и удовлетворительного решения этой задачи.

## 17. Множества и кортежи

Чтобы устраниТЬ влияние конкретного вида выбираемых и расположаемых предметов, надо пользоваться общим языком теории множеств. С точки зрения теории множеств комбинаторика изучает подмножества конечных множеств, их объединения и пересечения, различные способы упорядочивания этих подмножеств и т. д. Но в настоящее время теория множеств в школьном курсе есть лишь в школах и классах с углубленным изучением математики. Впрочем, нам потребуется немногое и не всегда. Мы постараемся в основном тексте не использовать термины теории множеств (за исключением слов множество, подмножество и объединение множеств), а мелким шрифтом иногда будем указывать формулировки рассматриваемых утверждений на языке теории множеств. Смысль же некоторых терминов сейчас поясним.

**Множество.** Понятие множества в математике является первичным, не определяемым. Оно отражает объединение некоторых объектов (предметов, понятий) в единую совокупность. Так, можно говорить о множестве из трех чисел {2, 3, 5}. Здесь множество задано перечислением всех его элементов (которых может вообще не быть, тогда множество называется *пустым*).

Объединять объекты в совокупность можно по некоторому свойству, которым эти объекты обладают. Оно называется *характеристическим свойством множества*. Так, можно говорить о множестве страниц этой книги, множестве учащихся класса, множестве натуральных чисел, делящихся на 5: {5, 10, 15, ...} (последнее множество бесконечно, перечислить все его элементы нельзя) и т. д.

Если некоторое множество  $A$  не является пустым, то можно взять часть его элементов (любую часть, от 0 до всех элементов) и образовать из них новое множество  $B$ , тогда множество  $B$  называется *подмножеством* множества  $A$  (обозначение:  $B \subset A$ ). Так, множество учениц класса является подмножеством множества всех учащихся класса (а в женской школе совпадает с ним).

*Пересечением* множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \cap B$ , содержащее те и только те элементы, которые входят одновременно и в множество  $A$ , и в множество  $B$ .

*Объединением* множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \cup B$ , состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств  $A$  или  $B$ .

Так,  $\{2, 3\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $\{2, 3\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2\}$ .

Мы будем рассматривать лишь конечные множества. Число элементов в множестве  $A$  будем обозначать  $n(A)$ , оно называется *мощностью* этого множества, а множество из  $n$  элементов мы будем иногда называть *n-множеством*.

**Кортежи.** Мы рассматривали номера, составленные из трех цифр. К ним нельзя подходить как к множествам из трех элементов. Во-первых, в номерах цифры могут повторяться (например, 775), а в множествах элементы не повторяются. Во-вторых, в номерах важен порядок цифр (175 и 571 — совсем разные номера), а в множествах порядок перечисления элементов роли не играет. Но результаты, которые мы получали (число номеров билетов с заданными свойствами), носят общий характер. Они верны не только для номеров, составленных из цифр, но и для слов, составленных из букв (в них тоже буквы могут повторяться, а от перестановки разных букв слово меняется), и вообще для всех конечных последовательностей (допускающих повторение) элементов какого-либо множества. Поэтому полезно такие объекты как-то назвать, ввести для них новое математическое понятие.

Это новое понятие математики назвали *кортежем* (наряду со словом «кортеж» применяют названия «размещение», «конечная последовательность», «вектор», «слово» и т. д.). Кортеж — французское слово, означающее торжественное шествие. Участники этого шествия следуют один за другим, поэтому определено, кто идет первым, кто вторым, ..., кто последним. И у нас иногда говорят «кортеж автомашин», «свадебный кортеж» и т. д. При этом кортеж автомашин может состоять из нескольких «Волг», нескольких «Мерседесов» и нескольких «Жигулей». Если считать машины одной и той же марки неразличимыми, то получим, что в кортеже автомашин один и тот же элемент может повторяться несколько раз.

Два кортежа называют *равными* в том и только том случае, когда они имеют одинаковую длину, и на соответствующих местах стоят одни и те же элементы.

Можно обобщить понятие кортежа на случай, когда элементы кортежа берутся из разных множеств. А именно, пусть имеется несколько множеств  $X_1, \dots, X_k$ , элементы каждого из них сложены в отдельный мешок, а мешки перенумерованы. Вытащим из первого мешка (с элементами множества  $X_1$ ) какой-нибудь элемент множества  $X_1$  и поставим его на первое место в кортеже, это будет  $a_1$ ; затем вытащим элемент из мешка  $X_2$  и поставим его в кортеже на второе место (вслед за элементом  $a_1$ ), это будет  $a_2$ ; ...; на последнее,  $k$ -место в кортеже встанет из мешка  $X_k$  элемент  $a_k$ . Получится *кортеж*  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$

длины  $k$ , составленный из элементов множеств  $X_1, \dots, X_k$ . Элементы  $a_1, \dots, a_k$  называют *компонентами* (или *координатами*) кортежа.

Примером такого кортежа является нынешний автомобильный номер типа х451х077. В нем первый элемент — буква, затем идет трехзначное число, за ним идут еще две буквы и под конец — две цифры (код региона). Кортежами являются и слова русского языка (точнее, их записи) — это кортежи различной длины, составленные из букв русского алфавита, и даже предложения — это кортежи, составленные из русских слов и знаков препинания (отсюда видно, что координатами кортежа могут быть и кортежи).

В некоторых задачах множества  $X_1, \dots, X_k$  могут иметь общие элементы и даже могут все совпадать. В последнем случае можно считать, что у нас есть один мешок с элементами множества  $X$ , эти элементы извлекают из мешка, записывают, а потом кладут обратно в мешок.

### Задачи

43. Во скольких девятизначных числах все цифры различны?

44. Каких чисел от 1 до 10 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых ее нет?

45. Через каждую из трех данных точек на плоскости проведем по  $m$  прямых так, чтобы среди них не было двух, параллельных между собой, и трех, пересекающихся в одной точке (за естественным исключением трех прямых одного пучка). Найдите число точек пересечения этих прямых (не считая трех данных).

46. Сколько шестизначных чисел содержат ровно три различные цифры?

47. В составлении 40 задач принимало участие 30 студентов со всех пяти курсов. Любые два студента с одного курса придумали поровну задач, а любые два студента с разных курсов — разное число задач. Сколько человек придумало одну задачу?

48. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четна (допускаются лишь шестизначные числа, первая цифра которых отлична от 0)? А если берут все числа от 1 до 999 999?

49. Сколько существует пятизначных чисел? Во скольких из них все цифры четны? Во скольких все цифры нечетны? Во сколько не входят цифры, меньшие шести? Во скольких нет цифр, больших трех?

50. Сколько и каких цифр понадобится, чтобы написать все числа от 1 до 999 999 включительно? А от 1 до  $10^n - 1$  включительно?

51. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

52. Сколько существует пятизначных четных чисел, в которых ни одна цифра не повторяется?

53. Сколько слов длины  $n$  из цифр 0 и 1 содержат четное число нулей?

54. От  $A$  до  $B$  999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых написаны расстояния до  $A$  и до  $B$ : 0|999, 1|998, 2|997, ..., 998|1, 999|0. Сколько среди этих километровых столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

55. Данна последовательность чисел  $1, 2, 3, \dots, 2n$ . Сколькоими способами можно извлечь из нее три числа, из которых можно построить арифметическую прогрессию?

То же самое для последовательности чисел  $1, 2, 3, \dots, 2n + 1$ .

56. Найдите количество троек различных натуральных чисел, не превосходящих 100, из которых можно построить геометрическую прогрессию.

57. Окна дома, обращенные к морю, расположены в узлах прямоугольной сетки с  $m$  горизонтальными (этажами) и  $n$  вертикальными. Сколько сигналов можно передать находящемуся в море кораблю, освещая некоторые из окон дома, если в темноте нельзя различить положение освещенных окон относительно дома?

58. Имеется 14 пар различных предметов. Из них выбирается некоторое количество предметов. Найдите число способов это сделать (две выборки отличаются друг от друга своим составом, но не порядком предметов). А если имеется  $n$  пар?

59. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждая из них может повторяться несколько раз?

60. У меня есть шесть друзей. За некоторое время каждый из них был у меня на обеде 7 раз, каждые двое встретились у меня на обеде 5 раз, каждые трое — 4 раза, каждые четверо — 3 раза, с каждыми пятью я обедал 2 раза, со всеми шестью — 1 раз, каждый друг отсутствовал у меня на обеде 8 раз. Сколько раз я обедал один? Сколько было обедов за это время?

61. Сколько двузначных чисел в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат?

62. Из числа 12345678910111213...9899100 вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число было а) наибольшим, б) наименьшим (записи, начинающиеся с нуля, недопустимы).

63. Можно ли расставить 9 чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась на 3 и была: а) больше 9; б) больше 15?

64. Четыре числа сложили всеми возможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Найдите эти числа.

## Глава II

### РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

В главе I мы рассмотрели некоторые общие правила решения комбинаторных задач. С их помощью можно решать задачи самых разных типов. Однако как в геометрии неудобно всегда сводить решение задачи к аксиомам, а удобнее пользоваться теоремами, так и в комбинаторике вместо решения задачи по общим правилам часто удобнее пользоваться готовыми формулами. Дело в том, что некоторые типы задач встречаются значительно чаще других. Комбинациям, которые встречаются в этих задачах, присвоены особые названия — размещения, перестановки и сочетания.

Для числа таких комбинаций выведены особые формулы, которыми и пользуются при решении различных комбинаторных задач. С одной из этих формул мы уже знакомы — в начале главы I было показано, что число  $\bar{A}_n^k$  размещений с повторениями из элементов  $n$  типов по  $k$  равно  $n^k$ . Сейчас мы выясним, сколько можно составить таких размещений, если не допускать повторений, т. е. если все элементы, входящие в размещения, различны. Сначала разберем следующую задачу.

#### 18. Первенство по футболу

*В первенстве страны по футболу участвовали 16 команд. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось предсказать распределение медалей. Сколько различных ответов можно дать на этот вопрос?*

Эта задача решается на основе правила произведения. Комплект золотых медалей может получить любая из 16 команд (мяч, как известно, круглый...). Иными словами, здесь у нас 16 возможностей. Но если золотые медали уже завоеваны какой-то командой, занявшей 1 место, то остается лишь 15 претендентов на второе место и серебряные медали. Повторения здесь не может быть — одна и та же команда не может завоевать и золотые, и серебряные медали.

Значит, после вручения чемпиону золотых медалей остается 15 возможностей получения серебряных медалей. Точно так же, если уже вручены и золотые, и серебряные медали, то на третье место и бронзовые медали претендует лишь одна из оставшихся 14 команд. По правилу произведения получаем, что медали могут быть распределены  $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3\,360$  способами.

Здесь мы имеем дело с кортежами длины 3, а не с множествами из 3 элементов — ведь одно дело, когда золотую медаль получает «Спартак», который выходит в кубок чемпионов, а серебряную — «Локомотив», участвующий после этого в менее престижном кубке, и

совсем другое, когда они меняются ролями. Но в рассматриваемой задаче есть своеобразные черты, ведь теперь ни один элемент не может дважды встретиться в кортеже победителей: одна и та же команда не может получить, например, и золото, и бронзу, т. е. мы решили такую задачу: *найти число кортежей длины 3, составленных из 16 команд, в которых ни одна команда не повторяется.*

## 19. Размещения без повторений

Решенная задача относится к классу комбинаторных задач о размещениях без повторений. Общая формулировка этих задач похожа на формулировку задач о размещениях с повторениями, но имеет особенности. Она такова.

Имеется «бланк», в котором  $k$  мест: 1-е, 2-е, ...,  $k$ -е. Все места вакантны. Их надо заполнить элементами. Имеется запас из  $n$  различных элементов, и на каждое место можно поставить один из этих элементов, но теперь каждый элемент в единственном числе, поэтому элементы не могут повторяться. Сколько существует способов заполнить такой «бланк»? Два способа заполнения считаются различными, если хотя бы на одном месте в них стоят разные элементы.

Каждый способ заполнения позволяет разместить на  $k$  местах некоторые из  $n$  элементов, причем элементы не могут повторяться, поэтому он называется *размещением без повторений из  $n$  элементов по  $k$* . Число всех таких размещений обозначают  $A_n^k$ .

Чтобы сосчитать  $A_n^k$ , будем рассуждать так. При составлении размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  нам надо сделать  $k$  выборов. На первом шагу можно выбрать любой из имеющихся  $n$  элементов. Если этот выбор уже сделан, то на втором шагу приходится выбирать из оставшихся  $n - 1$  элементов. Точно так же на третьем шагу для выбора остается запас лишь из  $n - 2$  элементов, на четвертом — из  $n - 3$  элементов, ..., на  $k$ -м шагу — из  $n - (k - 1) = n - k + 1$  элементов. Применив правило произведения, получаем, что число размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  выражается следующим образом:

$$A_n^k = n(n - 1)\dots(n - k + 1). \quad (1)$$

Эту формулу можно записать иначе, домножив числитель и знаменатель на произведение  $(n - k)(n - k - 1)\dots\cdot 1$ :

$$A_n^k = \frac{n(n - 1)\dots(n - k + 1)(n - k)(n - k - 1)\dots\cdot 1}{(n - k)(n - k - 1)\dots\cdot 1}.$$

В числителе получилось произведение всех чисел от 1 до  $n$ . Такие произведения часто встречаются в комбинаторике. Их

называют *факториалами* и обозначают  $n!$  (читают: «эн факториал»). Таким образом, формула (1) в этих обозначениях примет вид

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}. \quad (2)$$

Полагают  $1! = 1$ . Это естественно. Но в дальнейшем нам встретится еще обозначение  $0!$ . Казалось бы, что  $0!$  должен равняться нулю. Принято считать, однако, что  $0! = 1$ . Дело в том, что факториал обладает следующим свойством:  $n! = n(n - 1)!$ . Это равенство справедливо при  $n > 1$ . Естественно определить  $0!$  так, чтобы оно оставалось верным и при  $n = 1$ , т. е. так, чтобы  $1! = 1 \cdot 0!$ . Но тогда приходится положить  $0! = 1$ .

Применим выведенную формулу для решения следующей задачи.

*Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?*

В этом случае надо найти число размещений (без повторений) из 25 элементов по 4. Ведь здесь играет роль и то, кто будет выбран в руководство общества, и то, какие посты займут выбранные (выбор: президент — Иванов, вице-президент — Татаринов, ученый секретарь — Тимошенко, казначай — Алексеев отличается от выбора: президент — Тимошенко, виде-президент — Иванов, ученый секретарь — Татаринов и казначай — Алексеев). Поэтому ответ дается формулой

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

### Задачи

1. В правление избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

2. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну — на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков? На сколько больше словарей придется издать, если число различных языков равно 10?

4. У отца есть 5 различных апельсинов, которые он дает своим 8 сыновьям, причем каждый получает или один апельсин, или ничего. Сколькими способами это можно сделать? А если число апельсинов, получаемых каждым сыном, не ограничено?

5. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает чашку, блюдце и ложку)?

6. В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга пронумеровать их в порядке, отражающем их выступление в соревновании. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев победитель соревнований будет определен?

7. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти? А если среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, т. е. двух королей, двух десяток и т. д.?

8. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт, содержащей 52 карты, по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовывали пары (например, девятки пик и треф и валеты бубен и червей)? А так, чтобы из выбранных карт можно было составить две пары, состоящие из черной и красной карт одного и того же названия (например, валеты пик и червей и дамы треф и бубен)?

9. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4. А если никакая цифра не должна появляться дважды в записи каждого числа?

10. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может встречаться несколько раз? А если каждая цифра встречается лишь один раз?

## 20. Перестановки

При составлении размещений без повторений из  $n$  элементов по  $k$  при  $k < n$  мы получали размещения, которые могли отличаться и составом элементов, и порядком их расположения. Но если брать размещения, в которые входят все  $n$  элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие размещения из  $n$  элементов по  $n$  называют *перестановками из  $n$  элементов*.

Можно также сказать, что перестановками из  $n$  элементов называют всевозможные кортежи, каждый из которых содержит все эти элементы по одному разу и которые отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают через  $P_n$ . Формула для  $P_n$  сразу получается из формулы для числа размещений без повторений. Именно,

$$P_n = A_n^n = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!. \quad (3)$$

Заметим, что здесь уже работает принятное выше соглашение, что  $0! = 1$ .

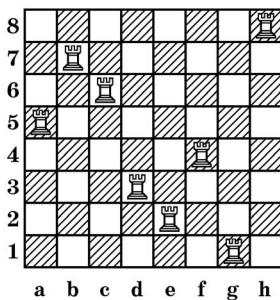


Рис. 13

найти совсем легко — достаточно выстроить ладьи по диагонали и они не будут бить друг друга. Сколькими же способами можно расположить ладьи требуемым образом?

Возьмем одно из этих расположений и обозначим через  $a_1$  номер занятого поля на вертикали **a**, через  $a_2$  — на вертикали **b**, ..., через  $a_8$  — на вертикали **h**. Среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_8$  нет ни одной пары одинаковых, так как иначе две ладьи попали бы на одну и ту же горизонталь, поэтому  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$  будет некоторой перестановкой из чисел 1, 2, ..., 8. Обратно, если  $a_1, a_2, \dots, a_8$  — некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., 8, то ей соответствует некоторое расположение ладей, при котором они не могут бить друг друга. Например, на рис. 13 изображено расположение ладей, соответствующих перестановке (5, 7, 6, 3, 2, 4, 1, 8). Таким образом, число искомых расположений ладей равно числу перестановок чисел 1, 2, ..., 8, т. е.  $P_8$ . Но

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\ 320.$$

Значит, ладьи можно расположить требуемым образом 40 320 способами.

Точно так же доказывается, что на доске из  $p$  горизонталей и  $p$  вертикалей можно  $n!$  способами расположить ладьи так, чтобы они не могли бить друг друга.

Совсем иной ответ получился бы, если бы ладьи чем-то отличались друг от друга — имели разный цвет или были перенумерованы. В этом случае из каждого расположения незанумерованных ладей получится  $n!$  расположений занумерованных ладей — они получаются, если при тех же занятых полях всеми способами переставлять друг с другом  $n$  ладей. Поэтому получилось бы  $(n!)^2$  способов расположения, при которых ладьи не могут бить друг друга.

Решим такую задачу.

Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

В одних комбинаторных задачах трудно найти хотя бы одно решение, а в других решений много, но трудность состоит в их пересчете. Ладья бьет по горизонтали и вертикали. Поэтому при таком расположении 8 ладей на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит по одной ладье. Одно такое расположение

найти совсем легко — достаточно выстроить ладьи по диагонали и они не будут бить друг друга. Сколькими же способами можно расположить ладьи требуемым образом?

Возьмем одно из этих расположений и обозначим через  $a_1$

номер занятого поля на вертикали **a**, через  $a_2$  — на вертикали **b**, ..., через  $a_8$  — на вертикали **h**. Среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_8$  нет ни одной пары одинаковых, так как иначе две ладьи попали бы на одну и ту же горизонталь, поэтому

$(a_1, a_2, \dots, a_8)$  будет некоторой перестановкой из чисел 1, 2, ..., 8. Обратно, если  $a_1, a_2, \dots, a_8$  — некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., 8, то ей соответствует некоторое расположение ладей, при котором они не могут бить друг друга. Например, на рис. 13 изображено расположение ладей, соответствующих перестановке (5, 7, 6, 3, 2, 4, 1, 8). Таким образом, число искомых расположений ладей равно числу перестановок чисел 1, 2, ..., 8, т. е.  $P_8$ . Но

Значит, ладьи можно расположить требуемым образом 40 320 способами.

Точно так же доказывается, что на доске из  $p$  горизонталей и  $p$  вертикалей можно  $n!$  способами расположить ладьи так, чтобы они не могли бить друг друга.

Совсем иной ответ получился бы, если бы ладьи чем-то отличались друг от друга — имели разный цвет или были перенумерованы. В этом случае из каждого расположения незанумерованных ладей получится  $n!$  расположений занумерованных ладей — они получаются, если при тех же занятых полях всеми способами переставлять друг с другом  $n$  ладей. Поэтому получилось бы  $(n!)^2$  способов расположения, при которых ладьи не могут бить друг друга.

К последнему выводу можно прийти иначе, прямо используя правило произведения. Первую ладью можно поставить на любое из  $n^2$  полей. После этого придется вычеркнуть горизонталь и вертикаль, на которые попала эта ладья, останется «доска» (хотя, возможно, с разрывами) с  $n - 1$  горизонтальми и  $n - 1$  вертикалями, имеющая  $(n - 1)^2$  полей. Значит, вторая ладья может быть поставлена  $(n - 1)^2$  способами. Точно так же третья ладья может быть поставлена  $(n - 2)^2$  способами и т. д. Всего получаем  $n^2(n - 1)^2 \cdots 1^2 = (n!)^2$  способов расположения ладей.

Поскольку доска  $1 \times 1$  состоит из одного поля, поставить на нее одну ладью можно единственным образом. Это оправдывает равенство  $1! = 1$ . Интересно еще рассмотреть доску  $0 \times 0$  — на ней совсем нет полей, или, как говорят математики, она имеет *пустое множество* полей. «Поставить» на нее 0 ладей можно лишь одним способом — ничего никуда не ставить. В комбинаторике часто удобно считать и такие способы — иначе пришлось бы делать много лишних оговорок. Значит, как уже говорилось в п. 19, надо положить  $0! = 1$ .

## 21. Лингвистические проблемы

Лингвистам — специалистам по живым и мертвым языкам — часто приходится разгадывать надписи, сделанные на незнакомых языках. Предположим, что им попался текст, написанный при помощи 26 незнакомых знаков. Каждый знак является буквой, изображающей один из 26 звуков.

*Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма?*

Расположим знаки письма в некотором порядке. Тогда каждый способ сопоставления даст некоторую перестановку звуков. Но из 26 звуков можно составить  $P_{26} = 26!$  перестановок. А это число приблизительно равно  $4 \cdot 10^{26}$ . Разумеется, проверить все эти возможности — непосильная работа не только для человека, но и для электронной вычислительной машины (которую к тому же надо научить отличать осмысленные записи от бессмысленных). Поэтому стараются уменьшить число возможностей.

Часто удается отделить знаки, обозначающие гласные, от знаков, обозначающих согласные. Гласные чаще стоят рядом с согласными, чем гласные рядом с гласными или согласные рядом с согласными; наблюдая, какие сочетания знаков чаще всего встречаются, можно отделить знаки для гласных от знаков для согласных. Предположим, что удалось найти 7 знаков для гласных и 19 знаков для согласных. Подсчитаем, сколько теперь возможностей сопоставить звуки знакам. 7 знаков для гласных теперь можно переставлять только друг с другом, это дает 7! способов, а 19 знаков для согласных дают 19! способов. Общее число комбинаций равно  $7! \cdot 19! \approx 6 \cdot 10^{20}$ . Стало ненамного легче.

Далее подсчитывают частоту появления отдельных знаков. Сравнивая эту частоту с частотой появления букв в других языках, близких к данному, иногда удается угадать значения некоторых знаков. Другие знаки удается найти, сравнив данный текст с тем же текстом на ином языке (древние цари любили вешать о своих «подвигах» на нескольких языках).

Предположим, что в результате этой работы 4 гласных и 13 согласных букв опознаны. Сколько еще остается возможностей? Ясно, что  $3! \cdot 6! = 4320$ . А такое число комбинаций уже можно по порядку проверить, даже не используя компьютер.

С аналогичными трудностями встречаются и криптографы — специалисты по расшифровке кодов.

### Задачи

11. На званый вечер приглашены 5 мужчин и 5 женщин. Напротив каждого места на стол необходиомо поставить табличку с именем того, кто будет на этом месте сидеть, но никакие два лица одного пола не должны сидеть рядом. Сколькими способами можно расставить таблички? А если 5 мужчин и 5 женщин садятся не за круглый стол, а на карусель, и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими?

12. Сколько пятизначных чисел содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? Сколько содержат все цифры 0, 2, 4, 6, 8?

13. Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, что в каждом числе ни одна цифра не повторяется. Решите ту же задачу для пятизначных чисел, которые можно записать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

14. Сколько нечетных и сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру надо использовать один раз?

### 22. Перестановки с повторениями

До сих пор мы переставляли предметы, которые были попарно различны. Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок — некоторые перестановки совпадают друг с другом.

Например, переставляя буквы слова «март», мы получим 24 различные перестановки:

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| март | матр | мрат | трам | тарм | амрт |
| рамт | мтар | рмат | тмар | атрм | армт |
| мтра | ратм | рмта | амтр | атмр | трма |
| ртма | ртам | мрта | артм | тамр | тмра |

А если вместо слова «март» взять слово «мама», то во всех выписанных перестановках надо будет заменить «р» на «м» и

«т» на «а». При этом некоторые из наших 24 перестановок окажутся одинаковыми. Например, стоящие в первом столбце перестановки март, рамт, мтра, ртма при этой замене дадут одно и то же слово «мама» — при перестановках лишь будут меняться местами одинаковые буквы («м» или «а»). Точно так же все четыре перестановки, написанные во втором столбце, дадут слово «маам». Вообще, все 24 перестановки разбиваются на четверки, которые при замене «р» на «м» и «т» на «а» дают один и тот же результат. В таблице эти перестановки стоят в одном столбце. Поэтому число различных перестановок, которые можно сделать из слова «мама», равно  $24:4 = 6$ . Вот они: мама, маам, ммаа, амам, аамм, амма.

Общая задача формулируется следующим образом.

*Имеется  $n$  элементов  $k$  различных типов:  $n_1$  элементов первого типа,  $n_2$  элементов второго типа, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ . Сколько можно составить различных перестановок из этих элементов?*

Перестановки такого типа называются *перестановками с повторениями*, их число обозначают  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Сколько же их?

Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы  $n!$ . Но из-за того, что некоторые элементы совпадают, получится меньшее число перестановок. В самом деле, возьмем, например, перестановку

$$\underbrace{aa\dots a}_{n_1} \quad \underbrace{bb\dots b}_{n_2} \quad \dots \quad \underbrace{xx\dots x}_{n_k}, \quad (4)$$

в которой сначала выписаны все элементы первого типа, потом все элементы второго типа, ..., наконец, все элементы  $k$ -го типа. В первой группе элементы (первого типа) можно переставлять друг с другом  $n_1!$  способами. Но так как все эти элементы одинаковы, то такие перестановки ничего не меняют. Точно так же ничего не меняют  $n_2!$  перестановок элементов во второй группе, ...,  $n_k!$  перестановок элементов в  $k$ -й группе. Например, в перестановке «ммаа» ничего не изменится, если мы поменяем местами первый и второй элементы или третий и четвертый.

Перестановки элементов в разных группах можно делать независимо друг от друга. Поэтому (по правилу произведения) элементы перестановки (4) можно переставлять друг с другом  $n_1! n_2! \dots n_k!$  способами так, что она остается неизменной. То же самое верно и для любого другого расположения элементов. Поэтому множество всех  $n!$  перестановок распадается на части, состоящие из  $n_1! n_2! \dots n_k!$  одинаковых перестановок каждая.

Значит, число различных перестановок с повторениями, которые можно сделать из данных элементов, равно

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, \quad (5)$$

где, напомним,  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

Пользуясь формулой (5), легко найти, например, сколько перестановок можно сделать из букв слова «математика».

Здесь у нас две буквы «м», три буквы «а», две буквы «т», по одной буквы «е», «и», «к», а всего 10 букв. Значит, по формуле (5) число перестановок равно

$$P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151\ 200.$$

Перестановки с повторениями естественно возникают в анаграммах — текстах с переставленными буквами. Например, слова «москва» и «смоква» — анаграммы. Когда-то анаграммы применялись учеными в качестве своеобразного «анонса», они в краткой фразе формулировали суть открытия, а потом переставляли в ней буквы и посылали письмо с переставленными буквами своим коллегам (подробнее об этом рассказано в п. 153). Когда же печаталась книга с подробным изложением результата, в ней давалась расшифровка анаграммы.

Когда Христиан Гюйгенс открыл кольцо Сатурна, он составил анаграмму «aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiii, ll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, tttt, uuuu». Буквы в ней можно поставить в таком порядке, что получится текст «Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato» («окружен кольцом тонким, плоским, нигде не подвешенным, наклонным к эклиптике»). Однако когда тот же Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна (Титан) и послал своим коллегам по этому поводу анаграмму, Уоллис, большой мастер в расшифровке тайнописи, разгадал эту анаграмму.

Подсчитаем, сколько можно было сделать «бездумных» перестановок, прежде чем дойти до правильного порядка букв в первой анаграмме Гюйгенса.

В эту анаграмму входят буквы: *a* (7 раз), *c* (5), *d* (1), *e* (5), *g* (1), *h* (1), *i* (7), *l* (3), *m* (2), *n* (9), *o* (4), *p* (2), *q* (1), *r* (2), *s* (1), *t* (5), *u* (5), а всего 61 буква. Значит, по формуле (5) получаем  $\frac{61!}{7! 5! 1! 5! 1! 1! 7! 3! 2! 9! 4! 2! 1! 2! 1! 5! 5!}$  перестановок. Это

громадное число порядка  $10^{60}$ . С задачей перебора всех этих перестановок электронная вычислительная машина, делающая миллион операций в секунду, не справилась бы за все времена существования Солнечной системы.

В каком-то смысле человеку легче решить эту задачу, чем машине. Ведь человек будет брать не все перестановки, а только те, в которых получаются осмыслиенные слова, будет учитывать морфологические правила и т. д. Это сильно сократит число необходимых попыток. А самое главное — он примерно знает, над какими вопросами думал его корреспондент. Но все равно получается очень громоздкая работа.

### Задачи

15. У мамы 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых мандарина и 4 одинаковых апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

16. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы слова: а) «метаматематика»; б) «парабола»; в) «ингредиент»?

17. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, две ладьи, двух слонов и двух коней) на первой линии шахматной доски (не соблюдая шахматные правила)?

18. На первые две линии шахматной доски произвольным образом ставятся белые и черные фигуры (по два коня, два слона, две ладьи, ферзь и король каждого цвета). Сколькими способами можно это сделать? Сколькими способами можно расставить те же фигуры по всей доске? А если расставляются и все пешки (по 8 пешек каждого цвета)?

19. Найдите сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках следующих 4 цифр:

а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5; в) 1, 3, 3, 3; г) 1, 1, 4, 4.

20. Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно получить, переставляя цифры 0, 1, 2, 3, 4 (цифра 0 не должна быть первой).

## 23. Сочетания без повторений

Не всегда нас интересует порядок, в котором располагаются элементы. Например, если в отборочной группе первенства мира по футболу 6 команд, а продолжат соревнования лишь две, то порядок, в котором располагается первая пара, не существен — быть бы хоть вторым, лишь бы выйти в следующий круг!

Точно так же если в первенстве страны по футболу участвуют 16 команд, а по итогам первенства высшую лигу покидают команды, занявшие последние два места, то слабым утешением для команды будет предпоследнее, а не последнее место — все равно придется перейти во второй эшелон.

В тех случаях, когда нас не интересует порядок элементов в комбинации, а интересует лишь ее состав, говорят о сочетаниях. *Сочетаниями из  $n$  элементов по  $k$*  называют любой выбор  $k$  элементов из имеющихся различных  $n$  элементов.

Различные сочетания отличаются друг от друга составом, но не порядком элементов — порядок их перечисления вообще

не важен. Число сочетаний, которые можно составить из  $n$  элементов по  $k$ , обозначают через  $C_n^k$ .

Сочетания — это в точности подмножества из  $k$  элементов заданного множества из  $n$  элементов. Отметим здесь еще, что для числа сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  применяется также обозначение  $\binom{n}{k}$ .

Формула для числа сочетаний легко получается из выведенной ранее формулы для числа размещений. В самом деле, составим сначала все сочетания из  $n$  элементов по  $k$ , записав каждое в виде некоторого размещения (т. е. упорядочив элементы каждого сочетания), а потом будем переставлять входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все размещения из  $n$  элементов по  $k$ , причем каждое только по одному разу. Но таких перестановок для каждого сочетания можно сделать  $k!$ , а число этих сочетаний равно  $C_n^k$ . Значит, справедлива формула  $k!C_n^k = A_n^k$ .

Из этой формулы находим, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n - k)! k!}. \quad (6)$$

Замечательно, что выведенная формула совпадает с формулой для числа перестановок из  $k$  элементов одного типа и  $n - k$  элементов второго типа:  $P(k, n - k) = \frac{n!}{(n - k)! k!}$ . Иными словами,

$$C_n^k = P(k, n - k). \quad (7)$$

Это равенство можно доказать и непосредственно, не прибегая к формуле числа размещений. Для этого поставим по порядку все  $n$  элементов, из которых составляют сочетания, и зашифруем каждое сочетание расстановкой нулей и единиц. Именно, если некоторый элемент входит в сочетание, то на его месте пишем 1, а если он не входит, то пишем 0. Например, если составляются сочетания из букв а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, то сочетанию {а, в, е, з, и} соответствует расстановка 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \text{а} & \text{б} & \text{в} & \text{г} & \text{д} & \text{е} & \text{ж} & \text{з} & \text{и} & \text{к} \end{array}$$

а расстановке 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1 — сочетание {б, в, г, ж, к}:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{а} & \text{б} & \text{в} & \text{г} & \text{д} & \text{е} & \text{ж} & \text{з} & \text{и} & \text{к} \end{array}$$

Ясно, что при этом каждому сочетанию соответствует расстановка из  $k$  единиц и  $n - k$  нулей, а каждой расстановке из  $k$  единиц и  $n - k$  нулей соответствует некоторое сочетание из  $n$  элементов по  $k$ , причем различным расстановкам — различные сочетания. Отсюда и следует,

что число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  совпадает с числом перестановок из  $k$  элементов одного типа (единиц) и  $n - k$  элементов другого типа (нулей).

Можно провести и другое рассуждение. Возьмем некоторое сочетание из  $n$  элементов по  $k$ , причем запишем его в виде расстановки всех  $n$  элементов: сначала в некотором порядке выпишем  $k$  элементов, вошедших в сочетание, а затем в некотором порядке  $n - k$  элементов, не вошедших в сочетание. Теперь будем считать первые  $k$  элементов «одинаковыми» в том смысле, что они вошли в сочетание, и следующие  $n - k$  — тоже «одинаковыми», но другого типа — они не вошли в сочетание. Теперь будем производить перестановки с повторениями из  $k$  элементов первого типа (вошедшие в сочетание) и  $n - k$  элементов второго типа (не вошедшие в сочетание), и первые  $k$  элементов этих перестановок будем считать новыми сочетаниями.

Легко видеть, что при этом мы получим все сочетания из  $n$  элементов по  $k$  и никакое не получим дважды. Перестановки лишь внутри первых  $k$  и лишь внутри последних  $n - k$  элементов невозможны — элементы в этих группах «одинаковы», поэтому разные перестановки отличаются либо числом «новых» элементов, вошедших в сочетание, либо местами расположения этих новых элементов, но тогда они вытесняют из прежнего сочетания разные элементы — ведь элементы исходного сочетания, стоящие на разных местах, все же различны. Отсюда снова следует, что число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  совпадает с числом перестановок из  $k$  элементов одного типа (вошедших в исходное сочетание) и  $n - k$  элементов другого типа (не вошедших в него).

Применяя формулу (6), легко решить задачи, о которых говорилось в начале этого пункта.

Число различных исходов игр в отборочной группе первенства мира по футболу дается формулой  $C_6^2 = \frac{6!}{2! 4!} = 15$ .

Число различных «печальных» исходов футбольного первенства равно  $C_{16}^2 = \frac{16!}{14! 2!} = 120$ .

**ОРН - 16 МЕСТО • 2 ОЧКА**



Вот еще задача на сочетания.

*Сколькоими способами можно поставить на шахматную доску 8 ладей?* В отличие от задачи, рассмотренной в п. 20, здесь не налагается условие, что лады не могут бить друг друга. Поэтому нам надо просто выбрать из 64 клеток шахматной доски любые 8 клеток. А это может быть сделано

$$C_{64}^8 = \frac{64!}{8! \cdot 56!} = 4\,426\,165\,368 \text{ способами.}$$

Точно так же доказывается, что на доске из  $m$  горизонталей и  $n$  вертикалей  $k$  ладей можно поставить  $C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{k! (mn - k)!}$  способами.

Если же ставить не  $k$  одинаковых ладей, а  $k$  различных фигур, то уже имеет значение, какая фигура куда поставлена. Поэтому здесь получатся не сочетания, а размещения, и ответ дается формулой  $A_{mn}^k = \frac{(mn)!}{(mn - k)!}$ .

## 24. Бином Ньютона

Из начальной алгебры известно, что

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2xa + a^2,$$

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3.$$

Раскроем скобки в этих равенствах, причем будем записывать все сомножители в слагаемых в том порядке, в котором они нам встречаются:

$$(x + a)^2 = xx + xa + ax + aa,$$

$$(x + a)^3 = xxx + xxa + xax + axx + xaa + axa + aax + aaa.$$

Видно, что в эти формулы входят все размещения с повторениями, составленные из букв  $x$  и  $a$  по две буквы в каждом размещении для  $(x + a)^2$  и по три буквы для  $(x + a)^3$ . То же самое будет и в общем случае. Если записать  $(x + a)^n$  в виде

$$(x + a)^n = (x + a)(x + a) \dots (x + a),$$

$\overbrace{\phantom{x + a \dots x + a}}$   
*n раз*

то после раскрытия скобок мы получим в виде слагаемых все возможные размещения с повторениями букв  $x$  и  $a$ , состоящие из  $n$  элементов каждое.

Приведем теперь подобные члены. Подобными будут члены, содержащие одинаковое количество букв  $x$  (тогда и букв  $a$  в

них будет поровну). Найдем, сколько будет членов, в которые входит  $k$  букв  $x$  и, следовательно,  $n - k$  букв  $a$ . Эти члены являются перестановками с повторениями, составленными из  $k$  букв  $x$  и  $n - k$  букв  $a$ . Поэтому по формуле (7) их число равно  $P(k, n - k) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$ . Отсюда вытекает, что после приведения подобных членов выражение  $x^k a^{n-k}$  войдет с коэффициентом  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$ . Итак, мы доказали, что

$$(x + a)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^k a^{n-k} + \dots + C_n^0 a^n. \quad (8)$$

Мы пришли к новому определению чисел  $C_n^k$  — они оказались коэффициентами при  $x^k a^{n-k}$  в разложении  $(x + a)^n$ .

Равенство (8) принято называть формулой *бинома Ньютона* (хотя оно было известно за несколько сот лет до рождения Ньютона), а коэффициенты  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$  — биномиальными коэффициентами.

Формулу (8) можно вывести иначе. Рассмотрим произведение  $(x + a)^n = (x + a)(x + a) \dots (x + a)$ . При раскрытии скобок мы должны из каждой скобки взять в сомножители одночлена либо  $x$ , либо  $a$ . Одночленов, содержащих  $x^k$ , будет столько, сколькими способами можно из  $n$  скобок выбрать те  $k$ , из которых мы возьмем  $x$  (из остальных  $n - k$  мы возьмем  $a$ ). Значит, слагаемых с  $x^k$  (и  $a^{n-k}$ ) будет  $C_n^k$ .

### Задачи

**21.** а) Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти различных красок?

б) Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг (с тремя горизонтальными полосами), если имеется материя пяти различных цветов? А если один из цветов должен быть красным? А если цвета могут повторяться, но не рядом (полосы должны быть различимы)?

**22.** На плоскости проведены  $n$  прямых линий, из которых никакие две не являются параллельными и никакие три не пересекаются в одной точке? Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

**23.** Труппа состоит из 10 артистов. Сколькими способами можно выбирать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы эти составы не совпадали друг с другом?

**24.** У мамы два одинаковых яблока и три одинаковых груши. Каждый день в течение 5 дней она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано? Решите аналогичную задачу, если яблок  $n$ , а груш  $k$ .

25. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькоими способами это можно сделать?

А сколькоими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете  $100 + 200 + 400 + 800$ ?

26. а) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт есть хотя бы один туз? Ровно 1 туз? Не менее двух тузов? Ровно два туза?

б) Сколькоими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?

27. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькоими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждую команду должен входить хотя бы один юноша?

28. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькоими способами может быть произведен выбор, если члены президиума могут войти в состав делегации? А если члены президиума не могут войти в состав делегации?

29. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого — 9 книг. Сколькоими способами они могут обменять одну книгу одного на одну книгу другого? А 3 книги одного на 3 книги другого?

30. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькоими способами это может быть сделано?

31. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькоими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых? А если в отряд должны войти командир роты и старший по возрасту из сержантов?

32. У Миши 6 друзей и ежедневно в течение 20 дней он приглашает к себе в гости троих из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькоими способами он может это сделать?

33. Пусть  $M_r$  — число размещений без повторений из  $m$  элементов по  $r$ , а  $N_r$  — число размещений без повторений из  $n$  элементов по  $r$ . Докажите, что число размещений из  $m+n$  элементов по  $r$  выражается формулой  $(M+N)^r$ , где после возведения в степень надо заменить все показатели индексами.

34. Докажите, что  $(1+x)^n + (1-x)^n \leq 2^n$  при  $n \geq 2$  и  $|x| \leq 1$ .

## 25. Покупка пирожных

*В кондитерском магазине продавались пирожные 4 видов: корзиночки, наполеоны, песочные и эклеры. Сколькоими способами можно купить 7 пирожных?*

Эта задача имеет иной вид, чем те, которые мы уже решали. Она не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором укладываются пирожные в коробку, несуществен. Поэтому она ближе к задачам на сочетания. Но от задач на сочетания она отличается тем, что в комбинации могут входить повторяющиеся элементы (например, можно

купить 7 эклеров). Такие задачи называют задачами на *сочетания с повторениями*.

Чтобы решить нашу задачу, поступим следующим образом. Зашифруем каждую покупку с помощью единиц и палочек. Именно, сначала напишем столько единиц, сколько куплено корзиночек. Потом, чтобы отделить корзиночки от наполеонов, поставим палочку, а затем — столько единиц, сколько куплено наполеонов. Далее снова поставим палочку (если не было куплено ни одного наполеона, то в записи появятся подряд две палочки). Далее напишем столько единиц, сколько куплено песочных пирожных, снова поставим палочку, и наконец, напишем столько единиц, сколько куплено эклеров.

Например, если куплено 3 корзиночки (к), 1 наполеон (н), 2 песочных (п) и 1 эклер (э), то получим такую запись:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{k} & \text{n} & \text{п} & \text{э} \end{array}$$

В этой записи палочки отделяют одну группу пирожных от другой. Если же куплено 2 корзиночки и 5 песочных, то получится запись  $11|11111$ . Ясно, что разным покупкам соответствуют при этом разные комбинации из 7 единиц и 3 палочек.

Обратно, каждой комбинации 7 единиц и 3 палочек соответствует какая-то покупка. Например, комбинации  $|111|1111$  соответствует покупка 3 наполеонов и 4 песочных пирожных (крайние группы пирожных отсутствуют).

Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 палочек. А это число, как было показано в п. 22, равно

$$P(7, 3) = \frac{10!}{7! 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

К тому же самому результату можно было бы прийти и иным путем. Именно, расположим в каждой покупке пирожные в таком порядке: корзиночки, наполеоны, песочные, эклеры, а потом перенумеруем их. Но при нумерации будем к номерам наполеонов прибавлять 1, к номерам песочных — 2 и к номерам эклеров — 3 (а к номерам корзиночек ничего не будем прибавлять). Например, пусть куплено 2 корзиночки, 3 наполеона, 1 песочное и 1 эклер. Тогда эти пирожные нумеруются так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10.

Ясно, что самый большой номер при такой нумерации не больше 10 (лишь последний эклер может получить номер  $7 + 3 = 10$ ), а самый маленький возможный номер равен 1 (этот номер получает первая корзиночка). При этом ни один номер не повторяется. Обратно, каждой возрастающей последовательности 7 чисел от 1 до 10 соответствует некоторая покупка. Например, последовательность 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 соответствует покупке из 4 наполеонов и 3 песочных пирожных. Чтобы убедиться в этом, надо отнять от заданных номеров числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Мы получим числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, т. е. 4 единицы и 3 двойки. Но единицу мы прибавляли к номерам наполеонов, а двойку — к номерам песочных пирожных; значит, у нас 4 наполеона и 3 песочных пирожных.

При этом у нас получаются лишь возрастающие последовательности чисел, и, следовательно, каждая последовательность полностью определяется своим составом. Поэтому число таких последовательностей 7 чисел равно числу сочетаний из 10 чисел (от 1 до 10) по 7. А число этих сочетаний дается формулой  $C_{10}^7 = \frac{10!}{7! 3!} = 120$ . Мы получили тот же самый результат.

## 26. Сочетания с повторениями

Мы уже говорили, что разобранная задача относится к типу задач на сочетания с повторениями. Общая формулировка этих задач такова.

*Имеются предметы  $n$  различных типов. Сколькими способами можно сделать из них комбинацию из  $k$  элементов, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, при этом предметы одного типа могут повторяться?*

Иными словами, различные комбинации должны отличаться количеством предметов хотя бы одного типа.

Такие комбинации называют *сочетаниями с повторениями* из  $n$  элементов по  $k$ , а их число обозначают  $\bar{C}_n^k$ . Эта задача в общем виде решается точно так же, как и задача о пирожных. Именно, прежде всего надо занумеровать возможные типы элементов числами от 1 до  $n$  (иначе можно оказаться в положении мужа, который никак не мог вспомнить, что ему поручила купить жена: 6 пакетов молока и 2 банки пива или 2 пакета молока и 6 банок пива). Теперь можно зашифровать каждую комбинацию с помощью последовательности единиц и палочек: для каждого типа с 1-го до  $n$ -го по порядку написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделять друг от друга палочками. При этом если предметы какого-нибудь типа совсем не вошли в комбинацию, то в записи появятся подряд две или большее число палочек. В результате мы получим столько единиц, сколько предметов входит в комбинацию, т. е.  $k$ , а число палочек будет на 1 меньше, чем число типов предметов, т. е.  $n - 1$ . Таким образом, мы получим перестановки с повторениями из  $k$  единиц и  $n - 1$  палочек. Различным комбинациям при этом соответствуют различные перестановки с повторениями, а каждой перестановке с повторениями соответствует своя комбинация.

Итак, число  $\bar{C}_n^k$  сочетаний с повторениями из элементов  $n$  типов по  $k$  равно числу  $P(k, n - 1)$  перестановок с повторениями из  $n - 1$  палочек и  $k$  единиц. А  $P(k, n - 1) = \frac{(k + n - 1)!}{k! (n - 1)!}$ .

Поэтому

$$\bar{C}_n^k = \frac{(k + n - 1)!}{k! (n - 1)!} = C_{n+k-1}^k. \quad (9)$$

Эту же формулу можно доказать и иными способами — сразу приводящими к формуле  $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ . Чтобы задать сочетание с повторениями из элементов  $n$  типов (типы занумерованы!) по  $k$ , надо выписать в ряд  $n + k - 1$  единицу, а затем выбрать из этих  $n + k - 1$  позиций  $n - 1$  и на выбранных позициях поменять 1 на | . Этот выбор можно сделать  $C_{n+k-1}^k$  способами. Полученная запись преобразуется в количество элементов каждого типа (число единиц, стоящих между соседними палочками).

А можно выписать в ряд числа от 1 до  $n + k - 1$ , выбрать  $k$  из них ( $C_{n+k-1}^k$  способами), а затем первое (наименьшее) выбранное число взять как есть, от второго отнять 1, от третьего отнять 2, ..., от  $k$ -го отнять  $k - 1$ . Сразу получится набор типов выбранных элементов (расположенных по возрастанию).

Фактически мы сейчас определили количество кортежей из  $n$  элементов вида  $(k_1, \dots, k_n)$ , где  $k_1, \dots, k_n$  — неотрицательные целые числа, сумма которых равна  $k$ , т. е. число способов представить число  $k$  в виде суммы  $n$  неотрицательных слагаемых. Оно равно  $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ .

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями налагается дополнительное условие — в них обязательно должны входить элементы  $r$  фиксированных типов, где  $r \leq n$ . Эти задачи легко сводятся к уже решенной. Чтобы обеспечить присутствие элементов заданных типов, возьмем с самого начала по одному элементу каждого такого типа. Тем самым в сочетании с повторениями из элементов  $n$  типов по  $k$  окажутся заняты  $r$  мест. Остальные же  $k - r$  места можно заполнять любыми элементами, принадлежащими по условию к  $n$  типам. Поэтому комбинаций искомого вида столько же, сколько и сочетаний с повторениями из элементов  $n$  типов, содержащих по  $k - r$  элементов каждое, т. е.  $\bar{C}_n^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r}$ . В частности, если  $k \geq n$  и требуется, чтобы в сочетания с повторениями из элементов  $n$  типов по  $k$  входил по крайней мере один элемент каждого из  $n$  типов, то получится  $C_{k-1}^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}$  комбинаций.

**Задачи**

**35.** В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

**36.** Сколькими способами могут выпасть три различные игральные кости? Во скольких случаях хотя бы на одной кости выпадет 6 очков? Во скольких случаях ровно на одной кости выпадет 6 очков? Во скольких случаях ровно на одной кости выпадет 6 очков, а на другой — 3 очка? А если кости неразличимы?

**37.** В восточной игре «нарды» 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле или пустое, или занято некоторыми белыми шашками, или занято некоторыми черными шашками. Сколькими способами можно так поставить шашки?

**38.** Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?

**39.** Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра является целым числом от 1 до 10?

**40.** Выписаны все сочетания с повторениями из  $n$  букв по  $n$ . Покажите, что каждая буква встретится  $C_{2n-1}^n$  раз.

**27. Генуэзская лотерея**

В прошлые века процветала так называемая *генуэзская лотерея*, сохранившаяся (с некоторыми изменениями) в некоторых странах до сих пор. Суть ее заключалась в следующем. Участники лотереи покупали билеты, на которых стояло число от 1 до 90. Можно было купить и билеты, на которых было сразу два, три, четыре или пять чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержавшего жетоны с числами от 1 до 90, вынимали пять жетонов. Выигрывали те билеты, на которых все числа были среди вынутых. Например, если на билете были числа 8, 21, 49, а вынутыми оказались числа 3, 8, 21, 37, 49, то билет выигрывал; если же вынутыми были, скажем,



числа 3, 7, 21, 49, 63, то билет проигрывал — ведь числа 8 среди вынутых не оказалось.

Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то он получал при выигрыше в 15 раз больше стоимости билета; если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше; если с тремя числами (терн), то в 5500 раз больше; если с четырьмя числами (катерн) — в 75000 раз больше; а если со всеми пятью числами (квин), то в 1 000 000 раз больше, чем стоимость билета.

Многие люди пытались обогатиться, участвуя в этой лотерее и ставя в каждом розыгрыше на терн или амбо. Но мало кому удавалось это сделать — лотерея была рассчитана так, чтобы ее устроители в проигрыше не оставались<sup>1)</sup>.

Чтобы понять, в чем дело, попробуем сосчитать, каково отношение «счастливых» исходов лотереи к общему числу ее исходов при различных способах игры. Общее число исходов лотереи сразу находится по формуле (6). Ведь из мешка с 90 жетонами вынимают 5 жетонов, причем их порядок не играет никакой роли. Получаются сочетания из 90 элементов по 5, число которых равно

$$C_{90}^5 = \frac{90!}{5!85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268.$$

Предположим теперь, что участник лотереи купил билет с одним номером. Во скольких случаях он выиграет? Для выигрыша необходимо, чтобы один из вынутых номеров совпал с номером на билете. Остальные же 4 номера могут быть любыми. Но эти четыре номера выбираются из оставшихся 89 номеров. Поэтому число благоприятных комбинаций выражается формулой

$$C_{89}^4 = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Отсюда следует, что отношение числа благоприятных комбинаций к общему числу комбинаций равно

$$\frac{C_{89}^4}{C_{90}^5} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

Это означает, что если игрок будет играть часто, то выигрывать он будет один раз из восемнадцати. Иными словами, он заплатит за 18 билетов, а выиграет лишь стоимость 15 билетов.

<sup>1)</sup> Переживания участников лотереи ярко описаны итальянской писательницей Матильдой Серао в новелле «Розыгрыш лотереи», см. книгу «Итальянские новеллы 1860 — 1914 гг.», ГИХЛ, 1960.



Разумеется, не следует думать, что из каждого из 18 раз игрок выиграет в точности один раз. Иногда между двумя выигрышами пройдет 20 или 30 тиражей, а иногда удастся выиграть и в двух тиражах подряд. Речь идет о среднем числе выигрышей за большой промежуток времени или при большом числе участников. Иначе можно сделать ошибку, которую приписывают одному врачу. Он сказал пациенту: «У Вас болезнь, от которой выздоравливает 1 человек из 10. Но предыдущие 9 больных, которых я лечил от этой болезни, умерли. Значит, Вы обязательно выздоровеете!».

А теперь подсчитаем шансы при игре на амбо. Здесь уже нужно, чтобы два загаданных номера вошли в число вынутых из мешка, а остальные три номера могут быть любыми. Так как их можно выбрать из оставшихся 88 номеров, то число «счастливых» исходов при игре на амбо дается формулой

$$C_{88}^3 = \frac{88!}{3! \cdot 85!} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 109\ 736.$$

Отношение же числа «счастливых» исходов к общему числу исходов равно

$$\frac{C_{88}^3}{C_{90}^5} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{4 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}.$$

Здесь уже из 801 исхода только два приводят к выигрышу. Но так как выигрыш лишь в 270 раз больше стоимости билета, то выигрыш на 801 билет «амбо» равен стоимости 540 билетов. Ясно, что игра на амбо еще более убыточна участникам, чем игра на «простую одиночку».

Совсем уже невыгодны игры на терн, катерн и квин. Здесь отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов равно:

$$\text{при игре на терн } \frac{C_{87}^2}{C_{90}^5} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11\ 748},$$

$$\text{при игре на катерн } \frac{C_{86}^1}{C_{90}^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511\ 038},$$

$$\text{при игре на квин } \frac{1}{C_{90}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43\ 949\ 268}.$$

Платят же выигравшим лишь в 5500, 75 000 и 1 000 000 раз больше. Подсчитайте сами, каковы потери участников лотереи при этих условиях.

Видоизменением генуэзской лотереи является распространенная в России игра в лото — здесь тоже участвуют «бочонки» с числами от 1 до 90, а на карточках у игроков напечатаны 3 ряда по 5 чисел в каждом ряду. Заполнение 4 чисел часто называют «квартира», что является искажением слова «катерн».

## 28. «Спортлото»

Еще не так давно перед каждым тиражом «Спортлото» миллионы людей заполняли карточки, пытаясь угадать заветные 6 номеров из 49. У каждого была своя система — одни зачеркивали подряд 6 номеров, другие — через три на четвертый, третьи вспоминали дни, в которые одержала победу любимая команда и т. д. Сейчас распространены другие «игры» подобного рода — «Русское лото», «Олимпион» и другие.

В «Спортлото 6 из 49» из лотotronа извлекаются 6 номеров из 49. Играющие тоже отмечают в карточке 6 номеров из 49, а выигрывают те карточки, в которых угаданы 3, 4, 5 или все 6 номеров. Сколькими же способами можно заполнить карточку «Спортлото», т. е. сколькими способами можно выбрать 6 номеров из 49?

Поскольку порядок следования выбранных чисел не учитывается, мы имеем здесь дело с сочетаниями из 49 элементов по 6. Так что число различных способов заполнения карточек «Спортлото» равно  $C_{49}^6$ . По формуле (6)  $C_{49}^6 = \frac{49!}{6! \cdot 43!}$ . Чтобы

найти значение этого выражения, не обязательно перемножать все числа от 1 до 49, а потом делить на произведения чисел от 1 до 6 и от 1 до 43 — ведь и в числителе, и в знаменателе имеется произведение чисел от 1 до 43 и на него можно сократить. После сокращения получаем

$$C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

А это выражение уже легко сосчитать, оно равно 13983816.

Мы нашли, что имеется 13983816 различных способов заполнения карточки «Спортлото». Разумеется, эти способы неравноценны — после тиража одни были счастливы, узнав, что они угадали 5, а то и все 6 номеров, другие радовались, угадав 3 или 4 номера, а кое-кому оставалось надеяться, что в следующий раз им повезет больше.

Попробуем теперь определить, легко ли угадать  $p$  номеров. Проще всего ответить на вопрос, насколько трудно угадать все 6 номеров из 49 — это получится лишь в одной карточке из 13983816 (мы предполагаем, что карточки равномерно заполнены вариантами, т. е. нет «предпочтительных» и «игнорируемых» вариантов, хотя на практике это совсем не так).

Несколько легче отгадать ровно 5 номеров. Здесь уже можно сделать ошибку в одном из 6 номеров, заменив его одним из неудачных 43 номеров. Значит, нам надо выбрать один из 6 выпавших номеров (это можно сделать  $C_6^1$  способами) и один из 43 невыпавших номеров (это можно сделать  $C_{43}^1$  способами). Любая комбинация этих двух выборов нам годится, поэтому по правилу произведения получаем, что различных карточек «Спортлото», в которых отгадано ровно 5 номеров, будет

$$C_6^1 C_{43}^1 = 6 \cdot 43 = 258.$$

Значит, 258 карточек из 13983816 угадают 5 номеров (это примерно одна карточка из 54 200).

Таким же образом, пользуясь правилом произведения, мы определяем, что 4 номера будут угаданы в  $C_6^2 C_{43}^2 = 13545$  вариантах (одна карточка из 1032) — сначала надо из 6 верных номеров выбрать какие-нибудь 2 неугаданных (это делается  $C_6^2$  способами), а затем заменить их парой номеров, выбранной из 43 несчастливых номеров (а этот выбор можно сделать  $C_{43}^2$  способами). Комбинируя каждый способ выбора первой пары с каждым способом выбора заменяющей ее пары, мы и получим ответ  $C_6^2 C_{43}^2$ .

Теперь уже легко понять, что 3 номера будут угаданы в  $C_6^3 C_{43}^3 = 246\,820$  вариантах (одна карточка из 57), 2 номера — в  $C_6^4 C_{43}^4$  вариантах, один — в  $C_6^5 C_{43}^5$  вариантах, а  $C_{43}^6$  вариантов не угадают ни одного номера.

С размером выигрыша и степенью убыточности «Спортлото» тоже можно разобраться, но для этого надо знать, какая часть денег, полученных от продажи карточек, идет на оплату карточек, в которых угаданы 3, 4, 5 или 6 номеров.

## 29. Снова футбольное первенство

Мы разобрали задачи на размещения, перестановки и сочетания. Во многих случаях приходится иметь дело с комбинациями различных типов. Рассмотрим следующую задачу.

Назовем два исхода первенства страны по футболу *совпадающими в главном*, если при этих исходах одно и то же распределение первых 3 мест и не меняется список двух команд, покидающих высшую лигу. *Найти число различных в главном исходов первенства* (как и выше, мы считаем, что в первенстве участвуют 16 команд).

Мы уже знаем, что медали могут распределяться  $A_{16}^3$  способами (см. п. 18). После этого остается 13 команд, из которых 2 должны покинуть высшую лигу. Так как здесь уже порядок выбывающих команд не важен, то это может произойти  $C_{13}^2 = \frac{13!}{2! \cdot 11!}$  способами. По правилу произведения получаем, что число различных в главном исходов первенства равно

$$A_{16}^3 C_{13}^2 = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \frac{13!}{2! \cdot 11!} = \frac{16!}{2! \cdot 11!} = 262\,080.$$

К этому же результату можно прийти иным путем. Общее число различных исходов первенства (отбрасывая случаи, когда происходит раздел тех или иных мест) равно  $P_{16} = 16!$ . Но перестановки 11 команд, занявших места с 4-го по 14-е, а также перестановки 2 команд, занявших места с 15-го по 16-е, приводят к совпадающему в главном исходу первенства. Число таких перестановок равно  $P_{11} P_2 = 11! \cdot 2!$ . Значит, число различ-

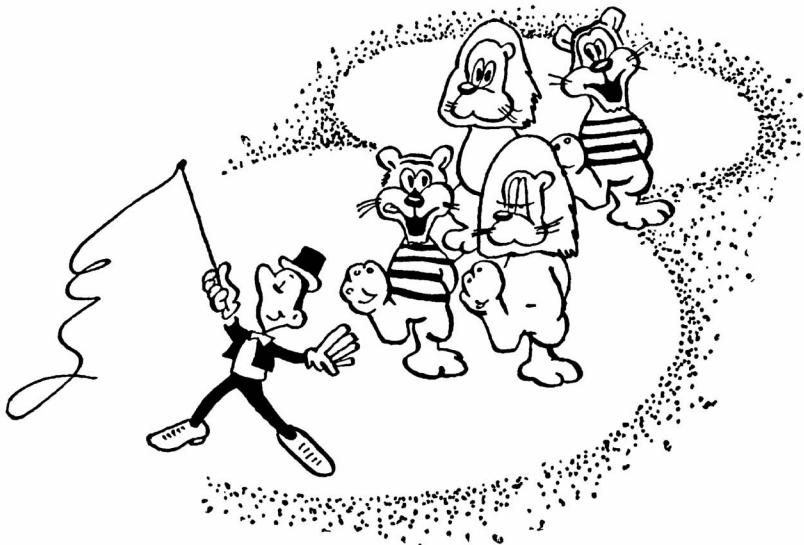
ных исходов дается формулой  $\frac{P_{16}}{P_{11} P_2} = \frac{16!}{11! \cdot 2!}$ .

## 30. Перестановки с ограничениями

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых на порядок элементов в комбинациях не накладывалось никаких дополнительных условий. Либо допускался любой порядок элементов, либо порядок совсем не учитывался. Сейчас мы разберем несколько задач, в которых на порядок элементов налагаются некоторые ограничения.

*Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?*

Поставим сначала всех львов так, чтобы между каждыми двумя львами был промежуток. Это можно сделать  $5! = 120$  способами. Число промежутков равно 4. Если присоединить к ним еще два места — впереди всех львов и позади них, то



получится 6 мест, на которые можно поставить по тигру, тогда никакие два тигра не окажутся рядом друг с другом. Так как порядок тигров существен, то число способов их расстановки равно числу размещений из 6 по 4, т. е.  $A_6^4 = 360$ . Комбинируя каждый способ расстановки львов с одним из способов расстановки тигров, получаем  $120 \cdot 360 = 43\,200$  способов вывести хищных зверей на арену.

Если бы у дрессировщика было  $n$  львов и  $k$  тигров, то он мог бы решить задачу  $P_n A_{n+1}^k = \frac{n! (n+1)!}{(n-k+1)!}$  способами. Это возможно лишь при условии, что  $k \leq n+1$  — иначе два тигра обязательно окажутся рядом.

*Сколькими способами можно переставить буквы слова «перемет» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?*

Сначала подсчитаем, во скольких перестановках все три буквы «е» идут подряд. Мы можем в этих перестановках объединить буквы «е» в один блок и переставлять этот блок вместе с буквами «п», «р», «м», «т». Получатся перестановки из 5 объектов, число которых равно  $P_5 = 5! = 120$ . А перестановок с повторениями из букв слова «перемет» можно составить  $P(3, 1, 1, 1, 1) = 840$ . Значит, число перестановок, в которых три буквы «е» не идут подряд, равно  $840 - 120 = 720$ .

В этой задаче надо было найти число перестановок, подчиненных некоторому ограничительному условию — запрету трем буквам «е» стоять рядом. Такие задачи с различного вида

ограничениями часто встречаются в комбинаторике. В некоторых из них можно применить тот же метод, что и в решенной сейчас задаче — объединение нескольких элементов в блоки.

Пусть, например, 4 танкиста, 4 летчика и 2 артиллериста хотят сфотографироваться, стоя в один ряд, но так, чтобы представители одного рода войск стояли рядом. Сколькими способами они могут это сделать?

И здесь мы сначала объединим их в блоки, которые обозначим Т, Л, А. Из этих блоков можно сделать  $3! = 6$  перестановок. Но еще можно переставлять фотографирующихся внутри блоков. Танкистов можно переставлять 4! способами, летчиков — тоже 4! способами, а артиллеристов — 2! способами. Всего по правилу произведения получаем  $3! \cdot 4! \cdot 2! = 6912$  способов.

Вообще, пусть имеется  $n_1$  предметов одного типа,  $n_2$  предметов другого типа, ...,  $n_k$  предметов  $k$ -го типа, где предметы одного и того же типа все же различимы друг от друга. Тогда число перестановок этих предметов, в которых все предметы одного и того же типа стоят рядом, равно  $n_1! n_2! \dots n_k!$ .

### 31. Постройка лестницы

*Из плит сечением 30×50 см строится лестница, ведущая из точки A в точку B (рис. 14). Расстояние AC равно 4,5 м, а расстояние CB — 1,5 м. Высота каждой ступеньки равна 30 см, а ее ширина — целое кратное 50 см. Сколькими способами можно построить лестницу?*

Из условия задачи видно, что лестница должна иметь 5 ступенек и состоять из 9 «блоков» длиной 50 см. Поэтому ступеньки можно строить в 10 местах — начиная с начала самой первой плиты (точки A) и кончая концом последней плиты (под точкой B). Таким образом, надо из 10 мест выбрать 5, а это можно сделать  $C_{10}^5 = 252$  способами.

Решенная задача похожа на задачу об укротителе: укротитель не хотел ставить рядом двух тигров, а строитель лестницы не может делать ступеньки двойной высоты. Но между этими задачами есть существенное отличие. Укротителю был важен порядок, в котором шли тигры, одно дело поставить впереди

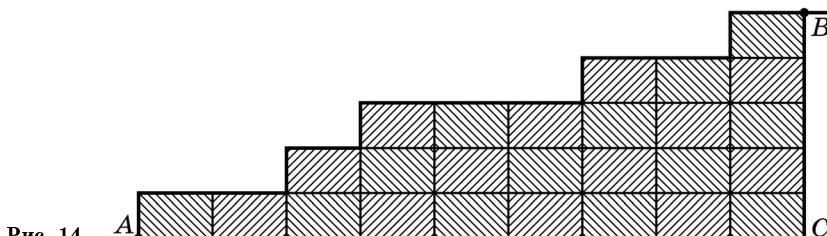


Рис. 14

всех тигра Шаха, а другое — тигра Акбара. А для строителя лестницы все места, где есть подъем, одинаковы. Кроме того, укротитель должен был учитывать и порядок расположения львов, а для строителя лестницы все места, где можно сделать подъем, одинаковы. Поэтому выбор у строителя лестницы меньше, чем у укротителя. Если бы лестница имела высоту 1,2 м и длину 2,5 м, то было бы 4 ступеньки и 6 мест, где их можно сделать. И ответ был бы  $C_6^4 = 15$ . А у укротителя в точно таком же случае получилось 43 200 вариантов. Это и понятно — он мог переставлять между собой 5 львов  $5! = 120$  способами и 4 тигров  $4! = 24$  способами, а всего  $120 \cdot 24 = 2880$  способами. А  $15 \cdot 2880 = 43\,200$ .

В общем виде решенная сейчас задача формулируется так.

*Сколькими способами можно расставить  $m$  нулей и  $n$  единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?*

В самом деле, каждую лестницу можно зашифровать последовательностью нулей и единиц: нуль означает место, где ломаная идет вправо, а единица — место, где она идет вверх. Например, лестница, изображенная на рис. 14, шифруется так: 10010100010010. При этом, поскольку ступенек двойной высоты на лестнице не должно быть, в последовательности не могут идти две единицы подряд.

Эта задача решается точно так же, как разобранный выше частный случай. Сначала выписываем  $m$  нулей. Для единиц получается  $m + 1$  место — два места по краям и еще  $m - 1$  мест в промежутках между нулями. На любое из этих  $m + 1$  мест можно поставить одну из  $n$  единиц. А это может быть сделано  $C_{m+1}^n$  способами.

Итак, существует  $C_{m+1}^n$  способов расставить  $m$  нулей и  $n$  единиц так, чтобы никакие две единицы не шли рядом.

*На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?*

Эта задача сводится к только что решенной. Зашифруем каждый выбор книг последовательностью нулей и единиц. Именно, каждой оставленной книге сопоставим 0, а каждой взятой — 1. В результате получится последовательность из 5 единиц и 7 нулей. При этом, так как нельзя брать стоящие рядом книги, то в полученной последовательности не должно быть двух идущих подряд единиц. Но число последовательностей из 5 единиц и 7 нулей, в которых никакие две единицы не стоят рядом, равно  $C_8^5 = 56$ .

Вообще, если на полке стоит  $n$  книг и выбираются  $k$  книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом, то это можно

сделать  $C_{n-k+1}^k$  способами. Отсюда видно, что задача разрешима лишь при  $2k \leq n + 1$ .

Общее число способов выбрать *несколько* книг из  $n$  так, чтобы выбираемые книги не стояли рядом, равно

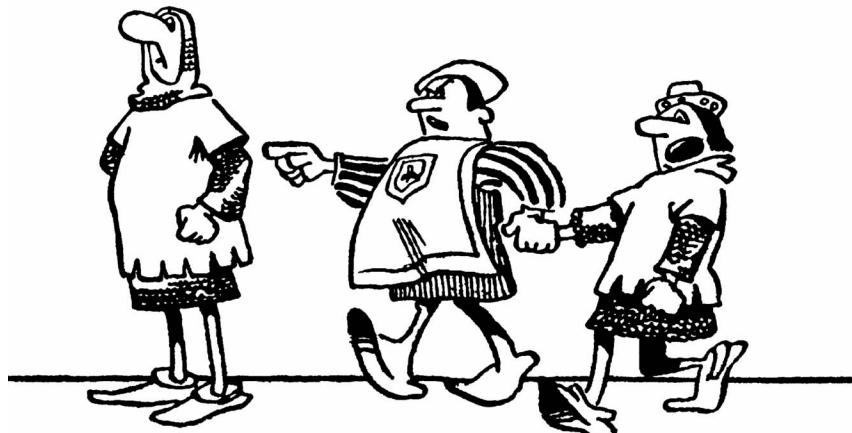
$$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$$

### 32. Рыцари короля Артура

*За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями (и только с ними). Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить заколдованную принцессу, но среди выбранных рыцарей не должно быть врагов. Сколькими способами это можно сделать?*

Эта задача похожа на задачу о книжной полке, но отличается от нее тем, что рыцари сидят не в ряд, а по кругу. Но ее легко свести к случаю, когда рыцари сидят в ряд. Для этого возьмем какого-нибудь рыцаря, скажем, сэра Ланселота. Все выбираемые комбинации рыцарей распадаются на два класса — в одних из них сэр Ланселот участвует, а в других нет. Подсчитаем, сколько комбинаций входит в каждый класс.

Если сэр Ланселот отправляется освобождать заколдованную принцессу, то ни его сосед справа, ни его сосед слева уже не примут участия в этой экспедиции. Остаются 9 рыцарей, из которых надо выбрать 4 спутников для сэра Ланселота. Так как соседи Ланселота не участвуют в экспедиции, то надо лишь проследить, чтобы среди выбранных 4 рыцарей не было врагов, т. е. чтобы никакие два из них не сидели рядом. Но исключение сэра Ланселота и его двух соседей разрывает цепь рыцарей, и можно считать, что они сидят не за круглым столом, а в один ряд. А в этом случае выбрать 4 рыцарей из



9 требуемым образом можно  $C_6^4 = 15$  способами. Итак, в первый класс входит 15 комбинаций.

Теперь подсчитаем, сколько комбинаций входит во второй класс. Так как сэр Ланселот не участвует в экспедиции, то его можно сразу исключить из числа рыцарей круглого стола. А тогда цепь рыцарей разрывается, и остаются 11 рыцарей, расположенныхных в ряд. Из них надо выбрать 5 участников экспедиции так, чтобы среди выбранных не было двух сидящих рядом. Это можно сделать  $C_7^5 = 21$  способами. Таким образом, общее число способов равно  $15 + 21 = 36$ .

Вообще, если за круглым столом сидят  $n$  рыцарей, и надо выбрать  $k$  рыцарей так, чтобы в их число не попали никакие два соседа, то это можно сделать  $C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k$  способами.

Это утверждение доказывается точно так же, как и выше. Все комбинации рыцарей разбивают на два класса в зависимости от того, участвует или нет в них рыцарь Ланселот. Комбинаций, где он участвует, будет  $C_{n-k-1}^{k-1}$ , а комбинаций, в которые он не входит,  $C_{n-k}^k$ . Легко проверяется, что

$$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k = \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1}.$$

Например, при  $n = 12$ ,  $k = 5$  получаем  $\frac{12}{7} \cdot C_7^5 = \frac{12}{7} \cdot 21 = 36$ .

### Задачи

**41.** На собрании должны выступить 5 человек: *А*, *Б*, *В*, *Г* и *Д*. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что *Б* не должен выступать до того, как выступит *А*?

А если *А* должен выступить непосредственно перед *Б*?

**42.** Сколькими способами можно переставить буквы слова «пере-шееек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

**43.** Сколькими способами можно переставить буквы слова «опос-сум» так, чтобы буква «п» шла непосредственно после буквы «о»?

**44.** Сколькими способами можно переставить буквы слова «оборо-носпособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд?

**45.** Сколькими способами можно переставить буквы слова «кара-кули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

**46.** На полке находятся  $m + n$  различных книг, из которых  $m$  в черных переплетах, а  $n$  в красных. Сколько существует перестановок этих книг, при которых книги в черных переплетах занимают первые  $m$  мест? Во скольких случаях все книги в черных переплетах стоят рядом (не обязательно первыми)?

**47.** На книжной полке стоит  $n$  книг. Сколькими способами можно выбрать из них  $k$  книг так, чтобы между любыми двумя выбранными книгами, равно как и после  $k$ -й выбранной книги, было не менее  $s$  книг?

48. На окружности отмечено  $n$  точек. Сколько существует различных многоугольников (необязательно выпуклых), вписанных в эту окружность, вершинами которых служат данные точки? А сколько выпуклых многоугольников?

49. а) Сколько существует треугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого  $n$ -угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого  $n$ -угольника?

б) Найдите число всех выпуклых  $k$ -угольников, вершинами которых служат  $k$  из  $n$  вершин выпуклого  $n$ -угольника, причем каждые две соседние вершины  $k$ -угольника должны быть разделены по меньшей мере  $s$  вершинами  $n$ -угольника.

50. Сколько можно сделать перестановок из  $n$  элементов, в которых:

- а) данные два элемента  $a$  и  $b$  не стоят рядом;
- б) данные три элемента  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не стоят рядом (в любом порядке);
- в) никакие два из данных трех элементов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не стоят рядом;
- г) никакие два из заданных  $k$  элементов  $a_1, \dots, a_k$  не стоят рядом;
- д) никакие 3 из заданных  $k$  элементов  $a_1, \dots, a_k$  не стоят рядом (в любом порядке)?

51. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв? А в слове «параллелизм»?

52. Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

53. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

54. а) Сколькими способами можно переставить буквы слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не стояли рядом?

б) А если запрещается, чтобы две буквы «о» стояли рядом?

55. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «тик-так» так, чтобы две одинаковые буквы не стояли рядом? А в слове «космос»? В слове «тартар»?

56. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр числа 1 233 145 254 так, чтобы две одинаковые цифры не стояли рядом?

57. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 1 231 234 3 так, чтобы три цифры 3 не шли друг за другом?

58. Сколькими способами можно переставить в числе 12341 234 цифры так, чтобы никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом? Решите ту же задачу для числа 12345 254.

59. Сколькими способами можно переставить цифры в числе 1 234 114 546 так, чтобы

а) три одинаковые цифры не шли друг за другом;

б) никакие две одинаковые цифры не шли друг за другом?

60. В ряд расположены  $m$  предметов. Сколькими способами можно выбрать из них три предмета так, чтобы не брать двух рядом стоящих предметов?

61. Во скольких  $n$ -значных числах ( $n \geq 3$ ), составленных из цифр 1, 2, 3, 4, хотя бы один раз встречается каждая из цифр 1, 2, 3?

62. Во скольких перестановках букв *aaaabbbb* не встречается ни один из блоков *aaaa*, *bbb*, *ee*?

### 33. Свойства сочетаний

Числа  $C_n^k$  обладают целым рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. В некоторых случаях удобнее всего прямо воспользоваться формулой (6)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Однако часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений: подсчитываем число комбинаций некоторого вида и разбиваем эти комбинации на классы без общих элементов. После этого находим, сколько комбинаций входит в каждый класс. Складывая полученные числа, снова получаем число всех комбинаций данного вида. Это и дает искомое соотношение.

**1.** Начнем с самого простого соотношения:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (10)$$

Оно сразу вытекает из формулы (6). Ведь если заменить в этой формуле  $k$  на  $n - k$ , то  $n - k$  заменится на  $n - (n - k) = k$ , и в результате множители, стоящие в знаменателе, поменяются местами. Но равенство (10) легко доказать и не прибегая к явному виду числа сочетаний. Если выбрать из  $n$  различных элементов некоторое сочетание из  $k$  элементов, то останутся невыбранными  $n - k$  элементов, которые сами образуют сочетание («дополнительное» к выбранному). Если же выбрать, наоборот, дополнительное сочетание из  $n - k$  элементов, то дополнительным к полученному сочетанию из  $n - k$  элементов будет исходное сочетание из  $k$  элементов. Таким образом, сочетания из  $k$  и из  $n - k$  элементов образуют взаимно дополнительные пары, потому число этих сочетаний одно и то же:  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

На языке теории множеств каждое сочетание — это подмножество из  $k$  элементов множества из  $n$  элементов. Элементы, не вошедшие в это подмножество, образуют подмножество из  $n - k$  элементов, которое называется *дополнительным* к подмножеству выбранных элементов. Равенство  $C_n^k = C_n^{n-k}$  выражает тот факт, что число подмножеств из  $k$  элементов совпадает с числом подмножеств из  $n - k$  элементов того же множества из  $n$  элементов.

**2.** Почти столь же просто доказывается соотношение

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \quad (11)$$

Для этого все сочетания из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  по  $k$  разобьем на два класса. В первый из них войдут сочетания, содержащие элемент  $a_1$ , а во второй — сочетания, не содержащие этого элемента. Если из любого сочетания первого класса удалить элемент  $a_1$ , то останется сочетание из  $n - 1$  элемента  $a_2, \dots, a_n$  по  $k - 1$ . Число таких сочетаний равно  $C_{n-1}^{k-1}$ . Сочетания второго класса являются сочетаниями из  $n - 1$  элемента  $a_2, \dots, a_n$  по  $k$ . Их число равно  $C_{n-1}^k$ . Поскольку любое сочетание из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  по  $k$  принадлежит одному и только одному из этих классов, а общее число этих сочетаний равно  $C_n^k$ , то приходим к равенству (11).

Формула (11) дает простой способ последовательного вычисления значений  $C_n^k$ . Сначала надо написать значение  $C_0^0 = 1$ . Это будет «нулевая» строка. В следующей, первой строке напишем значения  $C_1^0 = 1$  и  $C_1^1 = 1$  так, чтобы значение  $C_0^0$  оказалось над промежутком между этими двумя числами. Далее, мы знаем, что  $C_2^0 = C_2^2 = 1$ . Эти числа запишем во второй строке. А между ними запишем число  $C_2^1$ . Но по формуле (11)  $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$ . Значит,  $C_2^1$  равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него,  $C_2^1 = 1 + 1 = 2$ . По тому же правилу заполняем остальные строки: сначала пишем по бокам значения  $C_n^0 = C_n^n = 1$ , а все промежуточные значения вычисляем как суммы чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от вычисляемого значения. В результате получаем такой числовой треугольник:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Этот треугольник часто называют *треугольником Паскаля*. Однако еще до Паскаля (1623 – 1662) его знал итальянский математик Никколо Тарталья (1500 – 1557). А за много лет до Тарталья этот треугольник встречался в работах арабских математиков Гиясэддина и Омара Хайяма. И сам Паскаль, много им занимавшийся, называл его «арифметическим

треугольником». Поэтому и мы будем часто называть его просто арифметическим треугольником.

Тарталья был замечательным математиком. Кроме арифметического треугольника, он открыл формулу решения для кубических уравнений. Он рассказал эту формулу другому итальянскому математику Дж. Кардано (1501 – 1576), взяв с него клятву никому не открывать доверенный секрет. Но Кардано вскоре опубликовал это решение в своем учебнике алгебры, и потому формулу для решения кубических уравнений совершенно несправедливо называют «формулой Кардано».

**3.** При составлении арифметического треугольника каждое число  $(n - 1)$ -й строки участвует в образовании двух чисел следующей,  $n$ -й строки — стоящего слева и стоящего справа от него. Поэтому если сложить числа  $n$ -й строки через одно, то в полученную сумму войдут по одному разу все числа  $(n - 1)$ -й строки. Складывать числа через одно можно двумя способами — начав с первого числа строки или начав со второго числа. В обоих случаях получится одна и та же сумма, равная сумме чисел в  $(n - 1)$ -й строке.

Доказанное свойство арифметического треугольника можно записать так:

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots &= C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = \\ &= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из него следует, что сумма чисел  $n$ -й строки вдвое больше суммы чисел  $(n - 1)$ -й строки. Иными словами, при переходе к следующей строке арифметического треугольника сумма чисел в строке удваивается. Но в нулевой строке стоит только одно число 1, для нее сумма равна  $1 = 2^0$ . Поэтому в  $n$ -й строке сумма чисел равна  $2^n$ :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (13)$$

Это соотношение можно доказать и не рассматривая сочетания из меньшего числа элементов. Возьмем исходное множество из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Чтобы задать какое-либо сочетание из этих элементов, надо для каждого элемента  $a_i$  сделать выбор: брать его в сочетание (обозначим этот вариант цифрой 1) или не брать (обозначим это цифрой 0). Поэтому каждое сочетание задается последовательностью  $n$  цифр, каждая из которых может принимать значение 0 или 1, причем число единиц определяет, сколько элементов будет в сочетании. Например, 10...0 определяет сочетание из одного элемента  $a_1$ , а 011...1 — сочетание из элементов  $a_2, \dots, a_n$ .

Количество всех таких последовательностей равно  $2^n$  (это  $\bar{A}_2^n$ ), т. е. правая часть (13). А левая часть (13) получится, если разбить все последовательности на группы, содержащие одинаковые количества единиц. Последовательность из одних нулей задает «пустое» сочетание — выбрано 0 элементов из  $n$ , их число  $C_n^0$ ; последовательности с одной единицей — сочетания из  $n$  элементов по 1, их число  $C_n^1$ ; ...; со всеми  $n$  единицами — сочетания из  $n$  элементов по  $n$ , их число  $C_n^n$ . В сумме опять получается количество всех возможных сочетаний.

То, что мы проделали, можно сказать иначе. Мы взяли все размещения с повторениями из двух элементов (1 и 0) по  $n$ . Затем мы разбили эти размещения на классы, отнеся в  $k$ -й класс те, в которые входят  $k$  элементов первого типа (единица) и  $n - k$  элементов второго типа (ноль). Размещения  $k$ -го класса — это не что иное, как всевозможные перестановки с повторениями из  $k$  элементов первого типа и  $n - k$  элементов второго типа. Мы знаем, что число таких перестановок равно  $P(k, n - k)$ , а  $P(k, n - k) = C_n^k$  (см. п. 23). Значит, мы доказали, что

$$P(0, n) + P(1, n - 1) + \dots + P(n, 0) = 2^n,$$

поскольку каждый из  $n$  элементов войдет или в 1-ю группу (единица — выбран), или во 2-ю (ноль — не выбран).

Совершенно так же доказывается, что

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} P(n_1, n_2, n_3) = 3^n,$$

где сумма распространена на все разбиения числа  $n$  на три слагаемых, причем учитывается и порядок слагаемых, т. е. в сумму входят, например, и  $P(n_1, n_2, n_3)$ , и  $P(n_2, n_3, n_1)$ . Для доказательства надо рассмотреть все размещения с повторениями из трех элементов по  $n$  и разбить их на классы одного и того же состава (т. е. брать размещения с одним и тем же числом элементов первого типа, второго типа и третьего типа) — это даст левую часть формулы, а правая — число всех размещений с повторениями из трех элементов по  $n$ .

Вообще, имеет место равенство

$$\sum_{n_1+\dots+n_k=n} P(n_1, \dots, n_k) = k^n, \quad (14)$$

где сумма распространена на все разбиения числа  $n$  на  $k$  слагаемых (с учетом порядка слагаемых).

**4.** Рассмотрим сочетания без повторений из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и расклассифицируем их по числу входящих в сочетание элементов. Если в сочетание входит  $k$  элементов, то

таких сочетаний  $C_n^k$  и в них входит  $k \cdot C_n^k$  элементов. Всего во всех сочетаниях будет  $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n$  элементов. С другой стороны, если элемент  $a_i$  входит в некоторое сочетание, то остальные входящие в это сочетание элементы образуют сочетание из  $n - 1$  элемента. Всего таких сочетаний  $2^{n-1}$  (для каждого из других  $n - 1$  элементов надо сделать выбор: брать его в сочетание или нет). Поэтому всего во всех сочетаниях будет  $n \cdot 2^{n-1}$  элементов. Получается равенство

$$0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

5. А теперь рассмотрим сочетаниями с *повторениями*, составленные из элементов  $n + 1$  типов по  $m$ , скажем из  $n + 1$  букв  $a, b, c, \dots, x$ . Число таких сочетаний равно  $\bar{C}_{n+1}^m = C_{n+m}^m$ . Разобьем все эти сочетания на классы, отнеся к  $k$ -му классу сочетания, в которые  $k$  раз входит буква  $a$ . Остальные  $m - k$  мест могут быть заняты оставшимися буквами  $b, c, \dots, x$ , число которых равно  $n$ . Поэтому в  $k$ -й класс входит столько сочетаний, сколько можно составить сочетаний с повторениями из элементов  $n$  типов по  $m - k$ , т. е.  $C_{n+m-k-1}^{m-k}$ . Значит, общее число всех сочетаний равно

$$C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^{m-1} + \dots + C_n^1 + C_{n-1}^0.$$

С другой стороны, мы видели, что это число равно  $C_{n+m}^m$ . Таким образом, доказано равенство

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-2}^{m-1} + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m. \quad (15)$$

Заменяя здесь  $n$  на  $n + 1$ ,  $m$  на  $m - 1$  и используя равенство (10), получаем, что

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+m-2}^n + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}. \quad (16)$$

Частными случаями формулы (16) при  $n = 1, 2, 3$  являются

$$1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}, \quad (17)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + m(m+1)(m+2) = \\ = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}. \end{aligned} \quad (19)$$

С помощью формул (17) – (19) легко найти сумму квадратов и сумму кубов натуральных чисел от 1 до  $m$ . Формулу (18) можно переписать так:

$$(1^2 + 2^2 + \dots + m^2) + (1 + 2 + \dots + m) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Слева вторая сумма вычислена в формуле (17) и потому

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \\ = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \end{aligned} \quad (20)$$

Точно так же из формулы (19) выводим, что

$$1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}. \quad (21)$$

Предоставляем читателю получить аналогичным образом формулы для сумм более высоких степеней натуральных чисел.

**6.** Некоторые формулы очевидным образом получаются из комбинаторных соображений. Посмотрим, например, на формулу

$$C_p^0 C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + \dots + C_p^k C_{n-p}^{m-k} + \dots + C_p^m C_{n-p}^0 = C_n^m. \quad (22)$$

Понятно, что речь идет о всех сочетаниях без повторений из  $n$  элементов по  $m$ . Каждое такое сочетание выбирается в два этапа: сначала берется некоторое число элементов из каких-то  $p$  элементов, а потом недостающие берутся из остальных  $n-p$  элементов. Значит, все  $n$  элементов, назовем их буквами, делим на  $p$  «гласных» и  $n-p$  «согласных». Сочетания классифицируем по количеству входящих в них гласных букв. Каждое сочетание из  $n$  букв по  $m$  содержит некоторое число  $k$  гласных ( $0 \leq k \leq m$ ), их можно выбрать  $C_p^k$  способами. Для каждого такого способа есть  $C_{n-p}^{m-k}$  способов выбрать недостающие  $m-k$  согласные, всего  $C_p^k \cdot C_{n-p}^{m-k}$  способов. В сумме по всем  $k$  получаются все сочетания без повторений из  $n$  элементов по  $m$ .

Отметим частный случай формулы (22). Если положить в ней  $n = m + p$  и воспользоваться равенством (10), то получим

$$C_p^0 C_m^0 + C_p^1 C_m^1 + \dots + C_p^m C_m^m = C_{p+m}^m. \quad (23)$$

В частности, при  $p = m$  имеем равенство

$$\left(\binom{0}{p}\right)^2 + \left(\binom{1}{p}\right)^2 + \dots + \left(\binom{p}{p}\right)^2 = \binom{p}{2p}. \quad (24)$$

7. В формуле (22) в каждом слагаемом сумма верхних индексов равна  $m$ , а нижних  $n$ . При этом нижние индексы постоянны, а верхние меняются. Сейчас мы выведем аналогичную формулу, в которой при суммировании меняются нижние индексы, а верхние постоянны.

Для этого снова возьмем  $p$  различных гласных букв и  $n - p$  различных согласных букв и составим из них всевозможные сочетания с повторениями по  $m$  элементов. Опять разобьем эти сочетания на классы, отнеся к  $k$ -му классу сочетания, содержащие  $k$  гласных и  $m - k$  согласных букв. Подсчитаем число сочетаний, входящих в  $k$ -й класс.

Каждое сочетание этого класса содержит сочетание с повторениями по  $k$  элементов из  $p$  гласных букв и сочетание с повторениями по  $m - k$  элементов из  $n - p$  согласных букв. Поэтому в  $k$ -й класс входит  $\binom{k}{k+p-1} \binom{m-k}{m+n-p-k-1}$  сочетаний. Следовательно, общее число рассматриваемых сочетаний равно

$$\binom{0}{p-1} \binom{m}{m+n-p-1} + \binom{1}{p} \binom{m-1}{m+n-p-2} + \dots + \binom{m}{m+p-1} \binom{0}{n-p-1}.$$

С другой стороны, эти сочетания дают всевозможные сочетания с повторениями из элементов  $n$  различных типов по  $m$ , а потому их число равно  $\binom{m}{n} = \binom{m}{m+n-1}$ . Мы приходим к тождеству

$$\binom{0}{p-1} \binom{m}{m+n-p-1} + \binom{1}{p} \binom{m-1}{m+n-p-2} + \dots + \binom{m}{m+p-1} \binom{0}{n-p-1} = \binom{m}{m+n-1}. \quad (25)$$

Перепишем это тождество так, чтобы при суммировании менялись лишь нижние индексы. Для этого надо ко всем членам применить тождество  $\binom{q}{r} = \binom{r-q}{r}$ . Мы получим

$$\binom{p-1}{p-1} \binom{n-p-1}{m+n-p-1} + \binom{p-1}{p} \binom{n-p-1}{m+n-p-2} + \dots + \binom{p-1}{m+p-1} \binom{n-p-1}{n-p-1} = \binom{n-1}{m+n-1}. \quad (26)$$

Эту формулу можно иначе переписать следующим образом (заменив  $p$  на  $p + 1$ ,  $n$  на  $n + 2$  и  $m$  на  $m - n$ ):

$$\binom{p}{p} \binom{n-p}{m-p} + \binom{p}{p+1} \binom{n-p}{m-p-1} + \dots + \binom{p}{m-n+p} \binom{n-p}{n-p} = \binom{n+1}{m+1}. \quad (27)$$

Мы видим, что здесь при суммировании верхние индексы остаются постоянными, а нижние меняются, причем сумма верхних индексов равна  $n$ , а нижних  $m$ .

Полученные тождества можно обобщить. Для этого рассмотрим совокупность, состоящую из элементов  $q$  типов:  $n_1$  элементов первого типа,  $n_2$  элементов второго типа, ...,  $n_q$  элементов  $q$ -го типа, причем элементы одного типа отличны друг от друга (например, тип — это цвет предмета, но разные предметы одного цвета имеют еще различную форму). Будем составлять из элементов этой совокупности все возможные сочетания без повторений по  $m$  элементов и классифицировать их по составу, т. е. по числу элементов первого, второго, ...,  $q$ -го типов. Таким образом, каждый класс характеризуется набором натуральных чисел  $(m_1, m_2, \dots, m_q)$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq m_i \leq n_i$ , причем  $m_1 + m_2 + \dots + m_q = m$ . Он состоит из  $m_1$  элементов первого типа,  $m_2$  элементов второго типа, ...,  $m_q$  элементов  $q$ -го типа. Мы будем обозначать такой класс  $A(m_1, \dots, m_q)$ .

Из правила произведения вытекает, что в класс  $A(m_1, \dots, m_q)$  входит  $C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q}$  сочетаний. Суммируя числа сочетаний по всем классам, получаем тождество

$$\sum_{m_1+m_2+\dots+m_q=m} C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_q}^{m_q} = C_n^m, \quad (28)$$

где  $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$ , а суммирование распространено на все возможные наборы натуральных чисел  $(m_1, m_2, \dots, m_q)$ , удовлетворяющие условию  $m_1 + m_2 + \dots + m_q = m$ .

Если брать сочетания с повторениями, то получаем аналогичное тождество

$$\sum_{m_1+m_2+\dots+m_q=m} C_{n_1+m_1-1}^{m_1} C_{n_2+m_2-1}^{m_2} \dots C_{n_q+m_q-1}^{m_q} = C_{n+m-1}^m, \quad (29)$$

где также  $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$ , а суммирование ведется по тем же комбинациям чисел  $(m_1, m_2, \dots, m_q)$ .

**8.** Еще одно свойство сочетаний устанавливается так. Мы имеем тождество

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m. \quad (30)$$

Это тождество легко проверяется непосредственно, но можно провести и комбинаторное рассуждение. Для этого рассмотрим следующую задачу. Сколькими способами можно из  $n$  различных элементов выбрать пару сочетаний: первое — содержащее  $k$  элементов, а второе — содержащее  $m - k$  (других) элементов. Выбирать можно сначала  $k$  элементов из  $n$ , а затем  $m - k$  из оставшихся  $n - k$  элементов, получится левая часть формулы (30). А можно сначала выбрать  $m$  элементов из  $n$ , а затем среди этих  $m$  элементов выбрать  $k$  в первое

сочетание, оставшиеся дадут второе сочетание, содержащее  $m - k$  элементов, получится правая часть формулы (30).

Запишем тождество (30) при  $k = 0, 1, \dots, m$  и сложим получившиеся равенства. Так как по формуле (13)

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m = 2^m,$$

то получаем, что  $C_n^0 C_n^m + C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_n^m C_{n-m}^0 = 2^m C_n^m$ , или

$$C_n^0 C_n^{n-m} + C_n^1 C_{n-1}^{n-m} + \dots + C_n^m C_{n-m}^{n-m} = 2^m C_n^m.$$

### Задачи

63. Докажите, что  $(C_{n+1}^{r+1} - C_n^r) C_{n-1}^{r-1} = r \left[ (C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1} \right]$ .

64. Докажите, что

а)  $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$ ; б)  $1 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n + 1)^3$ ;

в)  $C_n^1 + 14C_n^2 + 36C_n^3 + 24C_n^4 = n^4$ ;

г)  $1 + 14C_n^1 + 36C_n^2 + 24C_n^3 = (n + 1)^4 - n^4$ .

65. Докажите тождество

$$\frac{1}{[(n-1)!]^2} + \frac{1}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{[(n-2)!]^2} + \frac{1}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{[(n-3)!]^2} + \dots = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)! \cdot n!]^2}.$$

66. Докажите, что

$$\frac{(n+r-1)!}{r!} - \frac{n}{1} \cdot \frac{(n+r-3)!}{(r-2)!} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+r-5)!}{(r-4)!} - \dots = \frac{n!(n-1)!}{r!(n-r)!}.$$

67. Докажите тождество

$$C_{n+m}^m = \sum P(k_1, k_2, \dots, k_m, n - k_1 - \dots - k_m + 1),$$

где суммирование распространено на все целые неотрицательные решения уравнения  $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$ .

68. Используя формулу

$$a + b + \dots + x + y = \frac{(a + b + \dots + x + y) + (y + x + \dots + b + a)}{2},$$

вычислите следующие суммы:

а)  $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots + nC_n^n$ ;

б)  $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \dots + (n+1)C_n^n$ ;

в)  $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + 4C_n^5 + \dots + (n-1)C_n^n$ ;

г)  $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + 7C_n^3 + \dots + (2n+1)C_n^n$ ;

д)  $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - 4C_n^3 + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n$ ;

- е)  $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \dots + (4n - 1)C_n^n;$   
 ж)  $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + (-1)^n nC_n^n;$   
 з)  $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n;$   
 и)  $\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \frac{1}{5}C_n^3 + \dots + \frac{1}{n+2}C_n^n;$   
 к)  $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n;$   
 л)  $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - (C_n^3)^2 + \dots + (-1)^n (C_n^n)^2.$

69. Первая строка числового треугольника

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & . & . \\ 1 & 3 & 5 & \dots & . & . & 3915 \\ & & & & \dots & \dots & \end{array}$$

состоит из чисел 0, 1, ..., 1958. Элементы каждой следующей строки являются суммами элементов предыдущей строки, стоящих слева и справа от данного числа. Докажите, что элемент последней строки треугольника делится на 1958.

### 34. Частный случай формулы включений и исключений

Многие свойства сочетаний выводятся на основе формулы включений и исключений (см. п. 13). Число слагаемых в этой формуле весьма велико — оно равно  $2^n$ . Но в некоторых случаях удается получить ответ с меньшим числом слагаемых. Это будет в случаях, когда число  $N(a_1 \dots a_n)$  элементов, обладающих свойствами  $a_1, \dots, a_n$ , зависит не от самих этих свойств, а лишь от количества одновременно выполняемых свойств, т. е.

$$N = N_0 \text{ (число всех элементов),}$$

$$N(a_1) = N(a_2) = \dots = N(a_n) = N_1,$$

$$N(a_1a_2) = N(a_1a_3) = \dots = N(a_1a_k) = N(a_2a_3) = \dots = N(a_{n-1}a_n) = N_2,$$

$$N(a_1a_2a_3) = N(a_1a_2a_4) = \dots = N(a_{n-2}a_{n-1}a_n) = N_3,$$

...  
...

$$N(a_1a_2a_3\dots a_n) = N_n.$$

Будем считать верхнюю строчку (с  $N_0$ ) нулевой, тогда в первой строке элементов типа  $N(a_i)$  будет  $C_n^1$ , поэтому  $N(a_1) + N(a_2) + \dots + N(a_n) = C_n^1 N_1$ .

Точно так же во второй строке элементов типа  $N(a_i a_j)$  будет  $C_n^2$ , поэтому  $N(a_1 a_2) + \dots + N(a_{n-1} a_n) = C_n^2 N_2$  (сумма распространена, естественно, на все возможные сочетания двух свойств из  $n$ ), в третьей строке сумма будет  $C_n^3 N_3$ , ..., в последней  $C_n^n N_n$ . Поэтому в рассматриваемом случае формула включений и исключений принимает вид

$$N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n) = N_0 - C_n^1 N_1 + C_n^2 N_2 - \dots + (-1)^n C_n^n N_n. \quad (31)$$

### 35. Знакопеременные суммы сочетаний

А теперь перейдем к выводу дальнейших свойств сочетаний. Эти свойства похожи на доказанные ранее, но отличаются от них тем, что знаки слагаемых меняются — после плюса идет минус, потом опять плюс и т. д.

Простейшей из таких формул является

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (32)$$

Это тождество сразу вытекает из равенства (12) — сумма сочетаний по четному числу элементов равна сумме сочетаний по нечетному числу элементов.

Эту формулу можно доказать комбинаторно. Выпишем все сочетания из  $n$  элементов  $a_1, \dots, a_n$  и сделаем следующее преобразование: к сочетанию, не содержащему букву  $a_1$ , припишем эту букву, а из сочетаний, куда она входит, вычеркнем ее. Легко проверить, что при этом снова получатся все сочетания и притом по одному разу. Но при этом преобразовании все сочетания, имевшие четное число элементов, превратятся в сочетания, имеющие нечетное число элементов, и обратно. Значит, сочетаний с четным числом элементов столько же, сколько и с нечетным числом (мы включаем в рассмотрение и пустое сочетание, совсем не содержащее элементов). Это и выражается формулой (32).

Докажем при  $m > 0$  более сложную формулу

$$C_n^0 C_n^m - C_n^1 C_{n-1}^{m-1} + C_n^2 C_{n-2}^{m-2} - \dots + (-1)^m C_n^m C_{n-m}^0 = 0. \quad (33)$$

Для доказательства рассмотрим сочетания из  $n$  элементов  $a_1, \dots, a_n$  по  $m$ . Обозначим через  $\langle a_1 \dots a_k \rangle$  свойство сочетания, заключающееся в том, что в это сочетание заведомо входят элементы  $a_1, \dots, a_k$ . Число  $N(a_1 \dots a_k)$  таких сочетаний равно  $C_{n-k}^{m-k}$  (в них  $k$  мест заняты элементами  $a_1, \dots, a_k$ , а на оставшиеся  $m-k$  мест есть  $n-k$  претендентов). Общее число

сочетаний равно  $C_n^m$  (это  $N_0$ , оно получается при  $k=0$ ), а сочетаний, не обладающих ни одним из свойств  $\langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle$ , при  $m > 0$  не существует (в каждое сочетание входят какие-то элементы). Поэтому в нашем случае  $N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n) = 0$ ,  $N_k = C_{n-k}^{m-k}$ . Подставляя эти значения в формулу (31), приходим к тождеству (33).

Точно так же доказываются соотношения

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + C_n^2 C_{n+m-3}^{m-2} - \dots + (-1)^n C_n^n C_{m-1}^{m-n} = 0, \quad (34a)$$

если  $m \geq n$ ;

$$C_n^0 C_{n+m-1}^m - C_n^1 C_{n+m-2}^{m-1} + C_n^2 C_{n+m-3}^{m-2} - \dots + (-1)^m C_n^m C_{n-1}^0 = 0, \quad (34b)$$

если  $m < n$ .

Именно, рассмотрим сочетания с повторениями из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  по  $m$  и обозначим через  $\langle a_k \rangle$ ,  $1 \leq k \leq n$ , свойство сочетания, заключающееся в том, что среди его элементов есть  $a_k$  (и, быть может, другие элементы). Тогда  $N(a_1 \dots a_k)$  — число сочетаний, в которые заведомо входят элементы  $a_1, \dots, a_k$ .

Из каждого такого сочетания можно удалить по одному элементу  $a_1, \dots, a_k$ . В результате получится некоторое сочетание с повторениями из  $n$  элементов  $a_1, \dots, a_n$  по  $m-k$ . При этом, обратно, добавляя к сочетанию с повторениями из элементов  $a_1, \dots, a_n$ , содержащему  $m-k$  элементов, по одному элементу  $a_1, \dots, a_k$ , получим сочетание, содержащее  $m$  элементов, в котором заведомо представлены  $a_1, \dots, a_k$ . Отсюда вытекает, что число  $N(a_1 \dots a_k)$  равно числу сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $m-k$ , т. е.  $N(a_1 \dots a_k) = C_{n+m-k-1}^{m-k}$ .

Далее, общее число сочетаний с повторениями из  $n$  элементов  $a_1, \dots, a_n$  по  $m$  равно  $C_{n+m-1}^m$  (это  $N_0$ ), а сочетаний, не обладающих ни одним из свойств  $\langle a_k \rangle$ ,  $1 \leq k \leq n$ , не существует. Подставляя найденные значения  $N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \bar{a}_n) = 0$ ,  $N_k = C_{n+m-k-1}^{m-k}$  в формулу (31), приходим к тождествам (34).

Наконец, докажем при  $m < n$  тождество

$$C_n^1 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m = 0. \quad (35)$$

Для этого рассмотрим размещения с повторениями из  $n$  элементов по  $m$  и обозначим через  $\langle \bar{a}_k \rangle$  свойство размещения, состоящее в том, что в него не входят элементы типа  $a_k$ . Тогда  $N(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k)$  — число размещений с повторениями, содержащих  $m$  элементов, среди которых нет элементов  $a_1, \dots, a_k$ , т. е. выбирать приходится лишь из  $n-k$  элементов  $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ . А число таких размещений равно  $(n-k)^m$ , так что  $N(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k) = (n-k)^m$ . Общее число размещений равно  $n^m$ .

Наконец, размещений, не обладающих ни одним из свойств  $\langle \bar{a}_1 \rangle, \dots, \langle \bar{a}_n \rangle$ , не существует. В самом деле, если размещение не обладает ни одним из свойств  $\langle \bar{a}_k \rangle$ , то оно содержит все  $n$  элементов. Но мы предполагаем, что число  $m$  элементов в размещении меньше, чем  $n$ . Поэтому  $N(\bar{\bar{a}}_1 \dots \bar{\bar{a}}_n) = 0$ , и мы приходим к тождеству (35).

Мы доказали здесь целый ряд соотношений для чисел  $C_n^k$ . Их можно доказать и другими способами. В п. 84 мы расскажем о геометрическом способе доказательства таких соотношений, а в главе VIII изложим самый сильный метод доказательства — метод производящих функций. Этим методом можно доказать не только все соотношения, приведенные в этой главе, но и целый ряд других интересных соотношений.

### Задачи

**70.** В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть по движению поезда, трое — против движения, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

**71.** Имеется  $n$  абонентов телефонной сети. Сколькими способами можно одновременно соединить три пары абонентов?

**72.** На танцы пришла компания из 7 юношей и 10 девушек.

а) Сколько имеется вариантов участия девушек в танце, в котором танцуют все юноши?

б) Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались неприглашенными?

в) Ответьте на те же вопросы, если относительно двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец.

**73.** На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

**74.** Во скольких шестизначных числах есть 3 четные и 3 нечетные цифры, если допускаются и «шестизначные» числа, начинающиеся с нуля? А если не допускаются?

**75.** Во скольких десятизначных числах сумма цифр равна 3 (первая цифра предполагается отличной от 0)? А если берутся не десятизначные числа, а все числа от 1 до 9 999 999 999 включительного?

**76.** Сколько чисел от 0 до 999 содержит цифру 9?

Сколько чисел содержит ее дважды?

Сколько чисел содержит цифру 0?

Сколько чисел содержит 0 дважды?

Сколько чисел содержит цифры 0 и 9? А цифры 8 и 9?

**77.** У Паши 7 друзей. В течение недели он приглашает их к себе по 3 обедать, причем компании не повторяются. Сколько способами он может составить расписание обедов так, чтобы:

а) никакие два друга не встретились у него более одного раза;

б) никто не остался неприглашенным;

в) ни один из друзей не посещал его каждый день?

**78.** Берутся кости «обобщенного» домино от 0 | 0 до  $n | n$ . Докажите, что число костей с суммой очков  $n - r$  равно числу костей с суммой очков  $n + r$ . Найдите общее число всех костей такого домино.

**79.** Сколько способами можно выбрать из 15 человек группу людей для работы, если в группу могут входить от 1 до 15 человек?

А если группа должна состоять не менее чем из 5 человек?

А если число людей  $n$ , а наименьшее число людей в группе  $r$ ?

**80.** Сколько способами можно выбрать 12 человек из 17, если среди них есть двое, которых нельзя выбирать вместе?

Сколько способами можно выбрать  $m$  человек из  $n$  так, чтобы данные  $r$  человек не были выбраны вместе?

**81.** У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин, а у жены — 7 женщин и 5 мужчин (иные, чем у мужа). Сколько способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

**82.** На каждом борту лодки у весел должны сидеть по 4 человека. Сколько способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?

**83.** В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Из нее вынимают 3 жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел будет равна 9? Не меньше 9?

**84.** Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь лишь цифрами 1, 2, 3, при дополнительном условии, что цифра 3 используется в каждом числе ровно два раза? Сколько из написанных чисел делится на 9?

**85.** Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду в составе 5 человек. Сколько способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более 3 юношей?

**86.** Имеется 4 белых шара, 3 синих и 3 красных. Сколько способами можно выложить из них ряд из  $n$  шаров, если  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ?

**87.** Сколькими способами можно извлечь из колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы:

- они были одной масти и шли подряд (например, туз, двойка, тройка, четверка, пятерка или десятка, валет, дама, король, туз);
- они были одной масти;
- они шли подряд (например, туз, двойка, тройка, четверка, пятерка или десятка, валет, дама, король, туз)?

**88.** а) Сколько можно составить пятибуквенных слов из 7 гласных и 25 согласных букв (буквы могут повторяться), если гласные и согласные буквы должны чередоваться?

б) Сколько из этих слов начинаются гласной буквой и сколько согласной?

в) Решите те же задачи, если ни одна буква не повторяется дважды.

**89.** Оргкомитет олимпиады состоит из 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена оргкомитета, чтобы доступ в сейф был возможен, когда соберутся любые 6 членов оргкомитета, и не был возможен, если соберутся меньше 6 членов?

**90.** а) Сколькими различными способами можно выбрать несколько букв из фразы «Око за око, зуб за зуб»? Порядок букв не учитывается.

б) Сколькими способами можно выбрать из той же фразы три буквы?

в) Сколькими способами можно выбрать из этой фразы три буквы, если учитывать порядок выбранных букв?

**91.** На плоскости даны 5 точек, причем среди прямых, соединяющих эти точки, нет параллельных, перпендикулярных или совпадающих. Проводим через каждую из 5 точек перпендикуляры ко всем прямым, которые можно построить, соединяя другие точки. Каково максимальное число точек пересечения между собой этих перпендикуляров, не считая данные 5 точек?

**92.** Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестерку для запряжки так, чтобы в нее вошли 3 лошади из шестерки  $ABC'A'B'C'$ , но не вошла ни одна из пар  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ?

**93.** Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слово, в которое входят 4 различных согласных и 3 различных гласных?

Во скольких из этих слов никакие две согласные не стоят рядом?

**94.** Найдите количество шестизначных чисел, таких, что сумма трехзначного числа, образованного первыми тремя цифрами, и трехзначного числа, образованного последними тремя цифрами, меньше 1000.

**95.** Сколькими способами можно переставить буквы слова «кофеварка» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались? А в слове «самовар»?

**96.** Сколькими способами можно выбрать 4 буквы из слова «тартар», если не учитывать порядка выбираемых букв? Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 123?

**97.** Сколько неотрицательных целых чисел, меньших 1 000 000, содержат все цифры 1, 2, 3, 4?

Сколько чисел состоит только из этих цифр?

**98.** Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

**99.** Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву?

А если среди выбранных букв должна быть буква «ф»?

**100.** Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

**101.** Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Абакан» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке? То же самое при дополнительном условии, что две буквы «а» не идут подряд.

**102.** Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной? А четной?

**103.** Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?

**104.** Из колоды в 52 карты двое выбирают по 4 карты каждый. Сколько возможно различных выборов? Во скольких случаях один из них получит четыре туза, а другой — четыре короля?

**105.** Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 123 153?

**106.** Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр числа 12 335 233?

**107.** Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют группу в 12 человек по двум предметам (каждый по своему). Каждый экзаменующийся отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами могут экзаменаторы распределить между собой работу с учетом того, что экзаменующийся не может отвечать сразу по двум предметам?

**108.** Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар перчаток по правой и левой перчатке так, чтобы ни один не получил пары? Решите ту же задачу для 6 человек и 9 пар перчаток.

**109.** Клетки шахматной доски раскрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в каждом вертикальном ряду не встречаются подряд две клетки одного цвета. Сколькими способами возможна такая раскраска?

**110.** Даны шесть цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдите сумму всех четырехзначных четных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра может повторяться).

**111.** Найдите количество и сумму всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр от 1 до 6 и которые делятся на 3, если цифры а) можно повторять; б) повторять нельзя.

**112. а)** Докажите, что число способов разместить в ряд некоторое количество из  $m$  белых и  $n$  черных шаров (пустое размещение отбрасывается), равно  $P(m + 1, n + 1) - 2$ .

**б)** Докажите, что общее число белых шаров в этих размещениях равно  $\frac{mn + m - 1}{n + 2} P(m + 1, n + 1) + 1$ .

Проверьте ответ задачи на слове «Гаага».

**113.** Докажите, что разместить в ряд некоторое количество из  $m$  белых,  $n$  черных и одного красного шара с обязательным участием красного шара можно  $\frac{mn + m + n}{m + n + 4} P(m + 2, n + 2) + 1$  способами, а без

этого условия —  $\frac{(m + 1)(n + 1)}{m + n + 3} P(m + 2, n + 2) - 1$  способами (пустое размещение отброшено). Проверьте ответ на слове «окорок».

**114.** На плоскости проведено  $n$  прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Сколько получилось треугольников со сторонами на этих прямых?

**115.** На плоскости задано  $n$  точек, из которых  $p$  лежат на одной прямой, а кроме них никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

**116.** а) На прямой взяты  $p$  точек, а на параллельной ей прямой еще  $q$  точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

б) Пусть при том же условии на еще одной параллельной прямой взяты  $r$  точек, причем никакие три точки не лежат на прямой, пересекающей все три параллельные прямые. Сколько получится дополнительных треугольников?

**117.** Каждая сторона квадрата разбита на  $n$  частей. Сколько можно построить треугольников с вершинами в точках деления?

**118.** На плоскости проведено  $n$  прямых линий, из которых  $p$  проходят через точку  $A$  и  $q$  — через точку  $B$ , а кроме них никакие три прямые не проходят через одну точку, никакая прямая не проходит через точки  $A$  и  $B$  одновременно и никакие две прямые не параллельны. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

**119.** На плоскости даны три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведены пучки соответственно из  $m$ ,  $n$ ,  $p$  прямых, при этом никакие три прямые не из одного пучка не пересекаются в одной точке, и никакие две не параллельны. Найдите наибольшее возможное число треугольников, вершины которых являются точками пересечения этих прямых и не совпадают с заданными точками  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**120.** На плоскости дано 10 попарно пересекающихся прямых, причем никакие три прямые не проходят через одну точку и никакие четыре не касаются одной и той же окружности. Сколько можно построить окружностей, каждая из которых касается трех прямых из числа заданных 10?

**121.** На прямой  $a$  взято  $p$  точек, а на параллельной ей прямой  $b$  взято  $q$  точек. Через каждую пару выбранных точек, лежащих на разных прямых, проводят прямую линию, причем никакие три из проведенных прямых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Найдите число точек пересечения проведенных прямых. Сколько из них лежат между заданными прямыми? (Точки на заданных прямых не учитываются.)

**122.** Даны  $n$  точек на плоскости, никакие 4 из которых не лежат на одной окружности. Через каждые три точки проводят окружность. Каково наибольшее число точек пересечения этих окружностей (в предположении, что каждая пара окружностей пересекается)?

**123.** Даны  $n$  точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой и никакие 4 — на одной окружности. Через каждые две точки проводится прямая, а через каждые 3 — окружность.

Найдите наибольшее число точек пересечения проведенных прямых с окружностями (в предположении, что каждая пара прямая—окружность имеет две точки пересечения).

**124.** В пространстве даны  $n$  точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Через каждые три точки проводится плоскость, причем никакие две из этих плоскостей не параллельны друг другу. Найдите максимальное число прямых, получающихся при пересечении этих плоскостей.

**125.** В пространстве дано  $n$  точек, из которых  $m$  лежат в одной плоскости, а остальные расположены так, что больше никакие четыре точки не лежат в одной плоскости. Сколько можно провести плоскостей, каждая из которых содержит по три из заданных точек?

**126.** На плоскости проведено  $n$  прямых, из которых  $p$  касаются данной окружности, а кроме них никакие четыре прямые не касаются одной и той же окружности. Сколько можно провести окружностей, касающихся трех из заданных прямых?

**127.** На плоскости проведено  $n$  прямых, и на каждой из них взято по  $r$  точек так, что ни одна из них не является точкой пересечения прямых и никакие три не лежат на одной прямой, отличной от заданных. Найдите число треугольников с вершинами в этих точках.

**128.** На плоскости проведено  $m$  параллельных прямых и  $n$  прямых, не параллельных ни между собой, ни ранее проведенным прямым. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. На сколько частей делится плоскость этими прямыми?

**129.** Даны 11 точек, из которых пять лежат на одной окружности. Кроме этих пяти точек никакие четыре не лежат на одной окружности. Сколько окружностей можно провести так, чтобы каждая из них содержала по крайней мере три точки из числа заданных?

**130.** Параллелограмм пересекается двумя рядами прямых, параллельных его сторонам; каждый ряд состоит из  $n$  линий. Сколько параллелограммов можно обнаружить в получившемся чертеже?

**131.** а) Сколькими способами можно составить треугольники, стороны которых являются целыми числами, большими  $n$ , но не большими  $2n$ ? Сколько среди этих треугольников равнобедренных и сколько равносторонних?

б) Докажите, что число целочисленных треугольников, длины сторон которых не превосходят  $2n$ , равно  $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ .

Если же исключить равнобедренные треугольники, то останется  $\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}$  треугольников.

в) Докажите, что существует  $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$  целочисленных треугольников, длины сторон которых не превосходят  $2n-1$ , из них  $\frac{(n-1)(n-2)(4n-3)}{6}$  не являются равнобедренными.

**132.** Из  $n$  отрезков длины 1, 2, ...,  $n$  выбирают 4 (разных) так, чтобы они были длинами сторон описанного четырехугольника.

Докажите, что это можно сделать  $\frac{2n(n-2)(2n-5)-3+(-1)^n\cdot 3}{48}$  способами.

Сколько получится четырехугольников, если можно брать стороны одинаковой длины?

**133.** Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых — целые числа от 1 до  $n$ ?

**134.** Сколькими способами можно вынуть 4 карты из полной колоды в 52 карты так, чтобы получилось три масти? А две масти?

**135.** Числа, выражающие количество участников математической олимпиады из 6, 7, 8, 9, 10 и 11 классов, образуют арифметическую прогрессию. Число заготовленных премий для каждого класса одинаково и равно разности этой прогрессии. Докажите, что число способов вручения премий не изменится, если все премии отдать ученикам 11 класса (предполагается, что все премии различны).

**136.** Сколько шестизначных чисел содержат ровно три различные цифры? Сколько  $m$ -значных чисел содержит ровно  $k$  различных цифр? (Справните эту задачу с задачей 46 из главы I.)

**137.** Сколько нечетных чисел в  $m$ -й строке арифметического треугольника?

Докажите, что не существует такого числа  $k$ , что в  $k$ -й строке арифметического треугольника поровну четных и нечетных чисел.

**138.** Сколько не делящихся на простое число  $p$  чисел стоит в первых  $m$  строках арифметического треугольника?

**139.** Сколько можно составить сочетаний из 20 букв по 6 так, чтобы в каждом сочетании никакая буква не входила более двух раз?

**140.** Имеется  $p+q+r$  букв:  $p$  букв «м»,  $q$  букв «а» и  $r$  букв «к». Сколько существует перестановок таких букв, при которых буква «м» встречается раньше, чем «а», а «а» — раньше, чем «к»?

**141.** Буквы, входящие в выражение  $aabbcc$ , переставляются всеми способами, при которых рядом с каждой буквой слева или справа стоит такая же буква. Докажите, что число таких перестановок равно 6, для  $aaabbbccc$  тоже 6 таких перестановок, для  $a^4b^4c^4 = 90$  и для  $a^5b^5c^5 = 426$ .

**142.** Во скольких перестановках 33 букв русского алфавита не встретишь ни одного из имен Лев, Марк, Тоня?

**143.** Из натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно составлены всевозможные произведения, содержащие  $k$  различных сомножителей ( $k$  фиксировано). Сколько из этих произведений делится на простое число  $p$ , такое, что  $p \leq n < 2p$ ? А если не ограничивать число сомножителей?

**144.** Границ каждой из двух игральных костей помечены числами 0, 1, 3, 7, 15, 31. Сколько различных сумм может получиться при метании этих костей?

**145.** Стороны каждой из трех игральных костей помечены числами 1, 4, 13, 40, 121, 364. Сколько различных сумм может получиться при метании этих костей?

**146.** Кидают шесть игральных костей, имеющих различные цвета, на гранях которых стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Во скольких случаях они дадут один вид очков? Два вида? Три вида? Четыре вида? Пять видов? Шесть видов?

**147.** Дано  $2n + 1$  предметов. Докажите, что из них можно выбрать нечетное число предметов столькими же способами, как и четное.

**148.** Докажите, что нечетное число предметов можно выбрать из  $n$  предметов  $2^{n-1}$  способами. А четное?

**149.** Имеется  $m$  ячеек, в первой лежат  $n$  различных предметов, во второй —  $2n$  предметов, ..., в  $m$ -й —  $mn$  предметов. Сколькими способами можно выбрать по  $n$  предметов из каждой ячейки?

**150.** В корзине лежат  $4n$  плодов:  $2n - r$  яблок и  $2n + r$  груш. Докажите, что при заданном  $n$  число различных выборов  $n$  плодов будет наибольшим, если  $r = 0$ .

**151.** В школе изучают  $2n$  предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие два ученика не учатся одинаково, ни про каких двух нельзя сказать, что один учится лучше другого. Докажите, что число учеников в школе не больше  $C_{2n}^n$  (мы считаем, что один ученик учится лучше другого, если по всем предметам у него оценки не хуже, чем у второго, а по некоторым — лучше).

$$\text{152. Вычислите сумму } \sum_{i_n=1}^m \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \dots \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1.$$

**153.** Имеется  $n$  пар одинаковых букв, причем разные пары состоят из разных букв. Из этих букв составляется  $2n$ -буквенное слово так, чтобы никакие две одинаковые буквы не шли подряд. Докажите, что число различных таких слов равно

$$\frac{1}{2^n} \left[ (2n)! - C_n^1 \cdot 2(2n-1)! + C_n^2 \cdot 2^2(2n-2)! - \dots \right].$$

**154.** Имеется  $r$  различных вещей, которые распределяются между  $n + p$  лицами так, чтобы данные  $n$  «привилегированных» лиц получили хотя бы по одной вещи. Докажите, что число способов такого раздела равно  $(n + p)^r - C_n^1(n + p - 1)^r + C_n^2(n + p - 2)^r - \dots + (-1)^n p^r$ .

**155.** Сколько существует пар целых чисел  $(x; y)$ , заключенных между 1 и 1000, таких, что  $x^2 + y^2$  делится на 49?

**156.** Сколькими способами можно выбрать 4 женщины и 3 мужчин из 9 женщин и 6 мужчин, если

- а) женщины  $A$  и  $B$  не могут быть выбраны одновременно;
- б) одновременно не могут быть выбраны мужчины  $C$  и  $D$ ;
- в) если не могут быть одновременно выбраны женщина  $A$  и мужчина  $C$ ?

**157.** а) Сколькими способами можно выбрать из чисел от 1 до 100 три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

б) Сколькими способами можно выбрать из  $3n$  последовательных целых чисел три числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

**158.** Имеется  $3n + 1$  предметов, из которых  $n$  одинаковых, а  $2n + 1$  различные. Докажите, что из них можно извлечь  $n$  предметов  $2^{2n}$  способами.

## Глава III

### РАСКЛАДКИ

В задачах на размещения, перестановки и сочетания из данных элементов составлялись различные комбинации, и мы считали, сколько таких комбинаций получается при тех или иных ограничениях. Судьба элементов, оставшихся после выбора комбинаций, нас почти не интересовала. Иной вид имеют задачи, к которым мы сейчас перейдем. В них задачах элементы раскладываются в несколько «ящиков» и надо найти число способов это сделать.

При этом могут встретиться различные случаи. Иногда существенную роль играет порядок элементов в «ящиках». Например, когда сигнальщик вывешивает сигнальные флаги на нескольких мачтах, то для него важно не только то, на какой мачте окажется тот или иной флаг, но и то, в каком порядке эти флаги развешиваются. В других же случаях порядок элементов никакой роли не играет. Когда игрок в домино набирает кости из кучи, ему безразлично, в каком порядке они придут, а важен лишь окончательный результат.

Отличаются задачи и по тому, играет ли роль порядок самих «ящиков». При игре в домино игроки сидят в определенном порядке, и важно не только то, как разделились кости, но и то, кому какой набор костей достался. Если же фотографии раскладывают по одинаковым конвертам, чтобы послать их по почте, то существенно, как распределяются фотографии по конвертам, но порядок самих конвертов совершенно несуществен — ведь на почте их все равно смешают.

Играет роль и то, различаем ли мы между собой сами элементы или нет, а бывает, что элементы делятся на группы одинаковых. Наконец, в одних задачах некоторые «ящики» могут оказаться пустыми, т. е. не содержащими ни одного элемента, а в других это недопустимо. Соответственно возникает целый ряд родственных комбинаторных задач.

#### 36. Шары и лузы

Удар! И 15 перенумерованных бильярдных шаров, только что покинувшихся на зеленом сукне стола, рассыпались в разные стороны. А затем серия виртуозных ударов и все шары забиты в лузы, а на столе остался только биток — шар, которым забивают все остальные. Предположим, что забитые шары остаются лежать в лузах до конца игры, а сетки луз настолько велики, что могут вместить все 15 шаров. Тогда возникает следующая комбинаторная задача.

*Сколькими способами могут распределиться 15 перенумерованных бильярдных шаров в 6 лузах?*

Перенумеруем лузы и поставим в соответствие каждому шару номер лузы, в которую он попал. Например, схема

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| Шары | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Лузы | 3 | 2 | 2 | 1 | 6 | 4 | 4 | 6 | 3 | 1  | 2  | 1  | 6  | 3  | 6  |

говорит о том, что в лузе 1 лежат шары 4, 10 и 12; в лузе 2 — шары 2, 3 и 11; в лузе 3 — шары 1, 9 и 14; в лузе 4 — шары 6 и 7; луза 5 пуста; в лузе 6 — шары 5, 8, 13 и 15. Но вторая строка этой схемы не что иное, как бланк длины 15, заполненный цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (хотя цифра 5 здесь и отсутствует, она присутствует в схемах, соответствующих другому распределению шаров). Поэтому число таких распределений шаров равно числу размещений с повторениями из 6 элементов по 15 (см. п. 5), т. е.  $\bar{A}_6^{15} = 6^{15}$  — каждый шар может попасть в любую из 6 луз и такой выбор надо сделать 15 раз.

Если бы число шаров равнялось  $n$ , а луз —  $m$ , то получилось бы  $\bar{A}_m^n = m^n$  вариантов размещения шаров по лузам.

Число способов размещения  $n$  различных предметов по  $m$  различным ящикам равно  $\bar{A}_m^n = m^n$ .

### 37. Сбор яблок

Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми?

Задача похожа на предыдущую, но здесь размещаемые предметы одинаковы — нас интересует лишь, сколько яблок получит каждый, но не то, какие именно яблоки ему достанутся, т. е. способ раздела задается тройкой чисел (сколько яблок получает первый, второй, третий).

Для решения этой задачи поступим так: добавим к собранным яблокам еще 2 одинаковые груши, а потом переставим всеми возможными способами 40 яблок и 2 груши. По формуле для перестановок с повторениями (см. п. 22) число таких перестановок равно  $P(40, 2) = C_{42}^2 = \frac{42!}{40! \cdot 2!} = 861$ .

Но каждой перестановке соответствует свой способ раздела яблок. Первому из ребят мы даем все яблоки, начиная от первого и до первой груши, второму — все яблоки, попавшие между первой и второй грушей, а третьему — все яблоки, лежащие после второй груши. Ясно, что при этом различным перестановкам соответствуют разные способы раздела. Таким образом, общее число способов раздела равно 861. При этом может случиться так, что одному (или даже двоим) участникам раздела ничего не достанется. Например, если одна из груш попадет при перестановке в начало, то лишается яблока первый

из ребят, а если в конец — то третий. Если же обе груши окажутся рядом, то ничего не получит второй. Разберите сами, что случится, если обе груши попадут в начало или в конец.

Подобное рассуждение мы уже проводили в п. 25, так что можно считать, что здесь мы имеем дело с сочетаниями с повторениями  $\bar{C}_3^{40} = P(40, 2) = C_{42}^2$  — есть 3 типа предметов (мальчики) и надо делать из них комбинации из 40 элементов (по числу яблок, какое — кому), порядок элементов не учитывается, разные комбинации отличаются количеством предметов хотя бы одного типа (т. е. как раз числом яблок, достающимся хотя бы одному мальчику).

Совершенно так же доказывается общее утверждение.

*Число способов размещения  $n$  одинаковых предметов по  $m$  различным ящикам равно*

$$\bar{C}_m^n = P(n, m-1) = C_{m+n-1}^n = C_{m+n-1}^{m-1}. \quad (1)$$

Предположим теперь, что для «непустоты» ящиков поставлено условие, чтобы в каждый попало по крайней мере  $r$  предметов. В этом случае надо начать с того, что положить в каждый ящик по  $r$  предметов. После этого остается  $n - mr$  предметов, которые можно уже распределять произвольным образом. А это можно сделать, как следует из формулы (1),  $C_{n-mr+m-1}^{m-1} = C_{n-m(r-1)-1}^{m-1}$  способами.

В частности, если в каждом из  $m$  ящиков должно быть не менее одного предмета, то задача решается  $C_{n-1}^{m-1}$  способами. Последний результат можно вывести и иным образом. Расположим данные  $n$  предметов в ряд. Тогда между ними будет  $n - 1$  промежутков. Если в любые  $m - 1$  из этих промежутков поставить разделяющие перегородки, то все предметы разделятся на  $m$  непустых частей. После этого первая часть кладется в первый ящик, вторая — во второй и т. д. Так как  $m - 1$  перегородку можно поставить в  $n - 1$  промежуток  $C_{n-1}^{m-1}$  способами, то это и есть число способов раздела.

### Задачи

1. Поезду, в котором находится  $n$  пассажиров, предстоит сделать  $m$  остановок. Сколькими способами могут распределиться пассажиры между этими остановками? Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

2. Тайным голосованием 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует только за одно предложение и учитывается лишь количество голосов, поданных за каждое предложение?

3. Общество из  $n$  членов выбирает открытым голосованием из своего состава одного представителя. Сколькими способами может произойти голосование, если каждый голосует за одного человека (быть может, и за себя)? Та же задача, но голосование «тайное», учитывается лишь число голосов, полученных каждым кандидатом, но неизвестно, кто за него голосовал.

4. Бросают  $n$  игральных костей. Результат —  $n$  чисел от 1 до 6 (на каждой кости нанесены 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков). Сколько может получиться различных результатов, если результаты, отличающиеся друг от друга лишь порядком очков, считаются одинаковыми?

5. а) Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

б) А 7 белых, 1 черный и 1 красный шар?

6. а) Сколькими способами можно представить натуральное число  $n$  в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых также является натуральным числом (представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

б) Докажите, что число  $n$  можно  $\left[\frac{n^2 - 6n + 12}{12}\right]$  способами разбить на три попарно неравные части ( $[x]$  — целая часть  $x$ ).

## 38. Букет цветов и сбор грибов

Мы рассмотрели два крайних случая — все предметы разные (занумерованные шары) и все предметы одинаковые (яблоки). Если делят предметы нескольких разных видов, то это можно делать независимо для каждого вида, поэтому надо найти число способов раздела для каждого вида и (по правилу произведения) перемножить полученные числа.

*Двое ребят собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?*

Ясно, что ромашки можно разделить 11 способами — первый может не взять ни одной ромашки, взять 1, 2, ..., все 10 ромашек. Точно так же васильки можно разделить 16 способами, а незабудки — 15 способами. Так как цветы каждого вида можно делить независимо от цветов другого вида, то по правилу произведения получаем  $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2640$  способов раздела цветов.

Разумеется, среди этих способов есть и крайне несправедливые, при которых, например, один из ребят совсем не получает цветов. Введем поэтому ограничение, что каждый из ребят должен получить не менее 3 цветков каждого вида. Тогда ромашки можно разделить лишь пятью способами: первый может взять себе 3, 4, 5, 6 или 7 цветков. Точно так же васильки можно разделить 10 способами, а незабудки — 9 способами. В этом случае общее число способов деления равно  $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$ .

В общем случае, если имеется  $n_1$  одинаковых предметов одного вида,  $n_2$  одинаковых предметов другого вида, ...,  $n_k$  одинаковых предметов  $k$ -го вида, то их можно разделить между двумя людьми

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1) \quad (2)$$

способами. В частности, если все предметы отличны друг от друга и их число равно  $k$ , то  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$  и потому есть  $2^k$  способов раздела.

Если же наложить добавочное ограничение, что каждый из участников раздела должен получить не менее  $s_1$  предметов первого вида,  $s_2$  предметов второго вида, ...,  $s_k$  предметов  $k$ -го вида, то число способов раздела выражается формулой

$$(n_1 - 2s_1 + 1)(n_2 - 2s_2 + 1) \dots (n_k - 2s_k + 1). \quad (3)$$

Если «ящиков» больше двух, то возникают биномиальные коэффициенты.

*Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между 4 ребятами (грибы одного вида считаются одинаковыми)?*

Применяя результаты предыдущего пункта, получаем, что ответ имеет вид  $C_{13}^3 \cdot C_{18}^3 \cdot C_{11}^3 = 38\,507\,040$ .

Если же каждый должен получить хотя бы по одному грибу каждого вида, то ответом будет  $C_9^3 \cdot C_{14}^3 \cdot C_7^3 = 1\,070\,160$ .

Подобная формула верна и в общем случае.

*Если имеется  $n_1$  предметов одного вида,  $n_2$  предметов другого вида, ...,  $n_k$  предметов  $k$ -го вида, причем предметы одного и того же вида неотличимы друг от друга, то число способов распределения этих предметов по  $m$  различным ящикам равно*

$$C_{n_1+m-1}^{m-1} C_{n_2+m-1}^{m-1} \dots C_{n_k+m-1}^{m-1}. \quad (4)$$

### 39. Задача о числе делителей

Выведенная нами формула (2) позволяет решить следующую задачу теории чисел.

*Найти, сколько делителей есть у натурального числа  $N$  (включая 1 и само число  $N$ ).*

Разложим  $N$  на простые множители:  $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — различные простые числа. Например,

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ . При разложении числа  $N$  на два сомножителя,  $N = N_1 \cdot N_2$ , простые сомножители распределяются между  $N_1$  и  $N_2$ . Если в  $N_1$  сомножитель  $p_j$  войдет  $m_j$  раз,  $j = 1, \dots, k$ , то разложение имеет вид

$$N = N_1 \cdot N_2 = (p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}) (p_1^{n_1-m_1} p_2^{n_2-m_2} \dots p_k^{n_k-m_k}).$$

Таким образом, разложение  $N$  на два сомножителя сводится к разделу  $n_1$  элементов одного вида,  $n_2$  элементов второго вида, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го вида на две части. А формула (2) показывает, что это можно сделать  $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$  способами. Значит, это и есть число делителей у натурального числа  $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ . Это число обозначают  $\tau(N)$ :

$$\tau(N) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1).$$

### Задачи

7. а) Сколькими способами можно представить число 1 000 000 в виде произведения трех сомножителей, если произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются различными?

б) Решите ту же задачу, если порядок множителей не учитывается.

8. Пусть  $p_1, \dots, p_k$  — различные простые числа и  $n_1, \dots, n_k$  — некоторые натуральные числа. Чему равна сумма делителей числа  $q = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$  (включая 1 и  $q$ )?

9. а) Заданы числа  $M$  и  $G$ , причем  $M = GA^aB^bC^cD^d$  и  $A, B, C, D$  — простые числа. Сколькими способами можно выбрать такие два числа  $X, Y$ , что их наибольший общий делитель равен  $G$ , а наименьшее общее кратное равно  $M$ ?

б) Решите ту же задачу, опустив слова «наибольший» и «наименьшее».

### 40. Домино и преферанс

В рассмотренных ранее примерах не накладывалось никаких ограничений на число предметов, попадающих в каждый ящик — оно могло быть любым. Но во многих случаях оно четко оговорено. Рассмотрим пару примеров.

*При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?*

Раздел костей можно выполнить следующим образом. Сначала каким-то образом положим все 28 костей в ряд. После этого первый игрок берет первые 7 костей, второй — вторые 7 костей, третий — следующие 7 костей, а четвертый забирает себе остаток. Ясно, что таким образом можно получить всевозможные разбиения костей.

Так как число всех перестановок из 28 элементов равно  $28!$ , то может показаться, что общее число всех способов раздела равно  $28!$ . Но это неверно — ведь первому игроку совершенно безразлично, возьмет он сначала кость 6|6, а затем кость 3|4, или наоборот, сначала кость 3|4, а затем кость 6|6; ему важен лишь окончательный итог. Поэтому любая перестановка первых 7 костей не меняет существа дела. Не меняет его и любая перестановка вторых 7 костей, третьих 7 костей и последних 7 костей. В силу правила произведения получаем  $(7!)^4$  перестановок костей, не меняющих результата раздела.

Таким образом,  $28!$  перестановок костей делятся на группы по  $(7!)^4$  перестановок в каждой группе, причем перестановки из одной группы приводят к одинаковому распределению костей. Отсюда следует, что число способов раздела костей равно  $\frac{28!}{(7!)^4}$ . Это число приближенно равно  $4,7 \cdot 10^{14}$ .

К тому же результату можно прийти иначе. Первый игрок должен выбрать 7 костей из 28. Так как порядок этих костей безразличен, то он имеет  $C_{28}^7$  выборов. После этого второй игрок должен выбрать 7 костей из оставшихся 21 кости. Это можно сделать  $C_{21}^7$  способами. Третий игрок выбирает из 14 костей, а потому имеет  $C_{14}^7$  возможностей выбора. Наконец, четвертому игроку остается  $C_7^7$ , т. е. единственный выбор. По правилу произведения получаем, что полное число возможностей равно  $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = \frac{28!}{21 \cdot 7!} \cdot \frac{21!}{14! \cdot 7!} \cdot \frac{14!}{7! \cdot 7!} = \frac{28!}{(7!)^4}$ .

*При игре в преферанс каждому из 3 игроков раздают по 10 карт, а 2 карты кладут в прикуп (игра ведется колодой из 32 карт). Сколько различных сдач возможно в этой игре?*

По сути это та же задача, только теперь число карт в группах разное (10, 10, 10 и 2).

Чтобы решить эту задачу, разложим все карты в определенном порядке (например, сначала все пики от семерки до туза, потом в том же порядке все трефы, все бубны, все черви). А затем над каждой картой надпишем номер того игрока, которому она досталась (над картами, идущими в прикуп, пишем цифру 4). Так как каждый из игроков должен получить по 10 карт, то надписанные сверху цифры образуют перестановку с повторениями, состоящую из 10 цифр 1, 10 цифр 2, 10 цифр 3 и 2 цифр 4. Эта перестановка с повторениями имеет состав (10, 10, 10, 2). А число перестановок с повторениями  $P(10, 10, 10, 2)$  равно  $\frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!} = 2\ 753\ 294\ 408\ 504\ 640$ . Этим

16-значным числом и выражается количество различных сдач при игре в преферанс.

Возможно, у читателя возникает вопрос, стоит ли вообще тратить время на изучение карточных игр? По этому поводу напомним, что именно изучение азартных игр дало толчок для первоначального развития комбинаторики и теории вероятностей. Такие первоклассные математики, как Паскаль, Бернулли, Эйлер, Чебышев, оттачивали идеи и методы комбинаторики и теории вероятностей на задачах об играх в орел и решку, кости и карты. Многие идеи теории игр (раздел математики, широко применяемый в экономике и военном деле) первоначально оформились на изучении простейших моделей карточных игр.

## 41. Раскладка по ящикам

Задачи о домино и преферансе относятся к комбинаторным задачам на раскладывание предметов по ящикам заданного объема. Общая постановка этих задач такова.

*Даны  $n$  различных предметов и  $m$  ящиков. Надо положить в первый ящик  $n_1$  предметов, во второй —  $n_2$  предметов, ..., в  $m$ -й —  $n_m$  предметов, где  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ . Сколькими способами можно сделать такое распределение?*

В задачах о домино и преферансе роль ящиков выполняли игроки, а роль предметов — кости или карты. Рассуждая точно так же, как в задаче о преферансе, расставим все предметы в ряд (или занумеруем их), а потом надпишем над каждым предметом номер ящика, в который его кладут. Получившаяся последовательность номеров ящиков образует перестановку с повторениями, состоящую из  $n_1$  чисел 1,  $n_2$  чисел 2, ...,  $n_m$  чисел  $m$ . Каждая раскладка предметов по ящикам определяет такую перестановку. И наоборот, каждая такая перестановка определяет свой способ раскладки — в первый ящик попадают те предметы, над которыми стоит 1, во второй — над которыми стоит 2, ..., в  $m$ -й — над которыми стоит  $m$ . Тем самым устанавливается соответствие между перестановками с повторениями и раскладкой предметов по ящикам. Поэтому число различных раскладок по ящикам равно числу соответствующих перестановок с повторениями  $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ . Получаем следующий вывод.

*Число способов разложить  $n_1 + n_2 + \dots + n_m$  разных предметов по  $m$  различным ящикам так, чтобы в первый ящик легло  $n_1$  предметов, во второй —  $n_2$  предметов, ..., в  $m$ -й —  $n_m$  предметов, равно  $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ .*

$$\text{предметов, равно } P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

### Задачи

**10.** Сколькими способами можно распределить между тремя людьми  $3n$  различных предметов так, чтобы каждый получил  $n$  предметов?

**11.** Сколькими способами можно разложить  $m + n + p$  различных предметов на три группы так, чтобы в первой группе было  $m$ , во второй  $n$  и в третьей  $p$  предметов?

**12.** Сколькими способами можно разделить 12 различных марок между 3 мальчиками, если

- а) каждый берет по 4 марки;
- б) один берет 6 марок, а остальные — по 3 марки?

**13.** Имеется набор состава  $1^{r_1} 2^{r_2} \dots k^{r_k}$  (т. е. состоящий из  $r_1$  различных одиночных предметов,  $r_2$  пар различных предметов,  $r_3$  троек и т. д.). Докажите, что число способов разместить их в  $n$  ящиков равно  $(C_n^1)^{r_1} (C_{n+1}^2)^{r_2} \dots (C_{n+k-1}^k)^{r_k}$ .

**14.** Сколькими способами 12 полтинников можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

### 42. Сушка грибов

В рассмотренных ранее примерах ящики были различимыми. Но это не всегда так.

*Из 60 различных белых грибов хотят сделать 4 связки по 15 грибов в каждой. Сколькими способами это можно сделать?*

На первый взгляд эта задача относится к разобранному выше типу, и ответ дается числом  $\frac{60!}{(15!)^4}$ . Но здесь есть одна

тонкость. При разделе костей домино важно, кому из игроков достанется данный набор костей, а при составлении связок грибов порядок связок роли не играет — в кладовой все они будут висеть вместе. Поэтому ответ надо еще разделить на  $4!$  — число перестановок связок между собой. Поэтому здесь ответ такой:  $\frac{60!}{(15!)^4 \cdot 4!}$ .

*Вообще если надо разделить  $m$  различных предметов на  $t$  групп по  $p$  предметов в каждой группе, причем порядок групп не учитывается, то число способов раздела равно*

$$\frac{(mp)!}{(p!)^m \cdot m!}.$$

Более общей является такая задача:  $n$  различных элементов надо распределить на  $t$  групп так, чтобы  $m_1$  групп содержали по  $p_1$  элементов,  $m_2$  групп — по  $p_2$  элементов, ...,  $m_k$  групп — по  $p_k$  элементов ( $m = m_1 + \dots + m_k$  и  $n = m_1 p_1 + \dots + m_k p_k$ ). Сколькими способами может быть произведен раздел, если:

- а) группы различимы;  
 б) группы неразличимы (например, предметы кладутся в одинаковые ящики, которые потом перемешиваются)?

В первом случае задача аналогична решенной в предыдущем пункте и ответ имеет вид

$$\frac{n!}{(p_1!)^{m_1} \dots (p_k!)^{m_k}}. \quad (5)$$

А во втором случае надо иметь в виду возможность перестановки групп, содержащих поровну элементов. Теперь уже ответ иной:

$$\frac{n!}{(p_1!)^{m_1} \dots (p_k!)^{m_k} m_1! \dots m_k!}. \quad (6)$$

### Задачи

15. а) Даны  $2n$  элементов. Рассматриваются всевозможные разбиения этих элементов на пары, причем разбиения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько существует различных таких разбиений?

б) Решите ту же задачу, если разбиваются  $nk$  элементов на  $n$  групп по  $k$  элементов в каждой группе.

16. Сколькими способами можно из 30 рабочих создать 3 бригады по 10 человек в каждой бригаде? А 10 групп по 3 человека в каждой группе?

17. а) Сколькими способами можно разложить 9 книг на 3 бандероли по 3 книги в каждой?

б) Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой (порядок бандеролей не принимается во внимание)?

в) Сколькими способами можно разложить 9 книг на 4 бандероли по 2 книги и 1 бандероль в 1 книгу?

## 43. Разные статистики

Задачи о раскладке предметов по ящикам весьма важны для статистической физики. Эта наука изучает, как распределяются по своим свойствам физические частицы; например, какая часть молекул данного газа имеет при данной температуре ту или иную скорость. При этом множество всех возможных состояний распределяют на большое число  $m$  маленьких ячеек (фазовых состояний), так что каждая из  $n$  частиц попадает в одну из ячеек.

Вопрос о том, какой статистике подчиняются те или иные частицы, зависит от вида этих частиц. В классической статистической физике, созданной Максвеллом и Больцманом, частицы считаются различимыми друг от друга. Такой статистике подчиняются, например, молекулы газа. Мы знаем, что

$n$  различных частиц можно распределить по  $m$  ячейкам  $m^n$  способами. Если все эти  $m^n$  способов при заданной энергии имеют равную вероятность, то говорят о *статистике Максвелла — Больцмана*.

Изучение квантовых явлений показало, что к участвующим в них частицам (фотонам, электронам и т. д.) не применима статистика Максвелла — Больцмана. При этом все частицы распадаются на два класса. К одному из них принадлежат частицы, неразличимые друг от друга. Поэтому для таких частиц имеет значение лишь то, сколько частиц попало в ту или иную ячейку, а не то, какие именно частицы в ней находятся (это похоже на задачу о разделе яблок (см. п. 37). Мы уже знаем, что при этом получается  $C_{m+n-1}^{m-1}$  различных способов распределения частиц. Статистику неразличимых частиц, в которой все эти способы считаются равновероятными, разработали Эйнштейн и индийский учёный Бозе. Поэтому ее называют *статистикой Бозе — Эйнштейна*. Ей подчиняются фотоны, атомные ядра и атомы, содержащие четное число элементарных частиц.

Еще необыкновеннее статистика, которой подчиняются такие частицы, как электроны, протоны и нейтроны. Для этих частиц действует так называемый *запрет Паули*, по которому две частицы не могут одновременно попасть в одну и ту же ячейку. Поэтому в соответствующей статистике, разработанной английским физиком Дираком и итальянским учёным Ферми, в каждой ячейке находится не более одной частицы, причём различные распределения, удовлетворяющие указанному условию, считаются равновероятными. Число различных состояний в *статистике Ферми — Дирака* равно числу способов выбрать  $n$  ячеек из  $m$ , т. е.  $C_m^n$ .

### Задачи

18. Система частиц, подчиненная статистике Бозе — Эйнштейна, состоит из 4 идентичных частиц. Полная энергия равна  $4E_0$ , уровни энергии принимают значения  $kE_0$ , причём уровень с энергией  $kE_0$  имеет  $k^2 + 1$  ячеек. Сколько различных конфигураций имеет эта система? Решите ту же задачу, если частицы подчинены статистике Ферми — Дирака, причём уровню энергии  $kE_0$  отвечают  $2(k^2 + 1)$  состояний.

19. Имеются 3 идентичные частицы, из которых 2 расположены в одной потенциальной яме, а одна — в другой. Полная энергия частиц равна  $3E_0$ . Уровни энергии имеют вид  $kE_0$  и допускают  $2(k^2 + 1)$  состояний. Найдите число конфигураций, если частицы подчинены статистике Ферми — Дирака.

**20.** Система состоит из  $N$  молекул, в каждую из которых входит один  $A$ -атом и два  $B$ -атома, занимающих два из четырех возможных положений. Сколько конфигураций имеет эта система? Решите ту же задачу, если молекулы могут захватывать у других один или два  $B$ -атома. Решите ту же задачу, если вместо двух  $B$ -атомов в молекулу входят  $B$ -атом и  $C$ -атом.

#### 44. Распределение нагрузки

*Перед началом учебного года между 5 членами кафедры происходило распределение 7 курсов. Каждый преподаватель мог читать любой из этих курсов, но обязан был прочесть хотя бы один курс. Сколькими способами можно распределить нагрузку?*

Новым в этой задаче является условие, что каждый должен прочесть хотя бы один курс — иначе сразу получилось бы, что нагрузку можно разделить 5<sup>7</sup> способами. Поэтому поступим так: сначала зафиксируем, сколько курсов берет каждый преподаватель, а потом уже распределим курсы в соответствии с выбранным числом курсов у каждого. Число 7 можно разбить на 5 натуральных слагаемых двумя существенно различными способами:  $3 + 1 + 1 + 1 + 1$  и  $2 + 2 + 1 + 1 + 1$ . Остальные способы получаются из этих двух перестановками слагаемых. Но распределить 7 курсов так, чтобы первый преподаватель прочел 3 курса, а остальные — по одному, можно, как мы уже знаем,  $P(3, 1, 1, 1, 1)$  способами (см. п. 41). Выбор же преподавателя, читающего 3 курса, производится  $P(1, 4)$  способами (мы представляем числа 3, 1, 1, 1, 1 и получаем все возможности). Значит, число распределений первого типа равно  $P(1, 4) \cdot P(3, 1, 1, 1, 1)$ .

Точно так же находим, что число распределений второго типа равно  $P(2, 3) \cdot P(2, 2, 1, 1, 1)$ . А общее число способов равно  $P(1, 4) \cdot P(3, 1, 1, 1, 1) + P(2, 3) \cdot P(2, 2, 1, 1, 1) = 16\,800$ .

Точно так же рассматривается общий случай, когда число курсов равно  $n$ , а число преподавателей —  $m$ . В этом случае ответ дается формулой

$$\sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = n \\ n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m > 0}} P(t_1, \dots, t_k) \cdot P(n_1, \dots, n_m). \quad (7)$$

Сумма распространена на все способы представления числа  $n$  в виде суммы  $m$  невозрастающих натуральных чисел  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m > 0$ ,  $n_1 + \dots + n_m = n$ , а  $P(t_1, \dots, t_k)$  — состав способа распределения курсов по преподавателям  $(n_1, \dots, n_m)$ .

Найдем например, число способов распределить 9 различных предметов между 5 лицами так, чтобы каждый получил хотя бы один предмет. Разбиения числа 9 на 5 натуральных слагаемых таковы:  $5 + 1 + 1 + 1 + 1$ ,  $4 + 2 + 1 + 1 + 1$ ,  $3 + 3 + 1 + 1 + 1$ ,  $3 + 2 + 2 + 1 + 1$ ,  $2 + 2 + 2 + 2 + 1$ .

Эти способы имеют состав:  $(5, 1, 1, 1, 1) — (1, 4)$ ;  $(4, 2, 1, 1, 1) — (1, 1, 3)$ ;  $(3, 3, 1, 1, 1) — (2, 3)$ ;  $(3, 2, 2, 1, 1) — (1, 2, 2)$ ;  $(2, 2, 2, 2, 1) — (4, 1)$ .

По формуле (7) получаем: число способов разбиения с требуемыми свойствами равно

$$\begin{aligned} P(1, 4) \cdot P(5, 1, 1, 1, 1) + P(1, 1, 3) \cdot P(4, 2, 1, 1, 1) + \\ + P(2, 3) \cdot P(3, 3, 1, 1, 1) + P(1, 2, 2) \cdot P(3, 2, 2, 1, 1) + \\ + P(4, 1) \cdot P(2, 2, 2, 2, 1) = 834\,120. \end{aligned}$$

#### 45. Посылка фотографий

*Я хочу послать своему другу 8 различных фотографий. Сколькими способами я могу это сделать, используя 5 различных конвертов?*

Эта задача по сути совпадает с решенной в предыдущем пункте, потому что посыпать пустые конверты нельзя — ни один конверт не должен быть пустым, но решим мы ее иначе — используя формулу включений и исключений.

Найдем сначала, при скольких способах распределения данные  $k$  конвертов оказываются пустыми (а остальные могут быть как пустыми, так и содержать фотографии). В этом случае фотографии кладутся без ограничений в  $5 - k$  конвертов, и по доказанному выше число таких распределений равно  $(5 - k)^8$ .

Но  $k$  конвертов можно выбрать из пяти  $C_5^k$  способами. Отсюда, применяя формулу включений и исключений, выводим, что число распределений, при которых ни один конверт не оказывается пустым, равно

$$5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8 = 126\,000.$$

Общая задача: сколькими способами можно положить  $n$  различных предметов в  $m$  различных ящиков так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет, решается точно такими же рассуждениями. Число способов распределения выражается формулой

$$\begin{aligned} m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - \dots + \\ + (-1)^k C_m^k(m-k)^n + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} \cdot 1^n. \quad (8) \end{aligned}$$

Представляем читателю разобрать следующую задачу.

*Имеются  $n_1$  предметов первого вида,  $n_2$  предметов второго вида, ...,  $n_k$  предметов  $k$ -го вида. Сколькими способами можно раздать их  $m$  лицам так, чтобы каждый получил хотя бы один предмет?*

Ответ на эту задачу такой:

$$\begin{aligned} & C_{n_1+m-1}^{m-1} C_{n_2+m-1}^{m-1} \cdots C_{n_k+m-1}^{m-1} - C_m^1 C_{n_1+m-2}^{m-2} C_{n_2+m-2}^{m-2} \cdots C_{n_k+m-2}^{m-2} + \\ & + C_m^2 C_{n_1+m-3}^{m-3} C_{n_2+m-3}^{m-3} \cdots C_{n_k+m-3}^{m-3} - \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}. \quad (9) \end{aligned}$$

Например, если делят 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов между 4 ребятами и каждый должен получить хотя бы один фрукт, то раздел возможен

$$C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 - C_4^1 C_{10}^2 C_{12}^2 C_9^2 + C_4^2 C_9^1 C_{11}^1 C_8^1 - C_4^3 = 5\,239\,688$$

способами.

## 46. Числа Стирлинга

Выведенная нами в предыдущем пункте формула (8) для числа способов положить  $n$  различных предметов в  $m$  различных ящиков так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет, наводит на некоторые размышления. Условие, что ящики различны, здесь существенно. Если предметы кладут в ящики одинакового вида, которые после этого перемешиваются так, что нельзя опознать эти ящики, то ответ будет иной. Из каждого способа распределения предметов по  $m$  различным ящикам можно получить  $m!$  способов, меняя содержимое ящиков местами (скажем, перекладывая содержимое первого ящика во второй, второго — в третий, а третьего — в первый). При перемешивании ящиков все эти  $m!$  способов дают один и тот же результат. Поэтому число  $S_n^m$  способов разложить  $n$  различных предметов в  $m$  неразличимых ящиков так, чтобы все ящики были непустыми, имеет вид

$$\begin{aligned} S_n^m = \frac{1}{m!} & \left[ m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n + \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^k C_m^k (m-k)^n + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Из этой формулы вытекает далеко не очевидный факт, что выражение в квадратных скобках делится на  $m!$  без остатка. Числа  $S_n^m$  называют *числами Стирлинга второго рода*.

## 47. Комбинаторика классификаций

В основе любого научного исследования лежит та или иная классификация объектов, явлений, свойств. Биолог классифицирует живые существа по видам, виды — по родам, роды — по отрядам, отряды — по классам, классы — по типам, химик классифицирует элементы по их положению в таблице Менделеева, физик классифицирует различные материалы по их теплопроводности и т. д. С точки зрения математики любая классификация сводится к тому, что некоторое множество элементов разбивают на непересекающиеся друг с другом подмножества.

Часто производят классификацию по тому или иному свойству — цвету, плотности, форме, размерам. В этом случае в один и тот же класс относят объекты, обладающие одинаковым значением этого свойства — объекты одного и того же цвета, одной формы, одинаковых размеров. Такие объекты называют *эквивалентными* по цвету, форме, размерам. Часто под эквивалентностью понимают полную взаимозаменяемость двух объектов, одинаковых, как две горошины из одного стручка. Так, для велосипедиста эквивалентны все шарикоподшипники одного и того же размера — в магазине они лежат в одной общей коробке, для покупателя — все костюмы одного и того же размера, цвета и артикула, они обычно висят рядом на одной и той же стойке, и т. д.

Но не всегда понятия эквивалентности и одинаковости совпадают. Если надо отправить письмо, то годится любая марка, имеющая данную стоимость, независимо от того, что на ней изображено. Но для филателиста две такие марки могут иметь совершенно несоизмеримую ценность. Выясним, какими же свойствами должно обладать отношение эквивалентности для того, чтобы оно обеспечивало правильную классификацию, т. е. распадение множества классифицируемых объектов на непересекающиеся подмножества.

Первое из этих свойств настолько очевидно, что формулировка его может показаться излишней.

1. *Каждый элемент сам себе эквивалентен.*

Второе свойство тоже ясно.

2. *Если элемент  $a$  эквивалентен элементу  $b$ , то и элемент  $b$  эквивалентен элементу  $a$ .*

Наконец, третье свойство эквивалентности формулируется так.

3. *Если элемент  $a$  эквивалентен элементу  $b$ , а элемент  $b$  — элементу  $c$ , то  $a$  эквивалентен  $c$ .*

Свойства 1 – 3 носят особые названия. Их называют соответственно *рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью* отношения эквивалентности.

Легко проверить, что такие отношения, как «иметь одинаковый цвет», «иметь одинаковую форму» и т. д., обладают этими тремя свойствами, т. е. являются отношениями эквивалентности. С каждым отношением эквивалентности для элементов какого-то множества связано, как мы уже говорили, разбиение этого множества на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности*.

Одно и то же множество может быть разбито на классы эквивалентности по разным признакам. Например, множество деталей в ящике можно разложить на гайки, винты, шайбы и т. д., а можно разложить по видам металла, из которых изготовлены эти детали (меди, железо, алюминий). Возникает следующая задача: сколькими различными способами можно разбить множество  $A$  из  $n$  элементов на классы эквивалентности? При этом мы учитываем и самое грубое разбиение, состоящее из одного класса — всего множества  $A$ , и самое тонкое разбиение, при котором  $A$  разбивается на отдельные элементы.

Число таких способов разбиения обозначают  $B_n$  и называют  *$n$ -м числом Белла*. Так как число разбиений  $n$ -множества  $A$  на  $m$  непустых классов эквивалентности равно числу Стирлинга  $S_n^m$  (см. п. 46), то ясно, что  $B_n = S_n^1 + S_n^2 + \dots + S_n^n$ .

## 48. Флаги на мачтах

До сих пор, раскладывая предметы по ящикам, мы не учитывали порядок, в котором могут быть расположены предметы в каждом ящике. Но, например, если речь идет о развесивании сигнальных флагов на мачтах, то имеет значение и порядок вывешиваемых флагов. Решим следующую задачу.

*Имеется  $n$  различных сигнальных флагов и  $m$  мачт, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке развесены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если все флаги должны быть использованы, но некоторые из мачт могут оказаться пустыми?*

Каждый способ развесивания флагов является комбинацией двух этапов. Первый — определение конфигурации, т. е. мест, на которых будут висеть  $n$  флагов на  $m$  мачтах. На этом этапе мы не учитываем ни форму, ни окраску флага, а считаем все флаги одинаковыми. Тогда, как мы уже знаем,  $n$  флагов можно развесить на  $m$  различных мачтах  $C_{n+m-1}^{m-1}$  способами.

Второй этап — заполнение всех этих  $n$  мест конкретными флагами. Это можно сделать  $n!$  способами, потому что можно заполнить эти  $n$  мест флагами произвольным образом, а потом переставлять флаги друг с другом всевозможными способами, не меняя конфигурации. Число таких перестановок равно  $n!$ . Значит, для каждой конфигурации размещения флагов

получается  $n!$  конкретных способов развесивания флагов. Общее же число способов развесивания флагов равно

$$n! C_{n+m-1}^{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{(m-1)!} = A_{n+m-1}^n. \quad (11)$$

Вообще, если имеется  $n$  различных предметов, то число способов распределения этих предметов по  $m$  различным ящикам с учетом порядка их расположения в ящиках равно  $A_{n+m-1}^n$ .

К тому же результату можно прийти иным путем. Добавим к распределяемым  $n$  предметам  $m-1$  одинаковых шаров и рассмотрим всевозможные перестановки полученных  $n+m-1$  предметов. Каждая такая перестановка определяет один из способов распределения. Именно, в первый ящик кладем все предметы, идущие в перестановке до первого добавленного шара (если первым предметом в перестановке является один из добавленных шаров, то первый ящик остается пустым). Шар откладываем (это — сигнал перейти к заполнению следующего ящика), во второй ящик кладем все предметы, попавшие между первым и вторым шаром, ..., в  $m$ -й ящик кладем все предметы, идущие после шара  $m-1$ . Ясно, что при этом получаются все распределения предметов, обладающие указанными свойствами. Но число перестановок из  $n$  различных предметов и  $m-1$  одинаковых шаров равно

$$P(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}, m-1) = \frac{(n+m-1)!}{1! \cdot \dots \cdot 1! \cdot (m-1)!} = A_{n+m-1}^n.$$

Если не все флаги различны, а среди них есть  $n_1$  флагов одного вида,  $n_2$  флагов другого вида, ...,  $n_k$  флагов  $k$ -го вида, то примененный выше метод решения дает следующее выражение для числа различных сигналов:  $P(n_1, \dots, n_k) C_{n+m-1}^{m-1}$ , где  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

Аналогично решаются задачи в случае, когда на каждой мачте должен висеть хотя бы один флаг. С помощью формулы, выведенной в п. 37, мы получаем, что тогда конфигураций будет  $C_{n-1}^{m-1}$ . Если при этом все флаги различны, то число сигналов равно  $P_n C_{n-1}^{m-1}$ , а в случае, когда состав флагов имеет вид  $(n_1, \dots, n_k)$ , число сигналов равно

$$P(n_1, \dots, n_k) C_{n-1}^{m-1}. \quad (12)$$

### Задачи

**21.** Сколькоими способами можно расставить 20 разных книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

**22.** Сколькоими способами можно надеть 5 различных колец на пальцы одной руки, исключая большой палец?

**23.** Отношением в множестве  $X$  называется любое множество  $M$ , составленное из некоторых пар вида  $(a; b)$ , где  $a \in X$ ,  $b \in X$ . Отношение  $M$  называется *рефлексивным*, если все пары вида  $(a; a)$  в нем содержатся ( $a \in X$ ), и *симметричным*, если из  $(a; b) \in M$  следует  $(b; a) \in M$ . Сколько отношений в  $n$ -множестве? Сколько в нем рефлексивных отношений? Сколько в нем симметричных отношений? Сколько симметричных и рефлексивных отношений?

**24.** На  $2^n$  карточках написаны все возможные  $n$ -значные числа из цифр 1 и 2 (по одному на карточке). Эти карточки произвольным образом положены в два ящика по  $2^{n-1}$  карточек в каждом. Докажите, что число способов вытащить одну карточку из первого ящика и изменить на ней одну цифру так, чтобы число на ней стало равно одному из чисел второго ящика, не меньше  $2^{n-1}$ .

**25.** Найдите число способов разбить  $n$  различных предметов на  $r$  (некоторых, быть может, пустых) классов так, чтобы в точности  $m$  классов содержали по  $k$  предметов.

### 49. Полное число сигналов

До сих пор мы считали, что все флаги должны быть использованы для передачи сигнала. Но могут быть и сигналы, для передачи которых используется лишь часть флагов, причем допускаются и пустые мачты. Найдем *полное число сигналов*, которые можно передать с помощью не более чем  $n$  сигнальных флагов, вывешиваемых на  $m$  мачтах.

Разобьем эти сигналы на классы по числу флагов, участвующих в сигнале.

По формуле (11) с помощью заданных  $k$  флагов можно передать  $A_{k+m-1}^k$  сигналов (число мачт равно  $m$ ). Но  $k$  флагов из  $n$  можно выбрать  $C_n^k$  способами. Поэтому число различных сигналов, в которых используется ровно  $k$  флагов, равно  $C_n^k A_{k+m-1}^k$ . Значит, полное число сигналов дается формулой

$$C_n^0 A_{m-1}^0 + C_n^1 A_m^1 + \dots + C_n^n A_{n+m-1}^n. \quad (13)$$

Например, имея 6 различных флагов, на 3 мачтах можно передать  $1 + C_6^1 A_3^1 + C_6^2 A_4^2 + C_6^3 A_5^3 + C_6^4 A_6^4 + C_6^5 A_7^5 + C_6^6 A_8^6 = 42\,079$  сигналов.

Если не допускать, чтобы некоторые мачты пустовали, то вместо формулы (13) получаем

$$\begin{aligned} C_n^m C_{m-1}^{m-1} m! + C_n^{m+1} C_m^{m-1} (m+1)! + \\ + C_n^{m+2} C_{m+1}^{m-1} (m+2)! + \dots + C_n^n C_{n-1}^{m-1} n! \end{aligned} \quad (14)$$

способов.

## 50. Общая задача о ладьях

Задачи о расположении фигур на шахматной доске можно рассматривать как задачи о раскладках. Здесь элементы (фигуры) могут быть различными или одинаковыми, все «ящики» (поля доски) различны, но есть причудливые ограничения в виде связи различных полей. Впрочем, в этом есть своя «изюминка».

Цикл комбинаторных задач на шахматной доске связан с подсчетом числа расположений шахматных фигур, при которых они могут быть друг друга или, наоборот, не могут быть друг друга. Ясно, что эти числа взаимосвязаны — ведь общее число расположений двух фигур сразу подсчитывается по формуле для размещений.

Некоторые задачи такого типа мы уже решили — в п. 20 была разобрана задача о  $n$  ладьях на шахматной доске  $n \times n$ . Обобщим эту задачу и возьмем  $t \times n$ -доску, т. е. доску из  $t$  горизонталей и  $n$  вертикалей. Мы хотим узнать, сколькими способами можно расставить  $k$  ладей на  $t \times n$ -доске так, чтобы они не могли быть друг друга.

Ясно, что для разрешимости задачи нужно, чтобы выполнялись условия  $k \leq t$  и  $k \leq n$  — иначе какие-то две ладьи попадут на одну и ту же горизонталь или вертикаль. Пусть эти условия выполнены. Тогда расстановку ладей можно осуществить в два этапа. Сначала выберем горизонтали, на которых будут стоять ладьи. Так как общее число горизонталей равно  $t$ , а надо выбрать  $k$  горизонталей, то выбор можно сделать  $C_t^k$  способами. Точно так же вертикали, на которых будут стоять ладьи, можно выбрать  $C_n^k$  способами. Поскольку выбор вертикалей не зависит от выбора горизонталей, то по правилу произведения получаем  $C_t^k C_n^k$  способов выбора линий, где стоят ладьи.

Однако этим дело не кончено. Ведь  $k$  горизонталей и  $k$  вертикалей пересекаются по  $k^2$  клеткам. Сдвигая, если понадобится, эти горизонтали и вертикали, мы получим новую доску из  $k$  горизонталей и  $k$  вертикалей. А мы уже знаем, что на такой доске расставить  $k$  ладей так, чтобы они не могли

бить друг друга, можно  $k!$  способами. Поэтому общее число требуемых расположений ладей равно

$$C_m^k C_n^k k! = \frac{n! m!}{k!(n-k)!(m-k)!}. \quad (15)$$

Например, 3 ладьи на обычной шахматной доске можно расставить  $\frac{8! \cdot 8!}{3! \cdot 5! \cdot 5!} = 18\ 816$  способами.

При  $k = m = n$  формула (15) дает ответ  $n!$  в соответствии со сказанным в п. 20.

Если снять ограничение, что ладьи не могут бить друг друга, то ответ был бы иной. Именно, нам надо было бы выбрать из  $m \times n$  клеток любые  $k$  клеток. А это можно сделать

$C_{mn}^k = \frac{(mn)!}{k!(mn-k)!}$  способами. А если бы  $k$  ладей различались

друг от друга, то полученные ответы надо было бы еще умножить на  $k!$ .

## 51. Симметричные расстановки

Усложним теперь задачу о ладьях и потребуем, чтобы они не только не били друг друга, но еще симметрично стояли на доске. При этом получается много задач в зависимости от того, какое налагается условие симметрии.

Самым простым является случай, когда требуется, чтобы ладьи стояли симметрично относительно центра доски (рис. 15). Обозначим через  $G_n$  число решений задачи, когда  $n$  ладей стоят на доске из  $n$  горизонталей и  $n$  вертикалей. Мы покажем сейчас, что тогда имеет место рекуррентное соотношение

$$G_{2n} = 2nG_{2n-2}. \quad (16)$$

В самом деле, будем ставить  $2n$  ладей на  $(2n \times 2n)$ -доску. Ладья, стоящая на первой вертикали, может занять на ней любое из  $2n$  полей. По условию этим определяется положение ладьи, стоящей на последней вертикали — она должна расположиться симметрично с первой ладьей относительно центра доски. Вычеркнем первую и последнюю вертикали, а также занятые стоящими на них ладьями горизонтали (так как число горизонталей четно, выбрасываемые ладьи не могут стоять на одной и той же горизонтали) и, если горизонтали не крайние, «сомкнем ряды» на доске. Получается доска из  $2n - 2$  горизонталей и  $2n - 2$

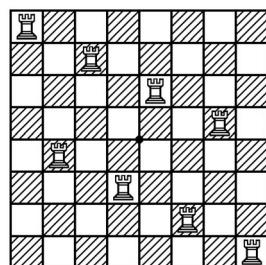


Рис. 15

вертикалей. Ясно, что каждому симметричному расположению ладей на новой доске соответствует симметричное исходное расположение ладей. Отсюда и вытекает, что  $G_{2n}$  в  $2n$  раз больше, чем  $G_{2n-2}$ . Из рекуррентного соотношения (16) вытекает, что  $G_{2n} = 2^n \cdot n!$ .

А теперь рассмотрим случай, когда доска состоит из  $2n + 1$  горизонталей и вертикалей. В этом случае одна ладья обязана стоять в центре доски. Поле, которое она занимает, само себе симметрично. Вычеркивая центральные горизонталь и вертикаль, получаем  $(2n \times 2n)$ -доску, на которую предстоит поставить  $2n$  ладей, что можно сделать  $G_{2n}$  способами. Значит,  $G_{2n+1} = G_{2n} = 2^n \cdot n!$ .

Рассмотрим теперь несколько более сложную задачу о расположениях, не меняющихся при повороте доски на  $90^\circ$  (на рис. 16 изображено одно из таких расположений на доске  $8 \times 8$ ). Пусть доска имеет  $4n$  вертикалей и  $4n$  горизонталей и число ладей тоже  $4n$ . В этом случае ладья, стоящая на первой вертикали, может занять любое из полей, кроме угловых, т. е. любое из  $4n - 2$  полей (на угловое поле ставить ладью нельзя, потому что после поворота на  $90^\circ$  получились бы две ладьи, которые бьют друг друга). Этой ладье соответствуют еще три ладьи, стоящие соответственно на последней горизонтали, последней вертикали и первой горизонтали (они получаются из выбранной поворотами на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ ). Вычеркивая горизонтали и вертикали, на которых стоят эти ладьи,

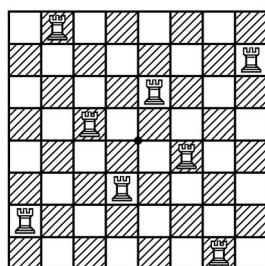


Рис. 16

получаем расположение ладей на доске  $(4n - 4) \times (4n - 4)$ , обладающее той же симметрией. Поэтому имеет место равенство

$$R_{4n} = (4n - 2) R_{4n-4},$$

где  $R_n$  — число решений задачи для доски  $n \times n$ . Отсюда ясно, что

$$R_{4n} = 2^n (2n - 1)(2n - 3) \dots \cdot 1. \quad (17)$$

Число решений задачи для доски  $(4n + 1) \times (4n + 1)$  такое же, как и для доски  $4n \times 4n$  — ведь на доске  $(4n + 1) \times (4n + 1)$  одна ладья обязательно стоит в центре и можно вычеркнуть центральные горизонталь и вертикаль. Поэтому  $R_{4n+1} = R_{4n}$ .

А для досок  $(4n + 2) \times (4n + 2)$  и  $(4n + 3) \times (4n + 3)$  число решений равно нулю. В самом деле, для каждой ладьи возможны два случая — либо она стоит в центре доски, либо не стоит в центре, в этом случае ладья входит в четверку ладей, переходящих друг в друга при поворотах доски на  $90^\circ$ . Поэтому общее число ладей должно иметь вид или  $4n$  (когда на доске нет центрального поля) или  $4n + 1$  (когда оно есть). Тем самым мы доказали, что  $R_{4n+2} = R_{4n+3} = 0$ .

Наконец, найдем число расположений  $n$  ладей на доске  $n \times n$ , симметричных относительно диагонали квадрата (для определенности берем диагональ, проходящую через нижнее левое угловое поле, как на рис. 17). Обозначим число таких расположений через  $Q_n$ . Тогда имеет место соотношение

$$Q_n = Q_{n-1} + (n - 1)Q_{n-2}. \quad (18)$$

В самом деле, ладья на первой вертикали либо стоит в нижнем левом углу, либо нет. В первом случае вычеркиваем первую вертикаль и первую горизонталь и получаем симметричное расположение  $n - 1$  ладей на доске  $(n - 1) \times (n - 1)$ . Число таких расположений равно  $Q_{n-1}$ .

Во втором случае для данной ладьи найдется другая, симметричная с ней относительно выбранной диагонали. Вычеркнем вертикали и горизонтали, на которых стоят эти ладьи, и сомкнем ряды. Мы получим симметричное расположение  $n - 2$  ладей на доске  $(n - 2) \times (n - 2)$ .

Поскольку число таких расположений равно  $Q_{n-2}$ , а ладью можно поставить на любое из  $n - 1$  полей первой вертикали, то получаем  $(n - 1)Q_{n-2}$  способов. Отсюда и следует формула (18). Можно показать, что из нее следует равенство

$$Q_n = 1 + C_n^2 + \frac{1}{1 \cdot 2} C_n^2 C_{n-2}^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_n^2 C_{n-2}^2 C_{n-4}^2 + \dots, \quad (19)$$

оно выводится путем разбиения всех расположений ладей на классы — в  $s$ -й класс попадают расположения, при которых  $s$  пар ладей не попадают на диагональ.

Аналогично показывается, что число  $B_n$  расстановок  $n$  ладей на доске  $n \times n$ , при которых ладьи не бьют друг друга и расположены симметрично относительно обеих диагоналей,

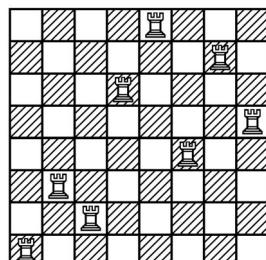


Рис. 17

удовлетворяет соотношениям  $B_{2n} = 2B_{2n-2} + (2n - 2)B_{2n-4}$ ,  
 $B_{2n+1} = B_{2n}$ .

## 52. Восемь ферзей

Теперь попробуем поставить на шахматную доску наибольшее число ферзей так, чтобы ни один из них не мог взять другого (ферзи могут бить по горизонталям, вертикалям и диагоналям).

Так как на шахматной доске только 8 горизонталей, то ясно, что больше 8 ферзей поставить на доску не удастся. Поэтому попробуем поставить 8 ферзей так, чтобы выполнялось указанное условие.

При любой такой расстановке на каждую вертикаль и каждую горизонталь попадет только один ферзь, а потому можно записать занятые поля в порядке возрастания номеров вертикалей. Но тогда каждое расположение однозначно определяется номерами горизонталей занятых полей, т. е. некоторой перестановкой чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Например, перестановка 35281746 означает, что на доске заняты поля (1; 3), (2; 5), (3; 2), (4; 8), (5; 1), (6; 7), (7; 4), (8; 8), где (1; 3)

— поле, стоящее на пересечении первой вертикали и третьей горизонтали (рис. 18) и т. д. Этую задачу можно решить лишь прямым перебором вариантов.

Организовать этот перебор можно так. Сначала ставят ферзя в левый нижний угол. Затем ставят ферзей на каждую следующую вертикаль на первое снизу поле, не находящееся под боем ранее поставленных ферзей. Если доходят до вертикали, все поля которойбиты, то передвигают ферзя на последней из занятых вертикалей, ставя его на следующее поле этой вертикали, не находящееся под боем. Когда исчерпаны все возможности получить хоть одно свободное от боя поле на данной вертикали, передвигая ферзя на предыдущей вертикали, а нужной расстановки не найдено, начинают исправлять положение на вертикали, расположенной еще на один ряд влево. Через несколько таких шагов получают расстановку ферзей, которую можно задать последовательностью чисел 1, 5, 8, 6, 3, 7, 2, 4. Продолжая описанный процесс, можно найти 92 положения ферзей, обладающих требуемым свойством.

Если  $n$  не делится ни на 2, ни на 3, то на доске  $n \times n$  существуют такие  $n$  расположений  $n$  ферзей, что каждое поле занято в одном и только одном расположении. Иными словами, в этом случае на доску можно поставить по  $n$  ферзей  $n$  различных цветов так, чтобы ферзи одного и того же цвета не могли бить друг друга.

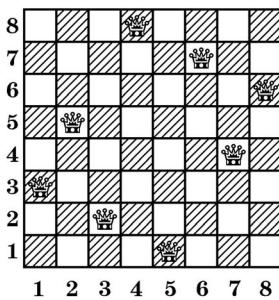


Рис. 18

### 53. Вся королевская конница...

В задаче о ферзях мы легко определили максимальное число фигур, которые можно поставить на доску, чтобы они не били друг друга, — для этого достаточно было пересчитать число горизонталей. Шахматный конь ходит хитрее, чем ферзь, — он перемещается или на 2 поля по вертикали и одно по горизонтали, или на 2 поля по горизонтали и одно по вертикали. Поэтому сразу сказать, чему равно наибольшее число коней, которых можно поставить на шахматную доску, чтобы они не били друг друга, сложнее. Впрочем, нетрудно найти нижнюю оценку для этого числа. Ведь при ходе коня каждый раз меняется цвет занятого им поля. Поэтому кони, поставленные на черные поля, бьют только белые поля, а друг друга бить не могут. Так как на доске 32 черных поля, то можно поставить требуемым образом 32 коней. Они держат под боем все белые поля. Второй способ расстановки — поставить всех коней на белые поля.

Проблема заключается в том, нельзя ли как-то перестроить расположение коней, поместив часть из них на черные поля, а часть на белые, чтобы нашлось место для 33-го коня. И хотя интуиция подсказывает, что это невозможно, нам нужно строгое математическое доказательство этой невозможности.

Для доказательства разделим всю доску на 8 частей  $2 \times 4$  (рис. 19). На каждой из них можно расположить не более четырех коней — любой конь на доске  $2 \times 4$  держит под боем ровно одно поле. Отсюда и следует, что на всю доску  $8 \times 8$  можно поставить не более  $8 \cdot 4 = 32$  коней, а это число коней мы уже умеем ставить. Точно так же доказывается, что на доску  $n \times n$  можно поставить  $n^2/2$  не бьющих друг друга коней, если  $n$  четно, и  $(n^2 + 1)/2$  коней, если  $n$  нечетно.

#### Задачи

**26. а)** Сколькими способами можно поставить 20 белых шашек на шахматной доске так, чтобы это расположение не менялось при повороте доски на  $90^\circ$ ?

**б)** Сколькими способами можно поставить 20 белых шашек на крайние линии шахматной доски так, чтобы это расположение не менялось при повороте доски на  $90^\circ$ ?

**27. а)** Сколькими способами можно расставить 20 белых шашек на шахматной доске так, чтобы это расположение было симметрично относительно горизонтальной линии, делящей доску пополам?

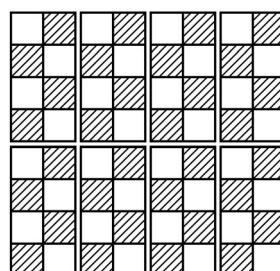


Рис. 19

- б) То же самое при условии, что шашки ставятся на черные поля.
- в) Решите те же задачи при условии, что расположение должно быть симметричным относительно центральной точки доски.
- 28.** Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля доски так, чтобы:
- это положение было симметрично относительно центра доски;
  - при симметрии относительно центра доски цвета всех шашек менялись?
- 29.** На шахматную доску с  $m$  горизонталями и  $n$  вертикалями поставлено  $k$  ладей. Докажите, что минимальное число линий (выбираемых из совокупности горизонталей и вертикалей), содержащих все ладьи, равно максимальному числу ладей, которых можно выбрать из поставленных на доску так, чтобы выбранные ладьи не били друг друга.
- 30.** Горизонтали шахматной доски обозначаются обычно цифрами от 1 до 8, а вертикали — буквами от a до h. Занумеруем и вертикали числами от 1 до 8, причем в произвольном порядке. Теперь напишем на каждом поле произведение чисел, означающих соответствующие горизонталь и вертикаль, и расставим произвольным образом 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Найдите произведение чисел, закрытых этими ладьями.
- 31.** Докажите, что число способов расставить на шахматной доске наибольшее число слонов так, чтобы они не могли взять друг друга, является квадратом некоторого числа.
- 32.** Поставьте на шахматную доску 5 ферзей так, чтобы они держали под ударом все ее поля.
- 33.** Поставьте на шахматную доску 8 фигур (короля, ферзя, двух ладей, двух слонов, двух коней) так, чтобы они держали под ударом наибольшее число полей.
- 34.** Докажите, что максимальное число слонов, которые можно поставить на  $(n \times n)$ -доску так, чтобы они не били друг друга, равно  $2n - 2$ .
- 35.** Докажите, что максимальное число королей, которые можно поставить на  $(n \times n)$ -доску так, чтобы они не били друг друга, равно  $n^2/4$ , если  $n$  четно, и  $(n + 1)^2/4$  если  $n$  нечетно.
- 36.** Какое наименьшее число слонов надо поставить на шахматную доску, чтобы они держали под боем каждое поле доски и каждый слон был защищен другим?
- 37.** Расставьте на шахматной доске наименьшее число ладей так, чтобы каждое поле былобито по крайней мере два раза. Решите задачу в двух вариантах:
- считая, что ладья не бьет полей, заслоненных от нее другими ладьями;
  - считая, что она бьет такие поля.
- 38.** Какое наибольшее число дамок можно поставить на черные поля шахматной доски так, чтобы каждую дамку могла снять хотя бы одна из остальных дамок?
- 39.** Какое наименьшее число коней нужно расставить на шахматной доске, чтобы все поля были под ударом (поле, где стоит конь, считается под ударом)?

**40.** а) Куб  $n \times n \times n$  разбит на  $n^3$  единичных кубиков. Обозначим через  $A_n$  наименьшее количество «трехмерных ладей», которые держат под ударом все кубики. Докажите, что  $A_n = n^2/2$  при четном  $n$  и  $A_n = (n^2 + 1)/2$  при нечетном  $n$ .

б) Найдите наибольшее число ладей, которые можно поставить в кубе  $n \times n \times n$  так, чтобы они не били друг друга.

#### 54. Два коня

В этом пункте мы ограничимся всего двумя фигурами и посмотрим, сколько есть способов расставить их на доске так, чтобы они не могли бить друг друга или, наоборот, могли бить (защищать) друг друга.

*Сколькими способами можно расставить на доске  $m \times n$  белого и черного коней так, чтобы они не били друг друга?*

Решение этой задачи осложняется тем, что на разных полях доски конь имеет различное число ходов — если  $m \geq 5$  и  $n \geq 5$ , то в углу доски у коня всего два хода, на одних крайних полях — три хода, на других — четыре хода, а в центре — 8 ходов. Это связано с тем, что конь может пойти на одно поле в одном направлении (вверх, вниз, направо, налево) и на два в перпендикулярном (в любую из двух сторон). Всего у коня 8 видов ходов, которые можно задать, указав, сколько полей он проходит в горизонтальном направлении и сколько в вертикальном. Эти ходы имеют, таким образом, следующий вид:  $(2; 1)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(1; -2)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(-1; -2)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(-2; -1)$ . Но если на доске стоит белый конь, который держит под ударом черного, то определен и единственный ход, которым он ему угрожает. Поэтому рассмотрим все 8 ходов по отдельности.

При ходе  $(2; 1)$  белый конь может стоять на любой вертикали, кроме последних двух, и любой горизонтали, кроме самой последней — иначе при ходе  $(2; 1)$  он выйдет за пределы доски. Значит, вертикаль можно выбрать  $n - 2$  способами, а горизонталь  $m - 1$  способами, а всего получаем  $(m - 1)(n - 2)$  способов поставить белого коня так, чтобы ходом  $(2; 1)$  он держал под обстрелом какое-то поле доски (на которое и надо ставить черного коня). В силу симметрии ясно, что столько же способов поставить белого коня при ходах  $(2; -1)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(-2; -1)$ . А для каждого из ходов  $(1; 2)$ ,  $(1; -2)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(-1; -2)$  число способов равно  $(m - 2)(n - 1)$ . Отсюда следует, что общее число способов расстановки белого и черного коней, при которых они бьют друг друга, выражается формулой

$$4(m - 1)(n - 2) + 4(m - 2)(n - 1) = 8mn - 12m - 12n + 16.$$

Если бы мы ставили коней одного и того же цвета так, чтобы они могли защищать друг друга, то получили бы вдвое меньше способов (из-за возможности поменять коней местами). А число способов расставить двух коней разного цвета так, чтобы они не могли бить друг друга, равно

$$\begin{aligned} mn(mn - 1) - [4(m - 1)(n - 2) + 4(m - 2)(n - 1)] = \\ = m^2 n^2 - 9mn + 12m + 12n - 16, \end{aligned}$$

потому что поставить на доску  $m \times n$  две разные фигуры можно  $mn(mn - 1)$  способами.

Составители шахматных задач иногда вводят «сказочные» фигуры, которые ходят не так, как обычные. Например,  $(p; q)$ -конь ходит на  $p$  полей в одном направлении и  $q$  полей в перпендикулярном. Обычный конь — это  $(1; 2)$ -конь. Рассуждая точно так же, как и ранее, выводим, что если  $0 < p$ ,  $0 < q$ ,  $p \neq q$ , то на доске  $m \times n$  можно  $4(m - p)(n - q) + 4(m - q)(n - p)$  способами поставить двух  $(p; q)$ -коней разного цвета так, чтобы они были друг друга (если  $p$  или  $q$  больше  $m$  или  $n$ , то какая-либо скобка может оказаться отрицательной, тогда считаем ее равной нулю). Если же  $p$  или  $q$  равно нулю или  $p = q$ , то получается вдвое меньше способов. Число способов уменьшается вдвое и в случае, когда кони одинакового цвета.

Любую шахматную фигуру можно рассматривать как объединение нескольких  $(p; q)$ -коней при разных значениях  $p$  и  $q$ . Например, шахматный король является объединением  $(1; 0)$ - и  $(1; 1)$ -коней. Поэтому двух шахматных королей разного цвета поставить на доску  $m \times n$  так, чтобы они были друг друга, можно  $2[(m - 1)n + m(n - 1)] + 4(m - 1)(n - 1)$  способами. Отсюда легко найти, сколько есть способов поставить двух одноцветных королей, поддерживающих друг друга, и сколько — двух разноцветных королей, не бьющих друг друга.

Шахматный слон является объединением  $(1; 1)$ -,  $(2; 2)$ -, ...,  $(p; p)$ -коней ( $p$  — наименьшее из чисел  $m - 1$ ,  $n - 1$ ). Предположим для определенности, что  $m \leq n$ . Тогда  $p = m - 1$  и двух слонов разного цвета можно поставить

$$4[(m - 1)(n - 1) + (m - 2)(n - 2) + \dots + 1 \cdot (n - m + 1)]$$

способами, чтобы они были друг друга. Раскрывая скобки и используя формулы для суммы натуральных чисел от 1 до  $m - 1$  и суммы квадратов этих чисел, получаем, что число спо-

собов можно записать так:  $\frac{2m(m - 1)(3n - m - 1)}{3}$ .

При  $m > n$  надо поменять роли  $m$  и  $n$ . В частности, если  $m = n$ , то получаем  $\frac{2m(m-1)(2m-1)}{3}$  способов.

Для ладей проще подсчитать число способов расстановки иначе. Белую ладью можно поставить на любое из  $mn$  полей. После этого она держит под боем  $m+n-2$  поля, на любое из которых можно поставить черную ладью. Поэтому всего получаем  $mn(m+n-2)$  способов расстановки двух ладей разных цветов, при которых они бьют друг друга.

Так как ферзя можно рассматривать как объединение ладьи и слона, то на доске  $m \times n$  при  $m \leq n$  можно

$$\frac{2}{3} m(m-1)(3n-m-1) + mn(m+n-2)$$

способами поставить двух ферзей разных цветов так, чтобы они били друг друга. При  $m = n$  это выражение принимает вид  $\frac{2}{3} m(m-1)(5m-1)$ . Предоставляем читателю подсчитать, сколькими способами можно расставить эти фигуры так, чтобы они не могли бить друг друга.

### Задачи

**41.** В шахматной олимпиаде участвуют представители  $n$  стран по 4 представителя от каждой страны. Сколькими способами они могут встать в ряд так, чтобы рядом с каждым был представитель той же страны?

**42.** Сколькими способами можно расставить  $m$  белых и  $n$  черных шаров так, чтобы между белыми и черными шарами было  $2r-1$  контактов?  $2r$  контактов?

**43.** В шеренгу построены  $m$  французов и  $n$  англичан так, что рядом с каждым стоит хотя бы один его соотечественник. Покажите, что число таких расстановок равно

$$m! n! [1 + (C_{m-2}^0 + C_{m-3}^1)(C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{m-3}^1 + C_{m-4}^2)(C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2) + \\ + (C_{m-4}^2 + C_{m-5}^3)(C_{n-4}^2 + C_{n-5}^3) + \dots].$$

**44.** Сколько существует слов длины  $n$  из цифр 0, 1 и 2, в которых нет соседних цифр 0?

**45.** Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по 2 туза?

**46.** а) Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 мандарин, 1 грушу, 1 айву и 1 хурму?

б) Сколькими способами можно выполнить этот раздел так, чтобы каждый получил по 4 плода?

47. Лица *A*, *B* и *C* имеют по 3 яблока каждый и, кроме того, *A* имеет 1 грушу, 1 сливу и 1 айву, *B* имеет 1 апельсин, 1 лимон и 1 хурму, *C* имеет 1 мандарин, 1 персик и 1 абрикос. Сколькими способами они могут распределить между собой эти фрукты так, чтобы каждый получил по 6 плодов?

48. Сколькими способами можно распределить 28 костей домино между 4 игроками по 7 костей каждому так, что

а) игрок *A* получает 7 «дублей» (т.е. костей 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5 и 6|6;

б) хоть один из игроков получает 7 «дублей»;

в) игрок *A* получит 6 «дублей»?

49. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку? Решите ту же задачу при условии, что каждый должен получить по одной карте каждой масти. Решите ту же задачу при условии, что один игрок имеет карты всех четырех мастей, а остальные — карты одной масти.

50. Сколькими способами можно раздать 52 карты 4 игрокам так, чтобы каждый получил по три карты трех мастей и четыре карты четвертой масти?

51. Сколькими способами можно раздать 18 различных предметов 5 участникам так, чтобы четверо из них получили по 4 предмета, а пятый — 2 предмета? Решите ту же задачу, если трое получают по 4 предмета, а двое — по 3 предмета.

52. Сколькими способами можно раздать 27 книг лицам *A*, *B* и *C* так, чтобы *A* и *B* вместе получили вдвое больше книг, чем *C*?

53. В лифт вошли 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на 4 этажах так, чтобы на каждом этаже вышел хотя бы один человек?

54. Имеется  $n$  белых и один черный шар. Сколькими способами можно положить некоторые из этих шаров в  $n + 1$  лузу, если в каждую лузу помещается лишь один шар?

55. а) Докажите, что число способов, которыми два человека могут разделить  $2n$  предметов одного вида,  $2n$  предметов другого вида и  $2n$  предметов третьего вида так, чтобы каждый получил  $3n$  предметов, равно  $3n^2 + 3n + 1$ .

б) Докажите, что если добавить  $2n$  предметов четвертого вида, то число способов раздела, при котором каждый получает  $4n$  предметов, равно  $\frac{1}{3}(2n + 1)(8n^2 + 8n + 3)$ .

в) Докажите, что если те же предметы раскладываются в два неразличимых ящика, то ответы будут соответственно  $\frac{1}{2}(3n^2 + 3n + 2)$  и  $\frac{1}{3}(n + 1)(8n^2 + 4n + 3)$ .

56. Докажите, что число способов деления  $m$  видов предметов по  $2n$  предметов каждого вида на две части по  $mn$  предметов в каждой выражается формулой

$$C_{mn+m-1}^{m-1} - C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1} + C_m^2 C_{mn+m-4n-3}^{m-1} - \dots + (-1)^k C_m^k C_{mn+m-1-k(2n+1)}^{m-1} + \dots$$

**57.** а) Обозначим через  $N(r, k, m)$  число способов разместить  $r$  одинаковых шаров в  $k$  ящиках так, чтобы в каждом ящике было не более  $m$  шаров. Докажите, что

$$N(r, k, m) = N(r, k - 1, m) + N(r - 1, k - 1, m) + \dots + N(r - m, k - 1, m).$$

б) Обозначим через  $N(r, k, m, j)$  число способов разместить  $r$  одинаковых шаров в  $k$  ящиках так, чтобы в каждом ящике лежало не более  $m$  шаров и  $j$  ящиков содержало ровно  $m$  шаров каждый. Докажите, что  $N(r, k, m, j) = C_k^j N(r - mj, k - j, m - 1)$ .

**58.** Сколькими способами можно положить пять белых шаров, пять черных шаров и пять красных шаров в три различных ящика, кладя по пять шаров в каждый ящик?

**59.** Докажите, что число способов распределить три вида вещей по  $n$  предметов каждого вида между тремя лицами  $A, B, C$  так, чтобы каждый получил  $n$  предметов, равно  $C_{n+2}^2 C_{n+2}^2 - 3C_{n+3}^4$ .

**60.** Имеется 6 шаров: 3 черных, 1 красный, 1 белый и 1 синий. Сколькими способами можно составить из них ряд, содержащий 4 шара?

**61.** Имеется  $n$  одинаковых предметов и еще  $n$  различных предметов. Сколькими способами можно выбрать из них  $n$  предметов? Сколькими способами можно упорядочить все  $2n$  предметов?

**62.** Докажите, что если  $n$  — целое число, то  $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$  — целое, а если  $m$  и  $n$  — нечетные числа, то  $\frac{(mn)!}{\frac{n+1}{2} \frac{m+1}{2} (m!)^{\frac{n+1}{2}} (n!)^{\frac{m+1}{2}}}$  — целое.

**63.** Сколькими способами можно распределить  $3n$  разных книг между тремя лицами так, чтобы количества книг образовали арифметическую прогрессию?

**64.** Сколькими способами можно составить 6 «слов» из всех 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

**65.** Компания, состоящая из 10 супружеских пар, делится на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и две женщины.

а) Сколькими способами можно их разделить?  
б) Во скольких случаях данный мужчина окажется в одной лодке со своей женой?

в) Во скольких случаях данные двое мужчин окажутся каждый в одной лодке со своей женой?

**66.** Имеется  $pq + r$  разных предметов, где  $0 \leq r < p$ . Они делятся между  $p$  людьми возможно ровнее (каждый получает либо  $q$ , либо  $q + 1$  предметов). Покажите, что число способов такого раздела равно

$$C_p^r \frac{(pq + r)!}{(q + 1)^r (q!)^p}.$$

## Глава IV

### РАЗБИЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим разные варианты уже встречавшейся задачи о разбиении числа на слагаемые. К этой задаче сводятся многие другие, причем здесь возникают разные особенности в зависимости от ограничений, накладываемых на величину или число слагаемых.

#### 55. Задача о наклейке марок

*За пересылку бандероли надо уплатить 18 рублей, наклеивая на нее марки. На почте есть по одному виду марок достоинством в 4, 6 и 10 рублей (зато в неограниченном количестве). Сколькими способами можно оплатить пересылку бандероли, если два способа, отличающиеся номиналом или порядком наклеивания марок, считаются различными (марки наклеиваются в один ряд)?*

Обозначим через  $F(N)$  число способов, которыми можно наклеить марки достоинством в 4, 6 и 10 (здесь и далее рублей) так, чтобы общая стоимость этих марок равнялась  $N$ . Для малых значений  $N$  легко найти  $F(N)$  непосредственно. Простой подсчет показывает, что  $F(0) = 1$  (не наклеивать ни одной марки),  $F(1) = F(2) = F(3) = 0$  (как ни наклеивать марки указанного выше достоинства, суммы в 1, 2 или 3 не получится).

Далее,  $F(4) = 1$  (наклеивается одна марка достоинством в 4),  $F(5) = F(7) = F(9) = 0$ ,  $F(6) = F(8) = 1$ . Непосредственный подсчет показывает также, что  $F(10) = 3$  (марки 10, 4 + 6, 6 + 4). Дальше непосредственный подсчет становится затруднительным, но он уже и не нужен. Достаточно заметить, что для любого  $N$  верно рекуррентное соотношение

$$F(N) = F(N - 4) + F(N - 6) + F(N - 10). \quad (1)$$

В самом деле, пусть имеется некоторый способ наклейки марок с общей стоимостью  $N$ , и пусть последней наклеена марка стоимостью в 4 рубля. Тогда все остальные марки вместе стоят  $N - 4$ . Наоборот, присоединяя в конец любой комбинации марок общей стоимостью  $N - 4$  одну 4-рублевую марку, получаем комбинацию марок стоимостью  $N$ . При этом из разных комбинаций стоимостью  $N - 4$  получатся разные комбинации стоимостью  $N$ . Итак, число искомых комбинаций, где последней наклеена 4-рублевая марка, равно  $F(N - 4)$ .

Точно так же доказывается, что число комбинаций, оканчивающихся на 6-рублевую марку, равно  $F(N - 6)$ , а на 10-рублевую марку оканчиваются  $F(N - 10)$  комбинаций. Поскольку

любая комбинация оканчивается на марку одного из указанных типов, то по правилу суммы получаем соотношение (1).

А теперь уже легко найти, сколькими способами можно получить сумму 18, т. е. вычислить  $F(18)$ . По формуле (1)

$$F(18) = F(14) + F(12) + F(8).$$

Значение  $F(8)$  мы уже знаем — оно равно 1. А к  $F(14)$  и  $F(12)$  мы еще раз применим формулу (1):

$$F(14) = F(10) + F(8) + F(4) = 3 + 1 + 1 = 5,$$

$$F(12) = F(8) + F(6) + F(2) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

$$\text{Значит, } F(18) = 5 + 2 + 1 = 8.$$

Итак, сумму 18 можно получить 8 способами. Вот они:

$$\begin{aligned} & 6 + 4 + 4 + 4; \quad 4 + 6 + 4 + 4; \quad 10 + 4 + 4; \quad 4 + 4 + 6 + 4; \\ & 4 + 10 + 4; \quad 4 + 4 + 4 + 6; \quad 6 + 6 + 6; \quad 4 + 4 + 10. \end{aligned}$$

Отметим, что значения  $F(N)$  для  $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  можно было получить иначе, не проводя непосредственной проверки. Дело в том, что при  $N < 0$  имеем  $F(N) = 0$ , поскольку отрицательную сумму нельзя уплатить, наклеивая неотрицательное количество марок. В то же время, как мы видели,  $F(0) = 1$ . Поэтому  $F(1) = F(-3) + F(-5) + F(-9) = 0$ .

Точно так же получаем значение  $F(2) = 0$ ,  $F(3) = 0$ . А для  $N = 4$  имеем  $F(4) = F(0) + F(-2) + F(-6) = 1$ .

Разобранная задача является частным случаем следующей общей задачи.

*Имеются марки достоинством в  $n_1, n_2, \dots, n_k$  рублей (все числа  $n_i$  различны, а запас марок неограничен). Сколькими способами, наклеивая марки в ряд, можно оплатить с их помощью сумму в  $N$  рублей, если два способа, отличающиеся порядком следования различных марок, считаются разными?*

В этом случае число  $F(N)$  способов удовлетворяет соотношению

$$F(N) = F(N - n_1) + F(N - n_2) + \dots + F(N - n_k). \quad (2)$$

При этом  $F(N) = 0$ , если  $N < 0$  и  $F(0) = 1$ . С помощью соотношения (2) можно найти  $F(N)$  для любого  $N$ , последовательно вычисляя  $F(1), F(2), \dots, F(N - 1)$ .

Такой способ решения задач, при котором сразу не дается окончательной формулы для ответа, а указывается лишь процесс, позволяющий сводить задачу ко все меньшим и меньшим числовым данным, встречается в комбинаторике очень часто.

Равенства вида (2) называют *рекуррентными формулами*. Подробнее мы на этом остановимся в главе VII.

## 56. Разбиение чисел на слагаемые

В задаче о наклейке марок мы должны были выбирать марки лишь ограниченного числа видов. Рассмотрим один частный случай этой задачи.

*На почте имеется по одному виду марок каждого номинала (в 1, 2, 3 рубля и т. д.), естественно, в достаточном количестве. Сколькими разными способами можно в этом случае наклеить в ряд марки на сумму в  $N$  рублей?*

Разными опять считаются способы, отличающиеся количеством марок или порядком наклеивания различных марок. Эту задачу можно сформулировать иначе.

*Сколькими способами можно представить число  $N$  в виде суммы натуральных слагаемых, если нет никаких ограничений ни на сами слагаемые, ни на их число, а два разбиения, отличающихся порядком следования различных слагаемых, считаются различными?*

Множество всех таких разбиений числа  $N$  можно разбить на классы, отнеся в  $k$ -й класс разбиения с  $k$  слагаемыми. Каждому такому разбиению отвечает раскладка  $N$  одинаковых шаров в  $k$  ящиков, при которой ни один из ящиков не пуст. А число таких раскладок, как мы знаем (см. п. 37), равно  $C_{N-1}^{k-1}$ .

Чтобы найти общее число разбиений, надо просуммировать полученные ответы по  $k$  от 1 до  $N$ :  $C_{N-1}^0 + C_{N-1}^1 + \dots + C_{N-1}^{N-1}$ . Но эта сумма равна  $2^{N-1}$ . Значит, существует  $2^{N-1}$  способов разложить число  $N$  на натуральные слагаемые. Например, число 5 можно разбить на слагаемые  $2^{5-1} = 16$  различными способами:

$$\begin{array}{lll} 5 = 5, & 5 = 3 + 1 + 1, & 5 = 2 + 1 + 1 + 1, \\ 5 = 4 + 1, & 5 = 2 + 2 + 1, & 5 = 1 + 2 + 1 + 1, \\ 5 = 3 + 2, & 5 = 2 + 1 + 2, & 5 = 1 + 1 + 2 + 1, \\ 5 = 2 + 3, & 5 = 1 + 3 + 1, & 5 = 1 + 1 + 1 + 2, \\ 5 = 1 + 4, & 5 = 1 + 2 + 2, & 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ & 5 = 1 + 1 + 3. & \end{array}$$

Легко понять, откуда взялось число  $2^{N-1}$ . Оно соответствует следующей схеме. Запишем в ряд  $N$  единиц. Между ними будет  $N - 1$  промежуток. В каждый из них можно поставить знак «+», а можно не ставить. Между знаками «+» получатся как раз слагаемые. Например,  $5 = 2 + 2 + 1$  получится как  $11 + 11 + 1$ .

Если допустить нулевые слагаемые, но задать число слагаемых равным  $k$ , то получим задачу о раскладке  $N$  шаров по  $k$  ящикам, которая решается  $C_{N+k-1}^{k-1}$  способами.

### Задачи

1. Сколькими способами можно наклеить на конверт в одну линию марки на 40 рублей, используя марки достоинством в 5, 10, 15 и 20 рублей (расположения, отличающиеся порядком марок, рассматриваются как различные; число марок не ограничено)?
2. Сколькими способами можно получить по восьми разным предметам оценки 3, 4 или 5 так, чтобы их сумма равнялась 30?
3. Числа от 1 до  $10^n$  выписаны подряд так, что получилась последовательность цифр 12345678910111213...10...0. Докажите, что число всех цифр этой последовательности равно числу нулей в последовательности 1, 2, 3, ...,  $10^{n+1}$ .

## 57. Жетоны в мешке

Самостоятельное развитие комбинаторики началось с переписки между Паскалем и Ферма о некоторых задачах, связанных с игрой в кости. Одной из этих задач был подсчет числа способов получить сумму  $N$  очков при бросании  $n$  костей (или при  $n$ -кратном бросании одной кости — это одно и то же, потому что кости можно считать перенумерованными). Эта задача близка к рассмотренной нами задаче о наклеивании марок или разбиении числа на слагаемые — выпадение определенного числа очков на кости можно рассматривать как наклеивание очередной марки номиналом от 1 до 6 рублей или добавление в сумму очередного слагаемого. Но есть существенное отличие — число «марок» теперь фиксировано — бросается  $n$  костей.

Рассмотрим теперь и мы даже не эту, а более общую задачу.

*Имеется мешок, в котором лежит  $m$  занумерованных жетонов — на них написаны числа 0, 1, ...,  $m - 1$ . Из мешка вытаскивают очередной жетон, записывают его номер, затем жетон кладут обратно в мешок. Так получают последовательность из  $n$  чисел, каждое из которых заключено в пределах от 0 до  $m - 1$ . Требуется узнать, сколько из получающихся таким образом различных последовательностей имеют сумму  $N$ .*

Это количество обозначим  $C_m(n, N)$ .

Рассмотрим последний,  $n$ -й из вытащенных жетонов. На нем может быть любое из  $m$  чисел 0, 1, ...,  $m - 1$ . Если на нем стоит 0, то первые  $n - 1$  жетонов должны давать сумму  $N$ . А количество последовательностей длины  $n - 1$  с суммой  $N$  равно  $C_m(n - 1, N)$  (число  $m$  различных жетонов мы считаем

фиксированным). Если на последнем жетоне стоит 1, то первые  $n - 1$  жетонов должны давать сумму  $N - 1$ , а таких последовательностей имеется  $C_m(n - 1, N - 1)$ . Вообще число последовательностей длины  $n$  с суммой  $N$  и последним членом  $k$  равно  $C_m(n - 1, N - k)$ . Поэтому по правилу суммы общее число последовательностей длины  $n$  с суммой  $N$  равно

$$\begin{aligned} C_m(n, N) = & C_m(n - 1, N) + C_m(n - 1, N - 1) + \\ & + C_m(n - 1, N - 2) + \dots + C_m(n - 1, N - m + 1) \end{aligned} \quad (3)$$

(мы полагаем  $C_m(k, N) = 0$ , если  $k < 0$ ).

Пользуясь этим равенством, можно свести задачу о метании  $n$  костей к задаче о метании  $n - 1$  костей, ее — к задаче о метании  $n - 2$  костей и продолжать этот процесс до тех пор, пока не останется ни одной кости. А для  $n = 0$  все очевидно — выбрасывая 0 костей, мы можем единственным образом получить 0 очков и никакого иного количества очков получить не можем. Значит,  $C_m(0, 0) = 1$  и  $C_m(0, N) = 0$ , если  $N < 0$ .

## 58. $m$ -арифметический треугольник

При  $m = 2$  в мешке есть лишь два жетона, на них написаны числа 0 и 1. Поэтому получаются последовательности длины  $n$  из нулей и единиц, а сумма чисел последовательности равна числу единиц в ней. Но количество последовательностей из  $N$  единиц и  $n - N$  нулей равно  $P(N, n - N)$ , т. е.  $C_n^N$ . Иными словами,  $C_2(n, N) = C_n^N$ . Формула (3) при  $m = 2$  превращается в уже знакомое нам соотношение  $C_n^N = C_{n-1}^N + C_{n-1}^{N-1}$ .

В п. 33 с помощью этого соотношения был построен арифметический треугольник. Точно так же соотношение (3) позволяет построить  *$m$ -арифметический треугольник*. Его элементы при четном  $m = 2k$  располагаются так, что под числами очередной строки находятся промежутки между числами следующей строки. При этом каждое число равно сумме  $2k$  чисел предыдущей строки:  $k$  чисел, находящихся слева от него, и  $k$  чисел, находящихся справа. Если же  $m = 2k + 1$  — нечетное число, то числа пишутся друг над другом и каждое число равно сумме находящегося над ним числа,  $k$  чисел, расположенных в предыдущей строке слева от него, и  $k$  чисел, расположенных в предыдущей строке справа от него. В обоих случаях сумма располагается симметрично относительно слагаемых. Если слева или справа от искомого числа в предыдущей строке чисел

не хватает, то недостающие слагаемые полагаются равными нулю.

Выпишем  $m$ -арифметические треугольники для  $m = 3$  и для  $m = 6$ :

$$m = 3; \quad C_3(n, N) = C_3(n - 1, N) + C_3(n - 1, N - 1) + C_3(n - 1, N - 2)$$

|             |                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------|------------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $C_3(0, N)$ | 1                            |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_3(1, N)$ | 1 1 1                        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_3(2, N)$ | 1 2 3 2 1                    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_3(3, N)$ | 1 3 6 7 6 3 1                |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_3(4, N)$ | 1 4 10 16 19 16 10 4 1       |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_3(5, N)$ | 1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| .....       | .....                        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

$$m = 6; \quad C_6(n, N) = C_6(n - 1, N) + C_6(n - 1, N - 1) + \dots + C_6(n - 1, N - 5)$$

|             |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $C_6(0, N)$ | 1   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_6(1, N)$ | 1 1 1 1 1 1                               |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_6(2, N)$ | 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $C_6(3, N)$ | 1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| .....       | .....                                     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Каждая строка этих таблиц начинается с 1. Это показывает, что сумму 0 дает лишь одна последовательность жетонов — состоящая из  $n$  нулей. Следующее за 1 число равно  $n$ , т. е. количеству вытаскиваемых жетонов — сумму 1 можно получить  $n$  способами, поставив 1 на одно из  $n$  мест, а остальные места заполнив нулями. Вообще, если нумерацию строк и элементов в строке начать с нуля, то  $N$ -е число в  $n$ -й строке равно  $C_m(n, N)$  — числу последовательностей длины  $n$  из чисел от 0 до  $m - 1$  с суммой чисел  $N$ . Но числа от 0 до  $m - 1$  — это цифры  $m$ -ичной системы счисления. Поэтому такую последовательность можно рассматривать как  $n$ -значное число в  $m$ -ичной системе счисления. Значит,  $C_m(n, N)$  равно количеству  $n$ -значных чисел в  $m$ -ичной системе счисления, у которых сумма цифр равна  $N$ .

При этом термин « $n$ -значные» мы понимаем в широком смысле, допуская и числа, начинающиеся с одного или нескольких нулей. Например, 001 215 рассматривается как шестизначное число, сумма цифр которого равна 9.

На обычных игральных костях очки идут от 1 до 6, а не от 0 до 5. Поэтому, чтобы узнать, сколькими способами можно получить  $N$  очков, выбросив  $n$  костей, надо сначала вычесть по 1 от чисел на каждой грани. В результате сумма очков уменьшится на  $n$ . Иными словами, число способов получить  $N$  очков при бросании  $n$  костей равно  $C_6(n, N - n)$ . Например, если число костей равно 3, а сумма очков — 8, то число способов равно  $C_6(3, 5)$ . По таблице для  $m = 6$  находим, что оно равно 21.

### 59. Счастливые троллейбусные билеты

Еще не так давно в автобусах и троллейбусах пассажиры при каждой поездке получали у кондуктора или в кассе билет с шестизначным номером (на нынешних одноразовых талонах тоже есть номер, но он десятизначный). Некоторые люди считали такой билет «счастливым», если в его номере сумма цифр в первой половине номера равнялась сумме цифр второй половины номера. Например, билет с номером 615 372 имеет равные суммы первых и последних трех цифр:  $6 + 1 + 5 = 3 + 7 + 2 = 12$ , поэтому он счастливый. А некоторые считали билет счастливым, если сумма цифр, стоящих на четных местах, была равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Например, билет 631 752 считается счастливым —  $6 + 1 + 5 = 3 + 7 + 2 = 12$ . Но если мы первые три цифры номера переставим на 1-е, 3-е и 5-е места (от начала), а последние три цифры — на 2-е, 4-е и 6-е места, то счастливый билет первого типа перейдет в счастливый билет второго типа (можно проделать и обратную операцию). Поэтому их количества равны. Сколько же существует «счастливых» номеров от 000 000 до 999 999?

Чтобы ответить на этот вопрос, сначала найдем, сколько трехзначных чисел имеет данную сумму цифр  $N$  (при этом мы относим к трехзначным и числа вида 075 и даже 000). Здесь число слагаемых 3, сумма равна  $N$ , а слагаемые — от 0 до 9, поэтому таких чисел будет  $C_{10}(3, N)$ . Имеет место рекуррентное соотношение

$$C_{10}(3, N) = C_{10}(2, N) + C_{10}(2, N - 1) + \dots + C_{10}(2, N - 9).$$

Точно так же

$$C_{10}(2, N) = C_{10}(1, N) + C_{10}(1, N - 1) + \dots + C_{10}(1, N - 9).$$

Ясно, что  $C_{10}(1, N) = 1$ , если  $0 \leq N \leq 9$ , и  $C_{10}(1, N) = 0$  в противном случае. Пользуясь этими соотношениями, без труда

заполняем следующую таблицу значений  $C_{10}(k, N)$  для  $k = 1, 2, 3$  и  $N$  от 0 до 27:

| $N$     | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $k = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $k = 2$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  |
| $k = 3$ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 63 | 69 | 73 | 75 |

| $N$     | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $k = 1$ | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $k = 2$ | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $k = 3$ | 75 | 73 | 69 | 63 | 55 | 45 | 36 | 28 | 21 | 15 | 10 | 6  | 3  | 1  |

Обратим внимание на некоторую симметрию этой таблицы. Поскольку при замене каждой из трех цифр на ее дополнение до 9 сумма цифр меняется с  $N$  на  $27 - N$ , то выполняется равенство  $C_{10}(3, N) = C_{10}(3, 27 - N)$ . Аналогично выполняются равенства  $C_{10}(2, N) = C_{10}(2, 18 - N)$ .

Чтобы найти теперь число счастливых билетов, надо взвесить в квадрат числа третьей строки и сложить получающиеся результаты. В самом деле, каждый счастливый билет имеет одну и ту же сумму цифр, стоящих на первых трех и последних трех местах. Пусть эта сумма равна  $N$ . Число, стоящее на  $N$ -м месте третьей строки нашей таблицы, показывает, сколько трехзначных чисел имеет сумму цифр  $N$ . Иными словами, оно показывает, сколькими способами можно выбрать первую половину шестизначного номера билета. Столькими же способами можно выбрать вторую половину номера билета. Так как эти выборы не зависят друг от друга, то по правилу произведения число счастливых номеров с суммой цифр на четных местах, равной  $N$ , будет  $[C_{10}(3, N)]^2$ . А тогда по правилу суммы общее число «счастливых» номеров равно

$$2(1^2 + 3^2 + 6^2 + 10^2 + 15^2 + 21^2 + 28^2 + 36^2 + 45^2 + 55^2 + 63^2 + 69^2 + 73^2 + 75^2) = 55 \cdot 252.$$

Поскольку всего шестизначных номеров миллион, счастливым является примерно один билет из 18.

Другая форма ответа получается следующим образом. Заменим последние три цифры счастливого билета их дополнениями до 9. Например, вместо 615 372 возьмем 615 627. Тогда если сумма первых трех цифр равна  $N$ , то сумма последних трех станет  $27 - N$  и получится билет, сумма цифр которого равна

27 (например,  $6 + 1 + 5 + 6 + 2 + 7 = 27$ ). Так как цифры в билете принимают значения от 0 до 9, число цифр в каждом номере равно 6, а их сумма равна 27, то число счастливых билетов равно  $C_{10}(6, 27)$ . Вот только нахождение этого числа довольно трудоемко (если не пользоваться компьютером) — для этого надо построенную нами таблицу значений  $C_{10}(k, N)$  достроить до значений  $k = 6$ .

В п. 118 мы укажем более простую форму ответа этой задачи.

## 60. Некоторые свойства чисел $C_m(n, N)$

Числа  $C_m(n, k)$  обладают рядом свойств, напоминающих свойства чисел  $C_n^k$ . Это не удивительно, поскольку в силу построения арифметического треугольника имеем  $C_2(n, k) = C_n^k$ .

В первую очередь отметим, что  $C_m(n, N)$  отлично от нуля лишь при  $0 \leq N \leq n(m - 1)$ . Это сразу следует из того, что каждая следующая строка  $m$ -арифметического треугольника длиннее предыдущей на  $m - 1$ .

Далее, покажем, что числа  $C_m(n, N)$  обладают следующим свойством симметрии:

$$C_m(n, N) = C_m(n, n(m - 1) - N). \quad (4)$$

Для этого сопоставим каждому  $n$ -значному числу в  $m$ -ичной системе счисления «дополнительное число», получающееся путем замены каждой цифры ее дополнением до  $m - 1$ . Например, в семеричной системе счисления дополнительным к 3140216 будет число 3526450. Ясно, что если сумма цифр данного  $n$ -значного числа равнялась  $N$ , то сумма цифр дополнительного числа равна  $n(m - 1) - N$ . Поэтому  $n$ -значных чисел с суммой цифр  $N$  столько же, сколько и с суммой цифр  $n(m - 1) - N$ . Но это и выражено равенством (4).

Так как общее количество  $n$ -значных чисел в  $m$ -ичной системе счисления равно  $m^n$  (см. п. 7), то имеет место соотношение

$$C_m(n, 0) + C_m(n, 1) + \dots + C_m(n, n(m - 1)) = m^n. \quad (5)$$

Докажем теперь соотношение

$$\begin{aligned} C_m(k, 0)C_m(n - k, N) + C_m(k, 1)C_m(n - k, N - 1) + \dots \\ \dots + C_m(k, N)C_m(n - k, 0) = C_m(n, N), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $0 \leq k \leq n$ . Для этого разобьем все  $n$ -значные числа с суммой цифр, равной  $N$ , на классы. К  $s$ -му классу отнесем числа, сумма первых  $k$  цифр которых равна  $s$ . Тогда сумма последних  $n - k$  цифр будет равна  $N - s$ . По правилу произведения получаем, что в  $s$ -й класс входит  $C_m(k, s)C_m(n - k, N - s)$  чисел. Так как общее количество  $n$ -значных чисел с суммой цифр  $N$  равно  $C_m(n, N)$ , то по правилу суммы получаем соотношение (6). В частности, при  $k = 1$  соотношение (6) приводит к равенству (3), так как  $C_m(1, N) = 1$  при  $0 \leq N \leq m - 1$  и  $C_m(1, N) = 0$  при  $N < 0$  или  $N \geq m$ .

Наконец, покажем, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} C_m(n, N) = & C_n^0 C_{m-1}(n, N - n) + C_n^1 C_{m-1}(n - 1, N - n + 1) + \dots + \\ & + C_n^s C_{m-1}(n - s, N - n + s) + \dots + C_n^n C_{m-1}(0, N). \end{aligned} \quad (7)$$

Для этого разобьем все  $n$ -значные числа в  $m$ -ичной системе счисления, сумма цифр которых равна  $N$ , на классы. К  $s$ -му классу,  $0 \leq s \leq n$ , отнесем числа, в  $m$ -ичной записи которых встречается ровно  $s$  нулей.

Найдем, сколько чисел входит в  $s$ -й класс. Каждое число  $s$ -го класса может быть выбрано в два этапа. Сначала выберем места, на которых стоят нули. Так как рассматриваются  $n$ -значные числа, а количество нулей равно  $s$ , то это может быть сделано  $C_n^s$  способами. После этого вычеркнем все нули и уменьшим каждую оставшуюся цифру на 1. Мы получим  $(n - s)$ -значное число, записанное цифрами 0, 1, ...,  $m - 2$  (т. е. число в  $(m - 1)$ -ичной системе счисления), сумма цифр этого числа равна  $N - (n - s) = N - n + s$ . Количество таких чисел равно  $C_{m-1}(n - s, N - n + s)$ . Из проведенных рассуждений видно, что в  $s$ -й класс входит  $C_n^s C_{m-1}(n - s, N - n + s)$  чисел. Так как общее количество  $n$ -значных чисел, имеющих сумму цифр  $N$ , равно  $C_m(n, N)$ , то в силу правила суммы получаем соотношение (7).

Так как  $C_2(n, k) = C_n^k$ , то из соотношения (7) следует, что

$$C_3(n, k) = C_n^0 C_n^{k-n} + C_n^1 C_{n-1}^{k-n+1} + \dots + C_n^n C_0^k.$$

Выражение  $C_m(n, k)$  через биномиальные коэффициенты для  $m = 4, 5$  и т. д. получаем, применяя формулу (7) несколько раз.

**61. Проблема абитуриента**

*Поступающий в университет должен сдать 4 экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл равен 17?*

Эта задача похожа на задачу о 4-кратном бросании кости. Только теперь каждое «бросание» (т. е. каждый экзамен) дает 3, 4 или 5 баллов (шесть баллов за один экзамен получить нельзя, а с двойкой в университет не принимают). Можно воспользоваться таблицей для  $m = 3$ , если заменить эти результаты на 0, 1 и 2 балла (т. е. считать превышение оценки над 3). Тогда результат каждого из 4 экзаменов уменьшится на 3, а общая сумма баллов — на 12. Поэтому надо решить такую задачу: сколькими способами можно получить не менее 5 очков, бросая 4 раза кость, на которой нанесены цифры 0, 1 и 2? Так как число бросаний равно 4, то берем в таблице для  $m = 3$  строку значений  $C_3(4, N)$ .

В этой строке нас интересуют четыре последних числа. Складывая их, получаем  $16 + 10 + 4 + 1 = 31$ . Значит успешно сдать экзамены можно 31 способом.

Эти способы таковы:

$(5, 4, 4, 4), (5, 5, 4, 3), (5, 5, 5, 3), (5, 5, 4, 4), (5, 5, 5, 4), (5, 5, 5, 5)$ , а также все (различные) способы, получаемые из написанных перестановками чисел. Тот же результат можно получить непосредственно. Легко проверить, что набрать 17 баллов можно лишь двумя существенно различными способами:  $5 + 5 + 4 + 3$  или  $5 + 4 + 4 + 4$ . Эти отметки могут любым способом распределяться по сдаваемым предметам. Так как  $P(2, 1, 1) + P(1, 3) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 16$ , то 17 очков можно получить 16 способами. Точно так же подсчитывается число способов получить 18, 19 и 20 баллов.

**62. Уплата денег**

*В кошельке лежат монеты в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 копеек<sup>1)</sup> по одной монете каждого достоинства. Сколько способами можно уплатить этими монетами 73 копейки без сдачи?*

В отличие от рассмотренных выше задач здесь порядок монет не играет роли — важно лишь, какие именно монеты берутся для уплаты, но зато каждая монета есть в единственном экземпляре.

Обозначим через  $F(k_1, k_2, \dots, k_m; N)$  число способов, которыми можно уплатить  $N$  копеек с помощью монет различного

---

<sup>1)</sup> Были когда-то такие.

достоинства  $k_1, k_2, \dots, k_m$  копеек, беря не более чем по одной монете каждого достоинства. Разобъем все способы уплаты на два класса в зависимости от того, использована или нет монета достоинством в  $k_m$  копеек.

Если она использована, то остается уплатить сумму в  $N - k_m$  копеек с помощью монет в  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  копеек. А это можно сделать  $F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N - k_m)$  способами. Если же монета в  $k_m$  копеек не использована, то надо оплатить всю сумму в  $N$  копеек с помощью монет в  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  копеек. А это можно сделать  $F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N)$  способами. Отсюда следует, что имеет место рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} F(k_1, k_2, \dots, k_m; N) &= \\ &= F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N - k_m) + F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N). \end{aligned} \quad (8)$$

Это соотношение позволяет свести задачу о выборе из  $m$  монет к задаче о выборе из  $m - 1$  монет. Повторяя это же рассуждение, сводим к задаче о выборе из  $m - 2$  монет и т. д., пока не дойдем либо до задачи об уплате нулевой суммы, либо до задачи о выборе из одной монеты. Обе задачи решаются однозначно. При этом в ходе вычисления многие слагаемые отбрасываются. Ведь если  $N > k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , то монет не хватает на оплату покупки и  $F(k_1, k_2, \dots, k_m; N) = 0$ . Кроме того, в записи  $F(k_1, k_2, \dots, k_m; N)$  всегда можно вычеркнуть те  $k_j$ , которые больше  $N$  — они не могут участвовать в оплате суммы  $N$  копеек (например,  $F(1, 2, 8, 10; 7) = F(1, 2; 7)$ ).

Применим описанный метод к решению нашей задачи. По соотношению (8) выводим сначала, что

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) &= F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) + \\ &\quad + F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23), \end{aligned}$$

так как  $1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 + 20 < 73$  и потому, как уже объяснялось,  $F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) = 0$ .

Далее получаем, что

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) &= \\ &= F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23). \end{aligned}$$

Вычислим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) &= F(1, 2, 3; 3) = \\ &= F(1, 2; 0) + F(1, 2; 3) = 1 + F(1; 3) + F(1; 1) = 2. \end{aligned}$$

Вычислим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) &= \\ &= F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23) = F(1, 2, 3, 5; 8), \end{aligned}$$

так как  $1 + 2 + 3 + 5 + 10 < 23$ , и

$$F(1, 2, 3, 5; 8) = F(1, 2, 3; 8) + F(1, 2, 3; 3) = 0 + 2 = 2.$$

Окончательно получаем, что

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = 4.$$

Итак, требуемую уплату можно произвести 4 способами, а именно:

$$50 + 20 + 3, \quad 50 + 20 + 2 + 1, \quad 50 + 15 + 5 + 3, \quad 50 + 15 + 5 + 2 + 1.$$

### 63. Покупка конфет

*В магазине продаются конфеты нескольких видов: 3 вида — по 2 копейки за штуку и 2 вида — по 3 копейки за штуку. Сколькими способами можно купить конфеты на 8 копеек, если брать не более одной конфеты каждого вида?*

Число способов можно, как и раньше, обозначить через  $F(2, 2, 2, 3, 3; 8)$ . Здесь в скобках встречаются одинаковые числа, но они обозначают разные конфеты, так что каждое число можно употреблять как слагаемое лишь один раз, поэтому соотношение

$$\begin{aligned} F(k_1, k_2, \dots, k_m; N) &= \\ &= F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N - k_m) + F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N) \end{aligned}$$

будет справедливо и для этого более общего случая. Решение задачи получается из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} F(2, 2, 2, 3, 3; 8) &= F(2, 2, 2, 3; 5) + F(2, 2, 2, 3; 8) = \\ &= F(2, 2, 2; 2) + 2F(2, 2, 2; 5) + F(2, 2, 2; 8) = \\ &= F(2, 2, 2; 2) = F(2, 2; 0) + F(2, 2; 2) = 1 + F(2; 0) + F(2; 2) = 3. \end{aligned}$$

Итак, покупку можно сделать 3 способами: непременно купить по одной конфете обоих видов по 3 копейки и добавить к ним любую из трех конфет по 2 копейки.

Казалось бы, столько же решений должна иметь такая задача.

*В кошельке лежат три монеты по 2 копейки и две монеты по 3 копейки. Сколькими способами можно уплатить с помощью этих монет сумму в 8 копеек?*

Это зависит, однако, от того, какие именно монеты лежат в кошельке. Если монеты по 2 копейки, равно как и монеты по 3 копейки, различны (например, разных годов выпуска),

то задача совпадает с разобранной и уплату можно произвести 3 способами. Если же все монеты по 2 копейки неразличимы, то остается единственный способ уплаты — обе монеты по 3 копейки и одна монета в 2 копейки.

Таким образом, задачи на уплату имеют разный характер в зависимости от того, различимы или нет монеты одного и того же достоинства. Разобранный выше метод решения годится лишь в случае, когда все монеты даже одинакового достоинства считаются различными.

Покажем теперь, как решать задачу в случае, когда монеты одного достоинства считаются неразличимыми.

*В кошельке лежат 10 монет по 2 копейки и 5 монет по 3 копейки. Сколькими способами можно уплатить этими монетами сумму в 22 копейки, если монеты одного достоинства неразличимы?*

Обозначим число решений задачи через  $\Phi(2_{10}, 3_5; 22)$  (здесь  $2_{10}$  означает, что у нас монет по 2 копейки есть 10 штук, а  $3_5$  — что монет по 3 копейки есть 5 штук). Разобьем все способы решения задачи на классы в зависимости от того, сколько использовано 3-копеечных монет. Если, например, использованы две такие монеты, то остается уплатить 16 копеек с помощью 2-копеечных монет, а если использованы все пять монет, то остается уплатить лишь 7 копеек. Если же 3-копеечные монеты совершенно не использовались для уплаты, то все 22 копейки надо уплатить 2-копеечными монетами. Таким образом, имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Phi(2_{10}, 3_5; 22) = & \Phi(2_{10}; 22) + \Phi(2_{10}; 19) + \Phi(2_{10}; 16) + \\ & + \Phi(2_{10}; 13) + \Phi(2_{10}; 10) + \Phi(2_{10}; 7).\end{aligned}\quad (9)$$

Продолжать дальше не надо, так как у нас только пять 3-копеечных монет. Ясно, что имея лишь десять 2-копеечных монет, невозможно уплатить 22 копейки, поэтому  $\Phi(2_{10}; 22) = 0$ . Далее, очевидно, что нечетную сумму невозможно уплатить 2-копеечными монетами, а четную можно уплатить единственным образом. Поэтому из формулы (9) следует

$$\Phi(2_{10}, 3_5; 22) = \Phi(2_{10}; 16) + \Phi(2_{10}; 10) = 1 + 1 = 2.$$

Есть только два способа уплаты:  $22 = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3$ ,  $22 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3$ .

## 64. Как разменять гривенник?

Когда-то проезд на метро оплачивался 5-копеечной монетой, разговор по телефону-автомату — 2-копеечной, чтобы выпить стакан газированной воды с сиропом, надо было опустить в автомат 3-копеечную монету, а без сиропа — 1-копеечную

монету. И регулярно надо было разменивать гривенник (монету в 10 копеек) на более мелкие. Вот и решим такую задачу.

*Сколькоими способами можно разменять монету в 10 копеек на монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек?*

Эта задача похожа на решавшуюся в предыдущем пункте. Только теперь число монет разного достоинства не ограничено. Поэтому число решений мы обозначим так:  $\Phi(1, 2, 3, 5; 10)$ . Рассуждая точно так же, как и в предыдущем пункте, разобьем все способы размена на классы по числу входящих в них пятачков (0, 1 или 2):

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3; 5) + \Phi(1, 2, 3; 0). (10)$$

Ясно, что  $\Phi(1, 2, 3; 0) = 1$  — разменять 0 копеек можно единственным образом.

Чтобы сосчитать  $\Phi(1, 2, 3; 5)$ , разобьем все способы размена 5 копеек монетами 1, 2, 3 копейки на классы в зависимости от того, сколько берут 3-копеечных монет. Мы получим

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1, 2; 5) + \Phi(1, 2; 2)$$

(первое слагаемое соответствует случаю, когда не берется ни одна 3-копеечная монета, а второе — когда берут одну такую монету). Продолжая вычисления, доходим до строки

$$\Phi(1, 2, 3; 5) = \Phi(1; 5) + \Phi(1; 3) + \Phi(1; 1) + \Phi(1; 2) + \Phi(1; 0).$$

Все эти слагаемые равны 1, так как любая сумма копейками разменивается единственным образом. Итак,  $\Phi(1, 2, 3; 5) = 5$ . Точно так же подсчитывается, что  $\Phi(1, 2, 3; 10) = 14$ . Всего получаем  $14 + 5 + 1 = 20$  способов.

Вместо соотношения (10) можно было взять сначала соотношение

$$\Phi(1, 2, 3, 5; 10) = \Phi(1, 2, 3; 10) + \Phi(1, 2, 3, 5; 5).$$

Оно показывает, что способы размена распадаются на те, где не использован ни один пятачок, и на те, где хотя бы один пятачок использован.

*Вообще, если надо разменять  $N$  копеек монетами достоинством в  $k_1, k_2, \dots, k_m$  копеек, то для числа способов размена  $\Phi(k_1, k_2, \dots, k_m; N)$  верно рекуррентное соотношение*

$$\begin{aligned} \Phi(k_1, k_2, \dots, k_m; N) &= \\ &= \Phi(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N) + \Phi(k_1, k_2, \dots, k_m; N - k_m). \end{aligned} \quad (11)$$

Рекуррентное соотношение (11) показывает, что либо мы не используем ни одной монеты в  $k_m$  копеек, набирая всю сумму

монетами в  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  копеек, либо хотя бы одна из монет в  $k_m$  копеек использована, тогда надо набрать оставшуюся сумму в  $N - k_m$  копеек монетами в  $k_1, k_2, \dots, k_m$  копеек.

Если же, как это было в п. 62, монеты не должны повторяться, то соотношение (11) заменяется соотношением

$$\begin{aligned} F(k_1, k_2, \dots, k_m; N) = \\ = F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N) + F(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}; N - k_m). \end{aligned} \quad (12)$$

### Задачи

4. У нынешних талонов на проезд 10-значный номер. Определите, насколько часто среди них попадаются «счастливые».

5. Докажите, что 1 рубль можно разменять монетами в 2 и 5 копеек большим числом способов, чем монетами в 3 и 5 копеек.

6. а) Сколькими способами можно разменять 20 копеек на монеты в 1, 2 и 5 копеек?  
б) Сколькими способами можно разменять рубль на монеты достоинством в 10, 15, 20 и 50 копеек?

7. Сколькими способами можно составить вес в 78 г, пользуясь восемью разновесками в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 г? При этом считается, что применение двух разных разновесок, хотя бы и имеющих одинаковый вес, дает различные комбинации.

## 65. Диаграммная техника

Первоначальные методы доказательства теорем о разбиениях чисел были весьма сложны. Как и во многих вопросах математики, привлечение геометрических соображений упростило и сделало наглядными доказательства этих теорем.

Каждое разбиение числа  $N$  на слагаемые можно изобразить в виде диаграммы. Каждая строка диаграммы состоит из стольких точек, сколько единиц входит в соответствующее слагаемое. Например, разбиению  $7 = 1 + 1 + 2 + 3$  соответствует диаграмма на рис. 20.

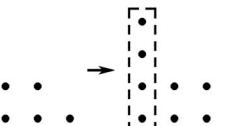
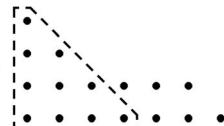
Разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, мы будем рассматривать как одинаковые. Для таких разбиений строки в диаграмме можно расположить так, чтобы их длина не убывала сверху вниз. Кроме того, первые точки в каждой строке мы будем изображать в одном и том же столбце. Такие диаграммы будем называть *нормальными*.

С помощью диаграмм легко доказывать различные свойства разбиений. Докажем, например, что *число способов разбиения числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых такое же, как и способов разбиения  $N + m$  на ровно  $m$  слагаемых*.

В самом деле, диаграмма, изображающая разбиение числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых, состоит из  $N$  точек, расположенных не более чем в  $m$  строках. Дополним ее сверху нулевыми строками так, чтобы в ней стало  $m$  строк, и добавим



Рис. 20

Рис. 21.  $N = 5, m = 4$ Рис. 22.  $N = 6, m = 4$ 

к каждой из таких диаграмм слева столбец, состоящий из  $m$  точек (см. рис. 21, где изображено это преобразование для  $N = 5, m = 4$ ). Получится диаграмма, состоящая из  $N + m$  точек, расположенных в  $m$  строках, причем в каждой строке окажется хотя бы одна точка. Обратно, если задана диаграмма, состоящая из  $N + m$  точек, расположенных в  $m$  строках, то, отбрасывая ее первый столбец, мы получим диаграмму из  $N$  точек, причем число строк будет не больше, чем  $m$  (сверху могут появиться нулевые строки, их можно не учитывать).

Мы установили взаимно однозначное соответствие между диаграммами двух видов. Поэтому число диаграмм обоих видов одинаково.

Несколько сложнее доказывается следующая теорема (теорема Эйлера).

*Число способов разбиения числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых равно числу способов разбиения числа  $N + \frac{m(m+1)}{2}$  на  $m$  неравных частей.*

Каждое разбиение числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых изобразим в виде нормальной диаграммы из  $N$  точек, она будет содержать не более чем  $m$  строк. Опять дополним ее сверху нулевыми строками так, чтобы в ней стало  $m$  строк, а затем добавим к каждой такой диаграмме слева равнобедренный прямоугольный треугольник из  $m$  строк (на рис. 22 изображено такое преобразование при  $N = 6, m = 4$ ). Так как число точек в треугольнике равно  $\frac{m(m+1)}{2}$ , то мы получим нормальную диаграмму из  $N + \frac{m(m+1)}{2}$  точек, содержащую  $m$  строк.

При этом все строки диаграммы будут различной длины. В самом деле, длины строк исходной диаграммы при движении сверху вниз не убывают, а длины строк треугольника все время увеличиваются. Значит, после добавления треугольника получается диаграмма, длины строк которой все время растут. Следовательно, строк одинаковой длины быть не может.

Обратно, из каждой нормальной диаграммы для разбиения числа  $N + \frac{m(m+1)}{2}$  на  $m$  неравных слагаемых можно удалить слева равнобедренный прямоугольный треугольник, содержащий  $m$  строк, и получить диаграмму для разбиения  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых. Это соответствие между диаграммами двух видов показывает, что число их одинаково. Тем самым наше утверждение доказано.

## 66. Двойственные диаграммы

Наряду с добавлением столбцов или треугольников часто используют поворот диаграмм на  $90^\circ$  с последующей нормализацией (рис. 23). Если сделать такое преобразование еще раз, то снова получим исходную диаграмму. Поэтому все диаграммы распадаются на двойственные друг другу пары диаграмм (хотя некоторые диаграммы оказываются при этом двойственными сами себе, например, диаграмма на рис. 24).

Пользуясь двойственностью диаграмм, можно сравнивать разбиения, подчиненные некоторым условиям на величину слагаемых, с разбиениями, подчиненными условиям на число слагаемых. Например, справедливо следующее утверждение.

*Разбиений числа  $N$  на слагаемые, не превосходящие  $m$ , столько же, сколько разбиений  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых.*

В самом деле, диаграммы, изображающие разбиение  $N$  на слагаемые, не превосходящие  $m$ , состоят из строк, ни одна из которых не длиннее, чем  $m$ . Значит, в таких диаграммах не более чем  $m$  столбцов. А если повернуть такую диаграмму на  $90^\circ$ , то получится диаграмма, содержащая не более чем  $m$  строк, т. е. изображающая разбиение того же числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых.

Точно так же доказывается следующее утверждение.

*Разбиений числа  $N$  на  $m$  слагаемых столько же, сколько разбиений  $N$  на слагаемые, не превосходящие  $m$ , хотя бы одно из которых равно  $m$ .*

Далее, рассмотрим разбиения числа  $N$  на четные слагаемые. Эти разбиения изображаются диаграммами, строки которых содержат четное число точек. Но тогда в двойственной диаграмме

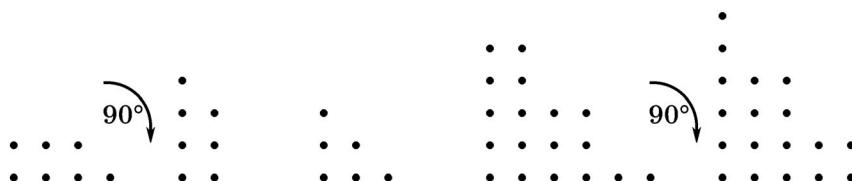


Рис. 23

Рис. 24

Рис. 25

будет четное количество слагаемых каждого вида (рис. 25). Отсюда выводим такое утверждение.

*Разбиений числа  $N$  на четные слагаемые столько же, сколько разбиений, в которые каждое из чисел входит с четной кратностью* (разумеется, некоторые из чисел могут совсем не входить, так как нуль — четное число).

Аналогично доказывается следующее утверждение.

*Разбиений числа  $N$  на нечетные слагаемые столько же, сколько разбиений  $N$ , в которые каждое из слагаемых, кроме наибольшего, входит с четной кратностью, а наибольшее слагаемое — с нечетной кратностью.*

### Задачи

8. Докажите, что полное количество разбиений числа  $n$  на несколько слагаемых равно количеству разбиений числа  $2n$  на  $n$  слагаемых (порядок слагаемых не принимается во внимание).

9. Докажите, что количество разбиений числа  $2r+x$  на  $r+x$  слагаемых такое же, как и количество разбиений  $r$  на слагаемые.

10. Докажите, что число способов разбить  $n$  на слагаемые так, чтобы ни одно число не входило в сумму более  $r-1$  раз, равно числу способов разбить  $n$  на части, не делящиеся на  $r$ .

## 67. Формула Эйлера

В связи с некоторыми вопросами разбиений Эйлер изучил бесконечное произведение

$$A = (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots (1 - x^n) \dots \quad (13)$$

Раскроем в этом произведении первые 22 скобки. Мы получим выражение

$$\begin{aligned} A = & [1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \dots] \times \\ & \times (1 - x^{23})(1 - x^{24}) \dots (1 - x^n) \dots, \end{aligned}$$

где в квадратной скобке точками обозначены слагаемые, содержащие  $x$  в более высокой степени, чем 22. Мы не стали выписывать эти члены, так как после умножения квадратной скобки на  $1 - x^{23}$ ,  $1 - x^{24}$  и т. д. они изменятся. Выписанные же члены больше меняться не будут. Поэтому, если раскрыть все скобки, то получится бесконечный ряд, первые члены которого имеют вид

$$A = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + \dots \quad (14)$$

Видно, что после двух отрицательных членов идут два положительных, потом снова два отрицательных и т. д. Однако закон, по которому идут показатели этих членов, уловить гораздо труднее. Путем длительного экспериментирования Эйлер установил следующее правило.

*Если превратить бесконечное произведение*

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots (1-x^n) \dots \quad (15)$$

*в ряд, то в этом ряду будут отличны от нуля лишь слагаемые вида  $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$ , где  $k$  — натуральное число.*

Теорема Эйлера имеет большое значение не только в теории разбиений на слагаемые, но и в теории эллиптических функций и других вопросах математического анализа. Однако большинство доказательств этой теоремы довольно сложны. Мы приведем сейчас весьма простое геометрическое доказательство теоремы Эйлера. Предварительно нам понадобится сформулировать эту теорему на языке теории разбиений.

При раскрытии скобок в выражении (13) слагаемое  $\pm x^N$  встретится столько раз, сколькими способами можно разбить число  $N$  на различные слагаемые. При этом если число слагаемых четно, то появляется  $x^N$ , а если это число нечетно, то появляется  $-x^N$ . Например, разбиению  $12 = 5 + 4 + 2 + 1$  соответствует слагаемое  $(-x^5)(-x^4)(-x^2)(-x^1) = x^{12}$ , а разбиению  $12 = 5 + 4 + 3$  — слагаемое  $(-x^5)(-x^4)(-x^3) = -x^{12}$ . Таким образом, коэффициент при  $x^N$  в разложении (15) равен разности между количеством разбиений  $N$  на четное число различных слагаемых и количеством разбиений  $N$  на нечетное число различных слагаемых. Теорема Эйлера утверждает следующее.

*Если число  $N$  не может быть представлено в виде  $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. А для чисел вида  $N = \frac{3k^2 \pm k}{2}$  разность между этими количествами равна  $(-1)^k$ .*

Иными словами, если  $k$  четно, то на 1 больше разбиений на четное число слагаемых, а если  $k$  нечетно, то на 1 больше разбиений на нечетное число слагаемых.

Чтобы доказать теорему Эйлера, покажем несколько способов превращения диаграммы с четным числом строк в диаграмму из стольких же точек с нечетным числом строк и обратно.

Так как мы рассматриваем лишь разбиения на различные слагаемые, то (нормальные) диаграммы таких разбиений состоят из нескольких трапеций, поставленных друг на друга. Обозначим число точек в верхней строке диаграммы через  $m$ ,

а число строк нижней трапеции через  $n$  (на рис. 26 слева изображена диаграмма, для которой  $m = 2$ ,  $n = 3$ ).

**Преобразование 1.** Предположим, что диаграмма содержит не менее двух трапеций, причем  $m \leq n$ . В этом случае отбросим первую строку из  $m$  точек, но удлиним последние  $m$  строк нижней трапеции на одну точку (рис. 26). После этого общее число точек не изменится, все строки окажутся различной длины, но четность числа строк изменится.

Точно такое же преобразование можно сделать, если диаграмма состоит из одной трапеции, но  $n \geq m + 1$  (на рис. 27 верхняя строка исчезает, на оставшихся  $n - 1$  строках должны поместиться  $m$  точек).

**Преобразование 2.** Пусть теперь диаграмма опять содержит не менее двух трапеций, но  $m > n$ . Тогда от каждой строки последней трапеции возьмем по одной точке и составим из них первую строку (из  $n$  точек) новой диаграммы (рис. 28). Это можно сделать, так как  $m > n$ , и поэтому составленная строка короче первой строки исходной диаграммы. Кроме того, так как мы взяли все строки нижней трапеции, то в получившейся диаграмме все строки будут иметь различную длину. Наконец, новая диаграмма содержит столько же точек, что и исходная, но четность числа строк изменилась — новая диаграмма содержит еще одну строку.

Преобразование 2 допускают и диаграммы, состоящие из одной трапеции, если  $n \leq m - 2$  (появляющаяся первая строка состоит из  $n$  точек, она должна быть короче бывшей первой строки, уменьшившейся до  $m - 1$  точки; рис. 29).

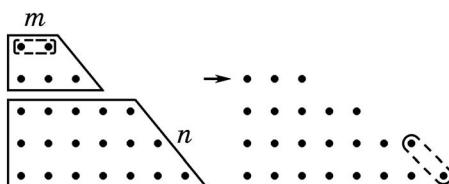


Рис. 26.  $m = 2, n = 3$

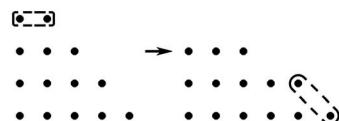


Рис. 27.  $m = 2, n = 4$

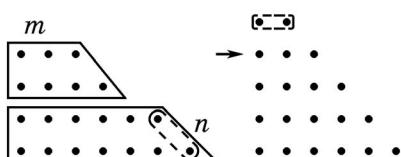


Рис. 28.  $m = 3, n = 2$

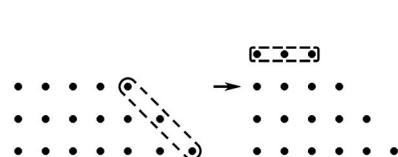


Рис. 29.  $m = 5, n = 3$

Легко видеть, что описанные преобразования взаимно обратны — если сначала сделать одно из них, а потом второе, то снова получим исходную диаграмму. Кроме того, для каждой диаграммы может быть допустимо лишь одно из этих преобразований. Таким образом, диаграммы разбиений числа  $N$ , допускающие одно из этих преобразований, распадаются на пары диаграмм с четным и нечетным числом строк, поэтому их одинаковое число.

Осталось выяснить, какие же диаграммы не допускают ни одного из описанных преобразований. Ясно, что эти диаграммы состоят из одной трапеции, причем для них либо  $m = n$ , либо  $m = n + 1$ . В первом случае диаграмма содержит

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (2n - 1) = \frac{3n^2 - n}{2}$$

точек, а во втором — на  $n$  точек больше, т. е.  $\frac{3n^2 + n}{2}$ .

Приведенные рассуждения показывают, что если  $N$  не является числом вида  $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ , то оно имеет поровну разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых.

Заметим еще, что равенства  $N = \frac{3n^2 + n}{2}$  и  $N = \frac{3l^2 - l}{2}$  одновременно выполняться не могут (это легко доказывается), поэтому если  $N = \frac{3n^2 \pm n}{2}$ , то без пары останется ровно одна диаграмма, не допускающая преобразования и имеющая  $n$  строк (слагаемых  $N$ ). Если  $n$  — четное число, то разбиений на четное число слагаемых окажется на 1 больше, чем на нечетное число слагаемых. Если же  $n$  — нечетное число, то на 1 больше будет разбиений на нечетное число слагаемых. Теорема доказана.

## Задачи

11. Докажите, что в каждой строке 3-арифметического треугольника (см. п. 58), начиная с третьей, найдется четное число. В каждой ли строке, начиная с третьей, есть число, делящееся на 3?

12. В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 1, 2 и 5 руб. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать 20?

13. Сколькими способами 4 черных шара, 4 белых шара и 4 синих шара могут быть разложены в 6 разноцветных пакетов (некоторые пакеты могут быть пустыми)?

14. Сколькими способами можно разложить 3 монеты по 1 рублю и 10 монет по 50 копеек в 4 разноцветных пакета?

А если пакеты неразличимы?

15. Докажите, что число треугольников с целочисленными сторонами, имеющих периметр  $2n$ , равно числу треугольников с целочисленными сторонами, имеющих периметр  $2n - 3$ .

16. Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами и с периметром 40? А с периметром 43?

17. Докажите, что число треугольников с целочисленными сторонами и с периметром  $4n + 3$  на  $n + 1$  больше числа треугольников с целочисленными сторонами и периметром  $4n$ .

18. Докажите, что число треугольников с целочисленными сторонами и периметром  $N$  дается таблицей

| $N$       | Число треугольников | $N$        | Число треугольников |
|-----------|---------------------|------------|---------------------|
| $12n$     | $3n^2$              | $12n + 6$  | $3n^2 + 3n + 1$     |
| $12n + 1$ | $n(3n + 2)$         | $12n + 7$  | $(n + 1)(3n + 2)$   |
| $12n + 2$ | $n(3n + 1)$         | $12n + 8$  | $(n + 1)(3n + 1)$   |
| $12n + 3$ | $3n^2 + 3n + 1$     | $12n + 9$  | $3n^2 + 6n + 3$     |
| $12n + 4$ | $n(3n + 2)$         | $12n + 10$ | $(n + 1)(3n + 2)$   |
| $12n + 5$ | $(n + 1)(3n + 1)$   | $12n + 11$ | $3n^2 + 7n + 4$     |

19. Докажите, что число попарно неравных целочисленных треугольников, имеющих наибольшую сторону  $l$ , равно  $\frac{(l+1)^2}{4}$ , если  $l$  нечетно, и  $\frac{l(l+2)}{4}$ , если  $l$  четно.

20. Обозначим через  $f_n$  число попарно неравных целочисленных треугольников, все стороны которых меньше  $2n + 1$ , а через  $g_n$  — число треугольников, все стороны которых меньше  $2n + 2$ . Установите связь между  $f_n$  и  $g_n$ .

21. Сколькими способами можно представить натуральное число  $m$  в виде суммы  $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ , где все  $x_k$  — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам  $l \leq x_k \leq n$  ( $l$  и  $n$  — фиксированные натуральные числа).

22. На плоскости проведены два пучка прямых линий с центрами  $A$  и  $B$ , один из которых содержит  $m$ , а другой  $n$  прямых. Пусть никакие две прямые не параллельны и ни одна прямая не проходит через обе точки  $A$  и  $B$ . На сколько частей прямые этих пучков делят плоскость?

23. На плоскости проведено несколько замкнутых кривых, каждая из которых пересекает все остальные по крайней мере в двух точках. Пусть  $n_r$  — число точек, в которых пересекаются  $r$  кривых («точек кратности  $r$ »). Докажите, что число замкнутых областей, ограниченных дугами этих кривых и не содержащих внутри себя таких дуг, равно  $1 + n_2 + 2n_3 + \dots + rn_{r+1} + \dots$

**24.** Пусть есть одна карта с числом 1, две карты с числом 2, три карты с числом 3 и т. д. Докажите, что число способов вытянуть две карты так, чтобы получить сумму  $n$ , равно  $\frac{n}{12}(n^2 - 1)$  или  $\frac{n}{12}(n^2 - 4)$  в зависимости от того, нечетно или четно  $n$ .

**25.** а) На сколько частей делят плоскость  $n$  прямых линий, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну и ту же точку?

б) На сколько частей делят пространство  $n$  плоскостей, из которых никакие 4 не содержат одну и ту же точку, никакие 3 не содержат одну и ту же прямую и никакие 2 не параллельны?

**26.** На плоскости проведены окружность и  $n$  прямых, все точки пересечения которых лежат внутри окружности. На сколько частей эти линии делят плоскость?

**27.** а) На сколько областей делят плоскость  $n$  окружностей, каждые две из которых пересекаются и никакие три из которых не проходят через одну и ту же точку?

б) На сколько областей делят пространство  $n$  попарно пересекающихся сфер, из которых никакие 4 не проходят через одну и ту же точку и никакие 3 — через одну и ту же окружность?

**28.** Докажите, что  $n$  плоскостей, проходящих через центр сферы, но никакие 3 из которых не пересекаются по одной прямой, делят сферу не более чем на  $n^2 - n + 2$  частей.

**29.** Найдите число точек пересечения диагоналей (или их продолжений) выпуклого  $n$ -угольника, лежащих внутри него и лежащих вне него (предполагается, что никакие две диагонали не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке).

**30.** На сколько частей разбивается выпуклый  $n$ -угольник своими диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри многоугольника?

**31.** 1000 точек являются вершинами выпуклого тысячегранника, внутри которого расположено еще 500 точек так, что никакие три из этих 1500 точек не лежат на одной прямой. Данный тысячегранник разрезан на треугольники так, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников, и никаких других вершин эти треугольники не имеют. Сколько получится треугольников при таком разрезании? А если дан  $n$ -угольник и внутри  $m$  точек?

**32.** На окружности даны точки  $A_1, A_2, \dots, A_{2004}$ . Построим всевозможные выпуклые многоугольники, вершины которых находятся среди точек  $A_1, A_2, \dots, A_{2004}$ . Разобьем эти многоугольники на две группы: в первую группу отнесем все многоугольники, одной из вершин которых является точка  $A_1$ , а во вторую — все остальные многоугольники. В какой группе больше многоугольников?

**33.** Можно ли представить число 1958 в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел? А 2004? 2005?

**34.** Пять человек играют несколько партий в домино (двою на двою), причем каждый играющий играет с каждым один раз в паре и два раза — в качестве противников. Найдите количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

## Глава V

### СМЕЩЕНИЯ, СУБФАКТОРИАЛЫ И ЗАПРЕТНЫЕ ЗОНЫ

#### 68. Девушка спешит на свидание

Когда-то на экранах страны шла кинокомедия под таким названием. В ней рассказывалось о злоключениях двух курортников, забывших дома паспорта. Им выслали паспорта по почте, но девушка из почтового отделения спешила на свидание и в спешке перепутала конверты — паспорт одного попал в конверт с адресом другого, а паспорт другого — в конверт с адресом первого. Хорошо, что ей не пришлось одновременно обрабатывать 5 конвертов — тогда не двоим, а пятерым пришлось бы ночевать на жестких скамейках курортного парка...

Впрочем, это не совсем так: ведь случайно она могла бы положить некоторые из паспортов в нужные конверты. Возникает вопрос, во скольких же случаях произошла бы полная путаница, т. е. никто не получил бы своего паспорта.

Так как адресатов и соответственно их паспорта можно занумеровать числами от 1 до 5, то распределение паспортов можно задать такой схемой:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  — те же числа 1, 2, 3, 4, 5, но взятые в ином порядке.

Эта схема означает, что первый человек получает паспорт человека с номером  $a_1$ , второй — паспорт  $a_2$  и т. д. Поскольку нижняя строка во всех схемах одна и та же, ее можно опустить, а тогда каждый способ распределения паспортов окажется задан некоторой перестановкой  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  чисел 1, 2, 3, 4, 5. Если, например, второй человек получил свой паспорт, то  $a_2 = 2$ , т. е. число 2 в этой перестановке стоит на своем месте.



Теперь задачу можно сформулировать в общем виде так: *найти число перестановок  $n$  элементов, при которых ни один из элементов не стоит на своем месте*. Такие перестановки называют *смещениями*, а их число обозначают  $D_n$ .

Решение проводится с помощью формулы включений и

исключений (см. п. 34). Обозначим через  $\langle p \rangle$  свойство перестановки, заключающееся в том, что число  $p$  стоит на своем месте (на перемещения других чисел ограничений нет, они могли как оставаться на своем месте, так и сместиться), а через  $N(p)$  обозначим количество перестановок, обладающих этим свойством. Точно так же через  $N(pq)$  обозначим количество перестановок, одновременно обладающих свойствами  $\langle p \rangle$  и  $\langle q \rangle$ , т. е. таких, что и  $p$ , и  $q$  стоят на своих местах, и т. д. Через  $\bar{N}$  обозначим  $N(12345)$ , т. е. число перестановок, в которых ни одно число не стоит на своем месте.

В данном случае задача облегчается тем, что свойства  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$ ,  $\langle 3 \rangle$ ,  $\langle 4 \rangle$ ,  $\langle 5 \rangle$  совершенно равноправны. Поэтому

$$\bar{N} = N_0 - C_5^1 N_1 + C_5^2 N_2 - C_5^3 N_3 + C_5^4 N_4 - C_5^5 N_5. \quad (1)$$

Здесь для краткости через  $N_k$  обозначено количество перестановок, в которых заданные  $k$  чисел остались на своих местах, тогда  $N_0 = P_5 = 120$  — общее число всех перестановок из 5 элементов. Чтобы закончить решение задачи, нам осталось найти значения  $N_k$  при  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Если одно число остается на своем месте, то остальные четыре числа можно переставлять друг с другом  $P_4$  способами.

Значит,  $N_1 = P_4 = 24$ . Точно так же, если на месте остаются два числа, то оставшиеся три числа можно переставлять друг с другом  $P_3$  способами. Поэтому  $N_2 = P_3 = 6$ . Аналогично получаем, что  $N_3 = P_2 = 2$ ,  $N_4 = P_1 = 1$  и  $N_5 = P_0 = 1$ . Подставляя полученные значения в формулу (1), находим, что

$$\begin{aligned} \bar{N} &= P_5 - C_5^1 P_4 + C_5^2 P_3 - C_5^3 P_2 + C_5^4 P_1 - C_5^5 P_0 = \\ &= 120 - 5 \cdot 24 + 10 \cdot 6 - 10 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 44. \end{aligned}$$

Итак, в 44 случаях из 120 ни один из адресатов писем не получил бы своего паспорта.

Совершенно так же можно найти, во скольких случаях ровно один адресат получит свой паспорт. Если этим счастливцем окажется первый адресат, то все остальные 4 получат чужие паспорта. Это может произойти

$$P_4 - C_4^1 P_3 + C_4^2 P_2 - C_4^3 P_1 + C_4^4 P_0 = 9$$

способами. Но так как счастливцем может оказаться любой из пяти адресатов, то общее число способов, при которых в точности один человек получит свой паспорт, равно  $5 \cdot 9 = 45$ .

Проверьте сами, что в точности двое получают свои паспорта в 20 случаях, трое — в 10 случаях, четверо — в 0 случаях и пятеро — в 1 случае. Результат для четверых объясняется тем, что если четверо получают свои паспорта, то и оставшийся паспорт направлен по правильному адресу.

Итак, 120 различных перестановок из 5 элементов распадаются на 44 перестановки, в которых ни один элемент не остается на месте, 45 перестановок, в которых ровно один элемент не меняет своего положения, 20 перестановок, в которых не меняют положения два элемента, 10 перестановок, не меняющих положения трех элементов, и 1 перестановку, при которой все элементы остаются на своих местах.

В п. 70 мы рассмотрим общее решение этой задачи.

## 69. Сеанс телепатии

Некоторые люди утверждают, что могут читать мысли на расстоянии. Для проверки делались следующие опыты. В одной комнате поднимали в некотором порядке так называемые фигуры Зенера (рис. 30). Телепат в соседней комнате должен был угадать, в каком порядке поднимались эти фигуры.

Сначала рассмотрим вариант, когда фигуры поднимаются без повторений. Тогда общее число возможных перестановок этих фигур равно  $5! = 120$ . При проведении сеанса выбирается одна из этих перестановок. Телепат называет другую перестановку этих фигур, и его успех тем больше, чем больше фигур он угадает. Из подсчетов, проведенных в п. 68, вытекает, что при случайному угадывании результаты были бы примерно следующие: в 44 случаях из 120 не была бы угадана ни одна фигура, в 45 случаях — одна фигура, в 20 случаях — две фигуры, в 10 случаях — три фигуры и в одном случае — все пять фигур. В среднем при случайному гаданию число правильно названных фигур равно

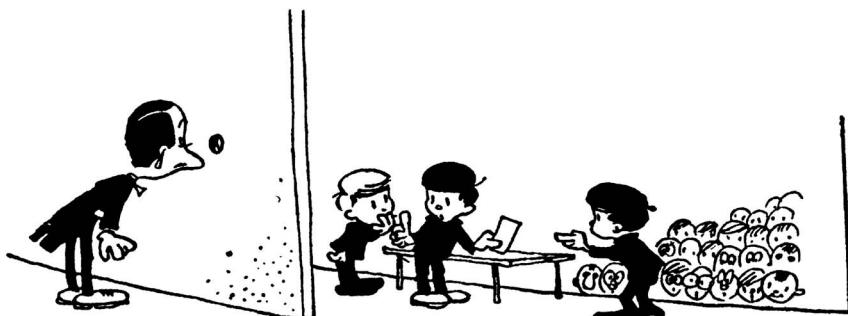
$$\frac{45 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5}{120} = 1, \text{ т. е. назы-}$$

вается одна фигура из пяти. При  $n$  различных фигурах в среднем должна угадываться одна фигура из  $n$  (см. далее п. 70). Если систематически угадывается большее число фигур, то надо тщательно изучить в чем дело — происходит ли (как часто бывает) жульничество или действительно данный человек обладает особыми способностями.

Теперь выясним, изменится ли число угадываемых в среднем фигур, если допустить повторения.



Рис. 30



В этом случае вместо перестановок имеем размещения с повторениями. Но число таких размещений из  $n$  элементов, при которых ни один элемент не находится на своем «законном» месте, равно  $(n - 1)^n$ . В самом деле, на первом месте может быть любой из элементов, кроме первого, на втором — любой из элементов, кроме второго, и т. д. Иными словами, на каждое место имеем  $n - 1$  кандидатов. По правилу произведения выводим отсюда, что общее число возможных комбинаций равно  $(n - 1)^n$ .

Найдем, во скольких случаях на своем месте стоит в точности один элемент. Если свое место занимает, скажем, первый элемент, то остается еще  $n - 1$  мест, которые надо занять. При этом на каждое место претендуют по  $n - 1$  кандидатов (все элементы, кроме «законного владельца» этого места). Значит, число размещений, в которых первый и только первый элемент стоит на своем месте, равно  $(n - 1)^{n-1}$ . Но так как на своем месте может стоять любой из  $n$  элементов, то число размещений, где не смешен в точности один элемент, равно  $n(n - 1)^{n-1}$ . Совершенно так же доказывается, что число размещений, в которых не смешено ровно  $k$  элементов, равно  $C_n^k(n - 1)^{n-k}$ .

Например, в случае пяти различных элементов получаем следующий результат: число размещений с повторениями, в которых все элементы смешены, равно  $4^5 = 1024$ ; размещений, где ровно один элемент стоит на своем месте,  $5 \cdot 4^4 = 1280$ ; размещений, где ровно два элемента остались на своих местах,  $10 \cdot 4^3 = 640$ ; три —  $10 \cdot 4^2 = 160$ ; четыре —  $5 \cdot 4 = 20$  и пять  $1 \cdot 4^0 = 1$ . Всего имеем 3125 размещений, что согласуется с формулой  $\overline{A}_5^5 = 3125$ .

Среднее количество угадываемых фигур при случайном гадании будет

$$\frac{1280 + 640 \cdot 2 + 160 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{3125} = 1.$$

Ответ получился тот же самый — при случайном гадании можно угадать одну фигуру из пяти независимо от того, допускаются повторения фигур или нет. Однако распределение числа угаданных фигур будет уже иным. Оно указано в следующей таблице:

| Число угаданных фигур | Без повторений | С повторениями |
|-----------------------|----------------|----------------|
| 0                     | 0,366          | 0,328          |
| 1                     | 0,375          | 0,410          |
| 2                     | 0,167          | 0,205          |
| 3                     | 0,083          | 0,051          |
| 4                     | 0              | 0,006          |
| 5                     | 0,009          | 0,000          |

## 70. Общая задача о смещении

Совершенно так же, как и разобранные выше задачи, решается общая задача о смещении: *найти число  $D_n$  перестановок из  $n$  элементов, при которых ни один элемент не остается в первоначальном положении.*

Ответ дается формулой

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n = \\ = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]. \quad (2)$$

Читатель, знакомый с теорией рядов, узнает в выражении, стоящем в скобках, частичную сумму разложения  $e^{-1}$ .

Обобщая формулу (2) на случай  $n = 0$ , получаем, что естественно принять  $D_0 = 1$ .

Число перестановок, при которых ровно  $r$  элементов остаются на первоначальных местах, а остальные  $n - r$  меняют свое положение, выражается формулой

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r}. \quad (3)$$

В самом деле, сначала надо выбрать, какие именно  $r$  элементов остаются на месте. Это можно сделать  $C_n^r$  способами. А остальные  $n - r$  элементов можно переставлять после этого любыми способами, лишь бы ни один из них не занял первоначального

места Это можно сделать  $D_{n-r}$  способами. По правилу произведения получаем (3).

Разобъем все перестановки на классы в зависимости от того, сколько элементов остаются неподвижными при данной перестановке. Так как общее число перестановок равно  $n!$ , то получаем следующее тождество:

$$n! = \sum_{r=0}^n D_{n,r} = \sum_{r=0}^n C_n^r D_{n-r}. \quad (4)$$

Другое тождество, связывающее  $n!$  и числа  $D_{n,r}$ , получается следующим образом. Возьмем все  $n!$  перестановок элементов  $a_1, \dots, a_n$  и подсчитаем, сколько всего чисел во всех этих перестановках осталось на своих местах. Этот расчет можно сделать двумя способами. Во-первых, заметим, что если, например, элемент  $a_1$  находится на своем месте, то остальные элементы можно переставлять  $P_{n-1} = (n-1)!$  способами. Поэтому в  $(n-1)!$  перестановках элемент  $a_1$  находится на первом месте. Точно так же в  $(n-1)!$  перестановках элемент  $a_2$  находится на втором месте и т. д. Всего получаем  $n(n-1)! = n!$  элементов, находящихся на своих местах. Но число этих элементов можно подсчитать и иначе. Число перестановок  $r$ -го класса, т. е. таких, что в них  $r$  элементов находится на своих местах, равно  $D_{n,r}$ . Каждая такая перестановка дает нам  $r$  неподвижных элементов. Поэтому общее число неподвижных элементов в перестановках  $r$ -го класса равно

$rD_{n,r}$  и всего получаем  $\sum_{r=0}^n rD_{n,r}$  неподвижных элементов. Тем самым

доказано тождество

$$n! = \sum_{r=0}^n rD_{n,r} = \sum_{r=0}^n rC_n^r D_{n-r}. \quad (5)$$

Формула включений и исключений позволяет решить и такую задачу: *найти число перестановок из  $n$  элементов, при которых данные  $r$  элементов смещены* (а остальные могут быть как смещены, так и оставаться на старых местах). Ответ дается формулой

$$n! - C_r^1(n-1)! + C_r^2(n-2)! - \dots + (-1)^r(n-r)!.$$
 (6)

## 71. Субфакториалы

Некоторые авторы называют числа  $D_n$  *субфакториалами*. Эти числа имеют много общих свойств с обычными факториалами. Например, для факториалов выполняется равенство

$$n! = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!]. \quad (7)$$

В самом деле,

$$(n - 1)[(n - 1)! + (n - 2)!] = (n - 1)(n - 2)!(n - 1 + 1) = n!.$$

Покажем, что это же равенство верно и для субфакториалов  $D_n$ , т. е., что

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}). \quad (8)$$

Для этого заменим  $D_{n-1}$  и  $D_{n-2}$  их разложениями по формуле (2). Мы получим, отделяя в выражении  $D_{n-1}$  последнее слагаемое, что

$$\begin{aligned} (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}) &= (n - 1)[(n - 1)! + (n - 2)!] \times \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n - 2)!} \right] + (-1)^{n-1}(n - 1). \end{aligned}$$

Но по формуле (7)  $(n - 1)[(n - 1)! + (n - 2)!] = n!$ . Кроме того,

$$(-1)^{n-1}(n - 1) = n! \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}) &= \\ &= n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n - 2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] = D_n. \end{aligned}$$

Доказанное соотношение (8) можно, следуя Эйлеру, вывести с помощью чисто комбинаторных рассуждений. Рассмотрим все перестановки, в которых все элементы смешены. Первое место в таких перестановках может занять любой элемент, кроме первого. Так как число оставшихся элементов равно  $n - 1$ , то  $D_n$  перестановок разбивается на  $n - 1$  групп в зависимости от того, какой элемент занял первое место. Ясно, что во всех группах будет поровну элементов!

Сосчитаем, сколько элементов в одной из этих групп, скажем в той, где первое место занял второй элемент. Эта группа разбивается на две части: те, в которых первый элемент стоит на втором месте, и все остальные. Если первый элемент занял второе место (а второй, как мы помним, — первое место), то оставшиеся  $n - 2$  элементов можно переставлять любым образом, лишь бы ни один из них не занял своего места. Это можно сделать  $D_{n-2}$  способами. Значит, первая часть состоит из  $D_{n-2}$  перестановок.

Покажем, что вторая часть состоит из  $D_{n-1}$  перестановок. В самом деле, во вторую часть войдут все перестановки, в которых первый элемент не стоит на втором месте, а остальные элементы не находятся на своих местах. Но тогда можно считать второе место «законным»

для первого элемента, и получится, что все элементы должны сместиться. Так как число этих элементов равно  $n - 1$ , то во второй части  $D_{n-1}$  перестановок. Поэтому тогда вся группа состоит из  $D_{n-2} + D_{n-1}$  перестановок. Так как все множество смещающих перестановок состоит из  $n - 1$  группы, то в него входит  $(n - 1)(D_{n-2} + D_{n-1})$  перестановок.

Тем самым доказано равенство (8).

Из формулы (8) вытекает, что

$$D_n - nD_{n-1} = - [D_{n-1} - (n - 1)D_{n-2}].$$

Поэтому при изменении  $n$  выражение  $D_n - nD_{n-1}$  только меняет знак. Применяя это соотношение несколько раз, получаем, что  $D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)$ . Но  $D_2 = 1$ , а  $D_1 = 0$ , и поэтому

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n. \quad (9)$$

Эта формула напоминает соотношение  $n! = n(n - 1)!$  для факториалов. Выпишем значения первых 12 субфакториалов:

$$\begin{array}{llll} D_1 = 0, & D_4 = 9, & D_7 = 1854, & D_{10} = 1\ 334\ 961, \\ D_2 = 1, & D_5 = 44, & D_8 = 14\ 833, & D_{11} = 14\ 684\ 570, \\ D_3 = 2, & D_6 = 265, & D_9 = 133\ 496, & D_{12} = 176\ 214\ 841. \end{array}$$

## 72. Запретные зоны и ладейные числа

Теперь мы несколько обобщим рассмотренную задачу и разберем обширный круг задач о так называемых «запретных зонах».

Мы знаем, что каждую перестановку  $n$  чисел 1, 2, ...,  $n$  можно изобразить, поставив  $n$  ладей на квадратную доску с  $n$  горизонталями и  $n$  вертикалями — если перестановка имеет вид  $(a_1, \dots, a_n)$ , то ладьи занимают пересечения  $k$ -х вертикалей с  $a_k$ -ми горизонталями. При этом ни одна ладья не бьет другую, так как ни номера горизонталей, ни номера вертикалей в парах  $(1; a_1), \dots, (n; a_n)$  не повторяются.

В задаче о паспортах берутся не все перестановки, а лишь такие, при которых ни одно число не стоит на своем месте. В этом случае ни одна ладья не может занять поля с номерами  $(1; 1), \dots, (n; n)$ , а это как раз поля на диагонали. Иными словами, в этой задаче требуется найти число расстановок ладей, при которых ни одна ладья не попадает на диагональ.

Разумеется, вместо диагонали можно выбрать любое другое множество запретных полей, а число ладей может быть любым. Мы приходим, таким образом, к следующей задаче.

Часть полей прямоугольной шахматной доски с  $m$  горизонтальными и  $n$  вертикальными окрашена в черный цвет, а остальные — в белый. Сколькими способами можно расставить на белых полях доски  $k$  ладей так, чтобы ни одна из них не могла взять другую?

При этом окраска не обязательно идет в «шахматном» порядке, черным может быть закрашен любой набор полей на доске. Разумеется, можно считать, что черные поля просто вырезаны, и расставлять ладьи прямо на белопольной доске, которую мы обозначим через  $D$ . Для доски  $D$  число способов поставить требуемым образом  $k$  ладей называют  *$k$ -м ладейным числом* и обозначают  $t_k$ . Впервые эти числа ввел отечественный математик С. Е. Аршон в середине 30-х годов в докладе, сделанном в 1934 г. на втором Всесоюзном математическом съезде, и в статье «Решение одной комбинаторной задачи», опубликованной в сборнике «Математическое просвещение», 1936, № 8. Подробное изложение свойств этих чисел он хотел сделать в книге «Новая комбинаторная алгебра». После безвременной смерти автора (он был репрессирован в 1937 г.) рукопись книги погибла. Вновь те же самые числа придумали в 1945 г. американские математики Капланский и Риордан. Они ввели еще многочлен  $T_D(x) = t_0 + t_1x + \dots + t_kx^k + \dots$ , названный *ладейным многочленом* для данной доски.

### 73. Общая формула

В задаче о смещениях у нас на самом деле две доски — бело- и чернопольная (черным закрашиваются лишь поля диагонали). Ладейное число  $t_k$  надо найти для белопольной доски. Но она устроена куда сложнее чернопольной доски, состоящей из  $n$  не связанных друг с другом квадратов. Поэтому было бы весьма желательно получить формулу, связывающую ладейные числа этих двух досок.

Предварительно найдем ладейные числа для полной доски, состоящей из  $m$  горизонталей и  $n$  вертикалей. Чтобы поставить на такую доску  $k$  ладей, надо сначала выбрать  $k$  горизонталей, что возможно  $C_m^k$  способами, а затем расставить на них  $k$  ладей, что можно сделать  $A_n^k$  способами. Значит, для такой доски  $k$ -е ладейное число равно  $C_m^k A_n^k$ .

Предположим теперь, что доска  $m \times n$  разбита на черную и белую части и что мы знаем ладейные числа  $t'_k$  для чернопольной доски. Подсчитаем, сколькими способами можно поставить  $r$  ладей на доску так, чтобы не менее  $k$  ладей стояли на черных полях. Для этого надо сначала расположить  $k$  ладей на черных

полях, чтобы они не били друг друга. Это можно сделать  $t'_k$  способами. Затем занятые  $k$  горизонталей и  $k$  вертикалей следует вычеркнуть и на оставшуюся  $(m-k) \times (n-k)$ -доску поставить остальные  $r-k$  ладьи, не обращая внимания на цвет полей, а следя лишь за тем, чтобы они не били друг друга. Это можно сделать  $C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k}$  способами. По правилу произведения получаем  $C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t'_k$  требуемых расстановок ладей.

Теперь мы уже можем вывести основную формулу всей теории запретных зон, связывающую ладейные числа для черной и белой досок. Для этого воспользуемся формулой включений и исключений. Занумеруем все черные поля на доске  $m \times n$  и обозначим через  $\langle a \rangle$  свойство «занято  $a$ -е черное поле». Тогда  $N(a_1 a_2 \dots a_k)$  — число расстановок, при которых заняты черные поля с номерами  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Все слагаемые вида  $N(a_1 a_2 \dots a_k)$  в формуле включений и исключений имеют знак  $(-1)^k$ . Если сложить все эти слагаемые при заданном значении  $k$ , то получаются все расстановки, в которых занято не менее  $k$  черных полей. А число таких расстановок, как мы знаем, равно  $C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t'_k$ . Замечательно, что мы нашли это число, не зная отдельных слагаемых — ведь для некоторых выборов черных полей может и не существовать искомых расстановок.

А теперь, применяя формулу включений и исключений, получаем ладейные числа для белопольной доски  $t_r$  в виде

$$\begin{aligned} t_r = & C_m^r A_n^r t'_0 - C_{m-1}^{r-1} A_{n-1}^{r-1} t'_1 + \\ & + \dots + (-1)^k C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t'_k + \dots + (-1)^r C_{m-r}^0 A_{n-r}^0 t'_r. \end{aligned} \quad (10)$$

Применяя знак суммы, эту формулу можно записать в виде

$$t_r = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_{m-k}^{r-k} A_{n-k}^{r-k} t'_k.$$

Точно так же доказывается, что число расстановок  $r$  ладей, из которых  $p$  стоят на черных, а остальные — на белых полях, равно

$$\sum_{k=0}^{r-p} (-1)^k C_{p+k}^k C_{m-p-k}^{r-p-k} t'_{p+k}. \quad (11)$$

Формула (10) позволяет свести подсчет ладейных чисел для белопольных досок к подсчету тех же чисел для чернопольных досок. А это в некоторых случаях проще сделать. Например, если доска  $D$  распадается на две доски  $D_1$  и  $D_2$ , не имеющих ни общих горизонталей, ни общих вертикалей (рис. 31), то справедлива формула

$$T_D(x) = T_{D_1}(x) T_{D_2}(x) \equiv (t_0 + t_1 x + \dots)(q_0 + q_1 x + \dots). \quad (12)$$

В самом деле, поставить  $k$  ладей на доску  $D_1$ , а  $l$  ладей на доску  $D_2$  можно по правилу произведения  $t_k q_l$  способами. Поэтому можно  $t_0 q_r + t_1 q_{r-1} + \dots + t_r q_0$  способами поставить  $r$  ладей на доску  $D$  (расстановки классифицируются по числу ладей, стоящих на доске  $D_1$ ). А это как раз коэффициент при  $x^r$  в произведении многочленов  $T_{D_1}(x)$  и  $T_{D_2}(x)$ .

Так как для одной клетки ладейный многочлен имеет вид  $1 + x$ , то для диагонали квадрата, состоящей из  $n$  клеток, он

равен  $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ . Значит, для диагонали ладейные числа

имеют вид  $t'_k = C_n^k$ .

Теперь мы можем довести до конца вычисление  $D_n$ , т. е. числа способов расстановки  $n$  ладей на квадратной доске так, чтобы ни одна из ладей не стояла на диагонали. В этом случае  $n = m = r$  и мы получаем по формуле (10)

$$D_n \equiv t_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n - k)!.. \quad (13)$$

В частности, если  $n = 5$ , то имеем

$$D_5 = C_5^0 \cdot 5! - C_5^1 \cdot 4! + C_5^2 \cdot 3! - C_5^3 \cdot 2! + C_5^4 \cdot 1! - C_5^5 \cdot 0! = 44.$$

Значит, есть 44 способа распределения паспортов по конвертам, при которых ни один паспорт не попадает в соответствующий конверт (задача п. 68).

#### 74. За обеденным столом

*К супругам Леонтьевым на праздничный обед пришли в гости 5 супружеских пар. Решили сесть за обеденный стол так, чтобы мужчины и женщины чередовались, причем ни одна пара супругов не сидела рядом друг с другом. Сколькими способами могут эти 6 пар сесть за стол?*

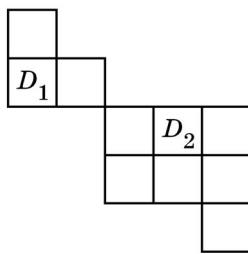


Рис. 31

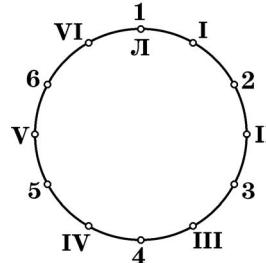


Рис. 32

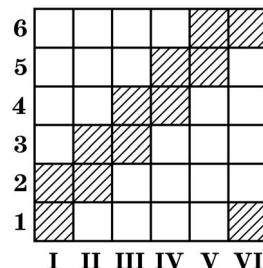


Рис. 33

Посадим сначала за стол женщин. Хозяйка дома может выбрать любое из 12 мест. После этого для остальных женщин остается 5 мест (ведь две женщины не должны сидеть рядом друг с другом). Их можно посадить на эти места  $5! = 120$  способами. Всего получилось  $12 \cdot 5! = 1440$  способов. А теперь будем рассаживать мужчин. Перенумеруем занятые места по часовой стрелке цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, где 1 — место, занятое Леонтьевой (рис. 32), а свободные места — римскими цифрами I, II, III, IV, V и VI, где I — место, следующее за местом хозяйки дома. Тогда хозяин дома может сесть на любое место, кроме мест I и VI (они находятся рядом с его супругой), муж гостьи, занявшей место 2 — на любом из мест, кроме I и II и т. д. Иными словами, рассадить гостей — это все равно, что расставить ладьи на доске, изображенной на рис. 33.

Обобщая эту задачу, приходим к такой постановке вопроса.

*Сколько способами можно поставить  $n$  ладей на  $(n \times n)$ -доску так, чтобы они не били друг друга, и чтобы ни одна ладья не стояла на полях вида  $(k; k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $(k; k+1)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  и  $(n; 1)$ ?*

Если бы мы знали число способов  $t'_k$  поставить  $k$  ладей на запретные поля так, чтобы они не били друг друга, то задача решалась бы по формуле (10):

$$t_n = n! - (n-1)! t'_1 + (-1)^k (n-k)! t'_k + \dots + (-1)^n t'_n. \quad (14)$$

Задача свелась к подсчету числа способов поставить  $k$  ладей на запретные поля, а это легче, так как их меньше, чем допустимых полей. Запишем  $2n$  запретных полей по кругу, выписав сначала поля первой горизонтали, потом — второй и т. д. Если поставить единицы на полях, занятых ладьями, а на остальных полях написать нули, то получим круговую расстановку  $k$  единиц и  $2n - k$  нулей. При этом соседние поля

на окружности соответствуют на доске полям, стоящим на одной горизонтали или одной вертикали. Поэтому две единицы не могут стоять рядом, т. е.  $t'_k$  равно числу способов написать по кругу  $k$  единиц и  $2n - k$  нулей так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом. А это можно сделать, как мы уже сосчитали в п. 32,  $C_{2n-k}^k + C_{2n-k-1}^{k-1} = \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^k$  способами. Подставляя это значение в формулу (14), получаем ответ.

## 75. Диаграммы Юнга

При вычислении ладейных многочленов оказывается полезной следующая формула:

$$T_D(x) = T_{D^0}(x) + x T_{D^\#}(x). \quad (15)$$

Здесь через  $D^0$  обозначена доска, полученная из доски  $D$  вычеркиванием некоторого поля  $a$ , а через  $D^\#$  — доска, получаемая из  $D$  вычеркиванием не только самого поля  $a$ , но и горизонтали и вертикали, на пересечении которых поле  $a$  находится. Чтобы доказать формулу (15), достаточно заметить, что при любой расстановке  $k$  ладей поле  $a$  оказывается либо свободным, либо занятым. Число расстановок, при которых это поле свободно, совпадает с числом расстановок ладей на доске  $D^0$  (для таких расстановок поле  $a$  можно безболезненно удалить). Если же поле  $a$  занято, то уже ни одно поле вертикали и горизонтали, на которых расположено поле  $a$ , занимать нельзя. Поэтому их надо вычеркнуть, а оставшиеся ладьи располагать на доске  $D^\#$ . Значит, число расстановок второго вида равно числу расстановок  $k - 1$  ладей на доске  $D^\#$ .

Итак, коэффициент при  $x^k$  в многочлене  $T_D(x)$  равен сумме коэффициента при  $x^k$  в  $T_{D^0}(x)$  и коэффициента при  $x^{k-1}$  в  $T_{D^\#}(x)$ . Это утверждение и выражено формулой (15).

Решим с помощью формулы (15) такую задачу.

*Сколькими способами можно расставить на шахматной доске  $k$  белопольных слонов так, чтобы они не могли бить друг друга?*

Для решения этой задачи повернем шахматную доску на  $45^\circ$  и оставим на ней лишь белые поля. Так как слоны ходят по диагоналям, то после поворота доски речь будет идти уже о вертикалях и горизонталях. Но доска будет уменьшенной, такой, как на рис. 34. Итак, нам надо найти число способов расставить ладьи на этой доске так, чтобы они не били друг

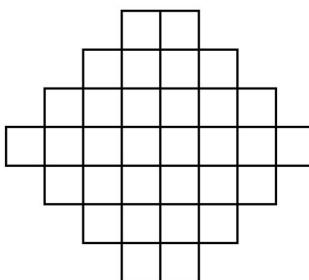


Рис. 34

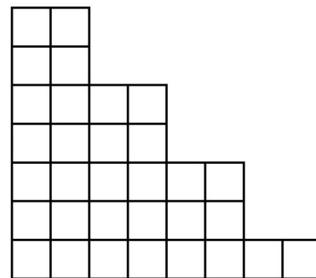


Рис. 35

друга. С помощью перестановок вертикалей и горизонталей превратим эту доску в изображенную на рис. 35.

Такая доска является представителем обширного класса досок, у которых первая (сверху) горизонталь содержит  $n_1$  идущих друг за другом полей, вторая —  $n_2$  так же расположенных полей, ...,  $m$ -я строка —  $n_m$  таких же полей, причем  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ , а все первые поля строк стоят на одной и той же вертикали (в первом столбце). Такие доски называют *диаграммами Юнга*. Они встречаются во многих областях математики, например, в теории представлений групп.

Назовем последовательность  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  *кодом* диаграммы Юнга, а через  $T(n_1, n_2, \dots, n_m; x)$  обозначим соответствующий ладейный многочлен.

Для любого поля  $a$  первой горизонтали доска  $D^0$  имеет при  $n_1 > 1$  код  $(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m)$ , а при  $n_1 = 1$  код  $(n_2, \dots, n_m)$ ; доска  $D^\#$  при  $n_2 > 1$  имеет код  $(n_2 - 1, n_3 - 1, \dots, n_m - 1)$ . Поэтому по формуле (15) получаем, что при  $n_1 > 1$

$$\begin{aligned} T(n_1, n_2, \dots, n_m; x) &= \\ &= T(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m; x) + xT(n_2 - 1, n_3 - 1, \dots, n_m - 1; x). \end{aligned}$$

Применяя еще  $n_1 - 1$  раз эту формулу к первому слагаемому, получим, что при  $n_2 > 1$

$$\begin{aligned} T(n_1, n_2, \dots, n_m; x) &= \\ &= T(n_2, \dots, n_m; x) + n_1 x T(n_2 - 1, n_3 - 1, \dots, n_m - 1; x). \quad (16) \end{aligned}$$

В слагаемых, стоящих в правой части этого равенства, число горизонталей уже равно  $m - 1$ . Продолжая этот процесс, сведем все к диаграмме Юнга, имеющей одну горизонталь, а для такой диаграммы имеем  $T(n; x) = 1 + nx$ . Так как код диаграммы

Юнга на рис. 35 равен  $(2, 2, 4, 4, 6, 6, 8)$ , то последовательно получим

$$\begin{aligned} T(2, 2, 4, 4, 6, 6, 8; x) &= T(2, 4, 4, 6, 6, 8; x) + \\ &\quad + 2xT(1, 3, 3, 5, 5, 7; x) = \dots = \\ &= 1 + 32x + 356x^2 + 1704x^3 + 3532x^4 + 2816x^5 + 632x^6 + 16x^7. \end{aligned}$$

Например, трех слонов можно поставить 1704 способами.

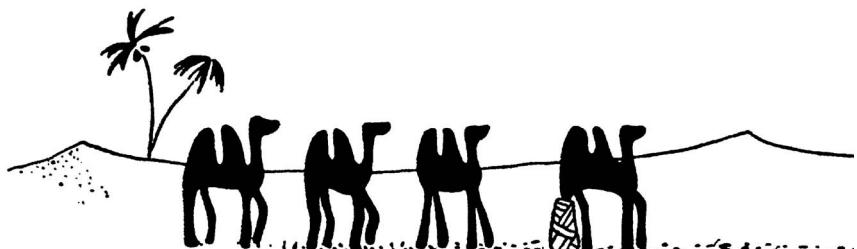
## 76. Караван в пустыне

Часто в задачах речь идет о соседстве одной или нескольких пар элементов, и запрету подлежит некоторое множество таких пар. Эти задачи во многих случаях удается решить, классифицируя эти перестановки по числу входящих в них запрещенных пар и применив формулу включений и исключений.

*По пустыне идет караван из 9 верблюдов. Путешествие длится много дней, и, наконец, всем надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел иной верблюд, чем раньше?*

Такие перестановки наверняка существуют. Например, можно переставить всех верблюдов в обратном порядке, так что последний окажется первым и т. д. Ведь, как гласит арабская пословица, «когда караван поворачивает назад, хромой верблюд оказывается впереди».

Для решения задачи перенумеруем верблюдов в первоначальном порядке от конца каравана к началу числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нам нужно найти все перестановки этих чисел, в которых нет ни одной из пар  $(1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (6; 7), (7; 8), (8; 9)$ . Сосчитаем, во скольких перестановках этих чисел участвует пара  $(1; 2)$ . Мы можем считать в этих перестановках такую пару за один элемент. Поэтому общее число переставляемых элементов будет уже не 9, а 8 и их число равно



$P_8 = 8!$ . Тот же результат получаем и для остальных 7 запрещенных пар.

Теперь рассмотрим перестановки, запрещенные по крайней мере дважды, т. е. содержащие две запрещенные пары. Возможны два случая — две запрещенные пары либо не имеют общих элементов, либо имеют один общий элемент.

В первом случае объединим вместе элементы каждой пары. У нас останется всего 7 переставляемых элементов (2 пары и 5 элементов, не попавших ни в одну из этих пар). Число таких перестановок равно  $P_7 = 7!$ . Во втором случае три элемента, входящие в две запрещенные пары, должны идти подряд. Например, если в перестановку входят пары (3; 4) и (4; 5), то в ней подряд идут элементы 3, 4, 5. Объединим эти три элемента вместе. Тогда перестановкам подлежат снова 7 элементов — 1 блок из трех элементов и 6 элементов, не вошедших в блок. Число таких перестановок опять равно  $P_7 = 7!$ .

Совершенно так же доказывается, что какие бы  $k$  запрещенных пар мы ни взяли, число перестановок, содержащих все эти  $k$  пар, равно  $P_{9-k} = (9 - k)!$ . Но  $k$  пар из 8 можно выбрать  $C_8^k$  способами. По формуле включений и исключений получаем, что количество перестановок, не содержащих ни одной запрещенной пары, равно

$$\begin{aligned} P_9 - C_8^1 P_8 + C_8^2 P_7 - C_8^3 P_6 + C_8^4 P_5 - C_8^5 P_4 + C_8^6 P_3 - C_8^7 P_2 + C_8^8 P_1 = \\ = 8! \left( 9 - \frac{8}{1!} + \frac{7}{2!} - \frac{6}{3!} + \frac{5}{4!} - \frac{4}{5!} + \frac{3}{6!} - \frac{2}{7!} + \frac{1}{8!} \right) = 148\ 329. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что количество перестановок из чисел 1, 2, ...,  $n$ , не содержащих ни одной из пар (1; 2), (2; 3), ..., ( $n - 1$ ;  $n$ ), выражается формулой

$$\begin{aligned} E_n = P_n - C_{n-1}^1 P_{n-1} + C_{n-1}^2 P_{n-2} - C_{n-1}^3 P_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} P_1 = \\ = (n - 1)! \left[ n - \frac{n - 1}{1!} + \frac{n - 2}{2!} - \frac{n - 3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)!} \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Выразим полученный ответ через субфакториалы. Для этого разобьем каждое слагаемое в правой части на два:

$$\frac{(-1)^k (n - k)}{k!} = \frac{(-1)^k n}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k - 1)!}.$$

Мы получим, что

$$\begin{aligned} E_n = n! & \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] + \\ & + (n-1)! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right]. \end{aligned}$$

В обе скобки мы добавили по одному (последнему) члену; очевидно, что эти члены взаимно уничтожаются, так как после раскрытия скобок превращаются соответственно в  $(-1)^n$  и  $(-1)^{n-1}$ . Но первая скобка — это не что иное, как  $D_n$ , а вторая — не что иное, как  $D_{n-1}$ . Поэтому

$$E_n = D_n + D_{n-1}. \quad (18)$$

Итак, число перестановок из  $n$  чисел 1, 2, 3, ...,  $n$ , в которые не входит ни одна из пар (1; 2), (2; 3), ..., ( $n-1$ ;  $n$ ), равно  $D_n + D_{n-1}$ .

Совершенно так же доказывается, что количество перестановок из  $n$  элементов, в которые не входят заданные  $r \leq n-1$  пар, равно

$$P_n = C_r^1 P_{n-1} + C_r^2 P_{n-2} + \dots + (-1)^r C_r^r P_{n-r}. \quad (19)$$

Иной ответ получится, если число запрещенных пар больше, чем  $n-1$ . Пусть, например, кроме пар (1; 2), (2; 3), ..., ( $n-1$ ;  $n$ ), в перестановки не должна входить и пара ( $n$ ; 1). Рассуждая точно так же, как и выше, получим, что ответ выражается формулой

$$\begin{aligned} F_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \dots + (-1)^k C_n^k P_{n-k} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_1 = \\ = n! \left[ 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = nD_{n-1}. \quad (20) \end{aligned}$$

В самом деле, в этом случае число запрещенных пар равно  $n$ , а случая, когда в перестановку входят все  $n$  пар, быть не может. Ведь, например, если в перестановку входят пары (1; 2), (2; 3), ..., ( $n-1$ ;  $n$ ), то первым элементом является 1, а последним  $n$ , и поэтому пара ( $n$ ; 1) в перестановку не входит. Поэтому последний член в формуле (20) равен  $(-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_1$ , а не  $(-1)^n C_n^n P_0 = (-1)^n$ .

## 77. Катание на карусели

*На карусели катаются  $n$  ребят. Они решили пересесть — так, чтобы у каждого из них сменился впереди сидящий. Сколькими способами они могут это сделать?*

Эта задача похожа на решенную выше задачу о караване. Но теперь число запрещенных пар равно  $n$ ; должны отсутствовать пары  $(1; 2)$ ,  $(2; 3)$ , ...,  $(n - 1; n)$ , и  $(n; 1)$ . Кроме того, перестановки, получаемые друг из друга пересадкой ребят по кругу, мы не будем считать различными — когда карусель закружится, их не различишь. Поэтому из  $n$  элементов можно сделать лишь  $P_{n-1} = (n - 1)!$  существенно различных перестановок. Наконец, в новой задаче могут быть перестановки, в которые входят все  $n$  пар. Такой будет, например, исходная перестановка. Учитывая все эти обстоятельства, получаем по формуле включений и исключений, что число искомых перестановок равно

$$Q_n = P_{n-1} - C_n^1 P_{n-2} + C_n^2 P_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} P_0 + (-1)^n C_n^n. \quad (21)$$

Легко проверить, что это выражение можно записать в виде

$$Q_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - \dots + (-1)^{n-3} D_2. \quad (22)$$

В самом деле, в силу равенства  $C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$  из формулы (21) следует, что при  $n \geq 1$

$$Q_n + Q_{n-1} = P_{n-1} - C_{n-1}^1 P_{n-2} + C_{n-1}^2 P_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1},$$

а это выражение равно  $D_{n-1}$  (см. п. 70). Таким образом,  $Q_n + Q_{n-1} = D_{n-1}$ . Кроме того, из формулы (21) вытекает, что  $Q_2 = 0$  (что и так очевидно). Складывая равенства

$$\begin{aligned} Q_n + Q_{n-1} &= D_{n-1}, \\ -Q_{n-1} - Q_{n-2} &= -D_{n-2}, \\ Q_{n-2} + Q_{n-3} &= D_{n-3}, \\ \dots &\dots \\ (-1)^{n-3} Q_3 &= (-1)^{n-3} D_2, \end{aligned}$$

приходим к соотношению (22).

## 78. Затруднение мажордома

*Однажды мажордом короля Артура обнаружил, что к обеду за круглым столом приглашено 6 пар враждующих рыцарей. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом?*

Эта задача похожа на задачу о супружеских парах, но отличается от нее тем, что в задаче о супружеских парах требовалось не только, чтобы супруги были разделены друг от друга, но и чтобы рядом не сидели двое мужчин или две

женщины. В задаче о рыцарях этих условий нет — надо лишь, чтобы рядом не сидели никакие два врага. Мы решим задачу в общем виде, когда приглашено  $n$  пар враждующих рыцарей ( $n > 1$ ). При этом будем считать, что кресла для гостей занумерованы (скажем, начиная с некоторого по ходу часовой стрелки), и способы рассадки различны, если хоть один рыцарь попадает в другое кресло.

Для решения задачи воспользуемся снова формулой включений и исключений. Обозначим через  $a_i$  событие, состоящее в том, что  $i$ -я пара враждующих между собой рыцарей сидит рядом. Подсчитаем, чему равно  $N(a_1a_2\dots a_k)$ , т. е. во скольких случаях рядом сидят  $k$  пар врагов.

Первую пару можно усадить за стол  $4n$  способами ( $2n$  способами выбрать место для одного, второго посадить на следующее по ходу часовой стрелки место и учесть, что рыцарей можно поменять местами). Для остальных рыцарей останется  $2n - 2$  места, причем их надо занять так, чтобы вторая, третья, ...,  $k$ -я пары врагов оказались рядом. Каждую такую пару рядом сидящих враждующих рыцарей можно считать одним «объектом». Эти  $k - 1$  пар рыцарей и  $2n - 2k$  остальных рыцарей можно переставлять друг с другом  $(2n - k - 1)!$  способами. Если взять одну из таких перестановок и посадить рыцарей по порядку на свободные места (подряд по ходу часовой стрелки), то выбранные нами  $k - 1$  пар врагов окажутся рядом. Это условие не нарушится и в случае, если мы поменяем местами некоторых рядом сидящих врагов. Так как такие пересадки можно сделать  $2^{k-1}$  способами, то всего получаем  $4n \cdot 2^{k-1} \cdot (2n - k - 1)!$  способов посадки. Таким образом,



$N(a_1 a_2 \dots a_k) = 2^{k+1} \cdot n \cdot (2n - k - 1)!$ . Мы хотим найти, во скольких случаях ни одна пара врагов не окажется соседями, т. е. вычислить  $N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n)$ . Принимая во внимание, что  $k$  пар можно выбрать  $C_n^k$  способами, получаем по формуле включений и исключений, что

$$A_n = N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) = 2n \left[ (2n - 1)! - 2C_n^1(2n - 2)! + 2^2 C_n^2(2n - 3)! - \dots + (-1)^k 2^k C_n^k (2n - k - 1)! + \dots + (-1)^n 2^n (n - 1)! \right].$$

При  $n = 2$  получаем  $A_2 = 4 \cdot 2 = 8$ . Здесь множитель 4 соответствует возможности повернуть всю рассадку, т. е. произвольно выбрать место одного рыцаря (скажем, самого старшего), напротив него должен сидеть враждующий с ним рыцарь, а по правую и по левую руку от него — рыцари из другой враждующей пары, их можно посадить 2 симметричными способами. Так что с точностью до поворотов и симметрии рассадка рыцарей единственна.

При  $n = 3$  получаем  $A_3 = 6 \cdot 32 = 192$ . Здесь множитель 6 — повороты, 2 — симметрия, остается 16 существенно различных способов рассадить рыцарей.

При  $n = 6$  получаем  $A_6 = 12 \cdot 12\ 771\ 840$ .

### Задачи

1. Надо отгадать, какие пять монет держит в руке партнер. Выбор монет такой: 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек, 1 рубль. Сколько может быть дано неверных ответов?

А если все монеты в руке различного достоинства?

2. Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы

- а) никакие три соотечественника не сидели рядом;
- б) никакие два соотечественника не сидели рядом?

3. Сколькими способами можно посадить за один *круглый* стол 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие два соотечественника не сидели рядом?

4. Сколькими способами можно расставить в ряд 6 англичан, 7 французов и 10 турок так, чтобы каждый англичанин стоял между французом и турком, но никакие француз и турок не стояли рядом? Решите ту же задачу для 5 англичан, 7 французов и 10 турок.

5. а) Сколькими способами можно построить в ряд  $n$  супружеских пар так, чтобы ни одна пара не стояла рядом?

б) Даны  $n$  наборов, в каждый из которых входит  $q$  одинаковых элементов, причем элементы различных наборов различны. Во скольких перестановках этих  $qn$  элементов нет ни одного набора, все элементы которого идут подряд?

в) Решите ту же задачу при условии, что элементы располагаются по окружности.

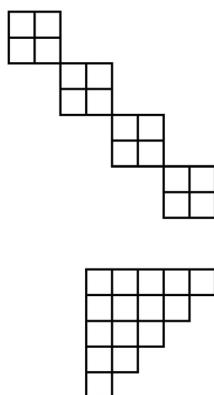


Рис. 36

6. Найдите ладейные многочлены для досок, изображенных на рис. 36.

7. Сколькоими способами можно бросить 6 раз две игральные кости так, чтобы каждая кость выпала каждой стороной по 1 разу, но ни разу не встретились комбинации (2, 1), (8, 2), (2, 3), (4, 4), (4, 5) и (6, 6)?

8. Докажите, что  $m + n$  предметов можно переставить так, чтобы ровно  $n$  осталось на месте,  $\frac{(m+n)!}{m! n!} D_m$  способами.

9. Колода из  $2n$  карт тасуется следующим образом: ее делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Например, карта с номером  $n + 1$  становится первой, первая — второй, с номером  $n + 2$  — третьей, вторая — четвертой и т. д. Докажите, что через  $r$  раз карта, первоначально находившаяся на  $p$ -м месте, попадет на место  $x$ , где  $x$  — остаток от деления  $2^r p$  на  $2n + 1$ .

10. а) Докажите, что если в условии предыдущей задачи колода содержит  $6m + 2$  карт, то карты с номерами  $2m + 1$  и  $4m + 2$  будут все время меняться местами.

б) Если при том же условии колода содержит  $14m + 6$  карт, то после трех тасовок указанным способом карты  $2m + 1$ ,  $2(2m + 1)$ ,  $3(2m + 1)$ ,  $4(2m + 1)$ ,  $5(2m + 1)$ ,  $6(2m + 1)$  вернутся на исходные места.

11. Если при том же условии  $2^x - 1$  делится на  $2n + 1$ , то колода из  $2n$  карт после  $x$  тасовок придет в первоначальное положение.

12. а) Колода карт тасуется следующим образом: сначала берется первая карта, вторая карта кладется на нее, третья — под нее и т. д. Докажите, что если колода содержит  $6n - 2$  карт, то карта  $2n$  остается на месте.

б) Указанной выше тасовке подвергаются 22 карты. Докажите, что карта 8 все время остается на месте, 5 и 14 меняются местами, а 3, 13, 18 переходят друг в друга по кругу.

в) Докажите, что при том же условии колода в 16 карт придет в первоначальное положение после 5 тасовок; колода в 32 карты — после 6; 42 карты — после 8; 28 и 36 карт — после 9; 12, 20, 46 карт — после 10; 22 и 52 карты — после 12; 14 карт — после 14; 18 карт — после 18; 26 карт — после 26; 30 карт — после 30; 50 карт — после 50.

## Глава VI

### БЛУЖДАНИЯ, ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА И ОБОВЩЕНИЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

#### 79. Человек бродит по городу

На рис. 37 изображен план города (примерно такой вид имеет план Канберры — столицы Австралии). В этом городе  $n \times k$  прямоугольных кварталов, разделенных  $n - 1$  «горизонтальными» и  $k - 1$  «вертикальными» улицами.

*Путник хочет попасть из пункта A в пункт B кратчайшим путем, т. е. двигаясь все время или «слева направо», или «снизу вверх». Сколькими путями он может добраться из A в B?*

Ясно, что, каким бы путем ни шел путник, он пройдет через  $k + n$  перекрестков (считая точку A, но не считая точку B). На каждом перекрестке он может идти или направо, или вверх. Соответственно сопоставим каждому пути из A в B последовательность из нулей и единиц — если на очередном перекрестке выбран путь вправо, ставим цифру 0, а если выбран путь вверх, ставим цифру 1. Так как направо путник идет  $k$  раз, а вверх  $n$  раз, то получится перестановка, содержащая  $k$  нулей и  $n$  единиц. Каждой такой перестановке в свою очередь соответствует некоторый путь. На рис. 37 изображен путь, соответствующий перестановке 0110001100.

Но число перестановок из  $k$  нулей и  $n$  единиц равно

$$P(k, n) = C_{n+k}^k = \frac{(n+k)!}{n! k!} \quad (1)$$

(надо выбрать из общего числа  $n + k$  перекрестков те  $k$ , на которых путник идет направо). Тому же самому равно и число кратчайших путей из A в B.

Задачи о движении в разных направлениях тесно связаны с важными для физики проблемами случайных блужданий. Рассмотрим следующую задачу, предлагавшуюся в 1945 г. на VIII Московской математической олимпиаде.

На рисунке 38 изображена сеть дорог. Из пункта A выходят  $2^n$  человек. Половина из них идет вправо, а половина — вверх. Дойдя до первого перекрестка, каждая группа разде-

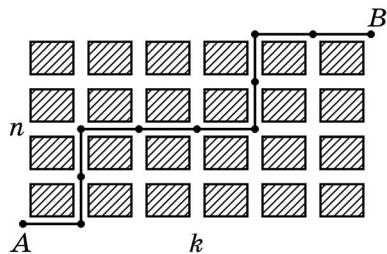


Рис. 37

ляется, половина опять идет вправо, а половина — вверх. Такое же разделение происходит на каждом перекрестке. В каких пунктах окажутся эти люди после того, как они пройдут  $n$  перекрестков, и сколько людей будет в каждом из этих пунктов?

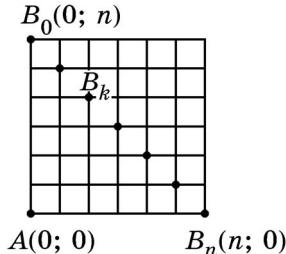


Рис. 38

Такое движение мы только что разобрали. Так как общее число пройденных каждым человеком отрезков пути равно  $n$ , то люди окажутся в пунктах  $B_k(k; n - k)$ , где  $k$  принимает значения от 0 до  $n$ . Все эти пункты расположены на прямой  $B_0B_n$  (см. рис. 38). Теперь остается узнать, сколько человек придет в пункт  $B_k$ . Из точки  $A(0; 0)$  в

каждый пункт  $B_k$  ведут  $C_n^k$  путей. Но

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Значит, число путей, идущих из пункта  $A$  в пункты, расположенные на прямой  $B_0B_n$ , равно  $2^n$ , т. е. в точности равно числу людей, вышедших из пункта  $A$ . Это означает, что каждый путь пройдет один и только один человек, а количество людей, оказавшихся в пункте  $B_k$ , равно числу путей из  $A$  в  $B_k$ , т. е.  $C_n^k$ .

Если в каждом пункте  $B_k$  указать количество пришедших туда людей, то по линии  $B_0B_n$  окажутся выписанными числа  $n$ -й строки арифметического треугольника, т. е. биномиальные коэффициенты.

## 80. Броуновское движение

Несколько изменим условие решенной выше задачи.

*Из точки  $O$  на прямой  $Ox$  выходит  $2^n$  человек. Из них половина идет направо, половина — налево. Через 1 час каждая группа снова делится пополам, и половина идет направо, а половина — налево. Такое разделение происходит каждый час. Сколько человек придет в каждую точку через  $n$  часов после выхода?*

Будем считать, что за один час они проходят половину единицы пути. Если сравнить эту задачу с предыдущей, то видно, что смещения вправо такими и остались, только стали вдвое короче, а смещения вверх превратились в смещения влево (и стали вдвое короче), или скажем так: стали «смещениями вправо с противоположным знаком», поэтому конечная точка

$$\text{маршрута } B_k(k; n - k) \text{ станет точкой } B_k\left(\frac{k}{2} - \frac{n - k}{2}\right) = B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$$

и придет туда  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  человек (точка  $O(0)$  — начало отсчета).

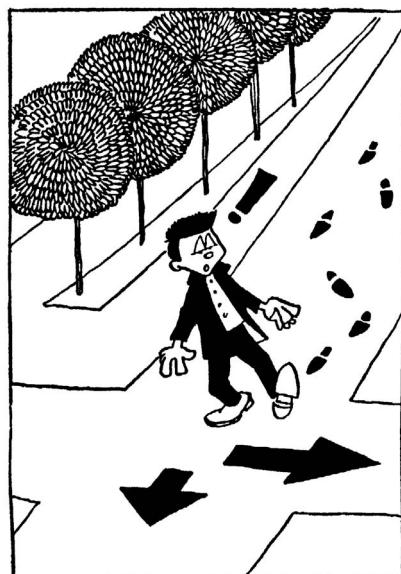
Маловероятно, чтобы люди ходили описанным выше образом (впрочем, в фольклорном варианте этой задачи говорилось «Пусть в точке  $O$  находится питейное заведение»). Однако в некоторых задачах физики подобного рода блуждания возникают естественным образом — они являются простейшей моделью так называемого броуновского движения, совершающего частицами под ударами молекул.

Рассмотрим частицы, которые могут передвигаться только по прямой линии. Так как удары молекул носят случайный характер, то в первом приближении можно считать, что за единицу времени половина частиц сместится на  $1/2$  единицы длины вправо, а половина — на  $1/2$  единицы влево (на самом деле процесс значительно сложнее, возможны передвижения на отрезки различной длины). Поэтому если взять  $2^n$  частиц, находящихся в начальный момент времени в точке  $O$ , то они будут перемещаться примерно так, как было описано в нашей задаче. Такое распространение частиц называют в физике *диффузией*.

Решенная нами задача о случайному блуждании толпы людей позволяет найти, как распределяются диффундирующие частицы через некоторое время после начала диффузии. Именно, через  $n$  единиц времени частицы распределяются по следующему закону: в точке  $B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$  окажется  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  частиц.

Как уже отмечалось, числа  $C_n^k$  являются элементами  $n$ -й строки арифметического треугольника. При ином характере диффузии могут получиться числа  $n$ -й строки  $m$ -арифметического треугольника. Именно, пусть вначале в точке  $O$  было  $m^n$  частиц. Их разделили на  $m$  равных частей и поместили в  $m$  точек на прямой  $Ox$ , причем расстояние между соседними точками равно  $1/(m-1)$ , и эти точки расположены симметрично относительно точки  $O$ .

После этого каждая часть делится таким же образом —



часть, находящаяся в точке  $B$ , распределяется в  $m$  точек, симметричных относительно точки  $B$ . После  $n$  шагов одиночные частицы будут группами находиться в точках  $B_k$ , где  $k = 0, 1, \dots, (m - 1)n$ , при этом в точке  $B_k$  будет  $C_m(n, k)$  частиц.

При больших значениях  $n$  подсчет числа частиц в каждой точке становится слишком сложным. Но, как часто бывает в математике, с ростом  $n$  закон распределения начинает приближаться к простой предельной закономерности, причем эта закономерность тем точнее описывает распределение частиц, чем больше их число.

Расположим точки  $B_k$  на равном расстоянии друг от друга на оси  $Ox$  симметрично относительно точки  $O(0; 0)$ . Построим ступенчатую линию, высота которой в точке  $B_k$  равна  $C_m(n, k)$ . Подберем некоторый масштаб по осям  $Ox$ ,  $Oy$ . В теории вероятностей доказывают, что тогда при больших  $n$  получится ступенчатая линия, мало отличающаяся от графика

функции  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Эту функцию ввел в теорию вероятностей великий немецкий математик К. Гаусс. Поэтому ее называют *функцией Гаусса*. Она играет важную роль не только в вопросах диффузии газов, но и в теории теплопроводности, теории ошибок и т. д.

## 81. Блуждания и свойства сочетаний

В главе II были доказаны некоторые свойства сочетаний. Покажем, как вывести эти свойства более наглядно, используя геометрические соображения.

1. Сначала покажем, как вывести соотношение

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (2)$$

На рисунке 39 изображена сеть дорог. Каждый путь начинается в точке  $A(0; 0)$ , состоит из  $n$  отрезков длины 1, идущих вверх или вправо, поэтому заканчивается он в некоторой точке вида  $B_k(k; n - k)$ . Подсчитаем двумя способами общее число путей.

С одной стороны, нам надо пройти  $n$  отрезков длины 1, и для каждого отрезка делать выбор, идти вверх или вправо (2 возможности). Поэтому общее число путей равно  $2^n$ .

С другой стороны, все пути, ведущие из точки  $A(0; 0)$  в точку вида  $B_k(k; n - k)$ , распадаются на классы в зависимости от того, в какой точке  $B_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , они заканчиваются. Чтобы

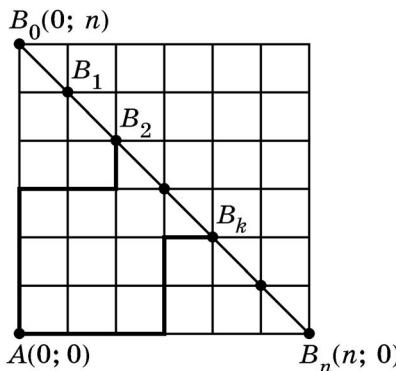


Рис. 39

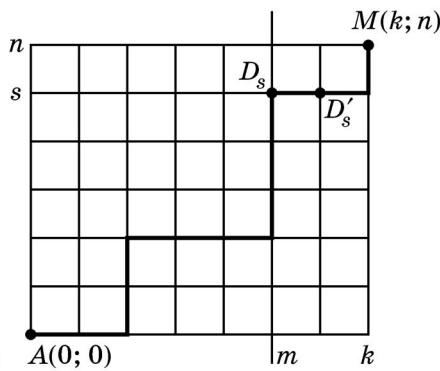


Рис. 40

попасть в точку  $B_k(k; n - k)$ , надо  $k$  отрезков из  $n$  пройти вправо (а остальные — вверх). Выбрать из  $n$  последовательно проходимых отрезков те  $k$ , которые будут пройдены вправо, можно  $C_n^k$  способами. Тем самым доказано соотношение (2).

2. В п. 33 мы уже вывели соотношения  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$  и  $C_{n+k}^k = C_{n+k}^n$ . Докажем более сложные равенства. Проведем на сети дорог вертикальную прямую с абсциссой  $m$ ,  $0 \leq m \leq k$  (рис. 40). Каждый путь, ведущий из точки  $A(0; 0)$  в точку  $M(k; n)$ , пересекает эту прямую, причем, быть может, частично проходит по этой прямой. Разобьем множество всех путей из  $A$  в  $M$  на классы, причем в  $s$ -й класс отнесем пути, для которых *последней* общей точкой с прямой  $x = m$  является точка  $D_s(m; s)$ .

Подсчитаем теперь, сколько путей, соединяющих точки  $A$  и  $M$ , относится к  $s$ -му классу. Каждый такой путь состоит из пути, идущего от  $A$  к  $D_s(m; s)$ , отрезка от  $D_s(m; s)$  до  $D'_s(m+1; s)$  (ведь  $D_s$  — последняя точка прямой  $x = m$  на этом пути) и пути от  $D'_s(m+1; s)$  до точки  $M(k; n)$ . По формуле (1) из точки  $A(0; 0)$  в точку  $D_s(m; s)$  ведет  $P(m, s)$  путей. Из точки же  $D'_s(m+1; s)$  в точку  $M(k; n)$  ведет  $P(k-m-1, n-s)$  путей (чтобы попасть из  $D'_s$  в  $M$ , надо пройти  $k-m-1$  единичных отрезков вправо и  $n-s$  единичных отрезков вверх). По правилу произведения общее число путей  $s$ -го класса равно

$$P(m, s)P(k-m-1, n-s).$$

Число же всех путей из  $A$  в  $M$  равно  $P(k, n)$ . Поэтому по правилу суммы получаем, что

$$\begin{aligned} P(k, n) = & P(m, 0)P(k - m - 1, n) + \\ & + P(m, 1)P(k - m - 1, n - 1) + \dots + P(m, n)P(k - m - 1, 0). \end{aligned}$$

Это равенство можно записать так:

$$C_{n+k}^k = C_m^m C_{n+k-m-1}^{k-m-1} + C_{m+1}^m C_{n+k-m-2}^{k-m-1} + \dots + C_{m+n}^m C_{k-m-1}^{k-m-1} \quad (3)$$

(см. также (27) в п. 33).

В частности, при  $m = k - 1$  получаем соотношение

$$C_{n+k}^k = C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + \dots + C_{k+s-1}^{k-1} + \dots + C_{k+n-1}^{k-1}. \quad (4)$$

Заметим, что соотношения (3) и (4) можно вывести, многократно применяя соотношение  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ .

Этим геометрическим способом можно доказать еще целый ряд соотношений для чисел  $C_{n+k}^k$ , разбивая различным образом на классы пути, которые ведут из  $A(0; 0)$  в  $M(k; n)$ , а используя многомерную геометрию, можно доказать соотношения (28) и (29) из п. 33. Мы не будем здесь этого делать.

## 82. Очередь в кассу

*У кассы кинотеатра стоит очередь из  $m + k$  человек, причем  $m$  человек имеют рубли, а  $k$  — полтинники (монеты по 50 копеек). Билет в кино стоит 50 копеек, и в начале продажи билетов касса пуста. Сколькими способами могут располагаться в очереди люди с рублями и полтинниками так, что очередь пройдет без задержки, т. е. никому не придется ждать сдачи?*

Например, если  $m = k = 2$ , то благоприятными будут лишь два случая: прпр и ппrr, где буква «п» означает полтинник, а буква «р» — рубль. В четырех же случаях — rrpp, pprr, pppr и prrp — возникает задержка. В первых трех случаях уже первый зритель не сможет получить сдачу, а в последнем случае у кассы задержится третий зритель.

При небольших значениях  $m$  и  $k$  задачу можно решить прямым перебором. Но если  $m$  и  $k$  сравнительно велики, то прямой перебор не поможет. Ведь число различных перестановок из  $m$  рублей и  $k$  полтинников равно, как мы знаем,  $P(m, k) = \frac{(m+k)!}{m!k!}$ . Уже при  $m = k = 20$  число перестановок из



20 рублей и 20 полтинников равно  $P(20, 20) = \frac{(40)!}{20! 20!}$ , а это число больше ста миллиардов.

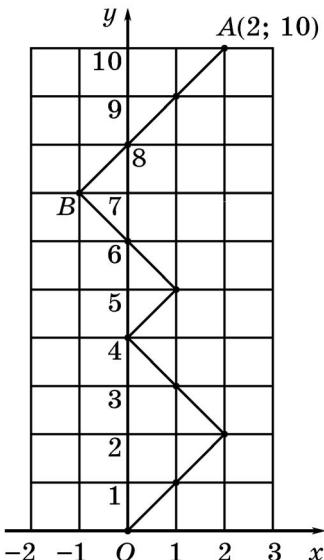
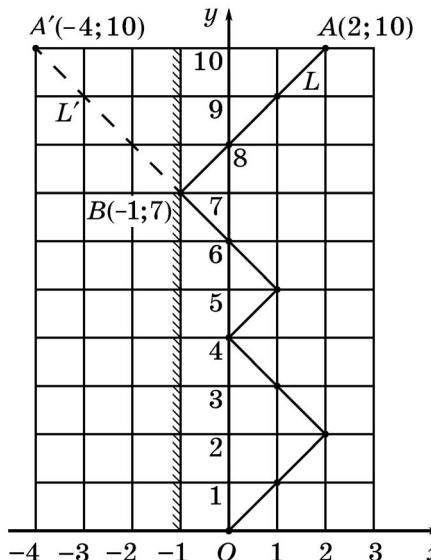
Итак, нам надо решить следующую комбинаторную задачу.

*Найти число перестановок с повторениями из  $m$  рублей и  $k$  полтинников, таких что для любого  $r$ ,  $1 \leq r \leq m + k$ , число полтинников среди первых  $r$  элементов перестановки не меньше числа рублей.*

Ясно, что искомое число отлично от нуля лишь при условии, что  $m \leq k$  — иначе полтинников заведомо не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам рублей.

Как и во многих комбинаторных задачах, здесь полезно использовать геометрическую иллюстрацию. Возьмем координатную сетку и будем изображать каждую перестановку рублей и полтинников ломаной, соединяющей узлы сетки по следующим правилам: ломаная начинается в начале координат  $O(0; 0)$ ; каждому полтиннику соответствует звено ломаной, идущее вверх направо, а каждому рублю — звено, идущее вверх налево (звено соединяет противоположные точки одного из квадратов координатной сетки). Например, последовательности прпрпрппп соответствует ломаная, изображенная на рис. 41.

Ясно, что если в последовательности имеется  $m$  рублей и  $k$  полтинников, то концом ломаной окажется точка  $A(k - m; k + m)$ . Число ломаных, ведущих из точки  $O$  в точку  $A$ , равно числу перестановок с повторениями из  $m$  рублей и  $k$  полтинников, т. е.  $P(m, k)$ . Выясним теперь, чем характеризуются ломаные, удовлетворяющие условию задачи. Если очередь в какой-то момент времени застопорилась, то это значит, что число рублей к этому моменту оказалось на 1 больше числа полтинников. Но тогда точка, движущаяся по ломаной, сделает влево на один шаг больше, чем вправо, и окажется на прямой  $x = -1$  (для ломаной на рис. 41 на этой

Рис. 41.  $k = 6, m = 4$ Рис. 42.  $k = 6, m = 4$ 

прямой лежит точка  $B(-1; 7)$ ; она указывает, что очередь остановится на 7-м шаге). Итак, всем перестановкам, при которых очередь останавливается в какой-то момент, соответствуют ломаные, имеющие точки на прямой  $x = -1$ . Обратно, если у ломаной есть точка на этой прямой, то очередь остановится.

Мы пришли, таким образом, к следующей геометрической задаче: *найти число ломаных указанного вида, не пересекающих прямую  $x = -1$ .*

Здесь, как часто бывает в комбинаторных задачах, выгоднее искать число «неблагоприятных» случаев, т. е. случаев, когда очередь задерживается. Если мы найдем это число, то, вычтя его из числа  $P(k, m) = C_{m+k}^m$  всех перестановок  $m$  рублей и  $k$  полтинников (общего число ломаных), получим ответ для нашей задачи.

Значит, получилась задача об отыскании числа ломаных, пересекающих прямую  $x = -1$ . Но если ломаная  $L$  пересекает прямую  $x = -1$ , то ее можно преобразовать следующим образом: взять наивысшую точку пересечения и часть ломаной  $L$  выше этой точки симметрично отразить в прямой  $x = -1$ . Такое преобразование ломаной  $L$  в  $L'$  показано на рис. 42. При этом преобразовании точка  $A(k - m; k + m)$ , лежащая справа от

прямой  $x = -1$ , переходит в симметричную ей точку  $A'(m - k - 2; k + m)$ , лежащую слева от прямой  $x = -1$ . Таким образом, каждому пути из  $O$  в  $A$ , пересекающему прямую  $x = -1$ , соответствует путь из  $O$  в  $A'$ . Обратно, если ломаная  $L'$  ведет из  $O$  в  $A'$ , то она по дороге должна хотя бы один раз пересечь прямую  $x = -1$  и, значит, может быть получена описанным выше образом из ломаной, соединяющей  $O$  с  $A$  и пересекающей указанную прямую.

Итак, число ломаных, соединяющих  $O$  с  $A$  и пересекающих прямую  $x = -1$ , равно числу ломаных, ведущих из  $O$  в  $A'$ .

Сосчитать же число ломаных, ведущих из  $O$  в  $A'$ , совсем легко — координаты точки  $A'$  равны  $m - k - 2$  и  $k + m$ , а поэтому у такой ломаной должно быть  $k + 1$  звеньев, направленных влево, и  $m - 1$  звеньев, направленных вправо. Значит, общее число этих ломаных равно  $P(k + 1, m - 1)$ . Число же ломаных, не пересекающих прямую  $x = -1$ , выражается формулой

$$P(m, k) - P(k + 1, m - 1) = C_{k+m}^k - C_{k+m}^{k+1} = \frac{k - m + 1}{k + 1} C_{m+k}^m. \quad (5)$$

Итак, количество очередей, при которых не происходит задержки, равно  $\frac{k - m + 1}{k + 1} C_{m+k}^m$ , где  $k$  — число полтинников,  $m$  — число рублей. В частности, если  $k = m$ , то очередь пройдет без задержки в  $\frac{1}{k + 1} C_{2k}^k$  случаях и задержится в  $\frac{k}{k + 1} C_{2k}^k$  случаях. При больших  $k = m$  очередь чаще всего задержится. Наша задача полностью решена.

Рассмотрим теперь некоторое обобщение этой задачи.

*Кассир был предупрежден и в начале продажи билетов в кассе уже лежало  $q$  полтинников. Во скольких случаях пройдет без задержки очередь, состоящая из  $t$  обладателей рублей и  $k$  обладателей полтинников?*

Геометрическое представление этой задачи будет почти таким же. Только запретной прямой теперь будет прямая  $x = -q - 1$  (наличие  $q$  полтинников в кассе позволяет ломаной уклониться на  $q$  единиц влево без задержки очереди, а уклониться на  $q + 1$  единиц она уже не имеет права). Поэтому теперь  $A'(m - k - 2q - 2; k + m)$ , у  $L'$  звеньев влево  $k + q + 1$ , звеньев

вправо  $m - q - 1$ , число неблагоприятных перестановок будет  $P(k + q + 1, m - q - 1)$ , а число благоприятных равно

$$C_{m+k}^m - C_{m+k}^{m-q-1}. \quad (6)$$

Если при этом  $m \leq q$ , то очередь наверняка пройдет без задержки — полтинников, которые были в кассе с самого начала, хватит, чтобы удовлетворить всех владельцев рублей. Если же  $m > k + q$ , то очередь наверняка задержится — общего числа полтинников в кассе и в очереди не хватит, чтобы дать сдачу всем владельцам рублей.

В процессе прохождения очереди могли быть моменты, когда в кассе не оставалось ни одного полтинника, и очередь не останавливалась лишь потому, что покупавший в этот момент билет был как раз обладателем полтинника. Подсчитаем число расстановок, при которых ни разу не будет такого критического момента. Иными словами, решим такую задачу.

*Сколькими способами можно расставить обладателей  $t$  рублей и  $k$  полтинников так, чтобы в любой момент (исключая, быть может, начальный и конечный) в кассе был хотя бы один полтинник?*

Эта задача тоже решается методом подсчета ломаных. Но теперь надо искать ломаные, пересекающие прямую  $x = 0$  лишь в начале координат и (при  $m = k$ ) в точке  $A(0; 2k)$ . Поскольку из условия задачи ясно, что впереди должны стоять два обладателя полтинника, то первого из них можно отвести в сторону, и тогда получим решенную выше задачу, но для случая, когда на  $m$  рублей приходится  $k - 1$  полтинник. Поэтому число благоприятных расстановок при  $m < k$  равно

$$C_{m+k-1}^m - C_{m+k-1}^{m-1} = \frac{k-m}{k} C_{m+k-1}^m.$$

Если же  $m = k$ , то надо отвести в сторону и замыкающего очередь обладателя рубля (проверьте сами, что в этом случае в конце не может находиться обладатель полтинника). Мы получим ответ  $\frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}$ .

**Важное следствие.** Обозначим через  $T_n$  число  $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ ,

показывающее, во скольких случаях проходит без задержки очередь из обладателей  $n$  рублей и  $n$  полтинников. Мы докажем сейчас, что эти числа удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T_n = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \dots + T_{s-1} T_{n-s} + \dots + T_{n-1} T_0. \quad (7)$$

Для доказательства разобьем все варианты на классы, отнеся к  $s$ -му классу очереди, в которых лишь после того, как пройдут  $2s$  покупателей, в первый раз обнаруживают отсутствие в кассе полтинников. В этом случае среди первых  $2s$  покупателей имеется  $s$  человек с полтинниками и  $s$  человек с рублями, а число способов расстановки, при которых в кассе на первых  $2s - 1$  шагах был хотя бы один полтинник, равно, как мы видели,  $\frac{1}{s} C_{2s-2}^{s-1} = T_{s-1}$ . Среди оставшихся  $2n - 2s$  людей у  $n - s$  рублей и у  $n - s$  полтинники. Расставить их так, чтобы очередь и потом прошла благополучно, можно  $T_{n-s}$  способами. Всего по правилу произведения получаем, что в  $s$ -м классе будет  $T_{s-1} T_{n-s}$  расстановок. А так как общее число благополучных расстановок равно  $T_n$ , то выполняется равенство (7). При этом  $T_0 = 1$ .

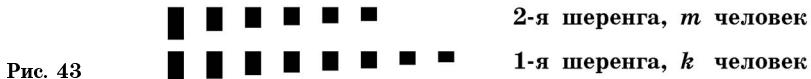
Соотношение (7) встречается во многих задачах. Например, пусть имеется сантиметровая лента («портновский метр») длиной  $n + 1$  см, которую надо разрезать на кусочки длиной 1 см. Причем режут ее, экономя усилия. На первом шагу производят разрез в некотором месте. На втором шагу намечают места разрезов двух полученных частей, накладывают их друг на друга соответствующим образом и одним взмахом ножниц производят разрез. На третьем шагу так же разрезают полученные четыре части и т. д. (если какая-нибудь часть имеет длину 1 см, то она не подвергается дальнейшим разрезам). Например, если от ленты длиной  $2^k$  см каждый раз отрезать 1 см, то потребуется  $2^k - 1$  разрезов, а если резать все получающиеся части пополам, то хватит  $k$  разрезов.

Можно доказать, что число  $B_n$  таких процессов, заканчивающихся разрезанием ленты на  $n + 1$  сантиметровых кусочков, равно  $T_n$  (два процесса считаются различными, если хотя бы на одном шагу они приводят к разным результатам). Доказательство основано на том, что процессы разрезания представляют в виде объединения  $n$  классов, где в  $s$ -й класс попадают разрезания, при которых на первом шагу левая часть имеет длину  $s$  см. Это сразу приводит к рекуррентному соотношению для  $B_n$ , совпадающему с соотношением (7) для  $T_n$ . Так как, кроме того,  $B_0 = T_0 = 1$ , то для всех  $n$  имеем  $B_n = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ .

### 83. Задача о двух шеренгах

В комбинаторике часто бывает, что две на первый взгляд весьма далекие друг от друга задачи оказываются по сути дела одинаковыми. Рассмотрим такую задачу.

*Имеется  $k + m$  (где  $k \geq m$ ) человек разного роста. Сколькими способами можно построить их в две шеренги ( $k$  человек в первой шеренге и  $m$  человек во второй), чтобы в каждой*



шеренге люди стояли по ранжиру (убыванию роста), каждый человек во второй шеренге был ниже стоящего перед ним человека, а шеренги были расположены друг относительно друга так, как показано на рис. 43?

Оказывается, решение этой задачи сводится к уже разобранной задаче об очереди в кассу. Поставим людей требуемым образом и дадим всем, стоящим в первой шеренге, по полтиннику, а всем, стоящим во второй шеренге, по рублю, после чего выстроим всех по ранжиру в одну колонну. Получится очередь из  $m$  обладателей рублей и  $k$  обладателей полтинников. Из условия задачи сразу следует, что эта очередь пройдет без задержки. В самом деле, пусть кто-то занимает  $n$ -е место во второй шеренге. Тогда среди владельцев рублей лишь  $n - 1$  выше него. А среди владельцев полтинников по крайней мере  $n$  человек выше него — стоящий прямо перед ним и  $n - 1$  стоящих в первой шеренге перед теми, кто выше него в его шеренге. Поэтому, когда он подойдет к кассе, там будет хотя бы один полтинник, и сдача ему обеспечена.

Обратно, пусть задана некоторая расстановка  $k + m$  человек по ранжиру, некоторые  $k$  человек с полтинниками, остальные  $m$  человек с рублями и очередь проходит без задержки. Выберем теперь всех  $k$  обладателей полтинников и поставим их по ранжиру в первую шеренгу, а в затылок к ним поставим по ранжиру  $m$  обладателей рублей. Предоставляем читателю проверить, что эта расстановка обладает нужными свойствами. Значит, число возможных расстановок людей в две шеренги равно числу очередей, при которых не будет задержки.

Схема на рис. 43 является не чем иным, как диаграммой Юнга, состоящей из двух горизонталей. Обобщая решенную задачу, приходим к следующей постановке вопроса.

Дана диаграмма Юнга с  $m$  горизонтальными, причем первая снизу горизонталь состоит из  $n_1$  полей, вторая из  $n_2$  полей, ...,  $m$ -я из  $n_m$  полей,  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ . Сколькими способами можно поставить на этой диаграмме числа 1, 2, ...,  $n$ , где  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ , так, чтобы эти числа убывали вдоль каждой горизонтали слева направо, а вдоль каждой вертикали снизу вверх?

Решение и даже ответ этой задачи, играющей важную роль во многих областях математики, довольно сложны.

## 84. Очереди и свойства сочетаний

Выведенные в предыдущих пунктах формулы позволяют установить дальнейшие свойства числа сочетаний  $C_m^k$ .

1. Разобьем на классы все неблагоприятные перестановки из  $m$  букв «р» и  $k$  букв «п» — при которых очередь в кассу задерживается. Отнесем к  $s$ -му классу все перестановки, для которых задержка впервые происходит на месте  $2s + 1$ , тогда перед ним стоит  $s$  букв «р» и  $s$  букв «п», на нем стоит буква «р», а очередь вплоть до этого места проходит без задержки. Ясно, что  $s$  может принимать значение  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ . Найдем, сколько перестановок входит в  $s$ -й класс. На первых  $2s$  местах могут стоять любые благоприятные перестановки из  $s$  букв «р» и  $s$  букв «п» — ведь до места  $2s + 1$  очередь не останавливается. Как мы видели, число таких перестановок равно  $\frac{1}{s+1} C_{2s}^s$ . Далее, на месте  $2s + 1$  стоит буква «р», а после нее — любая перестановка оставшихся  $m - s - 1$  букв «р» и  $k - s$  букв «п». Число этих перестановок равно  $P(m - s - 1, k - s) = C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$ .

Таким образом, в силу правила произведения число неблагоприятных перестановок  $s$ -го класса равно  $\frac{1}{s+1} C_{2s}^s C_{m+k-2s-1}^{m-s-1}$ .

Так как общее число неблагоприятных перестановок равно  $C_{m+k}^{m-1}$ , а число классов равно  $m - 1$ , то получаем при  $m \leq k$  соотношение

$$\begin{aligned} C_0^0 C_{m+k-1}^{m-1} + \frac{1}{2} C_2^1 C_{m+k-3}^{m-2} + \\ + \frac{1}{3} C_4^2 C_{m+k-5}^{m-3} + \dots + \frac{1}{m} C_{2m-2}^{m-1} C_{k-m+1}^0 = C_{m+k}^{m-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это соотношение является частным случаем формулы

$$\sum_{s=q}^{m-1} \left( C_{2s-q}^s - C_{2s-q}^{s-q-1} \right) C_{m+k+q-2s-1}^{m-s-1} = C_{m+k}^{m-q-1}, \quad (9)$$

где  $q < m \leq k + q$  (появляющееся  $C_q^{-1}$  считается равным нулю).

Формула (9) обобщает (8) на случай, когда у кассира было в запасе  $q$  полтинников.

2. Еще одно соотношение между числами  $C_n^m$  получается следующим образом. Зададим число  $l$ ,  $1 \leq l \leq m$ , и разобьем множество всех благоприятных перестановок на классы, отнеся

к  $s$ -му классу все перестановки, содержащие среди первых  $l$  элементов ровно  $s$  букв «р». Тогда число букв «п» среди первых  $l$  элементов равно  $l - s$ . Так как букв «п» должно быть не меньше, чем букв «р», то  $s$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq 2s \leq l$ .

Найдем число перестановок в  $s$ -м классе. Каждая такая перестановка распадается на две части: одна состоит из первых  $l$  букв, а другая — из последних  $k + m - l$  букв. В первую часть входит  $l - s$  букв «п» и  $s$  букв «р». При этом так как вся перестановка благоприятна, то и ее часть, состоящая из первых  $l$  букв, тоже благоприятна. А из  $l - s$  букв «п» и  $s$  букв «р» можно составить  $\frac{l - 2s + 1}{l - s + 1} C_l^s$  таких перестановок.

После того как пройдет первая часть перестановки, в кассе будет  $l - 2s$  полтинников. Вторая часть перестановки состоит из  $k - l + s$  букв «п» и  $m - s$  букв «р». Число перестановок, при которых эта часть очереди проходит без задержки, вычисляется по формуле (6) п. 82, в которой надо заменить  $q$  на  $l - 2s$ ,  $m$  на  $m - s$  и  $k$  на  $k - l + s$ . Из этой формулы вытекает, что вторая часть перестановки может быть выбрана  $C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}$  способами. По правилу произведения получаем, что число перестановок в  $s$ -м классе равно

$$\frac{l - 2s + 1}{l - s + 1} C_l^s (C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}).$$

Так как общее число благоприятных перестановок из  $k$  букв «п» и  $m$  букв «р» равно  $\frac{k - m + 1}{k + 1} C_{m+k}^m$ , то получаем тождество

$$\sum_{s=0}^{[l/2]} \frac{l - 2s + 1}{l - s + 1} C_l^s (C_{m+k-l}^{m-s} - C_{m+k-l}^{m+s-l-1}) = \frac{k - m + 1}{k + 1} C_{m+k}^m. \quad (10)$$

Здесь через  $[l/2]$  обозначена целая часть числа  $\frac{l}{2}$ ;  $C_r^p$  считается равным нулю при  $p < 0$ . Читатель без труда выведет аналогичные соотношения, устанавливая те или иные методы разбиения перестановок на классы.

## 85. У Шемаханской царицы

Вернемся к блужданиям толпы людей по оси  $Ox$ . Только теперь будем считать, что слева от точки  $O$ , из которой они вышли, просятся... владения Шемаханской царицы,

сыгравшей столь печальную роль в судьбе незадачливого царя Додона и его сыновей. Тот, кто попадал в ее царство, обратно уже не возвращался. Мы тоже будем считать, что те, кто попадают на левую половину оси, там и остаются. Требуется выяснить, сколько человек останется у Шемаханской царицы и где окажутся остальные люди через  $n$  часов после выхода  $2^n$  человек из точки  $O$ .

Оказывается, эта задача сводится к рассмотренной нами выше задаче об очереди в кассу кинотеатра. В самом деле, передвижения некоторого человека, вышедшего из точки  $O$ , можно считать неким вариантом распределения в очереди полтинников и рублей. Его можно изобразить такой же ломаной, как и продвижение очереди в кассу: каждому передвижению направо соответствует звено ломаной, идущее направо и вверх (уплата полтинника), а каждому движению налево — звено ломаной, идущее налево и вверх (уплата рубля и изъятие из кассы полтинника). Если в этой последовательности  $k$  раз встречается передвижение вправо и  $n - k$  раз влево (напомним, что каждый раз — на  $1/2$  единицы длины), то в конце движения человек попадает в точку  $B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$ . Однако это случится лишь в том случае, если наш путник по дороге не угодит в Шемаханское царство, т. е. ни в один момент времени число передвижений влево не окажется больше числа передвижений вправо. Последнее условие равносильно тому, что ломаная, изображающая движение очереди, не имеет общих точек с прямой  $x = -1$ . Можно сказать, что удвоенная координата местонахождения путника равна количеству полтинников, имеющихся в кассе, а попадание к Шемаханской царице соответствует тому, что очередь в кассу задержится.

Значит, число людей, попавших в точку  $B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$ , равно числу случаев, когда очередь, в которой стоят  $k$  обладателей полтинников и  $n - k$  обладателей рублей, пройдет без задержки. А мы знаем, что это число отлично от нуля, лишь если  $k \geq n - k$ . В этом случае оно равно (см. (5))

$$C_n^k - C_n^{k+1} = \frac{2k - n + 1}{k + 1} C_n^k = \frac{n!(2k - n + 1)}{(n - k)!(k + 1)!}.$$

Итак, через  $n$  часов после выхода  $2^n$  человек из точки  $O$  в точку  $B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$ , где  $2k \geq n$ , придут (не попав к Шемаханской царице)  $C_n^k - C_n^{k+1}$  человек.

Теперь уже нетрудно подсчитать, сколько человек останется в Шемаханском царстве. Для этого сложим сначала числа  $C_n^k - C_n^{k+1}$  для всех допустимых значений  $k$ . Наименьшим допустимым значением  $k$  для  $n$  четных является  $k = \frac{n}{2}$ . Для  $n$  нечетных,  $n = 2l + 1$ , имеем  $C_n^l = C_n^{l+1}$ , т. е.  $C_n^l - C_n^{l+1} = 0$ , поэтому можно начать с  $k = l = \left[ \frac{n}{2} \right]$ . Наибольшим допустимым является  $k = n$ .

Итак, всего дошли до цели, не застряв в Шемаханском царстве,

$$(C_n^k - C_n^{k+1}) + (C_n^{k+1} - C_n^{k+2}) + \dots + (C_n^n - C_n^{n+1}) = C_n^k$$

человек, где  $k = \left[ \frac{n}{2} \right]$ , т. е.  $C_n^{\left[ \frac{n}{2} \right]}$  человек. А так как всего из точки  $O$  вышло  $2^n$  человек, то во владениях Шемаханской царицы остались  $2^n - C_n^{\left[ \frac{n}{2} \right]}$  человек.

Если бы Шемаханское царство начиналось не слева от точки  $O(0)$ , а слева от точки  $O\left(-\frac{q}{2}\right)$ , то до точки  $B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$  дошли бы  $C_n^k - C_n^{k+q+1}$  человек,  $k \geq \frac{n-q}{2}$ , остальные застряли бы во владениях Шемаханской царицы. Это сразу вытекает из результатов п. 82 для варианта, когда в кассе изначально было  $q$  полтинников.

В фольклорном варианте задачи о блужданиях, как мы говорили, в точке  $O$  находилось питейное заведение. Здесь уже, разумеется, не было никакой Шемаханской царицы, а просто слева от точки  $O$  была вырыта канава, куда и попадали неумеренные поклонники Бахуса.

Предположим теперь, что вместо канавы в этой точке находилась стена, наткнувшись на которую, приходилось идти в обратную сторону. Мы предоставляем читателю убедиться, что в этом случае  $C_n^{k+1}$  надо не вычитать, а прибавлять к  $C_n^k$ . Иными словами, тогда в точке  $B_k\left(k - \frac{n}{2}\right)$  окажется  $C_n^k + C_n^{k+1}$  людей. Аналогично рассматривается случай, когда стена находится в точке  $x = -\frac{q}{2}$ .

## 86. Поглощающая стенка и игры на разорение

Мы уже говорили, что задачи о случайных блужданиях весьма важны для физики — они являются простейшими моделями диффузии частиц. Задача о Шамаханской царице тоже имеет простое физическое истолкование — просто слева от точки  $O$  находится стенка из материала, *поглощающего* частицы. Если стенка вплотную примыкает к точке  $O$ , возникает случай, рассмотренный вначале, а если она отстоит от точки  $O$  на  $\frac{q}{2}$  единиц длины, то получается задача, в которой владения царицы расположены слева от точки  $O_1\left(-\frac{q}{2}\right)$ .

Задача о блуждании подвыпивших людей при наличии стены физически истолковывается как задача о диффузии частиц при наличии *отражающей* стенки.

В те времена, когда основным практическим применением комбинаторики и теории вероятностей было изучение азартных игр, задача о случайных блужданиях с поглощением формулировалась иначе. Речь шла об «играх на разорение». Представим себе двух игроков. После каждой партии проигравший уплачивает выигравшему рубль. Участник, проигравший все деньги, прекращает игру. Надо было выяснить вероятность различных исходов игры, если у одного игрока было  $p$  рублей, а у другого  $q$  рублей. Очевидна связь этой задачи с изучением диффузии частиц в области, ограниченной с двух сторон поглощающими стенками.

## 87. Блуждания по бесконечной плоскости

До сих пор мы рассматривали движения путников, идущих в одном из двух направлений (вверх или вправо на плоскости, вправо или влево на прямой). Изучим теперь блуждания на плоскости во всех четырех направлениях.

Представим себе, что из точки  $O$  (рис. 44) выходит  $4^n$  людей, которые делятся уже на 4 равные группы, идущие от точки  $O$  во все 4 стороны. На каждом перекрестке (точке с целочисленными координатами) дошедшие до него люди снова делятся на 4 группы и т. д. Мы хотим подсчитать распределение людей через  $n$  промежутков времени после выхода из точки  $O$ . Как и ранее, для этого достаточно подсчитать число путей, состоящих из  $n$  единичных отрезков и ведущих из точки  $O$  в точку  $A(p; q)$  (за единицу длины мы принимаем расстояние между соседними перекрестками). Не теряя общности, можно считать, что  $p \geq 0, q \geq 0$  (для отрицательных  $p$  или  $q$  надо брать  $|p|$  или  $|q|$ ).

Чтобы задать любой путь из  $O$  в  $A$ , состоящий из  $n$  звеньев, занумеруем эти звенья по порядку числами 1, 2, ...,  $n$ . Для

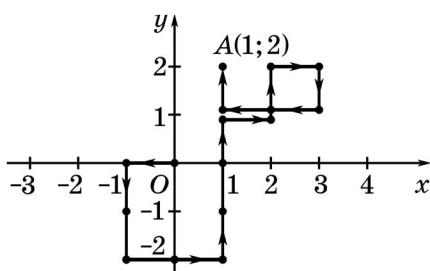


Рис. 44

каждого из этих звеньев надо знать, в каком направлении он идет. Например, изображенный на рис. 44 путь приводит в точку  $A(1; 2)$  и задается последовательностью букв (л, н, н, п, п, в, в, в, п, в, п, н, л, л, в), где буква «п» означает движение вправо, «л» — влево, «в» — вверх и «н» — вниз. Здесь  $n = 15$ ,  $p = 1$ ,  $q = 2$ .

Обозначим через  $X$  множество всех номеров звеньев, которые идут влево или вниз, а через  $Y$  — множество всех номеров звеньев, которые идут вправо или вниз. Например, для пути на рис. 44 эти множества таковы:

$$X = \{1, 2, 3, 12, 13, 14\}, \quad Y = \{2, 3, 4, 5, 9, 11, 12\}.$$

Оказывается, эти два набора полностью определяют путь. Сосвем легко найти те номера звеньев, которые идут вниз — они входят и в  $X$ , и в  $Y$  (в примере это номера 2, 3 и 12). Движениям влево соответствуют числа из  $X$ , не входящие в  $Y$  (в примере — числа 1, 13, 14); вправо — числа из  $Y$ , не входящие в  $X$  (в примере — числа 4, 5, 9, 11); вверх — числа, не входящие ни в  $X$ , ни в  $Y$  (в примере — числа 6, 7, 8, 10, 15).

Таким образом, задав множества  $X$  и  $Y$ , мы для каждого момента времени задаем направление движения, а тем самым и весь путь из точки  $O$  в некоторую точку  $A$ . Множества  $X$  и  $Y$  можно задавать произвольно при одном лишь ограничительном условии — после  $n$  шагов нам надо оказаться в точке  $A(p; q)$ . Это условие позволяет найти число элементов в  $X$  и в  $Y$ . В самом деле, обозначим через  $x_{\text{п}}$ ,  $x_{\text{л}}$ ,  $x_{\text{в}}$ ,  $x_{\text{н}}$  количество звеньев, идущих соответственно вправо, влево, вверх и вниз. Тогда  $x_{\text{п}} - x_{\text{л}} = p$ ,  $x_{\text{в}} - x_{\text{н}} = q$ ,  $x_{\text{п}} + x_{\text{л}} + x_{\text{в}} + x_{\text{н}} = n$ . Множество  $X$  состоит из  $k$  номеров, которым отвечают движения влево или вниз. Легко находим  $k = \frac{1}{2}(n - p - q)$ . Это понятно — если из всех  $n$  движений убрать  $p$  движений вправо и  $q$  движений вверх, то мы как бы приедем обратно в точку  $O$ , т. е. движения вниз и влево будет столько же, сколько оставшихся вверх и вправо — они погашают друг друга. В нашем примере  $X$  состоит из 6 элементов.

В множестве  $Y$  берутся ходы вправо, а не ходы влево, их на  $p$  больше, чем ходов влево (за счет этого мы и попадаем в точку с абсциссой  $p$ ). Ходы же вниз в обоих множествах  $X$  и

$Y$  одни и те же. Значит, в  $Y$  на  $p$  элементов больше, чем в  $X$ , т. е.  $p + k$  элементов. Поэтому множество  $X$  можно выбрать  $C_n^k$  способами, множество  $Y$  —  $C_n^{p+k}$  способами, и по правилу произведения число путей длины  $n$ , ведущих из точки  $O$  в точку  $A(p; q)$ , равно  $C_n^k C_n^{p+k}$ , где  $k = \frac{1}{2}(n - p - q)$ .

## 88. Арифметический квадрат

Перемещения путника по городу (п. 79) напоминают движения шахматной ладьи. Возьмем бесконечную шахматную доску, ограниченную сверху и слева перпендикулярными лучами, и поставим в верхнем левом углу этой доски ладью.

Нам будет удобно нумеровать вертикали и горизонтали числами  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ , начав с верхнего левого углового поля, которое при такой нумерации получает координаты  $(0; 0)$ .

Мы разрешим ладье двигаться по доске только вниз или направо и за один ход только на одно поле. Комбинируя друг с другом эти движения, можно получить различные пути, ведущие из углового поля в данное поле доски. Напишем на каждом поле доски число этих путей. Ясно, что на пересечении  $k$ -й вертикали и  $n$ -й горизонтали стоит число  $C_{n+k}^k$  — чтобы попасть на это поле, ладье-путнику надо сделать  $k$  ходов вправо и  $n$  ходов вниз, остается только выбрать, какие  $k$  из  $n + k$  ходов будут сделаны вправо. Подставим вместо  $C_{n+k}^k$  их числовые значения. Мы получим тогда таблицу на рис. 45. Эту таблицу называют *арифметическим квадратом*. Познакомимся подробнее с его свойствами.

Внимательное изучение арифметического квадрата показывает, что каждое написанное в нем число получается по следующему закону: оно равно сумме числа, написанного над ним, и числа, написанного слева от него. Например, над числом 10 на поле  $(2; 3)$  написано 4, а слева от 10 — число 6.

|     | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6    | 7    | $k$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|
| 0   | 1   | 1   | 1   | 1   | 1   | 1   | 1    | 1    | ... |
| 1   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7    | 8    | ... |
| 2   | 1   | 3   | 6   | 10  | 15  | 21  | 28   | 36   | ... |
| 3   | 1   | 4   | 10  | 20  | 35  | 56  | 84   | 120  | ... |
| 4   | 1   | 5   | 15  | 35  | 70  | 126 | 210  | 330  | ... |
| 5   | 1   | 6   | 21  | 56  | 126 | 252 | 462  | 792  | ... |
| 6   | 1   | 7   | 28  | 84  | 210 | 462 | 924  | 1716 | ... |
| 7   | 1   | 8   | 36  | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | ... |
| $n$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ...  | ...  | ... |

Рис. 45

Полученное правило легко вытекает из доказанного ранее равенства  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ , но его можно доказать и непосредственно. В самом деле, на поле  $(k; n)$  ладья может попасть за один ход лишь с полей  $(k-1; n)$  и  $(k; n-1)$ . Поэтому в силу правила суммы число способов попасть на поле  $(k; n)$  равно сумме числа способов попасть на поле  $(k-1; n)$  и числа способов попасть на поле  $(k; n-1)$ . А это и есть наше утверждение.

Из соотношения  $C_{n+k}^k = C_{n+k}^n$  вытекает, что арифметический квадрат симметричен относительно диагонали, проходящей через его верхний левый угол (мы будем называть ее *главной диагональю*). Впрочем, это свойство также легко доказать геометрически — отражение арифметического квадрата в главной диагонали переводит путь, ведущий в поле  $(k; n)$ , в путь, ведущий в поле  $(n; k)$ , поэтому таких путей одинаковое число.

## 89. Фигурные числа

При вычислении элементов арифметического квадрата мы пользовались как элементами предыдущей строки, так и элементами предыдущего столбца. Но достаточно было использовать элементы предыдущей строки. В самом деле, в п. 33 мы доказали формулу (15):  $C_{n+k}^k = C_{n+k-1}^k + C_{n+k-2}^{k-1} + \dots + C_{n-1}^0$ . Эта формула показывает, что каждый элемент арифметического квадрата равен сумме элементов предыдущей строки, начиная с первого и кончая элементом, стоящим непосредственно над вычисляемым. Таким образом, последовательно складывая элементы  $(n-1)$ -й строки, мы вычисляем один за другим элементы  $n$ -й строки.

Такой метод вычисления арифметического квадрата связан с восходящим к древнегреческим математикам Пифагору и Никомаху учением о фигурных числах. Дело в том, что числа 1, 2, 3, ... можно изображать строками из одной, двух, трех и т. д. точек, а эти строки объединить в треугольники (рис. 46). Тогда число точек в каждом треугольнике будет равно соответствующему числу во второй строке арифметического квадрата (номера строк на рис. 45 выписаны слева). Поэтому числа 1, 3, 6, 10, 15, 21 и т. д. называют *треугольными числами*,  $k$ -е треугольное число равно

$$C_{k+1}^2 = \frac{(k+1)k}{2}.$$

Точно так же треугольники, изображенные на рис. 46, можно объединять в пирамиды (рис. 47). Число точек в каждой пирамиде равно соответствующему числу в третьей строке

Рис. 46

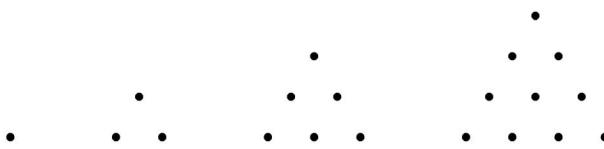
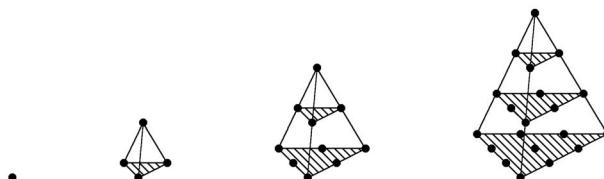


Рис. 47



арифметического квадрата. Поэтому числа 1, 4, 10, 20, 35 и т. д. называют *пирамидальными*. Их общий вид такой:

$$C_{k+2}^3 = \frac{(k+2)(k+1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Чтобы дать аналогичное истолкование числам следующих строк, надо было бы перейти к пирамидам в пространствах высшего числа измерений.

Учение о фигурных числах на протяжении многих столетий привлекало математиков, и было в свое время важным разделом теории чисел.

## 90. Расширенный арифметический треугольник

Возьмем теперь бесконечную доску, ограниченную только снизу, и поставим на поле *A* нулевой горизонтали шашку (рис. 48). Двигаясь по правилам игры в шашки (по диагонали вверх на одно поле), эта шашка может попасть на любое поле в области, ограниченной прямыми *AB* и *AC*. Снова напишем на каждом поле число способов, которыми на него может попасть наша шашка. Мы видим, что написанные числа совпадают с числами арифметического квадрата и только иначе расположены. Это не удивительно: если повернуть доску на 135°, то шашка будет двигаться по горизонтальным и вертикальным линиям вниз или вправо и задача превратится в задачу о движениях ладьи. Числа на рис. 48 можно изобразить в виде треугольника (рис. 49), тогда получится, что каждое число равно сумме двух чисел предыдущей строки, между которыми оно находится. С этим треугольником мы уже встречались в п. 33, это треугольник Паскаля (арифметический треугольник).

Выровняв все строки арифметического треугольника по левому краю, запишем его в виде части (под главной диагональю)

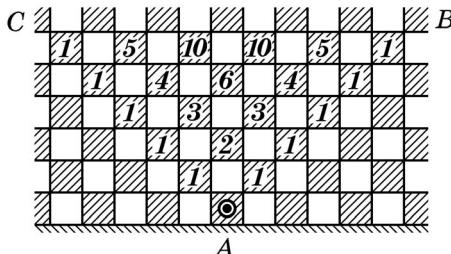


Рис. 48

|    |    |    |
|----|----|----|
| 1  | 1  | 1  |
| 1  | 2  | 1  |
| 1  | 3  | 3  |
| 1  | 4  | 6  |
| 1  | 5  | 10 |
| 1  | 6  | 15 |
| 1  | 7  | 21 |
| 7  | 21 | 35 |
| 35 | 21 | 7  |
| 1  | 7  | 1  |

.....

Рис. 49

прямоугольной таблицы, а клетки справа заполним нулями (рис. 50). В этой таблице на пересечении  $k$ -й вертикали и  $n$ -й горизонтали стоит число  $C_n^k$  (крайние линии имеют нулевые номера). Каждое число в треугольнике равно сумме числа, стоящего непосредственно над ним, и числа, расположенного в предыдущей строке наискосок влево. Например, в четвертой строке над числом 4 стоит число 1, слева от которого стоит число 3, и  $4 = 1 + 3$ .

Отметим еще следующие особенности такой формы арифметического треугольника — *все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, а нулевой столбец состоит из единиц.*

Арифметический треугольник занимает лишь часть плоскости. Распространим его на всю плоскость, сохраняя сформулированное выше правило — *каждый элемент равен сумме элемента, стоящего над ним, и элемента предыдущей строки, стоящего наискосок влево*. При этом, так как нулевой столбец арифметического треугольника состоит из единиц, то и в расширенном треугольнике заполним этот столбец единицами.

|     | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | $k$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |     |
| 1   | 1   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 2   | 1   | 2   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 3   | 1   | 3   | 3   | 1   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 4   | 1   | 4   | 6   | 4   | 1   | 0   | 0   | ... |
| 5   | 1   | 5   | 10  | 10  | 5   | 1   | 0   | ... |
| 6   | 1   | 6   | 15  | 20  | 15  | 6   | 1   | ... |
| $n$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Рис. 50

|     | -1  | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6    | $k$ |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| -5  | ... | 0   | 1   | -5  | 15  | -35 | 70  | -126 | 210 | ... |
| -4  | ... | 0   | 1   | -4  | 10  | -20 | 35  | -56  | 84  | ... |
| -3  | ... | 0   | 1   | -3  | 6   | -10 | 15  | -21  | 28  | ... |
| -2  | ... | 0   | 1   | -2  | 3   | -4  | 5   | -6   | 7   | ... |
| -1  | ... | 0   | 1   | -1  | 1   | -1  | 1   | -1   | 1   | ... |
| 0   | ... | 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0    | 0   | ... |
| 1   | ... | 0   | 1   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0    | 0   | ... |
| 2   | ... | 0   | 1   | 2   | 1   | 0   | 0   | 0    | 0   | ... |
| 3   | ... | 0   | 1   | 3   | 3   | 1   | 0   | 0    | 0   | ... |
| 4   | ... | 0   | 1   | 4   | 6   | 4   | 1   | 0    | 0   | ... |
| 5   | ... | 0   | 1   | 5   | 10  | 10  | 5   | 1    | 0   | ... |
| 6   | ... | 0   | 1   | 6   | 15  | 20  | 15  | 6    | 1   | ... |
| $n$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ...  | ... | ... |

Рис. 51

Применяя указанное правило к элементам нулевого столбца, видим, что перед ним должен быть столбец, заполненный нулями. Но тогда и все дальнейшие столбцы влево состоят из одних нулей. Поэтому надо лишь выяснить, что стоит над нулевой строкой треугольника.

В нулевой строке в первом столбце стоит нуль, наискосок вверх от этого элемента стоит число 1, поэтому над ним надо написать  $-1$  (поскольку  $1 + (-1) = 0$ ). Но тогда, чтобы получить нуль и на втором месте нулевой строки, надо поставить над ним число 1. Продолжая далее, увидим, что над нулевой строкой появилась новая строка, состоящая из чередующихся чисел 1 и  $-1$ . Точно так же заполняются остальные строки вверх. В результате получаем таблицу, приведенную на рис. 51.

Рассматривая часть этой таблицы, расположенную выше нулевой строки, замечаем, что она очень похожа на перевернутый арифметический квадрат (рис. 45 в п. 88), отличаясь от него лишь знаками отдельных членов. Именно, на пересечении горизонтали  $-n$  и вертикали  $k$  стоит (с точностью до знака) число из горизонтали  $n - 1$  и вертикали  $k$  арифметического квадрата:  $(-1)^k C_{n+k-1}^k$ .

Перевернутый арифметический квадрат появляется естественно, потому что правило построения элементов арифметического треугольника  $c = a + b$ , если эти элементы расположены в виде  $\begin{bmatrix} a & b \\ & c \end{bmatrix}$ , превращается в правило  $b = c - a$ , а с учетом знаков:  $\begin{bmatrix} -a & b \\ & c \end{bmatrix}$  или  $\begin{bmatrix} a & -b \\ & -c \end{bmatrix}$  — в правило  $b = c - (-a)$  или  $-b = -c - a$ , т. е. в обоих случаях  $b = c + a$ . А это (в перевернутом виде) как раз правило построения арифметического квадрата, только снизу вверх.

Разумеется, рассмотрение части таблицы не может служить доказательством того, что это утверждение верно для всех элементов таблицы. Для доказательства заметим, что

$$(-1)^k C_{n+k-1}^k + (-1)^{k-1} C_{n+k-2}^{k-1} = (-1)^k (C_{n+k-1}^k - C_{n+k-2}^{k-1}) = (-1)^k C_{n+k-2}^k.$$

Полученное равенство показывает, что в таблице, составленной из чисел  $(-1)^k C_{n+k-1}^k$ , элемент на пересечении строки  $-n + 1$  и столбца  $k$  равен сумме элементов строки  $-n$  из столбцов  $k$  и  $k - 1$ . Тем самым правило заполнения таблицы из чисел  $(-1)^k C_{n+k-1}^k$  совпадает с правилом заполнения таблицы для расширенного арифметического треугольника. Так как эти таблицы имеют одинаковые строки с номером  $-1$  и нулевой столбец, то все их элементы совпадают.

В исходном арифметическом треугольнике на пересечении горизонтали  $n$  и вертикали  $k$  стояло число  $C_n^k$ . В расширенном треугольнике на пересечении горизонтали  $-n$  и вертикали  $k$  стоит число  $(-1)^k C_{n+k-1}^k$ . Поэтому можно обобщить символ  $C_n^k$  на отрицательные значения  $n$ , положив при  $n < 0$

$$C_n^k = (-1)^k C_{-n+k-1}^k. \quad (11)$$

Как показывает последняя таблица, обобщение символа  $C_n^k$  на отрицательные значения  $k$  тривиально: при  $k < 0$  имеем  $C_n^k = 0$ . Кроме того,  $C_n^k = 0$ , если  $0 \leq n \leq k$ .

## 91. Шашка в углу

Возьмем снова бесконечную шахматную доску, но теперь ограничим ее двумя перпендикулярными лучами, и поставим в углу этой доски шашку (рис. 52). На каждом поле доски напишем число способов, которыми шашка может на него попасть. Результат будет отличаться от полученного ранее (п. 90), так как теперь шашка не может перейти вертикальную границу. Поэтому число возможностей попасть на какое-нибудь поле стало меньше: идя на это поле, шашка не должна забирать слишком влево. Например, на поля, находящиеся вдоль границы, шашка теперь может попасть только с одного поля, а не с двух, как это было ранее.

Подсчитаем, сколькими же способами можно попасть на некоторое поле с учетом сделанного ограничения. Каждый путь можно записать в виде последовательности нулей и единиц — нуль означает ход влево, а единица — ход вправо. При этом число нулей и единиц определяется только полем, на которое должна попасть шашка. Например, любой путь из 4 нулей и 6 единиц приводит к полю на пересечении второй вертикали и десятой горизонтали (как и выше, мы считаем, что крайние линии имеют нулевой номер, т. е. шашка стоит на поле  $(0; 0)$ ).

Однако не любая последовательность нулей и единиц допустима. Например, нельзя начинать с нуля — этот ход сразу выведет шашку за пределы доски. Допустимые последовательности обладают следующим характеристическим свойством: перед каждым местом стоит не меньше единиц, чем нулей — в каждый момент движения число ходов вправо должно быть не меньше, чем число ходов влево, иначе шашка окажется за пределами доски.

Итак, нам надо найти, сколько последовательностей из  $k$  нулей и  $t$  единиц обладает следующим свойством: перед

|   |    |    |   |   |   |
|---|----|----|---|---|---|
| 0 | 14 | 14 | 6 | 1 | 0 |
| 5 | 9  | 5  | 1 | 0 |   |
| 0 | 5  | 4  | 1 | 6 | 0 |
| 2 | 3  | 1  | 0 | 0 |   |
| 0 | 2  | 1  | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1  | 0  | 0 | 0 |   |
| 0 | 1  | 0  | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0  | 0  | 0 | 0 |   |

Рис. 52

|    |    |    |    |   |   |
|----|----|----|----|---|---|
| 14 | 34 | 35 | 21 | 7 | 1 |
| 0  | 14 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| 4  | 10 | 16 | 5  | 1 | 0 |
| 0  | 4  | 6  | 4  | 1 |   |
| 1  | 3  | 3  | 1  | 0 | 0 |
| 0  | 1  | 2  | 1  | 0 | 0 |
| 0  | 0  | 1  | 1  | 0 |   |
| 0  | 0  | 0  | 0  | 0 | 0 |

Рис. 53

каждым местом последовательности число единиц не меньше, чем число нулей.

Что нам это напоминает? Такую задачу мы уже рассмотрели в п. 82 как очередь в кассу, только там вместо нулей и единиц были буквы «р» и «п». Там было показано, что число таких последовательностей равно  $\frac{m - k + 1}{m + 1} C_{m+k}^k$ . Это число и надо написать на пересечении горизонтали  $m + k$  и вертикали  $m - k$ .

Поставим теперь шашку не в угол, а на пересечение нулевой горизонтали с  $q$ -й вертикалью (вопреки шашечным правилам это поле может быть и белым). Теперь у шашки появилось  $q$  запасных ходов влево. Этот случай соответствует рассмотренной в п. 82 задаче, в которой кассир заранее запасся  $q$  полтинниками. Используя полученный там ответ, приходим к выводу: если на некоторое поле шашка попадает, сделав  $k$  ходов влево и  $m$  ходов вправо,  $0 \leq k \leq m + q$ , то число различных способов попасть на это поле равно  $C_{m+k}^k - C_{m+k}^{k-q-1}$ . На рис. 53 изображена таблица, возникающая при  $q = 3$ .

## 92. Арифметический пятиугольник

Повернем доску на  $135^\circ$  по ходу часовой стрелки. Тогда шашка превратится в ладью, передвигающуюся за один ход на одно поле вниз или на одно поле вправо, а границы доски будут наклонены к этим прямым под углом в  $45^\circ$ , т. е. доска станет не прямоугольной формы (длины горизонталей станут переменными). Но влево ладье ходить все равно не разрешено, поэтому левую границу можно сделать вертикальной, а правую границу можно сделать горизонтальной, увеличив тем самым доску, но запретив ладье туда ходить. Доска снова станет привычной прямоугольной. Занумеруем ее горизонтали сверху

|     | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | $k$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 1   | 1   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 2   | 1   | 2   | 2   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 3   | 1   | 3   | 5   | 5   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... |
| 4   | 1   | 4   | 9   | 14  | 14  | 0   | 0   | 0   | ... |
| 5   | 1   | 5   | 14  | 28  | 42  | 42  | 0   | 0   | ... |
| 6   | 1   | 6   | 20  | 48  | 90  | 132 | 132 | 0   | ... |
| $m$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Рис. 54

|     | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7    | $k$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|
| 0   | 1   | 1   | 1   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0    | ... |
| 1   | 1   | 2   | 3   | 4   | 4   | 0   | 0   | 0    | ... |
| 2   | 1   | 3   | 6   | 10  | 14  | 14  | 0   | 0    | ... |
| 3   | 1   | 4   | 10  | 20  | 34  | 48  | 48  | 0    | ... |
| 4   | 1   | 5   | 15  | 35  | 69  | 117 | 165 | 165  | ... |
| 5   | 1   | 6   | 14  | 28  | 125 | 242 | 407 | 572  | ... |
| 6   | 1   | 7   | 28  | 84  | 209 | 451 | 858 | 1430 | ... |
| $m$ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ...  | ... |

Рис. 55.  $q = 3$ 

вниз и вертикали слева направо, начав нумерацию с нуля. Тогда получится следующая задача о ладье.

В верхнем левом углу (поле  $(0; 0)$ ) шахматной доски стоит ладья. Сколькими способами она может попасть на поле  $(m; k)$  (находящееся на пересечении горизонтали  $m$  и вертикали  $k$ ), передвигаясь за один ход на одно поле вниз или на одно поле вправо и не заходя во время движения в область правее диагонали доски  $(0; 0) - (m; m)$ ?

Область правее диагонали — это поля  $(m; k)$ , для которых  $k > m$ . Из доказанного выше следует, что при  $0 \leq k \leq m$  число этих способов равно  $\frac{m-k+1}{m+1} C_{m+k}^k$ , а при  $k > m$  равно нулю (см. рис. 54, получающийся из рис. 52).

Если шашка стояла не в углу, а на  $q$ -й вертикали, то в задаче о ладье это соответствует переносу диагонали на  $q$  полей вправо, тогда при  $0 \leq k \leq m+q$  число способов будет равно  $C_{m+k}^k - C_{m+k}^{k-q-1}$ , а при  $k > m+q$  — нулю (это иллюстрирует рис. 55, получающийся из рис. 53).

Если на рис. 53 мы ограничимся обычной шахматной доской  $8 \times 8$ , то увидим, что отличные от нуля числа заполняют на ней пятиугольник (рис. 56). Его называют *арифметическим*

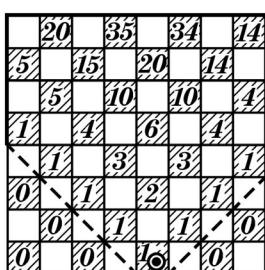


Рис. 56

|   | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5   | 6    | 7    | 8     | 9     |
|---|---|---|----|----|-----|-----|------|------|-------|-------|
| 0 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1   | 0   | 0    | 0    | 0     | 0     |
| 1 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 5   | 0    | 0    | 0     | 0     |
| 2 | 1 | 3 | 6  | 10 | 15  | 20  | 20   | 0    | 0     | 0     |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35  | 55  | 75   | 75   | 0     | 0     |
| 4 | 0 | 4 | 14 | 34 | 69  | 124 | 199  | 274  | 274   | 0     |
| 5 | 0 | 0 | 14 | 48 | 117 | 241 | 440  | 714  | 988   | 988   |
| 6 | 0 | 0 | 0  | 48 | 165 | 406 | 846  | 1560 | 2548  | 3536  |
| 7 | 0 | 0 | 0  | 0  | 165 | 571 | 1417 | 2977 | 5525  | 9061  |
| 8 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0   | 571 | 1988 | 4965 | 10490 | 19551 |

Рис. 57.  $q = 4, s = 3$

*пятиугольником.* Это же название сохраняют и для таблицы, получающейся на бесконечной доске, ограниченной двумя перпендикулярными лучами.

Основное свойство арифметического пятиугольника совпадает с основным свойством арифметического квадрата: каждое число арифметического пятиугольника равно сумме двух чисел: стоящего над ним и стоящего слева от него. Отличие же арифметического пятиугольника от арифметического квадрата состоит в том, что это свойство выполняется не для всех клеток — диагональ пятиугольника, расположенная на  $q$  линий выше главной диагонали, состоит из нулей (этим пятиугольник напоминает арифметический треугольник в п. 90).

Вернемся теперь к шашке на нулевой горизонтали, поставим ее на поле  $(0; q)$ , но шахматную доску ограничим не только слева, но и справа вертикалью  $s + q$ . Каждая горизонталь тогда состоит из  $s + q + 1$  полей, из начального положения шашка может сделать лишь  $q$  ходов влево или  $s$  ходов вправо — заходить нельзя не только за левую границу, но и за правую. В результате для некоторых полей число способов, которыми может достигнуть его наша шашка, уменьшится (исчезнут пути, заходящие далеко вправо, а затем возвращающиеся влево). Опять повернем доску на  $135^\circ$ . Шашка превратится в ладью, левая граница доски, как и раньше — в диагональ, проходящую на  $q$  полей выше главной диагонали, правая граница доски — в другую диагональ, проходящую на  $s$  полей ниже главной диагонали доски. За эти диагонали ладье заходить нельзя. Напишем на каждом поле доски число способов, которыми ладья может дойти до этого поля (на рис. 57 приведена таблица для  $q = 4$ ,  $s = 3$ ). Получающаяся таблица носит название *арифметического шестиугольника*.

### Задачи

1. На плоскости нанесена квадратная сетка. Докажите, что число ломаных, выходящих из угла  $A$  этой сетки, составленных из отрезков сетки и имеющих длину  $N$ , не превосходит  $4 \cdot 3^{N-1}$  (ломаная не может пробегать дважды один и тот же отрезок). До сих пор не решена задача о числе ломаных такого вида, ни разу не пересекающихся себя.

2. На клетчатой бумаге построен квадрат  $ABCD$  со стороной в 4 клетки, после чего проведены все кратчайшие пути из вершины  $A$  в вершину  $C$ , проходящие по сторонам клеток. Через большинство отрезков проходят несколько путей. Покажите, что число различных путей равно 70, причем отрезков, через каждый из которых проходят 35 путей, будет 4; для 20 путей число отрезков равно 8; для 18 путей — 4; для 15 путей — 4; для 12 путей — 4; для 10 путей — 4; для 5 путей — 4; для 4 путей — 4; для 1 пути — 4.

Исследуйте аналогичным образом перекрестки: концевые точки  $A$  и  $C$  входят в 70 путей; есть 1 перекресток, через который проходят 36 путей; 4 — 35; 4 — 30; 4 — 15; 4 — 5; 4 — 4; 2 — 1.

3. Из  $n$  солдат различного роста выбирают два отряда, содержащих соответственно  $k_1$  и  $k_2$  солдат. Сколькоими способами можно сделать этот выбор так, чтобы любой солдат первого отряда был ниже любого солдата второго отряда?

4. В начале координат находится частица. Через 1 секунду она распадается на две частицы, одна сдвигается на единицу длины влево, а другая — вправо. Этот процесс повторяется через каждую секунду, причем две частицы, оказавшиеся в одной точке, взаимно уничтожаются (так что, например, через две секунды остается две частицы). Сколько частиц будет через 129 секунд? Через  $n$  секунд?

5. Из точки  $O$  на плоскости проводят все замкнутые ломаные длины  $2n$ , стороны которых лежат на линиях клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1. Найдите число этих ломаных, если ломаная может проходить один и тот же отрезок несколько раз.

6. На листе бумаги нанесена сетка из  $n$  горизонтальных и  $n$  вертикальных прямых. Сколько различных  $2n$ -звенных замкнутых ломаных можно провести по линиям сетки так, чтобы каждая ломаная имела звенья на всех горизонтальных и всех вертикальных прямых?

7. а) Сколько существует треугольников, вершины которых являются вершинами данного выпуклого шестиугольника?  
б) Сколькоими способами можно построить замкнутую ломаную, вершинами которой являются все вершины правильного шестиугольника (ломаная может быть самопересекающейся)?

8. Имеется  $n$  точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько можно провести  $r$ -звенных ломаных с вершинами в этих точках?

9. Сколькоими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из  $k$  различных бусин, на  $k$  частей (резать можно только между бусинами, но части можно группировать как сантиметровую ленту)?

10. Докажите геометрическим путем формулу

$$C_{n+k}^n = C_{n+k-s}^n C_s^0 + C_{n+k-s}^{n-1} C_s^1 + \dots + C_{n+k-s}^{n-m} C_s^m + \dots + C_{n+k-s}^{n-s} C_s^s,$$

где  $0 \leq s \leq k$ ,  $0 \leq s \leq n$ , рассмотрев разбиение множества всех путей из  $A(0; 0)$  в  $M(k; n)$  на классы в соответствии с тем, через какую точку прямой  $DE$  (где  $D(k - s; n)$ ,  $E(k; n - s)$ ) они проходят.

11. Монету бросают  $2n$  раз. Докажите, что число вариантов, при которых герб ни в один момент не выпадал чаще решки, равно  $1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ .

12. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций, из них не более 3 пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не пересекается более двух линий. Какое наибольшее число станций может иметь такая сеть, если с любой станции можно проехать на любую другую, сделав не более двух пересадок?

13. В некотором городе для любых трех перекрестков  $A$ ,  $B$ ,  $C$  есть путь, ведущий из  $A$  в  $B$  и не проходящий через  $C$ . Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути.

14. Сеть автобусных маршрутов в городе устроена так, что

а) на каждом маршруте имеется  $k$  остановок;

б) любые два маршрута либо не имеют общих остановок, либо имеют только одну общую остановку;

в) число всех остановок равно  $k^2$ .

Укажите верхнюю границу для числа различных маршрутов.

15. В Швамбрании имеется 20 крупных городов, связанных между собой воздушным сообщением. При этом:

а) все рейсы без промежуточных посадок: самолет поднимается в пункте открытия и впервые опускается в пункте назначения;

б) из каждого города можно попасть (возможно, с пересадками) в любой другой город;

в) если отменить хотя бы один маршрут, условие (б) перестает выполняться.

Найдите наименьшее и наибольшее число рейсов при выполнении этих условий.

16. Автобусная сеть города устроена так, что:

1) с любой остановки можно попасть на любую другую без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется и притом единственная остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте ровно  $n$  остановок.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

17. В городе насчитывается 57 автобусных маршрутов. Известно, что:

1) с любой остановки можно без пересадки попасть на любую другую;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте не менее трех остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

18. Можно ли проложить в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдется остановка, не принадлежащая ни одному из этих маршрутов, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

19. Между некоторыми из  $2n$  городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан бесподобочными рейсами не менее чем с  $n$  другими городами. Докажите, что если даже отменить любые  $n - 1$  рейсов, то все равно из любого города можно будет добраться в любой другой (быть может, с пересадками). Найдите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене  $n$  рейсов.

20. Сторона куба равна 3 см. Найдите наименьшее количество распилов, которые нужно сделать, чтобы распилить его на 27 кубиков со стороной 1 см (части куба после распиливания можно перекладывать).

21. Длины сторон прямоугольного параллелепипеда выражаются целыми числами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , такими, что  $2^{\alpha-1} \leq a \leq 2^\alpha$ ,  $2^{\beta-1} \leq b \leq 2^\beta$ ,  $2^{\gamma-1} \leq c \leq 2^\gamma$ . Докажите, что наименьшее число распилов, необходимых для распиливания этого параллелепипеда на единичные кубики, равно  $\alpha + \beta + \gamma$  (части можно перекладывать после каждого распила).

## Глава VII

### РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При решении многих комбинаторных задач мы уже пользовались методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. Таким путем была, например, выведена формула для числа симметричных расстановок ладей на доске (п. 51), этим способом были решены почти все задачи на разбиения в главе IV. Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется *методом рекуррентных соотношений* (от латинского *recurrere* — возвращаться). Пользуясь рекуррентным соотношением, можно свести задачу об  $n$  предметах к задаче об  $n - 1$  предметах, потом к задаче об  $n - 2$  предметах и т. д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удается получить из рекуррентного соотношения явную формулу для решения комбинаторной задачи. Сейчас мы рассмотрим несколько таких задач, а в конце главы остановимся на общей теории рекуррентных соотношений.

#### 93. Снова перестановки без повторений

В главе II мы с помощью формулы для числа размещений без повторений  $A_n^k$  вывели формулу  $P_n = n!$  для числа перестановок  $n$  элементов. Но ту же формулу можно вывести и иначе, найдя сначала рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет  $P_n$ .

Пусть у нас есть  $n$  предметов  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ . Любую их перестановку можно получить так: взять некоторую перестановку предметов  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  и присоединить к ней элемент  $a_n$ . Ясно, что элемент  $a_n$  может занять различные места. Его можно поставить в самое начало, между первым и вторым элементами перестановки, между вторым и третьим, можно поставить и в самый конец. Число различных мест, которые может занять элемент  $a_n$ , равно  $n$ , и потому из каждой перестановки элементов  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  получается  $n$  перестановок элементов  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ . Но это означает, что перестановок из  $n$  элементов в  $n$  раз больше, чем перестановок из  $n - 1$  элементов. Тем самым установлено рекуррентное соотношение  $P_n = n \cdot P_{n-1}$ . Пользуясь этим соотношением, последовательно выводим, что

$$P_n = nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = \dots = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot P_1.$$

Но  $P_1 = 1$ , так как из одного элемента можно сделать лишь одну перестановку. Поэтому  $P_n = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ . Таким образом, мы снова получили формулу  $P_n = n!$ .

## 94. Кролики Фибоначчи

В книге «*Liber Abaci*», появившейся в 1202 г., итальянский математик Леонардо Фибоначчи среди многих других задач привел следующую.

*Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько пар кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов и ни одна пара за год не погибла?*

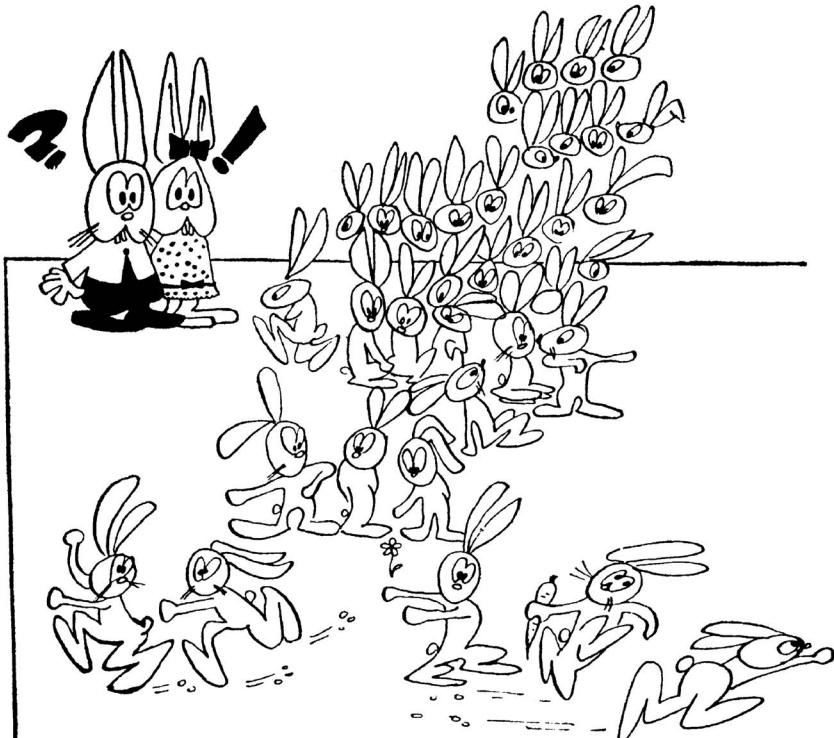
Задача Фибоначчи была первой в истории математики, приведшей к рекуррентному соотношению, в котором  $k$ -й член выражался через два предыдущих.

У Леонардо в начале года была пара взрослых кроликов, но нам будет удобнее считать их новорожденными. Итак, обозначим через  $u_n$  число пар кроликов в начале  $n$ -го месяца.

Тогда по условию  $u_1 = 1$ . Это же количество сохранится и через месяц:  $u_2 = 1$ . А к началу 3-го месяца появится приплод, и потому  $u_3 = 2$ . К началу 4-го месяца первоначальная пара кроликов снова даст приплод, а новорожденные кролики приплода еще не дадут. Поэтому  $u_4 = 3$ . В начале же 5-го месяца приплод дадут и первоначальная пара, и пара, родившаяся в конце второго месяца, и получится 5 пар кроликов:  $u_5 = 5$ .

Легко видеть теперь, что числа  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  связаны друг с другом соотношением  $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$  — к началу  $k$ -го месяца имеем все пары, бывшие к началу предыдущего месяца, и, кроме того, приплод принесут все пары, существовавшие за два месяца до данного. Легко подсчитать, что  $u_{13} = 233$ . Значит, через год будет 233 пары кроликов. Числа  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  называют *числами Фибоначчи* (обычно полагают еще  $u_0 = 0$ , чтобы выполнялось равенство  $u_2 = u_1 + u_0$ ).

Эти числа встречаются в различных вопросах математики, например при самом экономном отыскании точек экстремума методом проб. Молодой (тогда) ленинградский математик Юрий Матиясевич с помощью этих чисел решил в 1970 г. 10-ю проблему Гильберта — задачу, поставленную в 1900 г. немецким ученым Д. Гильбертом в числе труднейших математических проблем и более 70 лет не поддававшуюся усилиям многих видных математиков.



Рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи  $u_n$  совпадает с рекуррентным соотношением для чисел  $F(n)$  в случае, когда имеются марки достоинством в 1 и 2 рубля (п. 55). Совпадают (со сдвигом нумерации на 1) и начальные значения этих последовательностей:  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2$ , и  $F(0) = 1$ ,  $F(1) = 1$ ,  $F(2) = 2$ . Значит, должны совпадать и последующие значения.

Связь между числом пар кроликов и числом способов наклейки марок можно установить непосредственно. Для этого рассмотрим подряд с 1-го по  $n$ -й месяцы существования популяции кроликов и поставим в соответствие каждой паре кроликов последовательность из нулей и единиц, отражающую генеалогию этой пары: если в начале  $k$ -го месяца родилась данная пара или кто-либо из ее предков, то поставим на  $k$ -м месте последовательности единицу, а если не рождались — поставим ноль. Например, последовательность 1010010100010 устанавливает такую «генеалогию» пары на 13-м месяце существования популяции: сама пара появилась в начале 12-го месяца, ее родители — в начале 8-го месяца, «дед» — в начале 6-го месяца и «прадед» — в начале третьего месяца от исходной пары.

При этом, поскольку в начале второго месяца никто не рождался, первыми двумя цифрами у всех пар будут 10. Генеалогия исходной пары задается последовательностью вида 1000...0. Кроме того, так как новорожденная пара начинает давать потомство лишь начиная со второго месяца со дня рождения, ни в какой генеалогии не встретится двух единиц подряд.

При указанном правиле различным последовательностям отвечают различные пары кроликов, и обратно, две различные пары кроликов всегда имеют разную «генеалогию», так как, по условию, крольчиха дает приплод, состоящий только из одной пары кроликов.

Таким образом,  $u_n$  равно числу последовательностей длины  $n$  из нулей и единиц, начинающихся цифрами 10 и не содержащих двух единиц подряд. Заменим теперь каждую такую последовательность новой последовательностью из единиц и двоек по следующему правилу: отбрасываем первую единицу и заменяем каждую пару цифр 01 на 2, а оставшиеся нули на 1 (так как двух подряд идущих единиц быть не может, то перед каждой единицей стоит хотя бы один нуль). В результате получим последовательность из единиц и двоек, сумма чисел в которой на 1 меньше длины исходной последовательности. А это и показывает, что  $u_n$  равно числу последовательностей из единиц и двоек с суммой чисел  $n - 1$ , т. е.  $u_n = F(n - 1)$ .

Итак, рассмотрим последовательность из чисел 1 и 2 с суммой всех чисел  $n - 1$ . Допустим, что в эту последовательность входит  $k$  двоек. Тогда в нее входит еще  $n - 1 - 2k$  единиц, а всего  $n - 1 - k$  цифр. Выбрать из  $n - 1 - k$  мест для цифр те  $k$ , на которых стоят двойки ( $0 \leq 2k \leq n - 1$ ), можно  $C_{n-1-k}^k$  способами. Применяя правило суммы, приходим к соотношению

$$u_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + \dots + C_{n-p-1}^p,$$

где  $p = \frac{n-1}{2}$ , если  $n$  нечетно, и  $p = \frac{n-2}{2}$ , если  $n$  четно ( $p$  — наибольшее допустимое значение  $k$ ). Иными словами,  $p$  — целая часть числа  $\frac{n-1}{2}$ . Целая часть числа  $m$  обозначается обычно  $[m]$ . Таким образом,  $p = \left[ \frac{n-1}{2} \right]$ .

Опять легко подсчитать, что  $u_{13} = 233$ .

### Задачи

1. Рассматривается ряд чисел Фибоначчи  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 2$ ,  $u_4 = 3$ ,  $u_5 = 5$  и т. д. ( $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ ). Докажите следующие соотношения для чисел Фибоначчи:

a)  $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}$ ;

- б) для любых  $m$  и  $n = km$  число  $u_n$  делится на  $u_m$ ;
- в) два соседних члена ряда Фибоначчи взаимно прости.
2. Найдите наибольший общий делитель 1000-го и 770-го членов ряда Фибоначчи.
3. Найдется ли среди первых 100 000 001 первых членов ряда Фибоначчи число, оканчивающееся четырьмя нулями?

4. В ряде Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Докажите, что их сумма не входит в этот ряд.

5. Докажите, что:

а)  $u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$ ;

б)  $u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}$ ;

в)  $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$ ;

г)  $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$ ;

д)  $u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2n-1} u_{2n} = u_{2n}^2$ ;

е)  $u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2n} u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$ ;

ж)  $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$ ;

з)  $u_3 + u_6 + \dots + u_{3n} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$ ;

и)  $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$ .

6. Докажите, что любое натуральное число  $N$  можно представить в виде суммы чисел Фибоначчи, причем каждое число будет входить в сумму не более одного раза и никакие два соседних числа не войдут вместе.

7. Некоторый алфавит состоит из шести букв, которые для передачи по телеграфу кодированы так:  $\cdot$ ,  $-$ ,  $\cdot\cdot$ ,  $--$ ,  $\cdot-$ ,  $--\cdot$ . При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка точек и тире, состоящая из 12 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

Сколькими способами можно прочитать слово, если в него вошло  $n$  точек и тире?

## 95. Разбиения фигур

Рекуррентные соотношения применяются и для решения многих задач геометрической комбинаторики. Найдем, например, наибольшее число частей, на которые делят плоскость  $n$  прямых. Обозначим это число через  $U(n)$ . Проведем  $(n+1)$ -ю прямую так, чтобы она пересекала все ранее проведенные прямые. Тогда на ней будет  $n$  точек пересечения, которые разбивают ее на  $n+1$  часть. Каждая из этих частей принадлежит границе одной новой части плоскости. Таким образом, мы получили для  $U(n)$  рекуррентное соотношение

$$U(n+1) - U(n) = n + 1.$$

Чтобы найти отсюда  $U(n)$ , просуммируем эти соотношения от  $n = 1$  до  $n = k - 1$  и учтем, что  $U(1) = 2$ . Получаем

$$U(k) = 2 + (2 + 3 + \dots + k) = \frac{k^2 + k + 2}{2}.$$

Значит,  $n$  прямых могут делить плоскость не более чем на  $\frac{n^2 + n + 2}{2}$  частей.

Более сложное рекуррентное соотношение получается при решении следующей задачи.

*Сколькими способами можно выпуклый  $(n + 2)$ -угольник разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого многоугольника?*

Обозначим искомое число способов через  $V(n)$ . Чтобы как-то упорядочить набор получающихся треугольников, выделим в исходном многоугольнике  $A_1A_2\dots A_nA_{n+1}A_{n+2}$  «базовую» сторону  $A_{n+1}A_{n+2}$ . В каждом разбиении этого многоугольника на треугольники найдется один и только один треугольник со стороной  $A_{n+1}A_{n+2}$ . Его третьей вершиной может быть любая из вершин  $A_1, \dots, A_n$ .

Если этой третьей вершиной является  $A_s$ ,  $2 \leq s \leq n - 1$ , то после удаления треугольника  $A_sA_{n+1}A_{n+2}$  многоугольник распадается на  $(s + 1)$ -угольник и  $(n - s + 2)$ -угольник, в каждом из которых выделены «базовые» стороны  $A_sA_{n+2}$  и  $A_sA_{n+1}$  (рис. 58). Этот процесс заканчивается разбиением исходного многоугольника на треугольники, причем если хотя бы на одном этапе базовая сторона войдет в другой треугольник, то и получающиеся разбиения на треугольники будут различными. Но  $(s + 1)$ -угольник можно разбить на треугольники  $V(s - 1)$  способами, а  $(n - s + 2)$ -угольник —  $V(n - s)$  способами и эти способы независимы. Поэтому в силу правила произведения число разбиений, начинающихся с треугольника  $A_sA_{n+1}A_{n+2}$ , равно  $V(s - 1) \cdot V(n - s)$ . В случае, когда  $s = 1$  или  $s = n$ , дальше

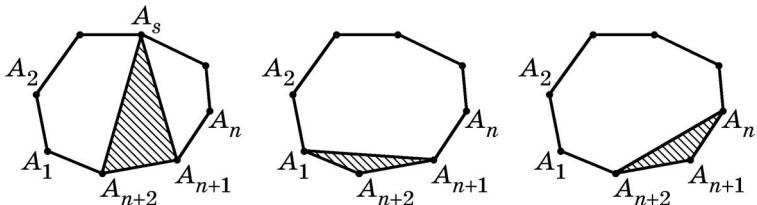


Рис. 58

делится лишь одна часть, и поэтому надо положить  $V(0) = 1$ . Применяя правило суммы, убеждаемся, что справедливо рекуррентное соотношение

$$V(n) = V(0)V(n - 1) + V(1)V(n - 2) + \dots + V(n - 1)V(0),$$

где  $V(0) = 1$ . Это соотношение с тем же самым начальным условием уже появлялось у нас в п. 82 при решении задачи об очереди в кассу кинотеатра и при рассмотрении процесса последовательных разрезаний сантиметровой ленты. Поскольку  $T_0 = V(0) = 1$ ,  $V(1) = V(0)V(0)$  и  $T_1 = T_0T_0$ , то  $T_1 = V(1)$ . Далее получаем  $V(2) = V(0)V(1) + V(1)V(0)$  и  $T_2 = T_0T_1 + T_1T_0 = V(2)$  и т. д. Итак, все члены обеих последовательностей совпадают. Таким образом,  $V(n) = T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ .

Для решения комбинаторных задач часто применяют использованный здесь метод. Устанавливают для данной задачи рекуррентное соотношение и показывают, что оно совпадает с рекуррентным соотношением для другой задачи, решение которой нам уже известно. Если при этом совпадают и начальные члены последовательностей в достаточном числе (в п. 101 мы остановимся подробнее на том, сколько членов должны совпадать), то обе задачи имеют одинаковые решения.

## 96. Расстановка скобок

Мы уже знаем, что число процессов последовательного деления множества из  $n + 1$  элементов, расположенных в некотором порядке, равно  $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ . Рассмотрим несколько примеров таких процессов.

Пусть даны  $n$  чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , стоящих в определенном порядке. В силу сочетательного закона умножения произведение этих чисел можно вычислить разными способами (сохраняя порядок сомножителей). Например, три числа можно перемножить двумя способами:  $(ab)c = a(bc)$ , четыре числа — пятью способами и т. д. Требуется найти число всех способов перемножения  $n$  чисел, стоящих в заданном порядке.

Ясно, что каждый способ перемножения сводится к процессу разбиения данных  $n$  чисел на части из одного элемента каждая. Например, умножение четырех чисел по формуле  $(ab)(cd)$  сводится к такому процессу разбиения:  $a|b \mid c|d$ , а умножение этих же чисел по формуле  $((ab)c)d$  — к процессу разбиения  $a|b|c|d$ . Поэтому число различных способов умножения равно числу

различных процессов разбиения множества из  $n$  элементов, т. е.

$$T_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

Но, кроме сочетательного свойства, умножение обладает и переместительным свойством. Если учесть его, то число процессов умножения увеличится в  $n!$  раз — ведь  $n$  чисел можно переставить друг с другом  $n!$  способами, а потом подвергать переставленные числа тем или иным разбиениям. Отсюда следует, что полное число способов перемножить данные  $n$  чисел равно  $(n - 1)! C_{2n-2}^{n-1}$ .

К этому результату можно прийти и непосредственно, не опираясь на формулу для числа процессов разбиения. Этот вывод дает новый метод получения формулы для числа процессов разбиения, а тем самым и для задачи об очереди в кассу (при условии, что число рублей в очереди равно числу полтинников).

Непосредственный вывод заключается в следующем. Предположим, что мы уже нашли число  $\Phi(n)$  способов перемножить  $n$  чисел. Присоединим к ним еще один сомножитель  $a_{n+1}$ . Выясним, сколькими способами можно присоединить этот сомножитель к одному из произведений чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Число  $a_{n+1}$  можно умножить на все произведение, поставив либо на первое место, либо на последнее. Это дает два способа присоединения. Но  $a_{n+1}$  можно присоединить и на одном из промежуточных этапов. Умножение  $n$  чисел сводится к  $n - 1$  последовательным перемножениям, на каждом из которых перемножаются два сомножителя. К каждому из этих произведений  $(xy)$  число  $a_{n+1}$  можно подключить 4 способами —  $((a_{n+1}x)y), ((xa_{n+1})y), (x(a_{n+1}y)), (x(ya_{n+1}))$ . Но так как есть  $n - 1$  произведение и к любому из них можно присоединить  $a_{n+1}$ , то всего получаем  $4n - 4$  способов.

Добавляя к ним два способа, о которых говорилось вначале, получаем  $4n - 2$  способов присоединения  $a_{n+1}$  к каждому из  $\Phi(n)$  способов перемножения чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Отсюда вытекает, что  $\Phi(n + 1) = (4n - 2)\Phi(n)$ . Но  $\Phi(1) = 1$ . Поэтому  $\Phi(n) = 2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n - 6) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 3)$ . Этот ответ совпадает с полученным ранее, так как

$$\Phi(n) = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 3) = \frac{(2n - 2)!}{(n - 1)!} = (n - 1)! C_{2n-2}^{n-1}.$$

Рассмотрим теперь операцию деления. Запишем выражение

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \hline a_2 \\ \hline \dots \\ \hline a_n \end{array} \quad (1)$$

Эта запись не имеет смысла, если не указан порядок, в котором должны выполняться деления. Выясним, сколькими способами можно придать смысл этому выражению. Для этого заметим, что каждый способ указания порядка деления может рассматриваться и как процесс разбиения выражения из  $n$  элементов  $a_1 : a_2 : \dots : a_n$  на части из одного элемента, описанный выше.

А мы видели, что число таких процессов равно  $\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$ . Значит, выражению (1) можно придать смысл  $\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$  способами.

### 97. Задача о непересекающихся хордах

В некоторых вопросах квантовой химии возникает следующая задача.

*На окружности заданы  $2n$  точек. Сколькими способами можно попарно соединить эти точки  $n$  непересекающимися отрезками?*

При  $n = 1$  есть один способ такого соединения, при  $n = 2$  — два способа (рис. 59). Чтобы найти число способов  $F(n)$  для любого  $n$ , выведем рекуррентное соотношение для  $F(n)$ . Возьмем точку  $A_1$  (рис. 60). Ее можно соединить лишь с любой из точек  $A_{2s+2}$ , потому что с обеих сторон от  $A_1 A_{2s+2}$  должно остаться четное число точек. В соответствии с этим все способы соединения точек распадаются на классы в зависимости от того, сколько пар точек остается в части  $A_1 A_2 A_{2s+2}$ .

Если с одной стороны остается  $2s$  точек, то по другую сторону остается  $2(n - s - 1)$  точек. Тем самым оставшиеся

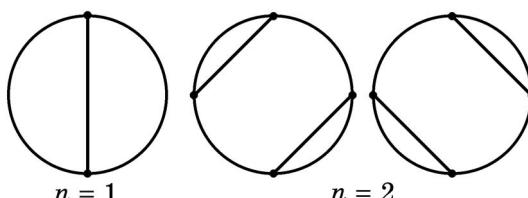


Рис. 59

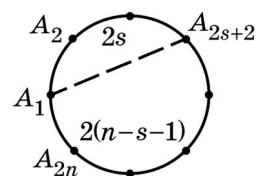


Рис. 60

$2n - 2$  точек разбиваются на  $2s$  точек и  $2(n - s - 1)$  точек. Но для  $2s$  точек можно  $F(s)$  способами провести отрезки так, чтобы они не пересекали друг друга, а для  $2(n - s - 1)$  точек это можно сделать  $F(n - s - 1)$  способами. По правилу произведения получаем, что в  $s$ -й класс входит  $F(s)F(n - s - 1)$  способов проведения отрезков. При этом надо считать  $F(0) = 1$ , потому что при  $s = 0$  мы отсекаем пару точек  $A_1A_2$  от остальных  $2(n - 1)$  и в дальнейшем получаем  $F(n - 1)$  способов. Значит, общее число всех способов равно

$$F(n) = F(0)F(n - 1) + F(1)F(n - 2) + \dots + F(n - 1)F(0).$$

Мы получили то самое рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют числа  $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ . Так как  $F(0) = T_0 = 1$ , то для всех  $n$  имеем  $F(n) = T_n$ . Итак,  $2n$  вершин можно  $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$  способами соединить попарно не пересекающимися отрезками.

## 98. Новое решение задачи мажордома

Бывают комбинаторные задачи, в которых приходится составлять не одно рекуррентное соотношение, а целую систему соотношений, связывающую несколько последовательностей. Эти соотношения выражают члены последовательностей через предыдущие члены не только данной, но и остальных последовательностей. Напомним рассмотренную в п. 78 задачу мажордома.

*Однажды мажордом короля Артура обнаружил, что к обеду за круглым столом приглашено 6 пар враждующих рыцарей. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом?*

Если мы найдем какой-то способ рассадки рыцарей, то, пересаживая их по кругу, получим еще 11 способов. Сейчас мы не будем считать различными способы, получающиеся друг из друга такой циклической пересадкой (ориентируясь не на места за столом, а на конкретных соседей каждого рыцаря).

Рассмотрим общую задачу. Пусть число рыцарей равно  $2n$ . Через  $B_n$  обозначим число способов рассадки, при которых никакие два врага не сидят рядом, через  $C_n$  — число способов, при которых рядом сидит ровно одна пара врагов, и через  $D_n$  — число способов, при которых есть ровно две пары враждующих соседей.

Выведем формулу, выражющую  $B_{n+1}$  через  $B_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$  при  $n > 1$ . Пусть  $n + 1$  пара рыцарей сидит так, что никакие два врага не сидят рядом. Мы будем считать, что все враждующие пары рыцарей занумерованы. Попросим встать из-за стола пару рыцарей с номером  $n + 1$ . Тогда появятся 2 новые пары соседей (те, которых ушедшие рыцари разделяли), поэтому возможны три случая: среди оставшихся за столом не появилось ни одной пары соседей-врагов; появилась одна такая пара; появились две такие пары.

Выясним теперь, сколькими способами можно снова посадить ушедших рыцарей за стол, так, чтобы после этого не было ни одной пары соседей-врагов.

Проще всего посадить их, если за столом рядом сидят две пары врагов. В этом случае один из вновь пришедших садится между рыцарями первой пары, а другой — между рыцарями второй пары. Это можно сделать двумя способами. Но так как число способов рассадки  $2n$  рыцарей, при которых две пары соседей оказались врагами, равно  $D_n$ , то всего получилось  $2D_n$  способов.

Пусть теперь рядом сидит только одна пара врагов. Один из вернувшихся должен сесть между ними. Тогда за столом окажутся  $2n + 1$  рыцарей, между которыми есть  $2n + 1$  мест, но два места (рядом с только что севшим гостем) запретны для второго рыцаря, и ему остается  $2n - 1$  мест. Так как первым может войти любой из двух вышедших рыцарей, то получается  $2(2n - 1)$  способов рассадки. Но число случаев, когда  $2n$  рыцарей сели так, чтобы ровно одна пара врагов оказалась соседями, равно  $C_n$ . Поэтому мы получаем  $2(2n - 1)C_n$  способов посадить гостей требуемым образом.

Наконец, пусть никакие два врага не сидят рядом. В этом случае первый рыцарь садится между любыми двумя гостями — это он может сделать  $2n$  способами. После этого для его врага останется  $2n - 1$  место — он может занять любое место, кроме двух мест, соседних с только что севшим рыцарем. Таким образом, если  $2n$  рыцарей уже сидели нужным образом, то вернувшихся гостей можно посадить  $2n(2n - 1)$  способами. Всего же в этом случае получается  $2n(2n - 1)B_n$  способов.

Трепя разобранными случаями исчерпываются все возможности. Поэтому имеет место рекуррентное соотношение

$$B_{n+1} = 2n(2n - 1)B_n + 2(2n - 1)C_n + 2D_n.$$

Этого соотношения еще недостаточно, чтобы найти  $B_n$  для всех значений  $n$ . Надо еще узнать, как выражаются  $C_{n+1}$  и  $D_{n+1}$  через  $B_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$ .

Предположим, что среди  $2n + 2$  рыцарей за столом оказалась ровно одна пара врагов-соседей ( $n > 1$ ). Мы знаем, что это может произойти в  $C_{n+1}$  случаях. Во избежание ссоры попросим их удалиться из-за стола. Тогда останется  $2n$  рыцарей, причем возможно одно из двух: либо среди оставшихся нет врагов-соседей, либо есть ровно одна пара таких врагов — до ухода покинувших зал они сидели по обе стороны от них, и теперь оказались рядом.

В первом случае можно посадить пару ушедших между любыми двумя рыцарями, т. е.  $2n$  способами, а так как их еще можно поменять местами, то получится  $4n$  способов. Комбинируя их со всеми способами посадки  $n$  пар рыцарей, при которых нет соседей-врагов, получаем  $4nB_n$  способов.

Во втором случае ушедших можно посадить только рядом обратно, разделив появившуюся пару врагов — иначе появится вторая пара враждующих соседей или исчезнут обе. Но так как  $2n$  рыцарей можно посадить  $C_n$  способами так, чтобы была только одна пара враждующих соседей, то мы получаем  $2C_n$  вариантов (возвратившихся рыцарей можно поменять местами).

Наконец, номер ушедшей и вернувшейся пары рыцарей мог быть любым от 1 до  $n + 1$ . Отсюда вытекает, что рекуррентное соотношение для  $C_{n+1}$  имеет вид

$$C_{n+1} = 4n(n + 1)B_n + 2(n + 1)C_n.$$

Наконец, разберем случай, когда среди  $2n + 2$  рыцарей было две пары врагов-соседей. Номера этих пар можно выбрать  $C_{n+1}^2 = \frac{n(n + 1)}{2}$  способами. Заменим каждую пару одним новым рыцарем, причем будем считать новых двух рыцарей врагами. Тогда за столом будут сидеть  $2n$  рыцарей, причем среди них либо не будет ни одной пары врагов-соседей (если новые рыцари не сидят рядом), либо только одна такая пара.

Первый вариант может быть в  $B_n$  случаях. Вернуться к исходной компании мы можем 4 способами благодаря возможности изменить порядок рыцарей в каждой паре. Поэтому первый вариант приводит к  $4C_{n+1}^2 B_n = 2n(n + 1)B_n$  способам.

Второй же вариант может быть в  $\frac{1}{n} C_n$  случаях (имеется  $C_n$  случаев, когда какая-нибудь пара врагов сидит рядом; если указать, какая именно пара должна сидеть рядом, получим в  $n$  раз меньше случаев).

Здесь тоже можно вернуться к исходной компании 4 способами, и мы получаем всего  $2(n+1)C_n$  способов. Отсюда вытекает, что при  $n \geq 1$

$$D_{n+1} = 2n(n+1)B_n + 2(n+1)C_n.$$

Мы получили систему рекуррентных соотношений

$$B_{n+1} = 2n(2n-1)B_n + 2(2n-1)C_n + 2D_n, \quad (2)$$

$$C_{n+1} = 4n(n+1)B_n + 2(n+1)C_n, \quad (3)$$

$$D_{n+1} = 2n(n+1)B_n + 2(n+1)C_n, \quad (4)$$

справедливых при  $n \geq 2$ . Непосредственный подсчет показывает, что  $B_2 = 2$ ,  $C_2 = 0$ ,  $D_2 = 4$ . Поэтому из соотношений (2) – (4) вытекает, что  $B_3 = 32$ ,  $C_3 = 48$ ,  $D_3 = 24$ . Продолжая далее (это удобно делать на компьютере в виде электронной таблицы), доходим до  $B_6 = 12\ 771\ 840$ :

| $n$   | 2 | 3  | 4    | 5      | 6        |
|-------|---|----|------|--------|----------|
| $B_n$ | 2 | 32 | 1488 | 112512 | 12771840 |
| $C_n$ | 0 | 48 | 1920 | 138240 | 15160320 |
| $D_n$ | 4 | 24 | 1152 | 78720  | 8409600  |

Разобранная задача похожа на следующую задачу, называемую часто «задачей о гостях» (мы ее рассматривали в п. 74).

*Сколькими способами можно рассадить за круглым столом  $n$  супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие два супруга не сидели рядом?*

Эта задача решается примерно так же, как и задача о рассадке рыцарей. Сначала рассаживают женщин. Если занумеровать места, то либо все женщины окажутся на четных местах, либо они займут нечетные места. Но число четных мест равно  $n$ , и женщины могут сесть на них  $n!$  способами. Столькими же способами они могут занять нечетные места. Значит, женщин можно посадить  $2 \cdot n!$  способами. А потом рассматривают случаи, когда ни один из мужей не сидит рядом со своей женой, когда рядом сидит одна супружеская пара и, наконец, когда рядом сидят две супружеские пары. Предоставляем читателю составить соответствующую систему рекуррентных соотношений.

## 99. Рекуррентные таблицы

В комбинаторике часто встречаются величины, зависящие не от одного, а от нескольких чисел. Например, число  $C_n^k$  зависит и от  $n$ , и от  $k$ . Если рассматриваемая величина  $F(n, k)$  зависит от двух натуральных чисел  $n$  и  $k$ , то ее значения можно расположить в виде таблицы, помещая  $F(n, k)$  на пересечении  $n$ -й строки и  $k$ -го столбца. С такими величинами мы уже неоднократно сталкивались — арифметический квадрат, арифметический треугольник и  $m$ -арифметические треугольники имели вид именно таких таблиц.

При этом во всех примерах между элементами таблицы существовали зависимости. Эти зависимости позволяли вычислять элементы  $n$ -й строки таблицы по элементам предыдущей строки и, быть может, некоторым предшествующим элементам  $n$ -й строки. Поэтому, если была задана первая строка таблицы и первые элементы других строк, все остальные строки можно было вычислять одну за другой.

Для арифметического квадрата рекуррентное соотношение имело вид

$$F(n, k) = F(n - 1, k) + F(n, k - 1), \quad (5)$$

а граничные (начальные) условия задавались так:  $F(n, 0) = 1$ ,  $F(0, k) = 0$  при  $k > 0$  (напомним, что для арифметического квадрата нумерация строк и столбцов начиналась с нуля).

Для арифметических пятиугольника и шестиугольника рекуррентное соотношение тоже имело вид (5), а ограничения приводили к тому, что некоторые элементы таблицы должны были заведомо равняться нулю.

Подобный вид имеет и рекуррентное соотношение для арифметического треугольника и  $m$ -арифметического треугольника. Именно, для  $m$ -арифметического треугольника

$$\begin{aligned} F(n, k) = F(n - 1, k - m + 1) + \\ + F(n - 1, k - m + 2) + \dots + F(n - 1, k). \end{aligned}$$

При этом  $F(0, 0) = 1$  и  $F(0, k) = 0$ , если  $k > 0$ .

Таблицы  $F(n, k)$ , построенные на основе рекуррентных соотношений, обобщают рекуррентные последовательности, и мы будем называть их в дальнейшем *рекуррентными таблицами*.

## 100. Третье решение проблемы мажордома

В качестве еще одного примера на использование рекуррентных таблиц приведем еще одно решение проблемы мажордома. Как читатель помнит, речь шла о числе способов рассадить  $2n$  рыцарей за круглым столом так, чтобы никакие два врага не сидели рядом (а среди  $2n$  рыцарей было  $n$  пар врагов).

Обозначим через  $F(m, n)$  число способов рассадки, при которых рядом сидят ровно  $m$  пар врагов. Мы выведем сейчас рекуррентную формулу, выражающую  $F(m, n + 1)$  через  $F(k, n)$ ,  $k = m - 1, m, m + 1, m + 2$ .

Будем считать, что сначала за столом сидели  $n$  пар рыцарей, причем  $n \geq 2$ , а потом пришла  $(n + 1)$ -я пара и села за стол. Подсчитаем, во скольких случаях за столом окажутся  $m$  пар соседей-врагов. Это может произойти четырьмя способами.

а) За столом была  $m - 1$  пара врагов, сидевших рядом. Это могло случиться  $F(m - 1, n)$  способами. Чтобы за столом оказалось  $m$  пар враждующих соседей, новая пара должна сесть рядом, не разбив ни одну из уже существовавших пар соседей-врагов. Но между  $2n$  рыцарями есть  $2n$  промежутков, а садиться нельзя в  $m - 1$  промежутков. Остается  $2n - m + 1$  промежутков, куда могут рядом сесть вновь пришедшие рыцари. Так как при этом пришедшие рыцари могут еще меняться местами, то всего получаем  $2(2n - m + 1)F(m - 1, n)$  способов.

б) За столом уже было  $m$  пар рядом сидящих врагов. В этом случае вновь пришедшие могут выбрать одно из двух: либо сесть врозь, не разделив при этом ни одну пару соседей-врагов, либо сесть рядом между двумя враждующими соседями. Легко подсчитать, что первое можно проделать  $(2n - m)(2n - m - 1)$  способами, а второе  $2m$  способами. Так как  $n$  пар рыцарей могут сесть  $F(m, n)$  способами так, чтобы рядом оказались  $m$  пар врагов, то всего получаем  $[(2n - m)^2 - 2n + 3m]F(m, n)$  способов.

в) Далее, рассмотрим случай, когда среди  $2n$  рыцарей рядом сидела  $m + 1$  пара врагов (это может случиться  $F(m + 1, n)$  способами). В этом случае один из вновь пришедших должен сесть между одной из пар врагов-соседей, а второй должен сесть так, чтобы не разбить ни одну такую пару. Первое можно сделать  $m + 1$ , а второе  $2n - m - 1$  способами. Всего получаем  $2(m + 1)(2n - m - 1)$  возможностей (множитель 2 появился потому, что любой из двух вновь пришедших может сесть между врагами). Поэтому рассматриваемый случай дает всего  $2(m + 1)(2n - m - 1)F(m + 1, n)$  возможностей.

г) Наконец, предположим, что было  $m + 2$  пар соседей-врагов. Это могло случиться  $F(m + 2, n)$  способами. Чтобы оказалось только  $m$  пар соседей-врагов, каждый из вновь пришедших рыцарей должен разбить одну пару враждующих соседей. Первый рыцарь может сесть  $m + 2$  способами, после чего второму остается лишь  $m + 1$  место. Всего получаем  $(m + 1)(m + 2)F(m + 2, n)$  возможностей.

Легко видеть, что мы исчерпали все возможности, при которых среди  $2n + 2$  рыцарей за круглым столом окажутся  $m$  пар соседей-врагов. Поэтому  $F(m, n + 1)$  удовлетворяет при  $n \geq 2$  следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} F(m, n + 1) = \\ = 2(2n - m + 1)F(m - 1, n) + [(2n - m)^2 - 2n + 3m]F(m, n) + \\ + 2(m + 1)(2n - m - 1)F(m + 1, n) + (m + 1)(m + 2)F(m + 2, n). \quad (6) \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что  $F(0, 2) = 2$ ,  $F(1, 2) = 0$ ,  $F(2, 2) = 4$  (мы не считаем различными способы рассадки, получающиеся друг из друга циклической перестановкой). Опять заполняя с помощью формулы (6) (электронную) таблицу значений  $F(m, n)$ , доходим до  $F(0, 6) = 12\ 771\ 840$ :

| $n$       | 2 | 3  | 4    | 5      | 6        |
|-----------|---|----|------|--------|----------|
| $F(0, n)$ | 2 | 32 | 1488 | 112512 | 12771840 |
| $F(1, n)$ | 0 | 48 | 1920 | 138240 | 15160320 |
| $F(2, n)$ | 4 | 24 | 1152 | 78720  | 8409600  |
| $F(3, n)$ | 0 | 16 | 384  | 26880  | 2841600  |
| $F(4, n)$ | 0 | 0  | 96   | 5760   | 633600   |
| $F(5, n)$ | 0 | 0  | 0    | 768    | 92160    |
| $F(6, n)$ | 0 | 0  | 0    | 0      | 7680     |

## 101. Решение рекуррентных соотношений

Мы будем говорить, что *рекуррентное соотношение имеет порядок  $k$* , если оно позволяет выразить  $f(n + k)$  через  $f(n)$ ,  $f(n + 1)$ , ...,  $f(n + k - 1)$ . Например,

$$f(n + 2) = f(n)f(n + 1) - 3f^2(n + 1) + 1$$

— рекуррентное соотношение второго порядка, а

$$f(n + 3) = 6f(n)f(n + 2) + f(n + 1)$$

— рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение  $k$ -го порядка, то ему может удовлетворять бесконечно много последовательностей. Дело в том, что первые  $k$  элементов последовательности можно задать совершенно произвольно — между ними нет никаких соотношений. Но если первые  $k$  элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно — элемент  $f(k + 1)$  выражается в силу рекуррентного соотношения

через  $f(1), \dots, f(k)$ , элемент  $f(k+2)$  — через  $f(2), \dots, f(k+1)$  и т. д.

Пользуясь рекуррентным соотношением и начальными членами, можно один за другим выписывать члены последовательности, причем рано или поздно мы получим любой ее член. Однако при этом нам придется выписать и все предыдущие члены — ведь не узнав их, мы не узнаем и последующих членов. Но во многих случаях мы хотим узнать только один определенный член последовательности, а остальные члены нам не нужны. В этих случаях удобнее иметь явную формулу для  $n$ -го члена последовательности. Мы будем говорить, что некоторая последовательность является *решением* данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется. Например, последовательность  $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$  является одним из решений рекуррентного соотношения  $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$ . В самом деле, если  $f(n) = 2^n$ , то

$$3f(n+1) - 2f(n) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = (3-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} = f(n+2)$$

при любом  $n$ . Поэтому  $f(n) = 2^n$  является решением указанного соотношения.

Решение рекуррентного соотношения  $k$ -го порядка называется *общим*, если оно зависит от  $k$  произвольных постоянных  $C_1, \dots, C_k$  и путем подбора этих постоянных позволяет получить любое решение данного соотношения. Например, для соотношения

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n). \quad (7)$$

общим решением будет

$$f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n. \quad (8)$$

В самом деле, легко проверить, что последовательность (8) обращает соотношение (7) в тождество. Поэтому нам надо только показать, что любое решение этого соотношения можно представить в виде (8). Но любое решение соотношения (7) однозначно определяется значениями  $f(1)$  и  $f(2)$ . Поэтому нам надо доказать, что для любых чисел  $a$  и  $b$  найдутся такие значения  $C_1$  и  $C_2$ , что  $2C_1 + 3C_2 = a$  и  $2^2C_1 + 3^2C_2 = b$ . Но легко видеть, что при любых значениях  $a$  и  $b$  система уравнений

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = a, \\ 2^2C_1 + 3^2C_2 = b \end{cases}$$

имеет решение. Поэтому (8) действительно является общим решением соотношения (7).

## 102. Случай постоянных коэффициентов

Для решения рекуррентных соотношений общих правил, вообще говоря, нет. Однако существует весьма часто встречающийся класс соотношений, решаемый единообразным методом. Это — рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n),$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — некоторые числа. Такие соотношения называют *линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами*.

Сначала мы рассмотрим, как решаются такие соотношения при  $k = 2$ , т. е. изучим соотношения вида

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \quad (9)$$

Решение этих соотношений основано на следующих утверждениях.

**1.** Если  $f_1(n)$  и  $f_2(n)$  являются решениями рекуррентного соотношения (9), то при любых числах  $A$  и  $B$  последовательность

$$f(n) = A f_1(n) + B f_2(n) \quad (10)$$

также является решением этого соотношения.

В самом деле, по условию имеем

$$f_1(n+2) = a_1 f_1(n+1) + a_2 f_1(n),$$

$$f_2(n+2) = a_1 f_2(n+1) + a_2 f_2(n).$$

Умножим эти равенства на  $A$  и  $B$  соответственно и сложим полученные тождества. Мы получим, что

$$\begin{aligned} A f_1(n+2) + B f_2(n+2) &= \\ &= a_1 [A f_1(n+1) + B f_2(n+1)] + a_2 [A f_1(n) + B f_2(n)]. \end{aligned}$$

А это и означает, что  $A f_1(n) + B f_2(n)$  является решением соотношения (9).

**2.** Если число  $r_1$  является корнем квадратного уравнения  $r^2 = a_1 r + a_2$ , то последовательность  $1, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{n-1}$  является решением рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n).$$

В самом деле, если  $f(n) = r_1^{n-1}$ , то  $f(n+1) = r_1^n$  и  $f(n+2) = r_1^{n+1}$ . Подставляя эти значения в соотношение (9), получаем равенство  $r_1^{n+1} = a_1 r_1^n + a_2 r_1^{n-1}$ . Оно справедливо, так как по условию имеем  $r_1^2 = a_1 r_1 + a_2$ .

**3. Наряду с последовательностью  $\{r_1^{n-1}\}$  любая последовательность вида  $f(n) = r_1^{n+m}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , также является решением соотношения (9).**

Для доказательства достаточно использовать утверждение 1, положив в (10)  $A = r_1^{m+1}$ ,  $B = 0$ .

Из утверждений 1 и 2 вытекает следующее правило решения линейных рекуррентных соотношений второго порядка с постоянными коэффициентами.

*Пусть дано рекуррентное соотношение*

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \quad (11)$$

*Составим квадратное уравнение*

$$r^2 = a_1 r + a_2, \quad (12)$$

которое называется *характеристическим для данного соотношения*. Если это уравнение имеет два различных корня  $r_1$  и  $r_2$ , то общее решение соотношения (11) имеет вид

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}.$$

Чтобы доказать это правило, заметим сначала, что по утверждению 2 решениями нашего соотношения являются  $f_1(n) = r_1^{n-1}$  и  $f_2(n) = r_2^{n-1}$ . А тогда по утверждению 1 является его решением и  $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$ . Надо только показать, что любое решение соотношения (11) можно записать в этом виде. Но любое решение соотношения второго порядка определяется значениями  $f(1)$  и  $f(2)$ . Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 = b \end{cases}$$

имеет решение при любых  $a$  и  $b$ . Этим решением является

$$C_1 = \frac{b - ar_2}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2}.$$

Случай, когда оба корня уравнения (12) совпадают друг с другом, мы разберем несколько позже. А сейчас приведем пример на доказанное правило.

При изучении чисел Фибоначчи мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2). \quad (13)$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид  $r^2 = r + 1$ . Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n) = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (14)$$

(мы воспользовались утверждением 3 и взяли показатели  $n$  вместо  $n - 1$ ).

Мы называли числами Фибоначчи решение соотношения (13), удовлетворяющее начальным условиям  $f(1) = 1$  и  $f(2) = 1$ , т. е. последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Часто бывает удобно добавить к этой последовательности вначале число 0 и рассматривать последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Ясно, что эта последовательность удовлетворяет тому же самому рекуррентному соотношению (13) и начальным условиям  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Полагая в формуле (14)  $n = 0$  и  $n = 1$ , получаем для  $C_1$  и  $C_2$  систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{5}}{2} (C_1 - C_2) = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что  $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , и потому

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

На первый взгляд кажется удивительным, что это выражение при всех натуральных значениях  $n$  принимает целочисленные значения. Но это становится более понятным, если заметить,

что после раскрытия всех скобок выражение будет иметь вид  $a + b\sqrt{5}$ , но при замене  $\sqrt{5}$  на  $-\sqrt{5}$  выражение не изменится (поменяет знак и первый сомножитель, и квадратная скобка), поэтому всегда будет  $b = 0$ .

### 103. Случай равных корней характеристического уравнения

Остановимся теперь на случае, когда оба корня характеристического уравнения совпадают:  $r_1 = r_2$ . В этом случае выражение  $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$  уже не будет общим решением. Ведь из-за того, что  $r_1 = r_2$ , это решение можно записать в виде

$$f(n) = (C_1 + C_2) r_1^{n-1} = C r_1^{n-1}.$$

У нас остается только одно произвольное постоянное  $C$ , и выбрать его так, чтобы удовлетворить двум начальным условиям  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ , вообще говоря, невозможно. Поэтому нам надо найти какое-нибудь второе решение, отличное от  $f_1(n) = r_1^{n-1}$ .

Оказывается, таким решением является  $f_2(n) = n r_1^{n-1}$ . В самом деле, если квадратное уравнение  $r^2 = a_1 r + a_2$  имеет два совпадающих корня  $r_1 = r_2$ , то по теореме Виета  $a_1 = 2r_1$ ,  $a_2 = -r_1^2$ . Поэтому наше уравнение записывается так:  $r^2 = 2r_1 r - r_1^2$ . А тогда рекуррентное соотношение имеет такой вид:

$$f(n+2) = 2r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n). \quad (15)$$

Проверим, что  $f_2(n) = n r_1^{n-1}$  действительно является его решением. Мы имеем  $f_2(n+2) = (n+2) r_1^{n+1}$ , а  $f_2(n+1) = (n+1) r_1^n$ . Подставляя эти значения в соотношение (15), получаем очевидное тождество  $(n+2) r_1^{n+1} = 2(n+1) r_1^{n+1} - n r_1^{n+1}$ . Значит,  $n r_1^{n-1}$  — второе решение соотношения (15).

Зная два решения  $f_1(n) = r_1^{n-1}$  и  $f_2(n) = n r_1^{n-1}$  соотношения (15), мы уже можем написать его общее решение:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 n r_1^{n-1} = (C_1 + C_2 n) r_1^{n-1}.$$

Вот теперь путем подбора  $C_1$  и  $C_2$  можно удовлетворить любым начальным условиям.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n). \quad (16)$$

Составляем характеристическое уравнение  $r^k = a_1 r^{k-1} + \dots + a_k$ . Если все корни  $r_1, \dots, r_k$  этого алгебраического уравнения  $k$ -й степени различны, то общее решение соотношения (16) имеет вид  $f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \dots + C_k r_k^{n-1}$ .

Если же, например,  $r_1 = r_2 = \dots = r_s$ , то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n) = r_1^{n-1}, \quad f_2(n) = n r_1^{n-1}, \quad f_3(n) = n^2 r_1^{n-1}, \quad \dots, \quad f_s(n) = n^{s-1} r_1^{n-1}$$

рекуррентного соотношения (16). В общем решении этому корню соответствует часть  $(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_s n^{s-1}) r_1^{n-1}$ . Составляя такие выражения для всех корней и складывая их, получаем общее решение соотношения (16).

Например, решим рекуррентное соотношение

$$f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n).$$

Характеристическое уравнение имеет здесь вид

$$r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0.$$

Решая его, получаем корни  $r_1 = 2, r_2 = 2, r_3 = 2, r_4 = -1$ . Значит, общее решение нашего соотношения можно записать в следующем виде:  $f(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) \cdot 2^n + C_4 \cdot (-1)^n$ .

### Задачи

8. Найдите общее решение рекуррентных соотношений:

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0;$ | e) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0;$ |
| б) $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 10a_n = 0;$ | ж) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0;$    |
| в) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 13a_n = 0;$ | з) $a_{n+4} + 4a_n = 0;$                         |
| г) $a_{n+2} + 9a_n = 0;$             | и) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n.$            |
| д) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0;$  |  |

9. Найдите  $a_n$ , зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

а)  $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, a_1 = 1, a_2 = -7;$

б)  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0, a_1 = 2, a_2 = 4;$

в)  $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$ ,  $a_1 = -0,25$ ,  $a_2 = -0,5$ ;

г)  $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -3$ ,  $a_3 = -29$ .

**10.** Найдите такую последовательность, что  $a_1 = \cos \varphi$ ,  $a_2 = \cos 2\varphi$  и  $a_{n+2} - 2a_{n+1} \cos \varphi + a_n = 0$ .

**11.** Докажите, что последовательность с общим членом  $a_n = n^t$  при  $0 \leq t \leq k-1$  удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} - C_k^1 a_{n+k-1} + C_k^2 a_{n+k-2} - \dots + (-1)^k C_k^k a_n = 0.$$

**12.** Рассматриваются все  $k$ -размещения чисел 1, 2, ...,  $n$ , при которых четные числа стоят на местах с четными номерами (считая от начала), а нечетные — на местах с нечетными номерами ( $n \leq 9$ ). Сколько таких размещений расположено в порядке возрастания чисел (например, имеют вид 3678)?

#### 104. Рекуррентные соотношения и передача информации

В теории передачи информации приходится решать следующую задачу.

*С помощью сигналов нескольких типов (например, точек и тире) передается некоторое сообщение. Длительность передачи сигнала первого типа равна  $t_1$ , второго типа —  $t_2$ , ...,  $m$ -го типа —  $t_m$ . Сколько различных сообщений можно передать с помощью этих сигналов за  $T$  единиц времени?*

При этом учитываются лишь «максимальные» сообщения, к которым нельзя присоединить ни одного сигнала, не выйдя за рамки предоставленного лимита времени.

Обозначим число сообщений, которые можно передать за время  $T$ , через  $F(T)$ . Рассуждая точно так же, как в задаче о наклейке марок, получаем, что  $F(T)$  удовлетворяет соотношению

$$F(T) = F(T - t_1) + F(T - t_2) + \dots + F(T - t_m). \quad (17)$$

При этом  $F(0) = 1$  и  $F(T) = 0$ , если  $T < 0$ .

Будем считать числа  $T$ ,  $t_1$ , ...,  $t_m$  целыми, и обозначим через  $r_1$ , ...,  $r_k$  корни характеристического уравнения для соотношения (17). Тогда общее решение уравнения принимает вид  $F(T) = C_1 r_1^T + \dots + C_k r_k^T$ . Пусть  $r_1$  — наибольший по абсолютной величине из корней характеристического уравнения. Тогда при больших значениях  $T$  все слагаемые будут пренебрежимо малы по сравнению с первым, и мы получим, что  $F(T) \sim C_1 r_1^T$ . Это равенство позволяет приближенно оценивать число сообщений, которое можно передать за время  $T$  с помощью данной системы сигналов.

## Глава VIII

### РЯДЫ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотренный в предыдущей главе метод рекуррентных соотношений позволяет решать многие комбинаторные задачи. Метод надежен, но в целом ряде случаев рекуррентные соотношения довольно трудно составить, а еще труднее решить. Кроме того, пользуясь этим методом, мы получаем много излишней информации — нам нужно, например, найти значение некоторой функции при  $n = 6$ , а для этого приходится находить ее значения и при всех меньших  $n$ . Существует метод, значительно ускоряющий расчеты и позволяющий быстро обнаруживать различные свойства изучаемых чисел — метод производящих функций. Но он основан на использовании многочленов и бесконечных степенных рядов, так что сначала нам придется познакомиться с этими понятиями.

#### 105. Деление многочленов

Читатель, конечно, знает, как делят друг на друга числа. При делении двух целых чисел получается частное и, возможно, остаток. Если заданы два многочлена  $f(x)$  и  $g(x)$ , то их тоже можно разделить друг на друга. Всегда существуют многочлены  $q(x)$  (частное) и  $r(x)$  (остаток) такие, что  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ , причем степень  $r(x)$  меньше степени  $g(x)$  или  $r(x) = 0$ . Например,  $6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 - x + 1)(6x + 4) + (-x - 1)$  (рис. 61). При этом  $f(x)$  называется *делимым*, а  $g(x)$  *делителем*.

Если же мы хотим, чтобы деление выполнялось без остатка, то придется допустить в качестве частного не только многочлены, но и бесконечные степенные ряды. Для получения частного надо расположить многочлены по *возрастающим* степеням  $x$  и делить «уголком», начиная с младших членов. На рис. 62, например, приведено деление 1 на  $1 - x$ . Ясно, что процесс деления никогда не закончится (так же, например, как при

$$\begin{array}{r} \begin{array}{c} 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \\ \hline 6x^3 - 6x^2 + 6x \\ \hline -4x^2 - 5x + 3 \\ \hline 4x^2 - 4x + 4 \\ \hline -x - 1 \end{array} & \left| \begin{array}{c} x^2 - x + 1 \\ \hline 6x + 4 \end{array} \right. \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 - x \\ \hline -x \\ \hline x - x^2 \\ \hline -x^2 \\ \hline x^2 - x^3 \\ \hline x^3 \dots \end{array} & \left| \begin{array}{c} 1 - x \\ \hline 1 + x + x^2 + \dots \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Рис. 61

Рис. 62

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 \frac{-3+ x-2x^2+6x^3}{-3-3x+3x^2} \quad | \frac{1-x+x^2}{3+4x-x^2+x^3+2x^4+x^5-\dots} \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 -4x-5x^2+6x^3 \\
 \underline{4x-4x^2+4x^3} \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 -x^2+2x^3 \\
 \underline{-x^2+x^3-x^4} \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 -x^3+x^4 \\
 \underline{x^3-x^4+x^5} \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 -2x^4-x^5 \\
 \underline{2x^4-2x^5+2x^6} \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 -x^5-2x^6 \\
 \underline{x^5-x^6+x^7} \\
 \underline{-} \quad \underline{-} \\
 -x^6-x^7 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 63

обращении числа  $\frac{1}{3}$  в бесконечную десятичную дробь) — все коэффициенты частного будут равны единице. Поэтому в качестве частного получается бесконечный ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Вообще, если  $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$  и  $g(x) = b_0 + \dots + b_m x^m$  — два многочлена, причем свободный член многочлена  $g(x)$  отличен от нуля,  $b_0 \neq 0$ , и при обычном делении с остатком  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$  получается ненулевой остаток  $r(x) \neq 0$ , то при делении  $f(x)$  на  $g(x)$  «уголком», начиная с младших членов, получается бесконечный ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots \quad (1)$$

На рис. 63 приведен пример того, что получится из самого первого примера (рис. 61) при втором способе деления многочлена  $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$  на  $g(x) = x^2 - x + 1$ .

Такая же картина будет наблюдаться во всех случаях, когда  $b_0 \neq 0$  и  $r(x) \neq 0$ . Лишь в случае, когда  $f(x)$  делится без остатка на  $g(x)$ , ряд (1) обрывается и мы получаем многочлен.

## 106. Алгебраические дроби и степенные ряды

В процессе деления многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  мы получили бесконечный степенной ряд. Возникает вопрос, как

связан этот ряд с алгебраической дробью  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , т. е. какой смысл можно придать записи

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots$$

Рассмотрим, например, разложение

$$\frac{1}{1-x} \stackrel{?}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (2)$$

Мы написали здесь знак равенства, но поставили знак вопроса, так как не знаем, какой смысл имеет стоящая справа сумма бесконечного числа слагаемых. Чтобы выяснить это, попробуем подставлять в обе части соотношения (2) различные значения  $x$ . Сначала положим  $x = \frac{1}{10}$ . Тогда левая часть соотношения примет значение  $\frac{10}{9}$ , а правая превратится в бесконечный числовой ряд  $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$ .

Так как мы не умеем складывать бесконечно много слагаемых, попробуем взять сначала одно, потом — два, потом — три и т. д. слагаемых. Мы получим такие суммы:  $1; 1,1; 1,11; 1,111; \dots$ . Но те же самые числа мы получим, если начнем обращать обычную дробь  $\frac{10}{9}$  в десятичную. Так что с возрастанием числа слагаемых эти суммы приближаются к значению  $1,111\dots = \frac{10}{9}$ , которое как раз приняла левая часть соотношения (2) при  $x = \frac{1}{10}$ . То же самое получится, если вместо  $x$  подставить в обе части равенства (2) число  $\frac{1}{2}$ . Левая часть равенства примет значение 2, а правая превратится в бесконечный числовой ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots$ . Беря последовательно одно, два, три, четыре, ...,  $k$  слагаемых, мы получим числа  $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \dots, 2 - \frac{1}{2^k}$ . Ясно, что с возрастанием  $k$  эти числа все ближе как раз к числу 2.

Однако если взять  $x = 4$ , то левая часть равенства (2) примет отрицательное значение  $-\frac{1}{3}$ , а в правой получим ряд

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^k + \dots$$

Если последовательно складывать члены этого ряда, то получаются суммы  $1, 5, 21, 85, \dots$ . Эти суммы всегда положительны, неограниченно увеличиваются и не приближаются к числу  $-\frac{1}{3}$ . Мы встретились, таким образом, с двумя случаями. Чтобы различать эти случаи, введем общее понятие о сходимости и расходимости числового ряда.

Пусть задан бесконечный числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (3)$$

Говорят, что он *сходится к числу  $b$* , если разность  $b - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  стремится к нулю при неограниченном увеличении  $n$ . Иными словами, какое бы число  $\varepsilon > 0$  мы ни взяли, отклонение суммы  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  от  $b$ , начиная с некоторого номера  $N$  (определенного по  $\varepsilon$ ), окажется меньше  $\varepsilon$ :

$$|b - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)| < \varepsilon,$$

если  $n \geq N$ .

В этом случае число  $b$  называют *суммой бесконечного ряда*  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  и пишут  $b = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Если не существует числа  $b$ , к которому сходится данный ряд (3), то этот ряд называют *расходящимся*.

Проведенное выше исследование показывает, что

$$\frac{10}{9} = 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots,$$

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots,$$

в то время как ряд  $1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^k + \dots$  расходится.

Более тщательное исследование показывает, что если  $|x| < 1$ , то ряд  $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$  сходится к  $\frac{1}{1-x}$ , а если  $|x| \geq 1$ , то он расходится. Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$  и если  $n$  стремится к бесконечности, то выражение  $x^{n+1}$  стремится к нулю, если  $|x| < 1$ , и к бесконечности, если  $|x| > 1$ . При  $x = 1$  и  $x = -1$  получаем расходящиеся числовые ряды  $1 + 1 + \dots$  и  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Итак, если  $|x| < 1$ , то в формуле (2) можно убрать знак вопроса:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (4)$$

Отметим, что равенство (4) — это известная из школьного курса математики формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Мы выяснили, таким образом, смысл записи (4). Она показывает, что для значений  $x$ , лежащих в некоторой области, а именно при  $|x| < 1$ , стоящий справа ряд сходится к  $\frac{1}{1-x}$ .

Говорят, что функция  $\frac{1}{1-x}$  при  $|x| < 1$  *разлагается в степенной ряд*  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

Теперь уже можно выяснить и более общий вопрос. Пусть при делении многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  получился степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots \quad (5)$$

Оказывается, что тогда при достаточно малых значениях  $x$  ряд (5) сходится к  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

Размеры области сходимости зависят от корней знаменателя, т. е. чисел, при которых знаменатель обращается в нуль. Именно, если эти числа равны  $x_1, \dots, x_k$  и  $r$  — наименьшее из чисел  $|x_k|$ , то ряд сходится в области  $|x| < r$ . Например, функция  $1 - x$  обращается в нуль при  $x = 1$ , и потому разложение  $\frac{1}{1-x}$  верно лишь при  $|x| < 1$ . А функция  $x^2 - 7x + 10$  обращается в нуль при  $x_1 = 2, x_2 = 5$ , и поэтому разложение для  $\frac{x-1}{x^2-7x+10}$  сходится при  $|x| < 2$ .

Отметим, что ни один из корней знаменателя не равен нулю, так как мы предположили, что свободный член знаменателя отличен от нуля, и потому  $g(0) = b_0 \neq 0$ . Иными словами, всегда есть область  $|x| < r$ , в которой выполняется равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots$$

В степенные ряды можно разлагать не только алгебраические дроби, но и многие другие функции. В математическом анализе доказывают, например, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots, \quad (6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad (7)$$

Для нас будет представлять интерес разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad (9)$$

Беря достаточно много членов ряда (9), получаем значение числа  $e$  с требуемой степенью точности. Первые десятичные знаки числа  $e$  имеют вид 2,7182818289045...

Ряды (6), (7), (8) сходятся при всех значениях  $x$ .

Отметим еще следующее важное утверждение.

*Функция  $f(x)$  не может иметь двух различных разложений в степенные ряды.*

Иными словами, если

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$$

и

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k + \dots,$$

то  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ , ...,  $a_k = b_k$ , ...

## 107. Действия над степенными рядами

Перейдем теперь к действиям над степенными рядами. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  разложены в степенные ряды

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \quad (10)$$

и

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k + \dots \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = & (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots) + \\ & + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k + \dots). \end{aligned}$$

Оказывается, что слагаемые в правой части равенства можно переставить и сгруппировать вместе члены с одинаковыми степенями  $x$  (это утверждение совсем не так очевидно, как кажется на первый взгляд — ведь в правой части равенства у нас бесконечные суммы, а в бесконечных суммах переставлять слагаемые можно далеко не всегда). После этой перегруппировки мы получим

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = & (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \\ & + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_k + b_k)x^k + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (12), называется *суммой* степенных рядов (10) и (11).

Посмотрим теперь, как разлагается в степенной ряд произведение функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = & (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots) \times \\ & \times (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k + \dots). \quad (13) \end{aligned}$$

Оказывается, что, как и в случае многочленов, ряды, стоящие в правой части равенства (13), можно почленно перемножить (мы опускаем доказательство этого утверждения). Найдем ряд, получающийся после почленного перемножения.

Свободный член этого ряда равен  $a_0 b_0$ .

Члены, содержащие  $x$ , получаются дважды: при умножении  $a_0$  на  $b_1 x$  и при умножении  $a_1 x$  на  $b_0$ . Они дают

$$a_0 b_1 x + a_1 b_0 x = (a_0 b_1 + a_1 b_0) x.$$

Точно так же вычисляем члены, содержащие  $x^2$ :

$$a_0 b_2 x^2 + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_0 x^2 = (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2.$$

Вообще, коэффициент при  $x^n$  имеет вид

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = & a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots + \\ & + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0) x^n + \dots \quad (14) \end{aligned}$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (14), называется *произведением рядов* (10) и (11).

В частности, возводя ряд (10) в квадрат, получаем

$$f^2(x) = a_0^2 + 2a_0a_1x + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^2 + 2(a_0a_3 + a_1a_2)x^3 + \dots$$

Посмотрим теперь, как делят друг на друга степенные ряды. Пусть свободный член ряда (11) отличен от нуля. Покажем, что в этом случае существует такой степенной ряд

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots, \quad (15)$$

что

$$\begin{aligned} (b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k + \dots)(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots) &= \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Для доказательства перемножим ряды в левой части этого равенства. Мы получим ряд

$$b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + \dots + (b_0c_n + b_1c_{n-1} + \dots + b_nc_0)x^n + \dots$$

Для того чтобы этот ряд совпадал с рядом (10), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0c_0 = a_0, \\ b_0c_1 + b_1c_0 = a_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_0c_n + b_1c_{n-1} + \dots + b_nc_0 = a_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Эти равенства дают бесконечную систему уравнений для отыскания коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$

Из первого уравнения системы получаем  $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$ .

Подставим полученное значение во второе уравнение. Мы получим уравнение  $b_0c_1 = a_1 - b_1 \frac{a_0}{b_0}$ , из которого находим, что

$c_1 = \frac{a_1b_0 - b_1a_0}{b_0^2}$ . Вообще, если уже найдены коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ , то для отыскания  $c_n$  имеем уравнение

$$b_0c_n = a_n - b_1c_{n-1} - \dots - b_nc_0.$$

Это уравнение разрешимо, поскольку  $b_0 \neq 0$ .

Итак, мы доказали существование ряда (15), удовлетворяющего соотношению (16). Ряд (15) называют *частным* при делении рядов (10) и (11). Можно доказать, что он получается при разложении функции  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

Таким образом, степенные ряды можно складывать, умножать и делить (последнее — при условии, что свободный член делителя отличен от нуля). Эти действия соответствуют действиям над разлагаемыми функциями.

Теперь мы можем иначе истолковать смысл разложения

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots$$

Оно означает, что ряд  $c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots$  получается при делении конечного степенного ряда  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  на конечный степенной ряд  $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ . Иными словами, это равенство означает, что

$$(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)(c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots) = \\ = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

где произведение в левой части равенства определяется по формуле (14).

### 108. Применение степенных рядов для доказательства тождеств

С помощью степенных рядов можно доказать многие тождества. Для этого берут некоторую функцию и двумя способами разлагают ее в степенной ряд. Поскольку функция может быть представлена лишь единственным образом в виде степенного ряда, то коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обоих рядах должны совпадать. Это и приводит к доказываемому тождеству.

Рассмотрим, например, известное нам разложение

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Возводя обе части этого разложения в квадрат, получаем

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n + 1)x^n + \dots \quad (17)$$

Если заменить здесь  $x$  на  $-x$ , то получим, что

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^n(n+1)x^n + \dots \quad (18)$$

Перемножив разложения (17) и (18), выводим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 + [1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1]x + [1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1]x^2 + \\ &+ \dots + [1 \cdot (-1)^n \cdot (n+1) + 2 \cdot (-1)^{n-1}n + \dots + (n+1) \cdot 1]x^n + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что коэффициенты при нечетных степенях обращаются в нуль (каждое слагаемое дважды входит в эти коэффициенты с противоположными знаками). Коэффициент же при  $x^{2n}$  равен

$$1 \cdot (2n+1) - 2 \cdot 2n + 3 \cdot (2n-1) - \dots + (2n+1) \cdot 1.$$

Но функцию  $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$  можно разложить в степенной ряд и иным образом. Мы имеем  $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2}$ . А разложение для  $\frac{1}{(1-x^2)^2}$  получается из разложения (17), если заменить в нем  $x$  на  $x^2$ :

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots + (n+1)x^{2n} + \dots \quad (20)$$

Мы знаем, что никакая функция не может иметь двух различных разложений в степенной ряд. Поэтому коэффициент при  $x^{2n}$  в разложении (19) должен равняться коэффициенту при  $x^{2n}$  в разложении (20). Отсюда вытекает следующее тождество:

$$1 \cdot (2n+1) - 2 \cdot 2n + 3 \cdot (2n-1) - \dots + (2n+1) \cdot 1 = n+1.$$

### 109. Производящие функции

А теперь мы уже можем перейти к основной теме этой главы — понятию производящей функции. Пусть дана некоторая последовательность чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ . Образуем степенной ряд  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Если этот ряд сходится в какой-то области к функции  $f(x)$ , то функцию  $f(x)$  называют *производящей* для последовательности чисел  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

Например, из формулы  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$  вытекает, что функция  $\frac{1}{1-x}$  является производящей для последовательности чисел 1, 1, 1, ..., 1, ... А формула (17) показывает, что для последовательности чисел 1, 2, 3, 4, ...,  $n$ , ... производящей является функция  $\frac{1}{(1-x)^2}$ .

Нас будут интересовать производящие функции для последовательностей  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ , так или иначе связанных с комбинаторными задачами. С помощью этих функций удается получать самые разные свойства этих последовательностей. Кроме того, мы рассмотрим, как связаны производящие функции с решением рекуррентных соотношений.

## 110. Производящие функции и биномиальные коэффициенты

Найдем производящую функцию для конечной последовательности биномиальных коэффициентов  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ .

Полагая в биноме Ньютона (п. 24)  $a = 1$  и располагая слагаемые в порядке возрастания степеней  $x$ , получаем

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (21)$$

Мы видим, что  $(1+x)^n$  является производящей функцией для чисел  $C_n^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . С помощью этой производящей функции можно сравнительно просто доказать многие свойства чисел  $C_n^k$ , которые были получены ранее с помощью довольно хитрых рассуждений.

**1.** Докажем сначала, что  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ . Для этого достаточно умножить обе части равенства (21) на  $1+x$ . Мы получим, что

$$(1+x)^{n+1} = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^{k-1} x^{k-1} + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n)(1+x).$$

Выражение в левой части этого равенства снова разложим по биному Ньютона. Только придется заменить в формуле бинома  $n$  на  $n+1$ . Поэтому коэффициентом при  $x^k$  будет  $C_{n+1}^k$ . В правой же части при раскрытии скобок член, содержащий  $x^k$ , появится дважды: при умножении  $C_n^k x^k$  на 1 и при умножении  $C_n^{k-1} x^{k-1}$  на  $x$ . Поэтому коэффициент при  $x^k$  в правой части равенства имеет вид  $C_n^k + C_n^{k-1}$ . Но слева и справа должен стоять

один и тот же многочлен. Поэтому коэффициенты при  $x^k$  слева и справа должны быть одинаковыми. Это и доказывает, что  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ .

2. Так же легко доказать, что  $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ , достаточно положить в формуле (21)  $x = 1$ .

3. Если положить в равенстве (21)  $x = -1$ , то получим, что

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Иными словами, сумма значений  $C_n^k$  с четными  $k$  равна сумме значений  $C_n^k$  с нечетными  $k$ :

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2m} + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2m+1} + \dots$$

Обе суммы конечны и обрываются, когда  $2m$  (соответственно  $2m + 1$ ) станет больше  $n$ .

4. Любопытный результат получится, если в равенстве (21) положить  $x = i$  (мнимая единица,  $i^2 = -1$ ),  $n = 4m$ .

Простой подсчет показывает, что  $(i + 1)^4 = (-1 + 2i + 1)^2 = 4i^2 = -4$ . Поэтому  $(i + 1)^{4m} = (-4)^m$ . Мы получаем, таким образом, равенство

$$\begin{aligned} (-4)^m &= C_{4m}^0 + C_{4m}^1 i + C_{4m}^2 i^2 + C_{4m}^3 i^3 + C_{4m}^4 i^4 + \dots + C_{4m}^{4m} = \\ &= C_{4m}^0 + C_{4m}^1 i - C_{4m}^2 - C_{4m}^3 i + C_{4m}^4 + \dots + C_{4m}^{4m}. \end{aligned}$$

Отделяя в этом равенстве действительную и мнимые части, приходим к тождествам

$$C_{4m}^1 - C_{4m}^3 + C_{4m}^5 - C_{4m}^7 + \dots - C_{4m}^{4m-1} = 0,$$

$$C_{4m}^0 - C_{4m}^2 + C_{4m}^4 - \dots + C_{4m}^{4m} = (-4)^m.$$

Выясните сами, какие тождества получатся, если положить  $n = 4m + 1$ ,  $n = 4m + 2$ ,  $n = 4m + 3$ .

5. Легко доказать с помощью производящей функции и равенство

$$C_{n+m}^s = C_n^0 C_m^s + C_n^1 C_m^{s-1} + \dots + C_n^k C_m^{s-k} + \dots + C_n^n C_m^{s-n}$$

(при  $s - k < 0$  или  $s - k > m$  здесь положено  $C_m^{s-k} = 0$ , поэтому справа могут быть не все члены).

Для доказательства надо взять разложения

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n,$$

$$(1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^t x^t + \dots + C_m^m x^m,$$

перемножить левые и правые части этих равенств и подсчитать коэффициент при  $x^s$ .

Частным случаем этого равенства (при  $s = m = n$ ) является

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

(напомним, что  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ).

### Задачи

1. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося при раскрытии скобок в многочлене

$$(7x^3 - 13y^2 + 5z^2)^{2004}(y^3 - 8y^2 + 6y + z)^{2005} + (2x^2 + 18y^2 - 21)^{2006}.$$

2. а) Покажите, что полное число размещений из  $n \geq 2$  предметов (по 1, 2, ...,  $n$ ) является ближайшим целым к  $e \cdot n! - 1$ .

б) Если выписать все эти размещения, то число появлений каждого предмета является ближайшим целым к  $e(n-1)(n-1)!$ .

3. Найдите коэффициент при  $x^m$ , получающийся после раскрытия скобок в выражении  $(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \dots + (1+x)^n$  и упрощения. Разберите отдельно случаи  $m < k$ ,  $n \geq m \geq k$ .

4. Пусть  $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}$ . Докажите, что:

а)  $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - a_3 a_4 + \dots - a_{2n-1} a_{2n} = 0$ ;

б)  $a_0^2 - a_1^2 + a_2^3 - \dots + (-1)^n a_{n-1}^2 = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} a_n^2$ ;

в)  $a_r - C_n^1 a_{r-1} + C_n^2 a_{r-2} - \dots + (-1)^r C_n^r a_0 = 0$ , если  $r$  не кратно 3;

г)  $a_0 + a_2 + a_4 + \dots = \frac{1}{2} (3^n + 1)$ ;  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots = \frac{1}{2} (3^n - 1)$ .

5. Найдите коэффициент при  $x^k$ , получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

а)  $(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})^2$ ;    б)  $(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})^t$ .

## 111. Дробные предметы

Мы определили  $C_n^m$  как число способов выбрать  $m$  предметов из различных  $n$ . Здесь числа  $m$  и  $n$  должны быть натуральными или, поскольку мы допускаем и пустые множества, в крайнем случае нулями. Ни дробными, ни отрицательными они быть не могут — нельзя говорить, что выбрано  $-6$  предметов или  $7/9$  предмета.

Но у чисел  $C_n^m$  слишком много замечательных свойств. Поэтому хотелось бы выйти за тесные рамки натуральных

чисел и определить  $C_n^m$  для любых значений  $n$  и  $m$  так, чтобы все или хотя бы почти все их свойства сохранились и после такого обобщения. Эту задачу удалось решить Эйлеру. Однако его решение основывалось на интегральном исчислении. Покажем сейчас, как без всяких интегралов можно определить числа  $C_n^m$  для любых значений  $n$  (но при целых неотрицательных значениях  $m$ ). Для этого запишем  $C_n^m$  в следующем виде:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot m}. \quad (22)$$

Правая часть равенства (22) имеет смысл при любых значениях  $n$ . Мы примем выражение, стоящее в правой части (22), за *определение*  $C_r^m$  при любом значении  $r$ :

$$C_r^m = \frac{r(r-1)\dots(r-m+1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot m}. \quad (23)$$

Соотношения, доказанные нами для чисел  $C_n^m$ , остаются в большинстве случаев верными и для чисел  $C_r^m$ . Дело в том, что правая часть равенства (23) — это многочлен от  $r$ . Соотношения, доказанные нами ранее для чисел  $C_n^m$ , имеют вид равенств для  $C_n^m$  как многочленов от  $n$ , а в алгебре доказывают, что два многочлена от  $r$ , равные при всех натуральных значениях  $r$ , равны и при остальных значениях  $r$ .

Нас будут в дальнейшем интересовать значения  $C_n^m$  при целых отрицательных значениях  $n$ . Пусть  $n = -r$ . Тогда

$$\begin{aligned} C_{-r}^m &= \frac{(-r)(-r-1)\dots(-r-m+1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \\ &= (-1)^m \frac{r(r+1)\dots(r+m-1)}{1\cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = (-1)^m C_{r+m-1}^m. \end{aligned}$$

Получилось то же самое, к чему мы пришли другим путем в п. 90.

## 112. Ряд Ньютона

Мы назвали, как это обычно делают в школе, формулу для  $(a+x)^n$  биномом Ньютона. Это название с точки зрения истории математики неверно. Формулу для  $(a+x)^n$  хорошо знали среднеазиатские математики Омар Хайям, Гиясэддин и др.

В Западной Европе задолго до Ньютона ее знал Блез Паскаль. Заслуга же Ньютона была в ином — ему удалось обобщить формулу для  $(a + x)^n$  на случай нецелых показателей. Именно, он доказал, что если  $a$  — положительное число и  $|x| < a$ , то для любого действительного значения  $r$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} (a + x)^r &= a^r + r a^{r-1} x + \\ &+ \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} a^{r-2} x^2 + \dots + \frac{r(r-1) \dots (r-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} a^{r-k} x^k + \dots = \\ &= a^r + C_r^1 a^{r-1} x + C_r^2 a^{r-2} x^2 + \dots + C_r^k a^{r-k} x^k + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $C_r^k$  — введенные выше формулой (23) числа. Только теперь получилось не конечное число слагаемых, а бесконечный ряд. В случае, когда  $r$  — натуральное число,  $r = n$ , начиная с некоторого места во все выражения для  $C_r^k$  входит скобка  $(r-n)$ , обращающая эти коэффициенты в нуль. Именно поэтому при натуральных значениях  $r$  вместо бесконечного ряда получается конечная сумма.

Доказательство формулы (24) в общем виде требует применения дифференциального исчисления. Мы не будем доказывать формулу (24) для всех значений  $r$  и рассмотрим лишь случай, когда  $r$  — целое отрицательное число,  $r = -n$ . В этом случае подлежащая доказательству формула принимает следующий вид:

$$(a + x)^{-n} = a^{-n} - C_n^1 a^{-n-1} x + C_{n+1}^2 a^{-n-2} x^2 - \dots + (-1)^k C_{n+k-1}^k a^{-n-k} x^k + \dots$$

Иначе это равенство можно переписать так:

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-n} = 1 - C_n^1 \left(\frac{x}{a}\right) + C_{n+1}^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \dots + (-1)^k C_{n+k-1}^k \left(\frac{x}{a}\right)^k + \dots,$$

а заменив  $\frac{x}{a}$  на  $-t$  (тогда  $|t| < 1$ ), получим следующее равенство:

$$(1 - t)^{-n} = 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + C_{n+2}^3 t^3 + \dots + C_{n+k-1}^k t^k + \dots \quad (25)$$

Его и будем доказывать (при  $|t| < 1$ ) с помощью индукции по  $n$ .

При  $n = 1$  имеем  $C_{n+k-1}^k = C_k^k = 1$  и потому доказываемое соотношение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^k + \dots \quad (26)$$

Но это — уже известная нам формула (4).

Предположим теперь, что уже доказано равенство (25), и покажем, что из него следует равенство

$$(1 - t)^{-n-1} = 1 + C_{n+1}^1 t + C_{n+2}^2 t^2 + C_{n+3}^3 t^3 + \dots + C_{n+k}^k t^k + \dots \quad (27)$$

Для этого умножим обе части равенства (25) на соответствующие члены соотношения (26). Мы получим, что

$$(1 - t)^{-n-1} = (1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + C_{n+2}^3 t^3 + \dots + C_{n+k-1}^k t^k + \dots) \times \\ \times (1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^k + \dots).$$

А теперь раскроем скобки и воспользуемся тождеством  $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+k-1}^k = C_{n+k}^k$  (см. (15) в п. 33). Мы придем в результате к доказываемому соотношению (27).

Итак, равенство (27) доказано. Напомним еще раз, что оно справедливо лишь при  $|t| < 1$ . Если неосторожный читатель попробует положить в обеих частях этого равенства  $t = -1$  и выведет на этом основании «замечательную» формулу

$$2^{-n} = 1 - C_n^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+2}^3 + \dots, \quad (28)$$

то он совершил серьезную ошибку — ведь справа написана сумма целых чисел, которая никак не может равняться  $\frac{1}{2^n}$ .

В XVIII веке, когда теория бесконечных рядов еще не была детально разработана, подобные ошибки делали и известные математики. Понадобились десятилетия напряженных исследований для того, чтобы выяснить, что же такое сумма бесконечного ряда, в каких случаях она существует, когда можно перемножать ряды как конечные суммы, а когда нельзя и т. д. Оказалось, что такой ряд, как в формуле (28), не имеет суммы (или, как говорят математики, расходится). Впрочем, следует сказать, что в конце XIX века понятие суммы бесконечного ряда было обобщено и были даны, в частности, такие определения, при которых формула (28) приобретала смысл. Но эти вопросы выходят за рамки нашей книги.

Заменим в (25)  $t$  на  $-t$ . Мы получим разложение

$$(1 + t)^{-n} = 1 - C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 - C_{n+2}^3 t^3 + \dots + (-1)^k C_{n+k-1}^k t^k + \dots \quad (29)$$

Сравним его с разложением

$$(1 + t)^n = C_n^0 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \dots + C_n^k t^k + \dots + C_n^n t^n. \quad (30)$$

Мы снова приходим к выводу, что при обобщении символа  $C_n^k$  на отрицательные значения  $n$  надо положить

$C_{-n}^k = (-1)^k C_{n+k-1}^k$ . Если же значения  $k$  отрицательны, то надо положить  $C_n^k = 0$ , поскольку в разложения (29) и (30) не входят слагаемые с отрицательными степенями  $t$ . По тем же соображениям  $C_n^k = 0$  при  $0 \leq n < k$ .

### 113. Извлечение квадратных корней

Теперь мы знаем, как выглядит бином Ньютона не только для целых, но и для дробных (и даже для иррациональных) значений показателя. Посмотрим, что получится при  $n = \frac{1}{2}$  и  $n = -\frac{1}{2}$ .

При  $n = \frac{1}{2}$  формула Ньютона принимает вид

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}x^k + \dots$$

Преобразуя это выражение, получаем

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots + (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}x^k + \dots$$

Точно так же при  $n = -\frac{1}{2}$  выводим, что

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}x^k + \dots$$

Полученные формулы можно записать иначе. Для этого заметим, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} = \frac{(2k-2)!}{k \cdot 2^{2k-1}((k-1)!)^2} = \frac{1}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1},$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^k.$$

Поэтому

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \\ + \frac{1}{3 \cdot 2^5} C_4^2 x^3 - \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k + \dots, \quad (31)$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^2} C_2^1 x + \frac{1}{2^4} C_4^2 x^2 - \dots + (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^k x^k + \dots \quad (32)$$

Эти выражения сходятся в области  $|x| < 1$ . С их помощью можно находить с требуемой степенью точности квадратные корни, ограничиваясь в формулах (31) и (32) несколькими первыми слагаемыми. Например,

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = 5\sqrt{1+0,2} = 5(1+0,2)^{\frac{1}{2}} \approx \\ \approx 5 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 - \frac{1}{2 \cdot 4} 0,2^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} 0,2^3 \right) = 5,4775$$

(точное значение  $\sqrt{30} = 5,4772\dots$ ). Однако нас будут интересовать не приложения указанных формул к извлечению корней из чисел, а соотношения между биномиальными коэффициентами, которые вытекают из полученных разложений.

Чтобы получить эти соотношения, возведем обе части равенства (32) в квадрат. По правилу умножения степенных рядов получаем, что коэффициент при  $x^k$  в правой части имеет вид

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}} (C_{2k}^k + C_2^1 C_{2k-2}^{k-1} + C_4^2 C_{2k-4}^{k-2} + \dots + C_{2k}^k).$$

В левой же части равенства получаем  $\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 = \frac{1}{1+x}$ .

Но мы знаем, что

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k + \dots$$

Сравнивая коэффициенты при степенях  $x^k$  в обеих частях равенства, приходим к тождеству

$$C_{2k}^k + C_2^1 C_{2k-2}^{k-1} + C_4^2 C_{2k-4}^{k-2} + \dots + C_{2k}^k = 2^{2k}.$$

Аналогичные рассуждения, примененные к равенству (31), дают тождество

$$\frac{C_{2k-4}^{k-2}}{1 \cdot (k-1)} + \frac{C_2^1 C_{2k-6}^{k-3}}{2 \cdot (k-2)} + \frac{C_4^2 C_{2k-8}^{k-2}}{3 \cdot (k-3)} + \dots + \frac{C_{2k-4}^{k-2}}{(k-1) \cdot 1} = \frac{C_{2k-2}^{k-1}}{k},$$

справедливое при  $k \geq 2$ .

Далее, перемножая почленно разложения (31) и (32), получаем

$$1 = \left[ 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^5} C_4^2 x^3 - \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k + \dots \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{2^2} C_2^1 x + \frac{1}{2^4} C_4^2 x^2 - \frac{1}{2^6} C_6^3 x^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2k}^k x^k + \dots \right].$$

Раскроем скобки в правой части этого равенства. Мы получим степенной ряд, причем из равенства 1 левой части следует, что все коэффициенты этого ряда (кроме свободного члена) равны нулю. Отсюда получаем тождество

$$C_{2k-2}^{k-1} + \frac{1}{2} C_2^1 C_{2k-4}^{k-2} + \frac{1}{3} C_4^2 C_{2k-6}^{k-3} + \dots + \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1} = \frac{1}{2} C_{2k}^k,$$

справедливое при  $k \geq 1$ .

Наконец, заметим, что

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{-1} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left[ 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 2^3} C_2^1 x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^5} C_4^2 x^3 - \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k + \dots \right] \times \\ \times \left[ 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots \right] = \\ = 1 - \frac{1}{2^2} C_2^1 x + \frac{1}{2^4} C_4^2 x^2 - \frac{1}{2^6} C_6^3 x^3 + \dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} C_{2k}^k x^k + \dots$$

Раскрывая скобки в обеих частях этого равенства и сравнивая коэффициенты при  $x^k$  в обеих частях, приходим к тождеству

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 2^2} C_2^1 - \frac{1}{3 \cdot 2^4} C_4^2 - \dots - \frac{1}{k \cdot 2^{2k-2}} C_{2k-2}^{k-1} = \frac{1}{2^{2k-1}} C_{2k}^k.$$

## 114. Производящие функции и рекуррентные соотношения

Мы уже говорили, что теория производящих функций тесно связана с рекуррентными соотношениями. Вернемся снова к делению многочленов.

Пусть  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  — два многочлена, причем  $b_0 \neq 0$ . Мы будем, кроме того, предполагать, что  $n < m$ , т. е. что алгебраическая дробь  $\frac{f(x)}{g(x)}$  — правильная (в противном случае мы всегда можем выделить из нее целую часть).

Мы знаем, что если

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k + \dots, \quad (33)$$

то

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)(c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots).$$

Раскроем скобки в правой части этого равенства и сравним коэффициенты при одинаковых степенях  $x^k$  слева и справа. Сначала мы получим  $m$  соотношений такого вида:

$$\begin{aligned} k = 0: \quad & b_0c_0 = a_0, \\ k = 1: \quad & b_0c_1 + b_1c_0 = a_1, \\ k = 2: \quad & b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = a_2, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ k = m - 1: \quad & b_0c_{m-1} + b_1c_{m-2} + \dots + b_{m-1}c_0 = a_{m-1} \end{aligned} \quad (34)$$

(мы полагаем  $a_k = 0$  при  $n < k \leq m - 1$ ). А дальше все соотношения имеют один и тот же вид:

$$k \geq 0: \quad b_0c_{k+m} + b_1c_{k+m-1} + \dots + b_mc_k = 0, \quad (35)$$

ведь в  $f(x)$  нет членов, содержащих  $x^m, x^{m+1}$  и т. д.

Таким образом, коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$  ряда (33) удовлетворяют рекуррентному соотношению (35). Коэффициенты этого соотношения зависят лишь от знаменателя дроби. Числитель же дроби нужен для нахождения первых  $m$  членов  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$  рекуррентной последовательности.

Обратно, если дано рекуррентное соотношение (35) и заданы начальные члены  $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$ , то мы можем по формулам

(34) вычислить значения  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ . А тогда алгебраическая дробь

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} \quad (36)$$

является для последовательности чисел  $c_0, c_1, \dots, c_k, \dots$  производящей функцией.

На первый взгляд кажется, что мы ничего не выиграли при замене рекуррентного соотношения производящей функцией, ведь все равно придется делить числитель на знаменатель, а это приведет к тому же самому рекуррентному соотношению (35). Но дело в том, что над дробью (36) можно выполнять некоторые алгебраические преобразования, а это облегчит отыскание чисел  $c_k$ .

### 115. Разложение на элементарные дроби

Мы покажем сейчас, как с помощью алгебраических преобразований производящей функции можно решать рекуррентные соотношения. Предположим, что знаменатель дроби (36) разложен на множители первой степени

$$g(x) = b_m (x - x_1)^r \dots (x - x_k)^s.$$

Отметим, что для этого надо предварительно решить уравнение  $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m = 0$ , т. е. характеристическое уравнение соотношения (35).

Тогда ясно, что дробь (36) получилась в результате приведения к одному знаменателю следующих элементарных дробей:

$$\frac{A_{11}}{x - x_1}, \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2}, \dots, \frac{A_{1r}}{(x - x_1)^r},$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{A_{k1}}{x - x_k}, \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2}, \dots, \frac{A_{ks}}{(x - x_k)^s}.$$

Иными словами,

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r}}{(x - x_1)^r} + \dots + \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{ks}}{(x - x_k)^s}. \quad (37)$$

Нам неизвестны здесь лишь коэффициенты  $A_{11}, \dots, A_{ks}$ . Чтобы найти эти коэффициенты, надо умножить обе части равенства (37) на знаменатель  $b_m(x - x_1)^r \dots (x - x_k)^s$ , раскрыть скобки и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . Из получившейся системы  $r + \dots + s$  уравнений мы и находим искомые коэффициенты.

Иногда удается обойтись и без решения системы уравнений. Пусть, например, надо разложить дробь  $\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{x^4 - 5x^2 + 4}$ . Так как  $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ , то это разложение должно иметь вид

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{x + 2}.$$

Приводя к одному знаменателю, получаем, что

$$x^3 - 2x^2 + 6x + 1 = A(x + 1)(x - 2)(x + 2) + B(x - 1)(x - 2)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1)(x + 2) + D(x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях  $x$ . Но при  $x = 1$  все слагаемые в правой части равенства, кроме первого, обращаются в нуль, и мы получаем  $-6A = 6$ . Поэтому  $A = -1$ . Точно так же, полагая  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$ , находим  $B = -\frac{4}{3}$ ,  $C = \frac{13}{12}$ ,  $D = \frac{9}{4}$ . Таким образом,

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = -\frac{1}{x - 1} - \frac{4}{3(x + 1)} + \frac{13}{12(x - 2)} + \frac{9}{4(x + 2)}. \quad (38)$$

А для дробей вида  $\frac{A_{ir}}{(x - x_i)^r}$  разложение в ряд получается по формуле Ньютона. Например,

$$\frac{13}{12(x - 2)} = -\frac{13}{24} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} = -\frac{13}{24} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\right).$$

Применяя такое разложение ко всем дробям в равенстве (38), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x^2 + 6x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} &= \\ &= (1 - x)^{-1} - \frac{4}{3}(1 + x)^{-1} - \frac{13}{24} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} + \frac{9}{8} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots) - \frac{4}{3} \left[ 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots \right] - \\
 &\quad - \frac{13}{24} \left( 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots \right) + \frac{9}{8} \left[ 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{2^n} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Группируя члены с одинаковыми степенями  $x$ , получаем, что коэффициент при  $x^n$  выражается формулой

$$c_n = 1 - \frac{4}{3} \cdot (-1)^n - \frac{13}{24 \cdot 2^n} + \frac{9}{8 \cdot 2^n} \cdot (-1)^n.$$

Мы уже знаем, что задача о разложении алгебраической дроби в степенной ряд равносильна задаче о решении некоторого рекуррентного соотношения при заданных начальных условиях. Таким образом, с помощью разложения дробей на элементарные и последующего разложения полученных элементарных дробей в степенные ряды можно решать линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

Итак, если задано рекуррентное соотношение (35) и значения  $c_0, \dots, c_{m-1}$ , то сначала надо по формулам (34) найти значения  $a_0, \dots, a_{m-1}$ . Они дают коэффициенты многочлена  $f(x)$ , стоящего в числителе дроби

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + \dots,$$

а знаменатель  $g(x)$  этой дроби равен  $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ . Найденную дробь  $\frac{f(x)}{g(x)}$  надо разложить на элементарные дроби, после чего каждую элементарную дробь разложить в степенной ряд по формуле Ньютона и привести подобные члены. Коэффициент при  $x^k$  в полученном ряде и дает значение  $c_k$ .

Решим, например, рекуррентное соотношение

$$c_{k+2} - 5c_{k+1} + 6c_k = 0$$

при начальных условиях  $c_0 = 1, c_1 = -2$ .

Здесь  $b_0 = 1, b_1 = -5, b_2 = 6$  (это (35) при  $m = 2$ ), поэтому  $g(x) = 1 - 5x + 6x^2$ . Из формул (34) получаем, что  $a_0 = b_0 c_0 = 1, a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 = -7$ , поэтому  $f(x) = 1 - 7x$ . Тем самым мы уже нашли, что дробь имеет вид  $\frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2} = 1 - 2x + \dots$

Для отыскания решения нам надо разложить в степенной ряд дробь  $\frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2}$ . Но  $1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x)$ , поэтому

$$\frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 3x)} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 - 3x}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем

$$1 - 7x = A(1 - 3x) + B(1 - 2x).$$

Полагая  $x = \frac{1}{3}$ , находим  $B = -4$ , а полагая  $x = \frac{1}{2}$ , находим  $A = 5$ . Значит,

$$\begin{aligned} \frac{1 - 7x}{1 - 5x + 6x^2} &= \frac{5}{1 - 2x} - \frac{4}{1 - 3x} = 5 \cdot (1 - 2x)^{-1} - 4 \cdot (1 - 3x)^{-1} = \\ &= 5 \cdot [1 + 2x + 4x^2 + \dots + (2x)^k + \dots] - 4 \cdot [1 + 3x + 9x^2 + \dots + (3x)^k + \dots], \end{aligned}$$

откуда  $c_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$ .

Изложенное выше позволяет по-новому взглянуть на п. 102.

## 116. Производящие функции и задача о разбиении

При решении задачи о последовательном разбиении мы пришли к рекуррентному соотношению

$$T_n = T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_0, \quad (39)$$

где  $T_0 = 1$  (см. п. 82). Это соотношение было решено очень искусственным образом — мы свели задачу к задаче об очереди, которую уже умели решать. Но решение задачи об очереди само было довольно громоздким.

Сейчас мы покажем, как непосредственно решить соотношение (39). Для этого составим производящую функцию

$$f(x) = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \dots + T_n x^n + \dots$$

Положим

$$F(x) = x f(x) = T_0 x + T_1 x^2 + T_2 x^3 + \dots + T_n x^{n+1} + \dots \quad (40)$$

и возведем  $F(x)$  в квадрат. Мы получим, что

$$\begin{aligned} F^2(x) &= T_0^2 x^2 + (T_0 T_1 + T_1 T_0) x^3 + \dots + \\ &\quad + (T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_0) x^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Но по рекуррентному соотношению (39)

$$T_0 T_{n-1} + T_1 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_0 = T_n.$$

Значит,  $F^2(x) = T_1 x^2 + T_2 x^3 + \dots + T_n x^{n+1} + \dots$

Полученный ряд есть не что иное, как  $F(x) - T_0 x$ ; поскольку  $T_0 = 1$ , он равен  $F(x) - x$ . Итак,

$$F^2(x) = F(x) - x. \quad (41)$$

Для функции  $F(x)$  получилось квадратное уравнение (41).

Решая его, находим, что  $F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2}$ . Поскольку из (40)  $F(0) = 0$ , выбираем перед корнем знак минус. По формуле (31) мы имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 4x} &= (1 - 4x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - 2x - \frac{2}{2} C_2^1 x^2 - \frac{2}{3} C_4^2 x^3 - \dots - \frac{2}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \dots \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( 1 - 2x - \frac{2}{2} C_2^1 x^2 - \dots - \frac{2}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \dots \right) \right] = \\ &= x + C_2^1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_{2n}^n x^{n+1} - \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Сравнивая формулы (40) и (42), получаем, что  $T_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ .

Это полностью соответствует решению, полученному ранее комбинаторным методом (п. 82).

## 117. Полиномиальная формула

Несколько раз применяя формулу бинома Ньютона, можно попробовать разложить и более сложные выражения, например такие, как  $(x + y + z)^4$ . Именно,

$$\begin{aligned} (x + y + z)^4 &= [(x + y) + z]^4 = \\ &= (x + y)^4 + C_4^1 (x + y)^3 z + C_4^2 (x + y)^2 z^2 + C_4^3 (x + y) z^3 + C_4^4 z^4. \end{aligned}$$

Разложим теперь  $(x + y)^4$ ,  $(x + y)^3$ ,  $(x + y)^2$  по формуле бинома Ньютона и приведем подобные члены. Мы получим, что

$$\begin{aligned} (x + y + z)^4 &= x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4x^3z + 4xy^3 + 4y^3z + 4xz^3 + \\ &+ 4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Но такой способ слишком сложен. С его помощью трудно быстро определить, с каким коэффициентом входит в разложение  $(x + y + z)^9$ , например, член  $x^2y^4z^3$ . Желательно поэтому вывести формулу, сразу дающую разложение для выражения

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n. \quad (44)$$

Эту формулу нетрудно угадать. При доказательстве формулы бинома Ньютона мы видели, что в разложении  $(a + x)^n$  член  $x^k a^{n-k}$  входит с коэффициентом  $P(k, n - k)$ . Можно предположить, что в разложении  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$  коэффициентом при  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$  будет  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Мы докажем сейчас, что дело обстоит именно так.

В самом деле, запишем  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$  в виде произведения  $n$  сомножителей и раскроем скобки, выписывая все сомножители в порядке их появления. Ясно, что при этом получатся всевозможные размещения с повторениями, составленные из букв  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , такие, что в каждое размещение входит  $n$  букв. Но некоторые из этих размещений дадут подобные члены. Так будет, если в первое размещение каждая буква входит столько же раз, сколько и во второе. Поэтому, чтобы найти коэффициент при  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$ , надо сосчитать, сколько размещений с повторениями содержат  $k_1$  раз букву  $x_1, k_2$  раз букву  $x_2, \dots, k_m$  раз букву  $x_m$ . Ясно, что каждое такое размещение является перестановкой с повторениями из  $k_1$  букв  $x_1, k_2$  букв  $x_2, \dots, k_m$  букв  $x_m$ . Число таких перестановок мы обозначали  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ .

Итак, действительно, коэффициентом при  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$  в разложении выражения (44) служит  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ , где, разумеется,  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Поэтому числа  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$  называют еще *полиномиальными коэффициентами*; при  $m = 2$  они превращаются в биномиальные коэффициенты.

Доказанную нами формулу можно записать так:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}, \quad (45)$$

где сумма распространена на всевозможные разбиения числа  $n$  на  $m$  целых неотрицательных слагаемых  $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ .

Напомним, что

$$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Ясно, что если набор  $(s_1, s_2, \dots, s_m)$  получается перестановкой из набора  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ , то  $P(s_1, s_2, \dots, s_m) = P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Поэтому, например, в разложении (43) коэффициенты при  $x^2yz$  и  $xyz^2$  одинаковы. Это замечание облегчает выписывание членов разложения (45). Достаточно найти коэффициенты для таких разбиений  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , что  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$ , а потом переставлять показатели всеми возможными способами.

Например, вычислим  $(x + y + z)^5$ . Если не учитывать порядок слагаемых (например, записывая их в порядке убывания), то число 5 можно разбить на 3 слагаемых пятью способами:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 + 0 + 0, \quad 5 = 4 + 1 + 0, \quad 5 = 3 + 2 + 0, \\ &5 = 3 + 1 + 1, \quad 5 = 2 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Но  $P(5, 0, 0) = 1$ ,  $P(4, 1, 0) = 5$ ,  $P(3, 2, 0) = 10$ ,  $P(3, 1, 1) = 20$ ,  $P(2, 2, 1) = 30$ . Поэтому

$$\begin{aligned} (x + y + z)^5 &= x^5 + y^5 + z^5 + 5x^4y + 5xy^4 + 5x^4z + 5xz^4 + 5y^4z + \\ &+ 5yz^4 + 10x^3y^2 + 10x^3z^2 + 10x^2y^3 + 10x^2z^3 + 10y^3z^2 + 10y^2z^3 + \\ &+ 20x^3yz + 20xy^3z + 20xyz^3 + 30x^2y^2z + 30x^2yz^2 + 30xy^2z^2. \end{aligned}$$

Формула (45) позволяет легко доказать некоторые свойства чисел  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Например, если положить в этой формуле  $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ , то получим, что

$$m^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=n}} P(k_1, k_2, \dots, k_m). \quad (46)$$

Здесь сумма распространена на все разбиения числа  $n$  на  $m$  неотрицательных целых слагаемых:  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , и порядок слагаемых учитывается.

Далее, если умножить обе части равенства (45) на  $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , применить к левой части аналогичное разложение, а в правой раскрыть скобки, то для  $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$  получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} P(k_1, k_2, \dots, k_m) &= P(k_1 - 1, k_2, \dots, k_m) + \\ &+ P(k_1, k_2 - 1, \dots, k_m) + \dots + P(k_1, k_2, \dots, k_m - 1). \quad (47) \end{aligned}$$

Если же перемножить левые и правые части разложений

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(k_1, k_2, \dots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m},$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^s = \sum_{l_1+l_2+\dots+l_m=s} P(l_1, l_2, \dots, l_m) x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_m^{l_m}$$

и сравнить коэффициенты в обеих частях при  $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_m^{r_m}$ , то получим тождество

$$P(r_1, r_2, \dots, r_m) = \sum_{k_i+l_i=r_i} P(k_1, k_2, \dots, k_m) P(l_1, l_2, \dots, l_m). \quad (48)$$

Здесь суммирование распространено на все наборы целых неотрицательных чисел  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  и  $(l_1, l_2, \dots, l_m)$  таких, что  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ,  $l_1 + l_2 + \dots + l_m = s$  и  $k_1 + l_1 = r_1$ ,  $k_2 + l_2 = r_2$ , ...,  $k_m + l_m = r_m$ . Мы предоставляем читателю подробно провести соответствующие выкладки.

Разумеется, формулы (46) – (48) можно было бы получить и не пользуясь производящей функцией (45). Но в этом случае пришлось бы проводить непростые рассуждения. Применение же производящей функции позволяет получить эти тождества автоматически, выполняя лишь несложные алгебраические преобразования.

### Задачи

6. Найдите коэффициент, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении:

- а)  $(1 + x^2 - x^3)^9$  при  $x^8$ ; б)  $(1 + x - x^3)^9$  при  $x^7$ ;
- в)  $(1 + 2x - x^3)^9$  при  $x^7$ .

7. Найдите коэффициенты при  $x^{17}$  и  $x^{18}$  после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении  $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ .

8. В каком из выражений  $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$  или  $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$  будет больше коэффициент при  $x^{17}$  после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

9. Найдите число различных одночленов, получающихся после возведения в степень выражения  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^3$  и приведения подобных членов.

10. Найдите наибольший коэффициент в разложениях

- а)  $(a + b + c)^{10}$ ; б)  $(a + b + c + d)^{14}$ .

## 118. Производящие функции и разбиения чисел

В главе IV мы решали различные комбинаторные задачи на разбиение чисел. Эти задачи часто легко решаются с помощью производящих функций. Обозначим через  $a_n$  число способов разбиения для параметра задачи, равного  $n$ , и составим ряд  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ . Во многих задачах удается составить алгебраическое выражение  $f(x)$  такое, что после раскрытия скобок в этом выражении слагаемое  $x^n$  повторяется ровно  $a_n$  раз. Тогда  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  и, значит,  $f(x)$  — производящая функция для последовательности  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Пусть, например, рассматривается уплата некоторой суммы различными монетами — разбиение числа  $N$  на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел  $n_1, \dots, n_k$ . При этом в сумме слагаемые не должны повторяться, а порядок слагаемых не играет роли.

Для нахождения числа способов уплаты образуем выражение  $(1 + x^{n_1})(1 + x^{n_2}) \dots (1 + x^{n_k})$ . При раскрытии скобок получатся слагаемые вида  $x^{n_i}x^{n_j} \dots x^{n_s}$ , где  $n_i, n_j, \dots, n_s$  — некоторые из чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Поэтому  $x^N$  встретится в сумме столько раз, сколькими способами можно разбить  $N$  на слагаемые требуемым образом.

Например, если надо узнать, сколькими способами можно уплатить 78 копеек монетами по 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек, беря не более одной монеты каждого достоинства, то надо составить выражение

$$(1+x^1)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^{10})(1+x^{15})(1+x^{20})(1+x^{50}),$$

раскрыть скобки и найти коэффициент при  $x^{78}$ . Этот коэффициент будет как раз таким, сколько есть способов представить  $x^{78}$  в виде произведения допустимых степеней  $x$  ( $x^3x^5x^{20}x^{50}$ ,  $x^1x^2x^5x^{20}x^{50}$  и т. п.).

А теперь решим с помощью производящих функций более сложную задачу.

*Сколькими способами можно уплатить 29 копеек монетами по 3 и 5 копеек?*

В этой задаче надо найти число способов разбить число 29 на слагаемые, равные 3 и 5, причем порядок слагаемых не имеет значения и их количество не ограничено. Иными

$$\begin{array}{r}
 \frac{-1}{1-x^3-x^5} + x^8 \quad | \frac{1-x^3-x^5+x^8}{1+x^3+x^5+x^6+x^8+...} \\
 -x^3+x^5 \quad -x^8 \\
 \hline
 x^3 \quad -x^6-x^8 \quad +x^{11} \\
 -x^5+x^6 \\
 \hline
 -x^8 \quad -x^{10} \quad -x^{11} \quad +x^{13} \\
 -x^6+x^8 \quad +x^{10}-x^{11}-x^{13} \\
 \hline
 x^6 \quad -x^9 \quad -x^{11} \quad +x^{14} \\
 \hline
 x^8+x^9+x^{10} \quad -x^{13}-x^{14} \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

Рис. 64

словами, нам надо найти число неотрицательных решений уравнения  $3m + 5n = 29$ . Для этого составим выражение

$$f(x) = (1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3m} + \dots) (1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{5n} + \dots). \quad (49)$$

Показатели при  $x$  в первой скобке пробегают все неотрицательные числа, кратные 3, а во второй скобке — все неотрицательные числа, кратные 5. Ясно, что после раскрытия скобок  $x$  войдет с коэффициентом, равным числу решений уравнения  $3m + 5n = 29$ . В частности, коэффициент при  $x^{29}$  даст ответ на нашу задачу.

Вместо раскрытия скобок можно поступить так. Воспользуемся формулой для бесконечной геометрической прогрессии. Тогда выражение (49) переписывается в виде

$$f(x) = \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{1-x^3-x^5+x^8}.$$

А теперь разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов (только будем располагать многочлены не по убывающим, а по возрастающим степеням  $x$ ). Начало этого деления показано на рис. 64. Продолжая деление, найдем искомый коэффициент при  $x^{29}$ .

Общая задача здесь такова.

*Найти, сколькими способами можно разбить число  $N$  на слагаемые, равные соответственно  $a, b, \dots, m$ , причем порядок слагаемых не учитывается.*

В этом случае производящая функция имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1 + x^a + x^{2a} + \dots + x^{ka} + \dots) (1 + x^b + x^{2b} + \dots + x^{sb} + \dots) \times \dots \times \\
 &\times (1 + x^m + x^{2m} + \dots + x^{qm} + \dots) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\dots(1-x^m)}.
 \end{aligned}$$

Например, в задаче о размене гривенника (п. 64) надо составить производящую функцию

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}.$$

Перемножая выражения, стоящие в знаменателе дроби, получаем  $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}$ . Выполняя деление, находим частное

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 8x^6 + 10x^7 + \\ + 13x^8 + 16x^9 + 20x^{10} + 24x^{11} + 29x^{12} + 34x^{13} + 40x^{14} + \dots \end{aligned}$$

Коэффициент при  $x^{10}$  дает ответ на поставленный вопрос.

Разумеется, выполнять деление обычным образом здесь довольно сложно. Вместо этого можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Запишем результат деления в виде бесконечного ряда с неизвестными пока коэффициентами

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$$

Умножим обе части равенства на знаменатель и приравняем коэффициенты при  $x^n$  справа и слева:

$$n=0: 1 = A_0$$

$$n \geq 1: 0 = A_n - A_{n-1} - A_{n-2} + A_{n-4} + A_{n-7} - A_{n-9} - A_{n-10} + A_{n-11}.$$

Начальные условия имеют вид:  $A_k = 0$  при  $k < 0$ ,  $A_0 = 1$ , а при  $n \geq 1$  коэффициенты  $A_n$  должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-4} - A_{n-7} + A_{n-9} + A_{n-10} - A_{n-11}.$$

По этим условиям легко найти (особенно на компьютере в виде электронной таблицы) по порядку все коэффициенты  $A_k$ : 1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 16, 20, 24, 29, 34, 40, 47, 54, 62, 71, 80, 91, 102, 114, ...

Рассмотрим еще проблему абитуриента из п. 61. В ней надо было найти, сколькими способами можно представить числа от 17 до 20 в виде суммы четырех слагаемых, принимающих значения 3, 4, 5, причем порядок слагаемых имел значение. Для этой задачи в качестве производящей функции надо взять  $f(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4$  — при раскрытии скобок каждое слагаемое  $x^N$  встретится столько раз, сколькими способами  $N$  разбивается

на сумму четырех слагаемых, принимающих значения 3, 4, 5. При этом встречаются и члены, получаемые друг из друга перестановкой слагаемых в показателе (например,  $x^3x^4x^5x^3$  и  $x^4x^3x^3x^5$ ). Раскрытие скобок в выражении  $(x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^{12}(1 + x + x^2)^4$  можно произвести, например, по полиномиальной формуле (45). Но проще иной способ.

Мы заметим, что  $1 + x + x^2 = \frac{1 - x^3}{1 - x}$ . Поэтому  $f(x)$  можно записать в виде

$$f(x) = \frac{x^{12}(1 - x^3)^4}{(1 - x)^4} = x^{12}(1 - x^3)^4(1 - x)^{-4}.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1 - x^3)^4 = 1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12},$$

а по формуле ряда Ньютона (п. 112, формула (25))

$$(1 - x)^{-4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots + C_{k+3}^k x^k + \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{12}(1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}) \times \\ &\quad \times (1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + 84x^6 + 120x^7 + 165x^8 + \dots). \end{aligned}$$

Перемножая почленно эти разложения (в скобках нам нужны лишь члены до  $x^8$ ), найдем интересующие нас члены:  $\dots + 16x^{17} + 10x^{18} + 4x^{19} + x^{20} + \dots$  Значит, 17 баллов можно набрать 16 способами, 18 — 10 способами, 19 — четырьмя и все 20 — единственным способом.

Вообще, если надо найти, сколькими способами можно разбить число  $N$  на  $k$  слагаемых, принимающих значения  $n_1, \dots, n_s$ , причем порядок слагаемых учитывается, то, чтобы в показателе степени получились такие слагаемые, надо возводить в степень сумму  $x^{n_1} + x^{n_2} + \dots + x^{n_s}$ , а так как число слагаемых равно  $k$ , то и возводить надо в  $k$ -ю степень. Поэтому производящая функция имеет вид

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \dots + x^{n_s})^k.$$

Задача упрощается, если числа  $n_1, \dots, n_s$  образуют арифметическую прогрессию — в этом случае  $x^{n_1}, \dots, x^{n_s}$  образуют геометрическую прогрессию, а это позволяет упростить выражение для  $f(x)$ .

Найдем, например, сколькими способами можно получить 25 очков, бросая 7 костей. Здесь надо образовать производящую функцию

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии эту функцию можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{x^7(1 - x^6)^7}{(1 - x)^7} = x^7(1 - x^6)^7(1 - x)^{-7}.$$

Теперь разложим  $(1 - x^6)^7$  по формуле бинома Ньютона, а  $(1 - x)^{-7}$  — по формуле ряда Ньютона. Мы получим

$$f(x) = x^7(1 - 7x^6 + 21x^{12} - 35x^{18} + 35x^{24} - 21x^{30} + 7x^{36} - x^{42}) \times \\ \times (1 + 7x + 28x^2 + 84x^3 + 210x^4 + 462x^5 + \dots).$$

Из этого выражения в виде суммы 4 слагаемых находим коэффициент при  $x^{25}$ . Он и дает ответ на поставленную задачу.

Ранее (в п. 57) мы рассмотрели задачу о нахождении числа способов представить число  $N$  в виде суммы  $n$  слагаемых, каждое из которых равно одному из чисел 0, 1, 2, ...,  $m - 1$ , и обозначили это число способов  $C_m(n, N)$ . Понятно, что производящая функция для него имеет вид

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^n = \\ = C_m(n, 0) + C_m(n, 1)x + C_m(n, 2)x^2 + \dots + C_m(n, N)x^N + \dots$$

И здесь производящую функцию для чисел  $C_m(n, N)$  можно записать по-другому, если воспользоваться формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^n = \frac{(1 - x^m)^n}{(1 - x)^n} = (1 - x^m)^n(1 - x)^{-n}.$$

Разлагая  $(1 - x^m)^n$  и  $(1 - x)^{-n}$  по формулам бинома и ряда Ньютона, получаем

$$f(x) = \left[ 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \dots + (-1)^k C_n^k x^{km} + \dots + (-1)^n C_n^n x^{nm} \right] \times \\ \times \left( 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \dots + C_{n+p-1}^p x^p + \dots \right),$$

откуда, приравнивая показатели при  $x^N$ , получаем

$$C_m(n, N) = \sum_k (-1)^k C_n^k C_{n+N-km-1}^{N-km} = \sum_k (-1)^k C_n^k C_{n+N-km-1}^{n-1} \quad (50)$$

(суммирование ведется для  $k = 0, 1, 2, \dots$  до тех пор, пока выполняется неравенство  $km \leq N$ ).

В п. 59 мы рассматривали задачу о количестве счастливых билетов — у которых сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Если заменить последние три цифры билета их дополнениями до 9, то получится билет, сумма цифр которого равна 27, поэтому число таких билетов равно  $C_{10}(6, 27)$ . Теперь мы можем найти это число по формуле (50):

$$C_{10}(6, 27) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k C_6^k C_{32-10k}^5 = C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^1 C_{12}^5 = 55\ 252.$$

### Задачи

11. Дано уравнение  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = m$ . Найдите число его целых решений, удовлетворяющих неравенствам  $0 \leq l \leq x_k \leq n$  ( $m, p, l, n$  — заданные целые числа).

12. а) Лента длиной 30 см закрашивается в следующем порядке: красный, белый, синий; красный, белый, синий и т. д., причем первым идет красный цвет, а последним — синий. Каждый цвет занимает всего 10 см, длины полос не менее 2 см, причем все эти длины — целые числа. Сколько возможно способов такой раскраски?

б) Сколько существует способов такой раскраски, если последним цветом может быть любой?

в) Докажите, что если длина каждой полосы не менее 3 см, то в 153 случаях последним будет синий цвет, в 71 — белый и в 81 — красный.

13. Имеется набор состава  $1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdots k^{r_k}$  (т. е. состоящий из  $r_1$  различных одиночных предметов,  $r_2$  пар различных предметов,  $r_3$  троек и т. д.). Докажите, что производящей функцией для числа способов выбрать  $n$  предметов из этого набора является

$$(1 - t^2)^{r_1} (1 - t^3)^{r_2} \cdots (1 - t^{k+1})^{r_k} (1 - t)^{-r_1 - r_2 - \cdots - r_k}.$$

Напишите производящую функцию для числа способов выложить в ряд  $n$  предметов из набора состава  $1^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdots k^{r_k}$ .

14. Имеется 7 экземпляров одной книги, 8 — другой и 9 — третьей. Сколькими способами можно разделить их между 2 людьми так, чтобы каждый получил 12 книг?

15. Обозначим через  $\Pi_n^k$  число способов разделить  $n$  различных предметов на  $k$  групп. Докажите, что  $1 - \Pi_n^2 + 2! \cdot \Pi_n^3 - 3! \cdot \Pi_n^4 + \dots = 0$  при  $n > 1$ .

16. Пусть  $p \geq q \geq r$  — целые числа, такие, что  $p < q + r$  и  $p + q + r = 2s$ . Имеется  $p$  черных,  $q$  белых и  $r$  красных шаров. Докажите, что есть  $s^2 + s + 1 - \frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}$  способов раздела этих шаров между двумя лицами, при которых каждый получает  $s$  шаров. Как изменится ответ, если  $q + r < p$ ?

17. Найдите количество и частоту появления счастливых 10-значных талонов на проезд.

### 119. Производящие функции и наборы гирь

В магазинах применяют гири разного веса: 1, 2, 3, 5, 10 кг и т. д. Такой набор гирь сложился исторически и менять его было бы, вероятно, нецелесообразно. Но с точки зрения комбинаторики более удачным был бы иной набор гирь: 1, 2, 4, 8 кг. Он позволил бы отвешивать любое целое число килограммов от 1 до 15 кг. При этом каждый вес получался бы единственным образом:

$$\begin{array}{lll} 1 = 1, & 4 = 4, & 8 = 8, \\ 2 = 2, & 5 = 4 + 1, & 9 = 8 + 1, \\ 3 = 2 + 1, & 6 = 4 + 2, & 10 = 8 + 2, \\ & 7 = 4 + 2 + 1, & 11 = 8 + 2 + 1, \\ & & 12 = 8 + 4, \\ & & 13 = 8 + 4 + 1, \\ & & 14 = 8 + 4 + 2, \\ & & 15 = 8 + 4 + 2 + 1. \end{array}$$

Вообще, имея по одной гире весом в 1, 2, 4, ...,  $2^n$  кг, можно единственным образом получить любой вес от 1 до  $(2^n - 1)$  кг, кладя гири на одну чашку весов. Это утверждение можно было бы доказать, использовав двоичную систему счисления. Но оно очень просто доказывается и с помощью производящих функций. Если в выражении

$$f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \dots \left(1 + x^{2^n}\right)$$

раскрыть скобки, то коэффициентом при  $x^N$  будет число, показывающее, сколькими способами можно представить  $N$  в виде суммы чисел 1, 2, 4, ...,  $2^n$ , если каждое из них берется не более одного раза. Вместо того чтобы раскрывать скобки, умножим  $f(x)$  на  $1 - x$  и вспомним, что  $(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$ ,  $(1 - x^2)(1 + x^2) = 1 - x^4$  и т. д. Поэтому, свернув все произведения, мы получим в конце концов  $(1 - x)f(x) = 1 - x^{2^{n+1}}$  и потому  $f(x) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$ . Но правая часть этой формулы не что иное, как выражение для суммы геометрической прогрессии со знаменателем  $x$  и первым членом 1, состоящей из  $2^{n+1}$  членов.

Поэтому

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{2^{n+1}-1}.$$

Полученное равенство и показывает, что любое натуральное число от 1 до  $2^{n+1} - 1$  можно единственным образом представить в виде суммы чисел 1, 2, 4, 8, ...,  $2^n$ , беря их не более одного раза.

С алгебраической точки зрения проведенное доказательство основывалось на том, что многочлен  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k$  при  $k = 2^{n+1} - 1$  допускает разложение на множители  $1 + x$ ,  $1 + x^2$ ,  $1 + x^4$ , ...,  $1 + x^{2^n}$ . Если при каком-нибудь другом значении  $k$  удастся разложить этот многочлен на множители, то тем самым мы найдем другие наборы гирь с аналогичным свойством — любой вес от 1 до  $k$  может быть получен единственным образом путем выбора нескольких гирь из этого набора (при этом, если в набор входят гири одного и того же веса, они считаются неразличимыми друг от друга, и наборы, отличающиеся лишь тем, какая именно гиря данного веса взята, отождествляются).

Из всех наборов со свойством единственности двоичный набор 1, 2, 4, ...,  $2^n$  состоит из наименьшего числа гирь. Но если не требовать, чтобы все гири лежали на одной чашке весов, то количество гирь можно уменьшить. В этом случае достаточно «троичный» набор: 1, 3, 9, 27, ...,  $3^n$  кг.

С помощью такого набора можно, используя обе чашки весов, получить любой вес от 1 кг до  $\frac{3^{n+1}-1}{2}$  кг. Иными словами, любое целое число от  $-\frac{3^{n+1}-1}{2}$  до  $\frac{3^{n+1}-1}{2}$  можно представить единственным образом в виде суммы некоторых чисел из набора  $\pm 1, \pm 3, \dots, \pm 3^n$ , беря каждое число не более одного раза. Знаки «+» и «-» соответствуют тому, что гири можно кладь как на чашку, противоположную взвешиваемому товару, так и на ту же, где находится товар. Чтобы доказать это утверждение, достаточно взять выражение, в которое входят не только положительные, но и отрицательные степени  $x$ :

$$f(x) = (x^{-1} + 1 + x)(x^{-3} + 1 + x^3) \dots (x^{-3^n} + 1 + x^{3^n})$$

и умножить  $f(x)$  на  $1 - x$ .

## Задачи

**18.** Докажите, что с помощью стандартного набора разновесок: 1, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50, 100, 200, 200, 500 (мг) и т. д. можно составить любой вес, выраженный целым числом миллиграммов.

**19.** Имеется кусок цепи из 60 звеньев. Масса каждого звена 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из раскованных звеньев и оставшихся кусков цепи можно было набрать любую массу, выраженную целым числом от 1 до 60 г?

Решите ту же задачу, если надо с помощью тех же элементов взвесить на двухчашечных весах груз от 1 до 60 г.

**20.** Данна цепь длиной в  $(n+1)2^{n+1} - 1$  звеньев, масса одного звена равна 1 г. Докажите, что можно так расковать  $n$  звеньев этой цепи, что из полученных частей можно будет набрать любую массу от 1 до  $(n+1)2^{n+1} - 1$  г.

**21.** Имеется несколько гирь с весами 1, 2, ...,  $n$  кг. При каких значениях  $n$  их можно разложить на три равные по весу кучки?

**22.** Докажите, что при  $m > n$

$$\sum_{x=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{m(m-1)\dots(m-x+1)} = \frac{m+1}{m-n+1}, \quad \sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

**23.** Докажите, что  $\frac{\frac{m}{1} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}}{1 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m}} =$

**24.** Докажите, что  $\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^x} = \frac{2}{n+1}$ .

**25.** Докажите, что  $\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^x} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}$ .

**26.** Докажите, что  $\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n+q}^x} = \frac{2(n+q+1)}{(q+1)(q+2)(q+3)}$ .

**27.** Докажите, что  $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$ .

**28.** Рассматривая выражение

$$[(1+x)^{p+1} \pm (1-x)^{p+1}] [(1+x)^p \pm (1-x)^p]$$

при всех комбинациях знаков, выведите формулы

$$2 \sum_s C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2 \sum_s C_{p+1}^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+1} - (-1)^m C_p^m,$$

$$2 \sum_s C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s} = C_{2p+1}^{2m+1} + (-1)^m C_p^m,$$

$$2 \sum_s C_{p+1}^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1},$$

$$2 \sum_s C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s}^p = C_{2p+2m}^{2p} + C_{p+m}^p,$$

$$2 \sum_s C_{p+2s-1}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^p = C_{2p+2m+1}^{2p} + C_{p+m}^p,$$

$$2 \sum_s C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^p = C_{2p+2m+1}^{2p} - C_{p+m}^p,$$

$$2 \sum_s C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s+1}^p = C_{2p+2m+2}^{2p} - C_{p+m+1}^p$$

(каждая сумма распространена на целые неотрицательные значения  $s$ , для которых определена левая часть равенства).

29. Рассмотрев бином  $\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ , докажите, что:

a)  $1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \dots = (-1)^n 2^n \cos \frac{2n\pi}{3}$ ;

б)  $C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - 27C_n^7 + \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3}} 2^{n+1} \sin \frac{2n\pi}{3}$ .

30. Пусть  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ . Рассмотрев бином  $(1+x)^n$  последовательно при  $x=1$ ,  $x=\varepsilon$ ,  $x=\varepsilon^2$  и  $x=i$ , докажите, что:

а)  $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$ ;

б)  $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right)$ ;

в)  $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos \frac{(n+2)\pi}{3} \right)$ ;

г)  $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left( 2^{n-1} + 2^2 \cos \frac{n\pi}{4} \right)$ .

31. а) Из тождества  $(1+x)^p (1+x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1}$  выведите, что  $\sum_s (-1)^s C_{k+s}^s C_p^{n-s} = C_{p-k-1}^n$  (здесь и далее сумма распространена на целые неотрицательные значения  $s$ , для которых определена левая часть равенства).

б) Из тождества  $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1} = (1-x)^{-m-q-2}$  выведите, что

$$\sum_s C_{p-s}^m C_{q-s}^q = C_{p+q+1}^{p-m}.$$

в) Из тождества  $(1+x)^n = (1-x^2)^n(1-x)^{-n}$  выведите, что

$$\sum_s (-1)^s C_{n+k-2s}^n C_{n+1}^s = \sum_s C_{n+1}^k.$$

г) Из тождества  $(1+x)^n(1-x^2)^{-n} = (1-x)^{-n}$  выведите, что

$$\sum_s C_n^{k-2s} C_{n+s-1}^s = C_{n+k-1}^k.$$

д) Из тождества  $(1-x^2)^{-p-1} = (1+x)^{-p-1}(1-x)^{-p-1}$  выведите, что

$$\sum_s (-1)^s C_{p+2k-s}^p C_{p+s}^p = C_{p+k}^k.$$

32. Из тождества  $(1-x)^{2k} \left[ 1 - \left( \frac{x}{1-x} \right)^2 \right]^k = (1-2x)^k$  для  $k=p$  и

$k=-p$  выведите, что  $\sum_s C_{p+s}^s C_{2p+m}^{2p+2s+1} = 2^{m-1} C_{m+p-1}^p$ .

33. Докажите, что  $\sum_s C_{p+s}^s C_{2p+m}^{2p+2s} = 2^{m-1} \frac{2p+m}{m} C_{m+p-1}^p$ .

34. Из тождества  $(1-x)^{2k} \left[ 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \right]^k = (1+x^2)^k$  для  $k=p$  и

$k=-p$  выведите формулы

$$\sum_s (-1)^s C_{p+s-1}^s C_{2m+2p+s}^{2m+1-s} 2^s = 0, \quad \sum_s (-1)^s C_{p+s-1}^s C_{2m+2p+s-1}^{2m-s} 2^s = (-1)^m C_{p+m-1}^m,$$

$$\sum_s (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m+1-s} 2^s = 0, \quad \sum_s (-1)^s C_p^s C_{2p-2s}^{2m-s} 2^s = C_p^m.$$

С их помощью докажите, что

$$\sum_s C_{2p+2m}^{2s} C_{p+m-s}^p = 2^{2m} (p+m) \frac{(p+2m-1)!}{p! (2m)!},$$

$$\sum_s C_{2p+2m+1}^{2s+1} C_{p+m-s}^p = 2^{2m} (2p+2m+1) \frac{(p+2m)!}{p! (2m+1)!},$$

$$\sum_s C_{2p+2m}^{2s-1} C_{p+m-s}^p = 2^{2m-1} C_{p+2m-1}^p, \quad \sum_s C_{2p+2m+1}^{2s} C_{p+m-s}^p = 2^{2m} C_{p+2m}^p.$$

35. Рассматривая формулы

$$[(1+x)^p \pm (1-x)^p]^2 = (1+x)^{2p} + (1-x)^{2p} \pm 2(1-x^2)^p,$$

$$[(1+x)^p + (1-x)^p][(1+x)^p - (1-x)^p] = (1+x)^{2p} - (1-x)^{2p}$$

при положительных и отрицательных значениях  $p$ , докажите, что

$$2 \sum_s C_p^{2s} C_p^{2m-2s} = C_{2p}^{2m} + (-1)^m C_p^m, \quad 2 \sum_s C_p^{2s} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+1},$$

$$2 \sum_s C_p^{2s+1} C_p^{2m-2s+1} = C_{2p}^{2m+2} + (-1)^m C_p^{m+1},$$

$$2 \sum_s C_{p+2s}^p C_{p+2m-2s}^p = C_{2p+2m+1}^{2p+1} + C_{p+m}^p,$$

$$2 \sum_s C_{p+2s}^{p-1} C_{p+2m-2s}^{p-1} = C_{2p+2m+1}^{2p-1} - C_{p+m}^p, \quad 2 \sum_s C_{p+2s}^p C_{p+2m-2s+1}^p = C_{2p+2m+2}^{2p+1}.$$

36. Из соотношения  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^m (1-x)^{-n-1} = \frac{(-1)^m}{x^m} (1-x)^{m-n-1}$  выведи-

те, что  $\sum_s (-1)^s C_m^{m-h+s} C_{n+s}^h = C_{m-n-1}^h$ .

37. Докажите, что  $\sum_s (-1)^s C_m^s C_s^n = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ (-1)^n, & \text{если } m = n. \end{cases}$

38. Из равенства  $(1-x)^{-n} (1-x^h)^n = (1+x+\dots+x^{h-1})^n$  выведите,

что  $\sum_s (-1)^s C_{m-sh}^{n-1} C_n^s = \begin{cases} 0, & \text{если } m > hn - 1, \\ 1, & \text{если } m = hn - 1. \end{cases}$

39. Из тождества  $(1-x)^{-n-1} (1-x^h)^n = \frac{(1+x+\dots+x^{h-1})^n}{1-x}$  выведи-

те, что  $\sum_s (-1)^s C_{m-sh}^n C_n^s = h^n$  при  $m \geq hn$ .

40. Из тождества  $(1+x)^k (1-x)^k = (1-x^2)^k$  при  $k = p$  и  $k = -p$  выведите, что

$$\sum_s (-1)^s C_p^{m-s} C_p^s = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_p^{\frac{m}{2}}, & \text{если } m \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } m \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$\sum_s (-1)^s C_{p+m-s}^p C_{p+s}^p = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_{p+\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}, & \text{если } m \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

41. Докажите, что  $\sum_s (-1)^s (C_m^s)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} C_m^{\frac{m}{2}}, & \text{если } m \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$

42. Обозначим выражение  $a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)$  через  $(a)_n$ .

Докажите, что  $(a+b)_n = \sum_{m=0}^n C_n^m (a+m)_{n-m} (b-m+1)_m$ .

## Глава IX

### КОМБИНАТОРИКА ОРБИТ

#### 120. Преобразования и орбиты

Мы уже говорили в п. 52, что существует 92 расположения восьми ферзей на шахматной доске, при которых ни один из них не может взять другого. Если найдено одно из таких расположений, то легко получить еще несколько расположений с тем же свойством — достаточно повернуть доску на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  или отразить ее в одной из диагоналей, либо в одной из линий, делящих доску пополам. При любом из этих преобразований ферзи, стоявшие на разных горизонталях, вертикалях и диагоналях, сохранят то же свойство.

Таким образом, множество всех 92 расположений ферзей распадается на классы эквивалентности, состоящие из расположений, которые переводятся друг в друга указанными преобразованиями. Эти классы эквивалентности по-другому называются *орбитами*. Вообще говоря, каждая орбита состоит из 8 расположений ферзей — ведь мы указали 7 преобразований, которые можно применить к заданному расположению, чтобы получить из него новые. Но иногда расположение оказывается устойчивым и переходит при некоторых преобразованиях само в себя. Тогда получится орбита из меньшего числа расположений. Проверка показывает, что 11 орбит состоят из 8 расположений ферзей, а одна орбита — из 4 расположений: при поворотах на  $180^\circ$  расположения, входящие в эту орбиту, переходят сами в себя.

Чтобы получить полный список расположений, достаточно указать по одному расположению в каждой орбите, или, как говорят, сделать *сечение орбит*. В качестве такого списка можно выбрать следующий:

72631485, 61528374, 58417263, 35841726,  
46152837, 57263148, 16837425, 57263184,  
48157263, 51468273, 42751863, 35281746

(здесь указаны номера горизонталей занятых полей в 1 – 8 вертикаллях).

Рассмотренная сейчас задача связана с общей задачей об орбитах в множестве относительно некоторой совокупности преобразований. *Преобразованием* множества  $M$  называется отображение, при котором каждому элементу  $x$  из  $M$  соответствует один и только один элемент  $y$  того же множества  $M$  — *образ элемента  $x$*  при этом преобразовании, причем любой элемент  $y$  из  $M$  является образом одного и только одного элемента. Образ элемента  $x$  при преобразовании  $f$  обозначают  $f(x)$ . Если  $G$  — некоторая совокупность преобразований

множества  $M$ , то орбитой элемента  $x$  относительно этой совокупности называют множество образов  $x$  при всех преобразованиях из  $G$ .

При некоторых условиях (мы их выясним ниже) все множество  $M$  распадается на орбиты своих элементов, и задача состоит в том, чтобы найти число таких орбит. Ответ, разумеется, зависит не только от множества  $M$ , но и от совокупности преобразований  $G$ .

## 121. Хоровод

*Шесть девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут организовать хоровод?*

Если бы они стояли на месте, то получилось бы  $6! = 720$  перестановок (надо указать на окружности 6 точек и поставить на каждую точку одну из танцующих). Но так как танцующие кружатся, то их начальное положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому разные начальные перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц, надо считать эквивалентными. Таким образом, множество  $M$  всех начальных расстановок танцующих распадается на классы эквивалентности, причем в один и тот же класс попадают расстановки, получающиеся друг из друга вращением по кругу. Очевидно, что каждый класс содержит по 6 расстановок — из данного расположения танцующих можно получить еще 5, сделав повороты на  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  и  $300^\circ$ . Итак, множество всех 720 расстановок распадается на классы, состоящие из 6 расстановок. Поэтому число различных классов равно  $720:6 = 120$  — это и есть число различных способов организовать хоровод.

Вообще, если рассматривать перестановки  $n$  предметов, расположенных не в ряд, а по кругу, и считать одинаковыми расположения, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок равно  $n! : n = (n - 1)!$ .

Тот же ответ можно получить иначе. Для этого остановим хоровод в тот момент, когда перед нами — самая симпатичная девушка. Остальные  $n - 1$  девушек можно переставлять как угодно — вот и получается  $P_{n-1} = (n - 1)!$  перестановок.

А теперь сосчитаем, сколько ожерелий можно составить из 6 различных бусин.

По аналогии с только что решенной задачей можно подумать, что число различных ожерелий равно  $(6 - 1)! = 5! = 120$ . Но ожерелье можно не только повернуть по кругу, но и перевернуть на другую сторону. Поэтому классы эквивалентности состоят уже не из 6, а из 12 расстановок бусин и число таких классов равно  $720 : 12 = 60$ .

Вообще если имеется  $n$  различных предметов, расположенных по кругу, причем два расположения, переводимые друг в друга вращением или переворачиванием круга, считаются эквивалентными, то число классов эквивалентности (орбит) равно  $(n - 1)! : 2$ .

Ответ 60 получится и для задачи о хороводе, если мы будем различать хороводы лишь по тому, кто является соседями каждого танцующего. Этот пример показывает, что формулировки комбинаторных задач должны быть четкими — следует однозначно определять, какие варианты мы считаем различными, а какие — одинаковыми.

## 122. Раскраска куба

Имеется 6 различных красок: белая, черная, красная, желтая, зеленая и синяя. Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить ими куб в 6 цветов?

В этой задаче два способа раскраски куба считаются геометрически одинаковыми, если невозможно различить два раскрашенных куба после того, как их бросили в мешок и перемешали там. Иными словами, два способа раскраски геометрически одинаковы, если они могут быть переведены друг в друга движением куба.

Узнаем сначала, сколько способов раскраски куба геометрически неотличимы от данного. Пусть куб раскрашен каким-то образом. Грань, окрашенную в белый цвет, можно или оставить на месте, или перевести в любую из остальных 5 граней. Всего получается выбор из 6 возможностей. Если этот выбор уже произведен, то существуют 4 самосовмещения куба, при которых белая грань сохраняет выбранное положение: куб можно вращать на углы  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ , сохраняя белую грань на месте. По правилу произведения получаем, что каждый класс геометрически одинаковых раскрасок куба насчитывает  $6 \cdot 4 = 24$  способа раскраски.

А так как общее число способов покрасить 6 граней куба в 6 цветов равно  $6! = 720$ , то число геометрически различных способов равно  $720 : 24 = 30$ . Итак, куб можно раскрасить 30 геометрически различными способами.

## 123. Черно-белый квадрат

Во всех трех решенных в этой главе задачах: о хороводе, об ожерелье и о раскраске куба речь шла о некоторых множествах, преобразованиях этих множеств и орбитах относительно этих преобразований. В задаче о хороводе  $M$  было множеством различных расстановок танцующих по кругу. Преобразованиями данной расстановки являлись ее вращения, а орбитами — совокупности перестановок, получаемых из данной с помощью вращений. В задаче об ожерелье к поворотам присоединялось

переворачивание ожерелья, благодаря чему произошло слияние пар орбит (вообще чем больше мы берем преобразований, тем больше становится элементов в орбитах). А в задаче о раскраске куба элементами множества  $M$  были различные способы раскраски, а преобразованиями — вращения куба, переводившие один способ раскраски в другой.

Во всех этих примерах была одна общая черта — в каждом из них орбиты состояли из одного и того же числа элементов (6 в первом примере, 12 во втором и 24 в третьем). Так бывает не всегда. При расстановке ферзей оказалось, что 11 орбит содержат по 8 расстановок, а одна — лишь 4 расстановки. Это было связано с добавочной симметрией последней расстановки — она переходила сама в себя при центральной симметрии.

Чтобы лучше разобраться в ситуации, рассмотрим еще один пример, а именно, найдем, сколькими геометрически различными способами можно раскрасить вершины квадрата в белый и черный цвета. При этом два способа считаются геометрически одинаковыми, если они могут быть получены друг из друга вращениями квадрата вокруг центра.

Ясно, что геометрически одинаковые способы раскраски имеют одинаковое количество белых (а тогда и черных) вершин. Случай, когда все вершины белые, совсем прост — есть лишь один способ раскраски. Почти столь же прост случай, когда одна из вершин черная, а три — белые. Здесь есть 4 способа раскраски, но все они геометрически одинаковы (рис. 65). Еще два способа раскраски получаем, если покрасим все вершины в черный цвет, или 3 вершины в черный, а одну в белый.

Нам осталось разобрать случай, когда две вершины белые, а две — черные. Общее число способов такой раскраски равно  $C_4^2 = 6$  (рис. 66). Они распадаются на две группы — 4 способа, при которых одноцветные вершины находятся на одной стороне квадрата, и 2 способа, при которых такие вершины являются концами диагонали. Легко видеть, что как первые 4 способа, так и вторые 2 способа раскраски геометрически эквивалентны, а потому имеем еще два класса эквивалентности.

Всего получилось 6 геометрически различных способов раскраски квадрата.

Как и в случае расстановки ферзей, причина, по которой один способ раскраски дал вдвое меньше элементов орбиты, чем другой, заключается в его симметричности. Если покрасить

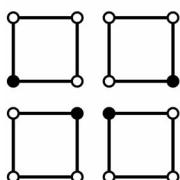


Рис. 65

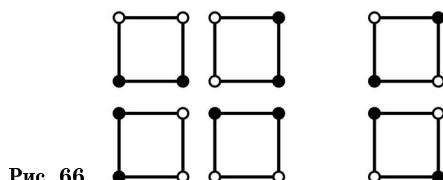


Рис. 66

в белый цвет две соседние вершины, то все 4 вращения квадрата вокруг центра дают новые способы раскраски. Если же покрасить в белый цвет противоположные вершины квадрата, то при вращении на  $180^\circ$  этот способ раскраски переходит сам в себя.

## 124. Орбиты и группы преобразований

Ключом, позволяющим математику решать самые различные проблемы, вскрывая их общие черты и устранивая все лишнее и случайное, является метод построения математических моделей. Чтобы построить математическую модель, которая годилась бы во всех рассмотренных выше задачах, попробуем сначала выяснить, какой должна быть совокупность  $G$  преобразований множества  $M$  для того, чтобы оно распалось на непересекающиеся орбиты. Для этого введем для элементов множества  $M$  такое взаимное отношение: «элемент  $y$  может быть получен из элемента  $x$  с помощью преобразования из множества  $G$ ». Мы уже знаем (из п. 4.7), что если это отношение окажется рефлексивным, симметричным и транзитивным, то оно будет отношением эквивалентности, а тогда все множество  $M$  распадется на классы эквивалентности по этому отношению. Это и будет искомым разбиением на орбиты.

*Рефлексивность* введенного отношения означает попросту, что каждый элемент  $x$  из  $M$  должен получаться сам из себя при некотором преобразовании, принадлежащем совокупности  $G$ . Это проще всего обеспечить, потребовав, чтобы  $G$  содержало  *тождественное преобразование*, обозначаемое обычно буквой  $e$ , т. е. преобразование, при котором все элементы из  $M$  остаются на месте.

*Симметричность* того же отношения означает, что если элемент  $y$  получается из элемента  $x$  каким-то преобразованием из  $G$ , то  $x$ , в свою очередь, должен получаться из  $y$  с помощью, быть может, иного преобразования из  $G$ . Добиться этого тоже несложно. Достаточно потребовать, чтобы вместе с каждым преобразованием  $f$  совокупность  $G$  содержала  *обратное преобразование*   $f^{-1}$ , которое определяется так: если  $f$  переводит  $x$  в  $y$ , то  $f^{-1}$  переводит  $y$  обратно в  $x$ .

Теперь осталось обеспечить *транзитивность* рассматриваемого отношения. Она означает, что если в  $G$  есть преобразование  $f$ , переводящее какой-то элемент  $x$  в  $y$ , и преобразование  $g$ , переводящее  $y$  в  $z$ , то в  $G$  должно быть и преобразование, переводящее  $x$  непосредственно в  $z$ . Для этого достаточно, чтобы  $G$  вместе с  $f$  и  $g$  содержало их *композицию*, т. е. преобразование  $h = g \circ f$ , определяемое так: для всех  $x$  из  $M$  имеем  $h(x) = g(f(x))$ .

Итак, для того чтобы совокупность преобразований  $G$  множества  $M$  определяла разбиение этого множества на орбиты, достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:

- а)  $G$  содержит тождественное преобразование  $e$ ;
- б) вместе с каждым преобразованием  $f$  совокупность  $G$  содержит обратное преобразование  $f^{-1}$ ;
- в) вместе с любыми двумя преобразованиями  $f$  и  $g$  совокупность  $G$  содержит их композицию  $g \circ f$ .

В математике принято называть совокупность преобразований, обладающую указанными тремя свойствами, *группой преобразований множества  $M$* . Итак, в дальнейшем мы будем рассматривать не просто любые совокупности преобразований множества  $M$ , а лишь группы преобразований, т. е. требовать выполнения свойств а), б) и в). Тогда можно быть уверенным, что  $M$  распадается на непересекающиеся орбиты относительно этой группы.

## 125. Неподвижные элементы

Итак, первый шаг сделан — построена математическая модель всех рассматривавшихся выше задач: имеется множество  $M$  и группа  $G$  преобразований этого множества. Требуется найти число орбит в  $M$  при действии группы  $G$ . Эта модель охватывает и многие задачи, о которых рассказывалось ранее, в частности, подсчет числа перестановок с повторениями (в этом случае  $M$  состоит из всех перестановок  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  элементов  $k$  цветов, а группа  $G$  — из преобразований, сводящихся к взаимному перемещению одноцветных элементов).

Если  $g$  — какое-то преобразование множества  $M$ , то может случиться, что некоторые элементы этого множества остаются при этом преобразовании неподвижными. Например, если  $M$  — множество граней куба, а  $g$  — вращение куба на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  или  $270^\circ$ , когда куб неизменно стоит на грани  $a$ , то сама грань  $a$  и противоположная ей грань  $b$  переходят сами в себя. Мы будем обозначать через  $\psi(g)$  число элементов из  $M$ , остающихся неподвижными при преобразовании  $g$ , а через  $\psi(G)$  сумму  $\psi(g)$  для всех  $g$  из  $G$ .

В рассмотренном случае  $\psi(g) = 2$  (в себя перешли две грани). Для тождественного преобразования куба имеем  $\psi(e) = 6$  (все 6 граней переходят в себя), а для вращения  $r$  куба вокруг диагонали на  $120^\circ$  или  $240^\circ$  имеем  $\psi(r) = 0$  (ни одна грань не перешла в себя). Имеем  $\psi(r) = 0$  и для вращения куба вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер. Общее число неподвижных элементов для всех элементов группы  $G$  вращений куба легко подсчитать:  $\psi(G) = 6 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

(каждая из 3 пар противоположных граней остается на месте при трех вращениях, отличные от тождественного). Но тому же числу 24 равно и количество элементов в группе. Нет ли здесь общей закономерности: общее число  $\psi(G)$  неподвижных элементов для всех элементов группы  $G$  преобразований множества  $M$  равно числу  $n(G)$  элементов этой группы?

Сделаем контрольный эксперимент, взяв не все вращения куба, а поставив куб на одну грань и вращая его на углы  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ , сохраняя нижнюю грань на месте; в роли  $M$  оставим множество, состоящее из 6 граней куба. Эти 4 вращения тоже образуют группу. Мы уже знаем, что  $\psi(e) = 6$ , а для остальных 3 элементов имеем  $\psi(g) = 2$ . Поэтому общее число неподвижных элементов равно  $\psi(G) = 6 + 3 \cdot 2 = 12$ , в то время как  $n(G) = 4$ .

Эксперимент показал, что дело обстоит несколько сложнее, чем мы предположили — в данном случае число неподвижных точек оказалось втрое больше, чем число элементов группы. Простое наблюдение вскрывает роль числа 3 — при вращениях на одной грани все множество граней распадается именно на 3 орбиты — 2 орбиты состоят из одной грани каждая (это верхняя и нижняя грани куба, они переходят при всех вращениях сами в себя), а одна орбита — из 4 боковых граней, которые переходят при всех вращениях друг в друга.

Теперь можно уточнить гипотезу: если разделить сумму  $\psi(G)$  чисел неподвижных точек для всех элементов группы преобразований  $G$  множества  $M$  на число  $n(G)$  элементов группы, то получится число  $O(M)$  орбит:

$$O(M) = \frac{\psi(G)}{n(G)}. \quad (1)$$

Равенство (1) не противоречит первому примеру о вращении куба — в этом примере можно было перевести вращением любую грань в любую другую и потому число орбит равнялось 1; тогда  $\psi(G) = n(G)$  (в примере  $\psi(G) = 24$ ,  $n(G) = 24$ ).

Равенство (1) верно для любой группы преобразований произвольного конечного множества  $M$ , это доказал английский математик Уильям Бернсайд. Особенно простой вид принимает формула Бернсаида, если ни одно из преобразований группы, кроме тождественного, не имеет неподвижных элементов. В этом случае  $\psi(G) = \psi(e) = n(M)$ , где  $n(M)$  — число элементов множества  $M$ , и  $O(M) = \frac{n(M)}{n(G)}$ .

Например, такой случай встретился нам при решении задачи о хороводе. Множество  $M$  состояло из 720 перестановок, а

группа  $G$  — из 6 вращений по кругу, переводивших одну перестановку танцующих в другую. Каждое вращение кроме тождественного преобразования меняло перестановки. Поэтому мы и получили ответ  $720 : 6 = 120$ .

### 126. Черно-белый куб

Найдем, сколькими геометрически различными способами можно покрасить вершины куба в белый и черный цвета так, чтобы получились 4 белые и 4 черные вершины.

В этом случае группа  $G$  состоит из тех же 24 вращений куба, а  $M$  из  $P(4, 4) = 70$  элементов — раскрасок вершин куба. Подсчет числа неподвижных элементов будем вести отдельно для каждого вида вращений.

Начнем с вращений на  $90^\circ$ , когда одна из граней куба остается на месте и только крутится. Легко видеть, что для каждого из таких вращений есть лишь два способа раскраски, остающихся неизменными — покрасить все вершины этой грани в белый цвет, а вершины противоположной ей грани в черный цвет, либо наоборот. Так как число пар противоположных граней равно 3, а вращения на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  отличаются лишь направлением, то получаем  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$  инвариантных (не меняющихся при таком преобразовании) способов раскраски.

При вращениях на  $180^\circ$  в тех же условиях остаются инвариантными те же два способа раскраски. Но кроме них появляются еще 4 инвариантных способа раскраски, при которых лишь противоположные вершины крутящихся граней окрашиваются одинаково — две пары в белый, а две пары в черный цвет. Всего для каждой пары граней получается 6 инвариантных способов раскраски, а для 3 пар — 18 способов.

Для каждого из 6 вращений на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер, находим по 6 способов инвариантной раскраски. Это дает еще 36 способов. Далее, рассмотрим вращения на  $120^\circ$  и  $240^\circ$  вокруг каждой из 4 диагоналей куба. Для каждого из таких вращений найдется по 4 инвариантных окраски (красим в разные цвета концы диагонали, а затем в разные цвета тройки вершин, соседних с этими концами). Так как у куба 4 диагонали, а вокруг каждой из них можно вращать и на  $120^\circ$ , и на  $240^\circ$ , то получаем еще  $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$  способа инвариантных раскрасок. Наконец, число инвариантных раскрасок для тождественного вращения равно общему числу способов раскраски 8 вершин так, чтобы 4 стали белыми, а 4 — черными, т. е.  $P(4, 4) = 70$ . Всего получаем

$$\psi(G) = 12 + 18 + 36 + 32 + 70 = 168 \quad (2)$$

способов.

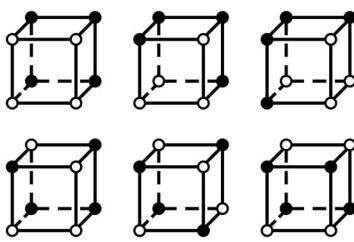


Рис. 67

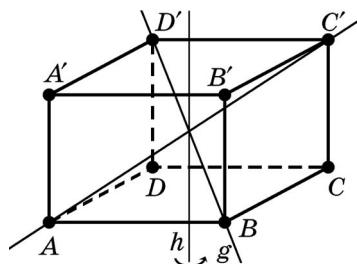


Рис. 68

А так как число элементов в группе равно 24, то число геометрически различных способов раскраски равно  $168:24 = 7$ . Эти 7 способов показаны на рис. 67.

## 127. Сопряжение и циклы

Решая задачу о черно-белом кубе, мы объединяли «аналогичные» вращения (например, все вращения вокруг диагоналей), подсчитывали число инвариантных раскрасок для одного вращения и умножали на число вращений, аналогичных данному. Уточним несколько расплывчатое понятие «аналогичных» вращений. Возьмем, например, вращения куба вокруг диагоналей  $AC'$  и  $BD'$  (рис. 68). Если сделать поворот  $h$  куба на  $90^\circ$  вокруг вертикальной оси, то диагональ  $AC'$  перейдет в диагональ  $BD'$ . Сделаем после этого вращение  $g$  куба на  $120^\circ$  вокруг диагонали  $BD'$  и обратный поворот  $h^{-1}$  на  $90^\circ$  вокруг вертикальной оси. После этих трех преобразований, которые можно записать в виде  $h^{-1} \circ g \circ h$ , диагональ  $AC'$  встанет на место, но весь куб повернется вокруг этой диагонали. Иными словами, применение вращений  $h$  и  $h^{-1}$  позволило нам превратить вращение вокруг диагонали  $BD'$  во вращение вокруг диагонали  $AC'$ . Говорят, что эти вращения *сопряжены* друг другу.

Вообще пусть  $G$  — группа преобразований множества  $M$ . Два преобразования  $g$  и  $g_1$  называются *сопряженными*, если найдется такое преобразование  $h \in G$ , что  $g_1 = h^{-1} \circ g \circ h$ . Несложно показать, что в этом случае  $\Psi(g) = \Psi(g_1)$ . Иными словами, функция  $\Psi(g)$  постоянна на всем классе сопряженных друг другу преобразований. Это позволяет переписать формулу Бернсайда в следующем виде:

$$O(M) = \frac{n_1 \psi_1 + n_2 \psi_2 + \dots + n_k \psi_k}{n(G)}, \quad (3)$$

где  $n_i$  — число элементов в  $i$ -м классе сопряженных элементов,  $\psi_i$  — значение  $\psi(g)$  на этом классе.

Например, группа вращений куба состоит из 5 классов сопряженных элементов. Одним из них является тождественное вращение, второй состоит из вращений на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  вокруг осей, перпендикулярных к граням, третий — из вращений на  $180^\circ$  вокруг тех же осей, четвертый — из вращений на  $120^\circ$  и  $240^\circ$  вокруг диагоналей, пятый — из вращений на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер. Именно поэтому в равенстве (2) было 5 слагаемых.

В некоторых случаях бывает удобно вложить группу  $G$  в более широкую группу преобразований  $G_1$  того же множества  $M$  и рассматривать сопряжения элементов в группе  $G_1$ .

В заключение остановимся на подсчете числа инвариантных раскрасок для заданного вращения. Мы делали это непосредственно. Но можно поступить и иначе. Возьмем какое-нибудь преобразование  $g$  множества  $M$  и элемент  $x$  этого множества. Применив несколько раз подряд преобразование  $g$ , получим элементы  $x, g(x), g(g(x)) = g^2(x), \dots, g^n(x), \dots$  из  $M$ . Если множество  $M$  конечно, то через несколько шагов цикл преобразований заведомо замкнется и мы получим, что, например,  $g^k(x) = x$ . Применив по очереди то же самое преобразование  $g$  к другим элементам множества  $M$ , получим разложение этого множества на *циклы*, состоящие из элементов, переходящих по очереди друг в друга при применении преобразования  $g$ . Например, если множество  $M$  состоит из 8 вершин куба, а  $g$  — вращение вокруг диагонали  $AC'$  (рис. 68), то имеем 4 цикла: два содержат по одному элементу и состоят из концов диагонали, а два — по 3 элемента, причем один состоит из вершин  $A', B, D$ , а второй — из вершин  $C, B', D'$ . В этом случае говорят, что вращение  $g$  имеет цикловую структуру  $1^2 \cdot 3^2$ . Вообще запись цикловой структуры  $1^{m_1} \cdot 2^{m_2} \cdots k^{m_k}$  означает, что имеется  $m_1$  циклов из одного элемента,  $m_2$  циклов из двух элементов, ...,  $m_k$  циклов из  $k$  элементов. Разумеется,

$$m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = n(M),$$

где  $n(M)$  — число элементов множества  $M$ . Сопряженные элементы группы имеют одинаковую цикловую структуру. Вместо

записи  $1^{m_1} \cdot 2^{m_2} \cdot \dots \cdot k^{m_k}$  пишут также одночлен  $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_k^{m_k}$ . Это позволяет записать цикловую структуру всей группы преобразований в виде многочлена  $\sum a_{m_1 m_2 \dots m_k} t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_k^{m_k}$ . Здесь через  $a_{m_1 m_2 \dots m_k}$  обозначено число элементов группы, для которых цикловая структура равна  $1^{m_1} \cdot 2^{m_2} \cdot \dots \cdot k^{m_k}$ . Например, если  $M$  — множество 8 вершин куба, а  $G$  — группа вращений куба, то этот многочлен имеет вид  $t_1^8 + 9t_2^4 + 6t_4^2 + 8t_1^2 t_3^2$ .

Слагаемое  $t_1^8$  отвечает тождественному преобразованию, для которого вершины распадаются на 8 циклов длины 1. Слагаемое  $9t_2^4$  отвечает вращениям на  $180^\circ$  (вокруг осей, перпендикулярных к граням, и вокруг осей, соединяющих середины противоположных ребер). Слагаемое  $6t_4^2$  получается из вращений на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  вокруг осей, перпендикулярных к граням, а  $8t_1^2 t_3^2$  — из вращений вокруг диагоналей на  $120^\circ$  и  $240^\circ$  (в последнем случае две точки стоят на месте, что дает два цикла длины 1, а 6 вершин разбиваются на 2 цикла длины 3).

Пусть задана цикловая структура  $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_k^{m_k}$  элемента  $g$  группы  $G$ , и пусть элементы множества  $M$  раскрашиваются в  $r$  различных красок. Ясно, что инвариантным относительно элемента  $g$  может быть лишь раскрашивание, при котором все элементы одного и того же цикла получают одинаковый цвет. Поэтому число различных раскрасок, инвариантных относительно  $g$ , равно числу распределений  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  циклов по  $r$  «ящикам». Такие задачи рассматривались в главе III. Если задано число элементов, получающих данную краску, то распределение должно быть таким, чтобы в каждом ящике лежало заданное число элементов. Например, если цикловая структура элемента  $g$  имеет вид  $t_1^2 t_2^4$ , и у нас есть две краски, причем в первую надо окрасить 6 элементов, а во вторую — 4 элемента, то возможны такие варианты: в первый цвет окрашиваются или 3 цикла длины 2 (это можно сделать  $C_4^3 = 4$  способами), или оба цикла длины 1 и два цикла длины 2 (это можно сделать  $C_4^2 = 6$  способами). Всего получаем 10 способов раскраски, инвариантных относительно  $G$ .

Опишем теперь общий план подсчета орбит для случая, когда задана группа преобразований  $G$  множества  $M$  и задано  $r$  красок, в которые могут окрашиваться элементы из  $M$ .

Орбиты берутся в множестве всех раскрасок  $M$  этими красками (преобразования группы  $G$  переводят один способ раскраски в другой).

1. Для всех элементов группы  $G$  находят цикловые индексы (сопряженные элементы имеют одинаковые цикловые индексы).

2. Для каждого вида цикловых индексов находят число способов окраски циклов, удовлетворяющих заданным условиям.

3. По формуле Бернсайда вычисляют количество орбит.

Живущий в США венгерский математик Пойя разработал алгебраический алгоритм для выполнения этих процессов. Ранее в иной форме этот же алгоритм нашел английский математик Редфилд.

### Задачи

1. Несколько человек садятся за круглый стол. Будем считать, что два способа рассадки совпадают, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколькими различными способами можно посадить четырех человек? А семь человек? Во скольких случаях два данных человека из семи оказываются соседями? Во скольких случаях данный человек (из семи) имеет двух данных соседей?

2. Сколькими способами можно переставить буквы слова «Юпитер» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?

3. Сколькими способами можно расположить 20 белых шашек на *крайних линиях* шахматной доски так, чтобы на *противоположных* сторонах доски шашки стояли симметрично относительно линии, параллельной этим сторонам и делящей доску пополам?

4. а) Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров (надо использовать все 7 бусинок)?

б) Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух одинаковых бусинок большего размера?

5. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено (две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой передвижением шариков по кольцу и переворачиванием)?

А если на погремушке  $p$  красных шариков и  $q$  синих?

6. Сколькими различными способами можно сделать браслет из 3 одинаковых изумрудов, 2 одинаковых рубинов и 1 сапфира (в браслет входят все 6 камней)?

7. Сколькими различными способами можно сделать браслет из 5 одинаковых изумрудов, 7 одинаковых рубинов и 9 одинаковых сапфиров (в браслет входят все камни)? Сколько способами можно из тех же камней сделать кольцо с тремя камнями? А брошку с тремя камнями?

8. а) Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани тетраэдра четырьмя различными красками?

б) Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить грани октаэдра восемью различными красками?

в) Решите аналогичные задачи для правильных додекаэдра и икосаэдра.

9. Рассмотрите в предыдущих задачах случаи, когда число красок меньше числа граней (например, куб закрашивается двумя красками, тремя красками, четырьмя красками, пятью красками).

10. Границы куба раскрашиваются белой и черной краской (каждая грань в один цвет). Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы ни поворачивать куб.)

11. Сколькоими геометрически различными способами можно раскрасить грани куба тремя; четырьмя; пятью красками?

12. Сколькоими геометрически различными способами можно раскрасить вершины куба белой и черной краской?

13. Сколькоими геометрически различными способами можно раскрасить вершины куба тремя; ...; восемью красками?

14. Сколькоими геометрически различными способами можно раскрасить ребра куба двумя; тремя; ...; двенадцатью красками?

15. Решите аналогичные задачи для других правильных многогранников.

16. Границы куба раскрашиваются снаружи и изнутри двумя; тремя; ...; шестью красками. Для каждого числа красок найдите число геометрически различных способов раскраски.

17. Решите аналогичную задачу, если снаружи куб раскрашивается одними красками, а изнутри — другими.

18. Решите аналогичную задачу для других правильных многогранников.

19. На правильном шестиугольнике как на основаниях построены две пирамиды одной и той же высоты (по разные стороны от него). Решите задачи о раскраске для получившейся двойной пирамиды.

20. Сколько неэквивалентных перестановок с повторениями можно составить из букв «*а*» и «*б*», если эквивалентными считаются перестановки, получаемые друг из друга такими преобразованиями:

а) опусканием трех идущих подряд букв «*а*» или пяти идущих подряд букв «*б*»;

б) включением в любом месте трех идущих подряд букв «*а*» или пяти букв «*б*»;

в) заменой «*ббба*» на «*аб*» и обратно?

21. Если перевернуть лист бумаги, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1 и 8 не изменятся, 6 и 9 перейдут друг в друга, а остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует десятизначных чисел, которые

а) не меняются при этой операции;

б) сохраняют смысл;

в) переходят в число, получаемое из данного обращением порядка цифр?

22. Модели многогранников делают из плоских разверток. В развертке грани прилегают друг к другу по ребрам, а модель строится путем загибания картонной развертки вдоль ребер. Таких различных разверток правильный тетраэдр имеет две. Сколько их имеет куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр?

**23.** Правильный додекаэдр можно выкрасить в 4 цвета так, чтобы любые две смежные грани были различных цветов. Сколько имеется геометрически различных способов решения этой задачи?

Решите ту же задачу для куба и 3 цветов.

**24.** Сколькими геометрически различными способами можно раскрасить  $n$  красками окружность (нарисованную на листе бумаги), разделенную на  $p$  равных частей ( $p$  — простое)? Каждая часть красится в один цвет; способы, совпадающие при повороте окружности вокруг центра, считаются совпадающими.

**25.** а) Квадратная доска со стороной в  $n$  клеток раскрашивается в черный и белый цвета так, что каждая горизонталь и каждая вертикаль содержат ровно две черные клетки. Два способа раскраски считаются эквивалентными, если их можно перевести друг в друга с помощью перестановок горизонталей и вертикалей. Сколько существует неэквивалентных способов раскраски?

б) На плоскости проведены  $n$  прямых линий, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны («прямые общего положения»). Из всех точек пересечения этих прямых разными способами выбирается группа (неупорядоченная) из  $n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Найдите число способов выбрать такую группу при  $n = 5, 6, 7, 8$ .

**26.** Булевой функцией от  $n$  аргументов называют отображение множества кортежей длины  $n$  из цифр 0 и 1 в множество  $\{0, 1\}$ . Две булевые функции называются *двойственными*, если они переходят друг в друга при одновременной замене всех нулей на единицы, а единиц на нули (как в кортежах, так и в образах). Найдите число булевых функций от  $n$  аргументов, двойственных самим себе.

**27.** Найдите число симметричных булевых функций, т. е. функций, не меняющихся при перестановках цифр в кортежах.

**28.** На рис. 69 изображены две конфигурации, состоящие из занумерованных точек, лежащих на прямых линиях. Сколькими способами можно для каждой конфигурации перенумеровать точки так, чтобы свойство «три точки с номерами  $a, b, c$  лежат на одной прямой» сохранилось (если оно выполнялось)?

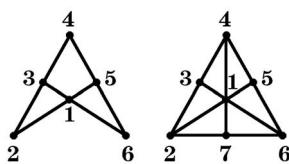


Рис. 69

**29.** Два  $n$ -значных натуральных числа назовем *эквивалентными*, если они получаются друг из друга перестановкой цифр. Найдите количество классов неэквивалентных  $n$ -значных чисел.

**30.** На шахматной доске с 25 горизонталями и 25 вертикалями расположено 125 шашек по 5 шашек на каждой горизонтали, причем расположение симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что хотя бы одна шашка стоит на главной диагонали.

**31.** Квадратная  $(n \times n)$ -таблица заполнена числами от 1 до  $n$  так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются по одному разу все числа от 1 до  $n$ . Докажите, что если  $n$  — нечетное число, а таблица симметрична относительно одной из диагоналей, то на этой диагонали по одному разу стоят все числа от 1 до  $n$ .

## Глава X

### ВОЗМОЖНОЕ И НЕВОЗМОЖНОЕ В КОМБИНАТОРИКЕ

В предыдущих главах мы рассмотрели ряд типовых комбинаторных задач. Теперь расскажем еще о некоторых задачах, в которых главный вопрос — разрешима эта задача или нет.

#### 128. Магические квадраты

Магическим квадратом называется квадратная таблица натуральных чисел с одинаковыми суммами по каждой строке, столбце и диагонали. Чаще всего рассматривают таблицу  $n \times n$ , в которой размещены числа от 1 до  $n^2$ . Подобное расположение чисел вызывало интерес с древнейших времен.

Попробуем найти магический квадрат  $3 \times 3$  комбинаторными методами, т. е. решить следующую задачу.

*Расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в виде квадрата так, чтобы суммы чисел по каждому столбцу, строке и диагоналям были одинаковы.*

Методом прямого перебора решить эту задачу без компьютера немыслимо — 9 чисел можно расположить в виде квадрата 362880 способами. Поэтому проведем математический анализ задачи. Выясним сначала, какой должна быть искомая сумма. Так как  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ , то в каждой из 3 строк сумма чисел должна равняться 15. Это значительно уменьшает необходимый перебор — выбрать 3 слагаемых из данных чисел так, чтобы их сумма равнялась 15, можно лишь 8 способами:  $9 + 5 + 1$ ,  $9 + 4 + 2$ ,  $8 + 6 + 1$ ,  $8 + 5 + 2$ ,  $8 + 4 + 3$ ,  $7 + 6 + 2$ ,  $7 + 5 + 3$ ,  $6 + 5 + 4$ . А число строк, столбцов и диагоналей в квадрате тоже равно 8. Значит, каждая из написанных комбинаций должна ровно один раз войти в искомый квадрат. Далее замечаем, что только число 5 входит в эти тройки 4 раза. Поэтому оно и должно стоять в центре таблицы — на пересечении центральных строки, столбца и двух диагоналей. Числа 8, 2, 6 и 4, входящие в тройки по 3 раза, должны занять углы — они стоят на пересечении строки, столбца и диагонали. Оставшиеся числа 1, 3, 7 и 9 занимают места сверху, снизу, слева и справа от центра. Диагональные тройки  $(8, 5, 2)$  и  $(6, 5, 4)$  можно расположить 8 различными способами (у нас 2 диагонали, на каждой из которых можно еще переставлять крайние элементы). После выбора положения чисел 8, 2, 6, 4 положение остальных чисел однозначно определено (рис. 70). Мы не только нашли один магический квадрат 3-го порядка но и описали все такие квадраты из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Эта задача, разумеется, очень проста. Гораздо труднее найти все магические квадраты 4-го порядка. Один из магических

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Рис. 70

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Рис. 71

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 2  | 3  | 13 |
| 5  | 11 | 10 | 8  |
| 9  | 7  | 6  | 12 |
| 4  | 14 | 15 | 1  |

Рис. 72

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 3  | 2  | 13 |
| 5  | 10 | 11 | 8  |
| 9  | 6  | 7  | 12 |
| 4  | 15 | 14 | 1  |

Рис. 73

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 7  | 12 | 1  | 14 |
| 2  | 13 | 8  | 11 |
| 16 | 3  | 10 | 5  |
| 9  | 6  | 15 | 4  |

Рис. 74

квадратов 4-го порядка можно получить из обычного квадрата (рис. 71), если на каждой его большой диагонали поменять местами числа, симметричные относительно центра квадрата, т. е. числа 1 и 16, 6 и 11, 4 и 13, 7 и 10 (рис. 72). В том, что полученный квадрат 4-го порядка магический, читатель легко убедится самостоятельно. Если в нем поменять местами второй и третий столбцы (рис. 73), то снова получится магический квадрат, изображенный на гравюре Альбрехта Дюрера «Меланхолия». Средние цифры нижней строки обозначают год — 1514, в котором Дюрер создал свою знаменитую гравюру.

Еще более замечательным является магический квадрат 4-го порядка, найденный в индийской надписи XI или XII в. н. э. (рис. 74). Этот квадрат сохраняет свойство быть магическим и после того, как его строки одна за другой перемещаются сверху вниз (сначала первая под четвертой, затем вторая под бывшей первой и т. д.) или столбцы аналогично перемещаются слева направо. Иными словами, если сделать ковер из таких квадратов, то, вырезав любую его часть из 4 строк и 4 столбцов, получаем снова магический квадрат.

Всего существует 880 типов магических квадратов 4-го порядка. Существуют методы построения магических квадратов и более высокого порядка. Такими построениями занимались один из основателей теории чисел П. Ферма, выдающийся английский математик А. Кели, известный математик О. Веблен. Удалось построить, например, магические квадраты, которые после удаления нескольких крайних полос снова дают магические квадраты; магические кубы, в которых все квадратные грани, параллельные паре боковых граней, представляют магические квадраты с одной и той же суммой и т. д.

Замечательные магические квадраты построил знаменитый американский ученый и политический деятель Бенджамин Франклайн. Например, он построил магический квадрат восьмого порядка (рис. 75), в котором не только сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали равна 260, но еще сумма чисел как в левой, так и в правой половинах каждой строки равна 130, и то же значение имеет сумма в верхних и нижних половинах каждого столбца. Кроме того, сумма четырех чисел, стоящих в углах квадрата, сложенная с суммой четырех чисел, стоящих в его центре, тоже равна 260. Наконец,

если сложить числа, стоящие по диагонали от числа 16 до числа 10, и прибавить сумму чисел, стоящих по диагонали от числа 23 до числа 17, то сумма тоже будет равна 260. И тем же свойством обладают суммы любого ряда из восьми чисел, параллельного описанному (например, от 50 до 54 и от 43 до 47). Далее Франклин построил магический квадрат из 256 чисел, который не только обладал всеми указанными выше свойствами, но и следующим дополнительным

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 52 | 61 | 4  | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
| 14 | 3  | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 |
| 53 | 60 | 5  | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 |
| 11 | 6  | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 |
| 55 | 58 | 7  | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 |
| 9  | 8  | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 |
| 50 | 63 | 2  | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 |
| 16 | 1  | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

Рис. 75

Рис. 76

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 200 | 217 | 232 | 249 | 8   | 25  | 40  | 57  | 72  | 89  | 104 | 121 | 136 | 153 | 168 | 185 |
| 58  | 39  | 26  | 7   | 250 | 231 | 218 | 199 | 186 | 167 | 154 | 135 | 122 | 103 | 90  | 71  |
| 198 | 219 | 230 | 251 | 6   | 27  | 38  | 59  | 70  | 91  | 102 | 123 | 134 | 155 | 166 | 187 |
| 60  | 37  | 28  | 5   | 252 | 229 | 220 | 197 | 188 | 165 | 156 | 133 | 124 | 101 | 92  | 69  |
| 201 | 216 | 233 | 248 | 9   | 24  | 41  | 56  | 73  | 88  | 105 | 120 | 137 | 152 | 169 | 184 |
| 55  | 42  | 23  | 10  | 247 | 234 | 215 | 202 | 183 | 170 | 151 | 138 | 119 | 106 | 87  | 74  |
| 203 | 214 | 235 | 246 | 11  | 22  | 43  | 54  | 75  | 86  | 107 | 118 | 139 | 150 | 171 | 182 |
| 53  | 44  | 21  | 12  | 245 | 236 | 213 | 204 | 181 | 172 | 149 | 140 | 117 | 108 | 85  | 76  |
| 205 | 212 | 237 | 244 | 13  | 20  | 45  | 52  | 77  | 84  | 109 | 116 | 141 | 148 | 173 | 180 |
| 51  | 46  | 19  | 14  | 243 | 238 | 211 | 206 | 179 | 174 | 147 | 142 | 115 | 110 | 83  | 78  |
| 207 | 210 | 239 | 242 | 15  | 18  | 47  | 50  | 79  | 82  | 111 | 114 | 143 | 146 | 175 | 178 |
| 49  | 48  | 17  | 16  | 241 | 240 | 209 | 208 | 177 | 176 | 145 | 144 | 113 | 112 | 81  | 80  |
| 196 | 221 | 228 | 253 | 4   | 29  | 36  | 61  | 68  | 93  | 100 | 125 | 132 | 157 | 164 | 189 |
| 62  | 35  | 30  | 3   | 254 | 227 | 222 | 195 | 190 | 163 | 158 | 131 | 126 | 99  | 94  | 67  |
| 194 | 223 | 226 | 255 | 2   | 31  | 34  | 63  | 66  | 95  | 98  | 127 | 130 | 159 | 162 | 191 |
| 64  | 33  | 32  | 1   | 256 | 225 | 224 | 193 | 192 | 161 | 160 | 129 | 128 | 97  | 96  | 65  |

свойством: если вырезать из бумаги квадрат размером  $4 \times 4$ , то где бы ни уложить этот лист на большой квадрат так, чтобы в него попало 16 чисел, сумма этих чисел будет равна тому же числу 2056, что и сумма чисел по горизонтальным, вертикальным и т. д. (рис. 76). Несомненно, Франклайн имел какие-то общие методы построения квадратов со столь замечательными свойствами, так как простым перебором их построить невозможно.

Ныне построению математических квадратов удалось обучить ЭВМ — некоторые пакеты математических программ для персональных компьютеров содержат операцию построения магического квадрата заданного порядка.

Во многих случаях никакие предварительные расчеты не позволяют найти конфигурацию элементов с заданными свойствами. Тогда остается единственный путь — перебирать все варианты в надежде хотя бы случайно найти желаемую комбинацию. Как рассказывает известный американский популяризатор Мартин Гарднер, в 1910 г. некий Клиффорд У. Адамс решил попробовать построить магический шестиугольник третьего порядка. Он взял набор из 19 шестиугольных плиток, написал на них числа от 1 до 19 и начал составлять из них всевозможные шестиугольники, надеясь наткнуться на магический.

Этим высокополезным делом он занимался... 47 лет, и только в 1957 г. нашел один такой многоугольник. Затеряв бумажку с решением, он лишь в 1962 г. нашел ее и после полувека изысканий опубликовал ответ (рис. 77). Суммы по всем направлениям этого многоугольника равны 38. Впоследствии совершенно неожиданно оказалось, что полученное Адамсом решение по существу единственное — все остальные получаются из него поворотами и симметриями; к тому же магических шестиугольников другого порядка (отличного от 1) не существует!

Правда, потом оказалось, что этот шестиугольник уже был открыт и опубликован неким Томом Викерсом в 1958 году.

### Задачи

1. В магическом квадрате, составленном из чисел 1, 2, 3, ..., 16, числа 1 и 16 стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что сумма любых двух чисел, симметричных относительно центра квадрата, равна 17.

2. Докажите, что числа 1, 2, ...,  $n^2$  можно так расположить в виде квадратной таблицы, что сумма чисел, стоящих в каждом столбце, будет одна и та же.

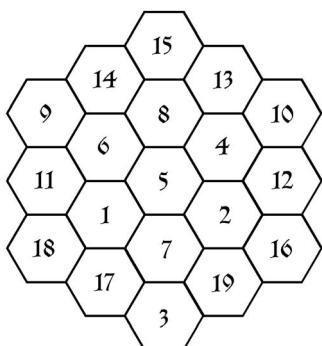


Рис. 77

3. Надо расставить числа  $1, 2, 3, \dots, n^2$  на листе клетчатой бумаги размером  $n \times n$  клеток ( $n \geq 3$ ) по одному в каждой клетке так, чтобы по всем вертикалям и горизонтальным стояли арифметические прогрессии. Можно ли это сделать? Если можно, то найдите число таких расположений.

4. Пусть  $M$  — магический квадрат порядка  $n$ , составленный из чисел  $1, 2, 3, \dots, n^2$ . Обозначим через  $M_k$  магический квадрат, получаемый из  $M$  заменой каждого числа  $m$  на  $m + (k - 1)n^2$ . Докажите, что, заменив каждое число  $k$  на магический квадрат  $M_k$ , мы получим магический квадрат порядка  $n^2$ .

5. Можно ли расставить цифры 0, 1 и 2 в клетках листа клетчатой бумаги размером  $100 \times 100$  так, чтобы в каждом прямоугольнике  $3 \times 4$  (содержащем 3 вертикали и 4 горизонтали), стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось три нуля, четыре единицы и пять двоек?

6. Шахматную доску с 3 горизонталиами и 3 вертикалями обходят ладьей и по пути ее следования пишут одно за другим числа 1, 2, 3, ..., 9. Найдите путь ладьи, при котором трехзначное число, получившееся в третьей горизонтали, равно сумме трехзначных чисел, получившихся в первых двух горизонталях.

7. В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа от 1 до 64. Разрешается следующая операция: выделяется квадрат размером  $3 \times 3$  или  $4 \times 4$  клетки и все стоящие в нем числа увеличиваются на 1. Можно ли несколькими такими операциями добиться того, чтобы все числа во всех клетках доски делились на 10?

8. В каждую из 16 клеток  $(4 \times 4)$ -доски вписывается одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 так, что ни на одной горизонтали и ни на одной вертикали нет повторяющихся чисел. Найдите расположение с этим свойством, при котором сумма всех чисел на доске наибольшая.

## 129. Офицерское каре

*Однажды каждый из четырех полков командировал на парад по 4 офицера, имеющих звания лейтенанта, старшего лейтенанта, капитана и майора. Можно ли построить этих офицеров в виде квадрата так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне были представители всех 4 полков и всех 4 воинских званий?*

Попробуем сначала удовлетворить условию, касающемуся полков. Если обозначить эти полки прописными латинскими буквами  $A, B, C, D$ , то одно из возможных расположений офицеров приведено на рис. 78. В эту таблицу латинские буквы  $A, B, C, D$  входят по одному разу в каждый столбец и в каждую строку. Квадраты с  $n$  строками и  $n$  столбцами, составленные из  $n$  букв и обладающие указанным свойством, называют *латинскими квадратами* (причиной такого странного названия явилось то обстоятельство, что Эйлер, впервые рассматривавший эти квадраты, составлял их из латинских букв).

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |
| <i>B</i> | <i>A</i> | <i>D</i> | <i>C</i> |
| <i>C</i> | <i>D</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>D</i> | <i>C</i> | <i>B</i> | <i>A</i> |

Рис. 78

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>Ab</i> | <i>Dd</i> | <i>Ba</i> | <i>Cc</i> |
| <i>Bc</i> | <i>Ca</i> | <i>Ad</i> | <i>Db</i> |
| <i>Cd</i> | <i>Bb</i> | <i>Dc</i> | <i>Aa</i> |
| <i>Da</i> | <i>Ac</i> | <i>Cb</i> | <i>Bd</i> |

Рис. 79

|           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>Ab</i> | <i>Bb</i> | <i>Cc</i> | <i>Dd</i> | <i>Ee</i> |
| <i>Cd</i> | <i>De</i> | <i>Ea</i> | <i>Ab</i> | <i>Bc</i> |
| <i>Eb</i> | <i>Ac</i> | <i>Bd</i> | <i>Ce</i> | <i>Da</i> |
| <i>Be</i> | <i>Ca</i> | <i>Db</i> | <i>Ec</i> | <i>Ad</i> |
| <i>Dc</i> | <i>Ed</i> | <i>Ae</i> | <i>Ba</i> | <i>Cb</i> |

Рис. 80

Обозначим теперь 4 воинских звания строчными латинскими буквами  $a, b, c, d$ . По условию задачи эти буквы тоже должны образовывать латинский квадрат. Однако этот квадрат не может быть произвольным — если задать и полк, и звание, то должен найтись ровно один офицер данного полка с данным званием, командированный на парад. Поэтому оба латинских квадрата должны наложиться друг на друга так, чтобы каждая пара из букв  $A, B, C, D$  и  $a, b, c, d$  встретилась после наложения лишь один раз (такие два латинских квадрата называют *ортогональными* друг другу). Это можно сделать — соответствующая таблица изображена на рис. 79. На нем не только по горизонталям и вертикалям, но и по обеим главным диагоналям буквы  $A, B, C, D, a, b, c, d$  встречаются лишь по одному разу.

Несколько больше смекалки требуется, чтобы разместить аналогичным образом офицеров из пяти полков, имеющих по пять различных воинских званий (рис. 80).

Однако предпринятая Эйлером попытка построить пару ортогональных квадратов шестого порядка не увенчалась успехом. Все комбинации, которые он придумывал, не удовлетворяли нужным условиям. Поэтому Эйлер предположил, что задача просто неразрешима. Эта гипотеза была подтверждена в 1901 г. французским математиком Тарри, перебравшим все возможные расположения квадратов.

Но Эйлер, основываясь на неразрешимости задачи для  $n = 2$  и  $n = 6$ , сделал предположение, что она неразрешима для всех чисел вида  $n = 4k + 2$  (при остальных значениях  $n$  задача разрешима). Попытки доказать или опровергнуть гипотезу Эйлера были безуспешны до 1960 г., несмотря на привлечение электронных вычислительных машин (в те годы их быстродействие, по сегодняшним меркам, было весьма умеренным).

Применяя методы теории чисел, работавшие в США математики Бозе, Паркер и Шриканда построили первый пример двух ортогональных латинских квадратов сначала для  $n = 10$ , а затем и для всех чисел вида  $n = 4k + 2$  (разумеется, кроме чисел 2 и 6). Позднее с помощью более мощных моделей ЭВМ были найдены многие такие квадраты.

## 130. Посев пшеницы

Автор предвидит недоумение читателя — зачем было тратить столько усилий для решения задачи о расположении офицеров, не имеющей никакого практического значения. Но в комбинаторике часто случается, что задача, на первый взгляд кажущаяся пустой головоломкой, получает в дальнейшем применения в самых различных областях практической деятельности. Позже выяснилось, что задачи, аналогичные эйлеровской, имеют важное значение для правильной постановки экспериментов.

Пусть, например, требуется проверить влияние  $n$  видов удобрений на  $n$  видов пшеницы. Для этого надо разбить все поле на  $n^2$  участков и использовать на каждом участке свою комбинацию сорта пшеницы и удобрения. Однако при этом не исключено, что на исход опыта повлияет различие в урожайности разных участков поля. Чтобы исключить это влияние, надо постараться, чтобы каждый сорт пшеницы и каждый вид удобрения встретились по одному разу в каждой «строке» и каждом «столбце» поля (мы считаем поле прямоугольным). Записав в каждую клеточку названия сорта и удобрения, получаем совмещенную пару ортогональных латинских квадратов.

Разумеется, число сортов пшеницы не обязано совпадать с числом видов удобрений. Кроме того, возможны дополнительные ограничения на постановку эксперимента. Поэтому при планировании опытов используют не только латинские квадраты, но и более общие расположения, называемые блок-схемами. Блок-схемой называют размещение элементов в блоки, подчиненное некоторым условиям относительно появления элементов и их пар. Например, можно потребовать, чтобы каждый блок содержал одно и то же число элементов, каждый элемент принадлежал одному и тому же числу блоков, а каждая пара элементов тоже принадлежала одному и тому же числу блоков.

Теория блок-схем является важной главой комбинаторики. До сих пор неизвестны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы существовали блок-схемы с заданными параметрами. Еще дальше от разрешения вопрос о перечислении таких блок-схем.

Трудность отыскания требуемых блок-схем показывает следующая задача.

*Группа из 15 детей ежедневно строится на прогулку по трое. Можно ли организовать прогулки так, чтобы в течение недели ни одна пара детей не была дважды в одной тройке?*

Сначала выясним, хватит ли пар для решения задачи.

С одной стороны, из 15 детей можно составить 105 различных пар (для каждого ребенка можно выбрать пару

14 способами, но при этом каждая пара  $(a; b)$  встретится дважды — когда к  $a$  присоединяют  $b$  и когда к  $b$  присоединяют  $a$ ; значит, число пар равно  $15 \cdot 14 : 2 = 105$ .

С другой стороны, в каждой тройке  $(a; b; c)$  есть 3 различные пары:  $(a; b)$ ,  $(a; c)$ ,  $(b; c)$ . Значит, в 5 тройках содержится 15 пар, а на неделю требуется  $15 \cdot 7 = 105$  пар.

Итак, максимально возможное число пар равно требуемому. Но это еще не гарантирует возможности искомого распределения детей по тройкам. Чтобы доказать существование этого распределения, надо, например, конкретно его построить.

Читатель, который попробует найти искомое расположение, быстро почтвует трудность задачи: через несколько шагов остаются тройки, из которых не получаются группы, содержащие по одному разу всех 15 детей. Тем не менее искомое расположение существует:

| Пн  | Вт  | Ср  | Чт  | Пт  | Сб  | Вс  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ЛМП | ИОП | КНП | ИМН | КМО | ИКЛ | ЛНО |
| ИАБ | КАВ | МАГ | ОАД | ЛАЕ | НАЖ | ПАЗ |
| ОВГ | НГБ | ЛБВ | ПВЖ | НВЗ | МВД | ИВЕ |
| НДЕ | ЛДЖ | ИДЗ | КЕБ | ПБД | ПЕГ | КГД |
| КЖЗ | МЗЕ | ОЕЖ | ЛЗГ | ИГЖ | ОЗБ | МБЖ |

Можно доказать, что такое же распределение существует, если число детей равно  $6n + 3$ ; они строятся по троем, а прогулки проводятся в течение  $3n + 1$  дней.

### 131. Принцип Дирихле

Подсчитывая в п. 52 число расположений ферзей, мы бросили мимоходом фразу: «так как на шахматной доске только 8 горизонталей, то больше 8 ферзей поставить на доску не удастся». Если развернуть эту аргументацию подробнее, то она примет такой вид: «Когда на шахматную доску, имеющую 8 горизонталей, ставят 9 ферзей, то хотя бы одна пара ферзей оказывается на одной и той же горизонтали, а потому будет бить друг друга». Подобные рассуждения часто встречаются в математике, они получили даже особое название *принципа Дирихле* по имени немецкого математика, часто применявшего их в исследованиях по теории чисел. Этот принцип гласит.

*Если в  $n$  ящиков положено более чем  $n$  предметов, то хотя бы в одном ящике лежат два или более предметов.*

Несмотря на свою простоту и очевидность, принцип Дирихле позволяет получать далеко не очевидные результаты. Докажем с его помощью, например, такое утверждение.

*Если в зале находятся несколько человек, то хотя бы двое из них имеют одинаковое число знакомых среди присутствующих.*

ющих (мы, разумеется, считаем отношение « $a$  знаком с  $b$ » взаимным — если  $a$  знаком с  $b$ , то и  $b$  знаком с  $a$ ).

В самом деле, если в зале  $n$  человек, то число знакомых каждого человека может принимать значения от 0 (если он не знаком ни с кем в зале) до  $n - 1$  (если он знаком со всеми остальными присутствующими), т. е.  $n$  различных значений. Возможны два случая — либо хотя бы для одного значения  $k$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ , в зале нет человека с  $k$  знакомыми, либо для всех  $k$  найдется хотя бы один человек, имеющий ровно  $k$  знакомых в зале. В первом случае число различных значений для  $k$  меньше, чем  $n$  (хотя бы одно значение пропущено), а тогда по принципу Дирихле хотя бы для двух из  $n$  человек значение  $k$  одно и то же. Иными словами, в первом случае есть двое людей, имеющих поровну знакомых.

Осталось показать, что второй случай невозможен. В этом случае в зале был бы человек с 0 знакомыми и человек с  $n - 1$  знакомыми. Но это невозможно — если эти люди знакомы друг с другом, то первый уже имеет хотя бы одного знакомого, а если они не знакомы, то число знакомых второго человека меньше, чем  $n - 1$ . Утверждение доказано. Его можно переформулировать для геометрических объектов так.

*Если некоторые из  $n$  точек плоскости соединены отрезками, то всегда найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков.*

### Задачи

9. В классе 41 ученик написал по три контрольные работы, причем ни один из них не получил по этим работам неудовлетворительной отметки и каждый получил все три возможные отметки (3, 4, 5). Возьмем наибольшую из групп учеников, получивших одинаковые отметки по всем трем контрольным (например, за первую контрольную — 4, за вторую — 3 и за третью — 5). Найдите наименьшее число учеников в этой группе. А если число возможных отметок равно 4?

10. В ящике лежит 100 разноцветных шариков: 28 красных, 20 зеленых, 12 желтых, 20 синих, 10 белых и 10 черных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, чтобы среди них обязательно оказалось 15 шариков одного цвета?

11. У человека на голове не более 300 000 волос. Докажите, что в Москве живут не менее 10 человек, у которых число волос одинаково (население Москвы больше 6 млн человек).

12. Из 19 шаров 2 радиоактивны. Для любой группы шаров можно с помощью одной проверки установить, есть ли в ней радиоактивный шар. Докажите, что за 7 проверок всегда можно найти оба радиоактивных шара, а за 6 проверок — не всегда.

13. Докажите, что 20 взвешиваниями нельзя гарантированно упорядочить по возрастанию массы 10 предметов.

14. Даны 20 попарно неравных натуральных чисел, меньших, чем 70. Докажите, что среди попарных разностей этих чисел найдутся 4 одинаковых.

## 132. Научная переписка

Шесть ученых  $A, B, C, D, E$  и  $F$  переписывались друг с другом по двум научным темам. Каждый переписывался с каждым по одной теме. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающихся между собой по одной и той же теме.

В самом деле, ученый  $A$  переписывается с 5 коллегами. По каким бы темам он с ними ни вел переписку, найдутся трое ученых (именно их обозначим  $B, C, D$ ), с которыми он переписывается по одной и той же теме (назовем ее первой). Если хотя бы двое из этих трех ученых переписываются по первой теме, то, присоединив к ним  $A$ , получим тройку переписывающихся по первой теме. Если же никто из этих троих не переписывается друг с другом по первой теме, то они снова получили тройку ученых, переписка которых посвящена одной и той же теме.

Если бы число ученых было меньше 6, то утверждение уже не было бы верным — можно так организовать переписку, чтобы никакая тройка не занималась одной и той же темой. Например, достаточно, чтобы из ученых  $A, B, C, D$  и  $E$  по первой теме вели переписку пары  $A - B, B - C, C - D, D - E$  и  $E - A$ , а остальные пары интересовались второй темой.

Если изобразить ученых точками, а их переписку — соединяющими эти точки цветными отрезками (один цвет для первой темы, второй — для другой), то доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Если 6 точек соединены попарно отрезками, окрашенными каждый в один из двух различных цветов, то найдутся 3 точки, являющиеся вершинами одноцветного треугольника.

Мы могли бы окрашивать отрезки не в 2, а, скажем, в 3 различных цвета. В этом случае пришлось бы взять больше точек — не 6, а 17.

Если 17 ученых переписываются друг с другом по трем различным научным темам, причем каждая пара ученых ведет переписку лишь по одной теме, то всегда найдутся трое ученых, переписывающихся по одной и той же теме.

В самом деле, каждый ученый ведет переписку с 16 другими. Поэтому для ученого  $A$  найдутся еще 6 человек, с которыми он переписывается на одну и ту же тему. Если хотя бы одна пара из этих 6 переписывается друг с другом на ту же тему, то искомая тройка ученых найдена. Если же они переписываются друг с другом лишь по двум оставшимся темам, то, по доказанному выше, среди них найдутся трое, переписка которых посвящена одной теме.

Читатель легко найдет теперь для любого числа тем такое количество ученых, что при любом распределении тем между ними можно выбрать тройку, переписывающуюся по одному и тому же вопросу.

Это утверждение можно обобщить еще дальше, разыскивая не тройки, а, скажем, четверки ученых. В этом случае при переписке по двум темам достаточно взять 18 ученых, чтобы из них можно было выделить четверку ученых с общей тематикой переписки. А 17 ученых еще недостаточно: возьмем 17 ученых, занумеруем их числами от 1 до 17 и отдадим первую тему парам ученых  $i - j$ , для которых  $|i - j|$  равно одному из чисел 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16, а вторую тему — остальным парам ученых. Сделайте рисунок и убедитесь, что ни одна четверка ученых не ведет переписку по общей теме.

Но путь обобщений еще не закончен. Ведь можно придать темам различный вес и искать, например, для первой темы четверки ученых, а для второй — тройки ученых. Тогда необходимое число окажется больше 6, но меньше 18 — оно равно 9. Кроме того, ученых можно разбивать не на пары, а на коллективы из большего числа участников и закреплять тему за каждым таким коллективом. Тогда данная пара ученых может, например, обсуждать первую тему в одном коллективе, а вторую — в другом.

Английский математик Рамсей доказал следующую общую теорему.

*Если заданы число тем  $t$  и число участников в каждом коллективе  $r$  и если теме с номером  $k$  сопоставлено число  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, t$ , то при достаточно большом числе участников и любом распределении тем между коллективами можно найти тему с номером  $k$  и  $p_k$  ученых, любые  $r$  из которых заняты этой темой.*

### 133. Выбор представителей

Студенты Петя Соболев, Леня Комаров, Витя Егоров, Сережа Смирнов, Коля Токарев и Левон Арutyюнян были закадычными друзьями. Многими делами они занимались сообща: Петя и Витя вместе работали над изобретением, Леня и Сережа вместе посещали семинар по статистике, Петя, Леня и Коля вместе занимались в секции самбо, Витя и Коля вместе организовывали математическую олимпиаду в институте, а Коля и Левон шефствовали над одной из групп первого курса. Все шло хорошо, но однажды друзья стали в тупик — выяснилось, что ровно в 15 часов нужно делать доклад об изобретении, прийти на консультацию к преподавателю статистики, хотя бы одному выступить на соревнованиях по самбо, принять участие в отборе задач для олимпиады и провести собрание в подшефной группе. Ведь если Петя будет докладывать об изобретении, Леня пойдет на консультацию, Коля будет отбирать задачи, а Левон проведет собрание, то на соревнования по самбо никто пойти не сможет — ни Витя, ни Сережа этим видом спорта не занимаются.

Но Витя и Коля не зря интересовались математикой, и после некоторых размышлений они придумали такой план: об изобретении доложит Петя, на консультацию пойдет Леня, на соревнования по самбо — Коля, задачи будет отбирать Витя, а собрание проведет Левон. Положение друзей было бы куда хуже, если бы над изобретением работали Петя и Витя, реферат писали Витя и Сережа, в секции самбо занимались Петя и Сережа, математическую олимпиаду организовывали Петя, Витя и Сережа, а шефствовали Леня, Коля и Левон. В этом случае первыми четырьмя делами занимались бы всего трое друзей, и принцип Дирихле не позволил бы им так распределить обязанности, чтобы все дела были сделаны.

Нетрудно сообразить, в чем заключается *необходимое условие* того, чтобы можно было распределить дела между нашими друзьями — если для любой группы из  $k$  дел собрать вместе специалистов по ним (умеющих делать хотя бы одно из них), то в этой группе должно быть не менее  $k$  человек. Оказывается, что это условие не только необходимо, но и *достаточно* — если оно выполнено, то требуемое распределение обязанностей всегда возможно.

В общем виде на языке теории множеств это утверждение формулируется так.

*Пусть в каком-нибудь множестве  $X$  выделены подмножества  $X_1, \dots, X_n$ . Для того чтобы в  $X$  можно было выбрать  $n$  различных элементов  $a_1, \dots, a_n$  таких, что  $a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n$ , необходимо и достаточно выполнение следующего условия: объединение любых  $k$  заданных подмножеств должно содержать по крайней мере  $k$  элементов.*

Эту теорему, доказанную английским математиком Ф. Холлом, называют *теоремой о различных представителях* или *теоремой о деревенских свадьбах*. Последнее название ведет свое происхождение от формулировки, восходящей к известному немецкому математику Герману Вейлю.

*В деревне относительно каждого юноши и девушки известно, дружат они или нет. Если для любых  $k$  юношей объединение множеств их подруг содержит по крайней мере  $k$  девушек, то каждый юноша может выбрать себе жену из числа своих подруг (в этой задаче  $X$  — множество всех девушек,  $X_1, \dots, X_n$  — подмножества, состоящие из подруг первого, второго, ...,  $n$ -го юноши).*

Докажем теорему в формулировке Г. Вейля, проведя индукцию по числу юношей. Пусть число юношей равно  $n$ . При  $n = 1$  все очевидно — в силу условия теоремы у этого одного юноши есть хотя бы одна подруга, ее он и может выбрать себе в жены.

Предположим, что теорема доказана для любого числа юношей, меньшего  $n$ . Возьмем  $n$  юношей, для которых множества подруг удовлетворяют условию теоремы — объединение множеств подруг любых  $k$  юношей состоит по крайней мере из  $k$  девушек. Тогда возможны два случая.

а) Найдется множество, состоящее из  $r$  юношей, где  $r < n$ , для которых объединение множеств их подруг содержит ровно  $r$  девушек (если бы девушек было хотя бы на одну меньше, условие теоремы нарушилось бы). Такую совокупность юношей и девушек называют «критической». Внутри этого критического множества выполнено условие теоремы — юноши этого множества имеют подруг лишь среди девушек того же множества, а потому из выполнения условия теоремы (для произвольного  $k$ ) для *всех* юношей и девушек вытекает, что оно верно и для юношей и девушек, входящих *лишь в это* множество. Но тогда можно найти жен для всех юношей из критического множества, выбирая их из того же множества так, чтобы каждый юноша получил в жены одну из своих подруг.

Поскольку эти юноши пристроены, устраним их и выбранных ими жен из рассмотрения и возьмем оставшихся  $n - r$  юношей. Легко видеть, что для них тоже выполняется условие теоремы (если бы для каких-нибудь  $s$  юношей объединение множеств их подруг содержало меньше  $s$  девушек, то для множества, состоящего из этих  $s$  юношей и  $r$  юношей из критического множества, тоже нарушилось бы условие теоремы). Значит, по предположению индукции, можно найти жен и для этих  $n - r$  юношей. А тогда все юноши нашли себе по жене, и в этом случае теорема доказана.

б) Теперь рассмотрим случай, когда критических множеств нет — при  $r < n$  для любых  $r$  юношей объединение множеств их подруг содержит по крайней мере  $r + 1$  девушку. Тогда возьмем любого юношу, женим его на одной из его подруг и устраним счастливую пару из рассмотрения. Для оставшихся  $n - 1$  юношей условие теоремы выполняется. В самом деле, возьмем любых  $r$  из оставшихся юношей. Объединение множеств их подруг состояло по крайней мере из  $r + 1$  девушки. Значит, после удаления новобрачной это множество состоит по крайней мере из  $r$  девушек. Но тогда можно выбрать жен для этих  $n - 1$  юношей, чем и заканчивается доказательство теоремы о деревенских свадьбах.

Серьезному читателю, недовольному тем, что в столь важной теореме мы говорим о матrimониальных отношениях, представляем провести это доказательство, заменив слово «девушки» словами «элементы множества», а слово «юноши» — словом «подмножество». Вместо «юноша дружит с девушкой» придется говорить «элемент принадлежит подмножеству», а

вместо «юноша женился на девушке» — «в подмножестве выбран элемент». А все остальное остается по-прежнему.

### 134. Графическое решение

Теорема, которую мы сейчас доказали, относится к разряду так называемых «теорем существования», утверждающих, что нечто (в нашем случае — подбор невест) существует, но дающих мало информации о том, как это нечто найти (в нашем случае — как конкретно организовать свадьбы или выбор представителей). Ведь если буквально следовать доказательству теоремы, то надо сначала перебрать все подмножества в множестве юношей и посмотреть, нет ли среди них критических. А поскольку число подмножеств в множестве из  $n$  элементов равно  $2^n$ , уже при 20 юношах число подмножеств будет больше миллиона и придется прибегнуть к услугам электронной свахи.

А если учесть, что с подобными задачами приходится иметь дело в куда более серьезных вопросах, чем деревенские свадьбы (например, при распределении работ между станками, организаций транспортных потоков и т. д.), то становится ясно, насколько желателен алгоритм, позволяющий осуществлять выбор представителей, а в случае, когда такой выбор невозможен, указывающий наибольшее число возможных выборов (например, устройство максимального числа свадеб).

Один из путей решения основан на использовании *графов* — множеств, состоящих из конечного числа точек, некоторые пары которых соединены отрезками. Такие графы называются *неориентированными*, а если на отрезках поставить еще стрелки, то получится *ориентированный граф*, или, короче, *орграф*.

Начертим такой граф: в левом столбце поставим точки, изображающие подмножества  $X_1, \dots, X_n$ , а в правом — точки, изображающие элементы всего множества  $X$ . Каждую точку, изображающую подмножество, соединим дугами со всеми входящими в него элементами. Например, распределение друзей, о котором говорилось в предыдущем пункте, изображено на рис. 81.

Предположим, что мы каким-то образом назначили представителей некоторых подмножеств, т. е. выбрали некоторые дуги нашего графа. Пометим эти дуги знаком «плюс» (рис. 82). Разумеется, две помеченные дуги не могут иметь общих концов, иначе мы либо выбрали бы в одном множестве двух представителей, либо один элемент представлял бы два разных множества. Если в результате оказалось, что из каждого подмножества выходит помеченная дуга, то все в порядке — все подмножества получили представителей.

В противном случае берем все подмножества, лишенные представительства, и помечаем их цифрой 1. Все элементы, к которым идут дуги из помеченных цифрой 1 подмножеств,

отметим цифрой 2. Если хотя бы один из этих элементов свободен, т. е. не является ничьим представителем, то назначаем его представителем того подмножества, от которого к нему шла дуга, и тем самым увеличиваем число представленных подмножеств.

Сложнее обстоит дело, если среди помеченных цифрой 2 элементов нет свободных — все они уже кого-нибудь представляют. В этом случае придется менять ранее принятые решения и делать перестройку, высвобождая эти элементы. Заметим, что при таком предположении все элементы, помеченные цифрой 2, являются концами дуг с пометкой плюс, и мы можем по таким дугам вернуться от этих элементов в столбец подмножеств. Подмножества, к которым мы вернемся, пометим цифрой 3, а все элементы, к которым идут не отмеченные знаком «плюс» дуги из помеченных цифрой 3 подмножеств, отметим цифрой 4. Дальше по отмеченным знаком «плюс» дугам вернемся в столбец подмножеств и пометим их цифрой 5, а затем по всем неотмеченным дугам, начинающимся в подмножествах с пометкой 5, перейдем к элементам множества и пометим их цифрой 6 (при этом одно и то же подмножество или один и тот же элемент могут иметь несколько пометок).

Будем продолжать описанный выше процесс до тех пор, пока в столбце элементов мы не наткнемся на свободный элемент. Тогда у нас получится «молния», начинающаяся с подмножества, помеченного цифрой 1 (т. е. еще не имеющего представителя), и кончающаяся свободным элементом (рис. 82). Дуги этой «молнии» через одну помечены знаками «плюс». А теперь изменим пометки этих дуг — все непомеченные дуги молнии пометим знаком «плюс», а все бывшие ранее на ней знаки «плюс» сотрем. Нетрудно видеть, что в результате этой операции число представленных подмножеств увеличилось на единицу — оказалось представленным подмножество, с которого начинается молния (на рис. 82 олимпиаду вместо Коля будет

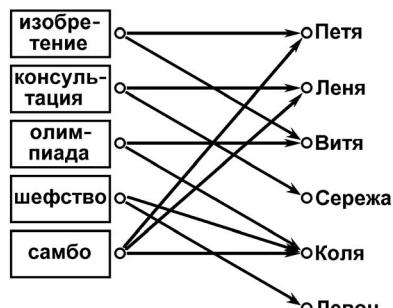


Рис. 81

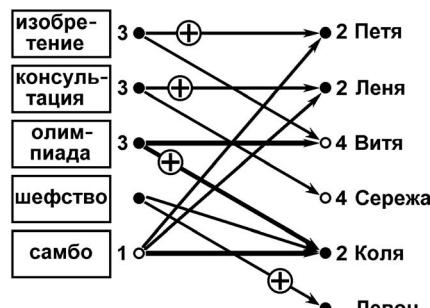


Рис. 82

готовить Витя, а Коля пойдет на соревнования по самбо; или можно Сережу послать на консультацию, а освободившегося Леню — на самбо).

Если и теперь не все подмножества имеют представителей, то повторим этот процесс. В конце концов произойдет одно из двух: либо все подмножества получат представителей, либо после одного из циклов пометок число помеченных элементов не увеличится. Во втором случае задача о различных представителях оказывается неразрешимой, и мы лишь получаем наибольшее число представленных подмножеств. Разумеется, если выполнено условие теоремы о различных представителях, то второй случай невозможен. Отметим изящное достаточное условие разрешимости задачи о назначении представителей.

*Если существует такое число  $k$ , что каждое подмножество из числа  $X_1, \dots, X_n$  содержит ровно  $k$  элементов, а каждый элемент из множества  $X$  принадлежит ровно  $k$  подмножествам, то можно назначить различных представителей.*

### 135. Прерывания IRQ

Задачу о выборе представителей довольно часто приходится решать операционной системе (ОС) компьютера. В упрощенном виде эта задача выглядит так. В компьютере каждое физическое устройство (принтер, модем, звуковая карта) использует одно из 16 так называемых «прерываний» — от IRQ 0 до IRQ 15. При этом каждое устройство должно взять себе одно из нескольких допустимых для него прерываний, и в наложенном компьютере прерывания распределены по устройствам и еще есть свободные. Но когда к компьютеру подключается новое устройство, ОС его обнаруживает и начинает искать ему «невесту» — свободное подходящее для него прерывание.

Если ОС свободное прерывание находит, то все в порядке, новое устройство его получает и нормально работает в дружной семье физических устройств компьютера. Но если подходящего свободного IRQ нет, то возникает задача о переназначениях — надо попробовать каким-то старым устройствам дать другие допустимые для них прерывания, освободив одно для вновь прибывшего. Если это сделать не удается, то ОС дает новичку одно из подходящих, но занятых прерываний, сообщая при этом о «конфликте устройств» — на данном IRQ уже «сидит» другое устройство; новое устройство работать не будет.

Здесь есть одно облегчение — помимо IRQ физическое устройство использует еще «диапазон ввода-вывода». Это набор адресов для передачи данных в компьютер; таких наборов очень много, хотя не каждое допустимо для данного IRQ. ОС может поставить (и ставит) на одно IRQ несколько устройств, но при условии, что они не будут работать одновременно и все равно будут использовать разные диапазоны ввода-вывода. С учетом этих условий возможностей появляется больше, но задача усложняется — надо знать, какие устройства не будут работать

одновременно и какие у них допустимые диапазоны ввода-вывода. Бывает (когда в компьютере уже стоит много разных устройств), что ОС сама решить эту задачу не может и приходится вручную перенастраивать систему.

## 136. Общие представители

*Каждый студент группы участвовал в одной из 5 спортивных секций. А на летние каникулы каждый из них вошел в один из 5 студенческих строительных отрядов. Однажды в деканате до обеда обсуждались вопросы о спортивной работе (по секциям), а после обеда — о работе студенческих строительных отрядов (по отрядам). Можно ли послать 5 делегатов от этой группы так, чтобы они представляли сначала все спортивные секции, а потом все строительные отряды?*

Разумеется, в столь общей постановке задача неразрешима — иногда можно послать, а иногда нельзя. Поэтому надо найти условия, при которых такой выбор делегации возможен. Если, например, участники волейбольной и шахматной секций целиком входят в первый отряд, то представитель этого отряда сможет быть на заседании либо шахматной, либо волейбольной секции, но не на обеих сразу. Этот пример показывает, в чем заключается необходимое условие возможности требуемого выбора: никакие  $k$  спортивных секций не должны входить в объединение менее чем  $k$  строительных отрядов. Оказывается, это условие является и достаточным. Сформулируем его так.

*Пусть студенческая группа разбита на  $n$  спортивных секций  $A_1, \dots, A_n$  и  $n$  строительных отрядов  $B_1, \dots, B_n$ . Для того чтобы можно было выбрать  $n$  студентов так, чтобы каждая спортивная секция имела своего (отличного от других) представителя и каждый строительный отряд имел своего представителя, необходимо и достаточно, чтобы никакие  $k$  спортивных секций не входили в объединение менее чем  $k$  строительных отрядов.*

Доказательство этого утверждения сводится к использованию теоремы о различных представителях.

Отметим одно достаточное условие для возможности назначить общих представителей: если множество из  $kr$  элементов разбито двумя способами на  $k$  подмножеств, содержащих по  $r$  элементов, то для этих двух разбиений можно выбрать систему общих представителей.

### Задачи

15. Докажите, что среди 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

16. В клубе на танцевальном вечере находились юноши и девушки, причем каждый юноша был знаком не менее чем с  $t$  девушками, а каждая девушка — не более чем с  $t$  юношами. Докажите, что каждый юноша может пригласить на танец знакомую девушку.

17. Собралось  $2n$  человек, каждый из которых знаком не менее чем с  $n$  присутствующими. Докажите, что из них можно выбрать четырех человек и посадить за круглый стол так, что каждый из выбранных будет сидеть рядом со своими знакомыми.

18. При дворе короля Артура собрались  $2n$  рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более  $n - 1$  врагов. Докажите, что колдун Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

19. Собралось  $N$  человек. Некоторые из них знакомы друг с другом, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Докажите, что каждый присутствующий знаком с одинаковым количеством человек.

20.  $N$  человек не знакомы друг с другом. Докажите, что при любом  $N$  можно познакомить некоторых из них так, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых.

21. В городе имеется  $t$  жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причем среди любых трех жителей дружат либо все трое, либо только двое. Докажите, что либо все жители города — друзья, либо найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

22. В городе имеется  $t$  жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют. Каждый день не более чем один из них может начать новую жизнь: поссориться со всеми друзьями и подружиться со всеми врагами. Известно, что таким приемом любые три жителя могут подружиться. Докажите, что все жители могут подружиться.

23. Имеется группа переводчиков, в которой каждый из трех языков знают ровно  $2n$  человек. Докажите, что для любого  $k \leq n$  из них можно выбрать подмножество, в котором каждый язык знают ровно  $2k$  человек.

24. В работе международного симпозиума лингвистов участвуют  $n$  человек. Из любых четырех хотя бы один может объясняться с любым из трех остальных хотя бы на одном языке. Докажите, что найдется участник симпозиума, который может объясняться с каждым из остальных участников.

### 137. Игра в 15

В 1879 г. американский составитель шахматных задач и этюдов, головоломок и различных игр Сэмюэль Лойд свел с ума Европу и Америку квадратной коробочкой с 15 шашками. Коробочка имела 16 полей, а на шашках были нанесены числа от 1 до 15. Одно поле в коробочке было свободное. Требовалось, передвигая каждым ходом одну шашку на свободное поле, перевести в стандартное положение (рис. 83) положение, изображенное на рис. 84.

За решение задачи была предложена крупная сумма денег. Фабрикант, выпускавший игру, быстро разбогател — рассказывали, что священники не выпускали из рук коробочки с шашками во время богослужения, машинисты решали задачу,

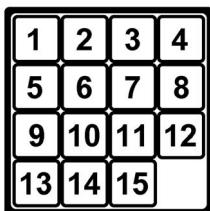


Рис. 83

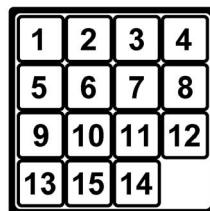


Рис. 84

ведя поезда, торговцы забывали открывать свои магазины. Но никому не удавалось найти решение проблемы.

Горячка прошла лишь после того, как в 1880 г. была доказана неразрешимость задачи Лойда. Чтобы изложить это доказательство, нам придется пояснить, что называется *беспорядком* (или *инверсией*) в перестановке (или размещении) чисел.

Возьмем перестановку 3142. В ней число 3 стоит перед 1 и 2, хотя и больше них. Это создает два беспорядка. Еще один беспорядок возникает из-за того, что число 4 стоит перед числом 2. Всего в этой перестановке три беспорядка.

Если переставить два рядом стоящих числа, то количество беспорядков изменится на 1: или увеличится на 1, если до перемещения меньшее число стояло перед большим, или на 1 уменьшится. Поэтому если число беспорядков было четным (нечетным), то оно станет нечетным (четным). Четность числа беспорядков называют *четностью перестановки*.

Выясним, что произойдет с четностью перестановки, если переставить два далеких друг от друга числа, например числа  $a$  и  $b$  в перестановке ... $a$ ... $b$ ... . Пусть между ними стоит  $r$  других чисел. Тогда перемещение можно выполнить в три этапа — сначала  $r$  перестановками соседних чисел поставить число  $a$  рядом с числом  $b$ , затем поменять местами  $a$  и  $b$  и, наконец, еще  $r$  перестановками соседних чисел отправить  $b$  на то место, где раньше стояло  $a$ . Всего мы сделаем  $2r + 1$  перестановку соседних чисел, т. е. обязательно нечетное число, а так как при каждой такой перестановке четность числа беспорядков меняется, то в конце всей операции четность перестановки изменится.

Теперь мы уже можем закончить анализ игры в 15. Каждое расположение шашек в этой игре можно задать с помощью некоторой перестановки 16 чисел (число 16 ставится на место свободной клетки). Для этого надо выписать по очереди номера шашек сначала в первой, затем во второй, в третьей и под конец в четвертой строках. Например, позиция на рис. 84 задается так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, 16. Каждое перемещение шашки на свободное место означает перестановку ее номера с числом 16 — номером пустого места, поэтому каждое такое перемещение меняет четность

перестановки. Тогда две перестановки чисел 1, 2, ..., 16, получаемые друг из друга четным числом таких попарных обменов местами, должны иметь одинаковую четность. Но в каждой перестановке участвует пустая клетка («шашка 16»). А чтобы она под конец вернулась на прежнее место, она должна сделать столько же ходов влево, сколько и вправо, столько же ходов вверх, сколько и вниз. Значит, она должна сделать четное число ходов. Поэтому все перестановки, получаемые из стандартной перестановки перемещениями шашек в коробке и имеющие пустую клетку в правом нижнем углу, должны иметь ту же четность, что и стандартная перестановка, т. е. быть четными. А позиции на рис. 84 соответствуют нечетная перестановка, имеющая один беспорядок. Значит, перевести ее в стандартную невозможно.

Такие доказательства невозможности играют большую роль в комбинаторике.

### Задачи

25. Докажите, что 77 телефонов нельзя соединить друг с другом так, чтобы каждый был соединен ровно с 15 другими.

26. На международном научном конгрессе некоторые участники обменивались рукопожатиями. Докажите, что число участников, сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

27. Докажите, что невозможно занумеровать ребра куба числами 1, 2, 3, ..., 12 так, чтобы для всех вершин сумма номеров выходящих из них трех ребер была одной и той же.

Сколькоими способами можно осуществить такую нумерацию с помощью чисел 1, 2, ..., 6, 8, ..., 13? А с помощью чисел 1, 2, 4, 5, 6, ..., 13? С помощью чисел 1, 2, ..., 10, 12, 13?

28. Сколько инверсий во всех перестановках чисел 1, 2, ...,  $n$ ?

29. В шести секторах круга расположено 6 шашек по одной в каждом секторе. Одним ходом разрешается любые две шашки передвинуть в соседние секторы так, что одна движется по часовой стрелке, а другая — против часовой стрелки. Можно ли собрать такими ходами все шашки в одном секторе?

30. На доске написаны подряд несколько плюсов и несколько минусов. Разрешается заменить два рядом стоящих знака плюсом, если эти знаки одинаковы, и минусом, если они различны. Докажите, что независимо от порядка, в котором заменяются знаки, последним останется один и тот же знак.

31. На окружности в произвольном порядке выписаны 4 единицы и 5 нулей. Затем в промежутке между одинаковыми числами пишется 1, а между разными — 0, после чего первоначальные цифры стираются. Докажите, что, повторяя этот процесс, мы никогда не получим набор из 9 единиц.

32. По кругу выписаны  $p$  «плюсов» и  $k$  «минусов». Пусть  $t$  — число пар рядом стоящих «плюсов», а  $m$  — число пар рядом стоящих «минусов». Докажите, что  $p - k = t - m$ .

33. Каждое из чисел  $x_1, \dots, x_n$  равно 1 или -1. Известно, что  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1 = 0$ . Докажите, что  $n$  делится на 4.

**34.** Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари двух враждующих сторон. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что общее число рыцарей делится на 4.

### 138. Острова и мосты

В начале XVIII века была весьма популярна головоломка о кенигсбергских мостах. В городе Кенигсберге (ныне Калининграде) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Прегеля (ныне Преголь) и между собой так, как показано на рис. 85. Задача состояла в отыскании маршрута прогулки, начинавшейся и кончавшейся в одном и том же месте, причем требовалось ровно один раз пройти каждый мост. Все попытки найти подбором такой маршрут кончались неудачей. Причину этих неудач выяснил в 1736 г. Эйлер, указавший общие условия разрешимости или неразрешимости подобных задач.

Чтобы прояснить математическую сущность задачи, Эйлер заменил оба острова, а также участки суши по обоим берегам реки, точками, а мосты изобразил линиями, соединяющими эти точки (рис. 86). Теперь задача свелась к следующему.

*Имеется несколько точек; некоторые из них соединены линиями. При каком условии существует маршрут, начинающийся и кончающийся в одной и той же точке и проходящий один и только один раз по каждой линии?*

Очевидны два необходимых условия разрешимости этой задачи: во-первых, система точек и линий не должна распадаться на несколько отдельных частей (или, как говорят, она должна быть *связной*), а во-вторых, из каждой точки должно выходить четное число линий. В самом деле, при обходе маршрута мы должны столько же раз войти в каждую точку, сколько раз из нее выходим, так как иначе в этой точке маршрут прервется. Поскольку это условие не выполняется для схемы на рис. 86, то решить задачу о мостах невозможно. Невозможно найти и маршрут, проходящий по всем мостам, даже если снять требование начинать и кончать его в одной и той же точке. В этом случае всего из двух точек (начала и конца маршрута) может выходить нечетное число линий. Но на рис. 86 не две, а четыре такие точки, а потому и эта задача неразрешима.

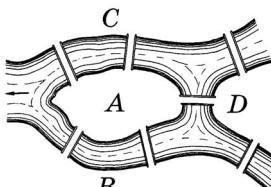


Рис. 85

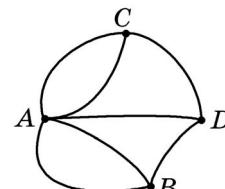


Рис. 86

Сформулированное выше необходимое условие является и достаточным: если в системе точек и линий из каждой точки выходит четное число линий, причем эта система связна, то можно обойти все линии, начав и кончив маршрут в одной точке и пройдя каждую линию лишь один раз.

В самом деле, выйдем из какой-нибудь точки  $A$  и будем идти до тех пор, пока это возможно. Так как из каждой точки выходит четное число линий, то попав в какую-нибудь точку, мы можем из нее и выйти. Единственным исключением является исходная точка, в которой и закончится наш маршрут.

Однако может случиться, что этот маршрут прошел лишь по части линий. Тогда, стерев пройденные линии, мы получим новую систему, в которой из каждой точки выходит четное число линий. Поэтому и в новой системе есть замкнутый маршрут, выходящий, например, из точки  $B$  старого маршрута. Тогда выйдем из точки  $A$ , пройдем по старому маршруту до точки  $B$ . От точки  $B$  пройдем новый замкнутый маршрут, а затем пойдем дальше по старому пути, пока не закончим его в точке  $A$ . Таким образом исходный маршрут окажется расширенным.

Повторяя такие расширения, мы получим в конце концов замкнутый маршрут, проходящий через все линии системы. Аналогично разбирается случай, когда имеются две точки, из которых выходит нечетное число линий.

Системы точек и линий, аналогичные рассмотренным выше (графы), встречаются во многих областях математики и ее приложений — в физике, химии, электронике, теории связи, генетике, психологии, экономике, лингвистике и т. д. В настоящее время теория графов является одной из стремительно развивающихся областей математики.

### 139. Кругосветное путешествие

В 1859 г. королевский астроном Ирландии сэр Уильям Роун Гамильтон, известный своими глубокими исследованиями по математической физике, теоретической механике и открытием исчисления кватернионов, придумал игру «Кругосветное путешествие» и продал свою идею за 25 гиней фабриканту игрушек. Утверждают, что эта сумма была единственным заработком, полученным Гамильтоном за свои математические открытия. В этой игре требовалось найти путь, проходящий через все вершины графа, изображенного на рис. 87, так, чтобы побывать в каждой вершине лишь один раз и вернуться назад (в вершинах были написаны названия городов).

На рис. 87 показан один из гамильтоновых путей. Такие пути существуют далеко не для всех графов. Однако в отличие от задачи Эйлера до сих пор неизвестны необходимые и достаточные условия для существования гамильтонова пути на графике. Необходимым является отсутствие в графике точек, уда-

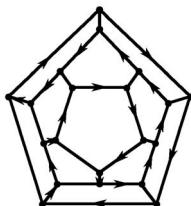


Рис. 87

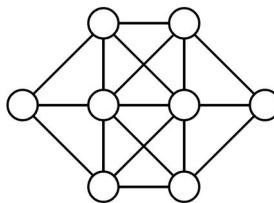


Рис. 88

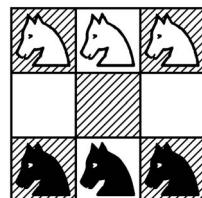


Рис. 89

ление которых привело бы к его распадению на две части — если бы в нем были такие точки, то мы должны были бы при обходе побывать в них по крайней мере дважды. Доказано, что если граф без разбивающих точек не имеет гамильтонова пути, то он содержит часть, состоящую из двух точек и трех соединяющих их линий.

### Задачи

35. Расставьте в кружки (рис. 88) числа 1, 2, 3, ..., 8 так, чтобы два последовательных числа не оказались в кружках, соединенных отрезком.

36. Можно ли и за сколько ходов поменять местами белых и черных коней на рис. 89, делая поочередно ходы белыми и черными конями?

37. Заданные  $n$  точек соединены отрезками так, что каждая точка соединена хотя бы с одной точкой, причем от любой точки к любой другой можно перейти ровно одним путем из этих отрезков. Докажите, что число отрезков равно  $n - 1$ .

38. Даны  $n$  точек,  $n > 4$ . Каждую пару точек можно соединить одной стрелкой. Докажите, что можно так поставить стрелки, что из каждой точки можно будет попасть в любую другую, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (идти по каждой стрелке можно только в указанном на ней направлении).

39. Два графа с общими вершинами называются *дополнительными* друг к другу, если во втором соединены дугами те и только те вершины, которые не соединены дугами в первом графе. Докажите, что для любого  $m$  найдется такое  $N$ , что из любых двух дополнительных графов с  $N$  вершинами хотя бы в одном можно выбрать  $m$  точек, каждая пара которых соединена дугой.

40. Каждая пара из  $n$  точек соединена дугой. Каждая дуга окрашена в один из  $k$  цветов так, что любые две дуги одинакового цвета имеют общую вершину. Докажите, что  $k \geq n - 2$ .

41. Назовем граф *четным*, если в нем каждый замкнутый путь состоит из четного числа ребер. Докажите, что граф четен в том и только в том случае, когда его вершины можно раскрасить двумя цветами так, что вершины одного и того же цвета не соединены ребрами.

42. Докажите, что если из каждой вершины четного графа выходит не более  $k$  ребер, то ребра графа можно раскрасить  $k$  цветами так, что никакие два ребра одного цвета не выходят из одной вершины.

43. Некоторые из  $n$  точек соединены отрезками так, что каждая точка соединена с  $p$  другими. Какие значения может принимать  $p$ ?

44. Из шести ребер тетраэдра можно выбрать четыре ребра, образующих замкнутый пространственный четырехугольник. Этот четырехугольник содержит все вершины тетраэдра. Подобное можно сделать с кубом — мы получим восьмиугольник, содержащий все вершины куба. Можно ли сделать то же самое с октаэдром, додекаэдром, икосаэдром? Сколько будет решений для каждого многогранника?

### 140. Четыре краски

Многие математические задачи формулируются настолько просто, что их содержание можно объяснить любому школьнику, однако элементарное решение этих задач до сих пор неизвестно. Из них, наряду с проблемой Ферма (к сегодняшнему дню решенной, хотя и не элементарными методами), самой знаменитой является проблема четырех красок. Она формулируется следующим образом.

*Доказать, что любую карту на плоскости можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две смежные страны не были покрашены в один цвет.* При этом каждая страна должна состоять из одной связной области, а две страны считаются смежными, если они имеют общую границу в виде линии (а не только нескольких точек).

Если изобразить каждую страну точкой, а страны, имеющие общую границу, соединить линией, то получим граф, и задача будет идти о раскраске вершин этого графа четырьмя красками так, чтобы две смежные вершины оказались покрашенными в разные цвета.

Справедливость сформулированной гипотезы была доказана довольно давно для всех карт, содержащих менее 40 стран. Для любой карты доказана возможность раскрасить ее требуемым образом пятью красками.

В 1976 году появилось сообщение, что решение этой задачи сведено к перебору некоторого конечного (хотя и большого) числа вариантов и этот перебор с помощью компьютера произведен (т. е. справедливость теоремы доказана), но элементарного решения этой задачи пока не найдено.

### 141. Код Хемминга

Есть множество комичных историй, связанных с перевранными телеграммами. Достаточно было телеграфисту заменить одну точку на тире или случайно добавить лишний знак, и одна-две буквы оказывались неверными, а тогда и вся телеграмма получала значение, противоположное правильному.

Но есть и другие истории. Рассказывают, что однажды редактор провинциальной газеты поместил такое сообщение о коронации Николая II: «Митрополит возложил на голову Его Императорского Величества ворону». На другой день было дано

исправление опечатки: вместо «ворону» читать «корову». Однако ... ведь все и так поняли, что было возложено на голову Его Императорского Величества. В современных терминах об этой ситуации можно сказать так. При передаче информации от корреспондента газеты читателям в тексте возникли искажения. Но избыточность языка позволяет выявить ошибку и однозначно восстановить правильный текст.

Избыточность означает, что ту же самую информацию можно передать, затратив меньше символов. Довольно часто избыточность стараются устраниТЬ, так как это позволяет экономичнее передавать и сохранять информацию (в компьютере, в памяти мобильного телефона и в других устройствах). Файл меньшего объема может быть получен быстрее и займет меньше места на носителе. Существует специальный класс компьютерных программ, называемых *архиваторами*, задача которых — уменьшить объем информации, не искажая ее. Архиватор должен сжать файл, но так, чтобы можно было произвести и обратное преобразование, т. е. по сжатому файлу восстановить исходный. Для этих программ разработан ряд математических алгоритмов, позволяющих решить данную задачу. Основная сложность задачи заключается в том, что для разных видов информации оптимальны разные алгоритмы сжатия, учитывающие особенности данного типа информации. Программа должна проанализировать содержимое файла и подобрать оптимальные параметры алгоритма для его сжатия. Комбинаторика играет в данных алгоритмах важную роль.

Помимо архиваторов общего назначения, которые могут сжать любой файл (не всегда эффективно), существует ряд специализированных алгоритмов. Они применяются для сжатия мультимедийной информации (изображения, музыка, видео), отличающейся тем, что она передает множество мелких деталей (типа отдельных точек на изображении высокого разрешения), каждая из которых по отдельности не воспринимается. Соответствующие алгоритмы осуществляют сжатие с потерями информации, при котором малосущественные детали пропадают. Обычно при этом можно выбрать степень сжатия, соблюдая разумный баланс между качеством и объемом информации.

Например, сжатие фотографий алгоритмом JPEG основано на том, что цвета соседних точек, как правило, близки. Искажения проявляются на резких границах цветовых зон, которые становятся более размытыми. Алгоритм сжатия музыки MP3 основан на том, что человеческое ухо воспринимает колебания только в определенном диапазоне частот. Колебания вне этого диапазона мы все равно не слышим, так что их можно убрать. Также можно немного загрузить те колебания, которые мы слышим. Для того, чтобы заметить разницу, нужно иметь хороший музыкальный слух. Зато это позволяет сжать музыкальный файл в 10 раз по сравнению с тем, как он хранится на аудио компакт-дисках.

Естественные языки обладают значительной избыточностью. В этом можно убедиться следующим образом. Возьмите фрагмент текста, удалите из него каждую пятую букву и попросите кого-либо восстановить текст. В редких неудачных ситуациях пропуск даже одной буквы может искажить смысл слова и даже целой фразы. Но чаще всего пропуск буквы совершенно не

мешает чтению, а нередко вообще остается незамеченным. А это как раз и означает избыточность, раз удаление части букв не повредило информацию, которую несет текст.

По результатам исследований одноголосого универсистата, не имеет занчения, в каком порядке расположены буквы в слове. Галвоне, чтобы преавя и сплоеная буквы были на месте. Остальные буквы могут сдвигаться в любом беспорядке, все равно текст читается без проблем. Проверкой этого является то, что мы не читаем каждую букву по отдельности, а все слово целиком.

Не обязательно привести примеры для успешного распознавания слов — избыточность языка позволяет просто выбрасывать буквы (преимущественно гласные).

Замечательным обстоятельством является то, что избыточность различных естественных языков практически одинакова и достигает 75–80%. Избыточность естественного языка совершенно необходима, чтобы люди могли общаться, несмотря на окружающие шумы и особенности индивидуальной дикции, она естественным образом поддерживается в ходе эволюции языков и выполняет определенную функцию по защите от помех. А поскольку эти звуковые помехи не сильно отличаются в разных частях земли, то это и является причиной того, что величины избыточности разных языков оказываются близки.

Во многих ситуациях необходимо вводить избыточность искусственным образом для защиты важных данных от ошибок и искажений. Так, в финансовых документах основные денежные суммы часто пишут дважды: один раз цифрами, а второй раз — прописью (словами). Такое дублирование в определенной степени защищает важную информацию в документе от ошибок, как случайных, так и преднамеренных. В обыденной жизни мы также часто пользуемся различными приемами подобного рода. Например, когда передаем по телефону важную информацию, в которой ошибки недопустимы, то часто диктуем слова «по буквам».

Существует область математики, которая изучает использование избыточности в подобных целях, она была создана американским математиком Клодом Шенноном и называется *теория передачи информации*. В ней рассматривается ситуация, когда сообщения передаются по каналу связи с помехами (*шумами*), искажающими сообщение. Умелое добавление избыточности позволяет при определенных условиях (если ошибок не слишком много) обнаруживать ошибки и исправлять их.

Обычно при передаче информации используется двоичный канал, т. е. сообщение кодируется последовательностью нулей и единиц, вроде 0010000100010000001000010000. Шум проявляет себя тем, что иногда меняет ноль на единицу или наоборот.

Простейший метод обнаружения ошибок (и один из первых) называется *контроль по четности*. Передаваемая последовательность делится на блоки одинаковой длины. К каждому

блоку добавляется в конце один двоичный символ так, чтобы общее количество единиц в каждом блоке было четным. Например, если взять длину блока равной 7, то сообщение выше превратится в 00100001 10001000 00001000 ...

Первые 7 символов в каждом блоке называются *информационными*, так как они в точности содержат передаваемую информацию. Добавляемые последние символы называются *пропорочными*. Они не содержат никакой новой информации, так как однозначно определяются по информационным символам, зато явным образом вносят в сообщение избыточность — если при передаче произойдет одна ошибка в одном блоке, то количество единиц станет нечетным и получатель это обнаружит. Правда, определить точное место ошибки и исправить ее не сможет. А если в одном блоке произойдет две ошибки, то этот факт даже не будет обнаружен. Говорят, что контроль по четности *обнаруживает одну ошибку*.

Возникает вопрос: нельзя ли так организовать передачу сообщения, чтобы при возникновении сбоя можно было обнаружить не только факт сбоя, но и место ошибки и исправить ее? Такие методы существуют. Рассмотрим один класс *кодов, исправляющих ошибки*, который предложил американский математик Ричард Хемминг. Чтобы понять принцип кода Хемминга, рассмотрим контроль по четности с позиций комбинаторики.

Назовем *расстоянием* между двумя словами количество позиций, на которых символы в этих словах различаются. Например, 11110000 отстоит от 11110001 на расстояние 1, а от 01110001 на расстояние 2. Каждая ошибка, произошедшая в слове при передаче, увеличивает расстояние между переданным и принятым словами на 1. Когда мы используем для передачи информации некоторый *код*, то это означает, что мы выбираем среди всех возможных слов некоторый набор допустимых, которые называются *кодовыми словами*, и используем для передачи только их. Так, в приведенном выше примере код состоит из всех последовательностей длины 8, в которых число единиц четно. Расстояние между любыми двумя такими словами не меньше 2. Поэтому одна ошибка обязательно переводит допустимое слово в недопустимое, что и позволяет ее обнаружить.

А чтобы одну ошибку можно было не только заметить, но и исправить, надо, чтобы расстояние между двумя допустимыми словами было не меньше 3. Тогда любая одиночная ошибка приведет к тому, что будет получено недопустимое слово, отстоящее на 1 от передаваемого. При этом от любого другого кодового слова оно будет отстоять на расстояние 2 или больше. Это позволяет однозначно восстановить передаваемое слово, т. е. исправить одиночную ошибку.

В коде Хемминга мы делим исходную последовательность на блоки, содержащие по 4 информационных символа, и добавляем к каждому такому блоку 3 проверочных символа. Первый проверочный символ дополняет по четности символы с номерами 2, 3 и 4, второй — 1, 3 и 4, третий — 1, 2 и 4. Например, желая передать блок 1011, мы добавляем к нему проверочные символы 010 и посылаем блок 1011010. Иными словами, мы тратим 7 двоичных символов для того, чтобы передать лишь 4. Говорят, что мы передаем информацию *со скоростью 4/7*.

Проверим, что расстояние между любой парой кодовых слов не меньше 3. Проверки по четности формируются так, чтобы выполнялось два условия. Во-первых, любой информационный символ должен входить как минимум в две проверки. Во-вторых, для любой пары информационных символов должна существовать проверка, в которой проверяется только один из них. Тогда, если мы изменим один информационный символ, то в силу первого условия изменятся не менее двух проверочных и блоки окажутся друг от друга на расстоянии 3 (или больше). Если изменяются 2 информационных символа, то в силу второго условия будет также изменен хотя бы один проверочный и мы приходим к тому же выводу. Если же изменяются 3 или более информационных символа, то соответствующие кодовые слова уже окажутся на расстоянии не менее 3.

Разумеется, использование кодов, исправляющих ошибки, происходит не бесплатно — запас допустимых слов оказывается меньше, чем запас всех слов заданной длины  $n$  (как и в естественных языках — не любая совокупность знаков имеет смысл). Для оценки эффективности данного кода надо знать, каким вообще может быть *объем*  $M(n, r)$  кода, использующего кодовые слова длины  $n$  из цифр 0 и 1, отличающиеся друг от друга по крайней мере в  $2r + 1$  координате (ясно, что чем больше  $r$ , тем меньше должно получиться «слов»).

Мы рассматриваем случай  $n = 7$ ,  $r = 1$  — кодовые слова из 7 знаков, расстояние между ними 3. Всего слов длины 7 будет  $2^7$ . К каждому допустимому примыкают  $C_7^1$  слов, находящихся от него на расстоянии 1 — они получаются изменением одного из 7 знаков. Всего получаем пачку из 8 слов на одно допустимое. Значит, допустимых слов не больше, чем  $2^7 : 8 = 16$ . Таким образом, построенный код Хемминга оптimalен.

В общем случае получается оценка числа  $M(n, r)$  допустимых «слов»  $\frac{2^n}{\sigma(n, 2r)} \leq M(n, r) \leq \frac{2^n}{\sigma(n, r)}$ , где  $\sigma(n, r) = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^r$ .

Отметим, что если к построенному коду Хемминга добавить еще одну проверку на четность, проверяющую все имеющиеся 7 позиций, то построенный код будет не только исправлять любую одиночную

ошибку, но и обнаруживать любую двойную ошибку. Однако исправить двойную ошибку такой код не может.

Сам Хемминг предложил код, основанный на двоичной системе счисления. В двоичной системе счисления записывают *номер* каждого места, на котором стоит 1. Кодовыми словами считают лишь те, для которых совокупность полученных записей имеет в каждом разряде четное число единиц. Например, 1011010 — кодовое слово, так как в нем единицы стоят на 1-м, 3-м, 4-м и 6-м местах, а записи этих чисел в двоичной системе счисления имеют вид 001, 011, 100, 110 и выполнен контроль по четности по каждому из 3 разрядов. А поскольку двоичные записи чисел 1, 2 и 4 имеют вид 001, 010 и 100, то на этих местах как раз стоят три контроля по четности остальных знаков.

### Задачи

45. Девять человек разбиваются на 3 тройки четыре дня подряд различными способами. Докажите, что их можно разбивать так, чтобы никакие два человека не попали дважды в одну тройку.

46. Майки с номерами от 1 до  $n$  раздали  $n$  школьникам и выстроили школьников в ряд в порядке возрастания номеров. По команде каждый может либо оставаться на месте, либо обменяться с кем-нибудь (даже далеко стоящим) местами. Можно ли после двух команд получить расположение  $n, 1, 2, \dots, n - 1$ ?

47. Имеется радиолампа с 7 штырьками, расположенными по кругу на одинаковых расстояниях друг от друга, которая вставляется в ламповую панельку с 7 гнездами, также расположенными на равном расстоянии друг от друга.

Занумеруйте штырьки и гнезда цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы при любом втыкании лампы в розетку хотя бы один штырек попал в гнездо с тем же номером.

48. Имеется 10 белых и 10 черных кеглей. Можно ли выбрать из них 10 кеглей и составить равносторонний треугольник (см. рис. 46 в п. 89) так, чтобы в нем не было частичных равносторонних треугольников с одноцветными вершинами?

49. В вершинах правильного семиугольника расположены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишечки одного цвета, расположенные в вершинах равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное рассуждение для восьмиугольника? Для каких правильных  $n$ -угольников оно верно, а для каких — нет?

50. В трехмерном пространстве девять точек размещены так, что никакие три не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками в точности с четырьмя другими. Докажите, что всегда найдется хотя бы один треугольник с вершинами в этих точках.

51. Из шахматной доски вырезаны две угловые клетки, расположенные на одной диагонали. Можно ли замостить эту доску прямоугольниками  $1 \times 2$  (домино)?

52. Из шахматной доски удалены две клетки разных цветов. Докажите, что оставшуюся доску можно замостить прямоугольниками  $1 \times 2$ .

53. Из  $(n \times n)$ -доски вырезали одну угловую клетку. Можно ли замостить полученную фигуру с помощью прямоугольников  $1 \times 2$  так, чтобы число горизонтально расположенных прямоугольников было равно числу вертикально расположенных?

54. Назовем «тримино»  $(1 \times 3)$ -прямоугольник. С помощью 21 тримино можно покрыть 63 поля шахматной доски. Какое поле может при этом оставаться свободным?

55. Из шахматной доски с 10 горизонталями и 10 вертикалями вырежьте наименьшее число полей так, чтобы из оставшейся части доски нельзя было вырезать прямоугольник  $1 \times 4$ .

56. Дно прямоугольной коробки выложено плитками  $2 \times 2$  и  $1 \times 4$ . Плитки высыпались, одна плитка  $2 \times 2$  разбилась и ее заменили на плитку  $1 \times 4$ . Докажите, что теперь замостить дно коробки не удастся.

57. Для каких натуральных чисел  $a, b, c, d$  можно  $(a \times b)$ -прямоугольник разрезать на  $(c \times d)$ -прямоугольники?

58. Докажите, что из конечного числа попарно различных кубиков нельзя сложить прямоугольный параллелепипед.

59. Из двухсот чисел 1, 2, ..., 200 выбрали одно число, меньшее 16, и еще 99 других чисел. Докажите, что среди выбранных ста чисел есть два, из которых одно делится на другое.

60. Даны числа 1, 2, ..., 100. Найдите наименьшее число  $m$ , обладающее таким свойством: какие бы  $m$  из данных чисел ни выбрать, среди них найдутся два, из которых одно делится на другое.

61. Докажите, что из 981 чисел, не превосходящих 1958, можно выбрать три таких числа, что сумма двух из них равна третьему. Верно ли это утверждение для 980 чисел?

62. Докажите, что из любой перестановки чисел 1, 2, ..., 101 можно выбрать 11 чисел, идущих или в порядке возрастания, или в порядке убывания.

63. Докажите, что из любых ста целых чисел можно выбрать одно или несколько так, чтобы сумма выбранных чисел оканчивалась двумя нулями.

64. В городе Лиссе 10 000 телефонов, номера которых четырехзначны (от 0000 до 9999). В центральном районе установлено более половины всех телефонов. Докажите, что хотя бы один из номеров центральных телефонов равен сумме номеров двух других центральных телефонов.

65. Имеется  $2k+1$  карточек с числами от 1 до  $2k+1$ . Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

66. Разбейте множество чисел  $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$  на три подмножества так, чтобы ни в одном подмножестве не было тройки чисел  $x, y, z$ , для которой  $x + y = z$ .

67. Докажите, что множество чисел  $\{1, 2, \dots, (3^n - 1)/2\}$  можно разбить на  $n$  подмножеств так, что ни в одном из этих подмножеств не будет трех чисел  $x, y, z$ , для которых  $x + y = z$ .

68. Докажите, что при любом разбиении множества чисел  $\{1, 2, 3, \dots, 750\}$  на три подмножества хотя бы одно из этих подмножеств содержит числа  $x, y, z$  такие, что  $x + z = 2y$ .

69. В сумме  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (2n - 1)$  вычеркивают  $n - 1$  число так, что если вычеркнуты числа  $a$  и  $b$ , то вычеркивается и их сумма. Найдите способ вычеркивания, при котором сумма оставшихся чисел наибольшая.

**70.** Имеется несколько натуральных чисел, каждое из которых не больше, чем  $n$ . При любом разбиении этих чисел на две группы сумма чисел хотя бы в одной группе не превышает  $n$ . Найдите наибольшее значение суммы всех чисел.

**71.** Докажите, что из любых 10 различных двузначных чисел можно выбрать две различные группы чисел, имеющие одинаковую сумму.

**72.** В вершине  $A_1$  правильного 12-угольника стоит знак минус, а в остальных вершинах — плюсы. Разрешается одновременно поменять знаки на противоположные в любых шести последовательных вершинах 12-угольника. Докажите, что за любое число таких операций нельзя добиться, чтобы в вершине  $A_2$  оказался знак минус, а в остальных — плюсы. Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в 6, а в 4 (и даже в 3) соседних вершинах многоугольника.

**73.** На окружности выписаны  $n$  чисел, каждое из которых равно 1 или  $-1$ , причем для любого  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  сумма  $n$  попарных произведений чисел, отстоящих друг от друга на  $k$  мест, равна нулю. Докажите, что  $n$  — квадрат некоторого числа.

**74.** На окружности взято несколько точек; одни из них обозначены буквой А, другие — буквой Б. На каждой из дуг, на которые окружность делится взятыми точками, ставим число по следующему правилу: если обе концевые точки обозначены буквами А, то ставим число 2; если буквами Б, то ставим  $1/2$ ; если же концевые точки обозначены разными буквами, то ставим число 1. Докажите, что произведение всех поставленных чисел равно  $2^{a-b}$ , где  $a$  — число точек, обозначенных буквой А, а  $b$  — число точек, обозначенных буквой Б.

**75.** На окружности взято  $n$  точек, часть из которых помечена знаком «плюс», а остальные — знаком «минус». Докажите, что существует не более чем  $\left[\frac{3n+4}{2}\right]$  хорд, соединяющих точки с разными знаками и не пересекающихся внутри окружности.

**76.** Окружность разбита на пять равных частей точками  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ . Поставьте около каждой точки число 1 или  $-1$  так, чтобы сумма произведений каждого числа на число, отстоящее от него на  $k$  шагов против часовой стрелки при  $k = 1, 2, 3, 4$ , равнялась  $-1, 0$  или  $1$ . Решите аналогичную задачу в случае, когда окружность разбита на  $n = 7, n = 11$  и  $n = 13$  частей, в каждом случае  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**77.** По кругу расположены  $n$  чисел, имеющих положительную сумму. Докажите, что среди них найдется такое число, что для любого  $k$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ , сумма выбранного числа и  $k$  чисел, идущих за ним по часовой стрелке, положительна.

**78.** Имеется 1955 точек. Какое наибольшее число троек точек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели ровно одну общую точку?

**79.** В множестве, состоящем из  $n$  элементов, выбрано  $2^{n-1}$  подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

80. Натуральные числа от 1 до  $n$  располагаются на окружности в некотором порядке. Это расположение назовем  $n$ -цепочкой. Можно ли найти  $\left[\frac{n-1}{2}\right]$  таких  $n$ -цепочек, что два числа, соседние в одной из них, не являются соседними ни в какой другой ( $[a]$  — целая часть числа  $a$ )?

81. На карточках в столбик написано по  $n$  целых чисел, каждое из которых заключено в пределах от 1 до  $k$  ( $k \geq 2$ ). В коробках  $A$  и  $B$  лежат некоторые количества таких карточек, причем в каждой коробке нет одинаковых карточек, но в разных коробках они могут быть. Более того, известно, что у любой карточки из  $A$  и любой карточки из  $B$  хотя бы на одном месте написаны одинаковые числа. Докажите, что либо в  $A$ , либо в  $B$  лежит не более чем  $k^{n-1}$  карточек.

Сначала докажите это утверждение для  $k = 2$  и любого  $n$ , затем для  $n = 1, 2, 3$  и любого  $k$  и, наконец, в общем случае.

82. Среди целочисленных неотрицательных решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$  требуется выбрать наибольшее число решений так, чтобы в любых двух выбранных решениях каждое неизвестное  $x_j$  принимало различные значения.

83. Даны два разбиения множества  $X$  на непересекающиеся подмножества:  $X = A_1 \cup \dots \cup A_l = B_1 \cup \dots \cup B_m$ . Каждый элемент  $x$  из множества  $X$  принадлежит некоторому  $A_i$  и некоторому  $B_j$ ; поставим ему в соответствие пару натуральных чисел  $(n_i; n_j)$ , где  $n_i$  — число элементов в множестве  $A_i$ ,  $n_j$  — число элементов в множестве  $B_j$ . Разбиения называются *сопряженными*, если различным элементам из  $X$  отвечают различные пары чисел.

Найдите два сопряженных разбиения множества  $X$  из 6 элементов.

Существуют ли такие разбиения для множества из 5 элементов?

84. Докажите, что если в некотором множестве параллельно расположенных прямоугольников нельзя указать более  $n$  попарно непересекающихся прямоугольников, то существует  $n(n+1)/2$  точек, таких, что каждый прямоугольник содержит хотя бы одну из них.

85. На прямой линии задана произвольная система отрезков. Обозначим через  $M$  наименьшее число точек таких, что каждый отрезок системы содержит хотя бы одну из этих точек, а через  $m$  — наибольшее число попарно не пересекающихся отрезков. Докажите, что  $m = M$ .

86. Границы кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на его противоположных граних равна семи. Кубик кантуют из левого нижнего в правый верхний угол доски  $50 \times 50$  (каждая клетка равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку, при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика отпечатывается номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 отпечатанных чисел? Какое наименьшее?

87. В клетках  $(n \times n)$ -таблицы расставлены числа, причем для любого поля сумма чисел в проходящих через него горизонтали и

вертикали не меньше  $s$ . Какое наименьшее значение может иметь сумма всех чисел таблицы?

88. Каждая сторона правильного треугольника  $ABC$  разбита на  $m$  равных частей. Через точки деления проводят прямые, параллельные сторонам, разбивающие треугольник на  $m^2$  треугольников. Найдите наибольшее значение  $N$  такое, что среди вершин полученных треугольников можно выбрать  $N$  точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной одной из сторон треугольника  $ABC$ .

89. Докажите, что если изображенная на глобусе карта такова, что, двигаясь по границам стран, можно обойти все вершины (точки, которые граничат с тремя или более странами) и вернуться в исходную точку, то все страны на карте можно закрасить 4 красками так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены одной краской.

90. Отрезок длины  $3^n$  разбивают на 3 равные части. Первая и третья части называются отмеченными. Каждая отмеченная часть снова разбивается на 3 равные части, из которых отмечают первую и третью. Это продолжается до тех пор, пока не получатся отрезки длины 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Докажите, что для любого  $k$ ,  $1 \leq k \leq 3^n$ , можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно  $k$ .

91. Алфавит состоит из  $n$  букв. Какова максимальная длина слова, если в нем рядом стоящие буквы различны и из него нельзя получить вычеркиванием букв слово вида  $abab$ , где буквы  $a$  и  $b$  какие-нибудь две различные буквы?

92. Квадратная таблица с  $n$  строками и  $n$  столбцами называется *матрицей Адамара*, если

- каждый ее элемент равен 1 или -1;
- для любых двух различных строк  $a_1 a_2 \dots a_n$  и  $b_1 b_2 \dots b_n$  будет  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$ .

Докажите, что число строк любой матрицы Адамара делится на 4.

93. а) Докажите, что для любого числа  $n$  вида  $n = 2^k$  существует матрица Адамара с  $n$  строками.

б) Постройте матрицу Адамара с 12 строками.

94. Пусть  $r$  — нечетное число. Из чисел  $0, 1, \dots, r$  можно составить  $C_{r+1}^2$  пар (пары, отличающиеся лишь порядком элементов, считаются одинаковыми). Назовем *квадратом Рума* квадратную таблицу с  $r$  строками и  $r$  столбцами, в каждой клетке которой записана либо одна из таких пар, либо черточка, причем

- каждая пара  $(i; j)$  входит в таблицу один и только один раз;
- в каждой строке и каждом столбце таблицы выписаны по одному разу все числа  $1, 2, \dots, r$ .

Докажите, что при  $r = 3$  и  $r = 5$  не существует квадратов Рума. Постройте квадраты Рума при  $r = 7$  и  $r = 9$ .

95. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство  $|x| + |y| \leq 1000$ ?

96. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найдите все поля, на которые он может попасть за  $2n$  ходов.

## Глава XI

### ИЗ ИСТОРИИ КОМБИНАТОРИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

#### 142. Дела давно минувших дней...

Говорят, что некто усомнился в правах Ньютона на открытие закона всемирного тяготения, утверждая, что падение яблок на землю наблюдалось испокон веков. В этой шутке есть доля истины — до того, как та или иная область знания формируется в особую науку, она сначала проходит длительный период накопления эмпирического материала, потом развивается в недрах другой, более общей науки и лишь затем выделяется в самостоятельную ветвь. А если ей повезет, то из ветви она становится большим, шумящим лесом со своими земляничными полянами и запутанными тропами.

Не составляет исключения и история науки про общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов, получившей название *комбинаторики*. С задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшие расположения охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы. Определенным образом располагались украшения на одежде, узоры на керамике, перья в оперении стрелы. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке, иерархии, группировании. В том же направлении действовало развитие ремесел и торговли.

Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие в первую очередь умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника. О таких играх английский поэт Уильям Бордсворт писал:

Не нужно нам владеть клинком.  
Не ищем славы громкой.  
Тот побеждает, кто знаком  
С искусством мыслить тонким.

Среди предметов, положенных в пирамиду, где 35 веков тому назад был похоронен египетский фараон Тутанхамон, нашли разграфленную доску с тремя горизонтальными и 10 вертикальными и фигурками для древней игры «сенет», правила которой мы, вероятно, никогда не узнаем. Позже появились нарды, шашки и шахматы, а также их различные варианты (китайские и японские шахматы, японские облавные шашки

«го» и т. д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания передвигаемых фигур и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрывающие комбинации и умел избегать проигрывающих.

Разумеется, в этот период еще не было речи об особой науке про решение комбинаторных задач, с каждой такой задачей приходилось справляться особо.

### 143. Таинственная черепаха

Первое упоминание о вопросах, близких к комбинаторным, встречается в китайских рукописях, относящихся к XII — XIII векам до н. э. Точно датировать эти рукописи невозможно, поскольку в 213 г. до н. э. император Ши Хуан-ди приказал сжечь все книги (они писались на бамбуковых дощечках), так что до нас дошли лишь основанные на них более поздние книги. В этих книгах писалось, что все в мире является сочетанием двух начал — мужского и женского, которое авторы обозначали символами «—» и «—». В рукописи, сейчас известной как «Книга перемен», показаны различные соединения этих знаков по два и по три:

|               |                |             |                   |               |              |                  |               |
|---------------|----------------|-------------|-------------------|---------------|--------------|------------------|---------------|
| —             | — —            | —           | — —               | —             | — —          | —                | — —           |
| —             | —              | — —         | — —               | —             | —            | — —              | — —           |
| —             | —              | —           | —                 | — —           | — —          | — —              | — —           |
| k'ien<br>небо | tui<br>пар     | li<br>огонь | chön<br>гром      | sün<br>ветер  | k'an<br>вода | kön<br>гора      | k'un<br>земля |
| 7             | 6              | 5           | 4                 | 3             | 2            | 1                | 0             |
| Юг            | Юго-<br>Восток | Восток      | Северо-<br>Восток | Юго-<br>Запад | Запад        | Северо-<br>Запад | Север         |

Восемь рисунков из трех рядов символов изображали землю, гору, воду, ветер, гром, огонь, пар и небо (некоторые рисунки имели и иные значения). Неудивительно поэтому, что сумма первых 8 натуральных чисел (т. е. число 36) воплощала в представлениях древних китайцев весь мир. По мере углубления знаний понадобилось выразить и другие элементы мироздания с помощью тех же знаков «—» и «—». Были составлены 64 фигуры, содержащие уже пять рядов черточек. Надо полагать, что удвоение числа рисунков при добавлении одного ряда символов было замечено. Это можно рассматривать как первый общий результат комбинаторики. В этой книге есть и более сложные рисунки. Как утверждает приводимое в ней предание, император Ию (по другой версии Фуси — родоначальник китайской цивилизации) более 2300 лет тому назад увидел на берегу реки Лошуй на панцире священной черепахи рисунок из белых и черных кружков (рис. 90). Если заменить

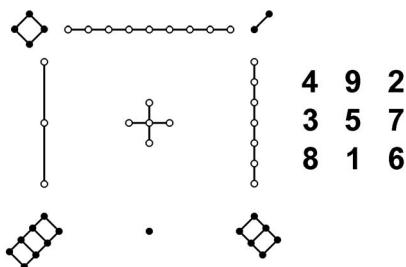


Рис. 90

каждую фигуру соответствующим числом, возникнет таблица, изображенная на том же рисунке справа. При сложении чисел в каждой строке, столбце и диагонали получается одна и та же сумма 15. При том мистическом tolковании, которое придавали числам древние китайцы, открытие таблицы со столь чудесными свойствами произвело неизгладимое впечатление.

Рис. 90 назвали «ло-шу», стали считать его магическим символом и употреблять при заклинаниях. Поэтому сейчас любую квадратную таблицу чисел с одинаковыми суммами по каждой строке, столбце и диагонали называют *магическим квадратом*.

#### 144. Комбинаторика в Древней Греции

Говорить с полной уверенностью об уровне знаний древних греков в области комбинаторики затруднительно, поскольку до нас дошло далеко не все из их научного наследия. В 391 г. н. э. толпа монахов разрушила центр языческой науки — alexандрийский мусейон (храм муз) — и сожгла большую часть хранившейся в нем библиотеки, насчитывающей многие тысячи томов. Остатки библиотеки разрушались в течение еще трех веков, а в 638 г. н. э. она окончательно погибла при взятии Александрии войсками арабского халифа Омара. Большинство научных книг безвозвратно погибло, и мы можем лишь догадываться об их содержании по кратким пересказам и намекам в сохранившихся рукописях.

По этим намекам можно все же судить, что определенные представления о комбинаторике у греческих ученых были. Философ Ксенофрат, живший в IV веке до н. э., подсчитывал число слогов. В III веке до н. э. стоик Хрисипп полагал, что число утверждений, получаемых из 10 аксиом, превышает миллион. По мнению же Гиппарха, из утверждающих аксиом можно составить 103 049 сочетаний, а добавив к ним отрицающие, 310 952.

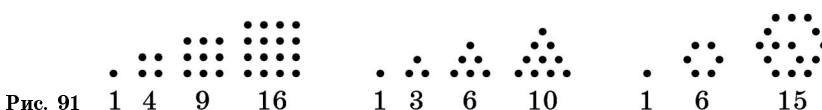
Мы не знаем, какой именно смысл придавали эти философы своим утверждениям и как они получали свои результаты — приводимые Гиппархом числа слишком многозначны, поэтому их нельзя считать результатом грубой оценки, и в то же время они не поддаются разумному истолкованию. По-видимому, у греческих ученых были какие-то дошедшие до нас правила комбинаторных расчетов, скорее всего ложные.

Конкретные комбинаторные задачи, касавшиеся перечисления небольших групп предметов, греки решали без ошибок. Аристотель описал без пропусков все виды правильных трехчленных силлогизмов, а его ученик Аристоксен из Тарента перечислил различные комбинации длинных и коротких слогов в стихотворных размерах. Живший в IV веке н. э. математик Папп рассматривал число пар и троек, которые можно получить из трех элементов, допуская их повторения.

Большое внимание греческие ученые уделяли вопросам, пограничным между комбинаторикой и теорией чисел. Еще в VI веке до н. э. в школе философа и математика Пифагора возникло убеждение, что миром правят числа, а вещи только отражение чисел (возможно, что эти идеи возникли у Пифагора под влиянием вавилонской культуры и восходят к еще более древним взглядам шумеров). Поэтому, чтобы познать мир, пифагорейцы начали изучать свойства натуральных чисел. Их исследования о четных и нечетных числах, делимости чисел, простых и составных числах заложили основу теории чисел (в науке бывает, что неверные исходные установки дают толчок к полезным исследованиям).

Как и китайцы, пифагорейцы придавали особое значение числу 36 — оно было для них не только суммой первых 4 четных и первых 4 нечетных чисел, но и суммой первых трех кубов:  $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$ . Символом совершенства пифагорейцы считали *совершенные* числа, равные сумме своих делителей, например,  $6 = 1 + 2 + 3$ ,  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ , а символом дружбы — *дружественные* числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа (например, 220 и 284). Отыскание таких чисел требовало комбинаторного искусства.

В школе Пифагора была доказана известная теорема о сторонах прямоугольного треугольника. Это вызвало интерес к представлению чисел в виде суммы двух квадратов, к квадратным числам 1, 4, 9, 16 и т. д. Квадраты натуральных чисел изображались при этом геометрически (рис. 91). Но пифагорейцы рассматривали и иные конфигурации точек. Каждый треугольник на рис. 91 получается из предыдущего увеличением длины его стороны на 1. Подсчитывая число точек в каждом треугольнике, получаем последовательность *треугольных* чисел 1, 3, 6, 10, ... Ее можно получить, последовательно складывая натуральные числа: 1,  $1 + 2$ ,  $1 + 2 + 3$ ,  $1 + 2 + 3 + 4$  и т. д.



А шестиугольники приводят к последовательности *шестиугольных* чисел 1, 6, 15, ... получаемых как частичные суммы членов арифметической прогрессии 1, 5, 9 ...

В дальнейшем такие суммы удалось выразить с помощью биномиальных коэффициентов  $C_n^k$ , играющих важную роль в комбинаторике.

Переход от плоскости к пространству дал возможность строить еще более сложные числа. Например, из треугольников можно составить пирамиды. Подсчитывая число точек в таких пирамидах, пришли к пирамидальным числам 1, 4, 10, 20, ..., которые были суммами ряда  $1 + 3 + 6 + 10 + \dots$ , составленного из треугольных чисел. Однако дальнейшие обобщения требовали уже введения многомерных пространств, что лежало за рамками возможностей древнегреческой математики.

Учение о фигурных числах привлекало к себе математиков на протяжении многих столетий. Ими много занимался живший в XVII веке французский ученый Пьер Ферма, который доказал, например, что любое натуральное число есть треугольное или сумма 2 или 3 треугольных чисел; квадратное или сумма 2, 3 или 4 квадратов; пятиугольное или сумма 2, 3, 4 или 5 пятиугольных и т. д. Как и многие другие полученные им результаты, он лишь сформулировал это утверждение в письме к Блезу Паскалю (юрист по основной профессии, Ферма занимался математикой лишь в часы досуга). Частные случаи этой теоремы доказали Эйлер и Лагранж, а общее доказательство было дано в 1815 г. французским математиком О. Коши.

Наряду с комбинаторикой чисел греческие ученые занимались и отдельными вопросами геометрической комбинаторики — правильными и полуправильными многогранниками, составлением фигур из 14 частей особым образом разрезанного квадрата и т. д. Последнему вопросу была посвящена работа Архимеда «Стомахион».

#### 145. Мистики, астрологи, каббалисты

Со II века до н. э. начинается сначала медленный, а потом все более быстрый упадок науки в эллинистических странах, отражавший общий кризис античного общества. Многие работы того времени были посвящены мистическим толкованиям чисел в духе пифагорейцев (например, «Арифметическая теология» неопифагорейца Никомаха, жившего в I – II веках н. э.). Большое развитие получили различные числовые суеверия и толкования, связанные с заменой букв соответствующими числами (греки обозначали числа с помощью букв — первые 9 букв алфавита обозначали числа от 1 до 9, следующие за ними — 10, 20, ..., 90, а последние 9 букв — 100, 200, ..., 900). Были «ученые», называвшиеся каббалистами, которые подвергали такому «анализу» слова Библии и других священных книг

и делали на основе своих изысканий пророчества о будущем мира.

Во время богословских споров, начавшихся после победы христианства, старались получить из имен еретиков число 666 — ведь по Апокалипсису это было «звериное число», символ антихриста. Такие попытки предпринимались и позднее — лютеране пытались вывести число 666 из имени римского папы, а католики — из имени Мартина Лютера. В романе «Война и мир» Л. Н. Толстой описывает, как Пьер Безухов пытался вывести это число из имени Наполеона Бонапарта. Такого рода исследования при всей своей бесплодности давали толчок к дальнейшему развитию комбинаторики.

Наряду с каббалистами и мистиками комбинаторикой в эти темные века упадка науки занимались астрологи. Их интересовал вопрос о движении планет и их «влиянии» на судьбы людей. Особое значение придавали они сочетаниям планет — встречам различных планет в одном знаке Зодиака. Астролог бен Эзра в 1140 г. рассчитал количество сочетаний семи планет по две, по три и т. д. Он знал, что число сочетаний семи планет по две равно числу их сочетаний по пять, а число сочетаний по три равно числу сочетаний по четыре. Если обозначить эти утверждения в современных символах, то получатся равенства  $C_7^2 = C_7^5$  и  $C_7^3 = C_7^4$ .

В окончательном виде формулу для числа сочетаний получил живший в начале XIV века еврейский математик Леви бен Гершон, доказавший, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Однако его работа, написанная на малодоступном большинству ученых древнееврейском языке, осталась почти незамеченной — вновь эту формулу вывел в начале XVII века французский математик П. Эригон.

## 146. Комбинаторика и схоластики

Своеобразной комбинаторикой занимались и логики. Продолжая исследования Аристотеля, они классифицировали понятия и логические рассуждения. В III веке н. э. сириец Порфирий для классификации понятий составил особую схему, получившую название «древа Порфирия». На вершине этого дерева помещалось самое широкое по объему понятие, узлы дерева соответствовали различным расчленениям понятия, а линии между узлами отражали подчиненность понятий друг другу. Подобные деревья сейчас широко применяются в приложениях комбинаторики к самым разным вопросам.

Один из основателей медицины, Гален, во II веке н. э. занимался классификацией силлогизмов, состоящих из четырех частей. Римский философ и математик Боэций (V — VI века н. э.) нашел число пар, которые можно составить из пяти категорий модальности, беря их как в утвердительной, так и в отрицательной форме и ставя либо на место условия, либо на место следствия. Он классифицировал также условные силлогизмы.

Значительное внимание классификации видов суждений уделяла схоластическая наука. В схоластике причудливо переплетались философские изыскания с исследованием проблем, примыкающих к комбинаторике, математической логике, теории множеств и другим современным областям математики. Большином знатоками схоластических исследований были основатели теории множеств Бернард Больцано и Георг Кантор.

Споря о взаимоотношениях членов пресвятой троицы, о соподчиненности ангелов, архангелов, херувимов и серафимов, схоласти были вынуждены рассматривать различные отношения порядка и иерархии — достаточно вспомнить сложнейшую архитекторнику загробного мира с ее кругами ада и различными областями чистилища и рая, описанную Данте в «Божественной комедии».

Схоласт Раймонд Люллий создал в XIII веке устройство, состоявшее из нескольких кругов, на которых были нанесены основные предикаты, субъекты, атрибуты и иные понятия схоластической логики. Вращая эти круги, он получал различные сочетания понятий и надеялся получить с их помощью истину.

#### 147. Комбинаторика в странах Востока

В VIII веке н. э. начался расцвет арабской науки. Арабы перевели многие творения греческих ученых, изучили их, а затем продвинулись вперед в областях, мало привлекавших внимание греков, — в науке о решении уравнений (слово «алгебра» — арабского происхождения), теории и практике вычислений и т. д. Решая вопрос об извлечении корней любой степени, арабские алгебраисты пришли к формуле для степени суммы двух чисел, известной под исторически неверным названием «бином Ньютона». По-видимому, эту формулу знал живший в XI — XII веках н. э. поэт и математик Омар Хайям. Во всяком случае, уже в XIII веке такую формулу приводит в своих трудах Насир ад-Дин ат-Туси, а в XV веке она была исследована Гиясэддином ал-Каши.

Судя по некоторым европейским источникам, восходящим к арабским оригиналам, для отыскания коэффициентов этой формулы брали число 10001 и возводили его во 2-ю, 3-ю, ..., 9-ю степени. Получалась таблица

$$10001^1 = \underline{10001}$$

$$10001^2 = \underline{1000} \underline{20001}$$

$$10001^3 = \underline{1000} \underline{3000} \underline{30001}$$

$$10001^4 = \underline{1000} \underline{4000} \underline{6000} \underline{40001}$$

$$10001^5 = \underline{1000} \underline{5001} \underline{1000} \underline{10000} \underline{50001}$$

$$10001^6 = \underline{1000} \underline{6001} \underline{1500} \underline{20001} \underline{15000} \underline{60001}$$

$$10001^7 = \underline{1000} \underline{7002} \underline{1003} \underline{5003} \underline{5002} \underline{10007} \underline{0001}$$

$$10001^8 = \underline{1000} \underline{8002} \underline{2800} \underline{5600} \underline{7000} \underline{56002} \underline{28000} \underline{80001}$$

$$10001^9 = \underline{1000} \underline{9003} \underline{6008} \underline{4012} \underline{6012} \underline{6008} \underline{4003} \underline{60009} \underline{0001}$$

в которой подчеркнуты коэффициенты бинома Ньютона. Если опустить в этой таблице излишние нули и добавить сверху  $10001^0 = 1$ , то получится треугольная таблица из биномиальных коэффициентов.

Арабские ученые знали и основное свойство биномиальных коэффициентов, выражющееся формулой  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ .

Одновременно с арабами вычислением биномиальных коэффициентов занимались китайские математики. Они составили к XIII веке н. э. таблицу таких чисел вплоть до  $n = 8$ , приведенную в книге алгебраиста Чжу Ши-дзе «Яшмовое зеркало». Имеются сведения, что астроном И Синь в VIII веке н. э. вычислил количество различных расположений фигур в игре, напоминавшей шахматы.

Интересовались сочетаниями и в Индии. Еще во II веке до н. э. индийцы знали числа  $C_n^k$  и тот факт, что сумма  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$  равна  $2^n$ . А в XII веке индийский математик Бхаскара написал книгу «Лилавати», в которой среди других вопросов математики изучаются и проблемы комбинаторики. Он писал о применениях перестановок к подсчету вариаций размера в стихосложении, различных расположений в архитектуре и т. д. Он дал также правила для отыскания числа перестановок и сочетаний нескольких предметов, при этом рассматривается случай, когда в перестановках есть повторяющиеся элементы.

## 148. Liber Abaci

В начале XII века Западная Европа начала пробуждаться после многовековой духовной спячки. Развитие торговли с Востоком привело к проникновению в Европу арабской науки. Наиболее смелые и любознательные европейцы пробирались в находившуюся под владычеством арабов Испанию и знакомились там не только с творениями греческих ученых, но и

с достижениями арабской и индийской научной мысли — алгеброй и десятичной системой счисления.

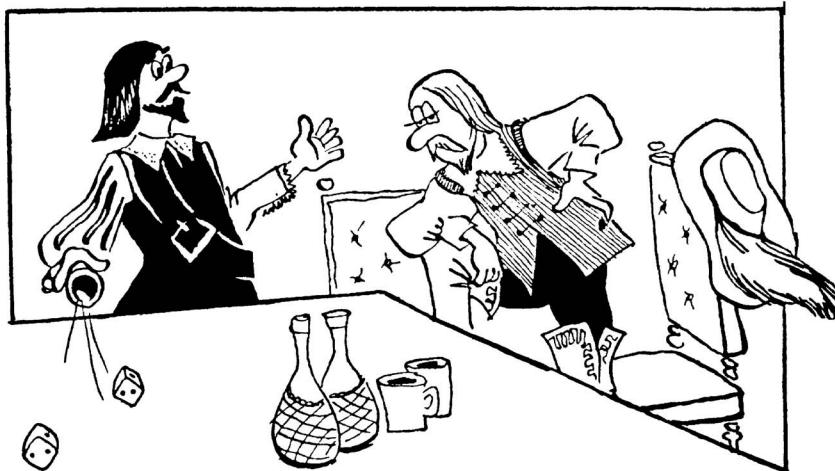
В арабских учебных заведениях получил образование и Леонардо — сын пизанского купца, торговавшего в Алжире. В своей книге «*Liber Abaci*», вышедшей в 1202 г., Леонардо, получивший прозвище Фибоначчи, привел в систему всю арифметику арабов, некоторые сведения по геометрии Евклида и добавил к ним результаты своих изысканий. Труд Фибоначчи содержал и новые комбинаторные задачи, например, об отыскании наименьшего количества гирь, с помощью которых можно получить любой целый вес от 1 до 40 фунтов. Рассматривал Леонардо и отыскание целочисленных решений уравнений. В дальнейшем аналогичные задачи привели к отысканию количества натуральных решений систем уравнений и неравенств, которое может рассматриваться как одна из глав комбинаторики.

Но главной заслугой Леонардо перед комбинаторикой было то, что он сформулировал и решил задачу о кроликах. Со времен греческих математиков были известны две последовательности, каждый член которых получался по определенным правилам из предыдущих — арифметическая и геометрическая прогрессии. В задаче Леонардо появилась новая последовательность, члены которой были связаны друг с другом соотношением  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ . Это была первая в истории науки формула, в которой следующий член выражался через два предыдущих. Подобные формулы получили название *рекуррентных* (от латинского *recurrere* — возвращаться). Метод рекуррентных формул оказался впоследствии одним из самых мощных для решения комбинаторных задач.

#### 149. Игра в кости

Значительный толчок к развитию комбинаторики дали азартные игры, существовавшие еще в глубокой древности, но получившие особенное распространение после крестовых походов. Наибольшее распространение получила игра в кости — два или три кубика с нанесенными на них очками выбрасывали на стол, и ставку брал выбросивший большую сумму очков. В кости играли повсюду, выигрывая и проигрывая в них золото, замки, драгоценные камни и лошадей. Атос — один из героев «Трех мушкетеров» — умудрился играть в кости даже на своего слугу Гrimo.

Постановления церковных соборов, поучения святых отшельников полны грозных запретов этой игры. Мусульманские ученые писали про игру в нарды, в которой передвижения шашек определяются броском костей: «Как же отвратительно для мудрого стать рабом двух камней до такой степени, что он вручает свое достояние и свою землю в их руки, и они



приказывают ему и запрещают, а он подчиняется их руководству больше, чем подчиняется верблюд, когда его ведет маленькая девочка».

Но ничто не помогало, и в любом городе можно было наблюдать картину, описанную в «Божественной комедии» Данте:

Когда кончается игра в три кости,  
То проигравший снова их берет,  
И мечет их один в унылой злости;  
Другого провожает весь народ...

Несмотря на древность игр, в которых применялись кости (археологические раскопки показали, что игральные кости были знакомы еще этрускам и жителям Мохенджо-Даро), они долго не подвергались математическому исследованию. Но игроки, неустанно упражнявшиеся в бросании костей, заметили, что некоторые суммы очков выпадают часто, а другие — редко. Само слово «азартный» происходит от арабского «азар» — трудный, так называли редко выпадавшие комбинации костей.

Пытаясь понять, в чем тут дело, составляли таблицы, показывавшие, сколькими способами можно получить то или иное число очков. На первых порах иногда допускалась ошибка — подсчитывали лишь число различных сочетаний костей, дававших данную сумму. Например, при бросании двух костей сумма 6 получается как  $1 + 5$ ,  $2 + 4$  и  $3 + 3$ , сумма 7 — из сочетаний  $1 + 6$ ,  $2 + 5$  и  $3 + 4$ , а сумма 8 — из сочетаний  $2 + 6$ ,  $3 + 5$  и  $4 + 4$ . Так как каждый раз получается три различных сочетания с данной суммой, то делался ошибочный вывод, что суммы очков 6, 7 и 8 должны выпадать одинаково

часто. Но это противоречило опыту — 7 очков выпадали чаще. Дело в том, что при бросании двух костей сочетание  $3 + 3$  может быть получено единственным образом, а сочетание  $3 + 4$  — двумя способами ( $3 + 4$  и  $4 + 3$ ). Этим объясняется большая частота выпадения суммы 7.

Таким образом, оказалось, что надо учитывать не только сочетания очков, но и их порядок.

Более сложными оказались соответствующие исследования для трех костей. Здесь при учете порядка костей оказывается  $6^3 = 216$  различных комбинаций, а без учета порядка — лишь 56.

Этими вопросами занимались такие известные итальянские математики XVI века, как Д. Кардано, Н. Тарталья и др. Наиболее полно их исследовал в XVII веке Галилео Галилей, но его рукопись оставалась неопубликованной до 1718 г.

## 150. Игрок и ученые

Одним из самых азартных игроков в кости в XVII веке был шевалье де Мере, непрерывно изобретавший новые виды состязаний. Например, он предложил, что будет бросать четыре кости и брать выигрыш лишь в случае, когда хотя бы одна из них откроется на шести. Однако вскоре его партнеры отказались от участия в такой игре — шевалье чаще выигрывал, чем проигрывал. Тогда де Мере придумал новый вариант — он бросал несколько раз пару костей и брал выигрыш, если хотя бы раз выпадали две шестерки. Надо было лишь определить, сколько следует сделать бросков, чтобы игра была ему столь же выгодна, как и первая. Шевалье решил, что надо бросать кости 24 раза. Ведь при четырех бросках одной кости шестерка выпадала более чем в половине случаев, а так как вторая кость дает шесть вариантов выпадения, то и надо умножить 4 на 6. Рассуждение казалось безукоризненным, но опыт не подтвердил надежд де Мере — теперь он стал чаще проигрывать, чем выигрывать.

Другой проблемой для де Мере была задача о разделе ставки. Проблема состояла в следующем: «матч» ведется до шести выигранных партий; он был прерван, когда один игрок выиграл 5 партий, а другой — 4; как разделить ставку? Было ясно, что раздел в отношении 5:4 несправедлив.

Де Мере обратился за разъяснениями к двум крупнейшим математикам Франции XVII века — Блезу Паскалю и Пьеру Ферма. Разбираясь в этих и других задачах, поставленных перед ними де Мере, они сформулировали и доказали первые теоремы комбинаторики и теории вероятностей. А задачу о разделе ставки Паскаль решил в общем случае, когда одному игроку остается до выигрыша  $r$  партий, а второму  $s$  партий. Другое решение задачи дал Ферма.

## 151. Новая ветвь математики

Работы Паскаля и Ферма ознаменовали рождение двух новых ветвей математической науки — комбинаторики и теории вероятностей. Если до них комбинаторные проблемы лишь затрагивались в общих трудах по астрологии, логике и математике, а большей частью относились к области математических развлечений, то уже в 1666 г. Готфрид Вильгельм Лейбниц публикует «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный». Титульный лист книги двадцатилетнего автора, имевшего уже ученую степень бакалавра... юриспруденции, обещал приложения ко всем областям науки и новый подход к логике изобретения, а тематика введения могла соперничать по своей широте с программой, которую, как свидетельствует Льюис Кэрролл, наметил Плотник для бесед с устрицами. Правда, о королях и капусте речи там не было, но зато провозглашалось приложение теории к замкам, органам, силлогизмам, смешению цветов и стихосложению, к логике, геометрии, военному искусству, грамматике, юриспруденции, медицине и теологии.

Однако про эту диссертацию можно сказать то же, что Иммануил Кант сказал о всем творчестве Лейбница: «Знаменный Лейбниц обладал многими действительными знаниями, которыми он обогатил науки, но еще более грандиозны были его замыслы, выполнения которых мир тщетно от него ждал». Диссертация Лейбница должна была стать лишь началом большой работы, о которой он часто упоминал в своих письмах и печатных трудах и для которой делал в своих записных книжках многочисленные заметки. Из них видно, что Лейбниц планировал для комбинаторики все новые и новые приложения: к кодированию и декодированию, играм, статистике, теории наблюдений. Он считал, что комбинаторика должна заниматься одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным расположением, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью. Иными словами, под комбинаторикой Лейбница понимал примерно то, что мы теперь называем дискретной математикой. К области комбинаторики Лейбниц относил и «универсальную характеристику» — математику суждений, т. е. прообраз нынешней математической логики.

Проекты Лейбница казались несбыточными здравомыслящим математикам его времени, но сейчас, после создания компьютеров, многие планы Лейбница стали претворяться в жизнь, а дискретная математика выросла в своем значении настолько, что начала соперничать с классическим математическим анализом.

В 1713 г. племянник Якоба Бернулли (скончавшегося в 1705 г.) Николай опубликовал часть II книги Якоба Бернулли

«Ars conjectandi» («Искусство предположений»), в которой указывались формулы для числа размещений из  $n$  элементов по  $k$ , выводились выражения для степенных сумм и т. д. Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат одному из величайших математиков XVIII века Леонарду Эйлеру, швейцарцу, прожившему почти всю жизнь в России, где он был членом Петербургской академии наук. Основные работы Эйлера в области науки посвящены математическому анализу, в котором он проложил новые пути, создал целый ряд новых областей и подвел итоги исследованиям в других областях. Но у Эйлера хватало времени размышлять и о задачах, которые, казалось бы, не заслуживали его внимания, — о том, можно ли обойти мосты в Кенигсберге (ныне Калининграде) так, чтобы не побывать дважды на одном и том же мосту; можно ли поставить 36 офицеров из 6 разных полков так, чтобы в каждой шеренге и каждой колонне было по одному офицеру каждого воинского звания из каждого полка; сколькими способами можно разбить данное число на слагаемые и т. д. Но, странное дело, работа о мостах явилась зерном, из которого впоследствии выросли топология и теория графов, задача об офицерах оказалась сейчас связанной с планированием экспериментов, а методы, использованные при решении задачи о разбиении чисел, после длительного и сложного пути развития превратились в науку об интегральных преобразованиях, применяемую для решения уравнений математической физики.

После работ Паскаля и Ферма, Лейбница и Эйлера можно было уже говорить о комбинаторике как о самостоятельной ветви математики, тесно связанной с такими областями науки, как теория вероятностей, учение о рядах и многими другими. В конце XVIII века немецкий ученый Гинденбург и его ученики сделали даже попытку построить общую теорию комбинаторного анализа. Однако она не увенчалась успехом — в то время еще не было накоплено достаточного количества важных и интересных задач, которые могли бы дать необходимый фундамент для такой теории.

В XIX веке в ходе исследований по комбинаторике стали прослеживаться связи этой теории с определителями, конечными геометриями, группами, математической логикой и т. д.

## 152. Комбинаторика и шифры

Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали все более и более сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать.

Комбинаторные методы применял для шифрования еще итальянский ученый XVI века Джованни Баттиста делла Порта. Они были основаны на циклической перестановке букв. Русские

дипломаты в XV – XVI веках применяли «тарабарскую грамоту», в которой все гласные буквы оставались неизменными, а согласные заменялись друг на друга по такой схеме:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| б | в | г | д | ж | з | к | л | м | н |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| щ | ш | ч | ц | х | ф | т | с | р | п |

(в первой строке согласные идут в обычном порядке, а во второй строке — в обратном). Однако такие шифры легко разгадывались по характерным сочетаниям букв. Поэтому стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв, заменах букв с использованием ключевых слов и т. д.

Для кодирования и расшифровки привлекались математики. Еще в конце XVI века расшифровкой переписки между противниками французского короля Генриха III и испанцами занимался один из создателей современной алгебры Франсуа Виета. А в Англии XVII века монархистские заговорщики поражались быстроте, с которой Кромвель проникал в их замыслы. Монархисты считали шифры, которыми они пользовались при переписке, неразгадываемыми, и считали, чтоключи к ним были выданы кем-то из участников заговора. И лишь после падения республики и воцарения Карла II они узнали, что все их шифры разгадывал один из лучших английских математиков того времени, профессор Оксфордского университета Уоллис, обладавший исключительными комбинаторными способностями. Он назвал себя основателем новой науки «криптографии» (тайнописи).

### 153. Анаграммы

До XVII столетия почти не было научных журналов. Ученые узнавали о трудах своих коллег из книг или из частных писем. Это создавало большие трудности при опубликовании новых результатов — ведь печатание книг занимало целые годы, а написать о своем открытии в частном письме было рискованно — не ровен час, кто-нибудь присвоит достижение, и поди доказывай, что он узнал это из полученного письма, а не сам придумал. А могло случиться, что получатель письма долго думал над тем же вопросом, нашел его решение, и письмо действительно ничего нового ему не открыло — он сам собирался написать коллеге аналогичное сообщение.

Из-за этого часто возникали споры о приоритете. Еще в конце XVII столетия шли долгие споры о приоритете между Ньютоном и Лейбницем (о том, кто первый создал дифференциальное и интегральное исчисления), между Ньютоном и Гуком (кто первый сформулировал закон всемирного тяготения) и т. д.

А в древности Архимеду пришлось даже пуститься на хитрость. Когда некоторыеalexандрийские ученые присвоили себе его результаты, о которых узнали из полученных от него писем, он написал им еще одно письмо. В нем содержались совершенно замечательные формулы для площадей и объемов некоторых фигур. Александрийцы снова сказали, что эти формулы они давным-давно знают, и ничего нового им Архимед не сообщил. Но тут выяснилось, что Архимед поймал их в ловушку — сообщенные в письме формулы были неверными!

Для того чтобы и приоритет обеспечить, и не допустить преждевременной огласки достигнутых результатов, ученые в краткой фразе формулировали суть открытия, а потом переставляли в ней буквы и посыпали письмо с переставленными буквами своим коллегам. Такие тексты с переставленными буквами называются *анаграммами*. Например, слова «Москва» и «смоква» — анаграммы. Когда же печаталась книга с подробным изложением результата, в ней давалась расшифровка анаграммы.

К анаграммам прибегали и в политических спорах. Например, после убийства французского короля Генриха III из имени его убийцы frère Jacques Clément (брать Жак Клеман) составили анаграмму C'est l'enfer qui m'a créé (меня создал ад). Противники короля не остались в долгу и из его имени Henri de Valois (Анри де Валуа) составили анаграмму Vilain Herodés (Иродова мерзость).

Когда Христиан Гюйгенс открыл кольцо Сатурна, он составил анаграмму

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiii, lll, mm,  
nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, tttt, uuuu.

Буквы в ней можно поставить в таком порядке, что получится текст «Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato» («окружен кольцом тонким, плоским, нигде не подвешенным, наклонным к эклиптике»).

Однако не всегда анаграммы позволяли сохранять тайну. Когда тот же Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна (Титан) и нашел, что время его обращения вокруг планеты равно 15 дням, он составил по этому поводу анаграмму и послал своим коллегам. Однако один из них, уже упоминавшийся Уоллис, большой мастер в расшифровке тайнописи, разгадал эту анаграмму и составил по этому поводу свою анаграмму, которую послал Гюйгенсу. Когда ученые обменялись разгадками анаграмм, то получилось так, что будто бы Уоллис еще до Гюйгена сделал то же самое открытие. Потом Уоллис признался, что он пошутил, чтобы доказать бесполезность анаграмм в деле тайнописи. Гюйгенс, однако, хотя и сам был большим любителем и знатоком комбинаторики, не оценил этой шутки и рассердился...

## 154. Иероглифы и клинопись

Навыки в разгадке сложных шифров помогли ученым, когда археологи стали откапывать камни и черепки с таинственными знаками — письменностью, замолкшей несколько тысячелетий тому назад. Одним из самых замечательных успехов в деле расшифровки таких текстов было прочтение французским филологом Жаном Франсуа Шампольоном иероглифов, которыми писали египтяне еще до того, как возникла наука у древних греков.

У Шампольона были предшественники — шведский археолог Д. Окерблад и английский физик Т. Юнг, которые подвергли египетские тексты комбинаторному анализу. В их руках были «билингвы» — надписи, сделанные одновременно на египетском и греческом языках. Сравнивая оба текста и выясняя повторяемость групп знаков, Окерблад опознал некоторые знаки так называемого *демотического письма* — поздней стадии развития египетской письменности. А создатель волновой оптики Томас Юнг любил на каникулах отдохнуть от размышлений на физические темы и занимался то каллиграфией, то составлением алфавитов иностранных языков, то... танцами на слабо натянутом канате, — по мнению Юнга все, что мог сделать один человек, мог повторить другой. В 1814 г. он взял с собой на каникулы древнеегипетский папирус и попробовал прочесть его. Не имея должной филологической подготовки, путем лишь комбинаторного исследования текста он получил интересные результаты, а затем попробовал читать иероглифы. Кое-каких успехов он добился и здесь, но сказалось недостаточное знание языков — он искал иероглифы не только для согласных, но и для гласных букв, а в египетском письме гласные опускались. Лишь Шампольону, сочетавшему незаурядный комбинаторный дар с глубочайшим знанием филологии, удалось прочесть иероглифы.

Сложность задачи, стоявшей перед Шампольоном, усугублялась тем, что не были известны ни язык надписей, ни смысл знаков. Однако, выделив знаки, которые в греческом тексте обозначали имена царей, Шампольон обнаружил, что некоторые знаки в именах фараонов Птолемея и Клеопатры совпадают. Так были найдены звучания иероглифов, означавших буквы «п» и «л» (до этого места дошел и Юнг). А затем Шампольон распознал имена римских императоров Тиберия и Траяна, древних фараонов Рамсеса и Тутмеса — ключ к чтению иероглифов, утерянный несколько тысячелетий тому назад, был вновь обретен.

Прочтение забытых письменностей было торжеством комбинаторного метода, основанного на наблюдениях над текстом, на сопоставлении повторяемости комбинаций слов и грамматичес-

ких форм в сочетании с соображениями, связанными с назначением надписи, временем и условиями ее составления и т. д.

Еще теснее связана с комбинаторикой история расшифровки клинописных надписей. Историкам удалось установить, что эти надписи были сделаны в эпоху Ахеменидов, правивших в Иране два с половиной тысячелетия тому назад. Были сделаны и предположения о языке надписей. А потом комбинаторный анализ текста вскрыл часто повторявшуюся группу из семи знаков. Иногда эта группа повторялась дважды подряд с небольшими изменениями. И датский ученый Мюнтер решил, что эта группа означает слово «царь», а повторенная дважды — «царь царей». Но узнать звучание этих знаков Мюнтер не сумел. Это сделал молодой немецкий учитель Гротефенд. Любитель различных головоломок и тайнописи, он однажды (как гласит предание, после веселого вечера в дружеской компании) заключил пари, что расшифрует клинопись. Анализируя сочетания знаков около титулов «царь» и «царь царей», Гротефенд обнаружил, что некоторые из них встречаются в разных позициях. Отсюда был сделан вывод, что это имя царя, которое в иной позиции означает «сын царя такого-то». Это позволило опознать и группу знаков для слова «сын». В одном месте после этой группы знаков не стояло слово «царя». Значит, решил Гротефенд, царь, о котором идет здесь речь, не был сыном царя — это был сам основатель династии Дарий, сын Гистаспа. А так как Дарий был отцом Ксеркса, то у Гротефенда были в руках звуковые значения для знаков, входивших в имена «Гистасп», «Дарий», «Ксеркс» — начало расшифровки клинописи было положено!

Комбинаторика позволила прочесть и крито-микенское линейное письмо. Первые прочные основы дешифровки этой письменности заложила Алиса Д. Кобер, защитившая в 1932 г. докторскую диссертацию по математике в Колумбийском университете. Наряду с исследованиями по чистой математике она много сил уделяла расшифровке древних письменностей. Изучив знаки критского письма, Кобер установила, что это письмо является слоговым. Далее она заметила, что в исследуемых текстах некоторые слова встречаются в трех различных формах, отличающихся друг от друга несколькими последними знаками, по-видимому, падежными окончаниями. А дальше она начала составлять «лингвистические уравнения» для слогов, позволившие ей найти слоги с одинаковыми согласными, но разными гласными, и одинаковыми гласными, но разными согласными. В результате Кобер получила координатную сетку, в которой вместо осей координат стояли номера гласных и согласных букв. У этой сетки был лишь один недостаток — никто не знал, какие именно гласные и согласные образуют эту систему координат.

Лишь через два года после смерти исследовательницы молодой английский архитектор Майкл Вентрис, расширяя ее координатную сетку, попробовал угадать значения некоторых гласных — число гласных меньше числа согласных, и перебор лучше начинать с них. Одна из попыток оказалась удачной — текст заговорил на языке, весьма напоминавшем греческий. Но это не был классический греческий язык «Илиады» и «Одиссеи», а греческий язык более ранней эпохи. Вентрису помог завершить расшифровку видный знаток раннего греческого языка Чэдвик. Используя имена царей и списки географических названий, исследователи расшифровывали один слог за другим. А потом началась цепная реакция дешифровки — три десятка знаков получили свое значение.

Это был полный триумф комбинаторного подхода, основанного на следующем положении, сформулированном Вентрисом: «При попытке дешифровать документы на неизвестном языке, написанные неизвестным письмом, первый шаг состоит в установлении тех фактов, которые сами даются в руки при рассматривании имеющихся в распоряжении документов. Второй шаг состоит в том, что исследователь путем тщательного анализа и логической дедукции выявляет, какие выводы можно сделать из этих основных фактов».

При расшифровке буквенной письменности оказывается весьма важным отделение знаков, обозначающих гласные буквы, от знаков, обозначающих согласные буквы. И здесь на помощь приходит комбинаторика. Филолог В. В. Шеворошкин установил метод, основанный на комбинаторном сравнении частоты различных сочетаний пар знаков. Хорошо известно, что в языках гласные и согласные определенным образом чередуются друг с другом. Это позволяет разделить все знаки на две группы так, что, как правило, знаки одной группы перемежаются в тексте знаками другой группы. Тогда знаки, входящие в меньшую группу, будут обозначать гласные, а входящие в большую группу, — согласные. Этот метод дал исследователю ключ к чтению карийских надписей.

## 155. Комбинаторика в биологии

Сложность строения биологических систем, их строгая иерархичность, взаимосложенность отдельных процессов в целом организме делают биологию благодарным полем для приложения комбинаторных методов. Биолог А. А. Любишев полагал даже, что сходство растений и морозных узоров на окнах не случайно — в обоих случаях проявляются определенные законы комбинирования частей в единое целое.

Когда биологи стали изучать передачу генетической информации у бактерий, то обнаружили, что в процессе этой передачи хромосомы переходят от одной бактерии к другой не целиком.

Они надеялись, изучая перешедшие части, выяснить порядок расположения генов в хромосоме. Здесь их постигла на первых порах неудача — карты хромосом, составленные в разных лабораториях, были непохожи друг на друга. Однако, тщательно сравнив полученные карты, французские ученые Жакоб и Вальмон обнаружили их комбинаторное сходство. Выяснилось, что все эти карты были частями одного кольца — хромосомы бактерий оказались свернутыми в кольца, которые перед переходом в другую бактерию разрываются, после чего к одному концу прикрепляется фактор, перетаскивающий часть хромосомы в другую бактерию. А так как разрываться кольцо могло в любом месте, а фактор мог прикрепиться к любому концу, то и возникало все многообразие карт, которое путало картину.

### 156. Модель ДНК

Одной из наиболее сложных загадок в биологии XX века было строение «нитей жизни» — молекул белка и нуклеиновых кислот. Оказалось, что молекулы белка — это объединения нескольких длинных цепей, составленных из 20 аминокислот.

Чтобы разгадать структуру хотя бы одной цепи, ее отделяют от остальных и подвергают действию ферментов, разрывающих цепь на строго определенные части. Эти части уже можно подвергнуть химическому анализу и выяснить в них порядок аминокислот. Затем возникает вопрос о сборке всей цепи из изученных частей. Для этого снова берут те же молекулы белка и подвергают их действию иных ферментов. Тогда они распадаются на другие части, строение которых тоже поддается изучению. Путем изучения перекрытий отдельных частей удается выяснить порядок аминокислот во всей цепи. Разумеется, такой комбинаторный анализ требует привлечения мощной вычислительной техники. Сочетая комбинаторные рассмотрения с изучением рентгеновских снимков, ученым удалось разгадать строение гемоглобина, инсулина и др.

Торжеством комбинаторного подхода к явлениям жизни можно считать расшифровку строения дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК), сделанную в Кембридже Ф. Криком и Дж. Уотсоном в 1953 г. Было известно, что ДНК играет важную роль в наследовании свойств организмов. Это привлекало к ее изучению многих исследователей. Химический анализ показал, что в состав ДНК входят фосфатосахарные группы, соединенные с четырьмя азотистыми основаниями — двумя пиримидиновыми (цитозин и тимин) и двумя пуриновыми (аденин и гуанин), причем пуриновые основания по размерам больше пиримидиновых. Такие группы, соединенные с основаниями, называют *нуклеотидами*. Американский химик Эрвин Чарграфф тщательнейшим образом измерил количество различных нуклеотидов в ДНК растений и животных и открыл удивительную зависимость: количество молекул аденина всегда

равнялось количеству молекул тимина, а количество молекул гуанина — количеству молекул цитозина.

Вопрос состоял в том, как соединены между собой нуклеотиды и как это соединение объясняет генетические свойства ДНК. А это уже был вопрос, связанный с комбинаторикой. По аналогии с ранее изученным строением белков возникла идея о спиральной структуре ДНК.

Крик и Уотсон решили начать комбинировать нуклеотиды друг с другом так, чтобы они дали спираль нужных размеров (эти размеры были установлены ранее с помощью рентгеноструктурного анализа). В мастерской изготовили модели нуклеотидов и началось комбинирование их друг с другом, корректируемое соображениями, основывающимися на квантовой механике и биохимии. После нескольких неудачных попыток оказалось, что наилучшей конструкцией является винтовая лестница, в которой фосфатосахарные группы образуют перила, а ступеньки состоят из пар азотистых оснований — аденина с тимином или гуанина с цитозином. Так как каждую ступеньку можно еще повернуть на  $180^\circ$ , то получается четыре вида ступенек.

## 157. Генетический код

После открытия Крика и Уотсона возник вопрос, каким образом молекулы ДНК передают организму инструкции о построении цепей аминокислот, составляющих белки. Над этим вопросом задумался американский физик Г. Гамов. Узнав от Крика и Уотсона, что речь идет о 20 аминокислотах, он сформулировал задачу следующим образом: *как с помощью 4 видов нуклеотидов зашифровать 20 видов аминокислот?*

На первых порах Гамов подверг эту проблему чисто комбинаторному анализу, выделив вопросы, касавшиеся комбинаторного строения кода.

1. Является ли код линейным (т. е. отвечает ли последовательность нуклеотидов последовательности аминокислот в конструируемых белках)?

2. Сколько нуклеотидов нужно для кодирования одной аминокислоты (это количество называют *кодовым числом кода*)?

3. Может ли одна и та же аминокислота кодироваться несколькими комбинациями нуклеотидов, или, как их называют, *кодонов* (*вырожден* код или нет)?

4. Может ли один и тот же нуклеотид участвовать в кодировании нескольких аминокислот (является ли код *перекрывающимся* или нет)?

Были серьезные основания считать код линейным.

На вопрос о кодовом числе ответ дали простые комбинаторные соображения: число видов нуклеотидов равнялось 4 (аденин

— А, гуанин — Г, тимин — Т, цитозин — Ц), а из 4 видов можно составить всего 16 различных пар:

| АА | АГ | АТ | АЦ |
|----|----|----|----|
| ГА | ГГ | ГТ | ГЦ |
| ТА | ТГ | ТТ | ТЦ |
| ЦА | ЦГ | ЦТ | ЦЦ |

Этого было недостаточно для кодирования 20 аминокислот. Значит, в кодон должны были входить по крайней мере три нуклеотида. Соображения экономии подсказали Гамову, что если трех нуклеотидов достаточно, то больше природа вряд ли потратит, а потому код должен быть триплетным — по три нуклеотида на одну аминокислоту.

Присоединяя к каждой из выписанных 16 комбинаций по очереди 4 нуклеотида, получаем 64 комбинации, а это больше числа аминокислот. Теперь надо было делать выбор между двумя предположениями: либо код вырожден, либо кодон определяется не упорядоченной тройкой нуклеотидов, а как-то иначе.

Руководствуясь теми же соображениями экономии, Гамов решил, что на каждую аминокислоту природа отпустила лишь один кодон, т. е. что код должен быть невырожденным.

Так как число аминокислот равнялось 20, то надо было придумать 20 различных комбинаций, определяемых тройками ступенек. Комбинаторные рассмотрения показали, что число 20 можно получить так: брать любые тройки, но не учитывать в них порядок нуклеотидов, а интересоваться лишь составом троек. Эта идея была реализована Гамовым в виде ромбовидного кода, изображенного на рис. 92. Цифрами 1, 2, 3, 4 на этом

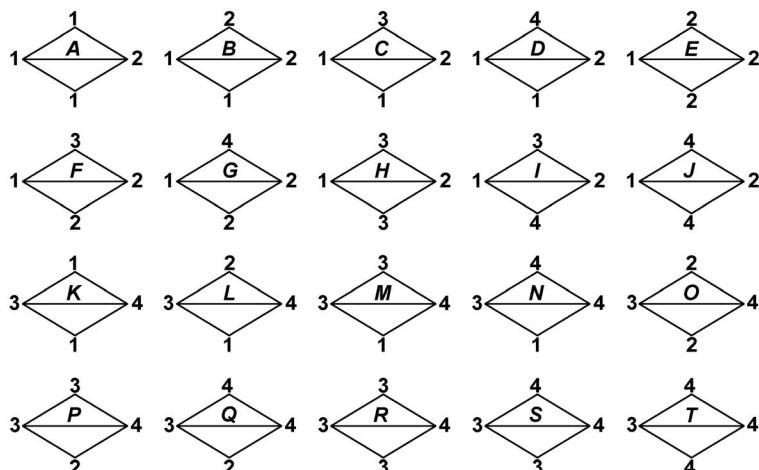


Рис. 92

рисунке обозначены нуклеотиды, а буквами  $A - T$  — соответствующие аминокислоты. Здесь каждый ромб задается тройкой нуклеотидов, причем верхний и нижний нуклеотиды принадлежат разным половинам молекулы ДНК, а средние составляют одну ступеньку лестницы. Поскольку в ступеньке достаточно указать левую половину — правая определяется этим однозначно, то ромбы Гамова определялись тройками нуклеотидов. А несущественность порядка нуклеотидов в кодоне проявлялась, по мнению Гамова, в том, что два ромба, получающиеся друг из друга перестановками верхнего и нижнего или левого и правого нуклеотидов, кодировали одну и ту же аминокислоту.

Однако код Гамова не выдержал проверки экспериментом. Одной из его характерных черт была перекрываемость — один и тот же нуклеотид входил в три различных кодона. Это накладывало ограничения на порядок аминокислот в белковых молекулах — за аминокислотой, кодируемой тройкой одинаковых нуклеотидов, могли идти лишь 4 вида аминокислот, а именно те, в которых последний нуклеотид заменен любым из 4, а два первых остались неизменными. Иными словами, если бы код Гамова был верен, то должны были бы наблюдаться определенные комбинаторные закономерности в порядке аминокислот и частоте их появления. Некоторые последовательности аминокислот просто запрещались — для них нельзя было подобрать соответствующую последовательность нуклеотидов. Тщательный эксперимент показал, что такие закономерности не наблюдаются, а при анализе инсулина были обнаружены цепочки аминокислот, запрещенные кодом Гамова. Да и генетики показали, что код не может быть перекрывающимся — им удалось вызвать мутации, связанные с заменой лишь одной аминокислоты в синтезируемом клеткой белке, а по Гамову получалось, что при любой мутации, вызванной заменой одной ступеньки в ДНК, в белке одновременно заменяются три аминокислоты.

В общем подтвердилось, что в науке больше красивых теорий, чем верных, — надо было искать неперекрывающиеся коды. Однако от идеи невырожденности ученые еще не отказались — она казалась связанный с принципом, по которому природа никогда не тратит излишних усилий.

Ф. Крик выдвинул идею невырожденного кода, составленного из неперекрывающихся кодонов. Тогда еще не было известно, где начинается чтение генетического кода. Поэтому Крик решил, что код должен обладать следующим свойством: смысл имеют не все перестановки из трех нуклеотидов, а лишь некоторые из них. При этом разрешались лишь такие перестановки, чтобы в любой цепочке не возникло сомнений, является данная тройка нуклеотидов кодоном или состоит из частей двух соседних кодонов. Например, тройки ТГГ, ГАЦ и ГГА не могли одновременно быть кодонами — в цепочке ТГГАЦ нельзя было

бы разгадать, что такое ГГА — отдельный кодон или смесь из частей двух кодонов. Код Крика совсем запрещал такие тройки, как ААА, — в составленных из них цепях АААААА... нельзя было найти ни начала, ни конца кодонов. Это отмечало 4 из 64 различных троек нуклеотидов. Оставшиеся 60 троек разбивались на классы по 3 тройки в каждой, так что тройки одного класса получались друг из друга циклическим перемещением (например, ТГА, АТГ, ГАТ) и из каждого класса бралась одна тройка. Получался код с требуемыми свойствами, состоявший из 20 кодонов — по одному на каждую аминокислоту.

Такой выбор кода снова накладывал определенные ограничения на относительную частоту нуклеотидов в ДНК, и Крик надеялся, что статистика подскажет, какая из букв означает некоторый нуклеотид. Но и здесь эксперимент не подтвердил предсказаний теории. Кроме того, критики отметили, что если, по мнению Крика, неизвестно, откуда начинать чтение кода, то столь же неизвестно, читать ли его слева направо или справа налево. Поэтому надо было объединять друг с другом не только кодоны, получающиеся друг из друга циклическими перестановками, но и кодоны, отличающиеся порядком чтения (например, АТЦ и ЦТА). А тогда число классов недостаточно для кодирования.

Чисто комбинаторные попытки разгадать тайну генетического кода оказались безуспешными. Но они позволили четко поставить все вопросы, которые надо было решить экспериментально. И в 1961 г. на биохимическом конгрессе в Москве слово для сообщения взял никому до того не известный американский ученый Ниренберг. Он сообщил об эксперименте, позволившем поставить в соответствие одному из кодонов определенную аминокислоту. Через несколько лет генетический код оказался полностью разгаданным. Из трех китов теории Гамова: код является невырожденным, перекрывающимся и триплетным, верным оказалось лишь последнее утверждение. На самом деле код неперекрывающийся и вырожденный — некоторые аминокислоты соответствуют четырем нуклеотидам. Были найдены и три бессмысленных кодона, которым не соответствует ни одна аминокислота. Возможно, они играют роль знаков препинания в коде, показывая начало и конец синтезирования данного белка.

Теперь уже ясна и роль вырожденности кода. Из-за различных внешних воздействий в цепочке нуклеотидов возможны сбои. Благодаря вырожденности кода далеко не все сбои приводят к изменению синтезируемых аминокислот, к мутациям, которые могут оказаться гибельными для организма. Иными словами, вырожденность генетического кода повышает его помехоустойчивость.

## 158. Химический пасьянс

Немного найдется дней в истории науки, сравнимых по своему значению с 17 февраля 1869 г. В этот день из хаоса химических элементов, каждый из которых имел свои свойства, возникла стройная таблица — был открыт периодический закон. Это открытие было сделано Дмитрием Ивановичем Менделеевым, профессором Петербургского университета. Готовя курс лекций по общей химии, он задумался над порядком, в котором следовало рассказывать об элементах.

Еще до Менделеева ученые отметили сходство химических свойств некоторых элементов. Английский химик Ньюлендс в 1804 г. даже попробовал объединять элементы в тройки. Однако тогда было известно слишком мало элементов, а Ньюлендс не рискнул сделать предположение о существовании неоткрытых элементов. Поэтому в его тройки попали и совсем неподходящие элементы, что вызвало у одного оппонента ехидный вопрос, а не пытался ли почтенный автор располагать элементы по алфавиту и не была ли при этом замечена какая-нибудь закономерность.

И все же Менделеев попробовал пойти по запретному пути, группируя друг с другом похожие элементы. Он сделал и следующий, самый трудный шаг, попробовав расположить в правильном порядке и сами группы. Как писал позднее сам Дмитрий Иванович: «Искать же чего-нибудь, хотя бы грибов, или какую-нибудь зависимость, нельзя иначе, как смотря и пробуя». Для того чтобы «смотреть и пробовать», он написал на отдельных карточках элементы с их атомными весами и коренными свойствами, а затем стал подбирать сходные элементы и близкие атомные веса.

Раскладывая свой химический пасьянс, великий ученый после напряженных размышлений нашел удачное расположение элементов. Говорят, что окончательная форма таблицы предстала перед ним во сне, когда, утомленный непрерывным обдумыванием ее, он прилег отдохнуть. Удивительно, что эта работа, имевшая неисчислимые последствия для развития химии и физики, была выполнена Менделеевым за один день — утром 17 февраля 1869 г. он еще не начинал раскладывать свой пасьянс, а к вечеру того же дня таблица была написана.

Но не только в открытии периодической системы элементов оказалась полезна комбинаторика. Как известно, среди органических соединений встречаются изомеры, т. е. соединения, имеющие один и тот же состав, но разное строение. Комбинаторика дала возможность перечислить изомеры данного состава.

В физике комбинаторика оказывается необходимой при изучении свойств кристаллов, описании модели ферромагнетизма и т. д.

## 159. Комбинаторика эпохи компьютеров

Мы уже упоминали, что сейчас на наших глазах изменяется соотношение дискретной и классической математики. На протяжении двух с половиной столетий основную роль в изучении природы играл математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисления, уравнения математической физики, вариационное исчисление и т. д. Процессы, имевшие атомистическую природу, заменялись непрерывными, чтобы можно было применять к ним развитый аппарат математики непрерывного. Дискретная математика была Золушкой, красота которой затмевалась блеском влиятельных и сильных сестер.

Положение дел коренным образом изменилось после того, как были созданы электронные вычислительные машины, и революционным образом — после того как их быстродействие начало стремительно расти. Теперь такие абстрактные области математики, как математическая логика, общая алгебра, формальные грамматики, стали прикладными — для составления алгоритмических языков, на которых пишут программы для машин, нужны специалисты именно в этих областях математики. Важную роль стали играть всевозможные разностные схемы, исследования решеток и их свойств. Приложения к экономике поставили перед математиками новые типы проблем, относящиеся к математическому программированию и, в частности, к целочисленному программированию (если при решении задачи окажется, что самым экономным будет грузить на платформу по 3,5 автомашины, то решение придется пересматривать).

В эту эпоху расцвела дискретной математики изменилась и роль древнейшей области дискретной математики — комбинаторики. Из области, интересовавшей большей частью составителей занимательных задач и находившей основные применения в кодировании и расшифровке древних письменностей, она превратилась в область, находящуюся на магистральном пути развития науки. Стали выходить журналы по комбинаторике, одна за другой печатаются книги, посвященные этой науке. С помощью ЭВМ стало возможно делать переборы, ранее требовавшие сотен и тысяч лет, но возникли и новые задачи, например, как ускорить этот перебор. Возникают новые методы упаковки информации разных типов, шифрования и дешифровки, распознавания объектов, проблемы, связанные с «электронной подписью», для анализа и успешного решения которых широко используется именно комбинаторика.

## ОТВЕТЫ

### Глава I

1. По правилу произведения имеем  $100^2 = 10\ 000$  способов выбора.
2. По правилу произведения получаем  $5 \cdot 3 = 15$  путей.
3. 20. 4. По правилу произведения  $7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 168$ .
5. На первом месте можно написать любую из 33 букв, а на каждом из следующих — любую из 32 букв (исключается предшествующая буква). Всего имеем  $33 \cdot 32^4 = 34\ 603\ 008$  слов.
6. 9; 8. 7. 48. 8. 25; 20. 9. 480; 437. 10. 1024; 4032; 992.
11. Белое поле выбираем 32 способами и вычеркиваем соответствующие горизонталь и вертикаль. На оставшейся части доски есть 24 черных поля. Всего  $32 \cdot 24 = 768$  способов выбора.
12. По правилу произведения  $12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$  способов.
13.  $3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$ .
14. Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо сборник, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем  $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 134$  способа. Во втором случае можно купить еще сборник, содержащий романы «Рудин» и «Отцы и дети», и один экземпляр «Дворянского гнезда», либо сразу все романы. Всего имеем  $134 + 3 \cdot 3 + 5 = 148$  способов.
15.  $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$ , поэтому большее число выборов, если взято яблоко.
16.  $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ . Если же первые два волчка упали на сторону «1», то третий волчок может упасть 10 способами; аналогично рассматриваются случаи, когда на сторону «1» падают другие два волчка. Всего получаем  $6 + 8 + 10$  способов, но при этом один способ, когда на сторону «1» падают все три волчка, считается трижды, поэтому остается 22 способа.
17. Ребенок может получить либо одно, либо два, либо три имени, причем все имена различны. Всего
$$300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\ 820\ 600$$
различных вариантов. На всех англичан не хватит.
18. Количество  $n$ -значных чисел, не содержащих двух идущих подряд одинаковых цифр, равно  $9^n$  при  $n > 1$  и 10 при  $n = 1$  (а можно считать, что  $9^n$  при  $n = 1$  и при  $n = 0$ ). Поэтому количество таких чисел от 0 до 999 999 равно  $9^0 + 9^1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 = 597\ 871$ .
19. Если точка пересечения плоскостей лежит внутри данного шара, то новый шар может касаться любой из плоскостей с одной из двух сторон, а данного шара — изнутри или извне. Поэтому можно построить 16 различных шаров.
20. Находим, что для 1 допустимые соседства 13 и 17, так что будет 713 (или 317). Для 3 новые соседства 35, 38, так что будет 7135... или 7138... . Столя дерево возможностей дальше, доходим до варианта 713856294.
22. В первой строке мы можем расположить цвета в любом порядке ( $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  способа), после чего в первом столбце можем

любым образом расположить три цвета, отличные от цвета углового квадрата ( $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  способов). Предположим, что выбраны цвета, указанные в таблице:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| Б | Ч | К | С |
| Ч | Б | С | К |
| К | С |   |   |
| С | К |   |   |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| Б | Ч | К | С |
| Ч | К | С | Б |
| К |   |   |   |
| С |   |   |   |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| Б | Ч | К | С |
| Ч | С | Б | К |
| К |   |   |   |
| С |   |   |   |

Так как в вертикальных и горизонтальных рядах должны быть представлены все цвета, то во втором ряду может быть одна из следующих комбинаций цветов: ЧБСК; ЧКСБ; ЧСБК. В первом из этих вариантов однозначно определяется окраска клеток второго вертикального ряда и остаются две возможности окраски оставшихся 4 клеток. Каждый из остальных двух вариантов приводит лишь к одной возможности окраски. Всего  $24 \cdot 6(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 576$  способов окраски.

**23.** Каждая монета может попасть в один из двух карманов. Поэтому имеем  $2^9$  способов. **24.**  $3^6 = 729$  способов.

**25.** Так как каждый студент может получить одну из трех оценок, то имеем  $3^4 = 81$  способ сдачи экзаменов.

**26.** В 11 точках пути есть выбор между двумя возможностями. Поэтому число путей равно  $2^{11} = 2048$ .

**27.** Так как выбор в начальной точке уже сделан, то остается  $2^{10} = 1024$  возможностей. **28.**  $3^5 = 243$ .

**29.** Номеров с одной буквой  $32 \cdot 10^4$ , с двумя  $32^2 \cdot 10^4$  и с тремя  $32^3 \cdot 10^4$ . Всего по правилу суммы  $338\ 240\ 000$  номеров.

**30.** а)  $10^2 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 12^2 = 172\ 800\ 000$  номеров.

б)  $3 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 12^2 = 5\ 184\ 000$ .

**31.** Зашифруем каждый набор зубов последовательностью нулей и единиц (нуль ставится, если на данном месте нет зуба, и единица, если есть). Число таких последовательностей равно  $2^{32}$ . Так как каждому жителю соответствует своя последовательность, то число жителей не больше чем  $2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$ .

**32.** Так как с помощью двух цифр 8 и 9 можно написать  $2^k$   $k$ -значных чисел, то общее количество искомых чисел равно  $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$ . Для трех цифр аналогично получаем  $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = 1092$ . Если для первой цифры есть лишь 2 возможности, то получаем  $2(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) = 728$  чисел.

**33.** Каждый юноша может выбирать из 5 мест работы, а каждая девушка — из 4 мест. Всего получаем  $5^3 \cdot 4^2 = 2000$  способов выбора.

**34.** Каждая курица может либо войти, либо не войти в число выбранных. Поэтому имеем  $2^3$  способов выбора кур. Так как по условию хотя бы одна курица должна быть выбрана, получаем 7 способов выбора кур. Точно так же есть  $2^4 - 1 = 15$  способов выбора уток и  $2^2 - 1 = 3$  способа выбора гусей. Всего  $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$  способов.

**35.** В первом случае  $3^m$  способов, во втором  $(2^3)^m = 2^{3m}$  (теперь для каждого из  $3m$  цветов всех светофоров есть выбор гореть – не гореть).

**36.**  $\overline{A}_{32}^6 - \overline{A}_{31}^6$ . **37.** В русском алфавите 33 буквы, но по крайней мере с 2 букв Ъ, Ъ имена не начинаются. Поэтому общее число различных инициалов не больше  $31^2 = 961$ , что меньше 1000.

**38.** По правилу произведения  $8^3 \cdot 10^4$ .

**39.** 12 книг можно переплести в переплеты 3 цветов  $3^{12}$  способами. Из них не более чем в два цвета книги будут переплетены в  $3 \cdot 2^{12}$  случаях (3 способами выбирается отсутствующий цвет, 12 раз — один из 2 используемых цветов), а в 3 случаях — в один цвет. По формуле включений и исключений в  $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519\,156$  случаях книги будут переплетены в переплеты всех трех цветов.

**40.** По формуле включений и исключений число работающих равно  $6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$ . Только английский язык знают  $6 - 4 - 2 + 1 = 1$ , только французский знают  $7 - 3 - 2 + 1 = 3$ .

**41.** 25 человек.

**42.** Количество чисел от 0 до 999, делящихся на 5, равно [1000:5], где  $[x]$  — целая часть  $x$ . Точно так же на 7 делится [1000:7], на 35 — [1000:35] чисел. По формуле включений и исключений получаем, что  $1000 - [1000:5] - [1000:7] + [1000:35] = 686$  чисел не делится ни на 5, ни на 7. Точно так же находим, что 228 чисел не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7.

**43.** На первом месте может стоять любая из 9 цифр 1, 2, ..., 9, на втором — любая из 9 оставшихся цифр, на третьем — любая из 8 цифр и т. д. Всего получаем  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 9!$  чисел.

**44.** Дополним числа от 0 до 9 999 999 впереди нулями до семизначных. Количество таких семизначных чисел, запись которых не содержит единицы, равно  $9^7$ . Значит, между 1 и 10 000 000 имеется  $9^7 - 1 = 4\,782\,968$  чисел, запись которых не содержит 1. Это меньше чем половина  $10^7$ .

**45.** Каждая из  $m$  прямых, проведенных через некоторую точку  $A$ , пересекается с  $2m$  прямыми. Поэтому прямые, проходящие через точку  $A$ , дают  $2m^2$  точек пересечения. Общее число точек пересечения, отличных от данных трех, равно  $3m^2$ .

**46.** Проводим непосредственный подсчет с учетом трех моментов появления в числе новой цифры. Этот момент будет на 1-й цифре (9 вариантов первой цифры — любая кроме 0), на 2 — 5-й (9 вариантов — любая кроме первой) и еще на одном месте (восемь еще не использованных цифр), другие цифры придется выбирать из числа уже появившихся. Это приводит к ответу в виде суммы 10 слагаемых:

$$9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 = 648,$$

$$9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 = 5832,$$

$$9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 = 1296,$$

$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 5184,$$

$$9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3 = 1944,$$

$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 = 7776,$$

$$9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 2592,$$

$$9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 = 11664,$$

$$9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 3 = 3888,$$

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 17496,$$

$$648 + 1296 + 1944 + 2592 + 3888 + \\ + 5832 + 5184 + 7776 + 11664 + 17496 = 58320.$$

**47.** 26 человек. Реализуется минимальный вариант — если с других курсов было хотя бы по одному студенту, то вместе они придумали  $2 + 3 + 4 + 5 = 14$  задач,  $14 + 1 \cdot 26 = 40$ .

**48.** На 1-м месте может стоять одна из 9 цифр, на 2-м, 3-м, 4-м и 5-м — одна из 10 цифр, а на последнем — одна из 5 цифр (ее четность определена). Всего получаем  $9 \cdot 10^4 \cdot 5 = 450\,000$  чисел. Если взять все числа от 1 до 999 999, получим 499 999 чисел.

**49.** Количество пятизначных чисел равно 90000, из них каждая цифра является четным числом в  $4 \cdot 5^4 = 2500$  случаях, нечетным — в  $5^5 = 3125$  случаях. Цифры, меньшие чем 6, не входят в  $4^5 = 1024$  случаях, а большие чем 3 — в  $3 \cdot 4^4 = 768$  случаях.

**50.** Дополним все числа впереди нулями до 6-значных и еще включим число 000 000. Чисел будет  $10^6$ , для их записи потребуется  $6 \cdot 10^6$  цифр, а поскольку все 10 цифр равноправны и должны входить одинаковое число раз, каждая будет употреблена  $6 \cdot 10^5$  раз (в общем случае  $n \cdot 10^{n-1}$ ). Нулей в  $k$ -значном числе будет  $9 \cdot (k - 1) \cdot 10^{k-2}$  (первая цифра — любая из девяти, в каждом варианте за нею произвольное  $(k - 1)$ -значное число), в не более чем 6-значном —

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9000 + 5 \cdot 90000 = 488\,889.$$

**51.** Сумма всех четырехзначных чисел от 1000 до 9999 равна  $\frac{1000 + 9999}{2} \cdot 9000 = 49\,495\,500$ , делящихся на 2 — удвоенной сумме чисел от  $1000:2 = 500$  до  $9998:2 = 4999$ , их  $4999 - 500 + 1 = 4500$ , т. е. сумма  $\frac{1000:2 + 9998:2}{2} \cdot 4500 \cdot 2 = 24\,745\,500$ . Аналогично сумма чисел, делящихся на 3, равна 16501500, на 5 — 9895500, на 6 — 8248500, на 10 — 4945500, на 15 — 3298500, на 30 — 1651500; по формуле включений и исключений получаем ответ 13 194 000.

**52.** Сначала выберем последнюю цифру (рассмотрев 2 варианта: 0 и не 0), затем первую (ею не может быть 0), затем остальные. Ответ получится в виде  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ .

**53.** Ровно половина из всех  $2^n$  слов, т. е.  $2^{n-1}$ . Для  $n$  нечетного это очевидно: заменой 0 на 1, а 1 на 0 из слова с четным числом нулей (и нечетным числом единиц) получается слово с нечетным числом нулей, поэтому слов с четным числом нулей столько же, сколько с нечетным. Для  $n$  четного каждое слово имеет вид 0 и затем слово длины  $n - 1$  с нечетным числом нулей или 1 и затем слово длины  $n - 1$  с четным числом нулей, в каждом варианте  $2^{n-2}$  возможностей, итого  $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$ .

**54.** Запись на столбе имеет вид  $\overline{abc} | \overline{(9-a)(9-b)(9-c)}$ . Но  $c$  и  $9 - c$  — уже две различные цифры. При этом если одно из чисел менее чем трехзначно, то среди цифр есть 9, а тогда и 0, и можно дополнить запись впереди нулями до трехзначной. Значит, 5 способа-

ми можно выбрать пару цифр (0 и 9, 1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5) и  $2^3$  способами — первое число (на каждое из трех мест одна из двух цифр; второе число определяется первым), итого  $5 \cdot 2^3 = 40$  способов.

**55.** Если первый член прогрессии равен  $a$ , а ее разность  $d$ , то третий член равен  $a + 2d$ . По условию  $a + 2d \leq 2n$ . Это неравенство при заданном  $d$ ,  $1 \leq d \leq n - 1$ , имеет  $2n - 2d$  решений. Всего получаем  $(2n - 2) + (2n - 4) + \dots + 2 = n(n - 1)$  решений. Для последовательности чисел 1, 2, 3, ...,  $2n + 1$  имеем  $n^2$  прогрессий.

**56.** Для определенности будем располагать числа  $b_1, b_2, b_3$  так, чтобы они образовывали возрастающую геометрическую прогрессию.

Пусть  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{n}{m} > 1$  ( $m$  и  $n$  взаимно просты). Тогда прогрессию можно записать в виде  $bm^2, bmn, bn^2$ , причем  $b, m, n$  — натуральные числа,  $bn^2 \leq 100$ ,  $m < n$ . Для каждого  $n$  от 2 до 10 из неравенства  $b \leq \frac{100}{n^2}$

находим возможные значения  $b$ , из условий  $m < n$ ,  $m$  и  $n$  взаимно просты — возможные значения  $m$  (например, при  $n = 4$  будет  $b$  от 1 до 6 и  $m = 3$  или  $m = 1$ ), перемножаем и складываем для всех  $n$ . Получаем  $25 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 105$  вариантов.

**57.** Можно считать, что верхнем горизонтальном ряду и в левом вертикальном есть освещенное окно. Если верхнее левое (угловое) окно освещено, то для остальных окон есть  $2^{mn-1}$  вариантов. Если оно не освещено, то светится хотя бы одно из  $n - 1$  оставшихся верхних окон ( $2^{n-1} - 1$  вариантов) и хотя бы одно из  $m - 1$  оставшихся левых окон ( $2^{m-1} - 1$  вариантов). Для оставшихся окон есть  $2^{(m-1)(n-1)}$  вариантов. Итого  $2^{mn-1} + (2^{m-1} - 1)(2^{n-1} - 1)2^{(m-1)(n-1)}$  вариантов.

**58.** Для каждой пары предметов есть три возможности — в выборку могут войти два, один или ни одного предмета из этой пары. Поэтому число выборок равно  $3^{14}$ . В общем случае  $3^n$ .

**59.** Так как числа не могут начинаться с нуля, то имеем  $7^4 - 7^3 = 2058$  чисел. Или: первую цифру можно выбрать 6 способами (все кроме 0), каждую из следующих трех — 7 способами, итого  $6 \cdot 7^3 = 2058$  способов.

**60.** Так как со всеми шестью друзьями я обедал один раз, а с каждыми пятью — два раза, то еще по одному разу я обедал с каждой пятеркой друзей в отсутствие шестого. Но тогда на этих семи обедах с каждыми четырьмя я обедал именно 3 раза (два обеда в пятером и один в шестером), с каждыми тремя — 4 раза и с каждыми двумя — 5 раз. С каждым из друзей на этих обедах я встретился 6 раз. Значит, еще по одному разу я обедал вдвоем с каждым другом. Каждый друг отсутствовал на 6 из этих 13 обедов (5 обедах вдвоем с другими друзьями и 1 обеде в пятером). Так как без каждого из друзей я обедал 8 раз, то 2 раза я обедал один, а всего было 15 обедов.

**61.** Если данное число имеет вид  $\overline{ab} = 10a + b$ , то, сложив его с числом  $\overline{ba} = 10b + a$ , получим  $11(a + b)$ . Так как это — полный квадрат, а  $2 \leq a + b \leq 18$ , то  $a + b = 11$ . Получаем 8 возможностей: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

**62.** Наименьшее число имеет вид 1000... (в конце — что получится), наибольшее — 999...

**63.** а) Например, 246573819. б) Сумма всех девяти заданных чисел равна 45. Во все 9 сумм по 3 числа войдет 27 чисел, каждое из заданных по 3 раза, сумма сумм должна равняться  $3 \cdot 45$ , но  $3 \cdot 45 = 9 \cdot 15$ , поэтому больше 15 все суммы быть не могут.

**64.** -1,5; 3,5; 5,5; 10,5.

## Глава II

1.  $A_9^3 = 504$ . 2.  $A_6^2 = 30$  способов.

3.  $A_5^2 = 20$  словарей;  $A_{10}^2 - A_5^2 = 70$ .

4. Так как апельсины различны, то имеем  $A_8^5 = 6720$  способов.

Во втором случае каждый апельсин может попасть любому из 8 сыновей, поэтому имеем  $8^5 = 32\ 768$  способов.

5. Чашки могут быть расставлены  $A_4^3$ , блюдца  $A_5^3$  и ложки  $A_6^3$  способами. Всего по правилу произведения  $A_4^3 A_5^3 A_6^3 = 172\ 800$  способов.

6. Три судьи могут выбрать победителя  $10^3$  способами. Трех различных кандидатов они назовут в  $A_{10}^3 = 720$  случаях. Поэтому совпадение хотя бы у двух судей будет в 280 случаях. Доля таких случаев равна 0,28.

7. Получаем размещения с повторениями из 13 карт по 4. Всего  $13^4 = 28\ 561$  способ. Если среди карт не должно быть пар, то имеем размещения без повторений; их число  $A_{13}^4 = 17\ 160$ .

8. В первом случае достаточно выбрать одну пиковую и одну бубновую карту, получаем  $13^2 = 169$  способов. Во втором случае выбираем пику и трефу и если они разной величины, то пару для пики (бубны или черви). Если они одинаковой величины, то больше выбирать нечего. Итого  $13 \cdot 12 \cdot 2 + 13 = 325$  вариантов.

9. Всего таких чисел  $\overline{A_4^3} = 4^3$ , в них  $3 \cdot 4^3$  цифр, каждая из 4 цифр употребляется  $3 \cdot 4^2$  раза — в каждом из 3 разрядов  $4^2 = 16$  раз, поэтому сумма цифр первого разряда даст  $16(1 + 2 + 3 + 4) = 160$ , второго — 1600 и третьего — 16000. Сумма равна 17760.

Если цифры не повторяются, то таких чисел  $A_4^3 = 24$ , в них 72 цифры, каждая из 4 цифр употребляется в каждом из 3 разрядов 6 раз, поэтому сумма  $6(1 + 2 + 3 + 4)(1 + 10 + 100) = 6660$ .

10. Число должно оканчиваться одну из пяти комбинаций: 12, 32, 52, 24, 44; первые же две цифры могут быть произвольными. Всего получаем  $5^2 \cdot 5 = 125$  чисел. Во втором случае число должно оканчиваться одну из четырех комбинаций: 12, 32, 52, 24; первые же две

цифры могут быть выбраны из оставшихся трех  $A_3^2 = 6$  способами. Всего получаем 24 числа.

11. Разделение мест на «мужские» и «женские» можно сделать двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранные места  $P_5 = 5!$  способами. Столько же способов рассадить женщин. Всего получаем  $2 \cdot (5!)^2 = 28\ 800$  способов. На карусели получаем в 10 раз меньше способов, т. е. 2880.

12. Все цифры 1, 2, 3, 4, 5 содержат  $P_5 = 5! = 120$  чисел, а все цифры 0, 2, 4, 6, 8 содержат  $4 \cdot 4! = 96$  чисел (первая цифра — любая кроме нуля, остаются 4 цифры на 4 места).

13. В первом случае это — все перестановки  $P_5 = 120$  пяти цифр, содержащие вместе 600 цифр, каждая цифра в каждом разряде встречается по  $P_4 = 24$  раза, сумма равна

$$24(1 + 2 + 3 + 4 + 5)(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 3\ 999\ 960.$$

Во втором случае каждая цифра повторяется в каждом разряде  $A_8^4$  раз, и мы получаем сумму 839 991 600.

14. На последнем месте может стоять либо цифра 3, либо 9, а остальные цифры можно переставлять  $P_3 = 3!$  способами. Всего получаем 12 нечетных чисел. Точно так же получаем, что количество четных чисел равно 12.

15.  $P(2, 3, 4) = 1260.$

16. а)  $P(4, 3, 3, 2, 1, 1);$

б)  $P(3, 1, 1, 1, 1, 1);$  в)  $P(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1).$

17.  $P(2, 2, 2, 1, 1) = 5040.$

18.  $P(2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1).$  На всей доске добавляется 48 пустых полей, поэтому ответ  $P(48, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1).$  С пешками ответ  $P(32, 8, 8, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1).$

19. а) Каждая цифра появляется в каждом разряде 6 раз ( $P_3$  в остальных разрядах). Поэтому, складывая цифры первого разряда, получаем сумму  $6(1 + 2 + 3 + 4) = 60$ , второго разряда — 600 и т. д. Всего получаем  $60 + 600 + 6000 + 60\ 000 = 66\ 660.$

б) Здесь общее число перестановок равно  $P(1, 2, 1) = 12$ , причем цифры 1 и 5 появляются в каждом разряде по 3 раза, а цифра 2 — 6 раз. Поэтому сумма цифр в каждом разряде  $3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 30.$  Общая сумма равна  $30 + 300 + 3000 + 30\ 000 = 33330.$

в) Аналогично получаем, что сумма равна 11 110.

г) Сумма равна 16 665.

20. Если снять ограничение, что цифра 0 не является первой, получим сумму 2 666 640. Сумма чисел, «начинающихся на 0», равна 66 660. Поэтому сумма пятизначных чисел, не начинающихся цифрой 0, равна 2 599 980.

21. а) Так как порядок красок не играет роли, то  $C_5^3 = 10$  способов.

б) Здесь порядок красок уже важен, поэтому имеем  $A_5^3 = 60$  способов. Если одна полоса красная, то имеем  $3 \cdot A_4^2 = 36$  способов. Если

цвета могут повторяться, то, осуществляя выбор сверху вниз, имеем  $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$  способов.

22.  $C_n^2$  точек пересечения. 23.  $C_{10}^6(C_{10}^6 - 1)$ .

24. Из пяти дней надо выбрать два, в которые даются яблоки. Всего  $C_5^2 = 10$  способов. В общем случае  $C_{n+k}^k$  способов.

25.  $C_{30}^4 = 27\ 405$ ;  $A_{30}^4 = 657\ 720$ .

26. а) Общее число способов вынуть 10 карт равно  $C_{52}^{10}$ . Число способов, при которых не выбирают ни одного туза, равно  $C_{48}^{10}$ . Поэтому хотя бы один туз будет в  $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$  случаях. Ровно один туз в  $C_4^1 C_{48}^9$  случаях, не менее двух тузов в  $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - C_4^1 C_{48}^9$  случаях и ровно два туза в  $C_4^2 C_{48}^8$  случаях (выбираем двух тузов и еще 8 карт).

б) Шесть карт по четырем мастям могут распределиться так:  $3 + 1 + 1 + 1$  или  $2 + 2 + 1 + 1$ . С учетом выбора одной или двух мастей получаем ответ в виде  $C_4^1 C_{13}^3 (C_{13}^1)^3 + C_4^2 (C_{13}^2)^2 (C_{13}^1)^2$ .

27. В одной команде играет один юноша, а в другой — двое. Юношей можно разбить на команды 3 способами. После этого надо выбрать в первую команду 3 девушки из 5. Это можно сделать  $C_5^3 = 10$  способами. Всего по правилу произведения получаем 30 способов разбивки на команды.

28.  $C_{52}^5 C_{52}^3$ ;  $C_{52}^5 C_{47}^3 = C_{52}^8 C_8^3 = P(5, 3, 44)$ .

29. Одну на одну — по правилу произведения  $7 \cdot 9 = 63$  способа. Три на три — первый может выбрать книги для обмена  $C_7^3 = 35$  способами, а второй  $C_9^3 = 84$  способами. Всего  $35 \cdot 84 = 2940$  способов.

30. Можно выбрать двух, трех или четырех женщин и добрать недостающее число мужчин, получится  $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$  способ. А можно из всех способов вычесть способы без женщин или с 1 женщиной, опять получим  $C_{11}^6 - C_7^6 - C_4^1 C_7^5 = 371$  способ.

31. Офицера можно выбрать  $C_3^1$  способами, сержантов  $C_6^2$  способами и рядовых  $C_{60}^{20}$  способами. Всего по правилу произведения получаем  $C_3^1 C_6^2 C_{60}^{20}$  способов выбора. Если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов, то получаем  $C_5^1 C_{60}^{20}$  способов выбора.

32. Так как  $C_6^3 = 20$ , то каждый способ выбора компании будет использован. Число перестановок этих способов равно  $20!$ .

33. Будем называть первые  $m$  элементов «гласными», а вторые  $n$  элементов — «согласными». Разобьем все размещения из  $m+n$  элементов по  $r$  на классы, отнеся к  $k$ -му классу размещения, в которые входит ровно  $k$  гласных. Тогда  $k$ -й класс содержит  $C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$  размещений. В самом деле, мы можем  $C_r^k$  способами выбрать места, на которых

стоят гласные, после чего  $A_m^k$  способами заполнить эти места гласными, и  $A_n^{r-k}$  способами заполнить оставшиеся  $r - k$  мест согласными. Таким образом, число размещений из  $m + n$  элементов по  $r$  равно  $C_r^0 A_m^0 A_n^r + C_r^1 A_m^1 A_n^{r-1} + C_r^2 A_m^2 A_n^{r-2} + \dots + C_r^r A_m^r A_n^0$  или, в принятых обозначениях,  $C_r^0 M_0 N_r + C_r^1 M_1 N_{r-1} + C_r^2 M_2 N_{r-2} + \dots + C_r^r M_r N_0$ . Но это не что иное, как результат раскрытия скобок в выражении  $(M + N)^r$  и последующей замены показателей индексами.

Отметим, что число размещений  $k$ -го класса можно сосчитать и так: мы выбираем  $k$  гласных и  $r - k$  согласных и всеми возможными способами переставляем эти элементы. Это можно осуществить  $P(k, r - k) A_m^k A_n^{r-k} = C_r^k A_m^k A_n^{r-k}$  способами.

**34.** Мы имеем  $(1 + x)^n + (1 - x)^n = 2(1 + C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 + \dots)$ . Коэффициенты этого многочлена положительны. Поэтому наибольшее значение многочлен принимает при  $x = 1$ . Это значение равно  $2^n$ .

$$35. \bar{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12}; \bar{C}_{10}^8 = C_{17}^8; C_{10}^8.$$

**36.** Если кости различные (или одна кость бросается 3 раза), то  $\bar{A}_6^3 = 6^3; \bar{A}_6^3 - \bar{A}_5^3 = 6^3 - 5^3; C_3^1 \bar{A}_5^2 = 3 \cdot 5^2; 3 \cdot 2 \cdot 4$ . Если кости неразличимы, то  $\bar{C}_6^3 = C_8^3 = 56; \bar{C}_6^3 - \bar{C}_5^3 = \bar{C}_6^2 = 21; \bar{C}_5^2 = C_6^2 = 15; 4$ .

**37.** Пусть занято  $p$  полей белыми шашками, а остальные  $24 - p$  полей — черными или пустуют. Выбрать  $p$  полей для белых шашек можно  $C_{24}^p$  способами, поставить на них 15 белых шашек не менее 1 на поле можно  $C_{14}^{p-1}$  способами, а 15 черных шашек на  $24 - p$  полях (часть полей может пустовать) можно распределить  $C_{38-p}^{15}$  способами.

Поэтому полное число способов равно  $\sum_{p=1}^{15} C_{24}^p C_{14}^{p-1} C_{38-p}^{15}$  — это сумма

при всех  $p$  таких, что  $1 \leq p \leq 15$ .

**38.** Неравенство треугольника всегда будет выполнено, поэтому мы имеем сочетания с повторениями из элементов 4 типов по три элемента в сочетании. Их число равно  $\bar{C}_4^3 = C_6^3 = 20$ .

$$39. \bar{C}_{10}^3 = C_{12}^3 = 220.$$

**40.** Число всех  $n$ -сочетаний с повторениями из  $n$  букв равно  $C_{2n-1}^n$ , следовательно, в них входит  $nC_{2n-1}^n$  букв. Так как все буквы входят одинаковое число раз, то каждая входит  $C_{2n-1}^n$  раз.

**41.** Разобьем все способы упорядочить операторы на пары, состоящие из способов, которые получаются друг из друга перестановкой  $A$  и  $B$ . В каждой паре есть лишь один способ, удовлетворяющий поставленному условию. Поэтому имеем  $5!/2 = 60$  способов. Если  $A$  выступает непосредственно перед  $B$ , мы можем считать их за одного оператора. Поэтому имеем  $4! = 24$  способа.

**42.** В перестановках, где 4 буквы «е» идут подряд, их можно объединить и считать одной буквой. Поэтому число таких перестановок равно  $5!$ . Остается  $P(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$  перестановок.

**43.** Если «п» идет непосредственно после «о», то эти буквы можно объединить. Поэтому число перестановок равно  $P(2, 1, 1, 1, 1) = 360$ .

**44.** Сначала расставляем все буквы слова «обороноспособность», отличные от буквы «о», затем выбираем 7 из 12 мест, на которые можно вставить буквы «о», итого  $P(3, 2, 2, 1, 1, 1, 1) \cdot C_{12}^7$  способов.

**45.** Гласные можно переставлять друг с другом  $P(2, 1, 1) = 12$  способами и столькими же согласными. Если согласные уже расставлены, то для гласных остается 5 мест. Поэтому места для них можно выбрать  $C_5^4 = 5$  способами. Всего имеем  $5 \cdot 12^2 = 720$  способов.

**46.** Книги в черных переплетах можно переставить  $m!$  способами, а в красных —  $n!$  способами. Всего  $m!n!$  способов.

Если книги в черных переплетах стоят рядом, то надо еще выбрать для них место между книгами в красных переплетах. Это можно сделать  $n + 1$  способами. Всего получаем  $m!n!(n + 1) = m!(n + 1)!$  способов.

**47.** Учтем, что за каждой выбранной книгой надо оставить следующие за ней  $s$  книг. Тогда нам надо будет выбрать  $k$  предметов из  $n - ks$  (вставив за каждым выбранным предметом еще  $s$ , мы и получим выбор  $k$  предметов из  $n$ , удовлетворяющий условию задачи). Это можно сделать  $C_{n-ks}^k$  способами.

**48.** Каждый  $k$ -угольник определяется выбором  $k$  точек из  $n$ , взятых в определенном порядке, причем циклическая перестановка точек и изменение направления обхода вершин не меняет  $k$ -угольника. Поэтому различных  $k$ -угольников будет  $\frac{1}{2k}A_n^k$ , а вообще число многоуголь-

ников  $\sum_{k=3}^n \frac{1}{2k}A_n^k$ . Число выпуклых многоугольников равно  $\sum_{k=3}^n C_n^k$ .

**49. а)** Выберем произвольно первую вершину треугольника. Это можно сделать  $n$  способами. После этого нам надо выбрать еще две вершины среди  $n - 3$  точек (не смежных с данной) так, чтобы они были не смежны друг с другом. Это можно сделать  $C_{n-4}^2$  способами (занумеровать вершины от 1 до  $n - 3$ , выбрать 2 из первых  $n - 4$ , а затем больший номер увеличить на 1). Поскольку любую из трех вершин можно считать первой, то имеем  $\frac{1}{3}nC_{n-4}^2 = \frac{n(n - 4)(n - 5)}{6}$  способов выбора (это 3 рыцаря короля Артура из  $n$ ).

**б)** Выберем  $s$  идущих подряд вершин  $n$ -угольника  $A_1, \dots, A_s$  и разобьем все  $k$ -угольники, удовлетворяющие поставленному в задаче условию, на два класса. К первому классу отнесем все  $k$ -угольники, одна из вершин которых совпадает с одной из выбранных вершин, а ко второму классу — все остальные  $k$ -угольники. Разобьем  $k$ -угольники первого класса на  $s$  подклассов в соответствии с тем, какая из вершин  $A_m$ ,  $1 \leq m \leq s$ , принадлежит  $k$ -угольнику (очевидно, что эти подклассы не имеют общих элементов).

Найдем число  $k$ -угольников, для которых одной из вершин является  $A_m$ . Для этого отбросим вершину  $A_m$  и идущие за ней по часовой стрелке  $s$  вершин (ни одна из них не является вершиной  $k$ -угольника). Нам надо выбрать из оставшихся  $n - s - 1$  вершины  $k - 1$  вершину так, чтобы после каждой из них было не менее чем  $s$  невыбранных вершин. Это можно сделать  $C_{n-ks-1}^{k-1}$  способами (см. предыдущую задачу). Поэтому число  $k$ -угольников с вершиной  $A_m$  равно  $C_{n-ks-1}^{k-1}$ , а общее число  $k$ -угольников первого класса равно  $sC_{n-ks-1}^{k-1}$ .

Найдем теперь число  $k$ -угольников второго класса. Для этого «разрежем»  $n$ -угольник между вершинами  $A_s$  и  $A_{s+1}$ . Нам надо выбрать  $k$  вершин так, чтобы после каждой выбранной вершины шли по крайней мере  $s$  оставшихся (при этом ни одна из вершин  $A_1, \dots, A_s$  не будет выбрана). Это можно сделать  $C_{n-ks}^k$  способами. Таким образом, общее число  $k$ -угольников, удовлетворяющих поставленному условию, равно  $sC_{n-ks-1}^{k-1} + C_{n-ks}^k$ .

**50.** а) Если  $a$  и  $b$  стоят рядом, мы можем объединить их в один знак. Учитывая, что  $a$  и  $b$  можно переставить местами, мы получаем  $2(n - 1)!$  перестановок, в которых  $a$  и  $b$  стоят рядом. Поэтому они не стоят рядом в  $n! - 2(n - 1)!$  перестановках.

б) Точно так же получаем, что  $a$ ,  $b$  и  $c$  не стоят рядом в  $n! - 6(n - 2)!$  перестановках.

в) Никакие два из элементов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не стоят рядом в  $n! - 6(n - 1)! + 6(n - 2)!$  перестановках (по формуле включений и исключений).

**51.** Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы «ф» имеем 5 мест. После того как она вписана, имеем 6 мест для буквы «ц» и, наконец, 7 мест для буквы «т». Всего  $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$  способов.

Для слова «параллелизм» число способов равно  $A_{11}^7 / P_3 = 277\,200$  (следует учесть, что буква «л» входит в это слово трижды).

**52.** Сначала фиксируем последовательность гласных (2 способа), затем поставим между этими гласными 4 согласные ( $A_4^2 = 12$  способов). Первую из оставшихся согласных можно поставить до или после обеих гласных (2 способа), а для второй имеем уже три места. Всего получаем  $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 = 144$  способа.

**53.** Выберем 3 буквы из 5 согласных и поставим их на указанные места ( $A_5^3$  способов). Оставшиеся 5 букв произвольным образом расставим на остальные 5 мест (5! способов). Всего  $5! \cdot A_5^3 = 7200$  способов.

**54. а)**  $P(3, 1, 1, 1) - 4! = 96$  способов.

б) Сначала расставим согласные (3! способов). Для 3 букв «о» остается 4 места, и их можно расставить 4 способами. Всего 24 способа.

**55.** Буквы в слове «тик-так» можно переставить всего  $P(2, 2, 1, 1) = 180$  способами. Из них в  $P(2, 1, 1, 1) = 60$  рядом стоят две буквы «т» (мы не учтем дефис), в 60 — две буквы «к» и в

$P(1, 1, 1, 1) = 24$  — обе буквы. По формуле включений и исключений получаем  $180 - 60 - 60 + 24 = 84$  допустимые перестановки.

Для слова «космос» столько же. Для слова «тартар» имеем  $90 - 3 \cdot 30 + 3 \cdot 12 - 6 = 30$  допустимых перестановок.

56. В шестизначное число могут войти одна, две или три пары одинаковых цифр. Одну пару можно выбрать  $C_5^1$  способами.

Число перестановок из 4 различных и 2 одинаковых цифр равно  $P(2, 1, 1, 1, 1) = 6! / 2! = 360$ . Из них в  $5! = 120$  перестановках две одинаковые цифры идут подряд. Значит, в этом случае получаем  $5(360 - 120) = 1200$  шестизначных чисел. Две пары одинаковых цифр можно выбрать  $C_5^2 = 10$  способами, после чего  $C_3^2 = 3$  способами можно выбрать еще две цифры. Общее число перестановок этих цифр равно  $P(2, 2, 1, 1) = 180$ , причем в  $2 \cdot \frac{5!}{2!} = 120$  из них есть хотя бы одна пара следующих друг за другом одинаковых цифр, а в  $4! = 24$  перестановках — две такие пары. По формуле включений и исключений получаем, что этот случай дает  $10 \cdot 3(180 - 120 + 24) = 2520$  нужных нам чисел.

Аналогично находим, что три пары одинаковых цифр имеют  $C_5^3 \left[ \frac{6!}{(2!)^3} - 3 \cdot \frac{5!}{(2!)^2} + 3 \cdot \frac{4!}{2!} \right] = 300$  нужных нам чисел. Всего 4020 чисел.

57. Общее количество пятизначных чисел, которые можно составить из данных цифр, равно  $3 \cdot \frac{5!}{2!} + C_3^2 C_2^1 \cdot \frac{5!}{(2!)^2} + C_3^1 \cdot \frac{5!}{3!} + C_2^1 \cdot \frac{5!}{3! 2!} = 440$ .

Из их числа в  $3P_3 + 2 \cdot \frac{3}{2!} = 24$  цифра 3 идет подряд три раза. Получаем 416 искомых чисел.

58. Общее число перестановок данных цифр равно  $P(2, 2, 2, 2)$ . Из них в  $P(2, 2, 2, 1)$  перестановках данная цифра стоит два раза подряд, в  $P(2, 2, 1, 1)$  идут парами данные 2 цифры, в  $P(2, 1, 1, 1)$  — данные 3 цифры и в  $P(1, 1, 1, 1)$  — данные 4 цифры. По формуле включений и исключений получаем, что никакие 2 цифры не повторяются в

$$P(2, 2, 2, 2) - 4P(2, 2, 2, 1) + 6P(2, 2, 1, 1) -$$

$$- 4P(2, 1, 1, 1) + P(1, 1, 1, 1) = 864$$

перестановках. Для числа 12345254 аналогично получаем, что число перестановок равно  $\frac{8!}{(2!)^3} - 3 \cdot \frac{7!}{(2!)^2} + 3 \cdot \frac{6!}{2!} - 5! = 2220$ .

59. а)  $\frac{10!}{(3!)^2} - 2 \cdot \frac{8!}{3!} + 6! = 88\ 080$ ; б) 20040.

60.  $C_{m-2}^3$  (выбираем три номера из  $m - 2$  и увеличиваем средний на 1, больший — на 2).

61.  $4^n - C_3^1 \cdot 3^n + C_3^2 \cdot 2^n - 1$ .

62. Если блок встречается, то его можно заменить одной новой буквой. Методом включений и исключений получаем ответ

$$P(4, 3, 2) - P(1, 3, 2) - P(4, 1, 2) - P(4, 3, 1) + \\ + P(1, 1, 2) + P(1, 3, 1) + P(4, 1, 1) - P(1, 1, 1).$$

**63.** Так как  $C_{n+1}^{r+1} = \frac{n+1}{r+1} C_n^r$ ,  $C_n^r = \frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$ , то слева получается

$$\frac{n}{r} \left( \frac{n+1}{r+1} - 1 \right) (C_{n-1}^{r-1})^2 = \frac{n(n-r)}{r(r+1)} (C_{n-1}^{r-1})^2, \text{ справа}$$

$$r \left[ \left( \frac{n}{r} \right)^2 - \frac{n(n+1)}{r(r+1)} \right] (C_{n-1}^{r-1})^2 = \frac{n(n-r)}{r(r+1)} (C_{n-1}^{r-1})^2.$$

**64.** а) Число размещений с повторениями из  $n$  элементов по 3 равно  $n^3$ . Разобьем эти размещения на классы, отнеся к  $k$ -му классу размещения, содержащие ровно  $k$  различных типов элементов. Число размещений первого класса равно  $C_n^1$ , второго —  $C_n^2 \cdot 6$  (после выбора двух типов элементов имеется 2 способа выбора элемента, входящего два раза в размещение, и после этого три способа выбора места для одиночного элемента), а число размещений третьего класса равно  $C_n^3 P_3$ . Отсюда вытекает первое соотношение.

б) Аналогичным образом разбиваем на классы размещения с повторениями, содержащие хотя бы один элемент фиксированного типа. Мы получаем, что  $(n+1)^3 - n^3 = 1 + 6C_n^1 + 6C_n^2$ , откуда с учетом а) и следует доказываемое соотношение.

в, г) Доказываются точно так же, но рассматриваются размещения с повторениями из элементов  $n$  типов по 4 элемента в каждом.

**65.** Рассмотрим все сочетания с повторениями из элементов  $n$  типов по  $n$ . Их число равно  $C_{2n-1}^n$ . Разобьем эти сочетания на классы, отнеся к  $k$ -му классу сочетания, в которые входят элементы ровно  $k$  различных типов. В  $k$ -й класс входят  $C_n^k C_{n-1}^{n-k}$  сочетаний (мы выбираем  $C_n^k$  способами  $k$  типов элементов, входящих в сочетания этого класса, а из элементов данных  $k$  типов можно составить  $C_{n-1}^{n-k}$   $n$ -сочетаний с повторениями, в которые входят элементы всех  $k$  типов). Поэтому  $C_{2n-1}^n = C_n^1 C_{n-1}^{n-1} + C_n^2 C_{n-1}^{n-2} + \dots + C_n^n C_{n-1}^0$ . Выражая числа  $C_{2n-1}^n$ ,  $C_n^k$ ,  $C_{n-1}^{n-k}$  через факториалы, приходим к доказываемому соотношению.

**66.** Доказываемое равенство можно записать так:

$$C_{n+r-1}^r - C_n^1 C_{n+r-3}^{r-2} + C_n^2 C_{n+r-5}^{r-4} - \dots = C_n^r.$$

Для доказательства возьмем все  $r$ -сочетания с повторениями из элементов  $n$  типов и найдем двумя способами число всех таких сочетаний, состоящих лишь из элементов различных типов. С одной стороны, это число равно  $C_n^r$ . С другой стороны, число  $r$ -сочетаний с повторениями из элементов  $n$  типов, в которые по крайней мере дважды входят элементы данных  $k$  типов, равно  $C_{n+r-2k-1}^{r-2k}$ . Так как эти  $k$

типов можно выбрать  $C_n^k$  способами, то, применяя формулу включений и исключений, приходим к доказываемому соотношению.

**67.** Разобьем все перестановки из  $m$  белых и  $n$  черных шаров на классы. К классу  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  отнесем перестановки, в которых есть  $k_1$  изолированно стоящий белый шар,  $k_2$  пар,  $k_3$  троек, ...,  $k_m$  рядом стоящих  $m$  белых шаров. Ясно, что  $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$ .

Сосчитаем число перестановок класса  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Если  $n$  черных шаров поставлены в ряд, то мест, куда можно ставить белые шары, будет  $n+1$ . Из этих мест  $k_1$  мест окажутся заняты одним белым шаром,  $k_2$  — двумя, ...,  $k_m$  мест —  $m$  белыми шарами и свободными останутся  $n - k_1 - \dots - k_m + 1$  мест. Поэтому число способов распределить места для белых шаров, т. е. число перестановок класса  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ , равно  $P(k_1, k_2, \dots, k_m, n - k_1 - \dots - k_m + 1)$ . Поскольку общее число перестановок  $m$  белых и  $n$  черных шаров равно  $C_{n+m}^m$ , получаем доказываемое соотношение.

**68.** а) Положим  $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$ . В силу равенства  $C_n^k = C_n^{n-k}$  имеем  $S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}$ . Складывая, получаем  $2S_n = n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n)$  и потому  $S_n = 2^{n-1}n$ .

б) Таким же образом устанавливаем, что  $S_n = 2^{n-1}(n+2)$ .

в)  $S_n = 2^{n-1}(n-2)+1$ ; г)  $S_n = 2^n(n+1)$ ; д)  $S_n = 0$ ;

$$\begin{aligned} \text{е)} \quad S_n &= 4(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) = \\ &= 2^{n+1}n - 2^n + 1. \end{aligned}$$

ж) Мы имеем  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ . Поэтому

$$\begin{aligned} S_n &= (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) - 2(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + 3(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + \dots + (-1)^nnC_{n-1}^{n-1} = \\ &= C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + \dots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Эта сумма равна 1 при  $n=1$  и 0 при  $n>1$ .

$$\text{з)} \quad S_n = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

и) Так как  $C_n^k = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)} C_{n+2}^{k+2}$ , то эта сумма с учетом в) равна

$$S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} [C_{n+2}^2 + 2C_{n+2}^3 + \dots + (n+1)C_{n+2}^{n+2}] = \frac{2^{n+1}n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

к)  $S_n = \frac{1}{n+1} [C_{n+1}^1 - C_{n+1}^2 + \dots + (-1)^nC_{n+1}^{n+1}] = \frac{1}{n+1}$  (так как выражение в квадратных скобках равно 1).

л)  $S_n = 0$ , если  $n$  нечетно, и  $S_n = (-1)^k C_{2k}^k$ , если  $n = 2k$  (четно). Для доказательства надо перемножить разложения  $(1+x)^n$  и  $(1-x)^n$ , после чего найти коэффициент при  $x^n$ .

**69.** Каждая строка треугольника является арифметической прогрессией, причем сумма равноудаленных от концов элементов строки делится на 1958 (доказательство проводится с помощью индукции по номеру строки). Значит, этим свойством обладает и сумма двух элементов предпоследней строки, т. е. последний элемент таблицы.

**70.** Сначала выберем, какой из трех пассажиров, которым безразлично как сидеть, сядет лицом к локомотиву. Этот выбор можно сделать  $C_3^1 = 3$  способами. На каждой скамье можно пересаживать пассажиров  $P_5 = 5!$  способами. Всего получаем  $3 \cdot (5!)^2 = 43\ 200$  способов.

**71.** Сначала выбираем  $A_n^6$  способами 6 абонентов, уже разбитых на пары (первый-второй, третий-четвертый, пятый-шестой). Но абонентов можно переставлять внутри каждой пары, а также несуществен порядок пар, поэтому общее число способов надо разделить на  $2^3 \cdot 3! = 48$ . Всего получаем  $\frac{n!}{48 \cdot (n-6)!}$  способов.

**72.** а)  $A_{10}^7 = 604\ 800$ ; б)  $C_{10}^3 = 120$ . в) Если две девушки заведомо будут приглашены на танец, то имеется  $A_7^2$  вариантов выбора их партнеров; оставшиеся 5 юношей выбирают партнёршу из числа 8 девушек, что может быть сделано  $A_8^5$  способами, а всего имеем  $A_7^2 A_8^5 = 282\ 240$  способов. Наконец, если данные две девушки приглашены на танец, то еще пять девушек можно выбрать  $C_8^5$  способами.

**73.** Четырех девушек можно выбрать  $C_{12}^4$  способами. После этого выбираем юношей  $A_{15}^4$  способами (здесь уже существен порядок!). Всего  $C_{12}^4 A_{15}^4 = 16\ 216\ 200$  способов.

**74.** Места для нечетных цифр можно выбрать  $C_6^3 = 20$  способами. На каждом месте может стоять одна из 5 цифр (либо четная, либо нечетная). Всего получаем  $C_6^3 \cdot 5^6 = 312\ 500$  чисел. Из них  $1/10$  часть начинается с нуля. Остается 281 250 чисел.

**75.** Если выбросить нули, то останется одно из чисел 3, 21, 12, 111. Осталось расположить эти цифры на 10 местах так, чтобы на первом месте стоял не нуль. Для 3 это можно сделать одним способом; для 21 и 12 — по  $C_9^1 = 9$  способов (вторая цифра ставится на одно из 9 мест); для 111 —  $C_9^2 = 36$  способами. Всего  $1 + 2 \cdot 9 + 36 = 55$  чисел.

Для всех чисел от 1 до 9 999 999 999 ответ получается в виде  $C_{10}^1 + 2 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^3 = 220$  чисел.

**76.** Количество чисел, записываемых без использования цифры 9, равно  $9^3 = 729$ . Поэтому цифру 9 содержат  $1000 - 729 = 271$  число.

Ровно 2 раза цифра 9 входит в 27 чисел (надо лишь выбрать одну из других 9 цифр на одном из 3 мест).

Нуль входит в 1 однозначное (0), 9 двузначных<sup>1)</sup> ( $\overline{a0}$ ) и 171 трехзначное число (по 81 числу вида  $a0b$  и  $ab0$ , 9 чисел вида  $\overline{a00}$ ), а всего в 181 число. Дважды нуль входит в 9 чисел (вида  $a00$ ).

Обе цифры 0 и 9 входят в 36 чисел (если третья цифра  $a$  отлична от 0 и 9, то по 8 вариантов видов  $\overline{90a}$ ,  $\overline{9a0}$ ,  $\overline{a90}$ ,  $\overline{a09}$ , а если она равна 0 или 9, то еще 4 варианта 90, 900, 909, 990).

Цифры 8 и 9 входят в 54 числа.

77. а) Общее число пар, которые можно составить из 7 человек, равно  $C_7^2 = 21$ . В каждую тройку  $\{a, b, c\}$  входят 3 пары:  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$  и  $\{b, c\}$ . Поэтому в течение 7 дней все пары будут представлены по одному разу. Поскольку за 7 дней пройдет 21 человек, то каждый друг посетит его 3 раза, т. е. будет участвовать в трех тройках. Выберем сначала тройки, в которые входит первый друг. Это можно сделать  $\frac{6!}{(2!)^3 \cdot 3!}$  способами (число способов разбить 6 человек на 3 пары). Когда эти тройки выбраны, остаются две возможности выбора троек, в которые входит второй гость — например, если первый входит в тройки  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$ ,  $\{1, 6, 7\}$ , то второй входит либо в тройки  $\{2, 4, 6\}$ ,  $\{2, 5, 7\}$ , либо в тройки  $\{2, 4, 7\}$ ,  $\{2, 5, 6\}$ . После этого распределение остальных гостей определяется однозначно.

Учитывая возможность перестановок троек гостей, получаем  $\frac{6!}{(2!)^3 \cdot 3!} \cdot 2 \cdot 7! = 151\ 200$  способов.

б) Из 7 человек можно составить  $C_7^3 = 35$  троек, из 6 человек —  $C_6^3 = 20$ , из пяти —  $C_5^3 = 10$ , а из четырех лишь  $C_4^3 = 4$  тройки. Общее число вариантов «расписания» равно  $A_{35}^7$ . Но в  $C_7^1 A_{20}^7$  случаях один друг окажется неприглашенным, а в  $C_7^2 A_{10}^7$  случаях — два друга. Применяя формулу включений и исключений, получаем ответ в виде  $A_{35}^7 - C_7^1 A_{20}^7 + C_7^2 A_{10}^7$ .

в) Если один из друзей приходит каждый день (два без повторов не получится), то из остальных можно составить  $C_6^2 = 15$  пар. Поэтому число «расписаний», при которых один и тот же человек участвует ежедневно, равно  $C_7^1 A_{15}^7$ . Остается  $A_{35}^7 - C_7^1 A_{15}^7$  способов приглашения.

78. Поставим в соответствие каждой кости  $p \mid q$  кость  $(n-p) \mid (n-q)$ . Если  $p+q=n-r$ , то  $(n-p)+(n-q)=n+r$ . Значит, число костей с суммой очков  $n-r$  равно числу костей с суммой очков  $n+r$ . Общее число всех костей домино равно  $\bar{C}_{n+1}^2 = C_{n+2}^2$ .

79. Каждый из 15 человек может или войти или не войти в группу ( $2^{15}$  вариантов). Выбрать  $k$  человек из 15 можно  $C_{15}^k$  способами. Если группа не может быть пустой, то получаем  $2^{15} - C_{15}^0 = 32\ 767$  способов.

1) Запись  $\overline{abc}$  означает число, записанное цифрами  $a, b, c$ .

Если в группе не меньше 5 человек, то получаем  $2^{15} - C_{15}^0 - C_{15}^1 - C_{15}^2 - C_{15}^3 - C_{15}^4 = 30\ 827$  способов.

80. 12 человек можно выбрать  $C_{17}^{12}$  способами. В  $C_{15}^{10}$  случаях в число выбранных входят данные два человека. Поэтому остается  $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$  допустимых выборов.

81. Если муж пригласит в гости  $k$  женщин, то число приглашенных им мужчин равно  $6 - k$ . Тогда жена пригласит  $6 - k$  женщин и  $k$  мужчин. По правилам суммы и произведения такой выбор можно

$$\text{сделать } \sum_{k=0}^5 (C_5^k)^2 (C_7^{6-k})^2 = 267\ 148 \text{ способами.}$$

82. На левом борту могут сидеть 0, 1, 2, 3 или 4 человека из числа тех 9, кому безразличен выбор борта. Если из их числа выбрано  $k$  человек, то надо выбрать еще  $4 - k$  человек из числа 10, предпредлагающих левый борт. После этого остается  $12 + (9 - k)$  кандидатов, из которых выбираем 4 гребцов на правый борт. Всего имеем  $C_9^k C_{10}^{4-k} C_{21-k}^4$  способов выбора. Суммируя по  $k$  от  $k = 0$  до  $k = 4$ , получаем ответ 15 638 850.

83. Число 9 можно разбить на три различных слагаемых тремя способами:  $1 + 2 + 6$ ,  $1 + 3 + 5$ ,  $2 + 3 + 4$ . Сумма, меньшая, чем 9, будет в 4 случаях:  $1 + 2 + 3 = 6$ ,  $1 + 2 + 4 = 7$ ,  $1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 8$ . Так как 3 жетона можно вынуть  $C_{10}^3$  способами, то в  $C_{10}^3 - 4 = 116$  случаях сумма не меньше 9.

84. Сначала выберем места, на которых стоит цифра 3. Это можно сделать  $C_{10}^2$  способами. После этого ставим на оставшихся 8 местах цифры 1 или 2, что можно сделать  $2^8$  способами. Всего получаем  $2^8 C_{10}^2 = 11\ 520$  способов. Сумма цифр любого из написанных чисел лежит между  $8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14$  и  $8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22$ . Поэтому если число делится на 9, то сумма его цифр равна 18. Следовательно, единицы и двойки дают сумму 12. Эта сумма получается, если взять 4 единицы и 4 двойки. Итак, наше число содержит 4 единицы, 4 двойки и 2 тройки. Из этих цифр можно составить  $P(4, 4, 2) = \frac{10!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 3150$

различных чисел.

$$85. C_{12}^5 + C_{12}^4 C_{10}^1 + C_{12}^3 C_{10}^2 + C_{12}^2 C_{10}^3 = C_{20}^5 - C_{12}^0 C_{10}^5 - C_{12}^1 C_{10}^4 = 23562.$$

86.  $\overline{A}_3^1; \overline{A}_3^2; \overline{A}_3^3; (\overline{A}_3^3 - 2) \cdot 3 + 2 \cdot 2$  (в двух случаях — когда на первые 3 места ушли все синие или все красные шары, на 4-е место остается выбор лишь из 2 цветов); для  $n = 5$  можно рассмотреть все варианты количеств (по убыванию) одноцветных шаров, ответ получится в виде  $A_2^1 P(4, 1) + A_3^2 P(3, 2) + A_3^1 P(3, 1, 1) + A_3^1 P(2, 2, 1)$ .

87. 5 карт, идущих подряд, определяются выбором первой — это 10 вариантов из 13. Масть определяется выбором 1 из 4 возможных.  
а) 40 способов; б)  $4C_{13}^5$ ; в)  $4^5 \cdot 10$ .

88. а, б) Есть варианты ГСГСГ ( $\overline{A}_7^3 \cdot \overline{A}_{25}^2 = 7^3 \cdot 25^2$  способов) и СГСГС ( $\overline{A}_7^2 \cdot \overline{A}_{25}^3 = 7^2 \cdot 25^3$  способов), ответ  $32 \cdot 7^2 \cdot 25^2$ ;

в) ГСГСГ:  $A_7^3 \cdot A_{25}^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24$  способов,

СГСГС:  $A_7^2 \cdot A_{25}^3 = 7 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$  способов.

89. Пусть собрались 5 членов оргкомитета. По условию задачи у них нет ключа по крайней мере к одному замку, но он есть у каждого из остальных шести членов. Поскольку это происходит при любой комбинации 5 членов, то общее число замков равно  $C_{11}^5 = 462$ , общее число ключей равно  $462 \cdot 6 = 2772$ , а каждый член оргкомитета имеет  $2772 : 11 = 252$  ключа (т. е.  $C_{10}^5$ ).

90. а) Буква «о» может входить в число выбранных 0, 1, 2, 3 или 4 раза (5 способов), буква «к» — 3 способами и т. д. Всего получаем  $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2025$  комбинаций (или 2024, если «несколько» — это 1 или больше, но не 0).

б) Число комбинаций, в которых все три буквы различные, равно  $C_6^3 = 20$ ; комбинаций, содержащих ровно 2 различные буквы, будет  $A_6^2 = 30$ , и комбинаций, содержащих только одну букву, есть лишь 2. Всего 52 способа выбора.

в) Если учитывать и порядок букв, то  $A_6^3 + 3A_6^2 + 2 = 212$  способов.

91. Проведено  $C_5^2 = 10$  прямых. Через каждую точку проходят 4 прямые. Следовательно, из этой точки выходят 6 перпендикуляров. Рассмотрим какие либо две точки, например  $A$  и  $B$ . Перпендикуляры, опущенные из точки  $B$  на прямые, проходящие через точку  $A$ , пересекают все перпендикуляры, опущенные из точки  $A$ . Из точки  $A$  выходят 3 прямые, не проходящие через  $B$ . Значит, из  $B$  на них можно опустить 3 перпендикуляра. Они пересекаются с перпендикулярами, опущенными из точки  $A$ , в  $3 \cdot 6 = 18$  точках. Каждый из перпендикуляров, опущенных из точки  $B$  на другие 3 прямые, проходящие через  $A$ , пересекает лишь 5 перпендикуляров, опущенных из точки  $A$ , так как он параллелен одному из этих перпендикуляров, ибо опущен на одну прямую с ним. Получается еще 15 точек.

Следовательно, перпендикуляры, опущенные из двух точек, пересекаются в  $18 + 15 = 33$  точках. Но из 5 точек можно составить 10 пар. Это дало бы  $33 \cdot 10 = 330$  точек пересечения, но некоторые из этих точек совпадают. Именно, любые 3 из 5 данных точек образуют треугольник. Высоты этого треугольника (являющиеся некоторыми из наших перпендикуляров) пересекаются в одной точке, а мы эту точку учли 3 раза. Так как таких треугольников  $C_5^3 = 10$ , то надо отбросить 20 точек, и остается 310 возможных точек пересечения.

92. Выберем по одной лошади из каждой пары  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  ( $2^3 = 8$  способов выбора), трех лошадей из остальных 10 ( $C_{10}^3 = 120$  способов) и выберем порядок запрягания лошадей ( $6!$  способов). Всего  $2^3 \cdot 6! \cdot C_{10}^3 = 691\,200$  способов.

**93.** Согласные можно выбрать  $C_9^4$  способами, а гласные  $C_7^3$  способами. Выбранные 7 букв можно переставлять  $7!$  способами. Всего получаем  $C_9^4 C_7^3 \cdot 7!$  способов. Если никакие две согласные не должны стоять рядом, то порядок букв такой: СГСГСГС. Здесь мы имеем лишь  $3! \cdot 4!$  перестановок и  $C_9^4 C_7^3 \cdot 3! \cdot 4!$  слов.

**94.** Если число, изображенное первыми тремя цифрами, равно  $x$ , то число, изображенное последними тремя цифрами, может принимать значения  $0, 1, \dots, 999 - x$ , а всего  $1000 - x$  значений. Так как  $x$  меняется от 100 до 999, то нам надо найти сумму натуральных чисел от 1 до 900. Она равна 405 450.

**95.** Для слова «кофеварка» порядок букв СГСГСГСГС, согласные можно переставлять  $P(2, 1, 1, 1)$  способами, а гласные —  $P(2, 1, 1)$  способами. Всего  $P(2, 1, 1, 1) \cdot P(2, 1, 1) = 720$  способов.

Для слова «самовар» имеем  $P_4 \cdot P(2, 1) = 72$  перестановки.

**96.** Есть 3 комбинации, содержащие все 3 буквы «т», «а», «р», и 3 комбинации, содержащие по 2 различные буквы. Всего 6 комбинаций. Различных четырехзначных чисел из цифр числа 123123 можно составить  $3P(2, 1, 1) + 3P(2, 2) = 54$ .

**97.** По формуле включений и исключений получаем, что все цифры 1, 2, 3, 4 содержат  $10^6 - C_4^1 \cdot 9^6 + C_4^2 \cdot 8^6 - C_4^3 \cdot 7^6 + C_4^4 \cdot 6^6 = 23\ 160$  чисел, причем  $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 = \frac{4^7 - 4}{3} = 5460$  чисел состоят только из цифр 1, 2, 3, 4.

**98.** Белые шашки можно расставить  $C_{32}^{12}$  способами. После выбора 12 полей для белых шашек остается 20 полей для черных, на которые их можно поставить  $C_{20}^{12}$  способами. Всего  $C_{32}^{12} C_{20}^{12}$  способов. Другая логика решения дает ответ  $P(12, 12, 8)$ .

**99.**  $C_5^2 C_3^1 = 30$  способов;  $C_4^1 C_3^1 = 12$  способов.

**100.** Так как порядок и гласных, и согласных букв определен, надо лишь выбрать из 7 мест 3 места для гласных  $C_7^3$  способами.

**101.** Надо выбрать из 6 мест 3 места для буквы «а». Это можно сделать  $C_6^3 = 20$  способами. Если добавить условие, что никакие две буквы «а» не идут подряд, то для них есть лишь 4 места в записи  $*b*k*n*$ , и мы имеем  $C_4^3 = 4$  способа.

**102.** Если выбрано одно число, то второе можно выбрать из 10 другой четности. Учитывая возможность перестановки этих двух чисел, получаем  $\frac{20 \cdot 10}{2} = 100$  способов выбора. Во втором случае выбирать приходится из 9 оставшихся той же четности, ответ  $\frac{20 \cdot 9}{2} = 90$ .

**103.** Либо все три выбранных числа четны, либо одно четно и два нечетны. Поэтому получаем  $C_{15}^3 + C_{15}^1 C_{15}^2 = 2030$  способов выбора.

**104.**  $C_{52}^4 C_{48}^4 = 52\ 677\ 670\ 500$ ; в 1 случае.

**105.** Четырехзначное число может состоять либо из четырех различных цифр, либо из двух одинаковых и двух различных цифр, либо из двух пар одинаковых цифр. Поэтому общее количество таких чисел равно  $P_4 + C_2^1 C_3^1 P(2, 1, 1) + P(2, 2) = 24 + 6 \cdot 12 + 6 = 102$ .

**106.**  $2P(2, 1, 1, 1) + 3P(3, 1, 1) + 2P(2, 2, 1) + 3P(4, 1) = 255$ .

**107.** 12 учеников могут установить очередь к каждому экзаменатору  $12!$  способами, а к двум экзаменаторам —  $(12!)^2$  способами. При этом в  $C_{12}^1 \cdot 11!$  случаях хотя бы один ученик должен будет одновременно отвечать обоим экзаменаторам, в  $C_{12}^2 \cdot 10!$  случаях — двое и т. д. По формуле включений и исключений число разумных способов распределения равно  $(12!)^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{12!}\right) = 12! \cdot 176\ 214\ 841$ .

**108.** Аналогично получаем  $(6!)^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{6!}\right) = 190\ 800$ ;

$$(A_9^6)^2 - C_6^1 A_9^1 (A_8^5)^2 + C_6^2 A_9^2 (A_7^4)^2 - C_6^3 A_9^3 (A_6^3)^2 + C_6^4 A_9^4 (A_5^2)^2 - C_6^5 A_9^5 (A_4^1)^2 + C_6^6 A_9^6.$$

**109.** Первую горизонталь можно раскрасить  $8!$  способами. Каждую следующую горизонталь надо раскрашивать так, чтобы окраска каждой клетки отличалась от окраски лежащей под ней клетки. Это можно сделать  $8! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!}\right) = 14\ 833$  способами. По правилу произведения получаем  $8! \cdot (14\ 833)^7$  способов раскраски.

**110.** На последнем месте может быть одна из цифр 0, 2, 4. Если задана одна из этих цифр, то второе и третье места может занимать любая из шести цифр, а первое — любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Всего получаем  $5 \cdot 6 \cdot 6$  возможностей. Значит, сумма по разряду единиц равна  $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot (2 + 4) = 1080$ . Точно так же находим, что сумма по разряду десятков равна  $5 \cdot 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 3 \cdot 10 = 13500$ , сотен — 135 000, тысяч —  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^3 = 1\ 620\ 000$ . Всего получаем сумму 1 769 580.

**111. а)** Первые три цифры числа произвольны, а последняя принимает одно из двух значений, определяемых остатком от деления суммы первых трех цифр на 3, поэтому чисел будет  $6^3 \cdot 2$ .

Если на каком-то месте задать цифру, то остальные цифры можно выбрать  $6^2 \cdot 2 = 72$  способами. Следовательно, сумма по разряду единиц равна  $72 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1512$ , а сумма всех чисел равна  $1512 \cdot 1111 = 1\ 679\ 832$ .

**б)** Посмотрим, какие цифры можно *не брать*. Поскольку сумма всех цифр делится на 3, то не брать можно 3 и 6 (обязательно вместе) или одно из чисел 1, 4 и одно из чисел 2, 5. Значит, можно брать лишь числа 1245; 1236, 1536, 4236, 4536 и получающиеся из них перестановками цифр. Количество чисел равно  $5 \cdot 4! = 5!$ . Сумма в группе чисел, получающихся перестановками из  $abcd$ , будет равна  $(a + b + c + d) \cdot 1111 \cdot 3!$ , отсюда находим общую сумму  $72 \cdot 1111 \cdot 3!$ .

**112. а)** Будем писать 0 вместо белого шара и 1 вместо черного. Возьмем некоторое размещение с повторениями из не более чем  $m$

нулей и  $n$  единиц. Если оно кончается нулем, то допишем в конце единицы в количестве, недостающем до  $n+1$ , а за ними нули до  $m+1$ . Если же оно кончается единицей, то допишем в конце нули в количестве до  $m+1$ , а за ними единицы до  $n+1$ . Получится перестановка из  $m+1$  нулей и  $n+1$  единиц. И обратно, отбрасывая из каждой перестановки из  $m+1$  нулей и  $n+1$  единиц последние две группы одинаковых цифр, мы получим некоторое размещение с повторениями из не более чем  $m$  нулей и  $n$  единиц. Нехорошими являются лишь две перестановки:  $00\dots011\dots1$  и  $11\dots100\dots0$ , дающие после этой операции пустое размещение. Отсюда и следует, что число таких размещений равно  $P(m+1, n+1) - 2$ .

б) Число размещений, содержащих ровно  $k$  белых шаров, равно  $P(k+1, n+1) - P(k, n+1)$ . Поэтому белые шары входят

$$\sum_{k=1}^m k[P(k+1, n+1) - P(k, n+1)] \text{ раз. Преобразуем это выражение:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m kP(k+1, n+1) - \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(k+1, n+1) &= \\ = mP(m+1, n+1) - \sum_{k=0}^{m-1} P(k+1, n+1) &= \\ = mP(m+1, n+1) - P(m, n+2) + 1 &= 1 + \frac{mn+m-1}{n+2}P(m+1, n+1). \end{aligned}$$

**113.** Искомое число равно сумме  $\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n (p+q+1)P(p, q)$ . Но

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^n (p+q+1)P(p, q) &= (p+1)\sum_{q=0}^n P(p, q) + \sum_{q=1}^n qP(p, q) = \\ &= (p+1)\left[P(p+1, n) + \sum_{q=1}^n P(p+1, q-1)\right] = \\ &= (p+1)[P(p+1, n) + P(p+2, n-1)] = (p+1)P(p+2, n). \end{aligned}$$

Поэтому сумма равна

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^m (p+1)P(p+2, n) &= \sum_{p=0}^m (p+2)P(p+2, n) - \sum_{p=0}^m P(p+2, n) = \\ &= (n+1)P(m+1, n+2) - P(m+2, n+1) + 1 = \\ &= 1 + \frac{mn+m+n}{m+n+4} P(m+2, n+2). \end{aligned}$$

Суммируя результаты, полученные в двух последних задачах, приходим к последней формуле.

**114.**  $C_n^3$ .

**115.** Если бы никакие три из  $n$  точек не лежали на одной прямой, то было бы  $C_n^3$  треугольников с вершинами в этих точках. Но  $p$  точек лежат на одной прямой, и поэтому  $C_p^3$  треугольников надо отбросить. Остается  $C_n^3 - C_p^3$  треугольников.

**116.** а) Можно взять две вершины на одной прямой, а третью — на другой. Поэтому будет  $C_p^2 C_q^1 + C_p^1 C_q^2 = \frac{pq}{2} (p+q-2)$  треугольников.

б) Еще  $C_r^2(C_p^1 + C_q^1) + C_r^1(C_p^2 + C_q^2) + C_r^1 C_p^1 C_q^1 = \frac{r}{2} (p+q)(p+q+r-2)$  треугольников.

**117.** На каждой стороне  $n-1$  точка деления, причем вершины треугольника нельзя брать все на одной стороне. Отсюда получаем ответ  $C_{4(n-1)}^3 - 4C_{n-1}^3 = 2(n-1)^2(5n-8)$ .

**118.** Вообще  $n$  прямых в общем положении имеют  $C_n^2$  точек пересечения. Но  $p$  прямых, проходящих через точку  $A$ , дают одну точку пересечения вместо  $C_p^2$ , а  $q$  прямых, проходящих через точку  $B$ , — одну точку вместо  $C_q^2$ . Поэтому остается  $C_n^2 - C_p^2 - C_q^2 + 2$  точек пересечения.

**119.** Число точек пересечения, лежащих на каждой из прямых, проходящих через  $A$ , равно  $n+p$ , через  $B$  —  $m+p$  и через  $C$  —  $m+n$ . Так как через  $A$  проходят  $m$  прямых, через  $B$  проходят  $n$  прямых и через  $C$  —  $p$  прямых, то общее число точек пересечения равно  $\frac{1}{2} [m(n+p) + n(m+p) + p(m+n)] = mn + mp + np$ .

Из них можно  $C_{mn+mp+np}^3$  способами выбрать тройку точек, но в  $mC_{n+p}^3 + nC_{m+p}^3 + pC_{m+n}^3$  случаях мы заведомо получим точки, лежащие на одной из проведенных прямых. Поэтому число треугольников равно  $C_{mn+mp+np}^3 - mC_{n+p}^3 - nC_{m+p}^3 - pC_{m+n}^3$ .

**120.** Каждым трем прямым соответствуют четыре касающиеся их окружности. Поэтому всего имеем  $4C_{10}^3$  окружностей.

**121.** Выберем две точки на прямой  $a$  и две точки на прямой  $b$ . Им соответствуют две точки пересечения прямых, проходящих через эти точки (точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения боковых сторон). Так как на первой прямой можно выбрать  $C_p^2$  пар точек, а на второй  $C_q^2$ , то число точек пересечения равно  $2C_p^2 C_q^2$ , из них  $C_p^2 C_q^2$  между заданными прямыми.

**122.** Число проведенных окружностей равно  $C_n^3$ . Возьмем одну из этих окружностей, проведенную через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Мы имеем

$C_{n-3}^3$  окружностей, не проходящих ни через одну из этих точек. Выбранная окружность пересекается с каждой из них в двух точках. Далее, имеем  $C_3^1 C_{n-3}^2$  окружностей, проходящих через одну из точек  $A, B, C$  и не проходящих через две из этих точек. Они дают по одной точке пересечения, отличной от  $A, B, C$ . Остальные окружности пересекаются с выбранной в двух из точек  $A, B, C$ . Таким образом, данная окружность дает

$$2C_{n-3}^3 + C_3^1 C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}$$

точек пересечения, отличных от  $A, B, C$ . Всего получаем

$$\frac{1}{2} C_n^3 \frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6} = \frac{5(2n-1)}{3} C_n^5$$

точек пересечения (в общем случае различных), отличных от заданных. Добавляя эти  $n$  точек, получаем, что число точек пересечения не превосходит  $\frac{5(2n-1)}{3} C_n^5 + n$ .

**123.**  $n$  точек определяют  $C_n^3$  окружностей. Из их числа  $C_{n-1}^2$  проходят через данную точку и  $C_{n-2}^1$  — через данные две точки. Поэтому прямая, проходящая через две данные точки, имеет не более  $2C_{n-2}^3 + (2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^1) + 2$  точек пересечения с окружностями. Так как через  $n$  точек проходит  $C_n^2$  прямых, то имеем не более чем  $C_n^2 (2C_{n-2}^3 + 2C_{n-1}^2 - C_{n-2}^1 + 2)$  точек пересечения.

**124.** Каждая прямая пересечения определяется двумя плоскостями, а каждая плоскость — тремя заданными точками. Прямые распадаются на классы в соответствии с тем, сколько точек из задающих первую плоскость входит в число точек, задающих вторую плоскость.

Все точки различны в  $\frac{1}{2} C_n^3 C_{n-3}^3$  случаях (выбираем три точки из  $n$  и еще три точки из оставшихся  $n-3$ , причем порядок выбора не играет роли) — столько же будет (обычно различных) прямых пересечения плоскостей. Если одна точка входит в обе тройки, то получаем  $\frac{1}{2} C_n^1 C_{n-1}^2 C_{n-3}^2$  способов выбора и столько же прямых пересечения, а если две точки входят в обе тройки, то они и определят прямую пересечения независимо от остальных точек — получаем  $C_n^2$  прямых.

Всего имеем  $\frac{1}{2}(C_n^3 C_{n-3}^3 + C_n^1 C_{n-1}^2 C_{n-3}^2) + C_n^2$  прямых.

**125.**  $C_n^3 - C_m^3 + 1$ . Каждая плоскость определяется выбором трех точек из  $n$ . Но если все эти точки из набора  $m$  заданных, то получается одна и та же плоскость.

**126.**  $C_n^3 - C_p^3 + 1$ .

**127.** Разобьем все треугольники на два класса — те, у которых все вершины лежат на различных прямых, и те, у которых две вершины лежат на одной прямой. Число треугольников первого класса равно  $p^3 C_n^3$  (мы выбираем  $C_n^3$  способами три прямые, на которых лежат вершины, после чего на каждой из этих прямых выбираем по одной точке из  $p$ ). Число треугольников второго класса равно  $n C_p^2 (n-1)p$  (мы выбираем прямую, на которой лежат две вершины, затем две точки на этой прямой, после чего берем другую прямую, где лежит одна вершина, и точку на этой прямой). Общее число треугольников равно  $\frac{n(n-1)p^2(pn+p-3)}{6}$ .

**128.**  $m$  параллельных прямых делят плоскость на  $m+1$  полосу. Каждая новая прямая добавляет столько кусков, на сколько частей она делится уже проведенными прямыми. Так как мы проводим еще  $n$  прямых, то получаем

$$m + 1 + (m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + n) = \frac{(n + 1)(2m + n)}{2} + 1$$

частей.

**129.** Разобьем окружности на классы по числу заданных точек, лежащих на данной окружности. Одна окружность (а именно, данная) содержит все эти точки,  $C_5^2 C_6^1$  содержат две точки,  $C_5^1 C_6^2$  одну точку и  $C_6^3$  — ни одной точки. Всего получаем  $1 + C_5^2 C_6^1 + C_5^1 C_6^2 + C_6^3 = 156$  окружностей.

**130.** Каждый параллелограмм определяется двумя парами параллельных прямых. Поэтому имеем  $(C_{n+2}^2)^2$  параллелограммов.

**131. а)** Любые три целых числа  $x, y, z$ , удовлетворяющие неравенствам  $n+1 \leq x, y, z \leq 2n$ , могут быть сторонами треугольника. Поэтому число треугольников с такими сторонами равно  $C_n^3 = C_{n+2}^3$ .

Чтобы найти число равнобедренных треугольников, заметим, что при каждом заданном основании мы имеем  $n$  равнобедренных треугольников (каждый раз новых). Значит, их общее число равно  $n^2$ .

Число равносторонних треугольников равно  $n$ .

**б)** Нам надо найти количество троек натуральных чисел  $x, y, z$  таких, что  $x \leq y \leq z \leq 2n$  и  $x + y > z$ . Пусть задано некоторое  $x$ . Тогда  $y$  принимает значения от  $x$  до  $2n$ . Когда  $y$  пробегает значения от  $x$  до  $2n - x + 1$ , каждому значению  $y$  соответствует  $x$  значений  $z$ , удовлетворяющих неравенствам  $y \leq z < y + x, z \leq 2n$ . Если же  $y$  принимает значения от  $2n - x + 2$  до  $2n$ , то число соответствующих значений  $z$  равно  $2n - y + 1$ . Всего при заданном  $x$  получаем

$$2x(n-x+1) + \sum_{y=2n-x+2}^{2n} (2n-y+1) = 2xn - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

пар  $(y; z)$  таких, что  $x, y, z$  удовлетворяют поставленным условиям. Отсюда вытекает, что общее число треугольников, для которых

$1 \leq x \leq n$  и  $1 \leq y, z \leq 2n$ , равно  $\sum_{x=1}^n \left(2xn - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right) = \frac{n}{2}(n+1)^2$ . В силу

п. а) существует  $C_{n+2}^3$  треугольников, для которых  $x \geq n+1$ . Поэтому всего имеем  $\frac{n}{2}(n+1)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$  треугольников.

Количество равнобедренных треугольников с основанием  $x = 2k$  равно  $2n - k$ , а с основанием  $2k + 1$  тоже  $2n - k$ . Поэтому общее число

равнобедренных треугольников равно  $\sum_{k=1}^n (2n - k) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n - k) = 3n^2$ .

Исключая их, получаем  $\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} - 3n^2 = \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}$  треугольников.

в) Эта задача решается подобно предыдущей. Число треугольников с заданным значением  $x \leq n-1$  равно  $2nx - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$ , а всех треугольников, для которых  $x \leq n-1$ , имеем

$$\sum_{x=1}^{n-1} \left(2nx - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$$

Число же треугольников, для которых  $x \geq n$ , равно  $C_{n+2}^3$ , а потому всего имеем

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

треугольников. Число равнобедренных треугольников равно

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2n - k - 1) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n - k - 1) = 3n^2 - 3n + 1,$$

а разносторонних —

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - 3n^2 + 3n - 1 = \frac{(n-1)(n-2)(4n-3)}{6}.$$

**132.** Обозначим стороны четырехугольника через  $a, b, c, d$ . Не теряя общности, можно считать, что  $a$  — наименьшая из сторон,  $c$  — противоположная ей сторона и что  $b < d$ . Тогда  $a < b < d$  и  $a < c$ . Кроме того, так как четырехугольник описан вокруг окружности, то  $a + c = b + d$ . Отсюда следует, что  $a + c > 2b$ . Поэтому при заданных значениях  $a$  и  $b$  длина  $c$  может принимать значения от  $2b - a + 1$  до

$n$  и должно выполняться неравенство  $2b - a \leq n - 1$ . Итак, мы доказали, что  $b \leq \frac{a+n-1}{2}$  и что  $2b - a + 1 \leq c \leq n$ . Обозначим  $\left[ \frac{a+n-1}{2} \right]$  через  $s$ . Тогда при заданном значении  $a$  имеем

$$\sum_{b=a+1}^s (n+a-2b) = (s-a)(n-s-1)$$

четырехугольников.

Пусть  $n$  — четное число,  $n = 2m$ . Тогда при  $a$  нечетных,  $a = 2k - 1$ , имеем  $s = \left[ \frac{a+n-1}{2} \right] = m + k - 1$  и, следовательно,  $(m-k)^2$  четырехугольников, а при  $a$  четных,  $a = 2k$ , имеем  $s = \left[ \frac{a+n-1}{2} \right] = m + k - 1$  и, следовательно,  $(m-k-1)(m-k)$  четырехугольников. Суммируя по  $a$ , получаем, что общее число четырехугольников равно

$$\sum_{k=1}^m (m-k)^2 + \sum_{k=1}^m (m-k)(m-k-1) = \frac{m(m-1)(4m-5)}{2} = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24}.$$

Случай, когда  $n$  нечетно, рассматривается аналогично.

Если допускать, чтобы у четырехугольника были одинаковые стороны, то  $a, b, c, d$  должны удовлетворять соотношениям  $a \leq b \leq d \leq n$ ,  $a \leq c$  и  $a+c = b+d$ , откуда следует, что  $b \leq \frac{a+n}{2}$  и  $2b - a \leq c \leq n$ . Если положить  $s = \left[ \frac{a+n}{2} \right]$ , то число четырехугольников с заданным значением  $a$  равно  $(n-s+1)(s-a+1)$ . При четном значении  $n$  получаем  $\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$  четырехугольников, а при нечетном  $\frac{(n+1)(2n^2+7n+3)}{24}$ .

133.  $\overline{C}_n^3$ .

134. Из полной колоды 4 карты можно вынуть  $C_{52}^4$  способами. Ровно 3 масти будут в  $A_4^2(C_{13}^1)^2 C_{13}^2 = 158\ 184$  случаях — мы выбираем отсутствующую и повторяющуюся масти  $A_4^2$  способами, после чего выбираем две карты повторяющейся масти  $C_{13}^2$  способами и по одной карте еще двух мастей  $(C_{13}^1)^2$  способами. Ровно две масти будут в  $C_4^2(C_{13}^2)^2 + A_4^2 C_{13}^3 C_{13}^1 = 81\ 120$  случаях (либо две масти по две карты каждой масти, либо одна карта одной масти и три другой).

135. Число награжденных 11-классников равно числу 10-классников, сопоставим их друг другу, не награжденным 10-классникам — 9-классников и т. д.

**136.** Сначала найдем количество чисел, в которые не входит цифра нуль. Три цифры, входящие в число, можно выбрать  $C_9^3 = 84$  способами. Из трех цифр можно составить  $3^6$  шестизначных чисел, из двух —  $2^6$  и из одной  $1^6$ . По формуле включений и исключений существует  $3^6 - C_3^1 \cdot 2^6 + C_3^2 \cdot 1^6 = 540$  шестизначных чисел, в которые входят все три выбранные нами цифры. Поэтому общее количество шестизначных чисел, в которые входят ровно три отличные от нуля цифры, равно  $84 \cdot 540 = 45\ 360$ . Если в число входит нуль, то нам надо выбрать еще две входящие в него цифры. Это можно сделать  $C_9^2 = 36$  способами.

Пусть, скажем, выбраны 0, 1 и 2. Тогда первой цифрой числа будет 1 или 2. Если, например, первой цифрой является 1, то остальные пять цифр могут быть любыми из числа 0, 1 или 2 при условии, что среди них встречаются 0 и 2.

По формуле включений и исключений получаем, что эти пять цифр можно выбрать  $3^5 - C_2^1 \cdot 2^5 + 1^6 = 180$  способами. Но тогда общее число шестизначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2 и содержащих все эти цифры, равно  $2 \cdot 180 = 360$ , а всего шестизначных чисел, составленных из трех цифр, среди которых встречается нуль, будет  $36 \cdot 360 = 12\ 960$ . Всего получаем  $45\ 360 + 12\ 960 = 58\ 320$  чисел.

Для  $m$ -значных чисел и  $k$  различных цифр точно так же получаем ответ

$$\begin{aligned} C_9^k & \left[ k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - \dots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1} \cdot 1^m \right] + (k-1)C_9^{k-1} \times \\ & \times \left[ k^{m-1} - C_{k-1}^1(k-1)^{m-1} + C_{k-1}^2(k-2)^{m-1} - \dots + (-1)^{k-2}C_{k-1}^{k-2} \cdot 1^{m-1} \right]. \end{aligned}$$

**137.** Будем писать вместо четных чисел 0, а вместо нечетных чисел 1 (остатки от деления на 2). Треугольник примет вид

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Треугольник, стоящий в строках 0 – 3, будет повторен дважды в строках 4 – 7 и т. д. Отсюда при  $m = 4k + p$  ( $p = 0, 1, 2, 3$ ) легко вывести ответ.

**138.** Указание. Конечно, считать надо количество чисел, делящихся на  $p$ . Поскольку  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , простое  $p$  появится лишь при  $n \geq p$ . Структура треугольника в строках от 0 до  $p-1$  будет повторяться далее в несколько усложненном виде.

Можно также рассмотреть, сколько раз  $kp$  появится в числителе и знаменателе дроби  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

же рассмотреть, сколько раз  $kp$  появится в числителе и знаменателе дроби  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

**139.** Существует  $C_{20}^6$  сочетаний, в которых различны все буквы,  $C_{20}^1 C_{19}^4$  сочетаний, в которых совпадают две буквы, и т. д. Всего получаем  $C_{20}^6 + C_{20}^1 C_{19}^4 + C_{20}^2 C_{18}^2 + C_{20}^3 = 146\,490$  сочетаний.

**140.** Искомые перестановки начинаются с буквы «м». Места для остальных  $p-1$  букв «м» выбираются произвольно из  $p+q+r-1$  оставшихся  $C_{p+q+r-1}^{p-1}$  способами. Остается  $q+r$  свободных мест. На первом из них стоит «а», места для  $r$  букв «к» выбираются произвольно из  $q+r-1$  оставшихся  $C_{q+r-1}^r$  способами. Итого  $C_{p+q+r-1}^{p-1} C_{q+r-1}^r$  способов.

**141.** Положим  $aa = A$ ,  $bb = B$ ,  $cc = C$ ,  $aaa = A^+$ ,  $bbb = B^+$ ,  $ccc = C^+$ . Тогда  $ABC$  допускает  $P_3 = 6$  перестановок,  $A^+B^+C^+$  — столько же (одиночную букву приходится приклеивать к паре),  $AABBCC$  допускает  $P(2, 2, 2) = 90$  перестановок,  $AA^+BB^+CC^+$  допускает  $P_6$  перестановок, но поскольку, например,  $AA^+ = A^+A$ , среди них будут попадаться одинаковые, методом включений и исключений получаем ответ в виде  $P_6 - C_3^1 P_5 + C_3^2 P_4 - C_3^3 P_3 = 426$ .

**142.** Если есть какое-либо из этих имен, то можно рассматривать его как одну новую букву взамен 3 или 4 старых. Далее методом включений и исключений получаем ответ

$$P_{33} - P_{31} - 2P_{30} + 2P_{28} + P_{27} - P_{25}.$$

**143.** Всего возможно  $n-1$  сомножителей от 2 до  $n$ . Из всех  $C_{n-1}^k$  произведений на  $p$  делятся те, которые его содержат, их  $C_{n-2}^{k-1}$ . Во втором случае всего произведений  $2^{n-1}-1$ , на  $p$  делятся  $2^{n-2}$ .

**144.** Из условия задачи видно, что различные броски дают одинаковую сумму, лишь если они получаются друг из друга перестановкой костей (причем если на костях выпало разное количество очков). Поэтому число различных сумм равно  $C_6^2 + C_6^1 = 21$ .

**145.** На костях могут выпасть 3 разных числа, 2 одинаковых и 1 другое или 3 одинаковых числа —  $C_6^3 + A_6^2 + C_6^1 = 56$  вариантов.

**146.** Один вид очков будет в 6 случаях. Два вида могут выпасть тремя способами:  $1+5$ ,  $2+4$ ,  $3+3$ . В первом случае очки в группах можно выбрать  $A_6^2$  способами и  $P(1, 5)$  способами распределение костей по группам. Это дает  $A_6^2 P(1, 5) = 180$  случаев. Другие варианты дают  $A_6^2 P(2, 4) = 450$  и  $C_6^2 P(3, 3) = 300$  случаев. Итак, два вида очков получаются в  $180 + 450 + 300 = 930$  случаях. Для трех видов очков мы сначала находим все разбиения числа 6 на три слагаемых и соответственно получаем  $C_6^2 C_4^1 P(1, 1, 4) + A_6^3 P(1, 2, 3) + C_6^3 P(2, 2, 2) = 10\,800$

случаев, когда выпадают ровно 3 вида очков. Для четырех видов очков мы аналогично находим  $C_6^3 C_3^1 P(1, 1, 1, 3) + C_6^2 C_4^2 P(1, 1, 2, 2) = 23\ 400$  случаев, для 5 видов очков мы имеем  $C_6^4 C_2^1 P(1, 1, 1, 1, 2) = 10\ 800$  случаев, а для 6 —  $A_6^6 = 720$  случаев.

Отметим, что  $6 + 930 + 10800 + 23400 + 10800 + 720 = 6^6$ .

**147.** Если мы выбрали нечетное число предметов, то число оставшихся предметов четно.

$$148. \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}, \quad C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1}.$$

**149.** Из первой ячейки — одним способом, из второй  $C_{2n}^n$ , ..., из  $m$ -й  $C_{mn}^n$  способами. Всего имеем  $C_{2n}^n C_{3n}^n \dots C_{mn}^n = \frac{(mn)!}{(n!)^m}$  способов.

**150.** Нам надо доказать неравенство  $C_{2n+r}^n C_{2n-r}^n \leq (C_{2n}^n)^2$ . Его можно переписать в виде

$$\frac{(2n+r)(2n+r-1) \dots (2n+1)}{(n+r)(n+r-1) \dots (n+1)} \leq \frac{2n(2n-1) \dots (2n-r+1)}{n(n-1) \dots (n-r+1)}.$$

Это неравенство вытекает из легко доказываемого при  $1 \leq k < n$  неравенства  $\frac{2n+k}{n+k} < \frac{2n-k}{n-k}$ .

**151.** Обозначим множество предметов, по которым ученик  $a$  учится на 5, через  $A$ . В каждом таком множестве не более чем  $2n$  элементов, причем по условию задачи ни одно из них не является частью другого. Разобьем эти множества на классы, отнеся к  $k$ -му классу множества, содержащие  $k$  элементов. Пусть наименьшее число элементов в множествах нашей совокупности равно  $r$ . Покажем, что если  $r < n$ , то можно заменить данную совокупность множеств другой так, чтобы

- а) ни одно множество новой совокупности не было частью другого;
- б) число множеств в новой совокупности было больше, чем в первоначальной;
- в) наименьшее число элементов в множествах новой совокупности было равно  $r+1$ .

Для этого возьмем все множества, состоящие из  $r$  элементов, и присоединим к каждому из них всевозможными способами по одному не принадлежащему им элементу. Остальные же множества нашей совокупности оставим неизменными. Ясно, что после этой операции мы получим совокупность, в которой наименьшее число элементов в множестве равно  $r+1$ . При этом ни одно множество новой совокупности не является частью другого — если бы множество  $B$  содержало новое множество  $A'$ , то оно содержало бы и то множество  $A$   $r$ -го класса, из которого  $A'$  получилось присоединением одного элемента, а это противоречит условию. Отметим, кроме того, что ни одно из новых множеств не совпадает ни с каким первоначально заданным множеством, поскольку оно содержит некоторое множество  $A$ .

Нам осталось показать, что число новых множеств больше, чем число первоначальных. Для этого заметим, что из каждого множе-

ства  $A$   $r$ -го класса получается  $2n - r$  новых множеств. Но некоторые из этих множеств могут совпадать друг с другом (например, из множеств  $\{a, b\}$  и  $\{b, c\}$  можно получить путем присоединения одного элемента одно и то же множество  $\{a, b, c\}$ ). Но есть лишь  $r + 1$  способ получить данное множество из  $r + 1$  элементов из множеств, содержащих  $r$  элементов. Поэтому если число множеств  $r$ -го класса равнялось  $m$  и из них получилось  $p$  различных новых множеств, то  $m(2n - r) \leq p(r + 1)$ . Поскольку при  $r < n$  имеем  $2n - r > r + 1$ , то отсюда вытекает, что  $m < p$ , т. е. что число множеств увеличилось.

Повторяя описанный прием, мы можем заменить все множества, содержащие меньше чем  $n$  элементов, множествами из  $n$  элементов, сохранив условие а) и получив больше множеств, чем первоначально. Таким же образом можно заменить все множества, содержащие более  $n$  элементов (они последовательно заменяются множествами, получаемыми отбрасыванием одного элемента). В результате мы получим совокупность множеств, состоящих из  $n$  элементов и содержащую больше множеств, чем первоначально заданная. Но из  $2n$  элементов можно составить лишь  $C_{2n}^n$  множеств по  $n$  элементов. Значит, число множеств было не больше  $C_{2n}^n$ , иными словами, в школе было не более  $C_{2n}^n$  учеников.

$$152. \text{ Так как } \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = i_1 = C_{i_1}^1, \text{ то } \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = \sum_{i_1=1}^{i_2} C_{i_1}^1 = C_{i_2+1}^2.$$

Далее имеем  $\sum_{i_2=1}^{i_3} \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1 = \sum_{i_2=1}^{i_3} C_{i_2+1}^2 = C_{i_3+2}^3$ . Отсюда ясно, что вычисляемая сумма равна  $C_{n+m}^{n+1}$ .

153. Число различных  $2n$ -буквенных слов, в которых не разрываются данные  $k$  пар букв, равно  $2^{k-n}(2n - k)!$ . Эти  $k$  пар можно выбрать  $C_n^k$  способами. Применяя формулу включений и исключений, приходим к требуемому результату.

154. Число способов раздела, при которых данные  $k$  человек не получат ни одной вещи, равно  $(n + p - k)^r$ . Применяя формулу включений и исключений, приходим к требуемому результату.

155. Если  $x$  при делении на 7 дает остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, то  $x^2$  дает соответственно остатки 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Поэтому  $x^2 + y^2$  делится на 7 (а тем более на 49) лишь в случае, когда и  $x$ , и  $y$  делятся на 7. Поэтому число пар (с учетом порядка) равно  $[1000/7]^2 = 142^2 = 20\ 164$ .

Если не учитывать порядка, получим  $\bar{C}_{142}^2 = 10\ 153$  пары.

$$156. \text{ а) } (C_7^4 + C_2^1 C_7^3) C_6^3 = 2100; \text{ б) } C_9^4 (C_4^3 + C_2^1 C_4^2) = 2016;$$

$$\text{в) } C_8^4 C_6^3 + C_8^3 C_5^3 = 1960.$$

**157.** а) Возможны следующие случаи: на 3 делятся все три слагаемых, одно слагаемое и ни одно из слагаемых. В первом случае слагаемые можно выбрать  $C_{33}^3$  способами. Во втором случае одно слагаемое дает в остатке 1, а другое — 2. Так как чисел от 1 до 100, дающих в остатке 1, имеется 34, а чисел, делящихся на 3, а также дающих в остатке 2, имеем по 33, то во втором случае имеем  $C_{34}^1(C_{33}^1)^2$  способов. Если все три слагаемых не делятся на 3, то они дают либо остатки 1, 1 и 1, либо остатки 2, 2 и 2. Соответственно получаем  $C_{34}^3$  или  $C_{33}^3$  случаев. Всего имеем  $2C_{33}^3 + C_{34}^3 + C_{34}^1(C_{33}^1)^2$  способов выбора.

б)  $3C_n^3 + (C_n^1)^3$ .

**158.** Разобьем выборки на классы по числу вошедших в них одинаковых предметов. Если в выборку вошло  $k$  одинаковых предметов, то надо добрать еще  $n - k$  из числа различных, что можно сделать  $C_{2n+1}^{n-k}$  способами. Поэтому общее число выборок равно

$$C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n-k} + \dots + C_{2n+1}^0 = \frac{1}{2}(C_{2n+1}^{2n+1} + C_{2n+1}^{2n} + \dots + C_{2n+1}^0) = 2^{2n}.$$

Есть рассуждение, непосредственно приводящее к этому ответу. Отложим один «отмеченный» предмет из числа различных и разобьем оставшиеся  $2n$  различных предметов на две группы (А и Б) как раз  $2^{2n}$  способами. Теперь если в группе А не больше  $n$  предметов, то добавляем до  $n$  из числа одинаковых и берем эту группу. Если в группе А больше  $n$  предметов, то в группе Б меньше  $n$ , добавляем к ним отложенный и недостающее число одинаковых предметов и берем эту группу. Легко проверить, что каждой выборке  $n$  предметов соответствует такое разбиение  $2n$  предметов.

## Глава III

1. Каждый пассажир может выбрать любую из  $m$  остановок, а пассажиров  $n$ . Поэтому имеем  $m^n$  способов распределения. Если учитывать лишь количество пассажиров, вышедших на каждой из остановок, то получаем  $C_{m+n-1}^{m-1}$  способов.

2.  $P(30, 4) = 46\ 376$  (так как учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение, то надо распределить 30 неразличимых бюллетеней по 5 «ящикам»).

3. Так как каждый может голосовать за любого из  $n$  человек, то имеем  $n^n$  способов голосования. Во втором случае надо разделить  $n$  голосов между  $n$  кандидатами. Это можно сделать  $C_{2n-1}^{n-1}$  способами.

4. При броске кости разбиваются на группы по числу выпавших очков. Поэтому нам надо найти число способов разбить  $n$  костей на 6 упорядоченных групп. Это число равно  $C_{n+5}^5$ .

5. а) 7 белых шаров можно разместить в 9 лузах  $C_{15}^8$  способами, а 2 черных шара —  $C_{10}^8$  способами. Всего имеем  $C_{15}^8 C_{10}^8$  способов.

б) Аналогично получаем  $C_{15}^8(C_9^8)^2$  способов.

6. а) Число таких представлений равно числу разбиений  $n$  одинаковых шаров на 3 непустые группы, т. е.  $C_{n-1}^2$ .

б) Число  $n$  можно  $C_{n-1}^2 = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$  способами представить в виде суммы трех целых положительных слагаемых (считая различными представления, отличающиеся порядком слагаемых). Если два слагаемых равны, то они определяют и третье, таких случаев будет  $\frac{n-2}{2}$

при четном  $n$  и  $\frac{n-1}{2}$  при нечетном  $n$  (без учета порядка следования слагаемых). Кроме того, если  $n$  делится на 3, то имеется представление, в котором равны все три слагаемых, поэтому придется разбирать 4 случая. Применяя формулу включений и исключений, получаем, что число представлений с попарно различными слагаемыми (с учетом порядка их следования) выражается следующими формулами:

$$\text{если } n = 6k, \text{ то } \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - 3 \cdot \frac{n-2}{2} + 2 = \frac{n^2 - 6n + 12}{2};$$

$$\text{если } n = 6k \pm 1, \text{ то } \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - 3 \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n^2 - 6n + 5}{2};$$

$$\text{если } n = 6k \pm 2, \text{ то } \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - 3 \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{n^2 - 6n + 8}{2};$$

$$\text{если } n = 6k + 3, \text{ то } \frac{n^2 - 3n + 2}{2} - 3 \cdot \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n^2 - 6n + 9}{2}.$$

Если не учитывать порядок слагаемых, то получим в 6 раз меньше представлений. Нетрудно проверить, что выражения, получаемые при этом, являются не чем иным, как целой частью  $\frac{n^2 - 6n + 12}{12}$  при соответствующих значениях  $n$ .

7. а) Так как  $1\ 000\ 000 = 2^6 \cdot 5^6$ , то любое разложение миллиона на три множителя имеет вид  $(2^{a_1} \cdot 5^{b_1})(2^{a_2} \cdot 5^{b_2})(2^{a_3} \cdot 5^{b_3})$ , где все  $a_i$ ,  $b_i$  — неотрицательные целые числа и  $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 = 6$ . Так как 6 разбивается на 3 неотрицательных целых слагаемых  $C_8^2 = 28$  способами, то, если учитывать порядок множителей, число разложений равно  $28^2 = 784$ .

б) Полученные в предыдущем пункте разложения распадаются на три класса: либо все три множителя совпадают, либо два совпадают, а третий отличается от них, либо все три различны. Первый класс состоит из одного разложения:  $1\ 000\ 000 = 100 \cdot 100 \cdot 100$ . Найдем число разложений второго класса. Если совпадают первые два множителя, то получаем, что  $2a_1 + a_3 = 2b_1 + b_3 = 6$ . Но уравнение  $2x + y = 6$  имеет 4 решения в целых неотрицательных числах:  $(0; 6)$ ,  $(1; 4)$ ,  $(2; 2)$ ,  $(3; 0)$ . Так как любое  $a$  можно комбинировать с любым  $b$ , получаем 16 вариантов для  $2^a \cdot 5^b$ . Один из них, а именно  $2^2 \cdot 5^2$ , надо отбросить

как приводящий к разложению первого класса. Остается 15 вариантов. Каждый из них приводит к трем разложениям в зависимости от места, которое занимает третий множитель. Значит, второй класс состоит из 45 разложений. Если не учитывать порядка сомножителей, получаем 15 разложений. Наконец, число разложений третьего класса равно  $784 - 1 - 45 = 738$ . Они распадаются на группы, отличающиеся лишь порядком сомножителей и состоящие из 6 разложений каждая, этих групп будет  $738:6 = 123$ . Поэтому, если не учитывать порядка сомножителей, мы имеем  $1 + 15 + 123 = 139$  разложений.

8. Чтобы найти сумму делителей, рассмотрим выражение  $(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{n_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{n_k})$ . Если раскрыть в нем скобки, то получим сумму, в которую каждый делитель входит ровно один раз. По формуле для суммы геометрической прогрессии получаем, что эта сумма равна  $\frac{p_1^{n_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_k^{n_k+1} - 1}{p_k - 1}$ .

9. а) Числа  $X$  и  $Y$  отличаются друг от друга множителями  $A^a, B^b, C^c, D^d$  — каждый из этих четырех множителей входит в одно из чисел и не входит в другое. Так как 4 множителя можно распределить между двумя числами  $2^4 = 16$  способами, то задача имеет 16 решений. Если не учитывать порядок чисел, то имеем 8 решений.

б) Искомые числа имеют вид  $GK$  и  $GL$ , где  $K$  и  $L$  — делители числа  $N = A^aB^bC^cD^d$ . Это число имеет  $\tau(N) = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$  делителей. Поэтому если не различать пары  $(GK; GL)$  и  $(GL; GK)$ , то  $K$  и  $L$  можно выбрать  $\overline{C}_{\tau(N)}^2 = C_{\tau(N)+1}^2$  способами, а если различать такие пары, то  $\overline{A}_{\tau(N)}^2 = (\tau(N))^2$  способами.

10. Расставим предметы в некотором порядке и отдадим первому человеку первые  $n$  предметов, второму — вторые  $n$  предметов и последнему — оставшиеся  $n$  предметов. Поскольку порядок элементов в

группах не играет роли, получаем  $\frac{P_{3n}}{(P_n)^3} = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$  способов раздела. Последовательный выбор приводит к тому же ответу, но в виде  $C_{3n}^{2n}C_{2n}^n$ .

$$11. P(m, n, p) = \frac{(m+n+p)!}{m! n! p!}.$$

$$12. \text{ а) } P(4, 4, 4); \text{ б) } P(6, 3, 3).$$

14. Сначала положим в каждый пакет по одной монете. После этого надо распределить 7 монет по 5 пакетам. Это можно сделать  $C_{11}^4 = 330$  способами.

$$15. \text{ а) } \frac{P_{2n}}{(P_2)^n P_n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}; \text{ б) } \frac{P_{nk}}{(P_k)^n P_n} = \frac{(nk)!}{(k!)^n \cdot n!}.$$

$$16. \frac{30!}{(10!)^3 \cdot 3!}; \frac{30!}{(3!)^{10} \cdot 10!}.$$

17. а)  $\frac{9!}{(3!)^3 \cdot 3!} = 280$ ; б)  $\frac{10!}{(2!)^5 \cdot 5!} = 945$ ; в) тоже 945.

21. Добавим к 20 книгам 4 одинаковых разделяющих предмета и рассмотрим все перестановки полученных 24 объектов. Их число равно  $24!/4!$ . Каждой перестановке соответствует свой способ расстановки книг.

22. Точно так же, как в предыдущей задаче, получаем, что число способов равно  $8!/3! = 6720$ .

23. В  $n$ -множестве  $n^2$  пар  $(a; b)$ . Отношение — подмножество этого множества. При этом пар вида  $(a; a)$  будет  $n$ , объединенных пар  $(a; b)$  и  $(b; a)$  —  $C_n^2$ .

26. а) Объединим в одну группу клетки, переходящие друг в друга при вращениях доски на  $90^\circ$ . По условию шашки заполняют 5 таких групп из  $64:4 = 16$  возможных. Поэтому имеем  $C_{16}^5 = 4368$  способов расстановки.

б) Групп стало семь, поэтому имеем  $C_7^5 = 21$  способ.

27. а) Аналогично предыдущей задаче имеем  $64:2 = 32$  группы и  $C_{32}^{10}$  способов.

б) Нет способов (симметричное черному полю — белое).

в)  $C_{32}^{10}$  и  $C_{16}^{10}$  (полей стало вдвое меньше).

28. а)  $P(6, 6, 4)$  способов. Надо на одной половине доски расположить 6 белых и 6 черных шашек на 16 черных полях (4 поля будут пустыми) и отразить расстановку на другую половину доски.

б)  $2^{12} \cdot C_{16}^{12}$  способов. Надо на одной половине доски выбрать 12 полей из 16 и поставить на каждое шашку произвольного цвета, а на второй половине занять симметричные поля шашками противоположного цвета.

30. На каждой вертикали и каждой горизонтали стоит одна ладья. Поэтому каждый из номеров вертикалей и каждый из номеров горизонталей войдет в произведение ровно один раз. Поэтому произведение равно  $(8!)^2$ .

41. Разобьем сначала игроков каждой страны на упорядоченные пары. Для каждой страны это можно сделать  $4!/2 = 12$  способами (порядок самих пар несуществен). Всего получим  $12^n$  способов разбиения. Пары можно переставлять друг с другом  $(2n)!$  способами. Поэтому получаем  $12^n \cdot (2n)!$  допустимых перестановок.

42. Обозначим непустую совокупность белых шаров буквой Б, а черных шаров буквой Ч. Из условия задачи следует, что шарики располагаются по одной из схем ЧБЧБ...ЧБ или БЧБЧ...БЧ, причем в каждую схему входят  $r$  пар. Но распределить  $m$  белых шаров между  $r$  непустыми совокупностями можно  $C_{m-1}^{r-1}$  способами. Для черных шаров имеем  $C_{n-1}^{r-1}$  способов, а всего  $2C_{m-1}^{r-1}C_{n-1}^{r-1}$  способов. Точно так же выводим, что  $2r$  контактов будут в  $C_{m-1}^r C_{n-1}^{r-1} + C_{m-1}^{r-1} C_{n-1}^r$  случаях.

**43.** В каждой допустимой перестановке как англичане, так и французы стоят группами, состоящими не менее чем из двух человек. При этом число групп французов отличается от числа групп англичан не более чем на 1. Подсчитаем, сколькими способами можно разбить  $n$  англичан на  $p$  упорядоченных групп так, чтобы каждая группа содержала не менее двух человек. Для этого надо расположить их в некотором порядке ( $n!$  способов) и  $C_{n-p-1}^{p-1}$  способами разбить на  $p$  групп не менее 2 человек в группе. Всего имеем  $n! C_{n-p-1}^{p-1}$  способов. Точно так же  $m$  французов можно разбить на  $s$  групп указанного вида  $m! C_{m-s-1}^{s-1}$  способами.

Эти способы можно комбинировать друг с другом следующими методами (А — группа англичан, Ф — французов): АФАФ...ФА, АФАФ...АФ, ФАФА...ФА, ФАФА...Ф. Значит, общее число способов выражается формулой

$$\begin{aligned} m! n! & [2(C_{m-2}^0 C_{n-2}^0 + C_{m-3}^1 C_{n-3}^1 + C_{m-4}^2 C_{n-4}^2 + \dots) + \\ & + (C_{m-2}^0 C_{n-3}^1 + C_{m-3}^1 C_{n-4}^2 + C_{m-4}^2 C_{n-5}^3 + \dots) + (C_{m-3}^1 C_{n-2}^0 + C_{m-4}^2 C_{n-3}^1 + \dots)]. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в формуле в задаче, получаем тот же самый результат.

**44.** Если в слово входит  $k$  нулей, то в нем  $n - k$  не нулей, которые можно выбрать  $2^{n-k}$  способами, а затем в промежутки или с краю вставить одиночные нули, выбрав места для них  $C_{n-k+1}^k$  способами.

Ответ получается в виде  $2^n + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_{n-1}^2 + 2^{n-3}C_{n-2}^3 + \dots$ .

**45.** 4 туза можно разделить пополам  $\frac{4!}{(2!)^2 \cdot 2!} = 3$  способами, а остальные 32 карты  $\frac{32!}{(16!)^2 \cdot 2!}$  способами. Так как эти разбиения можно двумя способами комбинировать друг с другом, получаем  $\frac{3 \cdot 32!}{(16!)^2}$  способов разбиения. Другая логика приводит к ответу  $\frac{1}{2}C_4^2 C_{32}^{16}$ .

**46.** а) 6 яблок трое могут разделить  $C_8^2$  способами, а каждый из остальных фруктов может достаться любому из трех человек, и их можно разделить  $3^6$  способами. Всего получаем  $3^6 C_8^2 = 20\ 412$  способов.

б) Сначала распределим 6 яблок. Так как каждый получает не более 4 яблок, то с точностью до перестановок это распределение можно сделать одним из следующих способов:  $4 + 2 + 0$ ,  $4 + 1 + 1$ ,  $3 + 3 + 0$ ,  $3 + 2 + 1$ ,  $2 + 2 + 2$ . Если яблоки распределены по схеме  $4 + 2 + 0$ , то надо еще выбрать 2 фрукта из 6 для второго, а остальные отдать третьему. Это можно сделать  $C_6^2$  способами. Учитывая возможность перестановок людей, получаем  $P_3 C_6^2$  способов раздела. При схеме

$4 + 1 + 1$  надо выбрать для второго 3 фрукта из 6 ( $C_6^3$  способов). Так как два человека имеют поровну яблок, то число перестановок людей равно  $P(2, 1) = 3$ . При схеме  $3 + 3 + 0$  надо выбрать один фрукт из 6 для первого и один фрукт из оставшихся 5 для второго. Здесь также  $P(2, 1)$  перестановки людей.

Точно так же рассматриваются остальные схемы. Всего получаем  $P_3 C_6^2 + P(2, 1)C_6^3 + P(2, 1)C_6^1 C_5^1 + P_3 C_6^1 C_5^2 + C_6^2 C_4^2 = 690$  способов распределения.

**47.** 9 яблок делятся по одной из схем  $6 + 3 + 0$ ,  $6 + 2 + 1$ ,  $5 + 4 + 0$ ,  $5 + 3 + 1$ ,  $5 + 2 + 2$ ,  $4 + 4 + 1$ ,  $4 + 3 + 2$ ,  $3 + 3 + 3$ , аналогично предыдущей задаче получаем

$$6(C_9^3 + C_9^4 + C_9^1 C_8^2 + C_9^1 C_8^3 + C_9^2 C_7^3) + 3(C_9^1 C_8^4 + C_9^2 C_7^2) + C_9^3 C_6^3 = 19\ 068$$

способов распределения.

**48.** а)  $P(7, 7, 7)$ ; б)  $4P(7, 7, 7)$ ; в)  $C_7^6 C_{21}^1 P(7, 7, 7)$ .

**49.** Колоду можно сдать 13 игрокам  $\frac{52!}{(4!)^{13}}$  способами. Если каждый должен иметь по одной карте каждой масти, то для каждой масти получаем перестановку из 13 карт; поскольку перестановки мастей не зависят друг от друга, то по правилу произведения получаем  $(13!)^4$  способов. В третьем случае один игрок (выбираемый 13 способами) может выбрать по карте каждой масти  $13^4$  способами. После этого оставшиеся 12 карт каждой масти можно разделить на 3 группы

$\frac{12!}{(4!)^3 \cdot 3!}$  способами, а все оставшиеся карты 4 мастей  $\frac{(12!)^4}{(4!)^{12} \cdot (3!)^4}$  способами. Эти группы можно раздать 12 игрокам 12! способами. Ответ

$$\frac{(13!)^5}{(4!)^{12} \cdot (3!)^4}.$$

**50.** Разобьем 13 карт каждой масти по схеме  $3 + 3 + 3 + 4$ . Это можно сделать  $\frac{13!}{4! \cdot (3!)^4}$  способами для каждой масти. Группы из 4 карт можно раздать игрокам 4! способами, а группы из 3 карт каждой масти — 3! способами. Всего получаем  $(3!)^4 \cdot 4!$  способов распределения групп. Карты же можно раздать  $\left[ \frac{13!}{4! \cdot (3!)^4} \right]^4 \cdot 4! \cdot (3!)^4 = \frac{(13!)^4}{(4!)^3 \cdot (3!)^{12}}$  способами.

**51.** Выбираем пятого участника раздела (5 способов), располагаем перед ним в алфавитном порядке (по именам) остальных. После этого располагаем всеми способами 18 предметов по порядку и отсчитываем 4 группы по 4 предмета и 1 группу в 2 предмета. Группу в 2 предмета отдаем пятому участнику раздела, а остальные группы даем остальным ( первую группу — первому, вторую — второму и т. д.).

Так как порядок элементов в группах не играет роли, получаем  $C_5^1 P(4, 4, 4, 4, 2) = \frac{5 \cdot 18!}{(4!)^4 \cdot 2!}$  способов раздела.

Во втором случае аналогично получаем  $\frac{C_5^2 \cdot 18!}{(4!)^3 \cdot (2!)^2}$  способов.

52. Сначала выберем 9 книг для  $C$ . Это можно сделать  $C_{27}^9$  способами. Оставшиеся 18 книг можно  $2^{18}$  способами разделить между  $A$  и  $B$ . Всего имеем  $2^{18} C_{27}^9$  способов раздела.

53. 8 пассажиров могут распределиться между этажами  $4^8$  способами. Из них в  $3^8$  случаях на данном этаже, в  $2^8$  — на данных двух этажах и в 1 — на данных трех этажах не выйдет ни один пассажир. Ответ  $4^8 - C_4^1 \cdot 3^8 + C_4^2 \cdot 2^8 - C_4^3 \cdot 1^8 = 40\,824$  получаем по формуле включений и исключений.

54. Если черный шар положен ( $n+1$  способ), то для каждой из  $n$  оставшихся луз надо сделать выбор — класть в нее белый шар или нет ( $2^n$  способов), итого  $(n+1)2^n$  способов. Если черный шар не положен, то для каждой из  $n+1$  луз надо сделать выбор — класть в нее белый шар или нет ( $2^{n+1}$  способов), но один вариант недопустим — во все лузы класть шары нельзя, получается  $2^{n+1} - 1$  способов. Итого  $(n+1)2^n + 2^{n+1} - 1 = (n+3)2^n - 1$ .

55. а) Пусть первый получил  $x$  предметов первого вида,  $y$  предметов второго вида и  $z$  предметов третьего вида. Тогда  $x+y+z=3n$ , причем  $0 \leq x \leq 2n$ ,  $0 \leq y \leq 2n$ ,  $0 \leq z \leq 2n$ . Таким образом, нам надо найти число решений уравнения  $x+y+z=3n$  в целых неотрицательных числах, не превосходящих  $2n$ .

Если отбросить условия  $x \leq 2n$ ,  $y \leq 2n$ ,  $z \leq 2n$ , то число решений равно числу способов раздела  $3n$  одинаковых предметов между тремя лицами, т. е.  $C_{3n+2}^2$ . Найдем теперь число решений, в которых  $x > 2n$ . Оно равно общему числу решений в целых неотрицательных числах уравнений  $y+z=k$ ,  $0 \leq k < n$ , т. е. разбиению  $n-1$  на сумму трех слагаемых ( $y$ ,  $z$  и  $n-k$ ), это можно сделать  $C_{n+1}^2$  способами. В стольких же (но других!) решениях  $y > 2n$  и  $z > 2n$ . Отбрасывая их, получаем  $C_{3n+2}^2 - 3C_{n+1}^2 = 3n^2 + 3n + 1$  решений.

б) Аналогично получаем  $C_{4n+3}^3 - 4C_{2n+2}^3 = \frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3)$  решений.

в) Так как части неразличимы, то решения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $2n-x$ ,  $2n-y$ ,  $2n-z$  уравнения  $x+y+z=3n$  отождествляются. Одно решение, а именно  $x=n$ ,  $y=n$ ,  $z=n$ , отождествляется при этом с самим собой, а остальные — с различными от них решениями. Поэтому ответ

имеет вид  $\frac{3n^2 + 3n}{2} + 1$ . Аналогично рассматривается случай, когда имеем вещи 4 видов.

**56.** Здесь уравнение имеет вид  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = mn$  и надо найти число его целых решений, удовлетворяющих условиям  $0 \leq x_k \leq 2n$  при всех  $1 \leq k \leq m$ . Если отбросить ограничения  $x_k \leq 2n$ , то получаем  $C_{mn+m-1}^{m-1}$  решений. Найдем число решений, для которых  $x_1 > 2n$ . Оно равно общему числу решений всех уравнений  $x_2 + x_3 + \dots + x_m = k$ , где  $0 \leq k < mn - 2n$ , т. е.  $C_{mn+m-2n-2}^{m-1}$ . Столько же решений, для которых  $x_2 > 2n$  и т. д. Значит, надо отбросить  $C_m^1 C_{mn+m-2n-2}^{m-1}$  решений. При этом некоторые решения отбрасываются дважды (например, те, для которых  $x_1 > 2n$  и  $x_2 > 2n$ ). Применяя формулу включений и исключений, приходим к доказываемому результату.

**57.** а) Это разбиение размещений на классы по числу  $j$  шаров в  $k$ -м ящике.

б) Это выбор из  $k$  ящиков  $j$ , содержащих каждый  $m$  шаров.

**58, 59.** Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  количество предметов первого вида, а через  $y_1, y_2, y_3$  — второго вида, получаемых соответственно лицами  $A, B$  и  $C$  (это определяет и распределение предметов третьего вида). Тогда имеем уравнения  $x_1 + x_2 + x_3 = n$  и  $y_1 + y_2 + y_3 = n$ , причем должны выполняться условия  $x_k + y_k \leq n$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Если отбросить все ограничения  $x_k + y_k \leq n$ , то получим  $C_{n+2}^2$  решений первого уравнения и  $C_{n+2}^2$  решений второго уравнения, а всего  $C_{n+2}^2 C_{n+2}^2$  решений.

При этом если условие  $x_1 + y_1 \leq n$  нарушается,  $x_1 + y_1 \geq n + 1$ , то поскольку  $x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 2n$ , число таких решений равно числу неотрицательных решений неравенства  $x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \leq n - 1$  (из которого, в частности, следует  $x_2 + y_2 \leq n - 1, x_3 + y_3 \leq n - 1$ ). А это число равно числу способов разбить  $n - 1$  на сумму 5 неотрицательных слагаемых ( $x_2, x_3, y_2, y_3$  и остаток), т. е.  $C_{n+3}^4$ .

Условию  $x_2 + y_2 \leq n$  не удовлетворяют столько же решений, и еще столько же — условию  $x_3 + y_3 \leq n$ , причем пересечений здесь нет. Отбрасывая эти решения, получаем  $C_{n+2}^2 C_{n+2}^2 - 3C_{n+3}^4$  решений.

При  $n = 5$  имеем 231 решение.

**60.** Ряд может содержать 3, 2 или 1 черный шар. Если он содержит 3 черных шара, то четвертый шар можно выбрать  $C_3^1 = 3$  способами, после чего переставлять 3 черных шара и 1 шар иного цвета  $P(3, 1)$  способами. Всего  $C_3^1 P(3, 1)$  способов. А можно взять 2 черных

шара, получаем  $C_3^2 P(2, 1)$  возможностей, а если 1, то  $P_4$  возможностей. Всего можно составить  $C_3^1 P(3, 1) + C_3^2 P(2, 1) + P_4 = 72$  ряда.

**61.** Из  $n$  различных предметов можно  $2^n$  способами сделать выборку (в которую могут войти 0, 1, ...,  $n$  предметов). После того как сделана эта выборка, добавим недостающие предметы из числа  $n$  одинаковых. Поэтому имеем  $2^n$  способов выбора. Число перестановок всех  $2n$  предметов равно  $\frac{(2n)!}{n!}$ .

**62.** Число  $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$  равно числу способов разложить  $n^2$  предметов по  $n$  в  $n$  неразличимых ящиков, а потому — целое число. Целым является и число  $\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$  — это число способов разложить  $mn$  предметов по  $m$  в  $n$  неразличимых ящиков. По той же причине целым является и  $\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$ . Но тогда  $\frac{((mn)!)^2}{(m!)^{n+1} (n!)^{m+1}}$  — целое число как произведение двух целых чисел. Поскольку  $m$  и  $n$  нечетны, то  $\frac{(mn)!}{(m!)^{(n+1)/2} (n!)^{(m+1)/2}}$  — рациональное число, квадрат которого — целое число. Значит, и само это число — целое.

**63.** Один из трех получает  $n$  книг. Эти  $n$  книг можно выбрать  $C_{3n}^n$  способами. Остальные  $2n$  книг распределяем между оставшимися двумя лицами. Каждая из книг может попасть либо к одному, либо к другому, а потому число способов распределения этих книг равно  $2^{2n}$ . Поскольку  $n$  книг можно отдать любому из трех, то получаем  $3 \cdot 2^{2n} C_{3n}^n$  способов. Но при этом будет учтено трижды каждое распределение вида  $n + n + n$ . Поэтому ответ  $3 \cdot 2^{2n} C_{3n}^n - 2P(n, n, n)$ .

**64.** Добавим к 32 буквам 5 одинаковых «перегородок» и рассмотрим все перестановки полученных объектов, при которых ни одна перегородка не стоит в начале или конце и никакие две перегородки не стоят рядом. Буквы переставляются  $32!$  способами, а для перегородок имеем 31 место и их можно поставить  $C_{31}^5$  способами. Учитывая,

что порядок слов несуществен, получаем  $\frac{32! \cdot C_{31}^5}{6!}$  способов.

**65. а)** Мужчин можно разбить на пары  $\frac{10!}{(2!)^5 \cdot 5!}$  способами (учитывая перестановки внутри пар и перестановки самих пар). Затем женщины разбиваются  $\frac{10!}{(2!)^5}$  способами (здесь уже играет роль порядок пар). Всего  $\frac{(10!)^2}{2^{10} \cdot 5!}$  способов.

б) Сначала выберем одного мужчину и одну женщину, которые окажутся в той же лодке, что и выбранная ранее пара ( $9^2$  способов). После этого разбиваем оставшихся на 4 группы  $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$  способами. Всего  $\frac{(9!)^2}{2^8 \cdot 4!}$  способов.

в) Если данные двое мужчин с женами попадают в одну и ту же лодку, то остальные могут разбиться на группы  $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$  способами. Если же они попадают в разные группы, то эти группы можно дополнить  $(A_8^2)^2$  способами, после чего разбить остальных на группы  $\frac{(6!)^2}{2^6 \cdot 3!}$  способами. Всего получаем  $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!} + \frac{(8!)^2}{2^6 \cdot 3!}$  способов.

66. Все предметы можно переставить  $(pq+r)!$  способами. После этого выберем  $r$  человек из  $p$ , которые получат каждый  $q+1$  предметов ( $C_p^r$  способов), и раздадим им предметы по порядку, выдавая соответственно  $q$  или  $q+1$  предметов. Так как результат не зависит от порядка элементов в группах, то  $C_p^r (pq+r)!$  надо разделить на  $(q!)^{p-r} [(q+1)!]^r = (q!)^p (q+1)^r$ .

## Глава IV

1. Обозначим число способов наклеить марки на сумму  $N$  через  $F(N)$ . Рекуррентное соотношение имеет вид

$$F(N) = F(N - 5) + F(N - 10) + F(N - 15) + F(N - 20).$$

Используя это соотношение и равенство  $F(5) = 1$ , получаем, что  $F(40) = 108$ .

2. Обозначим через  $A(m, n)$  число способов набрать  $m$  баллов в ходе  $n$  экзаменов (не получив при этом ни одной двойки). Тогда ясно, что  $A(30, 8) = A(25, 7) + A(26, 7) + A(27, 7)$ . Представляя каждое из слагаемых аналогичным образом, через несколько шагов получим ответ 784.

3. Построим взаимно однозначное соответствие чисел от 1 до  $10^n$  и чисел с нулями от 1 до  $10^{n+1}$ . Для  $n=1$  все легко: ставим в соответствие  $1 \leftrightarrow 10$ ,  $2 \leftrightarrow 20$ ,  $3 \leftrightarrow 30$ , ...,  $9 \leftrightarrow 90$ ,  $10 \leftrightarrow 100$ . Далее (для  $n=2$ ) ставим в соответствие  $11 \leftrightarrow (110 \text{ и } 101)$ ,  $12 \leftrightarrow (120 \text{ и } 102)$  и вообще каждому  $k$ -значному числу без нулей ставим в соответствие пачку  $(k+1)$ -значных чисел, получающихся вставкой нуля после одной из  $k$  цифр, в пачке будет как раз  $k$  нулей. С числами, содержащими в записи 0, все будет немного сложнее. Назовем  $m$ -пачкой во главе с  $k$ -значным числом  $abc\dots f$  (не содержащим нулей) группу чисел, получающихся вставкой  $m$  нулей всеми возможными способами в промежутки между цифрами числа  $abc\dots f$  или в конце числа, всего

$k$  мест. Таких чисел будет  $C_{k+m-1}^{k-1}$ , в них будет  $(k+m)C_{k+m-1}^{k-1}$  цифр. В  $(m+1)$ -пачке во главе с тем же  $k$ -значным числом  $\overline{abc\dots f}$  будет  $C_{k+m}^{k-1}$  число, в них будет  $(m+1)C_{k+m}^{k-1}$  нулей. Но  $(k+m)C_{k+m-1}^{k-1} = (m+1)C_{k+m}^{k-1}$ , это равенство легко проверяется:  $\frac{(k+m)(k+m-1)!}{m!(k-1)!} = \frac{(m+1)(k+m)!}{(m+1)!(k-1)!}$ .

Наконец, в числе  $10^n$  будет  $n+1$  цифра, а в числе  $10^{n+1}$  как раз  $n+1$  нуль.

Другой способ решения этой задачи — подсчитать количество цифр в числах от 1 до  $10^n$  и количество нулей в числах от 1 до  $10^{n+1}$ .

5. Число способов разменять 1 рубль монетами в 2 и 5 копеек равно числу целых неотрицательных решений уравнения  $2x + 5y = 100$ . Ясно, что  $y$  может принимать любое четное значение от 0 до 20 (11 способов). При размене на монеты в 5 и 3 копеек надо решать уравнение  $3x + 5y = 100$ . Здесь  $y$  принимает лишь значения 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 (7 способов).

6. а) Надо найти число целых неотрицательных решений уравнения  $x + 2y + 5z = 20$ , или, что то же самое, неравенства  $2y + 5z \leq 20$ . Ясно, что  $z$  может принимать лишь значения 0, 1, 2, 3 и 4, которым соответствуют 11, 8, 6, 3 и 1 возможных значений  $y$ , а всего получаем 29 решений.

б) Используя рекуррентные соотношения, находим, что  $F(10, 15, 20, 50; 100) = 20$ .

7. С помощью рекуррентного соотношения получаем, что задача имеет 4 решения.

8. Изобразим каждое разбиение числа  $n$  на слагаемые в виде точечной диаграммы. Если добавить к этой диаграмме столбик из  $n$  точек, получим диаграмму для разбиения числа  $2n$  на  $n$  слагаемых.

9. Первый столбец разбиения  $2r+x$  на  $r+x$  слагаемых содержит  $r+x$  точек. Отбрасывая его, получаем диаграмму разбиения  $r$  на слагаемые.

11. Будем обозначать четные числа цифрой 0, а нечетные — цифрой 1 (остатками от деления на 2). Первые 4 элемента каждой строки определяются первыми четырьмя элементами предыдущей строки. Первые 4 элемента второй строки имеют запись 1010, третьей — 1101, четвертой — 1000, пятой — 1110 и шестой как второй — 1010, после чего цикл повторяется. Поэтому в каждой строке будет хотя бы одно четное число. Чисел, делящихся на 3, нет уже в 5-й строке.

12.  $C_{22}^2$  способа (поскольку монет хватает, надо разбить 20 в сумму трех слагаемых).

13. 4 черных шара можно разложить в 6 пакетов  $C_9^5$  способами. Для белых и синих шаров имеем столько же способов. По правилу произведения получаем  $(C_9^5)^3$  способов.

14. Таким же образом получаем ответ  $C_6^3 C_{13}^3$ .

15. Пусть периметр  $2n$  разбит на три части (стороны) требуемым образом:  $2n = a + b + c$ , причем  $a \leq b \leq c$ . Тогда  $a \neq 1$  — в противном

случае мы имели бы  $b + c = 2n - 1$ , и потому  $b \neq c$ , но  $b + 1 > c$  («неравенство треугольника»), чего не может быть. Кроме того,  $a + b > c$ , причем числа  $a + b$  и  $c$  имеют одинаковую четность. Значит,  $a + b \geq c + 2$ . Но тогда числа  $a - 1$ ,  $b - 1$ ,  $c - 1$  образуют разбиение для  $2n - 3$ , причем  $(a - 1) + (b - 1) > c - 1$ . Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между треугольниками с периметрами  $2n$  и  $2n - 3$ .

**16.** Нам надо найти количество троек натуральных чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  таких, что  $x \leq y \leq z$ ,  $x + y + z = 40$  и  $x + y > z$ . Из этих неравенств вытекает, что  $z$  может принимать значения, удовлетворяющие неравенствам  $14 \leq z \leq 19$ . Если  $z = 19$ , то  $x + y = 21$ , причем  $x \leq y \leq 19$ . Поэтому  $11 \leq y \leq 19$ , и мы имеем 9 треугольников с  $z = 19$ . Точно так же устанавливаем, что число треугольников, для которых  $z = 18, 17, 16, 15, 14$ , равно соответственно 8, 6, 5, 3, 2, а всего имеем 33 треугольника.

Точно так же получаем, что число треугольников с периметром 43 равно 44.

**17.** Возьмем треугольник с периметром  $4n$ . Пусть его стороны равны  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Прибавляя к длинам этих сторон по 1, получим числа  $x + 1$ ,  $y + 1$ ,  $z + 1$ , являющиеся длинами сторон треугольника с периметром  $4n + 3$ . Но, кроме того, имеем треугольники со сторонами  $(1, 2n + 1, 2n + 1)$ ,  $(2, 2n, 2n + 1)$ , ...,  $(n + 1, n + 1, 2n + 1)$ , которые не могут быть получены описанным образом, поскольку при обратном процессе сумма двух меньших сторон становится меньше третьей стороны.

**18.** Пусть  $N = 12n$ . Нам надо найти количество троек натуральных чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  таких, что  $x \leq y \leq z$ ,  $x + y + z = 12n$  и  $x + y > z$ . Из этих неравенств следует, что  $4n \leq z \leq 6n - 1$ . При этом если  $z = 2k$ , то  $x + y = 12n - 2k$ , а число целочисленных решений этого уравнения таких, что  $x \leq y \leq z = 2k$ , равно  $3k - 6n + 1$ . Если же  $z = 2k + 1$ , то имеем  $3k - 6n + 2$  решений. Поэтому число треугольников равно

$$\sum_{k=2n}^{3n-1} (3k - 6n + 1) + \sum_{k=2n}^{3n-1} (3k - 6n + 2) = 3n^2.$$

Остальные случаи разбираются точно так же. При переходе от  $N$  к  $N + 3$  можно использовать решения предыдущих задач.

**19.** Ограничения  $1 \leq a \leq b \leq l$ ,  $a + b \geq l + 1$  задают на плоскости  $Oab$  4-угольник из целочисленных точек  $(a; b)$ , число точек в котором легко подсчитывается.

**20.** Используйте предыдущую задачу.

**22.** Прямые первого пучка разбивают плоскость на  $2m$  частей. Первая прямая второго пучка пересекается со всеми  $m$  прямыми первого пучка и дает  $m + 1$  новых частей. Все остальные прямые второго пучка имеют  $m + 1$  точек пересечения с ранее проведенными прямыми. Поэтому мы имеем всего  $2m + m + 1 + (n - 1)(m + 2)$  частей.

**23.** Докажем утверждение с помощью индукции по числу  $s$  кривых. Если  $s = 1$ , то оно очевидно, так как точек пересечения нет и число областей равно 1.

Пусть утверждение уже доказано для  $s$  кривых. Возьмем систему из  $s$  кривых, имеющих  $n_r$  точек пересечений кратности  $r$  (всюду  $r = 2, 3, \dots$ ). Тогда они ограничивают  $1 + n_2 + 2n_3 + \dots + rn_{r+1} + \dots$  замкнутых областей. Проведем кривую  $s + 1$ , пусть она имеет  $k_r$  точек пересечения кратности  $r$  с ранее проведенными кривыми, а всего  $k_2 + k_3 + \dots + k_{r+1} + \dots$  точек пересечения. Эти точки пересечения разбивают ее на  $k_2 + k_3 + \dots + k_{r+1} + \dots$  частей. Каждая часть проведенной кривой соответствует одной новой области, а потому теперь число областей окажется равным

$$(1 + n_2 + 2n_3 + \dots + rn_{r+1} + \dots) + (k_2 + k_3 + \dots + k_{r+1} + \dots). \quad (1)$$

Но если новая кривая прошла через точку пересечения кратности  $r$  ранее проведенных кривых, то теперь эта точка стала точкой пересечения кратности  $r + 1$ .

Обозначим через  $n'_r$  количество точек пересечения кратности  $r$  в новой системе кривых. Ясно, что  $n'_{r+1} = n_{r+1} - k_{r+2} + k_{r+1}$  (от ранее имевшихся точек пересечения кратности  $r + 1$  надо отнять  $k_{r+2}$  точек, имевших кратность  $r + 1$ , увеличивших ее, и прибавить  $k_{r+1}$  точек, имевших кратность  $r$  и увеличивших ее). Но тогда

$$\begin{aligned} 1 + n'_2 + 2n'_3 + \dots + rn'_{r+1} + \dots &= \\ &= 1 + (n_2 - k_3 + k_2) + 2(n_3 - k_4 + k_3) + \dots + r(n_{r+1} - k_{r+2} + k_{r+1}) + \dots = \\ &= (1 + n_2 + 2n_3 + \dots + rn_{r+1} + \dots) + (k_2 + k_3 + \dots + k_{r+1} + \dots). \end{aligned}$$

Мы доказали, таким образом, что  $1 + n'_2 + 2n'_3 + \dots + rn'_{r+1} + \dots$  равно числу областей для новой системы кривых (см. формулу (1)). В силу принципа математической индукции утверждение верно для любого числа кривых.

**24.** Пусть  $n$  четно,  $n = 2k$ . Тогда  $n$  следующими способами может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

$$n = 1 + (2k - 1) = 2 + (2k - 2) = \dots = k + k.$$

Но карту с числом 1 можно вынуть единственным образом, с числом 2 — двумя способами и т. д. А две карты с числом  $k \geq 2$  можно выбрать  $C_k^2$  способами. Поэтому всего имеем

$$1(2k-1) + 2(2k-2) + \dots + (k-1)(k+1) + \frac{k(k-1)}{2} = \\ = \sum_{s=1}^{k-1} s(2k-s) + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k(k^2-1)}{3} = \frac{n(n^2-4)}{12}$$

способов получить сумму  $n = 2k$ . Если же  $n$  нечетно,  $n = 2k-1$ , то  $n = 1 + (2k-2) = 2 + (2k-3) = \dots = (k-1) + k$  и число способов равно

$$\sum_{s=1}^{k-1} s(2k-s-1) = \frac{k(k-1)(2k-1)}{3} = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

**25.** а) Пусть на плоскости проведена  $k-1$  прямая. Проведем еще одну прямую. Она разбивается точками пересечения с ранее проведенными прямыми на  $k$  частей, каждая из которых соответствует одному новому куску плоскости, при этом 0 прямых разбивают плоскость на 1 часть. Используя формулу  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , получаем, что  $n$  прямых разбивают плоскость на  $1 + (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n^2+n+2}{2}$  частей.

б) Обозначим через  $P(n)$  число частей, на которое  $n$  плоскостей делят пространство. Пусть уже проведена  $k-1$  плоскость. Проведем еще одну,  $k$ -ю плоскость. Она пересекается с ранее проведенными плоскостями по  $k-1$  прямой, которые делят ее на  $\frac{k^2-k+2}{2}$  частей. Каждая из этих частей соответствует новой части пространства. Поэтому имеем  $P(k) = P(k-1) + \frac{k^2-k+2}{2}$ , причем 0 плоскостей делят пространство на 1 часть, поэтому  $P(n) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k + 2)$  частей. Применяя формулы суммы чисел от 1 до  $n$  и суммы квадратов чисел от 1 до  $n$  (см. п. 33), находим, что  $P(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)$ .

Если не применять эти формулы, но знать, что сумма  $s$ -х степеней  $n$  будет многочленом  $(s+1)$ -й степени от  $n$ , то методом неопределенных коэффициентов получим, что  $P(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ , причем  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 4$ ,  $P(3) = 8$ , откуда находятся  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

**28.** При добавлении  $(k+1)$ -й плоскости к ранее проведенным  $k$  плоскостям возникает  $2k$  новых частей, а  $2+2+4+6+\dots+2(n-1)=n^2-n+2$ .

**29.** Каждая внутренняя точка пересечения диагоналей однозначно определяется заданием 4 вершин  $n$ -угольника — концов пересекаю-

шихся диагоналей. Поэтому число внутренних точек пересечения диагоналей равно  $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ .

Найдем теперь общее число точек пересечения диагоналей. Из каждой вершины  $n$ -угольника выходят  $n-3$  диагоналей, а всего мы имеем  $\frac{n(n-3)}{2}$  диагоналей. Каждая диагональ  $AB$  пересекается со всеми диагоналями, соединяющими вершины, отличные от  $A$  и  $B$ . Поэтому точек пересечения диагонали  $AB$  с остальными диагоналями будет  $\frac{n(n-3)}{2} - 2(n-3) + 1$ . Учитывая, что общее число диагоналей равно  $\frac{n(n-3)}{2}$ , каждая точка пересечения считается при этом дважды и  $C_n^4$  точек пересечения диагоналей — внутренние, получаем, что число внешних точек пересечения равно  $\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}$ .

**30.** Будем проводить диагонали последовательно из вершин  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Каждая новая диагональ дает столько новых частей, на сколько кусков она разбивается ранее проведенными диагоналями, т. е. на одну часть больше, чем число точек ее пересечения с ранее проведенными диагоналями. Поскольку каждая точка пересечения при этом получается один раз, то общее число новых частей равно сумме числа диагоналей и числа точек пересечения. Так как вначале мы имели одну часть, то всего имеем

$$N(n) = 1 + \frac{n(n-3)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n(n-3)(n^2-3n+14)}{24} + 1$$

частей (см. предыдущую задачу). А можно доказать, что  $N(n)$  будет многочленом 4-й степени, затем найти, что  $N(1) = 0$ ,  $N(2) = 0$ ,  $N(3) = 1$ ,  $N(4) = 4$ ,  $N(5) = 11$  и далее методом неопределенных коэффициентов найти этот многочлен  $N(n) = \frac{1}{24}n^4 - \frac{1}{4}n^3 + \frac{23}{24}n^2 - \frac{7}{4}n + 1$ .

**31.** Сосчитаем сумму углов всех получившихся треугольников. Сумма углов, имеющих вершину в одной из внутренних точек, равна  $360^\circ$ . Так как имеется 500 таких точек, то им соответствуют углы, сумма которых равна  $360^\circ \cdot 500$ . Теперь рассмотрим углы, вершины которых совпадают с вершинами 1000-угольника. Их сумма равна сумме внутренних углов 1000-угольника, т. е. равна  $180^\circ \cdot 998$ . Всего получаем  $180^\circ \cdot 1998$ . Так как сумма углов каждого треугольника равна  $180^\circ$ , то получится 1998 треугольников. В общем случае  $n + 2m - 2$  треугольника.

**32.** Если добавить к вершинам любого многоугольника, не содержащего точку  $A_1$ , эту точку, получим многоугольник, содержащий  $A_1$ . Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех многоугольников, не содержащих  $A_1$ , и частью мно-

жества многоугольников, содержащих  $A_1$ . При этом соответствия нет многоугольников, соответствующих треугольникам, одной из вершин которых является  $A_1$ . Поэтому многоугольников, содержащих точку  $A_1$ , больше.

**33.** Из  $k + (k + 1) + \dots + (k + m) = (2k + m)(m + 1)/2 = 1958$  получаем  $(2k + m)(m + 1) = 4 \cdot 979$ ,  $m + 1 = 4$ ,  $1958 = 488 + 489 + 490 + 491$ . Из решения видно, что сомножители  $2k + m$  и  $m + 1$  разной четности. Дальше используем равенства  $(2k + m)(m + 1) = 2 \cdot 2004 = 16 \cdot 501 = 48 \cdot 167$ ,  $(2k + m)(m + 1) = 2 \cdot 2005 = 10 \cdot 401$ .

**34.** Каждый из игроков сыграет 4 партии, а всего будет сыграно 5 партий. Предположим, что в первой партии пара  $(a; c)$  играла против пары  $(b; d)$ . Тогда в трех следующих играх  $a$  должен иметь партнерами соответственно  $b$ ,  $d$ ,  $e$ , а в пятой не принимать участия. Игрок  $e$  должен принять участие во всех играх, кроме первой, причем во второй и третьей он будет противником  $a$ . На свободное место во второй партии можно взять или игрока  $c$ , или игрока  $d$ , а в третьей партии — игрока  $b$  или  $c$ . Но если выбрать во второй партии игрока  $d$ , то в третьей придется выбрать игрока  $c$  (иначе игрок  $c$  пропустит две партии), а тогда в четвертой партии должен отсутствовать игрок  $d$ , а  $b$  и  $c$  будут партнерами. Но тогда в пятой партии партнерами будут  $b$  и  $e$ , с одной стороны, и  $c$  и  $d$  — с другой. Если же выбрать во второй партии игрока  $c$ , то и в третьей придется выбрать игрока  $c$  (иначе  $e$  и  $c$  дважды будут партнерами), в четвертой —  $c$  и  $d$ , а в пятой игроки  $b$  и  $c$  будут играть против  $d$  и  $e$ . Таким образом, каждый выбор для игроков первой партии определяет два возможных разбиения игроков в дальнейшем. Так как порядок следующих 4 партий можно менять 24 способами, то всего получаем 48 возможностей. Для первой партии можно выбрать игроков 15 способами (число способов разбить 5 человек на 2 пары и запасного игрока). Каждый из этих способов определяет 48 возможностей хода матча в дальнейшем, а всего 720 возможностей. Если не учитывать порядка партий, остается 6 возможностей.

## Глава V

**1.** Число различных комбинаций монет равно  $C_{13}^5 = 1287$ . Поэтому неверных ответов может быть 1286. Для различных монет  $C_9^5 = 126$  и 125 неверных ответов.

**2. а)** 9 человек можно пересаживать  $9!$  способами. Найдем, во скольких перестановках 3 англичанина сидят рядом. Все такие перестановки получаются из одной пересаживанием между собой англичан ( $3!$  способов) и пересаживанием 6 французов и турок и компаний 3 англичан ( $7!$  способов). Всего получаем  $3! \cdot 7!$  перестановок. Во стольких же перестановках рядом сидят 3 француза и во стольких же — 3 турка. Далее, в  $(3!)^2 \cdot 5!$  перестановках рядом сидят, скажем, и англичане, и французы, а в  $(3!)^4$  перестановках и англичане, и французы, и турки. По формуле включений и исключений получаем ответ  $9! - 3 \cdot 3! \cdot 7! + 3 \cdot (3!)^2 \cdot 5! - (3!)^4 = 283\,824$ .

б) Общее число перестановок равно  $9!$ . Найдем число перестановок, в которых данные два англичанина сидят рядом. Если мы объединим их, то получим перестановки 8 объектов. Но, кроме того, их можно пересаживать друг с другом. Поэтому всего имеем  $2! \cdot 8!$  перестановок. При этом данных двух англичан можно выбирать  $C_3^2$  способами, а всего мы имеем три различных национальности. Поэтому соответствующий член в формуле включений и исключений равен  $3C_3^2 \cdot 2! \cdot 8!$ . Теперь найдем, во скольких перестановках рядом сидят данные два англичанина и, кроме того, данные два француза. Если объединить в пару рядом сидящих соотечественников, то получим 7 переставляемых объектов. Кроме того, можно пересаживать друг с другом сидящих рядом соотечественников. Всего имеем  $(2!)^2 \cdot 7!$  перестановок. Кроме того, две пары соотечественников можно выбрать  $(C_3^2)^3$  способами. Поэтому соответствующее слагаемое в формуле включений и исключений равно  $(C_3^2)^3 (2!)^2 \cdot 7!$ . Далее рассматриваются следующие случаи: рядом сидят а) три соотечественника; б) по два представителя каждой национальности; в) три представителя одной национальности и два — другой; г) три представителя одной национальности и три другой; д) три представителя одной национальности, два другой и два третьей; е) три представителя одной национальности, три другой и два третьей; ж) по три представителя каждой национальности.

Применяя формулу включений и исключений, получаем ответ

$$9! - 9 \cdot 2! \cdot 8! + 27 \cdot (2!)^2 \cdot 7! + 3 \cdot 3! \cdot 7! - (2!)^3 \cdot 6! - 18 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 6! + \\ + 3 \cdot (3!)^2 \cdot 5! + 27 \cdot 3! \cdot (2!)^2 \cdot 5! - 9 \cdot (3!)^2 \cdot 2! \cdot 4! + (3!)^4.$$

3. Эта задача решается аналогично предыдущей, но иным образом подсчитывается число перестановок, в которых данные соотечественники сидят рядом. Двух англичан можно посадить рядом  $2! \cdot 9$  способами, после чего всех остальных можно пересаживать  $7!$  способами. Если взять двух англичан и двух французов, то число способов посадки, при которых эти соотечественники сидят рядом, равно  $(2!)^2 \cdot 9 \cdot 6!$ . Именно, мы 9 способами можем выбрать места для англичан, после чего объединить в пару двух французов и взять все возможные перестановки этой пары и оставшихся 5 человек. Учитывая возможность поменять местами как сидящих рядом англичан, так и сидящих рядом французов, получаем указанное число перестановок. Аналогично рассматриваются остальные возможности. Всего получаем

$$9! - 9 \cdot 2! \cdot 9 \cdot 7! + 27 \cdot (2!)^2 \cdot 9 \cdot 6! + 3 \cdot 3! \cdot 9 \cdot 6! - (2!)^3 \cdot 9 \cdot 5! - 18 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 9 \cdot 5! + \\ + 3(3!)^2 \cdot 9 \cdot 4! + 27 \cdot 3! \cdot (2!)^2 \cdot 9 \cdot 4! - 9 \cdot (3!)^2 \cdot 2! \cdot 9 \cdot 3! + (3!)^3 \cdot 9 \cdot 2!$$

способов.

4. Обозначим буквой Ф множество из нескольких стоящих подряд французов, а буквой Т — множество из нескольких стоящих подряд турок. Буква А означает англичанина. Из условия задачи следует, что возможен один из следующих типов расположения: ФАТАФАТАФАТАФ или ТАФАТАФАТАФАТ. При первом типе мы должны разбить 7 французов на 4 непустые группы (это можно сделать  $C_6^3$  способами),

10 турок на 3 непустые группы ( $C_9^2$  способов), после чего поставить эти группы по порядку на соответствующие места и переставить всеми возможными способами соотечественников друг с другом. Получаем  $6! \cdot 7! \cdot 10! \cdot C_6^3 C_9^2$  способов расстановки. Второй тип расположения дает таким же путем  $6! \cdot 7! \cdot 10! \cdot C_6^2 C_9^3$  способов расстановки. Всего получаем  $6! \cdot 7! \cdot 10! \cdot (C_6^3 C_9^2 + C_6^2 C_9^3) = 6! \cdot 7! \cdot 10! \cdot 1980$  решений.

Для 5 англичан точно так же получаем  $5! \cdot 7! \cdot 10! \cdot 1080$  решений.

5. а) Заданные элементы можно переставлять  $P(2, 2, \dots, 2) = \frac{(2n)!}{2^n}$

способами. Элементы данных  $k$  пар стоят рядом в  $\frac{(2n - k)!}{2^{n-k}}$  перестановках. Так как  $k$  пар можно выбрать  $C_n^k$  способами, то по формуле включений и исключений получаем, что в

$$\frac{(2n)!}{2^n} - C_n^1 \frac{(2n - 1)!}{2^{n-1}} + C_n^2 \frac{(2n - 2)!}{2^{n-2}} - \dots + (-1)^n C_n^n n!$$

перестановках никакие два одинаковых элемента не стоят рядом (см. также гл. II зад. 153).

б) Совершенно так же получаем ответ

$$\frac{(qn)!}{(q!)^n} - C_n^1 \frac{(qn - q + 1)!}{(q!)^{n-1}} + C_n^2 \frac{(qn - 2q + 2)!}{(q!)^{n-2}} - \dots .$$

в) На окружности данные элементы можно переставлять  $\frac{(qn)!}{(q!)^n}$  способами.

Подсчитаем, во скольких перестановках все  $q$  элементов каждого из данных  $k$   $q$ -наборов стоят подряд. Выберем один из этих  $q$ -наборов. Его элементы можно поместить подряд на окружности  $qn$  способами. После того как он помещен, объединим элементы каждого из оставшихся  $k - 1$  наборов и рассмотрим всевозможные перестановки полученных  $k - 1$  новых элементов и остальных  $(n - k)q$  элементов.

Их число равно  $\frac{(qn - qk + k - 1)!}{(q!)^{n-k}}$ , причем легко видеть, что каждой

такой перестановке соответствует свое расположение элементов на окружности. Всего получаем  $\frac{qn(qn - qk + k - 1)!}{(q!)^{n-k}}$  перестановок. Так как

сами наборы можно было выбирать  $C_n^k$  способами, то по формуле включений и исключений получаем, что число искомых перестановок равно

$$qn \left[ \frac{(qn - 1)!}{(q!)^n} - C_n^1 \frac{(qn - q)!}{(q!)^{n-1}} + C_n^2 \frac{(qn - 2q + 1)!}{(q!)^{n-2}} - \dots + (-1)^n C_n^n (n - 1)! \right].$$

8. Сначала выберем  $n$  предметов, остающихся на месте. Это можно сделать  $C_{m+n}^n$  способами. Остальные  $m$  предметов переставляем так,

чтобы ни один не остался на месте. Это можно сделать  $D_m$  способами (см. п. 70). Всего имеем  $\frac{(m+n)!}{m! n!} D_m$  способов.

9. Утверждение очевидно при  $r = 1$  — после первого шага карта, находившаяся на  $p$ -м месте, при  $p \leq n$  попадает на место  $2p$ , а при  $p > n$  — на место  $2p - 2n - 1$ . В обоих случаях номер нового места — остаток от деления  $2p$  на  $2n + 1$ .

Пусть утверждение уже доказано для  $r$ , т. е. пусть после  $r$  шагов карта с номером  $p$  заняла место  $x$ , где  $2^r p = k(2n+1) + x$ . На следующем шагу она займет место  $y$ , где  $2x = l(2n+1) + y$ ,  $l = 0$  или 1. Но тогда  $2^{r+1} p = 2k(2n+1) + 2x = (2k+l)(2n+1) + y$ , где  $y < 2^{r+1} p$ . Это значит, что  $y$  — остаток от деления  $2^{r+1} p$  на  $2n + 1$ . В силу принципа математической индукции наше утверждение доказано.

10. Непосредственно вытекает из результата предыдущей задачи.

11. В этом случае остаток от деления  $2^x p$  на  $2n + 1$  равен  $p$ .

12. а) После карты с номером  $2n$  идут  $2n - 1$  карт с четными номерами, которые и лягут выше карты  $2n$ .

б) Утверждение относительно карты 8 вытекает из результата п. а). Остальные проверяются непосредственно.

в) Запишем под номером каждой карты номер, который она получает после указанной тасовки:

|          |          |           |          |           |          |           |          |           |           |           |           |           |           |           |           |
|----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b>  | <b>4</b> | <b>5</b>  | <b>6</b> | <b>7</b>  | <b>8</b> | <b>9</b>  | <b>10</b> | <b>11</b> | <b>12</b> | <b>13</b> | <b>14</b> | <b>15</b> | <b>16</b> |
| ↓        | ↓        | ↓         | ↓        | ↓         | ↓        | ↓         | ↓        | ↓         | ↓         | ↓         | ↓         | ↓         | ↓         | ↓         | ↓         |
| <b>9</b> | <b>8</b> | <b>10</b> | <b>7</b> | <b>11</b> | <b>6</b> | <b>12</b> | <b>5</b> | <b>13</b> | <b>4</b>  | <b>14</b> | <b>3</b>  | <b>15</b> | <b>2</b>  | <b>16</b> | <b>1</b>  |

Из этой таблицы видно, что, например, при первой тасовке 1 переходит в 9, при второй 9 переходит в 13, потом 13 — в 15, затем 15 — в 16 и, наконец, 16 переходит в 1. Это можно изобразить в виде цикла (1, 9, 13, 15, 16, 1). Вся перестановка распадается на такие циклы. Кроме указанного выше, имеем еще циклы (2, 8, 5, 11, 14, 2), (3, 10, 4, 7, 12, 3) и цикл, состоящий только из числа 6. Каждый цикл состоит из одного или пяти различных чисел, и потому после пяти раз все карты займут первоначальное положение. Остальные случаи разбираются точно так же.

## Глава VI

2. Для решения задачи надо рассмотреть отрезки и перекрестки различного положения и подсчитать число проходящих через них путей. Если ввести систему координат:  $A(0; 0)$ ,  $C(4; 4)$ , то маршрут из точки  $A(0; 0)$  в точку  $M(a; b)$  проходит по  $a+b$  отрезкам, из них  $a$  идут вправо и  $b$  вверх, и для его задания надо  $C_{a+b}^a$  способами выбрать отрезки, проходящие вправо. Соответственно из точки  $N(a+1; b)$  в точку  $C(4; 4)$  ведут  $C_{7-a-b}^{3-a}$  путей, а всего через отрезок  $MN$  проходит  $C_{a+b}^a C_{7-a-b}^{3-a}$  путей.

Аналогично через перекресток  $(a; b)$  проходит  $C_{a+b}^a C_{8-a-b}^{4-a}$  путей.

**3.** Выбираем  $C_n^{k_1+k_2}$  способами объединенный отряд, выстраиваем солдат по росту, определяются оба отряда.

**4.** Докажем сначала, что через  $2^n$  секунд остаются только две частицы, расположенные в точках с координатами  $2^n$  и  $-2^n$ .

При  $n = 1$  это утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано при  $n = k$ . В течение следующих  $2^k - 1$  секунд эти частицы не взаимодействуют, и по предположению индукции через  $2^k$  секунд каждая из них даст лишь две частицы, удаленные от них влево и вправо на  $2^k$ , т. е. мы получим одну частицу в точке  $2^{k+1}$ , две — в точке  $O$  и одну — в точке  $-2^{k+1}$ . Частицы в точке  $O$  взаимно уничтожаются, и останутся две частицы. Утверждение доказано.

Таким образом, через 128 секунд останутся две частицы в точках с координатами 128 и  $-128$ . Еще через секунду мы получим четыре частицы в точках 129, 127,  $-127$  и  $-129$ .

Если  $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_s}$ ,  $k_1 > k_2 > \dots > k_s$ , то мы получаем  $2^s$  частиц, координаты которых имеют вид  $\pm 2^{k_1} \pm 2^{k_2} \pm \dots \pm 2^{k_s}$  (со всеми возможными комбинациями знаков). Это утверждение легко доказывается индукцией по  $s$ .

**5.** Число замкнутых ломаных равно  $(C_{2n}^n)^2$ .

**6.** Вертикалей и горизонталей всего  $2n$ , поэтому на каждой вертикали и на каждой горизонтали будет по одному отрезку ломаной. Выберем некоторую перестановку вертикалей  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  и горизонталей  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ , направление первого звена ломаной — по вертикали, ломаная идет по маршруту

$$v_1g_1 \rightarrow v_1g_2 \rightarrow v_2g_2 \rightarrow v_2g_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_ng_n \rightarrow v_ng_1 \rightarrow v_1g_1,$$

но начинать можно с любой из  $2n$  точек. Ответ  $\frac{(n!)^2}{2n}$ .

**7.** а)  $C_6^3 = 20$ ; б)  $6!/12$  (вершины можно обходить в любом порядке, но начинать можно с любой из 6 вершин в любом из 2 направлений).

**8.** Мы можем выбрать  $r$  вершин, идущих в данном порядке,  $A_n^r$  способами. Так как циклическая перестановка вершин и изменение порядка обхода дают ту же ломаную, получаем  $\frac{1}{2r} A_n^r$  ломаных.

**9.** После первого разрезания ( $k$  способов) задача сводится к сантиметровой ленте.

**16.** Докажем, что через каждую остановку проходит ровно  $n$  маршрутов. Пусть  $m$  — один из маршрутов, и  $B$  — остановка, расположенная вне этого маршрута (рис. 93). В силу условия 1 из остановки  $B$  можно попасть одним из маршрутов на каждую из  $n$  остановок  $A_1, \dots, A_n$  маршрута  $m$ . При этом в силу условия 2 каждый из маршрутов, проходящих через  $B$ , проходит через какую-то из

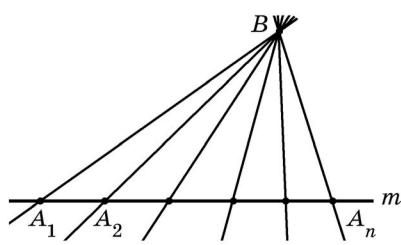


Рис. 93

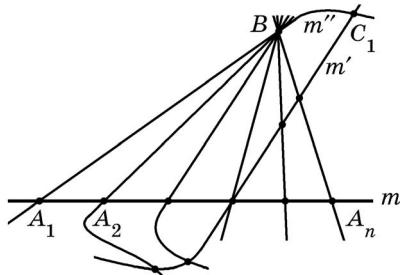


Рис. 94

остановок  $A_1, \dots, A_n$  (иначе с этого маршрута нельзя было пересесть на маршрут  $m$ ) и притом только через одну из них (иначе с этого маршрута можно было бы пересесть на маршрут  $m$  на двух остановках). При этом никакие два из проходящих через  $B$  маршрута не проходят через одну и ту же остановку маршрута  $m$  (иначе с одного из этих маршрутов можно было бы пересесть на другой на двух остановках — на остановке  $B$  и на той остановке маршрута  $m$ , через которую оба они проходят). Отсюда следует, что через остановку  $B$  проходит столько же маршрутов, сколько имеется остановок на маршруте  $m$ , т. е. равно  $n$  маршрутов.

Нам осталось доказать, что через каждую из остановок  $A_1, \dots, A_n$ , расположенных на маршруте  $m$ , также проходит ровно  $n$  маршрутов. Для этого достаточно показать, что для любой из этих остановок есть не проходящий через нее маршрут  $m'$  (он по условию имеет  $n$  остановок, а тогда, как мы знаем, через эту остановку проходит  $n$  маршрутов). Так как общее число маршрутов не менее двух, то, помимо  $m$ , есть еще хотя бы один маршрут  $m''$  (рис. 94), пересекающийся с маршрутом  $m$  в единственной точке, скажем  $A_1$ . Тогда остановки  $A_2, \dots, A_n$  расположены вне маршрута  $m''$ , и потому через них проходит по  $n$  маршрутов. Пусть  $B$  — еще одна остановка на маршруте  $m''$ . Маршрут, проходящий через  $B$  и  $A_2$ , не проходит через  $A_1$ , и потому через  $A_1$  также проходит ровно  $n$  маршрутов. Таким образом, через любую остановку проходит ровно  $n$  маршрутов.

Так как для каждой остановки можно найти не проходящий через нее маршрут, а на каждом маршруте есть  $n$  остановок, то через каждую остановку проходит  $n$  маршрутов. Возьмем один из этих маршрутов  $m$ . Через каждую остановку этого маршрута проходит  $n - 1$  маршрутов, отличных от  $m$ , причем в силу условия 2 никакие два из этих маршрутов не совпадают друг с другом (иначе они имели бы две общие остановки), и любой маршрут входит в число получаемых таким путем. Итак, число отличных от  $m$  маршрутов равно  $n(n - 1)$ , а всего мы имеем  $n(n - 1) + 1$  маршрутов.

**17.** Пусть на одном из маршрутов  $m$  имеем  $n$  остановок. Из решения предыдущей задачи видно, что через любую остановку  $B$ , лежащую вне маршрута  $m$ , проходит ровно  $n$  маршрутов. Покажем, что

на произвольном маршруте  $m'$ , отличном от  $m$ , имеем ровно  $n$  остановок. В силу условия 3 на  $m'$  расположено не менее трех остановок, причем в силу условия 2 лишь одна из этих остановок является в то же время остановкой маршрута  $m$ . Вне маршрута  $m'$  расположены  $n - 1$  остановок маршрута  $m$ . Покажем, что, помимо этого, вне  $m'$  расположена еще хотя бы одна остановка, не лежащая на  $m$ . Действительно, пусть  $A_1$  есть одна из  $n - 1$  остановок маршрута  $m$ , расположенных вне  $m'$ , а  $C_1$  есть одна из остановок маршрута  $m'$ , расположенных вне  $m$  (таких остановок имеется не менее чем 2). В силу условия 1 существует маршрут  $m''$ , проходящий через остановки  $A_1$  и  $C_1$ , причем в силу условия 3 на этом маршруте, помимо  $A_1$  и  $C_1$ , имеется еще по крайней мере одна остановка  $B$ , которая будет расположена вне  $m'$  и вне  $m$ . Через эту остановку  $B$ , как мы знаем из решения предыдущей задачи, проходит  $n$  маршрутов. Каждый из этих  $n$  маршрутов пересекается с маршрутом  $m'$  в одной-единственной точке. При этом через каждую остановку маршрута  $m'$  проходит хотя бы один маршрут, соединяющий ее с остановкой  $B$ . Поэтому число остановок на маршруте  $m'$  равно числу маршрутов, проходящих через остановку  $B$ , т. е. равно  $n$ . Как мы видели при решении предыдущей задачи, в этом случае число маршрутов выражается формулой  $n(n - 1) + 1$ . Так как по условию это число равно 57, то надо решить уравнение  $n(n - 1) + 1 = 57$ . Решая его, находим, что  $n = 8$ .

18. Возможно; рассмотрим, например, 10 прямых плоскости таких, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке, и будем считать, что прямые — это автобусные маршруты, а точки их пересечения — остановки. При этом с каждой остановки можно проехать на любую другую без пересадки, если они лежат на одной прямой, и с одной пересадкой, если они лежат на различных прямых. Если даже отбросить в этой схеме одну прямую, то все же останется возможность проехать с каждой остановки на любую другую, сделав в пути не более одной пересадки. Но если отбросить две прямые, то одна остановка — точка пересечения этих двух прямых, не будет совсем обслуживаться оставшимися маршрутами, и с этой остановки будет невозможно проехать ни на какую другую остановку.

## Глава VII

1. а) Докажем равенство с помощью индукции по  $n + m$ . Пусть для всех  $k$  и  $s$  таких, что  $k + s < n + m$ , равенство доказано. Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= u_{n+m-1} + u_{n+m-2} = (u_{n-1}u_{m-1} + u_nu_m) + (u_{n-1}u_{m-2} + u_nu_{m-1}) = \\ &= u_{n-1}(u_{m-1} + u_{m-2}) + u_n(u_m + u_{m-1}) = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}. \end{aligned}$$

Поскольку при  $m + n = 1$  это равенство непосредственно проверяется, оно справедливо для любых  $m$  и  $n$ .

б) Проведем доказательство с помощью индукции по  $k$ . При  $k = 1$  утверждение тривиально. Пусть уже доказано, что  $u_{sm}$  делится на  $u_m$ . Из пункта а) имеем  $u_{(s+1)m} = u_{sm+m} = u_{sm-1}u_m + u_{sm}u_{m+1}$  и потому  $u_{(s+1)m}$  также делится на  $u_m$ . По индукции выводим, что все  $u_{km}$  делятся на  $u_m$ .

в) Пусть  $u_n$  и  $u_{n+1}$  делятся на  $k \neq 1$ . Тогда и  $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$  делилось бы на  $k$ . Продолжая это рассуждение, мы получили бы, что  $u_1 = 1$  делится на  $k$ , а это невозможно.

2. Будем обозначать наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  через  $(a, b)$ . Из равенства  $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1}$  следует, что  $(u_{m+n}, u_n)$  является делителем  $u_{n-1}u_m$  и, поскольку  $u_n$  и  $u_{n-1}$  взаимно прости, делителем  $u_m$ . Обратно,  $(u_m, u_n)$  является делителем  $u_{m+n}$ . Поэтому  $(u_m, u_n) = (u_{m+n}, u_n)$ . Но тогда если  $n = km + q$ , то  $(u_m, u_n) = (u_m, u_q)$ . Применяя алгоритм Евклида, убеждаемся, что  $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$ . В частности,  $(u_{1000}, u_{770}) = u_{10} = 55$ .

3. Рассмотрим последовательность, составленную из последних четырех цифр чисел Фибоначчи. Так как количество четырехзначных чисел вида 0000, 0001, ..., 9999 равно  $10^4$ , то количество пар таких чисел равно  $10^8$ . Значит, среди первых 100 000 001 чисел Фибоначчи найдутся две пары  $(u_m; u_{m+1})$  и  $(u_n; u_{n+1})$ ,  $n > m$ , такие, что одинаковы последние четыре цифры  $u_m$  и  $u_n$ , а также  $u_{m+1}$  и  $u_{n+1}$ . Но тогда числа  $u_n - u_m$  и  $u_{n+1} - u_{m+1}$  оканчиваются четырьмя нулями. Так как  $u_{n-1} - u_{m-1} = (u_{n+1} - u_{m+1}) - (u_n - u_m)$ , то и  $u_{n-1} - u_{m-1}$  также оканчивается четырьмя нулями. Продолжая уменьшать индекс, доходим до  $u_{n-m} - u_0$ , но  $u_0 = 0$ , поэтому, число  $u_{n-m}$  оканчивается четырьмя нулями.

4. Пусть выбраны числа  $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+7}$ . Выразим их через  $u_n$  и  $u_{n+1}$ :  $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ ,  $u_{n+3} = u_n + 2u_{n+1}$ ,  $u_{n+4} = 2u_n + 3u_{n+1}$ ,  $u_{n+5} = 3u_n + 5u_{n+1}$ ,  $u_{n+6} = 5u_n + 8u_{n+1}$ ,  $u_{n+7} = 8u_n + 13u_{n+1}$ . Следовательно, сумма этих чисел равна  $21u_n + 33u_{n+1}$ . Но  $u_{n+8} = 13u_n + 21u_{n+1}$ ,  $u_{n+9} = 21u_n + 34u_{n+1}$ . Из неравенства  $u_{n+8} < 21u_n + 33u_{n+1} < u_{n+9}$  ясно, что  $21u_n + 33u_{n+1}$  не является числом Фибоначчи.

5. а) Утверждение доказывается по индукции. При  $n = 1$  оно очевидно. Пусть оно справедливо для  $n = k$ :  $u_2 + u_4 + \dots + u_{2k} = u_{2k+1} - 1$ . Прибавим к обеим частям равенства  $u_{2k+2}$ . Так как  $u_{2k+2} + u_{2k+1} = u_{2k+3}$ , получаем  $u_2 + u_4 + \dots + u_{2k+2} = u_{2k+3} - 1$ . Тем самым наше утверждение доказано.

Точно так же по индукции доказываются утверждения б) и в).

г) Для доказательства заметим, что

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} = u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1}).$$

$$\text{Поэтому } u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n(u_1^2 - u_0 u_2) = (-1)^n.$$

д) Утверждения д) и е) будем доказывать совместно. При  $n = 1$  они очевидны. Пусть они уже доказаны при  $n = k$ . По утверждению г) имеем тогда

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2k} u_{2k+1} + u_{2k+1} u_{2k+2} &= \\ &= u_{2k+1}^2 - 1 + u_{2k+1} u_{2k+2} = u_{2k+1} u_{2k+3} - 1 = u_{2k+2}^2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{2k+1} u_{2k+2} + u_{2k+2} u_{2k+3} &= \\ &= u_{2k+2}^2 + u_{2k+2} u_{2k+3} = u_{2k+2} u_{2k+4} = u_{2k+3}^2 - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, эти утверждения верны и при  $n = k + 1$ , а потому и при всех  $n$ .

ж) Заметим, что в силу а) и б)  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{k+1} = u_{k+3} - 1$ .

Поэтому если имеет место равенство при  $n = k$ , то

$$\begin{aligned} (k+1)u_1 + ku_2 + (k-1)u_3 + \dots + 2u_k + u_{k+1} &= \\ &= u_{k+4} - (k+3) + u_{k+3} - 1 = u_{k+5} - (k+4). \end{aligned}$$

Так как равенство верно при  $n = 1$ , то оно верно при всех  $n$ .

$$3) \text{ Это вытекает из равенства } \frac{u_{3n+2} - 1}{2} + u_{3n+3} = \frac{u_{3n+5} - 1}{2}.$$

и) Для доказательства в формуле  $u_{n+m} = u_{n-1} u_m + u_n u_{m+1}$  положим  $m = n$ . Мы получим, что  $u_{2n} = u_{n-1} u_n + u_n u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$ . Точно так же доказывается, что  $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$ . Полагая в той же формуле  $m = 2n$ , получаем, что

$$u_{3n} = u_{n-1} u_{2n} + u_n u_{2n+1} = u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n(u_n^2 + u_{n+1}^2) = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

6. Пусть  $u_n \leq N \leq u_{n+1}$ . Тогда  $0 \leq N - u_n < u_{n-1}$  и потому найдется такое  $s < n - 1$ , что  $u_s \leq N - u_n < u_{s+1}$ . Но тогда  $0 \leq N - u_n - u_s < u_{s-1}$ , причем  $s - 1 < n - 2$ . Через несколько шагов мы получим, что  $N = u_n + u_s + u_p + \dots + u_r$ , причем соседние индексы  $n, s, p, \dots, r$  отличаются друг от друга по крайней мере на 2.

7. Чтобы раскодировать слово, надо представить число 12 в виде суммы слагаемых, каждое из которых равно 1 или 2. Возникает последовательность Фибоначчи. Поэтому имеем 233 способа прочитать данное слово из 12 знаков.

8. а) Решая характеристическое уравнение  $r^2 - 7r + 12 = 0$ , находим корни  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = 4$ . Поэтому общее решение имеет вид  $a_n = C_1 3^n + C_2 4^n$ . б) Точно так же получаем  $a_n = C_1 2^n + C_2 (-5)^n$ .

в) Имеем  $a_n = C_1 (2 + 3i)^n + C_2 (2 - 3i)^n$ . г)  $a_n = C_1 (3i)^n + C_2 (-3i)^n$ .

д)  $r_1 = r_2 = -2$ . Поэтому  $a_n = (C_1 + C_2 n)(-2)^n$ .

е) Характеристическое уравнение таково:  $r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$ .

Его корни  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = 4$ . Поэтому  $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n + C_3 4^n$ .

ж)  $r_1 = r_2 = r_3 = -1$ . Поэтому  $a_n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2)(-1)^n$ .

з) Характеристическое уравнение имеет вид  $r^4 + 4 = 0$ . Его корни  $r_{1,2} = 1 \pm i$ ,  $r_{3,4} = -1 \pm i$ . Поэтому

$$a_n = C_1 (1 + i)^n + C_2 (1 - i)^n + C_3 (-1 + i)^n + C_4 (-1 - i)^n.$$

$$\text{и)} \quad a_n = \frac{n}{12} \cdot 2^n + C_1 (-4)^n + C_2 2^n.$$

9. а) Решая характеристическое уравнение  $r^2 - 5r + 6 = 0$ , получаем, что  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ , и потому  $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ . Полагая  $n = 1$  и  $n = 2$ , получаем для отыскания  $C_1$  и  $C_2$  систему уравнений  $2C_1 + 3C_2 = 1$ ,  $4C_1 + 9C_2 = -7$ . Из нее находим  $C_1 = 5$ ,  $C_2 = -3$ , и потому  $a_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$ .

б) Имеем  $a_n = (C_1 + C_2 n)2^n$ . Полагая  $n = 1$  и  $n = 2$ , получаем систему уравнений  $C_1 + C_2 = 1$ ,  $C_1 + 2C_2 = 1$ , из которой выводим, что  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , и потому  $a_n = 2^n$ .

$$\text{в)} \quad a_n = \frac{1}{2^{n+2}} [(-1 + i\sqrt{3})^n + (-1 - i\sqrt{3})^n]. \quad \text{г)} \quad a_n = 2^n + 3^n - 4^n.$$

10. Характеристическое уравнение  $r^2 - 2r \cos \varphi + 1 = 0$  с корнями  $r_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ ,  $a_n = C_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n + C_2 (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n$ . Полагая  $n = 1$  и  $n = 2$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (C_1 + C_2) \cos \varphi + (C_1 - C_2) i \sin \varphi = \cos \varphi, \\ (C_1 + C_2) \cos 2\varphi + (C_1 - C_2) i \sin 2\varphi = \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Отсюда  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_n = \frac{1}{2} [(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n + (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n]$ . В силу формулы Муавра  $a_n = \cos n\varphi$ .

11. Вытекает из того, что характеристическое уравнение

$$r^k - C_k^1 r^{k-1} + C_k^2 r^{k-2} - \dots + (-1)^k C_k^k = 0$$

можно записать в виде  $(r - 1)^k = 0$ . Оно имеет корень  $r = 1$  кратности  $k$ . Поэтому  $a_n = n^t$  при  $t = 0, 1, \dots, k - 1$  — решения рекуррентного уравнения.

12. Обозначим число размещений такого вида через  $\Gamma_n^{(k)}$ . Эти размещения разобьем на два класса. К первому отнесем начинающиеся на 1, а ко второму — все остальные. Если размещение начинается на 1, то вычтем из всех входящих в него чисел 1 и отбросим стоящий впереди нуль (например, 14 589 перейдет при этом сначала в 03 478, а потом в 3478). Получится  $(k-1)$ -размещение того же типа, но состоящее из чисел 1, 2, ...,  $n-1$ . Поэтому число размещений первого класса равно  $\Gamma_{n-1}^{(k-1)}$ . Каждое размещение второго класса начинается с нечетного числа, большего 1, т. е. 3 и более. Вычтем из всех чисел, входящих в такое размещение, число 2. Мы получим  $k$ -размещение того же типа, в которое входят числа 1, 2, ...,  $n-2$ . Поэтому число размещений второго класса равно  $\Gamma_{n-2}^{(k)}$ . Таким образом, справедлива рекуррентная формула  $\Gamma_n^{(k)} = \Gamma_{n-1}^{(k-1)} + \Gamma_{n-2}^{(k)}$ . Положим  $F_n^{(k)} = C_N^k$ , где  $N = \left[ \frac{n+k}{2} \right]$  ( $[x]$  — целая часть  $x$ ). Мы имеем

$$F_{n-1}^{(k-1)} + F_{n-2}^{(k)} = C_{N-1}^{k-1} + C_{N-1}^k = C_N^k = F_n^{(k)}.$$

Таким образом, числа  $F_n^{(k)}$  удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и числа  $\Gamma_n^{(k)}$ .

Покажем теперь, что  $F_n^{(n)} = \Gamma_n^{(n)}$  и  $F_{n+1}^{(n)} = \Gamma_{n+1}^{(n)}$ . Для этого заметим, что числа 1, 2, ...,  $n$  можно единственным образом расположить в порядке возрастания, а потому  $\Gamma_n^{(n)} = 1 = C_n^n = F_n^{(n)}$ . Из чисел 1, 2, ...,  $n+1$  тоже единственным образом можно выбрать  $n$  чисел в соответствии с поставленными условиями. Поэтому и  $\Gamma_{n+1}^{(n)} = 1 = C_{n+1}^n = F_{n+1}^{(n)}$ . Из доказанного вытекает, что для всех значений  $n$  и  $k$  имеет место равенство  $\Gamma_n^{(k)} = F_n^{(k)} = C_N^k$ , где, напомним,  $N = \left[ \frac{n+k}{2} \right]$ .

## Глава VIII

1. Значение многочлена при  $x = y = z = 1$  равно как раз сумме коэффициентов. Подставляя эти значения, получаем, что сумма равна 1.

2. а) Размещения могут состоять из 1, 2, ...,  $n$  предметов. Поэтому полное число размещений равно

$$A_n^n + A_n^{n-1} + \dots + A_n^1 = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} = n! \left[ 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} e \cdot n! - 1 &= n! \left[ 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] + \\ &\quad + \left[ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Но при любом натуральном  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots < \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Этим наше утверждение доказано.

б) Общее число предметов во всех размещениях равно

$$\begin{aligned} nA_n^n + (n-1)A_n^{n-1} + \dots + A_n^1 &= n! \left[ n + \frac{n-1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] = \\ &= (n-1)n! \left[ \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right) + \frac{1}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-2}{(n-1)!} \right) \right]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что  $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n-2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$ . Так как все предметы входят одно и то же число раз, то каждый из них войдет  $N = (n-1)(n-1)! \left[ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] + 1$  раз. С другой стороны,

$$\begin{aligned} (n-1)(n-1)!e &= \\ &= (n-1)(n-1)! \left[ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots \right] = \\ &= (n-1)(n-1)! \left[ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \right] + (n-1) \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \right] \end{aligned}$$

и потому

$$\Delta = N - (n-1)(n-1)!e = 1 - (n-1) \left[ \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \right] > 1 - \frac{n-1}{n-1} = 0,$$

$$\text{но } \Delta = \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-1}{(n+1)(n+2)} - \dots \right] < \frac{1}{2} \text{ при } n \geq 2.$$

Значит,  $N$  — ближайшее целое число к  $(n-1)(n-1)!e$ .

3. Мы имеем  $(1+x)^k + \dots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^k}{x}$  (сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q = 1+x$ ). Поэтому коэффициент при  $x^m$  равен  $C_{n+1}^{m+1} - C_k^{m+1}$  при  $m < k$  и  $C_{n+1}^{m+1}$  при  $n \geq m \geq k$ .

4. Нам дано, что

$$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2n}x^{2n}. \quad (1)$$

Покажем сначала, что  $a_k = a_{2n-k}$ . Для этого положим  $x = \frac{1}{y}$  и умножим обе части равенства на  $y^{2n}$ . Мы получим, что

$$(y^2+y+1)^n = a_0y^{2n} + a_1y^{2n-1} + a_2y^{2n-2} + a_3y^{2n-3} + \dots + a_{2n}. \quad (2)$$

Сравнивая разложения (1) и (2), получаем, что  $a_k = a_{2n-k}$ .

Заменим теперь  $x$  на  $-x$ . Мы получим, что

$$(1 - x + x^2)^n = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + a_{2n}x^{2n}. \quad (3)$$

Перемножая разложения (1) и (3), выводим, что

$$(1 + x^2 + x^4)^n = \sum_{k=0}^{4n} (-1)^k [a_0 a_k - a_1 a_{k-1} + \dots + (-1)^k a_k a_0] x^k. \quad (4)$$

а) Ясно, что разложение левой части равенства содержит лишь члены с четными степенями  $x$ , а потому коэффициент при  $x^{2n-1}$  равен нулю. Но в правой части коэффициентом при  $x^{2n-1}$  является

$$-(a_0 a_{2n-1} - a_1 a_{2n-2} + \dots - a_{2n-1} a_0) = -(a_0 a_1 - a_1 a_2 + \dots - a_{2n-1} a_{2n}).$$

б) Заметим теперь, что разложение (4) можно представить по формуле (1) в виде  $(1 + x^2 + x^4)^n = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_{2n} x^{4n}$ . Отсюда следует, что коэффициент при  $x^{2n}$  в этом разложении равен  $a_n$ . С другой стороны, по формуле (4) он равен

$$a_0 a_{2n} - a_1 a_{2n-1} + a_2 a_{2n-2} - \dots + a_{2n} a_0 = 2a_0^2 - 2a_1^2 + 2a_2^2 - \dots + (-1)^n a_n^2.$$

в) Перепишем равенство (1) в виде

$$(1 - x^3)^n = (1 - x)^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}).$$

Отсюда вытекает, что

$$1 - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^6 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{3n} = \\ = [1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n]^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n} x^{2n}).$$

Если  $r$  не делится на 3, то в левой части этого равенства коэффициент при  $x^r$  равен нулю. В правой же части коэффициент при  $x^r$  равен  $a_r - C_n^1 a_{r-1} + C_n^2 a_{r-2} - \dots + (-1)^r C_n^r a_0$ . Значит, это выражение равно нулю, если  $r$  не делится на 3, и равно  $(-1)^r C_n^r$ , если  $r = 3k$ .

г) Если  $x = 1$  в разложении (1), то  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3^n$ . Если  $x = 1$  в разложении (2), то  $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2n} = 1$ . Складывая и вычитая эти равенства, приходим к доказываемым соотношениям.

5. а) Мы имеем

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})^2 = \frac{(x^n - 1)^2}{(x - 1)^2} = \\ = (x^n - 1)^2 (x - 1)^{-2} = (x^{2n} - 2x^n + 1)(1 + 2x + 3x^2 + \dots + mx^{m-1} + \dots).$$

Поэтому коэффициент при  $x^k$  равен  $k + 1$ , если  $0 \leq k \leq n - 1$ , и  $2n - k - 1$ , если  $n \leq k \leq 2n - 2$ . Ответ можно записать следующим образом:  $n - |n - k - 1|$ .

6. а) Показатель степени 8 может быть следующими способами составлен из показателей 2 и 3:  $8 = 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 3$ . Это означает, что если обозначить  $x^2$  через  $y$ , а  $x^3$  через  $z$ , то искомый коэффициент равен сумме коэффициентов при  $y^4$  и  $y(-z)^2 = yz^2$  в разложении  $(1 + y - z)^9$ . По формуле возведения многочлена в степень этот коэффициент равен  $P(4, 0, 5) + P(1, 2, 6) = 378$  (мы либо из 4 скобок берем  $y$ , из 0 скобок берем  $-z$  и из 5 скобок берем 1, либо из 1 скобки берем  $y$ , из 2 скобок берем  $-z$  и из 6 скобок берем 1).

б) Аналогично находим  $7 = 1 \cdot 7 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2$ , но теперь надо учитывать знаки, ответ  $P(7, 0, 2) - P(4, 1, 4) + P(1, 2, 6) = -342$ .

в)  $2^7 P(7, 0, 2) - 2^4 P(4, 1, 4) + 2P(1, 2, 6) = -4968$  (теперь надо учитывать и коэффициенты).

7. Мы имеем  $17 = 7 + 5 + 5$ , а 18 не разбивается на сумму положительных слагаемых, кратных 5 и 7. Поэтому  $x^{17}$  входит с коэффициентом  $C_{20}^1 C_{19}^2 = 3420$ , а  $x^{18}$  — с коэффициентом нуль.

8. Мы имеем  $17 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5$ . Поэтому член с  $x^{17}$  имеет коэффициент  $-C_{1000}^7 C_{993}^1 - C_{1000}^4 C_{996}^3 - C_{1000}^1 C_{999}^5$  в разложении  $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$  и  $-C_{1000}^7 C_{993}^1 + C_{1000}^4 C_{996}^3 - C_{1000}^1 C_{999}^5$  в разложении  $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$ . Ясно, что второй коэффициент больше.

9. Имеем  $C_n^1$  членов вида  $x_k^3$ ,  $C_n^2$  членов вида  $x_j^2 x_k$  ( $j \neq k$ ), и  $C_n^3$  членов вида  $x_i x_j x_k$  (все  $i, j, k$  различны), а всего  $C_n^1 + 2C_n^2 + C_n^3$  членов.

10. Наибольшим коэффициентом в первом разложении является коэффициент при  $a^3 b^3 c^4$  (и аналогичных). Он равен  $P(3, 3, 4) = 4200$ .

Во втором разложении наибольшим является коэффициент  $P(4, 4, 3, 3)$  при  $a^3 b^3 c^4 d^4$ .

11. Это число равно коэффициенту при  $x^m$  в многочлене

$$(x^l + x^{l+1} + \dots + x^n)^p = x^{lp}(1 - x^{n-l+1})^p(1 - x)^p.$$

Применяя формулу бинома Ньютона, получаем, что этот коэффициент равен  $C_{m-(l-1)p-1}^m - C_p^1 C_{m-(l-1)(p-1)-n-1}^{m+l-n-1} + C_p^2 C_{m-(l-1)(p-2)-2n-1}^{m+2(l-n-1)} - \dots$

12. а) Числа, выражающие длины полос каждого цвета, образуют представление числа 10 в виде суммы слагаемых, принимающих натуральные значения от 2 до 10, причем играет роль порядок слагаемых. Число таких разбиений на  $k$  слагаемых равно коэффициенту при  $x^{10}$  в разложении выражения

$$\begin{aligned} (x^2 + x^3 + \dots + x^{10})^k &= x^{2k}(1 - x^9)^k(1 - x)^{-k} = \\ &= x^{2k} \left( 1 - C_k^1 x^9 + C_k^2 x^{18} - \dots + (-1)^k x^{9k} \right) \times \\ &\quad \times \left( 1 + C_k^1 x + C_{k+1}^2 x^2 + C_{k+2}^3 x^3 + \dots + C_{k+9}^{10} x^{10} + \dots \right). \end{aligned}$$

Отсюда сразу находим, что искомый коэффициент равен 1 при  $k = 1$ , 7 при  $k = 2$ , 15 при  $k = 3$ , 10 при  $k = 4$  и 1 при  $k = 5$ .

Так как количество полос каждого цвета при данном способе окраски одинаково, а длину полос различных цветов можно комбинировать произвольно, получаем  $1^3 + 7^3 + 15^3 + 10^3 + 1^3 = 4720$  способов окраски.

б) Если последним является синий цвет, то существует 4720 способов окраски.

Если окраска заканчивается красным цветом, то он встречается на один раз чаще, чем белый и синий. В этом случае число способов равно  $1 + 7 \cdot 1^2 + 15 \cdot 7^2 + 10 \cdot 15^2 + 1 \cdot 10^2 = 3093$ .

Точно так же если последний цвет белый, то число способов окраски равно  $1^2 + 7^2 \cdot 1 + 15^2 \cdot 7 + 10^2 \cdot 15 + 1^2 \cdot 10 = 3135$ .

Всего имеем 10948 способов.

в) Если ни одна полоса не меньше 3 см, то задача сводится к подсчету числа представлений 10 в виде суммы  $k$  натуральных слагаемых, принимающих значения от 3 до 10.

При  $k = 1$  имеем одно представление, при  $k = 2$  — пять представлений, при  $k = 3$  — три представления. Поэтому  $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$  раза окраска заканчивается синим цветом,  $1 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 81$  раз красным цветом и белым цветом  $1^2 + 5^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 5 = 71$  раз.

14. Обозначим через  $x, y, z$  количество книг первого, второго и третьего вида, полученных первым участником. По условию задачи имеем  $x + y + z = 12$ , причем  $0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq 8, 0 \leq z \leq 9$ . Число целых решений уравнения, удовлетворяющих данным неравенствам, равно коэффициенту при  $t^{12}$  в разложении произведения

$$(1 + t + \dots + t^7)(1 + t + \dots + t^8)(1 + t + \dots + t^9).$$

Это произведение можно переписать так:

$$\frac{(1 - t^8)(1 - t^9)(1 - t^{10})}{(1 - t)^3} =$$

$$= (1 - t^8 - t^9 - t^{10} + t^{17} + \dots)(1 + 3t + 6t^2 + 10t^3 + 15t^4 + \dots + 91t^{12} + \dots).$$

После раскрытия скобок мы получим при  $t^{12}$  коэффициент 60, поэтому раздел может быть совершен 60 способами.

15. Число способов разложить  $n$  различных предметов по  $k$  ящицам равно  $k! \cdot \Pi_n^k$ . Это число равно коэффициенту при  $x^n$  в разложении  $(e^x - 1)^k$ , умноженному на  $n!$ .

Отсюда следует, что  $n!(1 - \Pi_n^2 + 2! \cdot \Pi_n^3 - 3! \cdot \Pi_n^4 + \dots)$  является коэффициентом при  $x^n$  в разложении суммы ряда

$$(e^x - 1) - \frac{1}{2}(e^x - 1)^2 + \frac{1}{3}(e^x - 1)^3 - \frac{1}{4}(e^x - 1)^4 + \dots$$

Так как  $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \ln(1 + x)$ , то сумма этого ряда равна  $\ln(1 + (e^x - 1)) = x$ . Поэтому при  $n > 1$  исходное выражение равно нулю.

**16.** Это число способов равно коэффициенту при  $x^s$  в разложении выражения

$$\begin{aligned}(1 + x + \dots + x^p)(1 + x + \dots + x^q)(1 + x + \dots + x^r) &= \\ &= (1 - x^{p+1})(1 - x^{q+1})(1 - x^{r+1})(1 - x)^{-3} = \\ &= (1 - x^{p+1} - x^{q+1} - x^{r+1} + x^{q+r+2} + \dots)(1 + 3x + 6x^2 + \dots + C_{k+2}^2 x^k + \dots).\end{aligned}$$

Так как  $p < q + r$ , то  $r \leq q \leq p < s$ , но  $q + r > s$ , и этот коэффициент имеет вид

$$\begin{aligned}C_{s+2}^2 - C_{s-p+1}^2 - C_{s-q+1}^2 - C_{s-r+1}^2 &= \\ &= \frac{(s+2)(s+1)}{2} - \frac{(s-p+1)(s-p)}{2} - \frac{(s-q+1)(s-q)}{2} - \frac{(s-r+1)(s-r)}{2}.\end{aligned}$$

Раскроем скобки и примем во внимание, что  $p + q + r = 2s$ . После преобразований получим  $s^2 + s + 1 - \frac{p^2 + q^2 + r^2}{2}$ .

Если  $q + r < p$ , то  $r \leq q < s$ , но  $p \geq s$ , зато может стать  $q + r + 2 \leq s$ .

**18.** Так как  $3 = 2 + 1$ ,  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 5 + 1$ ,  $7 = 5 + 2$ ,  $8 = 5 + 2 + 1$ ,  $9 = 5 + 2 + 2$ , то с помощью указанных разновесок можно составить любой целый вес от 1 до 9 мг. Точно так же составляются веса, выражаемые десятками, сотнями миллиграммов и т. д.

**19.** Выясним сначала, какова наибольшая длина цепи такой, что после расковывания  $k$  звеньев можно получить любой вес от 1 до  $n$ . Рассмотрим для этого, каково наиболее выгодное расположение раскованных звеньев. Так как число раскованных звеньев равно  $k$  и масса каждого звена 1 г, то с их помощью можно получить любой вес от 1 до  $k$ . Но вес  $k+1$  мы уже не сможем получить, если у нас не будет еще одной части (из числа оставшихся).

Ясно, что выгоднее всего, чтобы эта часть состояла из  $k+1$  звеньев, тогда мы сможем получить любой вес от 1 до  $2k+1$ . Далее нам понадобятся части весом  $2(k+1)$ ,  $4(k+1)$ , ...,  $2^k(k+1)$ . С их помощью можно будет получить любой вес от 1 до

$$\begin{aligned}n = k + [(k+1) + 2(k+1) + 4(k+1) + \dots + 2^k(k+1)] &= \\ &= k + (k+1)(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1}(k+1) - 1.\end{aligned}$$

Итак, если  $2^k k \leq n < 2^{k+1}(k+1)$ , то можно обойтись  $k$  расковываниями, но нельзя обойтись  $k-1$  расковываниями. В частности, поскольку  $2^3 \cdot 3 \leq 60 < 2^4 \cdot 4 - 1$ , то для цепи из 60 звеньев надо расковать 3 звена, получив куски 4, 1, 8, 1, 16, 1, 29 г.

Если можно пользоваться двухчашечными весами, то к  $k$  раскованным звеньям надо присоединить кусок весом  $2k+1$  (кладя его на одну чашку весов, а звенья по 1 г — на другую, мы можем получить любой вес от  $k+1$  до  $2k$ , а кладя его вместе с этими звеньями — любой вес от  $2k+1$  до  $3k+1$ ). Следующие куски должны иметь вес

$3(2k+1)$ ,  $9(2k+1)$ , ...,  $3^k(2k+1)$ . С их помощью можно получить любой вес от 1 до

$$k + [(2k+1) + 3(2k+1) + 9(2k+1) + \dots + 3^k(2k+1)] = \frac{3^{k+1}(2k+1) - 1}{2}.$$

В частности, для цепи в 60 г надо расковать два звена и получить куски весом 5, 1, 15, 1, 38 г.

**21.** Вес каждой кучки будет  $\frac{n(n+1)}{6}$ , поэтому должно быть  $n = 3k$  или  $n = 3k-1$ . Замечаем, что если можно разложить  $n$  гирь, то можно и  $n+6$  (гири в кучки добавляются так:  $(n+1)+(n+6)$ ,  $(n+2)+(n+5)$ ,  $(n+3)+(n+4)$ ), и что при  $n=3$  нельзя, а при  $n=5, 6, 8, 9$  — можно. Значит,  $k \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \text{22. Мы имеем } \sum_{x=0}^n \frac{n!(m-x)!}{m!(n-x)!} &= \frac{1}{C_m^n} \sum_{x=0}^n C_{m-x}^{m-n} = \frac{C_{m+1}^{m-n+1}}{C_m^n} = \frac{m+1}{m-n+1} \text{ и} \\ \sum_{x=0}^n \frac{C_n^x C_n^r}{C_{2n}^{x+r}} &= \frac{n! C_n^r}{(2n)!} \sum_{x=0}^n \frac{(x+r)!(2n-x-r)!}{x!(n-x)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{x=0}^n C_{x+r}^r C_{2n-x-r}^{n-r} = \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} C_{2n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}. \end{aligned}$$

**23.** Сумма слева сводится к  $\sum_{k=1}^n C_{m+k-1}^k = C_{m+n}^m - 1$ . Тому же значению равна сумма, стоящая справа.

**24.** Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{2n-1}^x} &= \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(2n-x-1)!}{(n-x)!} = \frac{2n}{(2n-1)C_{2n-2}^{n-1}} \sum_{x=1}^n C_{2n-x-1}^{n-1} - \\ &- \frac{1}{C_{2n-1}^{n-1}} \sum_{x=1}^n C_{2n-x}^n = \frac{2nC_{2n-1}^{n-1}}{(2n-2)C_{2n-2}^{n-1}} - \frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} = \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

**25.** Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \frac{C_{n-1}^{x-1}}{C_{n+q}^x} &= \frac{(n-1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(n+q-x)!}{(n-x)!} = \frac{(n+q+1)(n-1)!q!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n C_{n+q-x}^{n-x} - \\ &- \frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+1}^{n-x} = \frac{(n+q+1)(n-1)!q!}{(n+q)!} C_{n+q}^{n-1} - \end{aligned}$$

$$-\frac{(n-1)!(q+1)!}{(n+q)!} C_{n+q+1}^{n-1} = \frac{n+q+1}{q+1} - \frac{n+q+1}{q+2} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

26. Имеем  $\sum_{x=1}^n \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_x^{n+q}} = \frac{(n-2)!}{(n+q)!} \sum_{x=1}^n \frac{x(x-1)(n+q-x)!}{(n-x)!}$ . Далее, используя тождество

$$x(x-1) =$$

$$= (n+q-x+1)(n+q-x+2) + (n+q+1)[n+q-2(n+q-x+1)],$$

получаем, что последняя сумма равна

$$\begin{aligned} (q+2)! \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+2}^{n-x} - 2(n+q+1)(q+1)! \sum_{x=1}^n C_{n+q-x+1}^{n-x} + \\ + (n+q)(n+q+1)q! \sum_{x=1}^n C_{n+q-x}^{n-x} = \\ = q! \left[ (q+1)(q+2)C_{n+q+2}^{n-1} - 2(n+q+1)(q+1)C_{n+q+1}^{n-1} + (n+q)(n+q+1)C_{n+q}^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $C_{n+q+2}^{n-1}$ ,  $C_{n+q+1}^{n-1}$ ,  $C_{n+q}^{n-1}$  и преобразуя, получаем требуемую формулу.

27. Мы знаем, что  $C_{n-1}^{k-1} = \frac{k}{n} C_n^k$ . Так как

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n, \quad (1)$$

то отсюда следует, что

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1} \quad (2)$$

(читатель, знакомый с дифференциальным исчислением, может получить эту формулу, взяв производную обеих частей равенства (1)).

Перемножим разложения (1) и (2). Мы получим, что

$$\begin{aligned} n(1+x)^{2n-1} = \\ = (1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n)(C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}). \end{aligned}$$

Сравнив коэффициенты при  $x^{n-1}$  в обеих частях равенства, приходим к доказываемому соотношению.

29. Рассмотрим равенство

$$\left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{2n\pi}{3} + i \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{2^n} \left[ 1 + C_n^1 (-i\sqrt{3}) + C_n^2 (-i\sqrt{3})^2 + C_n^3 (-i\sqrt{3})^3 + \dots \right] = \\ = \frac{(-1)^n}{2^n} \left[ 1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - \dots - i\sqrt{3} (C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - \dots) \right]. \end{aligned}$$

Приравнивая действительные и мнимые части в обеих частях последнего равенства, получаем доказываемые соотношения.

**30.** Рассмотрим тождество

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$$

и положим в нем последовательно  $x = 1$ ,  $x = \varepsilon$ ,  $x = \varepsilon^2$ , где  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ , и потому  $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ . Получаем

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n,$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + C_n^1 \varepsilon + C_n^2 \varepsilon^2 + C_n^3 \varepsilon^3 + \dots + C_n^n \varepsilon^n,$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + C_n^1 \varepsilon^2 + C_n^2 \varepsilon^4 + C_n^3 \varepsilon^6 + \dots + C_n^n \varepsilon^{2n}.$$

Но  $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 0$ , если  $k$  не делится на 3, и  $1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} = 3$ , если  $k$  делится на 3. Следовательно,

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots).$$

Так как

$$1 + \varepsilon = -\varepsilon^2 = -\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3},$$

$$1 + \varepsilon^2 = -\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3},$$

то  $2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}$ . Отсюда и следует первое равенство. Два другие равенства получаются аналогично при рассмотрении сумм  $2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n$  и  $2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n$ .

Последнее равенство выводится аналогичным образом из рассмотрения выражения  $(1+i)^n$ .

**31.** Мы имеем

$$(1+x)^p = 1 + C_p^1 x + C_p^2 x^2 + \dots + C_p^m x^m + \dots + C_p^p x^p,$$

$$(1+x)^{-k-1} = 1 - C_{k+1}^1 x + C_{k+2}^2 x^2 - \dots + (-1)^s C_{k+s}^s x^s + \dots,$$

$$(1+x)^{p-k-1} = 1 + C_{p-k-1}^1 x + \dots + C_{p-k-1}^n x^n + \dots + x^{p-k-1}.$$

Перемножим первые два разложения и найдем коэффициент при  $x^n$ . Он равен  $\sum_s (-1)^{n-s} C_{k+n-s}^{n-s} C_p^s = \sum_s (-1)^s C_{k+s}^s C_p^{n-s}$ . Отсюда сразу вытекает

доказываемое тождество.

Следующие тождества доказываются аналогично.

**42.** Доказывается с помощью индукции по  $n$ .

## Глава IX

1. Отношение соседства сохраняется при циклических перестановках и при симметричном отражении. В случае 4 человек мы имеем  $2 \cdot 4 = 8$  преобразований, сохраняющих отношение соседства. Так как общее число перестановок 4 человек равно  $4! = 24$ , то имеем  $24/8 = 3$  различных способа рассадки.

Если за столом сидят 7 человек, то имеем  $7!/14 = 360$  способов, вообще в случае  $n$  человек  $(n-1)!/2$  способов. Число способов, при которых 2 данных человека сидят рядом, вдвое больше числа способов посадить 6 человек (в силу возможности поменять этих людей местами). Значит, оно равно  $5! = 120$ . Точно так же число способов, при которых данный человек имеет данных двух соседей, равно  $4! = 24$ .

2. Разбиваем все перестановки букв слова «Юпитер» на классы так, что перестановки одного и того же класса отличаются друг от друга только порядком гласных. Число классов равно  $P_6/P_3 = 120$ . Лишь одна перестановка из каждого класса удовлетворяет поставленному условию. Поэтому их число тоже равно 120.

3. Поля разбиваются на одну группу из 4 угловых полей и 12 групп по 2 неугловых поля. В зависимости от того, заняты или нет угловые поля, получаем  $C_{12}^8$  или  $C_{12}^{10}$  способов и общий ответ в виде  $C_{12}^8 + C_{12}^{10}$  способов.

4. а) Так как ожерелья остаются неизменными при циклических перестановках бусинок и при изменении порядка следования бусинок на обратный, то можно составить  $7!/14 = 360$  видов ожерелий.

б) Виды ожерелий отличаются друг от друга числом маленьких бусинок (0, 1 или 2), заключенных между двумя большими. Поэтому имеем три вида ожерелий.

5. Разобъем погремушки на классы, отнеся к  $m$ -му классу погремушки, для которых наименьшее число синих шариков между двумя красными равно  $m$ . При  $m = 0$  имеем 4 вида погремушек (третий красный шарик примыкает к двум другим или отделен от них одним, двумя или тремя синими шариками). При  $m = 1$  имеем два красных шарика, разделенных синим. Третий красный шарик может отделяться от ближайшего красного одним, двумя или тремя синими шариками. Поэтому при  $m = 1$  есть 3 вида погремушек. При  $m = 2$  имеем только один вид погремушек. Всего — 8 видов.

6. Камни можно переставлять  $P(3, 2, 1) = 60$  способами. Но браслет при 5 поворотах каждый раз дает новую перестановку (сапфир переезжает на новое место). При симметрии несимметричные браслеты тоже будут давать новую перестановку — итого 12 перестановок, связанных с несимметричным браслетом. Каждый симметричный браслет (их только два: и-и-и-р-с-р и и-р-и-с-и-р) связан с 6 перестановками. Итого получаем 2 симметричных браслета и 4 несимметричных.

7. Камни можно переставлять  $P(5, 7, 9)$  способами. Браслет каждый раз дает новую перестановку при поворотах (поскольку 5 — число простое) и при симметриях (симметричный браслет из этих 5 + 7 + 9 камней не сделаешь). Получаем  $P(5, 7, 9)/42$  способов.

На кольце камни расположены рядом, кольцо можно перевернуть, но не вращать. Если выбраны камни одного вида (3 способами), то по 1 расположению; если выбраны 2 вида камней ( $A_3^2 = 6$  способами), то по 2 расположения (одиночный камень в центре или с краю); если все три камня различны (1 способ), то по  $3!/2 = 3$  расположения (это выбор центрального камня). Всего 18 способов.

Для брошки  $3^3 = 27$  способов (на каждое место один из 3 типов камней).

- Число способов раскраски равно  $4!/12 = 2$ .
- Имеем  $8!/24 = 1680$  способов раскраски.
- Для додекаэдра  $12!/60$ , а для икосаэдра  $20!/60$  способов раскраски.

**10.** Расклассифицируем способы раскраски по числу белых граней. Существует единственный способ раскраски, не содержащий ни одной белой грани, и один способ, содержащий одну белую грань. В случае двух белых граней есть два способа раскраски — белые грани либо имеют общее ребро, либо противоположны. При трех белых гранях снова имеем два способа: либо есть две противоположные белые грани, либо все белые грани примыкают к одному и тому же углу. Случай 4, 5 и 6 белых граней сводятся к рассмотренным выше путем замены цветов на противоположные. Всего получаем 10 способов раскраски.

**12.** Есть 1 способ раскраски без белых вершин, 1 способ с одной белой вершиной, 3 — с двумя белыми вершинами (белые вершины лежат на одном ребре, на одной диагонали грани или на одной диагонали куба), 3 способа с тремя белыми вершинами (три вершины лежат на одной грани; две лежат на одном ребре, а третья — на одной диагонали грани с какой-то из этих двух вершин; три вершины попарно лежат на одной диагонали грани, см. рис. 95). С четырьмя белыми вершинами есть 7 способов раскраски (разобранные в п. 126). Случаи 5, 6, 7 и 8 белых вершин сводятся к разобранным выше заменой цветов на противоположные.

Всего имеем  $1 + 1 + 3 + 3 + 7 + 3 + 3 + 1 + 1 = 23$  способа.

**22.** Куб имеет 11 разверток (рис. 96). Шесть первых решений дают те развертки, в которых четыре грани куба расположены в одной полосе развертки. Последующие четыре развертки — это те, у которых есть три грани в одной полосе, но нет четырех граней. И наконец, в последнем решении ни в одной полосе нет трех граней.

**23.** Есть лишь 4 способа такой окраски. Подробное доказательство этого утверждения можно найти в книге Г. Штейнгауза «Сто задач», Физматлит, 1976, задача № 42.

**24.** Так как  $p$  — простое число, то при поворотах окружности в себя переходят лишь окружности, целиком окрашенные в один цвет. Число таких окрасок равно  $p$ . Остальные способы раскраски (их число

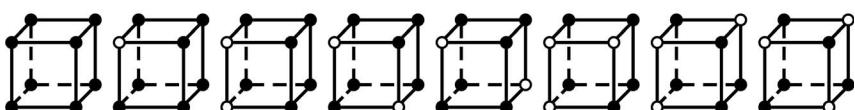


Рис. 95

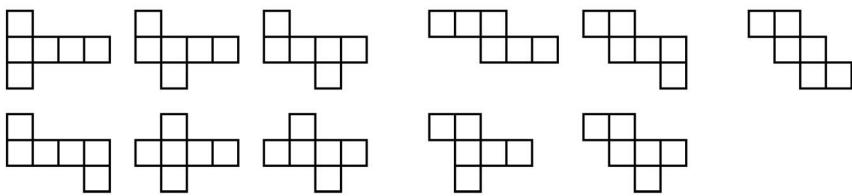


Рис. 96

равно  $n^p - n$ ) распадаются на классы по  $p$  раскрасок в каждом классе, причем раскраски одного класса переходят друг в друга при вращении окружности. Поэтому они дают  $\frac{n^p - n}{p}$  способов раскраски. Всего имеем  $\frac{n^p - n}{p} + n$  способов. По ходу решения задачи мы доказали так называемую *малую теорему Ферма*: если  $p$  — простое число, то для любого целого  $n$  число  $n^p - n$  делится на  $p$ .

**25.** а) Обход по черным полям ходом ладьи задает на доске циклы из некоторого числа пар номеров вертикаль—горизонталь. Циклов может быть несколько, каждый не менее чем из двух пар. Значит, надо разбить 8 на несколько слагаемых, каждое не меньше 2.

б) Поскольку мы берем  $n$  точек пересечения, каждая из которых лежит на двух прямых, но никакие три не лежат на одной прямой, то на каждой прямой лежат ровно две точки из выбранной группы. Соединим эти точки отрезком. Каждая точка из выбранной группы лежит на двух прямых, поэтому она будет соединена с двумя разными точками, получится несколько многоугольников, у каждого не менее 3 вершин. Занумеруем данные прямые (и тем самым отрезки). Каждому многоугольнику соответствует цикл (обход его сторон в любом из 2 направлений), сумма длин всех циклов равна  $n$ . Для  $n = 3, 4, 5$  цикл только один, число групп  $\frac{P_n}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$ , для  $n = 6$  цикл один или два ( $6 = 3 + 3$ ) и т. д.

**29.** Расставьте цифры в числе по возрастанию, получится задача о покупке  $n$  пирожных 10 сортов.

**30.** Иначе шашек будет четное число.

## Глава X

**3.** Так как 1 — наименьшее из заданных чисел, то оно должно стоять в углу, причем при  $n \geq 3$  рядом с ним в одной вертикали или горизонтали должно стоять 2. Тогда числа 1, 2, ...,  $n$  попадут в одну и ту же вертикаль или горизонталь. Наибольшим из заданных чисел является  $n^2$ , оно тоже должно стоять в углу, причем при  $n \geq 3$  рядом с ним должно стоять  $n^2 - 1$ , а далее пойдут  $n^2 - 2, \dots, n^2 - n + 1$ . Тем самым углы все заняты. Наименьшим из оставшихся чисел является  $n + 1$ . Оно должно занять место рядом с 1. Продолжая это рассуждение, убеждаемся, что числа располагаются однозначно определенным

образом. Но мы можем поставить вначале 1 в любой из углов доски и выбрать либо вертикальное, либо горизонтальное направление для последовательности 1, 2, ...,  $n$ . Поэтому имеем 8 расположений.

10. Максимальное число шариков, среди которых нет 15 одинаковых, равно 74 (10 белых, 10 черных, 12 желтых и по 14 красных, зеленых и синих). Надо брать 75 шариков.

11. В противном случае население Москвы не превосходило бы число  $9\cdot 300\,001 = 2\,700\,009$ .

12.  $C_{19}^2 > 2^6 = 64$ . Для 7 проверок можно построить алгоритм.

13.  $10! > 2^{20}$ .

17. Будем обозначать знакомство черточкой: А—В. Пусть  $n > 3$ . Найдется А—В—С. Если А и С не знакомы, то среди остальных  $2n - 3$  человек по  $n - 1$  знакомых А и С, значит, хоть один общий. Если А—С, то среди остальных  $2n - 3$  человек по  $n - 2$  знакомых А, В и С, значит, хоть один общий каких-то двоих. Случаи  $n = 2$  и  $n = 3$  разбираются отдельно.

19. Пусть кто-то из собравшихся — назовем его  $X$  — имеет  $m$  знакомых  $a_1, \dots, a_m$ . По условию никакие два человека из числа  $a_1, \dots, a_m$  друг с другом не знакомы (поскольку они знакомы с  $X$ ). Поэтому для любых двух человек  $a_i, a_j$  должен найтись еще один общий знакомый, кроме  $X$ . Этот человек не может быть знаком с  $X$ , а разным парам соответствуют разные люди (если бы кто-нибудь был общим знакомым для двух различных пар  $(a_i; a_j)$  и  $(a_k; a_l)$ , то он имел бы с  $X$  по крайней мере трех общих знакомых). Таким образом, число всех людей, не знакомых с  $X$ , не меньше, чем число всех пар людей из числа  $a_1, \dots, a_m$ , т. е. не меньше, чем  $C_m^2$ .

С другой стороны, каждый человек, не знакомый с  $X$ , имеет с ним ровно двух общих знакомых, разумеется, из числа  $a_1, \dots, a_m$ . При этом разным людям соответствуют разные пары (если бы одна пара  $(a_i; a_j)$  соответствовала двум разным людям, то  $a_i$  и  $a_j$  имели бы больше двух общих знакомых, поскольку они знакомы и с  $X$ ). Отсюда вытекает, что число людей, не знакомых с  $X$ , не больше, чем  $C_m^2$ , а потому равно  $C_m^2$ . Но тогда общее число присутствующих равно

$1 + m + C_m^2$ . Рассматривая равенство  $N = 1 + m + \frac{m(m - 1)}{2}$  как квадратное уравнение относительно  $m$ , мы видим, что оно имеет только один положительный корень, а это и означает, что для всех людей число  $m$  их знакомых одно и то же.

20. Для  $N = 2$ : А—В. Переход от  $N$  к  $N + 1$ . Если в компании из  $N$  человек нет ни с кем не знакомого — добавляем ни с кем не знакомого. Если есть — добавляем одного, знакомя его со всеми. У прежних  $N$  человек добавится по 1 новому знакомому, но будет самое большое  $N - 1$  знакомых (они не были знакомы с ни с кем не знакомым), у нового будет  $N$  знакомых. Большего не позволяет добиться принцип Дирихле.

**21.** Если  $A-B$  и  $A-C$ , то  $B-C$ . Если  $A-B$ , но  $(A-C)$ , то  $(B-C)$ . Если  $(A-B)$  и  $(A-C)$ , то  $B-C$ . Поэтому горожане разделены на две враждующие группы, внутри которых все дружат, либо группа только одна. Искомый горожанин — любой из меньшей группы.

**22.** Ситуация аналогична предыдущей задаче, и одной группе целиком надо изменить отношение к окружающим.

**25.** В противном случае число соединений равнялось бы дробному числу  $\frac{77 \cdot 15}{2}$ .

**26.** Каждый обмен рукопожатиями добавляет участникам конгресса два рукопожатия.

**27.** У каждого ребра 2 конца, каждый конец в 1 вершине, в каждой из 8 вершин куба сходятся концами 3 ребра, но удвоенная сумма чисел от 1 до 12 на 8 не делится.

**28.** Пусть числа  $a$  и  $b$  образуют в данной перестановке инверсию. Если их поменять местами, то получится новая перестановка, в которой они уже не образуют инверсии. Мы имеем  $n!$  перестановок, в каждой из которых можно  $C_n^2$  способами выбрать числа  $a$  и  $b$ . В половине случаев эти числа образуют инверсию. Значит, число инверсий равно  $\frac{n!}{2} C_n^2$ .

**29.** Будет сделано четное число перемещений шашек, а требуется нечетное.

**30.** Если «плюс» — это  $+1$ , а «минус» — это  $-1$ , то на доске написано произведение всех чисел.

**31.** Получить 9 единиц можно из 111111111 или 000000000. Но первый набор ничего не меняет, а второй невозможен ( $0$  и  $1$  должны были чередоваться, но их разное число).

**32.** Если пару рядом стоящих «плюсов» или пару рядом стоящих «минусов» заменить на один знак, то на 1 уменьшится  $p$  и  $t$  или  $k$  и  $m$ . Если  $t = m = 0$ , то  $p = k$ .

**33, 34.** Число одночленов  $x_i x_j$ , равных 1 и равных  $-1$ , одинаково. Число одночленов, равных  $-1$ , четно, потому что  $-1$  означает перемену знака  $x_k$ , но под конец надо вернуться к знаку  $x_1$ .

$\begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & 7 \\ 6 & 4 \end{matrix}$

**35.** Например,  $\begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & 7 \\ 6 & 4 \end{matrix}$ . Если соединить, скажем, синими отрезками

кружки, не соединенные черными отрезками, то получится задача о поиске гамильтонова пути (только незамкнутого).

**43.**  $pr$  должно быть четным (поскольку  $pr/2$  — число всех отрезков) и  $r \leq n - 1$ . Расположим все  $n$  точек в вершинах правильного  $n$ -угольника. При  $r$  четном соединяя каждую точку с  $r/2$  ближайшими в обе стороны, при  $r$  нечетном,  $r = k + (k + 1)$  занумеруем все точки от 1 до  $n$  и соединяя каждую точку с  $k$  следующими и  $k$  предыдущими и еще с противоположной точкой.

**44.** Надо построить граф из из вершин и ребер многогранника и исследовать его подобно островам и мостам. Подробное решение можно найти в упомянутой книге Г. Штейнгауза «Сто задач», Физматлит, 1976, задача № 44а.

**72.** Расставим в вершинах 12-угольника подряд числа 1, 2, 3, -1, -2, -3, 1, 2, 3, -1, -2, -3. Сумма всех чисел при разрешенных переменах знаков остается равной нулю, поэтому поменять знаки лишь у первых двух чисел не удастся.

**74.** Проверка показывает, что перестановка двух рядом стоящих букв А и Б не изменяет произведения (достаточно рассмотреть комбинации ААБА, БАББ и ААББ). Поэтому можно считать, что сначала идут все буквы А, а потом — все буквы Б. Но тогда утверждение становится очевидным.

**77.** Иначе можно будет крутиться по окружности и набирать отрицательную сумму. После не более чем  $n + 1$  оборотов мы придем в точку, в которой уже были, совершив от нее целое число полных оборотов.

**78.** Если взять тройки, содержащие один и тот же элемент, скажем  $a$ , то они удовлетворяют поставленному условию, причем их число равно  $C_{1954}^2 = 1\ 908\ 081$ . Покажем, что нельзя выбрать большего числа троек, попарно имеющих общий элемент. Предположим, что мы выбрали  $N > C_{1954}^2$  таких троек и  $(a; b; c)$  — одна из них. Так как любая из  $N - 1$  оставшихся троек имеет хотя бы один общий элемент с выбранной, то по крайней мере для одного из элементов  $a, b, c$ , скажем  $a$ , найдется  $\frac{N - 1}{3}$  содержащих его троек, причем

$$\frac{N - 1}{3} \geq 636\ 027.$$

Тройка вида  $(a; b; x)$  или  $(a; c; x)$  вместе не более чем 3905, поэтому найдется тройка вида  $(a; d; e)$ , где  $d$  и  $e$  отличны от  $b$  и  $c$ . Точно так же найдутся тройки вида  $(a; f; g)$  и  $(a; h; j)$ , причем  $f$  и  $g$  отличны от  $b, c, d, e$ , а  $h, j$  — от  $b, c, d, e, f, g$ .

Любая из заданных  $N$  троек имеет хотя бы один общий элемент с каждой из четырех троек  $(a; b; c), (a; d; e), (a; f; g), (a; h; j)$ . Ясно, что одним из этих общих элементов должен быть элемент  $a$ , так как иначе тройка содержала бы четыре различных элемента, что невозможно. Итак, все тройки содержат элемент  $a$ , а потому их число не превышает  $C_{1954}^2$  вопреки предположению.

**95.** Для  $x = -1000$  одно решение  $y = 0$ ; для  $x = -999$  три решения  $y = 0, \pm 1$ ; далее 5 решений и так далее до 2001 решения при  $x = 0$ ; после этого обратно до одного решения при  $x = 1000$ . Вычисляя сумму  $1 + 3 + 5 + \dots + 1999 + 2001 + 1999 + \dots + 3 + 1$ , получаем ответ 2002001.

**96.** За четное число ходов конь может попасть на клетки того же цвета, что и та, где он стоит вначале. Нам будет удобнее повернуть доску на  $45^\circ$  и изображать лишь клетки этого цвета, записывая в каждую клетку число ходов, за которые конь может в нее попасть. Тогда клетки, на которые конь (K) может попасть за 2 хода, изображаются схемой на рис. 97. Число этих клеток равно 33. Каждая из этих клеток является центральной точкой K такой же фигуры, показывающей, куда может попасть конь еще за два хода (а всего за 4). Объединяя эти фигуры, получим фигуру, изображенную на рис. 98.

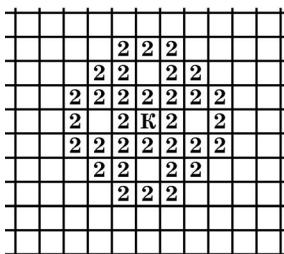


Рис. 97

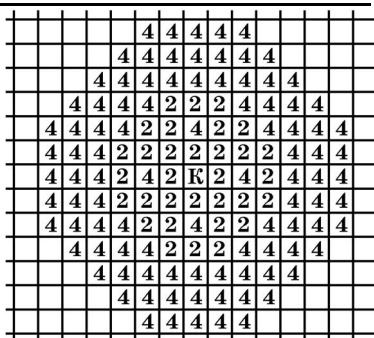


Рис. 98

Она является восьмиугольником со стороной 5, вложенным в квадрат со стороной 13, причем по углам остаются незаполненными треугольники со стороной 4. Всего получаем  $13^2 - 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 129$  полей.

После  $2n$  ходов ( $n > 1$ ) получается восьмиугольник со стороной  $2n + 1$ , вложенный в квадрат со стороной  $6n + 1$ , причем по углам остаются незаполненными треугольники со стороной  $2n$ . Всего получается  $(6n + 1)^2 - 4n(2n + 1) = 28n^2 + 8n + 1$  полей.

## Предметный указатель

|  |   |
|--|---|
| <p>Анаграмма 48<br/>     Арифметический квадрат 183<br/>     Арифметический пятиугольник 190<br/>     Байт 21<br/>     Бернсайд Уильям 263<br/>     Бернуlli Якоб 7, 315<br/>     Бином Ньютона 53, 241<br/>     Биномиальные коэффициенты 53<br/>         свойства 70, 227, 230<br/>     Блок-схема 277<br/>     Блуждания 165<br/>     Булева функция 270<br/>     Вейль Герман 282<br/>     Видеокарта 21<br/>     Граф 284<br/>     Группа преобразований 262<br/>     Деление многочленов 217<br/>     Деревенские свадьбы 282<br/>     Диаграмма Юнга 157, 176<br/>     Диффузия 167<br/>     Задача<br/>         для ПК 127, 247<br/>         коммивояжера 36<br/>         majordoma 161, 203, 207<br/>         о гостях 155, 206<br/>         о разбиениях 175, 199, 201, 240<br/>         об общих представителях 287<br/>     Запрет Паули 100<br/>     Запретные поля 151, 153<br/>     Игры на разорение 181<br/>     Инверсия 289, 397<br/>     Кардано Джероламо 72<br/>     Классы эквивалентности 257<br/>     Код Морзе 22<br/>     Код Хемминга 297<br/>     Композиция преобразований 261<br/>     Ладейный многочлен 152<br/>     Латинские квадраты 275<br/>     Лейбниц Готфрид Вильгельм 7<br/>     Магический квадрат 271<br/>     Малая теорема Ферма 395<br/>     Метод неопределенных коэффициентов 238, 247<br/>     Омар Хайям 71<br/>     Орбиты 257<br/>     Отношение<br/>         Рефлексивность 261<br/>         Симметричность 261<br/>         Транзитивность 261<br/>     Паскаль Блез 7, 71<br/>     Перестановки 43<br/>         с повторениями 47<br/>         четность 289<br/>     Полиномиальные коэффициенты 97, 242<br/>     Правило произведения 12<br/>     Правило суммы 12   </p> | Преобразование множества 257<br>обратное 261<br>сопряженное 265<br>тождественное 261<br>Прерывания IRQ 286<br>Принцип Дирихле 278<br>Разложение в сумму 57, 122<br>Размещения<br>без повторений 41<br>с повторениями 18, 73<br>Рамсей Франк 281<br>Рекуррентное соотношение 194<br>порядок 209<br>процесса разбиения 200, 240<br>решение 210<br>характеристическое уравнение 212, 237<br>Ряд 218<br>сходимость 220<br>Системы счисления 19, 125<br>Смещения 144, 148<br>Сочетания 49, 70<br>с повторениями 55–58<br>Статистика<br>Бозе — Эйнштейна 100<br>Максвелла — Больцмана 100<br>Ферми — Дирака 100<br>Счастливые билеты 126, 250<br>Тарабарская грамота 317<br>Тарталья Никколо 7, 71<br>Теория передачи информации 20, 216, 296<br>Треугольник<br>арифметический 72<br>m-арифметический 124<br>Паскаля 71<br>расширенный 186–187<br>Уоллис 317<br>Факториал 42, 45<br>Ферма Пьер 7<br>Формула<br>включений и исключений 30, 79<br>полиномиальная 242<br>Функция<br>Гаусса 168<br>производящая 226<br>Цикл 266<br>Числа<br>$C_m(n, N)$ 249<br>Белла 105<br>дружественные 307<br>квадратные 307<br>ладейные 152–153<br>пирамidalные 185, 308<br>Стирлинга 103, 105<br>треугольные 184, 307<br>Фибоначчи 195, 213<br>шестиугольные 308<br>Число делителей 95<br>Эйлер Леонард 7, 316 |
|--|---|