Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре

Под редакцией Ю. М. Смирнова

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 01.03.01 Математика, 01.03.04 Математика и математическое моделирование и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

ББК 22.151
С23

Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /
Под ред. Ю. М. Смирнова.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
391 с.
ISBN 978-5-4439-3003-9

Сборник содержит задачи по аналитической геометрии и линейной алгебре. Теоретические задачи, как правило, сопровождаются упражнениями различной трудности, способствующими самостоятельной проверке обучаемыми степени понимания ими новых определений и алгоритмов. В конце книги приведены ответы и указания.

Настоящий сборник предназначен для студентов, получающих образование по математическим направлениям и специальностям. Он может быть использован преподавателями вузов.

Подготовлено на основе книги:
Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /
Под ред. Ю. М. Смирнова. — Изд. новое. — М.: МЦНМО, 2016. — 391 с.
ISBN 978-5-4439-1003-1

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3003-9

Светлой памяти наших Учителей:

Павла Сергеевича Александрова,
Сергея Владимировича Бахвалова,
Бориса Николаевича Делоне,
Александра Геннадиевича Куроша,
Алексея Серапионовича Пархоменко,
Игоря Владимировича Проскурякова

посвящается настоящая книга

Оглавление

Ответы

Предисловие к новому изданию

С момента выхода второго издания настоящего сборника задач прошло уже десять лет. Задачник успел стать за это время библиографической редкостью, в библиотеках некоторых вузов просто стало не хватать изданных ранее его экземпляров, необходимых для обучения студентов. Авторы, идя на встречу просьбам о переиздании задачника, решили в третьем издании не менять ни структуру задачника, ни нумерацию задач и глав, сохранив ее из второго издания. Главной целью стало пополнение запасов уже изданных ранее книг в библиотеках учебных пособий вузов, многие из которых просто пришли в негодность от активного использования, при этом мы постарались исправить все обнаруженные за последние годы опечатки, что несомненно способствовало улучшению текста. Нам очень грустно сознавать, что новое издание не увидят наши коллеги, авторы задачника, известные российские математики: М. М. Постников, Ю. М. Смирнов, Е. Г. Скляренко. Их вклад в создание данного задачника был поистине неоценим.

Предисловие к первому изданию

Многолетнее преподавание курсов аналитической геометрии и линейной алгебры убедило нас в необходимости создания нового единого сборника задач по этим двум дисциплинам. Настоящая книга отражает обновление курса линейной алгебры, предпринятое С. П. Новиковым в 70—80-х годах XX века и основанное на активном применении методов линейной алгебры в аппарате современной математической физики и возросшей роли прикладных методов линейной алгебры.

Объединение в одной книге задач по аналитической геометрии и линейной алгебре позволяет подчеркнуть геометрические аспекты линейной алгебры и сделать ее объекты более наглядными.

Книга состоит из двух частей. В первой части содержатся задачи по традиционному курсу аналитической геометрии, а во второй — по курсу линейной алгебры и геометрии. Мы старались почти все теоретические задачи сопровождать упражнениями разной степени трудности, чтобы читатель с их помощью сразу же мог проверить, как он понял новые определения и алгоритмы.

Составители с удовольствием благодарят рецензентов профессоров А. В. Зарелуа и А. В. Чернавского за конструктивную критику и доцента Н. Н. Ченцову за помощь в подборе задач по вычислительным методам линейной алгебры.

В списке литературы приведены задачники [1—12], которые использовались нами при составлении настоящего сборника задач. Особенно большое влияние оказали задачники [2] и [10], давно ставшие классическими.

Часть I
Аналитическая геометрия

Глава 1

Системы координат на плоскости и в пространстве

§ 1.1. Системы координат: первые задачи

В прямоугольной системе координат x, y на плоскости расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Аналогично в пространстве

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Уравнение окружности с центром $O(x_0, y_0)$ и радиусом r имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В общем виде прямая на плоскости задается уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. В частности, прямая, пересекающая оси Ox и Oy в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$ соответственно $(a, b \neq 0)$, задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(уравнение прямой в отрезках).

Вектор, идущий из начала координат в данную точку M, называется *радиус-вектором* точки M.

Восемь частей, на которые координатные плоскости разрезают пространство, называются *октантами*. Они нумеруются в зависимости от знаков координат x, y, z следующим образом:

Координата	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

1. В прямоугольной системе координат x, y на плоскости дана точка $M(x, y)$. Найти точку, симметричную точке M относительно:

1) начала координат; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат;

4) биссектрисы первого и третьего координатных углов;

5) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

2. В прямоугольной системе координат x, y, z в пространстве дана точка $M(x, y, z)$. Найти точку, симметричную точке M относительно:

1) начала координат; 2) оси Ox; 3) плоскости Oxy;

4) биссекторной плоскости координатных плоскостей Oxy и Oyz, проходящей через первый октант.

3. Даны две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2, расстояние между которыми равно d, и три точки A, B и C. Точки A и B симметричны относительно прямой ℓ_1, а точки B и C — относительно ℓ_2. Найти расстояние между точками A и C.

4. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\mathbf{r}_4$ четвертой вершины.

5. Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ трех последовательных вершин трапеции $ABCD$ и отношение оснований

$$|AD| : |BC| = k.$$

Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_D$ четвертой вершины.

6. Говорят, что точка C *делит* отрезок AB *в отношении* λ, если имеет место равенство

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\, \overrightarrow{CB}.$$

Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ точек A и B, найти:

1) радиус-вектор $\mathbf{r}$ середины отрезка AB;

2) радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ.

7. В каких пределах находится число λ, равное отношению, в котором точка M делит отрезок AB, если M лежит:

1) внутри отрезка;

2) на его продолжении за точку A;

3) на его продолжении за точку B?

8. Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ вершин треугольника ABC. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения его медиан.

9. В пространстве даны две точки $A(1, 2, 3)$ и $B(7, 2, 5)$. На прямой AB найти точку M так, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был вдвое больше отрезка AB.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить радиус-вектор $\mathbf{r}_D$ точки D через радиус-векторы $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ точек B и C и длины сторон $b=|AC|$, $c=|AB|$.

11. Даны координаты $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(2, 6)$ трех последовательных вершин трапеции $ABCD$ и отношение оснований $|BC|:|AD|=2$. Найти координаты вершины D, точки M пересечения диагоналей и точки S пересечения продолжений боковых сторон.

12. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины E, F сторон AB и CD соответственно. Прямая ℓ, не проходящая через точку E, пересекает прямые AB, EF, CE и DE в точках P, Q, R и S соответственно. Точка R делит отрезок PQ в отношении λ. В каком отношении делит этот отрезок точка S?

13. Даны три точки A, B и C. Пусть $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_C$ — их радиус-векторы. Какие из следующих выражений задают вектор, не зависящий от выбора начала отсчета, а какие — радиус-вектор точки, не зависящей от выбора начала отсчета? Указать эти векторы и точки:

1) $3\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_C$;
2) $2\mathbf{r}_B+2\mathbf{r}_C-3\mathbf{r}_A$;
3) $(2\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)/4$;
4) $(2\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_C)/4$;
5) $2\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_C$;
6) $(2\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)/5$.

14. Пересекает ли какую-либо координатную ось прямая, проходящая через точки $A(6, -8, -1)$ и $B(-3, 4, 3)$?

15. Доказать, что отрезки прямых, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам; доказать также, что в той же точке пересекаются отрезки прямых, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, и делятся этой точкой в отношении $3:1$ (считая от вершин).

16. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до точек A и B равна $2a^2$, при условии $a>c$.

17. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний от которых до точек A и B равна $4a^2$.

18. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата расстояния до вершины прямого угла.

19. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до трех вершин равностороннего треугольника постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит середина одной из сторон треугольника.

20. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до его третьей вершины C.

21. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до трех вершин треугольника ABC равна a^2.

22. Доказать, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до нескольких фиксированных точек постоянна, является окружностью или одной точкой.

23. Даны две различные точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до точек A и B равно k.

24. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме их расстояний до двух других противоположных вершин.

25. Даны две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1 и r_2 соответственно. Найти геометрическое место точек, из которых к ним можно провести равные касательные.

26. Дана окружность с центром O и радиусом r и точка A, находящаяся на расстоянии a от точки O. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к данной окружности, равны отрезкам, соединяющим эти точки с точкой A.

27. Даны две окружности $x^2+y^2-6x-16=0$, $x^2+y^2+8x-2=0$. Найти геометрическое место точек, из которых к этим окружностям можно провести равные касательные.

28. Даны две окружности $x^2+y^2-6x-27=0$, $x^2+y^2+2x-8=0$. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к большей окружности, вдвое длиннее касательных к меньшей окружности.

29. Найти геометрическое место точек, квадрат расстояния от которых до точки пересечения двух данных взаимно перпендикулярных прямых в $5/2$ раз больше произведения их расстояний до этих прямых.

30. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до осей координат постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит точка $(2, -1)$.

31. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до прямых, содержащих две противоположные стороны квадрата, равно произведению расстояний до прямых, содержащих две другие его стороны.

32. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных параллельных прямых вдвое больше расстояния до третьей данной прямой, перпендикулярной к первым двум.

33. Дан прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, причем $a > b$. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до прямых, содержащих две противоположные стороны прямоугольника, равна сумме расстояний до прямых, содержащих две другие противоположные стороны.

§ 1.2. Полярные, сферические и цилиндрические системы координат

Прямоугольные координаты x, y точки на плоскости связаны с ее *полярными координатами* ρ, φ формулами

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi$$

при стандартном выборе полярных координат: полюс находится в начале координат, полярная ось направлена вдоль оси Ox, а угол φ отсчитывается против часовой стрелки (при традиционном расположении осей Ox и Oy). Эти формулы работают и в случае *обобщенных полярных координат*, в которых разрешаются отрицательные значения ρ. При этом точка с координатами (ρ, φ) может быть задана также как $(-\rho, \varphi + \pi)$.

В пространстве прямоугольные координаты x, y, z точки вычисляются по ее *сферическим координатам* ρ, φ, θ (при стандартном выборе сферической системы координат) по формулам:

$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad z = \rho \sin\theta.$$

В пространстве используют также *цилиндрические координаты* ρ, φ, h, которые при их стандартном выборе связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = h.$$

34. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, длина стороны которого равна 1. Приняв за полюс вершину A, за положительное направление полярной оси направление вектора $\overrightarrow{AB}$, а за положительное направление отсчета углов — направление кратчайшего поворота от $\overrightarrow{AB}$ к $\overrightarrow{AC}$, найти полярные координаты вершин шестиугольника в этой системе.

35. Вычислить расстояние между двумя точками, заданными своими полярными координатами:

1) $A\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$ и $B\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$;

3) $E\left(3, \frac{11\pi}{18}\right)$ и $F\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$.

2) $C\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$ и $D\left(6, \frac{6\pi}{5}\right)$;

36. Даны полярные координаты точек $A\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка AB.

37. Дана точка $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ относительно полярной системы координат. Найти:

1) точку B, симметричную точке A относительно полюса;

2) точку C, симметричную точке A относительно полярной оси.

38. В полярной системе координат найти точку, симметричную точке (ρ_0, φ_0) относительно прямой, содержащей луч $\varphi = \varphi_1$.

39. Относительно полярной системы координат даны точки $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $D(5, \pi)$, $E(5, 0)$. Какие координаты будут иметь эти точки, если повернуть полярную ось вокруг полюса в положительном направлении на угол $3\pi/4$?

40. Вычислить площадь S треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$, $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$.

41. Относительно полярной системы координат даны точки $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$. Найти координаты этих точек в соответствующей прямоугольной системе координат.

42. Зная прямоугольные координаты точек $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(5, 0)$, $D(-8, -6)$, найти их координаты в полярной системе координат, соответствующей данной прямоугольной.

43. Зная полярные координаты точки: $\rho = 10$, $\varphi = \pi/6$, найти ее прямоугольные координаты, если полюс полярной системы координат находится в точке $(2, 3)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

44. Полюс полярной системы координат находится в точке $(3, 5)$, а положительное направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси Oy. Найти в этой системе полярные координаты точек $M_1(9, -1)$ и $M_2(5, 5 - 2\sqrt{3})$.

45. Написать выражение прямоугольных координат через полярные, если полюс полярной системы находится в точке (x_0, y_0), а ее ось направлена под углом φ_0 к оси Ox.

46. С помощью перехода к полярной системе координат доказать, что при повороте в положительном направлении на угол φ

вектор с координатами (x, y) переходит в вектор с координатами $(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi)$.

47. Одна из вершин правильного треугольника находится в точке $(0, 0)$, а центр — в точке $(2, 4)$. Найти координаты остальных вершин.

48. Даны две противоположные вершины квадрата $(1, 1)$ и $(3, 5)$. Найти две другие вершины.

49. Даны координаты двух соседних вершин квадрата $ABCD$: $A(1, -1)$ и $B(3, 1)$. Найти координаты остальных вершин.

50. Найти уравнение прямой, полученной из прямой $x+3y=2$ поворотом в положительном направлении на угол $\pi/4$ вокруг точки пересечения с осью абсцисс.

51. Вершины A и B треугольника ABC имеют координаты $(0, 0)$ и $(28, 21)$ соответственно. Найти координаты вершины C, зная углы: $\angle A = \frac{\pi}{4}$ и $\angle B = \arccos\frac{4}{5}$.

52. Вершина A равностороннего треугольника ABC находится в точке $(0, 1)$. Найти вершины B и C, если известно, что они лежат на прямых $y=3$ и $y=4$ соответственно.

53. Доказать, что в полярной системе координат уравнение

$$\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = a$$

при любых φ_0, a задает прямую. Каков геометрический смысл величин φ_0, a?

54. В полярной системе координат прямая задана уравнением

$$\rho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

Найти уравнение этой прямой в прямоугольных координатах. Найти полярные координаты точки, симметричной полюсу относительно этой прямой.

55. Составить уравнение прямой AB в полярной системе координат, если точки A и B имеют полярные координаты:

1) $A\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $A\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$.

56. Центр равностороннего треугольника находится в начале координат, а одна из его сторон задана в полярной системе координат уравнением $\rho = a/\cos\varphi$. Найти уравнения остальных сторон треугольника.

57. В полярных координатах написать уравнение окружности радиусом r_0 с центром в точке (ρ_0, φ_0).

58. Найти сферические координаты точек по их прямоугольным координатам:

$$A(-8, -4, 1),\ B(-2, -2, -1),\ C(0, -4, 3),\ D(1, -1, -1),\ E(0, 1, 0).$$

59. Найти сферические координаты точки M, зная, что луч OM образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\pi/4$ и $\pi/3$, и что координата z точки M равна -1.

60. Найти прямоугольные координаты точки, лежащей на сфере радиусом 1, зная ее долготу $\varphi = 330°$ и широту $\theta = 45°$.

61. Найти длину меньшей из двух дуг большого круга, соединяющих две точки A и B, лежащие на сфере радиусом ρ, зная долготу и широту этих точек: $A(\varphi_1, \theta_1)$, $B(\varphi_2, \theta_2)$.

62. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A(3, -4, 5)$, $B(1, -1, -1)$, $C(-6, 0, 8)$.

63. Найти цилиндрические координаты точки M, зная, что луч OM составляет с осями координат Ox и Oy углы $\pi/3$, $\pi/3$, его угол с осью Oz острый, а длина отрезка OM равна 1. Найти угол между лучом OM и осью Oz.

64. Найти угол α вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, зная цилиндрические координаты ρ, φ, z точки M.

§ 1.3. Элементы векторной алгебры и аффинные системы координат

Базисом на плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Базис в пространстве — это произвольная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. На прямой базис образует произвольный ненулевой вектор.

Репер — это пара, состоящая из некоторой точки и упорядоченного базиса. С каждым репером $O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (где $k = 1, 2, 3$ в случае прямой, плоскости и пространства соответственно) связывается *аффинная система координат*, в которой координатами произвольной точки M являются такие числа $x_1, \ldots, x_k$, что

$$\overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k.$$

65. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

66. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})/2$. Вывести отсюда обратную теорему о средней линии трапеции.

67. Векторы $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

68. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK}=\mathbf{k}$ и $\overrightarrow{AL}=\mathbf{l}$, выразить через векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

69. Векторы $\overrightarrow{AB}=\mathbf{p}$ и $\overrightarrow{AF}=\mathbf{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

70. В треугольнике найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна $\mathbf{0}$.

71. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB. Вывести отсюда теорему о биссектрисе.

72. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB}=\mathbf{p}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{q}$, $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{r}$ построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ векторы, совпадающие с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

73. В тетраэдре $ABCD$ даны векторы ребер, выходящих из вершины A: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$. Выразить через них векторы остальных ребер тетраэдра, медианы DM грани BCD и вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q — точка пересечения медиан грани BCD.

74. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, где M, P и R — середины ребер OA, OB и OC, а N, Q и S — середины соответствующих противоположных ребер.

75. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$. Известны векторы $\overrightarrow{AB}=\mathbf{m}$ и $\overrightarrow{CD}=\mathbf{p}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

76. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна нулю.

77. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

78. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ и $\mathbf{r}_{A'}$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиус-векторы четырех остальных его вершин.

79. Радиус-векторы $\overrightarrow{OA}=\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{r}_2$ и $\overrightarrow{OC}=\mathbf{r}_3$ служат ребрами параллелепипеда. Найти радиус-вектор точки пересечения диагонали параллелепипеда, выходящей из вершины O, с плоскостью, проходящей через вершины A, B и C.

80. Даны три вектора $\mathbf{a}=(5,7,2)$, $\mathbf{b}=(3,0,4)$, $\mathbf{c}=(-6,1,-1)$. Найти векторы:

1) $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$; 2) $5\mathbf{a}+6\mathbf{b}+4\mathbf{c}$.

81. Представить вектор $\mathbf{d}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в каждом из следующих случаев:

1) $\mathbf{a}=(2,3,1)$, $\mathbf{b}=(5,7,0)$, $\mathbf{c}=(3,-2,4)$, $\mathbf{d}=(4,12,-3)$;
2) $\mathbf{a}=(5,-2,0)$, $\mathbf{b}=(0,-3,4)$, $\mathbf{c}=(-6,0,1)$, $\mathbf{d}=(25,-22,16)$;
3) $\mathbf{a}=(3,5,6)$, $\mathbf{b}=(2,-7,1)$, $\mathbf{c}=(12,0,6)$, $\mathbf{d}=(0,20,18)$.

82. Установить, в каких из нижеследующих случаев тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ будут линейно зависимы, и в том случае, когда это возможно, представить вектор $\mathbf{c}$ как линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

1) $\mathbf{a}=(5,2,1)$, $\mathbf{b}=(-1,4,2)$, $\mathbf{c}=(-1,-1,6)$;
2) $\mathbf{a}=(6,4,2)$, $\mathbf{b}=(-9,6,3)$, $\mathbf{c}=(-3,6,3)$;
3) $\mathbf{a}=(6,-18,12)$, $\mathbf{b}=(-8,24,-16)$, $\mathbf{c}=(8,7,3)$.

83. Показать, что каковы бы ни были три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и три числа λ, μ, ν, векторы $\lambda\mathbf{a}-\mu\mathbf{b}$, $\nu\mathbf{b}-\lambda\mathbf{c}$, $\mu\mathbf{c}-\nu\mathbf{a}$ компланарны.

84. Найти проекцию на плоскость Oyz вектора $(1,3,5)$ параллельно вектору $(4,-1,3)$.

85. Найти проекцию вектора $(7,5,-3)$ на плоскость, определяемую векторами $(1,1,1)$ и $(2,-1,1)$, параллельно вектору $(2,-2,1)$.

86. Даны четыре вектора

$$\mathbf{a}=(1,5,3),\quad \mathbf{b}=(6,-4,-2),\quad \mathbf{c}=(0,-5,7),\quad \mathbf{d}=(-20,27,-35).$$

Подобрать числа α, β и γ так, чтобы векторы $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

87. Найти координаты вершин параллелограмма $ABCD$ в аффинной системе координат, начало которой находится в центре O этого параллелограмма, а базисными являются векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BO}$.

88. Найти аффинные координаты вершин правильного шестиугольника $ABCDEF$, принимая за начало отсчета точку A, а за базис — пару векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$.

89. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно k. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы — векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения диагоналей и точки S пересечения продолжений боковых сторон.

90. Найти координаты вершин тетраэдра $OABC$ в системе координат с началом в вершине O, базисными векторами которой являются медианы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ граней BOC, COA, AOB.

91. Найти координаты вершин тетраэдра $ABCD$, принимая точку пересечения P грани BCD за начало отсчета, а векторы BQ, CR, DS — за базисные векторы, где Q, R и S — точки пересечения медиан граней ACD, ABD и ABC соответственно.

92. Найти координаты центра тяжести однородного стержня AOB, согнутого под прямым углом, если длины $|OA| = a$ и $|OB| = b$. Принять за начало координат точку O, а за единичные векторы осей Ox и Oy — векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно.

93. Найти центр тяжести проволочного треугольника.

§ 1.4. Скалярное произведение

В прямоугольной системе координат на плоскости скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Аналогичная формула имеет место и для векторов $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Скалярное произведение на плоскости и в пространстве обладает следующими свойствами:

1) билинейность: для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и любого числа λ выполнены равенства

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}),$$
$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

2) симметричность: для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет место равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a});$$

3) положительная определенность: для любого ненулевого вектора $\mathbf{a}$ выполнено неравенство $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$.

Во всех задачах этого параграфа, в которых встречаются координаты, система координат предполагается прямоугольной.

94. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в каждом из следующих случаев:

1) $|\mathbf{a}|=8$, $|\mathbf{b}|=5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=\pi/3$; 4) $|\mathbf{a}|=3$, $\mathbf{b}=2\mathbf{a}$;
2) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=3\pi/4$; 5) $|\mathbf{a}|=3$, $\mathbf{b}=-\mathbf{a}/3$.
3) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$;

95. В треугольнике ABC даны длины сторон $|BC|=5$, $|CA|=6$, $|AB|=7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

96. Используя лишь свойства билинейности и симметричности скалярного произведения, найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

97. Доказать, что векторы $\mathbf{p}=\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c})-\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны друг другу.

98. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, если известно, что векторы $\mathbf{p}=\mathbf{s}+2\mathbf{t}$ и $\mathbf{q}=5\mathbf{s}-4\mathbf{t}$ взаимно перпендикулярны?

99. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны 1. Полагая $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$, вычислить значение выражения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{b}, \mathbf{c})+(\mathbf{c}, \mathbf{a})$ с помощью свойств скалярного произведения.

100. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислить $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

101. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$.

102. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее). Показать, что:

1) скалярное произведение векторов, идущих от точки M к двум противоположным вершинам прямоугольника, равно скалярному произведению векторов, идущих от той же точки к двум другим вершинам, т. е. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})=(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$;

2) сумма скалярных квадратов векторов одной пары равна сумме скалярных квадратов другой пары, т. е.

$$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2.$$

103. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{DB}=\lambda$. Выразить длину отрезка CD через длины сторон треугольника и число λ.

104. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0.$$

105. Доказать, что в правильном тетраэдре отрезок, соединяющий середины противоположных ребер, является их общим перпендикуляром.

106. Доказать, что если в тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно CD, а AC перпендикулярно BD, то ребра AD и BC также перпендикулярны.

107. Вычислить длину диагонали OD параллелепипеда, зная длины $a = |OA|$, $b = |OB|$, $c = |OC|$ трех ребер, выходящих из той же вершины, и плоские углы $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle AOB$ между ними.

108. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами, в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = (3, 5, 7)$, $\mathbf{b} = (-2, 6, 1)$;   3) $\mathbf{a} = (2, 5, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -2, 4)$.

2) $\mathbf{a} = (3, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -2, 4)$;

109. Вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

1) $A(2, 3)$, $B(3, -1)$, $C(-1, 4)$;

2) $A(1, -1, 3)$, $B(3, 2, 0)$, $C(-1, 4, 1)$.

110. Определить угол α между двумя векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданными своими координатами, в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = (8, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$;   2) $\mathbf{a} = (2, 5, 4)$, $\mathbf{b} = (6, 0, -3)$.

111. Используя лишь свойства билинейности и симметричности, доказать, что ортогональная проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$ равна $\dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})} \cdot \mathbf{b}$.

112. Найти единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\mathbf{a} = (-8, 4, 1)$.

113. Вычислить ортогональную проекцию вектора $(1, 5, -3)$ на направление вектора $(1, -2, 1)$.

114. Найти алгебраическую величину проекции вектора $(8, 4, 1)$ на ось, параллельную вектору $(-2, 2, -1)$.

115. Из одной точки проведены вектор $\mathbf{a} = (-3, 0, 4)$ и вектор $\mathbf{b} = (5, -2, -14)$. Найти единичный вектор, который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

116. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, 2, -1)$, $B(2, -1, 3)$, $C(-4, 7, 5)$. Найти вектор, направленный по биссектрисе его внутреннего угла B.

117. Даны два вектора $\mathbf{a}=(8, 4, 1)$, $\mathbf{b}=(2, -2, 1)$. Найти вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине, компланарный с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ острый угол.

118. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

119. Найти координаты вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам $(2, 4, -3)$ и $(-1, 4, 6)$, образует с осью Oy тупой угол и его длина равна 13.

120. Даны три вектора $\mathbf{a}=(-3, 2, 0)$, $\mathbf{b}=(1, 1, -1)$, $\mathbf{c}=(5, 11, -1)$. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{c}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

121. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{c}=(0, 2, 1)$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}=(1, 1, 1)$ и $\mathbf{b}=(2, -1, 2)$, и вычислить угол между вектором $\mathbf{c}$ и его проекцией.

§ 1.5. Ориентация, векторное и смешанное произведения

Два базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ на плоскости называются *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы (c_{ij}), определяемой из соотношений

$$\mathbf{e}_1' = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2' = c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2,$$

положителен. Если же этот определитель отрицателен, то базисы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ называются *противоположно ориентированными*.

Аналогично, в пространстве два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ одинаково (противоположно) ориентированы, если определитель матрицы (c_{ij}), определяемой из соотношений

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + c_{31}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_2' &= c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + c_{32}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_3' &= c_{13}\mathbf{e}_1 + c_{23}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

положителен (соответственно, отрицателен).

Выбор *ориентации* на плоскости или в пространстве означает, что базисы (и связанные с ними аффинные системы координат) будут называться *положительно* или *отрицательно ориентированными* в зависимости от того, имеют они одинаковую или противоположную ориентацию с некоторым фиксированным базисом.

Если на плоскости фиксирована ориентация, то *ориентированная площадь* $S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ параллелограмма, натянутого на векторы

$\mathbf{a}(x_1, y_1)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2)$, заданные в прямоугольной положительно ориентированной системе координат, вычисляется по формуле

$$S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Ориентированная площадь совпадает с обычной площадью по абсолютной величине и обладает свойствами:

1) билинейность;

2) антисимметричность:

$$S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -S_{\text{or}}(\mathbf{b}, \mathbf{a});$$

3) ориентированная площадь $S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ положительна (отрицательна), если пара векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ положительно (соответственно, отрицательно) ориентирована, и равна нулю, если данные векторы коллинеарны. Ориентированная площадь ориентированного треугольника ABC по определению равна

$$S_{\text{or}}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} S_{\text{or}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Ориентированный угол φ *от* вектора $\mathbf{a}$ *до* вектора $\mathbf{b}$ (или сокращенно *угол от* вектора $\mathbf{a}$ *до* вектора $\mathbf{b}$) на ориентированной плоскости находится из равенств

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}, \quad \sin\varphi = \frac{S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Он определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и обладает свойством антисимметричности и аддитивности: сумма углов от $\mathbf{a}$ до $\mathbf{b}$ и от $\mathbf{b}$ до $\mathbf{c}$ равна углу от $\mathbf{a}$ до $\mathbf{c}$.

Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ двух векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в пространстве, заданных относительно прямоугольной положительно ориентированной системы координат, вычисляется по формуле

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ортогонально обоим векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, имеет длину, равную площади $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, и направлено так, чтобы в случае $S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \neq 0$ упорядоченная тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ была положительно ориентирована. Оно также обладает такими свойствами, как

1) билинейность;

2) антисимметричность;

3) векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$ трех векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$ ориентированного пространства, заданных относительно положительно ориентированной прямоугольной системы координат, вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Оно равно *ориентированному объему* параллелепипеда (т. е. объему со знаком, зависящим от ориентации тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$), натянутого на векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, и обладает следующими свойствами:

1) трилинейность;

2) кососимметричность:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c});$$

3) смешанное произведение положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда данная тройка векторов положительно (соответственно, отрицательно) ориентирована, и равно нулю, когда они компланарны.

Во всех задачах этого параграфа, где встречаются координаты, система координат предполагается прямоугольной и положительно ориентированной.

122. На плоскости дан базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Принимая его ориентацию за положительную, определить ориентацию следующих базисов:

1) $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$; 2) $-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; 3) $\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1$.

123. На плоскости даны четыре ненулевых вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Известно, что углы $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{c}})$ и $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{d}})$ прямые, а $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{d}})$ и $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}})$ — острые. Одинаковую или противоположную ориентацию имеют пары $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}, \mathbf{d}$?

124. Используя лишь свойства билинейности и антисимметричности ориентированной площади, доказать, что отношение ориентированных площадей $S_{\text{or}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ равно

$$\frac{S_{\text{or}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{S_{\text{or}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$\mathbf{u} = c_{11}\mathbf{a} + c_{21}\mathbf{b}, \quad \mathbf{v} = c_{12}\mathbf{a} + c_{22}\mathbf{b}.$$

В каких аффинных системах координат можно пользоваться формулой (1.1)?

125. Дан вектор $\mathbf{a} = (-5, 2)$. Найти вектор $\mathbf{b}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и направленный так, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют пару той же ориентации, что и единичные векторы осей Ox и Oy.

126. Доказать, что

$$S_{\text{or}}(\triangle ABC) = S_{\text{or}}(\triangle BCA) = -S_{\text{or}}(\triangle BAC).$$

127. С помощью свойств ориентированной площади доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, равна $3/4$ площади треугольника ABC.

128. Даны три точки на плоскости: $A(-2, 3)$, $B(2, 1)$, $C(5, -3)$. Найти площадь S треугольника ABC и длину h высоты, опущенной на сторону BC.

129. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q, R в отношениях

$$\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = \lambda, \quad \overrightarrow{CQ} : \overrightarrow{QA} = \mu, \quad \overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = \nu.$$

Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC.

130. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q, R в отношениях

$$\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = \lambda, \quad \overrightarrow{CQ} : \overrightarrow{QA} = \mu, \quad \overrightarrow{AR} : \overrightarrow{RB} = \nu.$$

Пусть A', B', C' — точки пересечения пар прямых BQ и CR, CR и AP, AP и BQ. Найти отношение площади ориентированного треугольника $A'B'C'$ к площади ориентированного треугольника ABC. Чему равно это отношение в случае $\lambda = \mu = \nu = 2$?

131. Найти угол от вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$, если:

1) $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$; 3) $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$.
2) $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$;

132. В пространстве дан базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Принимая его ориентацию за положительную, определить ориентацию следующих базисов:

1) $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$; 2) $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$; 3) $\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

133. В пространстве даны два базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$. Известно, что угол $(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j})$ острый, если $i = j$, и прямой в противном случае.

Выяснить, имеют ли данные базисы одинаковую или противоположную ориентацию.

134. В пространстве даны четыре вектора $\overrightarrow{OA}(1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB}(2, -1, 2)$, $\overrightarrow{OC}(0, 2, 1)$ и $\overrightarrow{OD}(2, -2, 1)$. Лежит ли луч OD внутри или вне трехгранного угла $OABC$?

135. Найти вектор $\overrightarrow{OM}$, образующий равные острые углы с лучами $\overrightarrow{OA}(1, 2, 2)$, $\overrightarrow{OB}(0, 3, 4)$ и $\overrightarrow{OC}(-2, -1, 2)$. Лежит ли луч $\overrightarrow{OM}$ внутри или вне трехгранного угла $OABC$?

136. Зная векторное произведение $\mathbf{c}$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, найти:

1) $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]$; 2) $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}]$; 3) $\left[\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{2}\right]$.

137. Показать, что если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ равносильны выполнению соотношения $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

138. Доказать, что если

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{0},$$

то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

139. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

140. Показать, что если векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

141. В ориентированном пространстве даны два взаимно перпендикулярных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, получающийся из вектора $\mathbf{b}$ поворотом на $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{a}$ так, чтобы ориентация тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ была положительной.

142. В ориентированном пространстве даны два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, полученный из $\mathbf{b}$ поворотом на угол φ в положительном направлении вокруг вектора $\mathbf{a}$, т. е. так, чтобы тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ была положительной при $0 < \varphi < \pi$ и отрицательной при $\pi < \varphi < 2\pi$.

143. Найти векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в каждом из нижеследующих случаев:

1) $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (5, 6, 4)$; 3) $\mathbf{a} = (-2, 6, -4)$, $\mathbf{b}(3, -9, 6)$.
2) $\mathbf{a} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (4, 0, 6)$;

144. Найти векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$:

1) $A(1, -1, 3)$, $B(3, 2, 0)$, $C(-1, 4, 1)$;
2) $A(3, 2, -1)$, $B(2, -1, 3)$, $C(-1, 3, 2)$.

145. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=(8,4,1)$, $\mathbf{b}=(2,-2,1)$.

146. Даны точки в пространстве: $A(2,-1,3)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,3,2)$. Найти площадь S треугольника ABC и длину h высоты, опущенной на сторону AB.

147. Даны векторы $\mathbf{a}=(3,1,2)$, $\mathbf{b}=(2,7,4)$, $\mathbf{c}=(1,2,1)$. Найти:
1) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$; 2) $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]$; 3) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$.

148. Даны два вектора $\mathbf{a}=(11,10,2)$ и $\mathbf{b}=(4,0,3)$. Найти вектор $\mathbf{c}$ длины 1, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ была положительной.

149. Даны два вектора $\mathbf{a}=(1,1,1)$ и $\mathbf{b}=(1,0,0)$. Найти единичный вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол $\pi/3$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ была положительной.

150. Доказать, что площадь выпуклого плоского четырехугольника $ABCD$ в пространстве равна половине длины векторного произведения $[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}]$.

151. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, параллельные ребрам AC и BD. Найти длину ребра тетраэдра, если площади сечений равны S_1 и S_2, а расстояние между секущими плоскостями равно d.

152. Доказать, что для любых двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеет место равенство $([\mathbf{a},\mathbf{b}])^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a},\mathbf{b})^2$.

153. Доказать, что для произвольных вектора $\mathbf{a}$ и перпендикулярных векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеет место равенство $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})$.

154. Доказать, что для произвольных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в пространстве имеют место равенства:
1) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$; 2) $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c})$.

155. Доказать, что для произвольных трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ выполняется *тождество Якоби*

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]+[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{a}]]+[\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]]=0.$$

156. Для любых трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ доказать равенство

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{a},\mathbf{c}]]=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}.$$

157. Доказать, что для любых четырех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ справедливы равенства

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]]=\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})-\mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}).$$

158. Доказать тождества:

1) $\big([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{b},\mathbf{c}],[\mathbf{c},\mathbf{a}]\big)=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$;

2) $\big([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]\big)=\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\mathbf{d})\\ (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{d})\end{vmatrix}$;

3) $\big([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]\big)+\big([\mathbf{a},\mathbf{c}],[\mathbf{d},\mathbf{b}]\big)+\big([\mathbf{a},\mathbf{d}],[\mathbf{b},\mathbf{c}]\big)=0$;

4) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x})\\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y})\end{vmatrix}$;

5) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x})\\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y})\\ (\mathbf{a},\mathbf{z}) & (\mathbf{b},\mathbf{z}) & (\mathbf{c},\mathbf{z})\end{vmatrix}$;

6) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2=\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{b},\mathbf{a}) & (\mathbf{c},\mathbf{a})\\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) & (\mathbf{b},\mathbf{b}) & (\mathbf{c},\mathbf{b})\\ (\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{c},\mathbf{c})\end{vmatrix}$.

159. Доказать, что все четыре грани произвольного тетраэдра равновелики тогда и только тогда, когда они конгруэнтны.

160. Даны вершины тетраэдра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$. Найти длину h его высоты, опущенной из вершины D.

161. В треугольной пирамиде ребра, выходящие из вершины S, имеют длину 1, а плоские углы граней при вершине S равны $\pi/4$, $\pi/4$ и $\pi/3$. Найти площадь основания пирамиды.

162. Доказать, что равенство $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]=[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из двух условий:

1) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{c})=0$; 2) векторы **a** и **c** коллинеарны.

163. 1) В плоскости векторов **f** и **e** найти векторы, ортогональные к **e**.

2) Найти разложение вектора **f** по направлению вектора **e** и направлению, перпендикулярному к вектору **e** (в плоскости векторов **f** и **e**).

164. Даны три некомпланарных вектора **a**, **b**, **c**. Найти вектор **x**, удовлетворяющий системе уравнений

1) $(\mathbf{a},\mathbf{x})=\alpha$, $(\mathbf{b},\mathbf{x})=\beta$, $(\mathbf{c},\mathbf{x})=\gamma$;

2) $(\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b})=\gamma$, $(\mathbf{x},\mathbf{b},\mathbf{c})=\alpha$, $(\mathbf{x},\mathbf{c},\mathbf{a})=\beta$.

165. Даны радиус-векторы $\overrightarrow{OA}=\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{r}_3$ точек A, B, C. Известно, что векторы $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ неколлинеарны. Из точки A опущен перпендикуляр AM на плоскость OBC. Найти радиус-вектор точки M.

166. Две тройки некомпланарных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ называются взаимными, если векторы этих троек связаны соотношениями

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Для данной тройки некомпланарных векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ найти векторы $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ ее взаимной тройки.

167. Даны плоские углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ трехгранного угла $OABC$. Вычислить косинусы его внутренних двугранных углов A, B, C, противолежащих граням BOC, COA, AOB.

Даны внутренние двугранные углы A, B, C. Вычислить косинусы его плоских углов α, β, γ.

Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

(теорема синусов в сферической геометрии).

168. Вычислить объем параллелепипеда, зная длины a, b, c трех его ребер, выходящих из одной вершины, и α, β, γ — углы между ними.

169. Доказать формулы сферической геометрии:

$$\sin\alpha\sin\gamma\cos B = \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma,$$
$$\sin A\sin C\cos\beta = \cos B + \cos A\cos C,$$

где α, β, γ — длины сторон треугольника на единичной сфере; A, B, C — соответствующие противолежащие углы.

170. Вычислить объем треугольной пирамиды с боковыми ребрами a, b, c и двугранными углами α, β, γ при этих ребрах.

§ 1.6. Скалярное, векторное и смешанное произведения в аффинной системе координат

Метрическими коэффициентами базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на плоскости или базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве называют следующие скалярные произведения:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Матрицу $G = (g_{ij})$, составленную из этих произведений, называют *матрицей Грама*.

Если два вектора на плоскости заданы своими координатами $\mathbf{a} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{b} = (y_1, y_2)$ относительно произвольного базиса, то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} g_{ij} x_i y_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — метрические коэффициенты данного базиса.

Аналогично в пространстве

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

где векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют координаты (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) соответственно.

171. Выразить через метрические коэффициенты $g_{11} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)$, $g_{12} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $g_{22} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ длины базисных векторов, угол ω между ними и площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

172. Найти длину вектора $\mathbf{a} = (x, y)$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

173. Найти косинус угла φ между векторами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

174. Выразить через метрические коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

175. Зная матрицу Грама $G = (g_{ij})$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, найти объем V параллелепипеда, построенного на векторах (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3).

176. Вычислить объем призмы, построенной на векторах $(-1, 0, 2)$, $(1, 1, 3)$ и $(2, -1, 1)$, заданных относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, если известно, что $|\mathbf{e}_1| = 1$, $|\mathbf{e}_2| = 2$, $|\mathbf{e}_3| = 3$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = 2\pi/3$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = \pi/4$, $(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = 3\pi/4$.

177. Найти косинусы углов φ_1, φ_2, φ_3, образованных вектором $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$ с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega_{12}$, $(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = \omega_{23}$, $(\widehat{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1}) = \omega_{31}$.

178. Найти скалярное произведение векторов, один из которых задан своими координатами (x^1, x^2, x^3) в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а другой — координатами (y_1, y_2, y_3) в базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$, взаимном с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (см. задачу 166).

179. Зная матрицу Грама $G=(g_{ij})$ базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, найти метрические коэффициенты g^{ij} для взаимного базиса $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$.

180. Относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с метрическими коэффициентами g_{ij} дан вектор $\mathbf{x}=(x^1, x^2, x^3)$. Найти координаты (x_1, x_2, x_3) этого вектора в базисе, взаимном с данным.

181. Длины векторов базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны 1, а углы между ними равны $\pi/3$. Найти длины векторов взаимного базиса $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ и углы между ними.

182. Относительно положительно ориентированного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ даны координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a}=(x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{b}=(y^1, y^2, y^3)$. Найти координаты (z_1, z_2, z_3) векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$, взаимном с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

183. Даны метрические коэффициенты $g_{11}=2$, $g_{12}=g_{22}=1$ некоторого базиса на плоскости. В системе координат, связанной с этим базисом, даны уравнения двух прямых $x+y+1=0$ и $x-2y+3=0$. Найти угол между этими прямыми.

184. Относительно аффинной системы координат в пространстве даны две плоскости $x+y=0$ и $z=1$. Вычислить угол между ними, если известно, что базисные векторы данной системы имеют длину 1, а угол между любыми двумя из них равен $\pi/3$.

185. При каких условиях на числа $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{21}$ матрица

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

может быть матрицей Грама какого-либо базиса на плоскости?

Глава 2

Геометрические места точек, составление уравнений кривых на плоскости

Термин *кривая* (на плоскости) используется обычно в одном из следующих двух смыслов.

Кривая — это множество решений уравнения $F(x, y) = 0$, где F — некоторая функция на плоскости. При этом на функцию F всегда накладываются определенные ограничения (например, дифференцируемость, аналитичность и т. п.), в зависимости от которых говорят о различных классах кривых. Одним из важнейших классов кривых на плоскости являются *алгебраические* кривые, которые по определению задаются в аффинной системе координат некоторым многочленом $F(x, y)$ от двух переменных. Степень многочлена называется тогда *порядком* данной кривой. Частным случаем уравнения вида $F(x, y) = 0$ являются уравнения, разрешенные относительно одной переменной $y = f(x)$, поскольку такое уравнение можно переписать как $y - f(x) = 0$.

Параметризованная кривая — это отображение $M(t) = (x(t), y(t))$ из некоторого отрезка, интервала или полуинтервала I вещественной прямой на плоскость, т. е. каждой точке $t \in I$ сопоставляется некоторая точка $M(t)$ на плоскости. На это отображение также обычно накладываются ограничения, в зависимости от которых говорят о различных классах параметризованных кривых.

В ряде случаев множество точек $\{M(t);\ t \in I\}$, которое пробегает точка M при изменении параметра t, можно задать уравнением вида $F(x, y) = 0$, исключая из пары уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметр t.

§ 2.1. Эллипс, гипербола, парабола и их простейшие свойства

Эллипсом называется кривая на плоскости, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.1}$$

где $a \geqslant b > 0$ — длины *полуосей*. Точки с координатами $(\pm c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются *фокусами* данного эллипса; величина $e =$

$=c/a$ — *эксцентриситетом*; $p=b^2/a$ — *фокальным параметром*; прямая $y=0$ — фокальной осью, а прямые $x=\pm a^2/c$ — *директрисами*.

Гипербола — кривая, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.2}$$

где $a, b>0$ — действительная и мнимая полуоси. Фокусы, эксцентриситет, фокальный параметр, фокальная ось и директрисы определяются так же, как и для эллипса, с той лишь разницей, что $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Параболой называется кривая, задаваемая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy уравнением

$$y^2=2px, \tag{2.3}$$

где $p>0$ — *фокальный параметр*. Точка с координатами $(p/2, 0)$ называется *фокусом*, прямая $y=0$ — фокальной осью, а прямая, заданная уравнением $x=-p/2$, — *директрисой* данной параболы.

Эллипс, гипербола и парабола называются также *невырожденными линиями второго порядка*.

186. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

187. Вычислить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

188. Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

заключенного между ее центром и директрисой.

189. Доказать, что, если длины полуосей эллипса не совпадают, то прямоугольная система координат, в которой он записывается уравнением вида (2.1), определена однозначно с точностью до направления осей координат. Сформулировать и доказать аналогичные утверждения для гиперболы и параболы.

190 (Фокальное свойство эллипса). Даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$ при условии $a>c$.

191 (Фокальное свойство гиперболы). Даны две точки F_1 и F_2 на расстоянии $2c$ друг от друга. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до точек F_1 и F_2 равна $2a$, при условии $c>a$.

192. Найти геометрическое место точек — центров окружностей, касающихся двух фиксированных окружностей с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1 и r_2 соответственно, где $r_2 > r_1$. Рассмотреть следующие случаи:

1) одна из фиксированных окружностей лежит внутри другой;
2) окружности касаются внутренним образом;
3) окружности пересекаются в двух точках;
4) окружности касаются внешним образом;
5) окружности лежат по разные стороны от некоторой прямой.

193 (Директориальное свойство параболы). Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точки F и прямой d, отстоящей от точки F на расстоянии p.

194. Найти геометрическое место точек — центров окружностей, касающихся данных прямой ℓ и окружности радиусом r с центром O.

195 (Директориальное свойство эллипса и гиперболы). Даны точка F, прямая d и положительное число $e \neq 1$. Найти геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до точки F к расстоянию до прямой d равно e.

196. Найти геометрическое место точек, делящих в отношении $\lambda \neq 1$ хорды окружности $x^2 + y^2 = a^2$, параллельные оси Oy.

197. Дана окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Во что превратится эта окружность, если, не меняя абсцисс ее точек, уменьшить их ординаты в k раз?

198. Даны две точки: $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение которых равно: 1) b^2; 2) $-b^2$.

199 (Оптическое свойство эллипса). Доказать, что касательная к эллипсу в произвольной его точке делит пополам угол между одним фокальным радиусом и продолжением другого.

200 (Оптическое свойство гиперболы). Доказать, что касательная к гиперболе в произвольной ее точке делит пополам угол между фокальными радиусами.

201 (Оптическое свойство параболы). Доказать, что касательная к параболе в произвольной ее точке делит пополам угол между фокальным радиусом и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису.

202. Доказать, что гиперболы, имеющие общие фокусы с данным эллипсом, пересекают последний под прямым углом.

203. Определить наибольшее и наименьшее значения отношения $|\mathbf{r}_1|/|\mathbf{r}_2|$ для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b)$, где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — фокальные радиусы точки эллипса для левого и правого фокусов.

204. Найти геометрическое место точек, симметричных фокусу невырожденной линии второго порядка относительно касательных к этой линии.

205. Найти геометрическое место проекций фокуса линии второго порядка на всевозможные касательные к ней.

206. Пусть траектория $P_0P_1P_2P_3\ldots$ луча света внутри зеркального эллипса не проходит через фокусы F_1 и F_2. Доказать, что:

1) если отрезок P_0P_1 не пересекает отрезок F_1F_2, то и все следующие отрезки P_iP_{i+1} не пересекают F_1F_2 и касаются одного и того же эллипса с фокусами F_1, F_2;

2) если отрезок P_0P_1 пересекает отрезок F_1F_2, то и все следующие отрезки P_iP_{i+1} его пересекают и касаются одной и той же гиперболы с фокусами F_1 и F_2.

207 (Шары Данделена). Дан прямой круговой конус с углом α между осью конуса и его образующими. Плоскость Γ, не содержащая вершины конуса, составляет с осью конуса угол β, причем $\beta>\alpha$. Впишем в конус два шара, касающихся плоскости Γ в точках F_1 и F_2. Доказать, что линия пересечения плоскости Γ с конусом есть эллипс с фокусами в точках F_1 и F_2.

208 (Шары Данделена). Дан прямой круговой конус с углом α между осью конуса и его образующими. Плоскость Γ, не содержащая вершины конуса, составляет с осью конуса угол β, причем $\beta<\alpha$. Впишем в конус два шара, касающихся плоскости Γ в точках F_1 и F_2. Доказать, что линия пересечения плоскости Γ с конусом есть гипербола с фокусами в точках F_1 и F_2.

209. В условиях двух предыдущих задач показать, что две плоскости, проходящие через окружности, состоящие из точек касания шаров Данделена и конуса, пересекают плоскость Γ по директрисам соответствующего эллипса (гиперболы).

210. Дан прямой круговой конус. Плоскость Γ, не содержащая вершины конуса, составляет с осью конуса угол, равный углу между осью конуса и его образующими. Доказать, что линия пересечения плоскости Γ и конуса является параболой.

211. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Точка M делит его на две части, длины которых a и b. Найти линию, описываемую точкой M при движении отрезка.

212. Даны две окружности с центром в начале координат O и радиусами a и b, причем $a > b$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий первую окружность в точке A, а вторую — в точке B. Через точки A и B проводятся прямые, перпендикулярные соответственно осям Ox и Oy. Найти линию, описываемую точкой пересечения этих прямых при вращении луча.

213. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Составить его уравнение в полярной системе координат, принимая за полюс:

1) центр, 2) правый фокус, 3) левый фокус,

а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox.

214. Составить уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ в (обобщенной) полярной системе координат, принимая за полюс:

1) правый фокус, 2) левый фокус,

а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox.

215. Составить уравнение параболы $y^2 = 2x$ в полярной системе координат, принимая за полюс фокус параболы, а за направление полярной оси — положительное направление оси Ox.

216. Какие кривые задаются следующими уравнениями в обобщенной полярной системе координат:

1) $\rho = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{2}{3 - 3\cos\varphi}$; 3) $\rho = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$?

217. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения конического сечения с прямой, проходящей через фокус F. Доказать, что $\dfrac{1}{M_1F} + \dfrac{1}{M_2F} = \dfrac{2}{p}$, где p — фокальный параметр.

218. Через центр эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ проведены два взаимно перпендикулярных диаметра. Доказать, что сумма квадратов обратных величин их длин равна $\dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{4b^2}$.

219. Найти отношение, в котором центр эллипса или гиперболы делит отрезок ее фокальной оси, заключенный между фокусом и соответствующей директрисой.

§ 2.2. Составление уравнений кривых на плоскости

220. Дана окружность радиусом a с центром в точке O и ее диаметр BC. По окружности движется переменная точка A. На луче OA

откладывается отрезок OM, равный расстоянию от точки A до прямой BC. Найти кривую, описываемую точкой M.

221. Даны точка O и прямая ℓ, находящаяся от точки O на расстоянии a. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую ℓ в переменной точке P. На этом луче от точки O откладывается отрезок OM так, что $|OM| \cdot |OP| = b^2$. Найти линию, описываемую точкой M при вращении луча.

222. В окружности радиусом a проведен диаметр OA. Вокруг его конца O вращается луч, пересекающий окружность в переменной точке B. На продолжении хорды OB за точку B откладывается отрезок BM, равный AB. Найти линию, описываемую точкой M при вращении луча.

223. Две вершины треугольника закреплены в точках A и B, причем $|AB| = c$; третья вершина перемещается по окружности радиуса b с центром в точке A. Какую линию описывает при этом точка D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC?

224. Пусть Γ — некоторая алгебраическая кривая. Доказать, что любая прямая либо пересекает Γ лишь в конечном числе точек, либо целиком содержится в Γ.

225. Доказать, что кривая $y = \sin x$ не является алгебраической.

226 (Спираль Архимеда). Вокруг точки O вращается луч с постоянной угловой скоростью ω. По нему движется точка M с постоянной скоростью v. Составить уравнение линии, описываемой точкой M в полярных координатах, если в начальный момент движения луч совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а точка M — с началом координат O. Сделать эскиз полученной кривой.

227. Доказать, что в предыдущей задаче спираль Архимеда касается вращающегося луча в начальный момент времени.

228. Доказать, что спираль Архимеда не является алгебраической кривой.

229 (Лемниската Бернулли). Даны две точки F_1 и F_2 на расстоянии $2c$ друг от друга. Найти уравнение геометрического места точек, произведение расстояний от которых до точек F_1 и F_2 равно c^2, принимая за начало координат середину отрезка F_1F_2, а за ось абсцисс — прямую F_1F_2. Перейти к соответствующей системе полярных координат. Сделать эскиз кривой.

230. Под каким углом лемниската Бернулли из предыдущей задачи пересекает ось Ox: 1) в начале координат; 2) в точках $(\pm\sqrt{2}c, 0)$?

231 (Овал Декарта). В полярной системе координат найти уравнение геометрического места точек, расстояния ρ_A и ρ_B от которых до двух постоянных точек A и B, удаленных друг от друга на расстояние c, удовлетворяют равенству $\rho_B = a\,\rho_A + b$, принимая A за полюс, а прямую AB — за полярную ось.

232. В прямоугольных треугольниках, образованных осями координат и пересекающими их прямыми, лежащих в первой и третьей четвертях и имеющих одну и ту же площадь $s > 0$, опускаются перпендикуляры из начала координат на гипотенузу. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров. Сделать эскиз.

233 (Циссоида Диоклеса). На окружности радиусом a взяты две диаметрально противоположные точки O и K, в точке K к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. На этом луче от точки O откладывается отрезок $|OM| = |AB|$. Написать уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, в полярных и прямоугольных координатах, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox — направление $\overrightarrow{OK}$. Сделать эскиз кривой.

234. В условиях предыдущей задачи доказать, что циссоида Диоклеса касается оси Ox, а прямая $x = 2a$ является ее асимптотой.

235 (Конхоида Никомеда). Даны точка O и прямая ℓ на расстоянии a от точки O. Вокруг точки O вращается луч. Пусть прямая, содержащая этот луч, пересекает прямую ℓ в переменной точке B. На прямой OB от точки B в направлении луча откладывается отрезок BM, $|BM| = b$. Найти уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, в обобщенных полярных и прямоугольных координатах, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox — луч $\overrightarrow{OA}$, где A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую ℓ. Сделать эскиз этой линии.

236 (Улитка Паскаля). На окружности взяты две диаметрально противоположные точки O и A, причем $|OA| = a$. Вокруг точки O вращается луч. Пусть B — переменная точка пересечения прямой, содержащей этот луч, с окружностью. На прямой OB от точки B в направлении луча откладывается отрезок BM длины b. Написать в обобщенных полярных и прямоугольных координатах уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, принимая за начало координат точку O и за положительное направление оси Ox — направление $\overrightarrow{OA}$.

237. Указать, под каким углом улитка Паскаля из предыдущей задачи пересекает ось Ox в начале координат 1) при $b<a$; 2) при $b=a$?

238. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные к данной окружности, является улиткой Паскаля.

239 (Кардиоида). Дана окружность радиусом a и на ней две диаметрально противоположные точки O и A. Вокруг точки O вращается луч. Пусть прямая, содержащая этот луч, пересекает окружность в переменной точке B. На этой прямой от точки B в направлении луча откладывается отрезок BM, равный диаметру окружности. Написать в обобщенных полярных и прямоугольных координатах уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox — луч OA.

240 (Строфоида). Дана точка O и прямая ℓ. Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую ℓ, причем $|OA|=a$. Вокруг точки O вращается луч, и на прямой, содержащей этот луч, от точки B ее пересечения с прямой ℓ откладываются отрезки $|BM_1|=|BM_2|=|AB|$. Написать уравнение линии, описываемой точками M_1 и M_2 при вращении луча, в обобщенных полярных и прямоугольных координатах, принимая за начало координат точку O, а за положительное направление оси Ox — луч OA.

241. Под каким углом строфоида из предыдущей задачи пересекает ось Ox 1) в точке O; 2) в точке A?

Доказать, что прямая $x=2a$ является ее асимптотой.

242. Отрезок постоянной длины $2a$ скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найти уравнение линии, описываемой при этом движении отрезка основанием перпендикуляра, опущенного из точки пересечения прямых на отрезок, в обобщенных полярных и прямоугольных координатах.

243 (Астроида). Дана окружность с центром O и радиусом a и две перпендикулярные прямые Ox и Oy. По окружности перемещается точка A, и из нее опускаются перпендикуляры: AB на Ox, AC на Oy и AM на BC. Написать параметрическое уравнение линии, описываемой точкой M при перемещении точки A по окружности, принимая за параметр угол t, образуемый лучом OA с осью Ox. Написать уравнение этой линии в декартовых координатах. Сделать эскиз.

244. Доказать, что астроида является алгебраической кривой и найти задающее ее алгебраическое уравнение в условиях предыдущей задачи.

245 (Верзьера Марии Аньези). На окружности диаметром a взяты две диаметрально противоположные точки O и K, и в точке K к окружности проведена касательная. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий окружность и касательную соответственно в точках A и B. Через точку A проведена прямая, параллельная касательной, а через точку B — прямая, параллельная диаметру OK. Написать параметрическое уравнение линии, описываемой точкой M пересечения этих прямых, принимая за начало координат точку O, за положительное направление оси Ox — направление $\overrightarrow{OK}$ и за параметр — угол φ, образуемый лучом OA с лучом OK. Написать полученное уравнение в декартовых координатах. Сделать эскиз линии.

246 (Циклоида). По оси Ox без скольжения катится окружность радиусом a. Составить параметрическое уравнение линии, описываемой той точкой M катящейся окружности, которая в начальный момент находилась в начале координат, принимая за параметр t угол от радиуса окружности CM, идущего в точку M, до радиуса CA, идущего в точку A касания.

247 (Эпициклоида). Круг радиусом r без скольжения катится по кругу радиусом R, оставаясь вне его. Найти параметрическое уравнение линии, описываемой точкой катящегося круга, принимая за начало координат центр неподвижного круга, а за параметр — угол t между положительным направлением оси абсцисс и радиусом неподвижного круга, идущим в точку касания обоих кругов. В начальном положении точка касания кругов лежит на оси абсцисс.

248 (Гипоциклоида). Круг радиусом r без скольжения катится по кругу радиусом R, оставаясь внутри него. Написать параметрическое уравнение линии, описываемой точкой катящегося круга. Выбор системы координат и обозначений такой же, как в предыдущей задаче.

249. Показать, что:

1) при $R=4r$ гипоциклоида обращается в астроиду;

2) при $R=2r$ гипоциклоида обращается в диаметр неподвижного круга;

3) при $R=r$ эпициклоида обращается в кардиоиду.

250. Дана окружность радиусом R. Доказать, что:

1) диаметрально противоположные точки окружности радиусом $2R/3$, катящейся изнутри по данной окружности, описывают одну и ту же кривую (кривую Штейнера);

2) если окружность радиусом $r = 3R/4$ катится внутри по данной окружности, три точки M_1, M_2 и M_3, расположенные в вершинах правильного треугольника, будут описывать одну и ту же кривую — астроиду.

251. Отрезок постоянной длины движется так, что один его конец скользит по окружности $x^2 + y^2 = r^2$, а другой — по оси Ox (шатунно-кривошипный механизм). Составить уравнение кривой, которую описывает точка отрезка, делящая его на части длины a и b.

252 (Эвольвента окружности). По окружности $x^2 + y^2 = r^2$ без скольжения катится прямая, начальное положение которой $x = r$. Составить параметрические уравнения траектории точки катящейся прямой, если в начальный момент точка имеет координаты $(r, 0)$, принимая за параметр угол от положительного направления оси Ox до радиус-вектора точки касания прямой, отсчитываемый против часовой стрелки.

253. Три вершины ромба лежат на сторонах AB, BC и CD данного квадрата соответственно. Где может лежать четвертая вершина?

254. Доказать, что следующие кривые являются кардиоидами:

1) геометрическое место точек, симметричных точке A, лежащей на данной окружности, относительно всевозможных касательных к этой окружности;

2) геометрическое место точек оснований перпендикуляров, опущенных из точки A, лежащей на данной окружности, на всевозможные касательные к этой окружности.

255. Дана окружность и на ней точка A. Доказать, что окружности, проходящие через точку A, центры которых лежат на данной окружности, заметают область, ограниченную некоторой кардиоидой.

256. Вершина O шарнирного параллелограмма $OPMQ$ закреплена, а стороны OP и OQ вращаются с одинаковой по абсолютной величине угловой скоростью в разные стороны. По какой линии движется вершина M?

257. Две прямые на плоскости вращаются в разные стороны с одинаковой по абсолютной величине угловой скоростью вокруг точек A и B, лежащих на них. По какой линии движется точка их пересечения?

258. На плоскости дан отрезок AB. Найти геометрическое место таких точек M, что $\angle MBA = 2\angle MAB$.

259. Является ли кривая $y = e^x$ алгебраической?

Глава 3

Прямые на плоскости

§ 3.1. Составление уравнения прямой по различным способам ее задания

Существуют следующие эквивалентные способы задавать при помощи уравнений прямую на плоскости с аффинными координатами (x, y).

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.1}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля. В случае прямоугольной системы координат вектор $\mathbf{n}$ с координатами (A, B) ортогонален прямой и называется *нормальным вектором* данной прямой.

Если в общем уравнении прямой все коэффициенты A, B, C отличны от нуля, то это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$. Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, поскольку задаваемая им прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные a и b.

Параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \tag{3.2}$$

где вектор (α, β), называемый *направляющим вектором* данной прямой, отличен от нуля. Направляющий вектор определен с точностью до умножения на ненулевое число.

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta},$$

которое имеет тот же смысл, что и рассмотренное выше параметрическое уравнение, причем одно из чисел α, β может быть нулевым.

Если прямая задана своим общим уравнением (3.1), то ее задание в параметрическом виде (3.2) получится, если в качестве (x_0, y_0) взять произвольное частное решение уравнения (3.1), а в качестве (α, β) — произвольное ненулевое решение однородного уравнения

$$A\alpha + B\beta = 0,$$

например $\alpha = B$, $\beta = -A$.

Зная параметрические уравнения (3.2) прямой, ее общее уравнение можно получить, исключив из этих уравнений t, т. е. умножив первое на β, второе — на $(-\alpha)$ и сложив:

$$\beta x - \alpha y = \beta x_0 - \alpha y_0.$$

Системы координат, встречающиеся в задачах этого параграфа, предполагаются произвольными аффинными, если не оговорено противное.

260. Написать общее уравнение прямой:

1) имеющей угловой коэффициент 4 и отсекающей на оси Ox отрезок, равный 5 (система координат прямоугольная);

2) проходящей через точку $(1, -2)$ параллельно оси Oy;

3) проходящей через точку $(-2, 3)$ параллельно вектору $(1, -2)$;

4) проходящей через две точки $(1, 2)$ и $(-3, 4)$;

5) отсекающей отрезок -2 на оси Ox и отрезок 7 на оси Oy;

6) проходящей через точку $(1, 2)$ и параллельной оси Ox;

7) проходящей через точку с координатами $(-1, 1)$ и параллельной прямой $3x + 2y - 3 = 0$;

8) проходящей через точку $(1, 3)$ и перпендикулярной прямой $x = 2 + t$, $y = 1 - 3t$.

261. Дано общее уравнение прямой $2x - 3y - 9 = 0$. Написать ее параметрическое уравнение. Какие отрезки отсекает эта прямая на осях координат? Найти ее угловой коэффициент (система координат прямоугольная).

262. Дано параметрическое уравнение прямой: $x = 1 - 3t$, $y = 2 + 2t$. Написать ее общее уравнение.

263. Составить общее и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

264. Дан треугольник ABC: $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, -5)$. Написать уравнение прямой, содержащей медиану, проведенную из вершины A этого треугольника.

265. Дан треугольник ABC: $A(4, 4)$, $B(-6, -1)$, $C(-2, -4)$. Написать уравнение прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла треугольника при вершине C. Система координат прямоугольная.

266. Через точку $(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, была равна 3. Система координат прямоугольная.

267. В треугольнике ABC углы A и B при его основании AB острые и боковые стороны BC и AC не равны между собой. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в треугольник так, что две вершины прямоугольника лежат на основании данного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах.

268. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырехугольника.

§ 3.2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Пучки прямых

Собственным пучком прямых называется множество прямых на плоскости, проходящих через одну точку. *Несобственным пучком* прямых называется множество прямых на плоскости, параллельных некоторой прямой.

Пучок можно задать, указав произвольные две прямые из него. Если $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — уравнения двух различных прямых, то уравнение любой другой прямой из задаваемого ими пучка разлагается в их линейную комбинацию, т. е.

$$Ax + By + C = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2)$$

для некоторых λ, μ.

Все системы координат, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются аффинными.

269. Даны две прямые $Ax + By + C = 0$ и $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые:

1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

270. Даны две прямые

$$x = x_1 + a_1t, \quad y = y_1 + b_1t; \quad x = x_2 + a_2t, \quad y = y_2 + b_2t.$$

Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые:

1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

271. В каждом из следующих случаев определить взаимное расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2. Если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения:

1) $\ell_1: 3x-y-2=0,$ $\ell_2: 6x-2y-2=0;$
2) $\ell_1: x=1+2t,\ y=-3+t,$ $\ell_2: x=7-4t,\ y=-2t;$
3) $\ell_1: 2x+3y+1=0,$ $\ell_2: x=1+3t,\ y=-2+2t;$
4) $\ell_1: x=1+t,\ y=-2-3t,$ $\ell_2: x=5-2t,\ y=1+t;$
5) $\ell_1: x+2y+2=0,$ $\ell_2: x=-4t,\ y=-1+2t;$
6) $\ell_1: x=1+6t,\ y=2+4t,$ $\ell_2: 2x-3y+1=0.$

272. Даны три прямые $\ell_i\colon A_ix+B_iy+C_i=0,\ i=1,2,3.$ Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы:

1) все три прямые пересекались в одной общей точке, но никакие две не совпадали;

2) все три прямые были параллельны, но никакие две не совпадали;

3) данные прямые образовывали треугольник;

4) две прямые были параллельны, а третья их пересекала;

5) две прямые совпадали, а третья их пересекала;

6) две прямые совпадали, а третья была им параллельна;

7) все три прямые совпадали.

273. Найти необходимое и достаточное условие, при котором три прямые, заданные уравнениями $A_ix+B_iy+C_i$, $i=1,2,3$, принадлежат одному пучку (собственному или несобственному).

274. Даны три попарно различные прямые $\ell_i\colon A_ix+B_iy+C_i=0$, $i=1,2,3$, принадлежащие одному собственному пучку. Пусть ℓ — произвольная прямая, не принадлежащая тому же пучку и не параллельная данным прямым. В каком отношении точка $R=\ell_3\cap\ell$ может делить отрезок PQ, где $P=\ell_1\cap\ell$, $Q=\ell_2\cap\ell$?

275. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x-y=0$, $5x-y=0$ и уравнение $3x-y=0$ одной из медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3,9)$.

276. Даны три попарно различные прямые $\ell_i\colon Ax+By+C_i=0$, $i=1,2,3$, принадлежащие одному несобственному пучку. Пусть ℓ — произвольная прямая, не принадлежащая тому же пучку. В каком отношении точка $R=\ell_3\cap\ell$ может делить отрезок PQ, где $P=\ell_1\cap\ell$, $Q=\ell_2\cap\ell$?

277. В каждом из следующих случаев определить взаимное расположение трех прямых:

1) $3x-y-2=0$;	$6x-2y-2=0$;	$3x-2y-2=0$;
2) $x+2y+3=0$;	$2x+3y+5=0$;	$x-y+7=0$;
3) $x-3y+5=0$;	$3x-y-1=0$;	$x-y+1=0$;
4) $x-2y+7=0$;	$2x-4y-1=0$;	$x=1+2t,\ y=-3+t$;
5) $x=2+5t,\ y=3-t$;	$x=-3-10t,\ y=4+2t$;	$2x-y-1=0$;
6) $x=1+3t,\ y=-1-6t$;	$x=2-t,\ y=3+2t$;	$2x+y-1=0$;
7) $2x+3y-1=0$;	$x=-1-3t,\ y=1+2t$;	$x=2+6t,\ y=-1-4t$.

278. Пусть ℓ_i $(i=1,2,3)$ — прямые на плоскости с уравнениями $A_ix+B_iy+C_i=0$, образующие треугольник. Доказать, что любая функция вида $Ax+By+C$ является линейной комбинацией левых частей уравнений прямых ℓ_i, т. е. существуют такие константы λ_i, что

$$Ax+By+C=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(A_ix+B_iy+C_i)$$

для всех x, y.

279. Описать все тройки ℓ_i: $A_ix+B_iy+C_i=0$, $i=1, 2, 3$, прямых на плоскости, обладающих следующим свойством: любая функция вида $Ax+By+C$ представима как линейная комбинация левых частей уравнений прямых ℓ_i, т. е. существуют такие константы λ_i, что

$$Ax+By+C=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(A_ix+B_iy+C_i)$$

для всех x, y.

280. Описать всевозможные семейства прямых, уравнения которых $Ax+By+C=0$ представимы в виде линейной комбинации

$$Ax+By+C=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(A_ix+B_iy+C_i)$$

уравнений $A_ix+B_iy+C_i=0$ трех фиксированных прямых ℓ_i, $i=1, 2, 3$.

281. Не находя точку пересечения прямых $2x-6y+3=0$ и $5x+y-2=0$, провести через нее прямые, параллельные осям координат, и прямую, проходящую через начало координат.

282. Даны две точки $P(1,2)$ и $Q(3,-4)$. Не находя уравнения прямой PQ, найти точку R ее пересечения с прямой $x+y-2=0$ и отношение λ, в котором она делит отрезок PQ.

283. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB соответственно в точках P, Q и R. Доказать, что прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку.

284. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q и R в отношениях:
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \lambda, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \mu, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \nu.$$
При каких необходимых и достаточных условиях

1) прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку;

2) прямые AP, BQ и CR параллельны?

§ 3.3. Линейные неравенства

Прямая, заданная общим уравнением $Ax+By+C=0$, разделяет плоскость на две полуплоскости: «положительную», заданную неравенством
$$Ax+By+C > 0,$$
и «отрицательную»
$$Ax+By+C < 0.$$
Эти названия условны, так как при умножении уравнения на -1 полуплоскости меняются ролями.

285. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C=0$ и $Ax+By+D=0$?

286. Две параллельные прямые $3x-y-2=0$ и $3x-y-7=0$ делят плоскость на три области: полосу и две полуплоскости. В каких областях лежат следующие точки: $A(4, 5)$, $B(0, -3)$, $C(5, 1)$, $D(1, 4)$?

287. Даны две точки $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ и прямая $\ell: Ax+By+C=0$. Не находя точку пересечения прямых ℓ и PQ, найти отношение λ, в котором она делит отрезок PQ.

288. Даны две точки $A(-3, 1)$, $B(5, 4)$ и прямые

1) $x-2y+1=0$; 2) $x+y-1=0$; 3) $3x-y+11=0$.

Для каждой из них установить, пересекает ли эта прямая отрезок AB, его продолжение за точку A или за точку B.

289. Доказать, что прямая $5x-y-5=0$ пересекает отрезок прямой $3x-2y-6=0$, заключенный между осями координат.

290. Определить положение прямой $x-7y+5=0$ относительно треугольника, вершины которого находятся в точках $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$ и $C(1, 0)$.

291. Доказать, что вектор с координатами (A, B) всегда направлен в сторону «положительной» полуплоскости относительно прямой $Ax+By+C=0$. Верно ли, что он всегда ортогонален этой прямой?

292. Даны две пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и A_2x+ $+B_2y+C_2=0$ и не лежащая на них точка (x_0, y_0). Найти направляющие векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ сторон того угла между прямыми, в котором лежит точка (x_0, y_0).

293. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0, y_0) лежала внутри треугольника, образованного прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $A_3x+B_3y+C_3=0$.

§ 3.4. Метрические задачи на прямую: перпендикуляры, углы и расстояния

В прямоугольной системе координат на плоскости расстояние ρ от точки (x_0, y_0) до прямой, заданной общим уравнением $Ax+By+$ $+C=0$, вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.3}$$

Величину φ наименьшего угла между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ можно вычислять по формуле

$$\varphi = \arccos\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}. \tag{3.4}$$

На ориентированной плоскости говорят также об (*ориентированном*) угле *от* прямой $A_1x+B_1y+C_1=0$ *до* прямой $A_2x+B_2y+C_2=0$, который вычисляется в положительно ориентированной прямоугольной системе координат по формуле

$$\varphi = \arccos\left(\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)}}\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\right). \tag{3.5}$$

Он определен, если данные прямые пересекаются.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной и положительно ориентированной.

294. Дана прямая $x-2y+1=0$, содержащая основание BC треугольника ABC, и вершина $A(3, -4)$, противолежащая этому основанию. Найти уравнение высоты, опущенной из A на сторону BC.

295. Найти проекцию точки $(-3, 7)$ на прямую $5x-4y+2=0$.

296. Найти точку, симметричную точке $(0, 11)$ относительно прямой $x+7y-52=0$.

297. На прямой $2x-3y+18=0$ найти такую точку C, чтобы сумма расстояний до двух данных точек $A(-7,-3)$ и $B(5,5)$ была бы наименьшей.

298. Вершина треугольника находится в точке $(1,3)$, а биссектрисы двух его углов принадлежат прямым $y+3=0$ и $2x+y+5=0$. Написать уравнение стороны треугольника, противолежащей данной вершине.

299. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1,1)$, $(2,8)$ и точки $(4,-3)$, $(-15,14)$ на ее боковых сторонах.

300. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Написать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9,-1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

301. На прямой $2x-3y+6=0$ найти точки, находящиеся на расстоянии $2/5$ от прямой $3x-4y+11=0$.

302. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $8x+6y-7=0$ и отстоящих от нее на расстоянии 2.

303. Через точку $(3,-1)$ провести прямую, отстоящую от точки $(2,-3)$ на расстоянии 1.

304. Через точку пересечения прямых $3x+y+10=0$, $4x+5y+6=0$ провести прямую, отстоящую от начала координат на расстоянии 4.

305. Составить уравнение геометрического места точек, находящихся на одинаковом расстоянии от прямых $7x+y+10=0$ и $x+y+2=0$.

306. Даны две пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка (x_0,y_0), не принадлежащая ни одной из этих прямых. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит эта точка.

307. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x-y-1=0$ и $11x+2y+8=0$, внутри которого лежит точка $(1,2)$.

308. Написать уравнение биссектрисы острого угла между двумя прямыми $x-3y-1=0$ и $3x-y+5=0$.

309. Написать уравнения касательных к окружности с центром $(1,1)$ и радиусом 2, проведенных из точки $(-7,-1)$.

310. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $3x-4y=0$, $4x-3y=0$, $5x+12y-10=0$.

311. Дана вершина $(4, 0)$ треугольника и его высоты, проведенные из двух других вершин: $3x - y - 2 = 0$, $x + y = 0$. Найти эти вершины.

312. Центр симметрии квадрата находится в точке $(-1, 0)$, а одна из его сторон задается уравнением $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнения трех других сторон.

313. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят через точки $(2, 1)$ и $(3, 5)$, а две другие — через точки $(0, 1)$ и $(-3, -1)$.

314. Составить уравнение окружности радиусом $\sqrt{5}$, касающейся прямой $x+2y-3=0$, зная, что ее центр лежит на оси Oy.

315. Составить уравнение касательных к окружности

$$x^2+y^2+2x-4y+1=0,$$

параллельных прямой $3x-4y=0$.

316. Составить уравнение касательных к окружности

$$x^2+y^2-3x+2y-3=0,$$

перпендикулярных прямой $4x+3y=0$.

317. Найти центр круга, вписанного в треугольник, ограниченный осями координат и прямой $3x-4y-5=0$.

318. Найти центр C и радиус r окружности, проходящей через точку $(-1, 3)$ и касающейся прямых $7x+y=0$, $x-y+8=0$.

319. Найти центр C и радиус r круга, вписанного в треугольник, стороны которого заданы уравнениями: $x+y+12=0$, $7x+y=0$, $7x-y+28=0$.

320. Найти координаты центра окружности:

1) вписанной в треугольник ABC,

2) касающейся стороны AC и продолжений сторон AB и BC,

если стороны треугольника заданы уравнениями AB: $x-4=0$, BC: $3x-4y+36=0$, AC: $4x+3y+23=0$.

321. Дан треугольник с вершинами $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $C(7, -5)$. Найти уравнения биссектрис внутренних углов, центр C вписанного круга и его радиус r.

322. В условиях предыдущей задачи найти центр C' и радиус r' круга, касающегося стороны AB и продолжений сторон AC и BC треугольника ABC.

323. По двум вершинам $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ и точке пересечения высот $P(-3, 4)$ треугольника найти третью вершину C.

324 (Прямая Эйлера). Доказать, что во всяком треугольнике точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанного круга лежат на одной прямой.

325. Написать уравнения сторон ромба $ABCD$, зная точку $M(1, 6)$ пересечения его диагоналей и точки на трех его сторонах: $P(3, 0)$ — на AB, $Q(6, 6)$ — на BC, $R(5, 9)$ — на CD.

326. Написать уравнения сторон квадрата $ABCD$, зная его центр $(1, 6)$ и точки на двух его смежных сторонах: $(4, 9)$ — на AB, $(-5, 4)$ — на BC.

327. Даны вершина $P(3, 5)$ равнобедренного треугольника, уравнение его основания $x - 2y + 12 = 0$ и площадь $S = 15$. Написать уравнения боковых сторон.

328. Пусть v_1 и v_2 — направляющие векторы прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Известно, что угол от вектора v_1 до вектора v_2 равен $6\pi/5$. Чему равен угол:

1) от ℓ_1 до ℓ_2; 2) от ℓ_2 до ℓ_1?

329. Определить (ориентированный) угол от первой прямой до второй, если известны их угловые коэффициенты $k_1 = 1/3$ и $k_2 = -1/2$ соответственно.

330. Через точку $(3, 1)$ провести прямые, образующие с прямой $2x + 3y - 1 = 0$ угол $\pi/4$.

331. Найти внутренние углы треугольника, образованного прямыми

$$\ell_1 : x + y - 1 = 0, \quad \ell_2 : x + 2y - 1 = 0, \quad \ell_3 : 2x - 5y + 2 = 0.$$

332. Даны координаты (α_1, β_1), (α_2, β_2) направляющих векторов двух пересекающихся прямых. Выразить через них угол от первой прямой до второй.

333. Даны две точки $A(3, 3)$, $B(0, 2)$. На прямой $x + y - 4 = 0$ найти точку M, из которой отрезок AB виден под углом $\pi/4$.

334. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $x + y - 1 = 0$ и боковой его стороны $x - 2y - 2 = 0$; точка $(-2, 0)$ лежит на другой боковой стороне. Найти уравнение третьей стороны треугольника.

335. Даны две прямые: $x + y = 0$ и $x - 2y + 6 = 0$. Найти третью прямую так, чтобы вторая из указанных прямых была биссектрисой угла между ней и первой прямой.

336. Даны две вершины треугольника ABC: $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ и тангенсы внутренних углов при этих вершинах: $\operatorname{tg} A = -1/2$, $\operatorname{tg} B = 1/3$.

Найти третью вершину треугольника, зная, что она лежит по ту же сторону от прямой AB, что и начало координат.

337. Даны две прямые $x+y+1=0$ и $7x-y+7=0$. Найти косинус того угла между ними, в котором лежит точка $(1, 2)$.

338. Даны две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка (x_0, y_0), не принадлежащая ни одной из этих прямых. Найти косинус того угла φ между ними, в котором лежит данная точка.

339. Три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и A_3x+ $+B_3y+C_3=0$ образуют треугольник. Найти косинус внутреннего угла этого треугольника, образованного первой и второй прямыми.

340. Три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и A_3x+ $+B_3y+C_3=0$ проходят через одну точку. Найти необходимое и достаточное условие того, что третья прямая проходит в остром угле, образованном первой и второй прямыми.

§ 3.5. Метрические задачи на плоскости в произвольной аффинной системе координат

Всюду в этом параграфе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — некоторый базис на плоскости, g_{ij} — метрические коэффициенты этого базиса, $G=(g_{ij})$ — матрица Грама (определение см. в § 1.6).

341. Найти тангенс угла α от оси Ox до прямой $y=kx+b$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

342. Найти тангенс угла α от оси Ox до прямой $y=kx+b$, если $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})=\omega$.

343. Найти тангенс угла φ от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=k_2x+b_2$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

344. Найти тангенс угла φ от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=$ $=k_2x+b_2$, если $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})=\omega$.

345. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

346. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, если $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})=\omega$.

347. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_0, y_0) на прямую $Ax+By+C=0$, если $|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})=\omega$.

348. Зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ составить уравнения семейства прямых:

1) перпендикулярных оси Ox;

2) перпендикулярных оси Oy.

Рассмотреть частный случай: $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

349. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

350. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

351. Найти расстояние d от точки $(2, 1)$ до прямой $10x + 56y - 37 = 0$, если $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

352. Составить уравнения биссектрис углов между координатными осями, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Рассмотреть частный случай $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

Глава 4

Прямые и плоскости в пространстве

§ 4.1. Составление уравнений прямых и плоскостей

Плоскость в пространстве с аффинными координатами (x, y, z) может быть задана следующими эквивалентными способами.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.1}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A, B и C отличен от нуля.

Параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v, \\ y = y_0 + \beta_1 u + \beta_2 v, \\ z = z_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 v, \end{cases} \tag{4.2}$$

где матрица $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2.

Если плоскость задана общим уравнением (4.1), то задать ее параметрически в виде (4.2) можно, взяв в качестве (x_0, y_0, z_0) произвольное частное решение уравнения (4.1), а в качестве векторов $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — произвольную фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Если плоскость задана параметрически в виде (4.2), то ее общее уравнение будет иметь вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где (A, B, C) — произвольное ненулевое решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = 0, \\ \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C = 0. \end{cases}$$

Существуют следующие эквивалентные способы задания при помощи уравнений прямой в пространстве с аффинными координатами (x, y, z).

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases} \tag{4.3}$$

где вектор с координатами (α, β, γ) — направляющий вектор прямой — ненулевой.

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

оно имеет тот же смысл, что и указанные выше параметрические уравнения.

Кроме этого, прямую в пространстве можно задавать системой линейных уравнений, т. е. как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Если прямая задана системой уравнений (4.4), то ее параметрическое задание получится, если взять за (x_0, y_0, z_0) любое частное решение системы (4.4), а за направляющий вектор — любое нетривиальное решение соответствующей однородной системы. Если прямая задана параметрически, то получить соответствующую систему вида (4.4) можно, исключив из (4.3) параметр t.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной, если не оговорено противное.

353. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям: $x = u - 6v$, $y = 1 + 2u$, $z = 2 + 3v$.

354. Написать каноническое уравнение линии пересечения плоскостей $x + 2y - z + 2 = 0$ и $2x + y + z + 1 = 0$.

355. Дана точка $M(1, 2, 3)$. Написать уравнения:

1) плоскостей, проходящих через M и параллельных координатным плоскостям;

2) прямых, проходящих через M и параллельных осям координат;

3) прямой, соединяющей начало координат с точкой M.

356. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 2, -3)$ и параллельной векторам $(1, -1, 2)$ и $(2, 3, -1)$.

357. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точки $(4, 3, 2)$, $(5, 2, 4)$ и $(1, -1, 1)$.

358. Найти параметрические уравнения плоскости, проходящей через точки $(-2, 1, 1)$, $(1, 2, 5)$ и $(-1, 2, 3)$, и написать ее общее уравнение.

359. Написать уравнение плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.

360. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 5, 1)$ и отсекающей на осях координат равные по длине отрезки. Система координат прямоугольная.

361. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $(1, 2, 1)$ и $(3, 1, 1)$ и параллельной вектору $(-1, 1, 2)$.

362. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2, $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и параллельной вектору $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, неколлинеарному вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

363. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $A(1, -5, 3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные $\pi/3$, $\pi/4$, $2\pi/3$. (Система координат прямоугольная.)

364. Найти направляющий вектор линии пересечения плоскостей $x - y + 2z - 1 = 0$ и $2x + 3y - z + 5 = 0$.

365. Найти параметрические уравнения линии пересечения плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$ с координатной плоскостью Oxy.

366. 1) Составить уравнения прямой ℓ, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 2 и 3.

2) Написать уравнение плоскости, содержащей прямую ℓ и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 5.

3) Написать уравнение плоскости, содержащей прямую ℓ и параллельной оси Oz.

367. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(2, 3, 1)$ параллельно плоскости $x - y - 1 = 0$ и пересекающей ось Oy.

368. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и содержащей прямую ℓ:

1) $M(1, 0, -1)$, $\quad \ell: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{1}$;

2) $M(2, -3, -1)$, $\ell: x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 2 - 3t$;

3) $M(1, 2, -2)$, $\quad \ell: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$;

4) $M(1, 1, 3)$, $\quad \ell: 2x + y - z + 4 = x - y + 2z - 4 = 0$.

369. Найти уравнение плоскости, содержащей прямую ℓ и параллельной вектору $\mathbf{a}$, если:

1) $\ell: x=-t,\ y=2-2t,\ z=-1+2t,\qquad \mathbf{a}=(3,2,1);$

2) $\ell: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0},\qquad \mathbf{a}=(2,2,-1);$

3) $\ell: 2x+y-z+4=x-y+2z-4=0,\ \mathbf{a}=(1,3,-1).$

370. Найти уравнение плоскости, параллельной прямой ℓ и проходящей через точки A и B, если:

1) $\ell: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{1},\qquad A(2,1,3),\quad B(-2,2,1);$

2) $\ell: x-y+3z+4=2x+3y-z-2=0,\ A(-2,2,1),\ B(0,4,3).$

371. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $x+z=0$ и пересекающей прямую

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-8}{11}=\frac{z-3}{2},$$

но не имеющей общих точек с прямой $x=1+t,\ y=3+4t,\ z=-1-t.$

372. Провести плоскость через параллельные прямые

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3},\qquad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}.$$

373. В плоскости, которая проходит через три точки $M(1,1,-1)$, $N(-1,-1,-1)$, $P(0,1,0)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке M и базисными векторами $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$. Найти:

1) пространственные координаты x, y, z точки Q этой плоскости, плоскостные координаты которой $u=-1$, $v=2$;

2) плоскостные координаты u, v точки пересечения данной плоскости с осью Oz.

374. В плоскости $2x+3y-4z+12=0$ выбрана аффинная система координат u, v, начало которой находится в точке S пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы базисных векторов соответственно в точках P, Q пересечения плоскости с осями Ox и Oy.

1) Найти пространственные координаты x, y, z точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $u=1$, $v=1$.

2) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых PQ, QS и SP.

3) Написать в плоскостной системе координат уравнение прямой пересечения данной плоскости с плоскостью $5x+3z-8=0$.

375. Даны три прямые

$$\begin{cases} x=3+t,\\ y=-1+2t,\\ z=4t; \end{cases}\qquad \begin{cases} x=-2+3t,\\ y=-1,\\ z=4-t; \end{cases}\qquad \begin{cases} x-3y+z=0,\\ x+y-z+4=0. \end{cases}$$

Написать уравнения прямой, пересекающей первые две из указанных прямых и параллельной третьей.

376. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(1, 2, 3)$ и пересекающей прямые $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$, $\frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}$.

377. Составить уравнения проекции прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ из точки $(1, 2, 1)$ на плоскость $y - 2z + 4 = 0$.

378. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра и середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.

§ 4.2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Пучки и связки плоскостей. Связки прямых

Собственным пучком плоскостей в пространстве называется множество плоскостей, содержащих некоторую фиксированную прямую. *Несобственным пучком плоскостей* в пространстве называется множество плоскостей, параллельных некоторой фиксированной плоскости.

Собственная связка плоскостей в пространстве — это множество плоскостей, проходящих через одну точку. *Несобственная связка плоскостей* в пространстве — это множество плоскостей, параллельных некоторой прямой.

Собственной связкой прямых в пространстве называют множество прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку, а *несобственной связкой прямых* — множество прямых, параллельных одному и тому же вектору.

Если даны две различные плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1y + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2y + D_2 = 0,$$

то существует ровно один пучок, их содержащий, и уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ любой плоскости из этого пучка представляется в виде линейной комбинации данных:

$$Ax + By + Cz + D = \\ = \lambda(A_1x + B_1y + C_1y + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2y + D_2).$$

Аналогичным образом, связка плоскостей определяется любыми тремя плоскостями, не лежащими в одном пучке, и уравнение любой плоскости из этой связки разлагается в линейную комбинацию трех данных.

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

379. Определить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают. Если плоскости пересекаются, найти канонические уравнения линии пересечения:

1) $x+2y-z+1=0, \quad x+y-2z+1=0;$

2) $x-3y+7z+1=0, \quad 3x-9y+21z+3=0;$

3) $x-3y+2z+2=0, \quad 2x-6y+4z+5=0;$

4) $\begin{cases} x=1+2u+v, \\ y=3u+2v, \\ z=-1+u+v; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4u+3v, \\ y=-2+u-4v, \\ z=3+u+2v; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=-3+u+2v, \\ y=-v, \\ z=u; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1+3u, \\ y=2-u+v, \\ z=8+u+2v; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=-3+u+4v, \\ y=3+u+v, \\ z=2+u+2v; \end{cases} \quad x+2y-3z+2=0.$

380. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли прямая ℓ в плоскости P, параллельна плоскости P или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\ell: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+1}{7}, \quad P: 7x+2y-z+7=0;$

2) $\ell: \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}, \quad P: 5x-y+6z=0;$

3) $\ell: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}, \quad P: x-3y+2z+5=0;$

4) $\ell: x-3y+1=0,\ 2x+y-5=0, \quad P: x+2y-2z-2=0;$

5) $\ell: x+2y+z-1=0,\ x+y-2=0, \quad P: 3x+2y-z-6=0.$

381. Установить взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев (они могут: а) пересекаться, б) быть параллельными, в) скрещиваться, г) совпадать):

1) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t; \end{cases} \quad \begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t; \end{cases}$

3) $x=t,\ y=-8-4t,\ z=-3-3t; \quad \begin{cases} 2x-y+2z=0, \\ x+y-z=0; \end{cases}$

4) $x=3+t,\ y=-1+2t,\ z=4; \quad \begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+y-z+4=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ y+4z=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y+6z-6=0, \\ 3x+4y+7z=0. \end{cases}$

382. Даны две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

соответственно найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы плоскости:

1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

383. Две плоскости заданы своими параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_1+a_1u+a_2v, & x &= x_2+a_3u+a_4v, \\ y &= y_1+b_1u+b_2v, & y &= y_2+b_3u+b_4v, \\ z &= z_1+c_1u+c_2v; & z &= z_2+c_3u+c_4v. \end{aligned}$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

соответственно выразить необходимые и достаточные условия для того, чтобы плоскости:

1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

384. Даны плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая:

1) пересекала плоскость; 3) лежала в плоскости.

2) была ей параллельна;

385. Даны две прямые

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}, \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x_2-x_1 \\ b_1 & b_2 & y_2-y_1 \\ c_1 & c_2 & z_2-z_1 \end{pmatrix}$$

соответственно выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые:

1) скрещивались;
2) пересекались;
3) были параллельны;
4) совпадали.

386. Даны две прямые

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},\qquad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы они:

1) скрещивались;
2) пересекались;
3) были параллельны;
4) совпадали.

387. Найти геометрическое место точек, делящих в одном и том же отношении λ отрезки с концами на двух данных скрещивающихся прямых.

388. Даны три плоскости:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

Пусть r и R — ранги матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{pmatrix} \quad\text{и}\quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\end{pmatrix}$$

соответственно; r_i, R_i — ранги матриц, полученных из данных удалением i-й строки, $i=1, 2, 3$. Выразить через r, R, r_i, R_i необходимые и достаточные условия для того, чтобы:

1) три плоскости имели единственную общую точку;

2) три плоскости были попарно различны и имели единственную общую прямую;

3) три плоскости попарно пересекались и линия пересечения каждых двух плоскостей была параллельна третьей плоскости (т. е. чтобы плоскости образовывали призму);

4) две плоскости были параллельны, а третья плоскость их пересекала;

5) три плоскости были попарно параллельны;

6) две плоскости совпадали, а третья их пересекала;

7) две плоскости совпадали, а третья плоскость была им параллельна;

8) три плоскости совпадали.

389. Определить взаимное расположение трех плоскостей в каждом из следующих случаев:

1) $x+2y-z+7=0$, $x+y-2z+4=0$, $5x+3z+2=0$;
2) $5x-3y+7z+10=0$, $x-y+6z+1=0$, $10x-6y+14z+9=0$;
3) $x-3y+2z+2=0$, $2x-6y+4z+3=0$, $5x-15y+10z+16=0$;
4) $x+2y-z+7=0$, $x+y-2z+4=0$, $x-y-4z-2=0$;
5) $5x-2y+3=0$, $3x+z-6=0$, $8x-2y+z+6=0$;
5) $x-y+2z+3=0$, $6x-3y+z-4=0$, $2x-2y+4z+6=0$.

390. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\quad A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$$

образуют тетраэдр?

391. Даны четыре плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\quad A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0.$$

С помощью рангов r и R матриц

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

соответственно выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости принадлежали:

1) одной связке;
2) одной собственной связке;
3) одной несобственной связке.

392. Пусть Π_i $(i=1,2,3,4)$ — плоскости с уравнениями $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, каждые три из которых пересекаются в одной точке, но все вместе общей точки не имеют. Доказать, что любая функция вида $Ax+By+Cz+D$ представима в виде линейной комбинации левых частей уравнений плоскостей Π_i, т. е. существуют такие константы λ_i, что

$$Ax+By+Cz+D=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i(A_ix+B_iy+C_iz+D_i).$$

393. Описать все четверки

$$\Pi_i:\{A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\},\quad i=1,2,3,4,$$

плоскостей в пространстве, обладающих следующим свойством: любая функция вида $Ax+By+Cz+D$ представима в виде линейной комбинации левых частей уравнений плоскостей Π_i, т. е. существуют такие константы λ_i, что

$$Ax+By+Cz+D=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i(A_ix+B_iy+C_iz+D_i).$$

394. 1) Описать всевозможные семейства плоскостей, уравнения $Ax+By+Cz+D=0$ которых представимы в виде линейных комбинаций

$$Ax+By+Cz+D=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(A_ix+B_iy+C_iz+D_i)$$

уравнений $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$ трех фиксированных плоскостей Π_i $(i=1, 2, 3)$.

2) Сделать то же для четырех плоскостей.

395. Составить уравнение плоскости, содержащей линию пересечения плоскостей Π_1, Π_2 и проходящей через точку M:

1) $\Pi_1: x+y-z-1=0,\quad \Pi_2: 2x-3y-3z-2=0,\ M(1, 0, -2)$;

2) $\Pi_1: 2x-y+3z-2=0,\ \Pi_2: x+y-2z-1=0,\quad M(2, 1, -3)$.

396. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x-2y+z-1=0$, $2x-3y+4z-5=0$ и параллельной вектору $(3, 2, -2)$.

397. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x-y+5z-4=0$, $y-7z+12=0$ и отсекающей на осях Ox и Oz равные по длине ненулевые отрезки.

398. Показать, что плоскости

$$\Pi_1: x-y+z+1=0,\quad \Pi_2: 2x+3y-z+2=0,$$
$$\Pi_3: x=0,\quad \Pi_4: x+2y-z+1=0$$

образуют тетраэдр. Провести плоскость через линию пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 параллельно линии пересечения Π_3 и Π_4.

399. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами $(2, -1, -3)$ и параллельной прямым пересечения плоскостей Π_1 и Π_2 и плоскостей Π_3 и Π_4, где плоскости Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 задаются уравнениями $x+y-z+2=0$, $2x-y+3z-1=0$, $3x+2y+z-4=0$ и $x+3y+2z-2=0$ соответственно.

400. Написать уравнение плоскости, параллельной прямым пересечения плоскостей Π_1, Π_2 и Π_3, Π_4 и находящейся на равном расстоянии от этих двух прямых; плоскости Π_i $(i=1, 2, 3, 4)$ те же, что и в предыдущей задаче.

401. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и равноудаленной от точек $(2, 3, -10)$ и $(1, -3, 19)$.

402. Даны вершины тетраэдра $P(3, 5, -1)$, $Q(7, 5, 3)$, $R(9, -1, 5)$, $S(5, 3, -3)$. Написать уравнение плоскостей, равноудаленных от всех вершин тетраэдра $PQRS$.

403. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $(1, 2, -1)$ и пересекает прямые

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ 3x - 2y - 3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x + 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

404. Показать, что три плоскости $x + 2y - z - 4 = 0$, $3x - 2y + 3z - 6 = 0$, $4y - 3z + 3 = 0$ образуют призму, и написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух граней призмы и параллельной третьей.

405. Через точку $P(-1, 2, 3)$ провести плоскость так, чтобы в треугольнике, отсекаемом на ней плоскостями координат, точка P была точкой пересечения медиан.

406. Пусть Π_i $(i = 1, 2, 3)$ — плоскости с уравнениями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, пересекающиеся в одной точке, $P(x_0, y_0, z_0)$ — точка, не лежащая ни в одной из плоскостей Π_i. Написать уравнение плоскости Π, пересекающей плоскости Π_i и проходящей через точку P так, что последняя является точкой пересечения медиан треугольника на плоскости Π, ограниченного линиями пересечения плоскости Π с плоскостями Π_i.

§ 4.3. Линейные неравенства в пространстве

Все системы координат, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются аффинными.

407. Какие две из трех точек $A(0, 2, -1)$, $B(0, -3, 2)$, $C(-3, 2, 1)$ лежат по одну сторону от плоскости $3x + 2y + z + 1 = 0$?

408. Какая из двух плоскостей $x + 2y + 4z - 11 = 0$ и $x - y + 3z - 9 = 0$ разделяет точки $A(1, 3, -1)$ и $B(5, -3, 1)$?

409. Даны две точки $A(1, 3, -1)$ и $B(5, 3, 1)$ и плоскость $x - 4y + 2z - 7 = 0$. Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок AB, его продолжение за точку A или за точку B.

410. Даны две точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Не находя ее точку пересечения с прямой PQ, найти отношение, в котором эта точка делит отрезок PQ.

411. Даны две точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$. Найти, в каком отношении точка пересечения прямой PQ с плоскостью

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v, \\ y = y_0 + \beta_1 u + \beta_2 v, \\ z = z_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 v \end{cases}$$

делит отрезок PQ.

412. Доказать, что вектор с координатами (A, B, C) всегда направлен в сторону «положительного» полупространства относительно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

413. Дана точка (x_0, y_0, z_0). При каком необходимом и достаточном условии эта точка лежит между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $Ax + By + Cz + E = 0$?

414. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка лежала внутри тетраэдра, образованного плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \quad A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0.$$

415. Даны четыре плоскости: $x + y = 0$, $x - z = 0$, $x + y + 2z = 0$, $y = 0$. В каждом из следующих случаев найти такие плоскости, проходящие через точку P, что четырехугольники, высекаемые на них этими плоскостями, являются параллелограммами, и определить, лежит ли точка P внутри или вне этих параллелограммов:

1) $P(2, -1, 0)$; 2) $P(-1, 3, 2)$.

§ 4.4. Метрические задачи в пространстве

В прямоугольной системе координат в пространстве расстояние ρ от точки с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.5}$$

Расстояние до прямой

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

можно вычислять по формуле

$$\rho = \frac{|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|}{|\mathbf{u}|}, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathbf{v} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$.

В этом параграфе все системы координат предполагаются прямоугольными.

416. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку $(2, 3, -1)$ и перпендикулярной вектору $(1, -3, -1)$.

417. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку $(1, 1, 1)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-2}.$$

418. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

419. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $x+2y-z+5=0$, $3x+y+z-7=0$ и проходящей через точку $(2, -3, 1)$.

420. Найти уравнение плоскости, которая перпендикулярна плоскостям $2x+y-z+7=0$ и $x-3y+z-1=0$ и проходит через точку $(-1, 1, 0)$.

421. Задать параметрически плоскость, проходящую через точку $(2, -1, 1)$ и перпендикулярную прямой $x-2y+z+3=0$, $2x+3y-z+8=0$.

422. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $4x+2y-z+8=0$ и проходящей через точки $(0, 1, -2)$ и $(2, -1, 1)$.

423. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(1, 0, 3)$ и $B(2, -1, 4)$ перпендикулярно плоскости, заданной параметрическими уравнениями $x=2u+4v$, $y=6v$, $z=3-u-v$.

424. В пучке, заданном плоскостями $3x-y+z-2=0$ и $x+y-6z-1=0$, найти те плоскости, которые перпендикулярны данным.

425. Составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки $(1, -7, 2)$ на оси координат Ox и Oy.

426. Написать параметрические уравнения перпендикуляра, опущенного из точки (x_0, y_0, z_0) на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

427. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(1, -1, 2)$ на прямую

$$\ell\colon \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1},$$

и расстояние от точки P до прямой ℓ.

428. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_1, y_1, z_1) на прямую

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

429. Найти расстояние от точки $(1, 3, 5)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+y+2z-3=0. \end{cases}$$

430. Найти расстояние от точки $(1, -1, 0)$ до прямой $x=2+t$, $y=-1-t$, $z=2t$.

431. Найти точку, симметричную точке $(1, 3, -4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

432. Найти точку, симметричную точке $(1, 2, 3)$ относительно прямой

$$\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

433. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1, -2, 0)$ и плоскости $3x-2y+6z-9=0$.

434. На плоскости $5x-3y+7z+10=0$ найти такую точку, что сумма расстояний от нее до точек $(7, -1, 5)$ и $(29, 3, -9)$ будет наименьшей.

435. Даны вершины тетраэдра $P(1, 0, 0)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(1, 1, 1)$, $S(3, 0, 0)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины P на плоскость грани QRS.

436. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+3y-z+17=0$ и отстоящей от точки $(2, -1, 1)$ на расстоянии $\sqrt{11}$.

437. Найти расстояние от точки $(1, 2, 2)$ до плоскости, заданной параметрическими уравнениями $x=2+3s+4t$, $y=5+6s+7t$, $z=8+9s+10t$.

438. Найти расстояние между плоскостями $2x-4y-2z-1=0$ и $3x-6y-3z+1=0$.

439. Найти расстояние между плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$.

440. Найти угол между плоскостями $3x+4y-5z+1=0$ и $x+{}$ ${}+2y+2z-18=0$.

441. Составить уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов между плоскостями:

1) $7x+y-6=0$, $\quad 3x+5y-4z+1=0$;

2) $x-2y+2z+3=0$, $4x+y-8z-1=0$.

442. Даны плоскости $\Pi_1: 4x + y - 8z - 1 = 0$ и $\Pi_2: x - 2y + 2z + 3 = 0$. Найти уравнение такой плоскости Π_3, что Π_2 делит пополам двугранный угол между Π_1 и Π_3.

443. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) лежала в остром угле, образуемом двумя пересекающимися и не взаимно перпендикулярными плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

444. В каком угле между плоскостями $7x + 3y + z = 0$, $3x + 3y + z + 2 = 0$ (остром или тупом) лежит точка $(1, -1, 1)$?

445. Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x - y - z - 1 = 0$ и $2x + 10y - 2z - 5 = 0$ и делящей острый угол между ними пополам.

446. Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $5x - 2y + 2z - 4 = 0$ и $8x + 2y - 8z + 3 = 0$ и делящей пополам тот угол между ними, в котором находится точка $(-1, -1, -1)$.

447. Написать уравнение биссекторной плоскости тупого двугранного угла, образованного плоскостью $2x - 3y + 6z - 6 = 0$ с плоскостью Oyz.

448. Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oxy плоскостями $x + 4y + 8z + 8 = 0$, $x - 2y + 2z + 2 = 0$, $3x + 4y + 12 = 0$, найти точку, равноудаленную от этих плоскостей.

449. Найти центр и радиус сферы, вписанной в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $11x - 10y - 2z - 57 = 0$.

450. Даны четыре плоскости, образующие тетраэдр. Сколько существует сфер, их касающихся?

451. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

452. Проверить, что две прямые $x = 1 + 2t$, $y = 2t$, $z = t$ и $x = 11 + 8t$, $y = 6 + 4t$, $z = 2 + t$ пересекаются, и написать уравнения биссектрисы тупого угла между ними.

453. Найти угол между плоскостью Oxy и прямой

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

454. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ угол $\pi/3$.

455. Оси координат служат диагоналями правильного октаэдра, ребра которого равны $a\sqrt{2}$. Найти:

1) уравнения граней октаэдра;
2) двугранные углы;
3) центр и радиус вписанного шара.

456. В пучке, определенном плоскостями $x+z-1=0$ и $x+y-z+2=0$, найти плоскость, образующую угол $\arccos(1/\sqrt{10})$ с плоскостью $y+z+6=0$.

457. Через прямую

$$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{0}$$

провести такую плоскость, чтобы острый угол между линиями ее пересечения с плоскостями Oxz и Oyz был равен $\pi/3$.

458. Известно, что плоскости

$$A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0,\quad k=1,2,3,$$

образуют призму. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы все три её внутренних двугранных угла были острыми.

459. Доказать, что три плоскости $x-2y+2z=0$, $2x-y-2z+2=0$, $5x+2y-14z+14=0$ образуют призму. Найти: величину γ внутреннего двугранного угла этой призмы, образованного первой и второй плоскостями; ось ℓ и радиус r вписанного в призму цилиндра.

460. Составить уравнения ортогональной проекции прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$$

на плоскость $5x+6y-2z+1=0$.

461. Составить уравнения общего перпендикуляра к двум прямым

$$\frac{x}{1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{2},\qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+3}{-2}.$$

462. Составить уравнения общего перпендикуляра к двум прямым

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1},\qquad \begin{cases} x+y=1,\\ x+2y+2z=-1\end{cases}$$

и найти расстояние d между этими прямыми. Найти точки пересечения общего перпендикуляра с этими прямыми.

463. Даны две прямые: $x-y+z+1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и $x=0$, $x+2y-z+1=0$. Найти расстояние между ними и составить уравнения общего перпендикуляра.

464. Найти расстояние между прямыми

1) $x+y-1=0$, $z=0$ и $x=1-t$, $y=-2+t$, $z=-1+3t$;

2) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+3=0. \end{cases}$

465. К непересекающимся диагоналям граней куба, имеющих общее ребро, провести общий перпендикуляр. В каком отношении точки пересечения диагоналей с их общим перпендикуляром делят эти диагонали?

466. Найти расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.

§ 4.5. Метрические задачи в пространстве в произвольной аффинной системе координат

467. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

468. Найти углы между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

469. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

470. Найти угол φ, образуемый прямой

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

471. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

472. Найти объем V тетраэдра $ABCD$, заданного своими вершинами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

473. Зная метрические коэффициенты g_{ij}, найти расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до оси Oz.

Глава 5

Аффинные и ортогональные замены координат

Если на плоскости заданы две аффинные системы координат x, y и x', y' связанные с реперами $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ соответственно, то координаты одной и той же точки M в этих системах связаны равенствами

$$
\begin{aligned}
x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0,\\
y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0,
\end{aligned}
$$

где (x_0, y_0) — координаты точки O' в системе Oxy; (c_{ij}) — *матрица перехода* от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$, которая по определению составляется из координат векторов базиса $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}'_2 &= c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2.
\end{aligned}
$$

Приведенные выше формулы удобно записывать в матричном виде:

$$
\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}.
$$

Аналогично любые две аффинные системы координат x, y, z и x', y', z' в пространстве, ассоциированные с реперами $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ соответственно, связаны формулами

$$
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}.
$$

Точка $E(1,1)$ ($E(1,1,1)$), заданная относительно аффинной системы координат Oxy на плоскости (соответственно системы $Oxyz$ в пространстве), называется *единичной точкой* этой системы координат.

Квадратная матрица $C=(c_{ij})$ называется *ортогональной*, если $C^{-1}=C^{\top}$. Из следующих трех условий выполнение любых двух влечет выполнение третьего:

1) базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) ортонормирован;

2) базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ (соответственно $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$) ортонормирован;

3) матрица перехода от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ к $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ (соответственно от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$) ортогональна.

474. Написать формулы перехода от одной системы координат на плоскости к другой, если началом первой системы (x, y) является вершина A параллелограмма $ABCD$, а базисом — векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$; началом второй системы (x', y') является вершина C, а базисом — векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.

475. На плоскости даны две системы координат: Oxy и $O'x'y'$. Координаты x и y произвольной точки относительно первой системы выражаются через ее координаты x' и y' относительно второй системы следующими формулами: $x=2x'-5y'+3$, $y=-x'+2y'-2$. Найти координаты начала первой системы и единичных векторов ее осей относительно второй системы.

476. На плоскости даны две системы координат: Oxy, $O'x'y'$. Координаты (x, y) и (x', y') произвольной точки M относительно этих двух систем связаны между собой следующими формулами перехода:

$$x = 3x' - 4y' - 5, \quad y = -x' + 2y' + 1.$$

1) Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой системы.

2) Найти координаты (относительно системы Oxy) вектора $\mathbf{a}$ диагонали параллелограмма, образованного единичными векторами осей системы $O'x'y'$.

3) Выразить координаты x', y' через координаты x, y.

4) Какие координаты в системе координат Oxy имеет единичная точка E' системы координат $O'x'y'$?

5) Написать уравнение осей $O'x'$ и $O'y'$ в системе координат Oxy.

6) Написать уравнение прямой $2x-3y+1=0$ в системе координат $O'x'y'$.

477. По отношению к аффинной системе координат даны три точки плоскости $A(2,1)$, $B(3,0)$, $C(1,4)$. В новой аффинной системе координат те же точки имеют координаты $A(1,6)$, $B(1,9)$, $C(3,1)$. Найти:

1) формулы преобразования аффинной системы координат;

2) старые координаты нового начала координат и новых базисных векторов;

3) новые координаты старого начала координат и старых базисных векторов.

478. Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые оси $O'x'$ и $O'y'$ прямые $x-3y+2=0$, $3x+2y-1=0$ соответственно, а за единичную точку новой системы — точку $(2,3)$.

479. Написать уравнения прямой $x-y-5=0$ в системе координат на плоскости, осями $O'x'$ и $O'y'$ которой служат прямые $2x+y-1=0$ и $x-3y+6=0$ соответственно, а единичной точкой — точка $(-1,0)$.

480. Через точку плоскости $N(2,-3)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $x+4y+7=0$, $3x-2y-4=0$ в точке N делится пополам.

481. Даны точка $(0,2)$ пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон $5x-4y+15=0$, $4x+y-9=0$. Найти уравнение третьей стороны треугольника.

482. Даны уравнения медиан треугольника $4x+5y=0$, $x-3y=0$ и его вершина $(2,-5)$. Составить уравнения сторон треугольника.

483. Найти формулы перехода от косоугольной системы координат Oxy на плоскости с координатным углом ω к прямоугольной системе $Ox'y'$, положительными направлениями осей которой являются биссектрисы первого и второго координатных углов косоугольной системы, при условии, что базисные векторы косоугольной системы имеют единичную длину.

484. Найти формулы перехода от одной косоугольной системы координат Oxy с координатным углом ω к другой косоугольной системе $Ox'y'$, если одноименные оси этих систем взаимно перпендикулярны, а разноименные образуют острые углы и все базисные векторы обеих систем имеют длину 1.

485. Оси прямоугольной системы координат плоскости повернуты вокруг начала отсчета на угол $-\pi/3$. Найти старые координаты точки A, зная ее координаты $(4,-2)$ в новой системе координат.

486. Задано преобразование прямоугольных координат на плоскости от Oxy к $O'x'y'$:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 1, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 2.$$

Найти формулы обратного перехода от системы $O'x'y'$ к Oxy.

487. Рассмотрим композицию двух преобразований прямоугольных координат на плоскости:

1) первое преобразование — от Oxy к $O'x'y'$: $O=O'$; оси координат $O'x'$ и $O'y'$ получаются из осей Ox и Oy соответственно поворотом на угол φ вокруг O;

2) второе преобразование — от $O'x'y'$ к $O''x''y''$: $O'=O''$; оси координат $O''x''$ и $O''y''$ получаются из осей $O'x'$ и $O'y'$ соответственно поворотом на угол ψ вокруг O'.

Написав формулы перехода от системы Oxy к $O''x''y''$, доказать формулы для синуса и косинуса суммы: $\sin(\varphi+\psi)$ и $\cos(\varphi+\psi)$.

488. Новая прямоугольная система координат плоскости получена из старой переносом начала в точку $O'(4, -3)$ и поворотом на такой угол α, что $\cos\alpha = -4/5$, $\sin\alpha = 3/5$. Найти новые координаты точки M, зная ее старые координаты $(5, 10)$.

489. Начало O' новой прямоугольной системы $O'x'y'$ на плоскости имеет относительно прямоугольной системы Oxy координаты $(-3, -2)$. Известно также, что $\cos(\widehat{Ox, O'x'}) = -\frac{4}{5}$, $\cos(\widehat{Ox, O'y'}) = -\frac{3}{5}$ и что системы Oxy и $O'x'y'$ разной ориентации. Найти выражения старых координат x и y через новые координаты x' и y'.

490. За единичные векторы первой системы координат пространства приняты три ребра $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ тетраэдра $OABC$, выходящие из одной точки O, а за единичные векторы второй системы — медианы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ граней BOC, COA, AOB этого тетраэдра. Найти координаты вершин тетраэдра во второй системе.

491. В пространстве даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Как выражаются друг через друга координаты (x, y, z) и (x', y', z') произвольной точки M, если начало и базисные векторы второй системы имеют следующие координаты в первой системе $Oxyz$: $O'(-1, 3, 0)$, $\mathbf{e}_1' = (1, -1, 0)$, $\mathbf{e}_2' = (2, 2, -1)$, $\mathbf{e}_3' = (-1, 1, 1)$?

492. В пространстве даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Координаты (x, y, z) и (x', y', z') произвольной точки M относительно этих двух систем связаны между собой следующими формулами перехода:

$$x = x' + 2y' - z' + 1, \quad y = y' + 2z' - 2, \quad z = -y' - z' + 1.$$

1) Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой.

2) Выразить координаты (x', y', z') через координаты (x, y, z).

3) Какие координаты в системе координат $Oxyz$ имеет единичная точка E' системы координат $O'x'y'z'$?

4) Написать уравнения координатных плоскостей $O'y'z'$, $O'x'z'$ и $O'x'y'$ в системе координат $Oxyz$.

5) Написать уравнение плоскости $x - 2y + 3z + 1 = 0$ в системе координат $O'x'y'z'$.

6) Написать уравнения прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2}$$

в системе координат $O'x'y'z'$.

493. В аффинной системе координат даны уравнения трех пересекающихся в одной точке и не лежащих в одном пучке плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ и точка $E(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. Принимая эти плоскости соответственно за координатные плоскости $O'y'z'$, $O'x'z'$, $O'x'y'$, найти формулы, выражающие координаты (x', y', z') произвольной точки M через ее координаты (x, y, z), если координаты точки E в системе $O'x'y'z'$ равны $(1, 1, 1)$.

494. В пространстве заданы две прямоугольные системы координат с общим началом: ось $O'x'$ совпадает с осью Oz, ось $O'y'$ — с осью Ox, но имеет противоположное с ней направление, а ось $O'z'$ совпадает с осью Oy и тоже имеет противоположное с ней направление. Найти формулы, выражающие координаты (x', y', z') произвольной точки M через координаты (x, y, z) .

495. Относительно исходной прямоугольной системы координат пространства направления координатных осей новой прямоугольной системы задаются векторами: ось $O'x'$ направлена вдоль вектора $(-2, -6, 3)$, ось $O'y'$ — вдоль $(6, -3, -2)$, а ось $O'z'$ — вдоль $(-3, -2, -6)$. Начало O' новой системы координат находится в точке $(-2, 4, 1)$. Найти формулы, выражающие старые координаты (x, y, z) произвольной точки M через ее новые координаты (x', y', z').

496. Даны две системы координат: $Oxyz$ с углами между осями по $60°$ и $Ox'y'z'$ с углами между осями по $90°$, с общим началом O

и одинаковыми по длине базисными векторами. Написать формулы перехода от косоугольной системы координат $Oxyz$ к прямоугольной $Ox'y'z'$, если оси Ox и Ox' обеих систем совпадают, ось Oy' лежит в плоскости Oxy и образует с осью Oy угол 30°, а лучи, определяющие положительные направления осей Oz и Oz', лежат по одну сторону от плоскости Oxy.

497. Даны две системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$ с общим началом O и одинаковыми по длине базисными векторами по всем осям обеих систем. Косинусы углов между осями первой системы равны соответственно $\cos(x_1Ox_2)=\omega_{12}$, $\cos(x_2Ox_3)=\omega_{23}$, $\cos(x_3Ox_1)=\omega_{31}$. Косинусы углов между осями первой и второй систем заданы таблицей

	Ox_1'	Ox_2'	Ox_3'
Ox_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
Ox_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
Ox_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Написать формулы, связывающие координаты x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' одной и той же точки M в обеих системах.

498. Найти формулы перехода от одной прямоугольной системы координат $Oxyz$ к другой $O'x'y'z'$, если начало второй системы находится в точке $O'(1, 2, 3)$, системы имеют противоположную ориентацию и выполнено следующее:

$$\widehat{(Ox, O'x')} = \arccos\frac{1}{3}, \quad \widehat{(Ox, O'y')} = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right), \quad \widehat{(Ox, O'z')} < \frac{\pi}{2},$$
$$\widehat{(Oy, O'x')} = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right), \quad \widehat{(Oy, O'y')} > \frac{\pi}{2}.$$

499. Относительно прямоугольной системы координат даны уравнения координатных плоскостей новой системы:

$$O'y'z'\colon\ x+y+z-1=0,$$
$$O'x'z'\colon\ 2x-y-z+1=0,$$
$$O'x'y'\colon\ y-z-3=0.$$

Проверить, что эти плоскости попарно перпендикулярны, и выразить новые прямоугольные координаты произвольной точки M через её старые координаты при условии, что старое начало O имеет в новой системе положительные координаты.

500. Относительно прямоугольной системы координат даны координатные плоскости новой системы $O'x'y'z'$:

$$O'y'z'\colon 2x+2y+z+2=0,$$
$$O'z'x'\colon x-2y+2z=0,$$
$$O'x'y'\colon -2x+y+2z+1=0.$$

Проверить, что эти плоскости попарно перпендикулярны, и выразить новые прямоугольные координаты произвольной точки M через её старые координаты при условии, что точка, имеющая в старой системе координаты $(1, -1, -1)$, в новой системе имеет положительные координаты.

Глава 6

Кривые второго порядка

В данной главе под *кривой второго порядка* понимается класс эквивалентности уравнений $F=0$, где F — это функция на плоскости, представляемая в некоторой аффинной системе координат (x, y) многочленом второй степени от x, y:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0, \tag{6.1}$$
$$(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0).$$

При этом два уравнения $F_1=0$ и $F_2=0$ *эквивалентны*, если функции F_1 и F_2 отличаются умножением на число, т. е.

$$F_2 = \lambda F_1.$$

Если уравнение (6.1) имеет более одного решения относительно x, y, то множество его решений однозначно определяет F с точностью до эквивалентности. В этом случае термин «кривая второго порядка» будет относиться также и ко множеству решений. Такие кривые второго порядка называются *действительными*. Если же уравнение (6.1) задает пустое множество решений либо всего одну точку, то такую кривую второго порядка называют *мнимой*.

Уравнение (6.1) удобно также записывать в виде

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+a=0$$

или

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0.$$

Ортогональная (*метрическая*) *классификация кривых второго порядка*: для любой кривой второго порядка найдется прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов (называемый *каноническим*):

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, && a\geqslant b>0,\\
&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, && a\geqslant b>0,\\
&\frac{x^2}{a^2}+y^2=0, && a\geqslant 1,\\
&\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, && a,b>0,\\
&\frac{x^2}{a^2}-y^2=0, && a\geqslant 1,\\
&y^2=2px, && p>0,\\
&x^2=a^2, && a>0,\\
&x^2=-a^2, && a>0,\\
&x^2=0,
\end{aligned}$$

причем каждая кривая имеет единственное каноническое уравнение.

Прямоугольная система координат, в которой кривая второго порядка имеет канонический вид, также называется канонической.

Аффинная классификация кривых второго порядка: с помощью аффинной замены координат любую кривую второго порядка можно привести к одному, причем только одному, из перечисленных ниже видов:

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2=1 && (\textit{эллипс}),\\
&x^2+y^2=-1 && (\textit{мнимый эллипс}),\\
&x^2+y^2=0 && (\textit{пара мнимых пересекающихся прямых}),\\
&x^2-y^2=1 && (\textit{гипербола}),\\
&x^2-y^2=0 && (\textit{пара пересекающихся прямых}),\\
&y^2=2x && (\textit{парабола}),\\
&x^2=1 && (\textit{пара параллельных прямых}),\\
&x^2=-1 && (\textit{пара мнимых параллельных прямых}),\\
&x^2=0 && (\textit{пара совпадающих прямых}).
\end{aligned}$$

Таким образом, в отличие от случая ортогональной классификации, имеется всего девять классов аффинно эквивалентных кривых, называемых также *аффинными типами* кривых второго порядка.

Название каждого аффинного типа указано выше в скобках рядом с соответствующим уравнением.

§ 6.1. Составление уравнений кривых второго порядка

501. Для каждого случая составить каноническое уравнение эллипса:

1) полуоси эллипса равны 5 и 4;

2) расстояние между фокусами равно 8, а большая ось равна 10;

3) большая ось равна 26, а эксцентриситет равен 12/13.

502. В каждом из следующих случаев составить каноническое уравнение гиперболы:

1) действительная ось равна 48, а эксцентриситет $e = 13/12$;

2) действительная ось равна 16, а угол φ между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $\operatorname{tg}\varphi = 3/4$.

503. Окружность проходит через точки $(1, 4)$, $(-7, 4)$ и $(2, -5)$. Найти ее центр, радиус и написать уравнение.

504. Написать уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках $(1, 0)$ и $(9, 0)$ и касающегося оси Oy в точке $(0, 3)$, зная, что его оси параллельны осям координат.

505. Написать уравнение эллипса с вершинами $(0, 6)$ и $(0, -2)$, зная, что на оси Ox этот эллипс высекает хорду длины 6.

506. Написать уравнение равносторонней гиперболы, одна из вершин которой находится в точке $(2, 2)$, действительная ось параллельна оси Oy, и при этом на оси Ox гипербола высекает хорду длины 8.

507. Составить уравнение параболы, если даны координаты фокуса $F(3, 0)$ и уравнение директрисы $x = -1$.

508. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(2, 6)$, а ось параллельна оси Oy, зная, что на оси Ox эта парабола высекает хорду длины 6.

509. Написать уравнения эллипса и гиперболы с фокусами $(7, 0)$ и $(-7, 0)$, проходящих через точку $(-2, 12)$.

510. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$, а большая ось равна 2.

511. Даны координаты фокусов $F_1(1, 0)$ и $F_2(0, 1)$ и уравнение касательной $x + y - 2 = 0$. Составить уравнение эллипса.

512. Написать уравнение параболы, зная ее фокус $F(-1, -2)$ и директрису $x - y + 8 = 0$.

513. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус — в точке $F(1, 1)$.

514. Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокус $F(0, 1)$, директрису $x - y + 3 = 0$, соответствующую фокусу F, и точку $A(7, 0)$, лежащую на ней.

515. Составить уравнение линии второго порядка, зная один из ее фокусов $F(1, 1)$, соответствующую ему директрису $x + 2y - 1 = 0$ и эксцентриситет $e = \sqrt{5}$.

516. Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокусы $F_1(1, 1)$ и $F_2(-2, -2)$ и одну из директрис $x + y - 1 = 0$.

517. Написать уравнение линии второго порядка с центром в точке $C(1, 2)$, проходящей через начало координат, одной из директрис которой служит прямая $x + 2y - 1 = 0$.

518. Написать уравнение равносторонней гиперболы, для которой ось Ox служит асимптотой, а точка $(1, 1)$ — вершиной.

519. Даны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm 5x/12$ и лежащая на ней точка $M(24, 5)$. Составить каноническое уравнение гиперболы.

520. Даны уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ асимптот гиперболы и координаты точки $M(x_0, y_0)$, лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.

521. Найти геометрическое место середин отрезков, отсекающих от данного угла величины α треугольники фиксированной площади S. Доказать, что все эти отрезки касаются одной и той же гиперболы.

522. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух асимптот одно и то же для всех точек гиперболы.

523. Написать уравнение гиперболы, для которой точка $F(-2, 2)$ служит фокусом, а прямые $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$ — асимптотами.

524. Написать уравнение гиперболы, зная асимптоту $y = 0$, одну из ее осей $2x - y + 2 = 0$ и точку $(1, 1)$, лежащую на гиперболе.

525. Написать уравнение параболы, которая проходит через точки $O(0, 0)$, $P(4, 0)$, $Q(0, 2)$, при условии, что точки P и Q симметричны относительно оси этой параболы.

526. Написать уравнение эллипса с длинами полуосей $a = 2$, $b = 1$, для которого прямые $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ суть соответственно большая и малая оси.

527. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через точки $M_1(-2, -1)$ и $M_2(0, -2)$, для которой прямые $x + y + 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ служат осями симметрии.

528. Написать уравнение параболы, которая проходит через точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, для которой прямая $x+y+1=0$ служит осью симметрии.

529. Написать уравнение эллипса, центр которого находится в точке $(4, 3)$, одна вершина лежит в начале координат, другая, соседняя с ней, — на оси Oy.

530. Составить уравнение гиперболы, если даны координаты двух ее фокусов $F_1(x_1, y_1)$ и $F_2(x_2, y_2)$ и уравнение касательной $Ax+By+C=0$.

531. Написать уравнение линии второго порядка, для которой ось Ox является осью симметрии, ось Oy — касательной в вершине, зная, что линия проходит через две точки $(2, 3)$ и $(6, -3)$.

§ 6.2. Нахождение вида и расположения линии второго порядка по уравнению

Для определения канонического вида и расположения кривой второго порядка, заданной уравнением $F=0$ вида (6.1) в прямоугольной системе координат, можно использовать следующие приемы.

Если коэффициент a_{12} в уравнении (6.1) равен нулю, то оси канонической системы параллельны осям исходной прямоугольной системы. Начало $\widetilde{O}$ канонической системы координат подбирается таким образом, чтобы наибольшее количество коэффициентов уравнения кривой обратилось в нуль при переходе в эту систему. В новой системе координат $\widetilde{O}\widetilde{x}\widetilde{y}$ уравнение приобретает один из следующих видов:

$$\lambda_1\widetilde{x}^2+\lambda_2\widetilde{y}^2+\tau=0,$$

$$\lambda\widetilde{x}^2+\mu\widetilde{y}=0, \quad \lambda\widetilde{y}^2+\mu\widetilde{x}=0.$$

Для получения канонического уравнения может быть необходимо также поменять местами базисные векторы, у одного из них сменить знак и умножить все уравнение на число.

Если $a_{12}\neq 0$, то угловые коэффициенты k_1, k_2 осей канонической системы координат можно найти по формуле

$$k_{1,2}=\frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}}\right)^2+1}.$$

Перейдя в систему координат, оси которой имеют такие угловые коэффициенты, получим уравнение с нулевым коэффициентом при произведении xy; далее можно действовать так же, как в случае $a_{12}=0$.

Направляющие векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ канонической системы координат можно также найти (с точностью до перестановки и выбора знака), решая уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_1 \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_2 \end{pmatrix}\mathbf{e}_2 = 0,$$
$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1,$$

где $\lambda_{1,2}$ — корни *характеристического уравнения*

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После замены координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i,$$

уравнение (6.1) принимает вид

$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + \lambda_2\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1\widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2\widetilde{y} + a = 0, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Центры кривой (6.1) (если они существуют) можно также найти, не делая замен координат, а решив систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0. \end{cases}$$

Выражения, стоящие в левой части этих уравнений, — это половины *частных производных* многочлена F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_1), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2(a_{12}x + a_{22}y + a_2).$$

(Этим методом поиска центров можно пользоваться в любой, не обязательно прямоугольной, аффинной системе координат Oxy.)

Кривая $F = 0$ не имеет центров тогда и только тогда, когда она является параболой. В этом случае направление (α, β) ее оси можно найти (с точностью до знака), решив уравнение

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Сама ось задается тогда уравнением

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

В точках оси направление вектора

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

противоположно положительному направлению оси параболы.

532. Найти фокусы и директрисы равносторонней гиперболы $2xy = a^2$.

533. Найти фокусы гиперболы:

1) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{64} = -1$.

534. Найти координаты фокуса параболы $x^2 = 4y$.

535. Составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 6x$.

536. Найти фокусы и соответствующие им директрисы следующих линий:

1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{20} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{4} - 2y^2 + 8 = 0$; 3) $y = \dfrac{3}{4}x^2$.

537. С помощью переноса осей координат найти каноническое уравнение и определить расположение линий второго порядка, заданных уравнениями:

1) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$; 5) $2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0$;
2) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$; 6) $2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0$;
3) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$; 7) $4y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$;
4) $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$; 8) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$.

538. Найти центры следующих линий второго порядка:

1) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$;
2) $2xy - 4x + 2y + 11 = 0$;
3) $4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 5y + 6 = 0$;
4) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 11 = 0$.

539. Найти канонический вид и формулы, связывающие исходные координаты с каноническими, для следующих кривых второго порядка:

1) $\dfrac{(x+y-1)^2}{2} + \dfrac{(x-y+3)^2}{8} + 1 = 0$;
2) $(x+2y+1)^2 + 4x - 2y - 6 = 0$;
3) $(x+2y+1)^2 + x - 3y - 6 = 0$;
4) $\dfrac{(x-3y+2)^2}{10} - \dfrac{(3x+y+1)^2}{20} + 20x = 0$.

540. Определить канонический вид и каноническую систему координат следующих линий второго порядка:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$;
2) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$;
3) $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$;
4) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$;
5) $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$;
6) $7x^2-24xy-38x+24y+175=0$;
7) $9x^2+24xy+16y^2-40x+30y=0$;
8) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$;
9) $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$.

541. В прямоугольной системе координат кривая второго порядка задана уравнением $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$.

1) Привести заданное уравнение к каноническому виду.

2) Найти связь старых координат x и y с новыми x' и y' (каноническими).

3) Найти координаты центра, вершин и фокусов этой кривой относительно начальной системы координат.

4) Составить уравнения директрис, асимптот и касательных в вершинах этой кривой в начальной системе координат.

§ 6.3. Ортогональные инварианты линий второго порядка

Ортогональными инвариантами многочлена второго порядка F, стоящего в левой части уравнения (6.1), являются следующие величины:

$$I_1=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}+a_{22},\quad I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

При ортогональных заменах координат ортогональные инварианты не изменяются. При умножении уравнения (6.1) на λ они изменяются следующим образом: $I_k \mapsto \lambda^k I_k$.

542. Составить канонические уравнения линий, если заданы их инварианты:

1) $I_1=0$, $I_2=-25$, $I_3=125$;
2) $I_1=2$, $I_2=-15$, $I_3=-30$;
3) $I_1=7$, $I_2=10$, $I_3=-20$;
4) $I_1=5$, $I_2=0$, $I_3=-50$;
5) $I_1=0$, $I_2=-9$, $I_3=0$;
6) $I_1=9$, $I_2=18$, $I_3=36$;
7) $I_1=3$, $I_2=3$, $I_3=3$;
8) $I_1=1$, $I_2=0$, $I_3=1$.

543. Доказать, что условия $I_1^2 = 4I_2$, $I_1 I_3 < 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы уравнение кривой второго порядка определяло действительную окружность.

544. Выразить через инварианты I_1, I_2, I_3 условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ второго порядка задавало действительный эллипс. Выразить через I_1, I_2, I_3 длины a и b полуосей эллипса и найти его площадь S.

545. С помощью инвариантов выразить необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ задавало гиперболу, лежащую в остром угле, образованном ее асимптотами.

546. Выразить через инварианты I_1, I_2, I_3 условия, необходимые и достаточные для того, чтобы квадрика $F(x, y) = 0$ распадалась на пару перпендикулярных прямых.

547. Доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает равностороннюю гиперболу тогда и только тогда, когда $I_1 = 0$ и $I_3 \neq 0$.

548. Уравнение $F(x, y) = 0$ задает гиперболу. Используя ортогональные инварианты, написать уравнение пары ее асимптот.

549. Выразить через инварианты I_1, I_2, I_3 необходимые и достаточные условия того, что кривая $F(x, y) = 0$ является параболой. Выразить через I_1, I_2, I_3 ее фокальный параметр p.

550. Уравнение $F(x, y) = 0$ задает пару пересекающихся прямых. Выразить через ортогональные инварианты угол между ними.

551 (Полуинвариант). Доказать, что величина

$$I_2^* = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix}$$

является инвариантом уравнения (6.1) при однородных ортогональных преобразованиях (т. е. таких, при которых не изменяется начало координат).

Доказать, что если $I_2 = I_3 = 0$, то I_2^* сохраняется при любых ортогональных преобразованиях.

552. Уравнение $F(x, y) = 0$ второго порядка определяет две параллельные прямые. Выразить расстояние d между ними через инварианты и полуинвариант многочлена $F(x, y)$.

553. Кривая второго порядка, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, распадается на пару пересекающихся и не взаимно перпендикулярных прямых. Найти необходимое и достаточное условие того, что данная точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит в остром угле, образованном этими прямыми.

554. Кривая второго порядка, заданная уравнением $F(x, y)=0$, распадается на пару параллельных прямых. При каком необходимом и достаточном условии данная точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит между ними?

555. Уравнение $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ определяет пару пересекающихся прямых ($a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$). Доказать, что если система координат прямоугольная, то пара биссектрис между этими прямыми может быть задана уравнением

$$\begin{vmatrix} a_{11}x+a_{12}y & a_{12}x+a_{22}y \\ x & y \end{vmatrix} = 0.$$

556. Уравнения двух гипербол имеют вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0,$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+b=0.$$

При каком необходимом и достаточном условии они будут лежать в разных вертикальных углах, образованных их общими асимптотами?

§ 6.4. Аффинные типы линий второго порядка

557. Определить аффинный тип следующих кривых:

1) $x^2+2xy+y^2+y=0$;
2) $x^2+2xy+y^2+x+y=0$;
3) $(x+2y)^2-3y^2=1$;
4) $(2x-y)(6x-3y)-3=0$.

558. Методом Лагранжа определить аффинный тип следующих кривых второго порядка:

1) $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$;
2) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0$;
3) $2xy-4y^2+6x+6y+1=0$;
4) $x^2-4xy+y^2-4x+2y-2=0$;
5) $x^2-2xy+4y^2+2x-2y-4=0$;
6) $x^2+4xy+4y^2-6x-8y=0$;
7) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;
8) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;
9) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$;
10) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

§ 6.5. Касательные к линии второго порядка

Пусть Γ — произвольная алгебраическая кривая, заданная уравнением $F(x, y)=0$ относительно некоторой аффинной системы координат. Если $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, то точка (x_0, y_0) этой кривой называется *особой*. В противном случае она называется *неособой*, или *регулярной*, точкой кривой Г.

В частном случае кривых второго порядка особыми точками являются: точка пересечения пары прямых, все точки пары совпадающих прямых, единственная точка пары мнимых пересекающихся прямых. Остальные точки являются регулярными. Для любой квадрики, заданной уравнением вида (6.1), множество особых точек совпадает с множеством решений системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_1 &= 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 &= 0, \\ a_1 x + a_2 y + a &= 0, \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Касательная в регулярной точке (x_0, y_0) алгебраической кривой Г задается уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

В частном случае кривых второго порядка это уравнение можно записать следующим образом (с учетом того, что точка (x_0, y_0) лежит на кривой):

$$a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + a_1(x_0 + x) + a_2(y_0 + y) + a = 0,$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{6.2}$$

Таким образом, если (x_0, y_0) — точка кривой второго порядка, то равенство (6.2) имеет место тогда и только тогда, когда либо точка (x_0, y_0) особая, либо точка (x, y) лежит на касательной, проведенной в регулярной точке (x_0, y_0).

В качестве критерия того, что прямая, заданная параметрически в виде $x(t)=x_0+\alpha t$, $y(t)=y_0+\beta t$, при $t=t_0$ касается алгебраической кривой или проходит через ее особую точку, можно использовать следующее: многочлен $F(x(t), y(t))$ от переменной t имеет при $t=t_0$ корень кратности не меньше двух.

559. Найти необходимое и достаточное условие того, что прямая $Ax+By+C=0$:

1) пересекает окружность $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$;
2) не пересекает эту окружность;
3) касается этой окружности.

560. Составить уравнение касательной к квадрике

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y = 0$$

в начале координат.

561. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18} = 1,$$

проведенных из точки $(12, -3)$.

562. Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8} = 1,$$

проходящих через точку:

1) $(-6, 0)$; 2) $(2, 7\sqrt{7})$; 3) $\left(-4, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; 4) $(3, -3)$.

563. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$:

1) параллельной прямой $3x-y-17=0$;
2) перпендикулярной к прямой $2x+5y+11=0$.

564. Составить уравнения касательных к гиперболе

$$\frac{x^2}{4}-y^2 = 1,$$

проходящих через точку:

1) $(-2, 2)$; 3) $(4, \sqrt{3})$; 5) $(8, 4)$;
2) $(1, 4)$; 4) $(4, 1)$; 6) $(0, 0)$.

565. Составить уравнение касательных к параболе $y^2=16x$, проходящих через точку:

1) $(1, -2)$; 2) $(1, 4)$; 3) $(1, 5)$.

566. Провести касательные к квадрике $2x^2 + 7xy + 6y^2 + 3x + 5y - 26 = 0$ через точки:

1) $(1, 1)$; 2) $(-8, 5)$; 3) $(-7, 6)$.

567. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы из точки (x_0, y_0) к гиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1) можно было провести две касательные;
2) можно было провести одну касательную;
3) нельзя было провести ни одной касательной.

568. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax + By + C = 0$ и эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

569. Доказать, что при любом значении θ прямая

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$$

касается одного и того же эллипса. Составить его уравнение.

570. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax + By + C = 0$ с гиперболой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

571. Доказать, что при любом значении θ прямая

$$\frac{x\operatorname{ch}\theta}{a} - \frac{y\operatorname{sh}\theta}{b} = 1$$

касается одной и той же гиперболы, заданной каноническим уравнением. Составить уравнение этой гиперболы.

572. Найти необходимое и достаточное условие касания прямой $Ax + By + C = 0$ и параболы $y^2 = 2px$.

573 (Двойственная квадрика). Доказать, что прямая $\alpha x + \beta y + 1 = 0$ касается невырожденной действительной квадрики (6.1) или является ее асимптотой тогда и только тогда, когда α и β удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix} = 0.$$

574. Пусть Г — кривая второго порядка, для которой $I_2 \neq 0$ или $I_3 \neq 0$. Доказать, что прямая $Ax + By + C = 0$ касается кривой Г, проходит через ее особую точку или является асимптотой тогда и только тогда, когда выполнено следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{12} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

575. Доказать, что при любом значении k прямая $y = kx + 1/k$ касается одной и той же параболы, заданной каноническим уравнением. Найти уравнение этой параболы.

576. Составить уравнение общих касательных к эллипсам

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1.$$

577. Эллипс, имеющий фокусы в точках $F_1(-3, 0)$ и $F_2(3, 0)$, касается прямой $x + y - 5 = 0$. Составить уравнение эллипса.

578. Составить уравнение такой линии второго порядка, которая касается прямых $x = 0$, $y = 0$ в точках $P(0, 3)$, $Q(4, 0)$ и прямой $x + y - 1 = 0$. Найти точку касания с последней прямой.

579. Написать уравнение гиперболы, имеющей асимптотами прямые $x - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ и касающейся прямой $4x + y + 5 = 0$.

580. Составить уравнение параболы, касающейся осей Ox и Oy в точках $P(3, 0)$ и $Q(0, 5)$ соответственно.

581. Составить уравнение линии второго порядка, касающейся сторон треугольника PQR и имеющей центр в точке $S(2, 1)$, если известны координаты вершин $P(0, 0)$, $Q(5, 0)$, $R(0, 4)$.

582. Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой его касательной равно квадрату малой полуоси.

583. Доказать, что произведение расстояний от фокусов гиперболы до любой касательной к ней равно квадрату мнимой полуоси.

584. Даны фокусы гиперболы $F_1(4, 2)$, $F_2(-1, -10)$ и уравнение касательной $3x + 4y - 5 = 0$. Найти полуоси гиперболы.

585. Найти геометрическое место точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных к данному эллипсу с полуосями a, b.

586. Эллипс с полуосями a и b, где $a < b$, при движении по плоскости касается осей координат, оставаясь в первой четверти. Какую линию описывает центр эллипса?

587. Найти геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых касаются данной гиперболы с полуосями a и b.

588. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на касательные к ней.

§ 6.6. Диаметры, взаимно сопряженные и асимптотические направления линий второго порядка

Уравнение

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0 \qquad (6.3)$$

определяет диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению (α, β).

589. Составить уравнение прямой, проходящей через середины хорд $2x - y + 7 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ эллипса

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

590. Составить уравнение диаметра параболы $y = x^2/6$, сопряженного хорде $y = 1{,}5x + 4$.

591. Написать уравнение диаметра кривой второго порядка

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0,$$

проходящего через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой $x - 2y - 1 = 0$.

592. Найти такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая точкой $(3, 1)$ делится пополам.

593. Составить уравнение хорды эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

которая точкой $M(2, 1)$ делится пополам.

594. Для кривой $x^2 + 2xy - 3y^2 + 4x + 5y - 6 = 0$ провести хорду, которая делится пополам точкой:

1) $M(0, 0)$; 2) $N(3, 2)$.

595. Найти общий диаметр двух кривых:

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0, \quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

596. Какое множество задает уравнение (6.3), если в качестве (α, β) взять вектор асимптотического направления:

1) гиперболы; 2) параболы?

597. Найти асимптоты гиперболы

$$10x^2+21xy+9y^2-41x-39y+4=0.$$

598. Даны две линии второго порядка

$$3x^2-2xy+y^2+6x-10=0, \quad 3x^2-2xy-y^2+6x-10=0.$$

Для каждой кривой найти пару сопряженных диаметров так, чтобы диаметры одной пары были параллельны диаметрам второй пары.

599. Найти оси симметрии следующих линий второго порядка (система координат прямоугольная):

1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+3=0$;

2) $2xy-4x+2y-3=0$;

3) $x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6=0$;

4) $2x^2+3xy-2y^2+5y-2=0$;

5) $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0$.

600. В уравнении $F(x, y)=0$ кривой второго порядка сделана следующая замена координат: $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$, где (x_0, y_0) — некоторая точка. Доказать, что в полученном уравнении:

1) квадратичная часть совпадает с квадратичной частью исходного уравнения;

2) коэффициенты при x' и y' равны $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ соответственно;

3) свободный член равен $F(x_0, y_0)$.

601. Два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}_1=(\alpha_1, \beta_1)$ и $\mathbf{e}_2=(\alpha_2, \beta_2)$, заданные относительно аффинной системы координат Oxy, приняты за базис новой системы координат $Ox'y'$. Пусть в новой системе кривая (6.1) задается уравнением

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'=0.$$

Доказать, что коэффициенты нового уравнения выражаются через коэффициенты старого следующим образом:

$$a'_{ij}=\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \beta_j\end{pmatrix}, \quad a'_i=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{pmatrix}, \quad a'=a.$$

602. Написать уравнение эллипса, принимая за начало аффинной системы координат его центр, а за базисные точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ — концы двух взаимно сопряженных диаметров.

603. Написать уравнение эллипса, зная его центр $C(2, 1)$ и концы двух сопряженных диаметров $A(5, 1)$, $B(0, 3)$.

604. Написать уравнение эллипса, зная, что его центр находится в точке $C(2, 1)$ и что прямые $y-2=0$ и $x-y=0$ служат касательными в концах двух сопряженных диаметров.

605. Как запишется уравнение параболы, если за начало аффинной системы координат выбрать произвольную точку параболы, за ось Oy — касательную в этой точке, за ось Ox — диаметр, сопряженный этой касательной, а за единичную точку E — некоторую точку параболы?

606. Дано уравнение

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+2(Ax+By+C)=0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказать, что:

1) это уравнение задает параболу;

2) прямая $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ является ее диаметром;

3) прямая $Ax+By+C=0$ является касательной к параболе в точке пересечения последней с диаметром.

607. Написать уравнение параболы, которая проходит через точку $P(0, 1)$, для которой прямая $x+2y=0$ служит диаметром, а прямая $x+y=0$ — касательной в конце этого диаметра.

608. В линию второго порядка, заданную уравнением $x^2-6xy+{}$ $+y^2+4=0$, вписан параллелограмм, одной из сторон которого является прямая $x-1=0$. Написать уравнения остальных его сторон.

609. Показать, что если кривая второго порядка касается одной из сторон описанного около нее параллелограмма в середине этой стороны, то остальных трех сторон параллелограмма она касается также в их серединах; кривая в этом случае есть эллипс.

610. Доказать, что диагонали параллелограмма, описанного около кривой второго порядка, суть сопряженные диаметры этой кривой.

611. Доказать, что если центр линии второго порядка, описанной около треугольника, совпадает с его центром тяжести, то эта линия — эллипс.

612. Доказать, что если центр линии второго порядка, вписанной в треугольник, совпадает с его центром тяжести, то эта линия — эллипс.

613. Показать, что если кривая второго порядка касается двух сторон описанного около нее треугольника в серединах этих сторон, то она и третьей стороны касается в ее середине; в этом случае кривая является эллипсом и ее центр совпадает с центром тяжести треугольника.

614. Дан треугольник POQ с вершинами $O(0, 0)$, $P(8, 0)$, $Q(0, 6)$. Написать уравнение линии второго порядка, касающейся сторон этого треугольника в их серединах.

615. Дан треугольник MON с вершинами $O(0, 0)$, $M(9, 0)$, $N(0, 6)$. Написать уравнение линии второго порядка, описанной около этого треугольника так, что касательные к этой линии в вершинах треугольника параллельны его противоположным сторонам.

616. Дан треугольник PQR: $P(4, 2)$, $Q(8, 2)$, $R(4, 5)$. Написать уравнение параболы, описанной около этого треугольника так, что медиана, проведенная из вершины P, является ее диаметром.

617. Около линии второго порядка, заданной уравнением

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0,$$

описан параллелограмм $PQRS$, одной из вершин которого является точка $P(3, 4)$. Найти остальные его вершины.

618. Найти линию второго порядка, проходящую через четыре точки $K(1, 0)$, $L(3, 2)$, $M(0, 2)$, $N(0, -2)$, зная, что хорды KL и MN имеют сопряженные друг другу направления.

619. Найти геометрическое место точек плоскости, которые могут служить центрами линий второго порядка, описанных около данного треугольника PQR, в зависимости от типа этих линий.

620. Определить геометрическое место середин хорд эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

проходящих через правый фокус.

621. Найти геометрическое место середин хорд гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

проходящих через точку $S(x_1, y_1)$.

§ 6.7. Пучки и связки линий второго порядка

622. Не находя точки пересечения окружностей

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 18 = 0 \quad \text{и} \quad (x+3)^2 + (y-1)^2 - 36 = 0,$$

составить уравнение их общей хорды.

623. Две линии второго порядка пересекаются по четырем точкам P, Q, R, S. Известно, что оси канонической системы координат для первой линии параллельны каноническим осям второй. Доказать, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

624. Доказать, что для того, чтобы четыре точки параболы $y=kx^2$ лежали на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы сумма абсцисс этих точек была равна нулю.

625. Даны два эллипса, уравнения которых отличаются только свободными членами. Доказать, что они гомотетичны.

626. Известно, что уравнения двух гипербол отличаются только свободными членами. Доказать, что у них общие асимптоты.

627. Уравнения двух парабол отличаются только свободными членами. Доказать, что эти параболы отличаются сдвигом вдоль их общей оси.

628. Дана линия второго порядка $3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 9 = 0$. Найти кривую второго порядка, оси симметрии которой совпадают с осями указанной кривой, а полуоси в два раза больше.

629. Найти гиперболу, симметричную равносторонней гиперболе $x^2-6xy-y^2+12x-6y+5=0$ относительно ее асимптот.

630. Какие из следующих условий на кривую второго порядка Г записываются как линейные однородные соотношения на коэффициенты ее уравнения? В каждом случае, когда это так, найти количество линейно независимых соотношений, соответствующих указанному условию:

1) $I_1=0$; 2) $I_2=0$; 3) $I_3=0$;

4) кривая Г проходит через данную точку (x_0, y_0);

5) кривая Г касается данной прямой ℓ;

6) кривая Г касается данной прямой ℓ в точке $(x_0, y_0)\in\ell$ или имеет особенность в этой точке;

7) кривая Г имеет данное асимптотическое направление;

8) данная прямая ℓ является асимптотой кривой Г;

9) данная прямая ℓ является осью симметрии кривой Г, но не содержится в Г;

10) данные два направления (α_1, β_1) и (α_2, β_2) сопряжены относительно Г;

11) данное направление (α, β) является главным для Г;

12) данная точка (x_0, y_0) является центром кривой Г;

13) данная прямая ℓ является диаметром или асимптотой кривой Г.

631. Доказать, что если невырожденная линия второго порядка проходит через вершины треугольника, не являющегося прямоугольным, и точку пересечения его высот, то эта линия есть равносторонняя гипербола.

632. Доказать, что если две равносторонние гиперболы пересекаются в четырех точках, то каждая из этих точек есть точка пересечения высот треугольника, образованного тремя другими точками.

633. Доказать, что всякая линия второго порядка, проходящая через четыре точки пересечения двух равносторонних гипербол, есть равносторонняя гипербола или пара взаимно перпендикулярных прямых.

634 (Окружность девяти точек). Доказать, что центры равносторонних гипербол, описанных около данного треугольника, вместе с основаниями его высот образуют окружность, проходящую через середины сторон треугольника и середины отрезков, соединяющих его вершины с точкой пересечения высот.

635. Найти геометрическое место центров гипербол, проходящих через две фиксированные точки P, Q и имеющих одни и те же асимптотические направления.

636. Написать уравнение гиперболы, которая касается оси Ox в точке $P(3, 0)$, имеет ось Oy своей асимптотой и проходит через точку $Q(1, 1)$.

637. Составить уравнение линии второго порядка, которая касается прямых $x-1=0$ и $x+y-2=0$ в точках $(1, 0)$ и $(0, 2)$ и проходит через точку $(0, 0)$.

638. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через начало координат и касающейся прямой $4x+3y+2=0$ в точке $O_1(1, -2)$, а прямой $x-y-1=0$ — в точке $O_2(0, -1)$.

639. Дан треугольник MON: $O(0, 0)$, $M(8, 0)$, $N(0, 6)$. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через вершину O этого треугольника, пересекающей стороны OM и ON в их серединах и касающейся стороны MN в ее середине.

640. Пусть N_1, N_2, N_3, N_4 — четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, $f_{ij}(x, y)=0$ — уравнение прямой, соединяющей точки N_i и N_j. Показать, что любая кривая второго порядка, проходящая через точки $N_1, \ldots, N_4$, задается уравнением вида $\lambda f_{12}(x, y) f_{34}(x, y)+\mu f_{14}(x, y) f_{23}(x, y)=0$.

641. Показать, что если две кривые второго порядка имеют пять общих точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, то они совпадают.

642. Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через точки пересечения прямых $x+y-4=0$, $16x+31y-48=0$ с прямыми $y-2=0$, $y+2=0$ и касающейся оси Ox.

643. Написать уравнение линии второго порядка, проходящей через пять точек $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -5)$, $(-5, 2)$.

644. Доказать, что если кривая третьего порядка $f(x, y) = 0$ имеет с нераспадающейся кривой второго порядка $g(x, y) = 0$ семь общих точек, то она распадается на кривую $g(x, y) = 0$ и прямую.

645. Пусть Γ — невырожденная кривая второго порядка, $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_6$ — вершины вписанного в нее шестиугольника, $f_{ij}(x, y) = 0$ — уравнение прямой P_iP_j. Найти λ, при котором кривая

$$f_{12}(x, y) f_{34}(x, y) f_{56}(x, y) - \lambda f_{23}(x, y) f_{45}(x, y) f_{16}(x, y) = 0$$

распадается на кривую Γ и прямую.

646. Пусть $f_{ij}(x, y) = 0$ — уравнения прямых из предыдущей задачи Доказать *теорему Паскаля*: три точки пересечения прямых

$$f_{12}(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad f_{45}(x, y) = 0,$$
$$f_{23}(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad f_{56}(x, y) = 0,$$
$$f_{34}(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad f_{16}(x, y) = 0$$

лежат на одной прямой.

647. Составить уравнение параболы, касающейся всех сторон четырехугольника с вершинами $M_1(0, 0)$, $M_2(6, 0)$, $M_3(5, 3)$, $M_4(0, 2)$.

648. Определить геометрическое место центров линий второго порядка, касающихся сторон четырехугольника $N_1N_2N_3N_4$, если даны координаты вершин $N_1(4, 0)$, $N_2(0, 2)$, $N_3(-3, 0)$, $N_4(0, -1)$.

Глава 7

Поверхности второго порядка

Определение поверхностей второго порядка в пространстве, их метрическая и аффинная классификации аналогичны случаю кривых второго порядка на плоскости. Ниже перечислены канонические уравнения поверхностей второго порядка и названия соответствующих аффинных типов:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a \geqslant b \geqslant c > 0)$ — эллипсоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a \geqslant b \geqslant c > 0)$ — мнимый эллипсоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a \geqslant b > 0,\ c > 0)$ — однополостный гиперболоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a \geqslant b > 0,\ c > 0)$ — двуполостный гиперболоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0 \quad (a \geqslant b > 0)$ — действительный конус,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2=0 \quad (a \geqslant b \geqslant 1)$ — мнимый конус,

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p \geqslant q > 0)$ — эллиптический параболоид,

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p \geqslant q > 0)$ — гиперболический параболоид,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a \geqslant b > 0)$ — эллиптический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a \geqslant b > 0)$ — мнимый эллиптический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a, b > 0)$ — гиперболический цилиндр,

$y^2=2px \quad (p > 0)$ — параболический цилиндр,

$\frac{x^2}{a^2}-y^2=0 \quad (a \geqslant 1)$ — пара пересекающихся плоскостей,

$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$ $(a \geqslant 1)$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей,

$x^2 = a^2$ $(a > 0)$ — пара параллельных плоскостей,

$x^2 = -a^2$ $(a > 0)$ — пара мнимых параллельных плоскостей,

$x^2 = 0$ — пара совпадающих плоскостей.

Во всех задачах этой главы система координат предполагается прямоугольной, если не оговорено противное.

§ 7.1. Составление уравнений поверхностей

649. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$x^2 + y^2 = 11, \quad z = 0$$

и касающейся плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

650. Найти центр C и радиус r сферы, проходящей через начало координат и линию пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 5 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z - 10 = 0$.

651. Найти уравнение сферы радиусом 3, касающейся плоскости $x - 2y + 2z = 4$ в точке $(0, -1, 1)$.

652. Написать уравнение кругового конуса, вершина которого находится в начале координат, ось совпадает с осью Oz, а угол между осью и образующей конуса равен γ.

653. Написать уравнение кругового конуса, вершина которого находится в точке (x_0, y_0, z_0), ось параллельна вектору (a, b, c), а образующие составляют с осью угол φ.

654. Составить уравнение кругового конуса, вершина которого находится в точке $(1, 2, 3)$, направляющий вектор оси $(2, 2, -1)$, а угол образующих конуса с осью равен $\pi/6$.

655. Написать уравнение кругового конуса, касающегося плоскостей Oxz и Oyz по прямым Ox и Oy.

656. Написать уравнение кругового конуса, для которого оси Ox и Oy являются образующими, а ось Oz составляет с осью конуса, проходящей в первом и седьмом октантах, угол $\pi/4$. Написать также каноническое уравнение этого конуса.

657. Составить уравнение кругового конуса при условии, что все три оси координат служат образующими конуса, а ось конуса проходит в первом и седьмом октантах.

658. Составить уравнение кругового конуса, касающегося трех плоскостей координат, зная, что его ось проходит в первом и седьмом октантах.

659. Составить уравнение конуса, описанного около сферы с центром в точке $(0, 4, 1)$ и радиусом 6, при условии, что вершина конуса находится в точке $(8, 0, 0)$.

660. Написать уравнение конуса, проходящего через прямые $y = \pm x$, $z = 0$ и точку $(1, 2, 3)$, для которого ось Oz является осью симметрии.

661. Написать уравнение конуса с вершиной в точке $(0, 0, a)$, направляющей которого служит гипербола $2xy = a^2$, $z = 0$. Пользуясь преобразованием прямоугольных координат, привести полученное уравнение конуса к каноническому виду.

662. Написать уравнение конуса с вершиной в точке $(0, 0, p)$, направляющей которого служит парабола $y^2 = 2px$, $z = 0$. Пользуясь преобразованием прямоугольных координат, привести полученное уравнение к каноническому виду.

663. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(0, 0, 0)$, а направляющей служит гипербола $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$, $z = 3$.

664. Написать уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющей которого служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

665. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $(1, 1, 1)$, а направляющей служит парабола $y^2 = 2x$, $z = 0$.

666. Написать уравнение круглого цилиндра радиусом r, осью которого является прямая

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

667. Составить уравнение круглого цилиндра, проходящего через точку $(1, -2, 1)$, осью которого служит прямая

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-2}.$$

668. Составить уравнение цилиндра, образующие которого касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и составляют равные углы с осями координат.

669. Написать уравнение параболического цилиндра с параметром $p = 2/3$, зная вершину $O'(2, 1, -1)$ параболы, получающейся при пересечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим, направляющий вектор $\mathbf{e}_1' = (2/3, 2/3, 1/3)$ оси этой параболы и направляющий вектор $\mathbf{e}_2' = (2/3, -1/3, -2/3)$ касательной в ее вершине.

670. Написать уравнение цилиндра, направляющей которого служит окружность $x^2+y^2=1$, $z=0$, а образующие составляют с осями координат равные углы.

671. Направляющей цилиндра служит окружность $x^2+y^2=r^2$, $z=0$, его образующие параллельны вектору $(0, \beta, \gamma)$. Написать уравнение этого цилиндра и привести его к каноническому виду, пользуясь преобразованием прямоугольных координат.

672. Написать уравнение гиперболического цилиндра с направляющей $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$, $z=3$ и образующей, параллельной вектору $(1, 1, 1)$.

673. Написать уравнение параболического цилиндра, образующая которого параллельна вектору $(1, 1, 1)$, а направляющей служит парабола $y^2=2x$, $z=0$.

674. Написать уравнение гиперболического цилиндра с асимптотическими плоскостями $x+y-z=1$, $2x-y+z=2$, проходящего через точку $(1, -1, 2)$.

675. Эллипс с полуосями a и b, $a>b$, вращается вокруг своей большой оси, совпадающей с осью Oz, так, что центр эллипса совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой эллипсом при его вращении.

676. Гипербола с полуосями a и b вращается вокруг своей действительной оси, совпадающей с осью Oz, причем центр гиперболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой гиперболой при ее вращении.

677. Гипербола с полуосями a и b вращается вокруг своей мнимой оси, совпадающей с осью Oz, причем центр гиперболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой гиперболой при ее вращении.

678. Парабола с параметром p вращается вокруг своей оси, совпадающей с осью Oz. Вершина параболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой параболой.

679. В плоскости Oxz дана парабола $x^2=2pz$, $y=0$. По ней перемещается вершина другой параболы с параметром q, плоскость которой остается все время параллельной плоскости Oyz, а ось — параллельной оси Oz. Составить уравнение поверхности, описываемой подвижной параболой.

680. Вокруг оси Oz вращается скрещивающаяся с ней прямая. Угол этой прямой с осью Oz остается постоянным и равным γ; общий перпендикуляр к оси Oz и этой прямой также сохраняет постоянную величину r и находится все время в плоскости Oxy. Составить уравнение поверхности, описываемой вращающейся прямой.

681. Написать уравнение конуса с вершиной $(2, 3, 6)$, зная, что плоскость Oxy пересекает его по эллипсу, оси которого параллельны осям Ox и Oy, причем эллипс касается этих осей координат, а ось самого конуса параллельна оси Oz.

682. Написать уравнение параболоида вращения с параметром $p = 1/3$, вершиной $(1, 0, -1)$ и направляющим вектором оси вращения $(2/3, 1/3, -2/3)$.

683. Написать уравнение параболоида вращения с параметром p, вершиной в точке $O'(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором оси $\mathbf{u} = (a, b, c)$.

684. Эллипс с полуосями a и b, $a > b$, центром в точке $O'(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором большой оси $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ вращается около своей большой оси. Написать уравнение полученного эллипсоида вращения.

685. Написать уравнение эллипсоида с вершинами $(0, 0, 6)$ и $(0, 0, -2)$, зная, что плоскость Oxy пересекает его по окружности радиусом 3.

686. Написать уравнение двуполостного гиперболоида с вершинами $(0, 0, \pm 6)$, зная, что плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии и пересекают его по гиперболам, асимптоты которых образуют с осью Oz углы, соответственно равные $\pi/6$ и $\pi/3$.

687. Написать уравнение эллиптического параболоида с вершиной $(2, 3, 6)$ и осью, параллельной оси Oz, зная, что плоскость Oxy пересекает его по эллипсу, оси которого параллельны осям Ox и Oy, причем эллипс касается этих осей координат.

688. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если известно, что он содержит окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z = x$$

и точку $(3, 1, 1)$.

689. Написать уравнение однополостного гиперболоида с равными полуосями, проходящего через прямые $y = \pm x$, $z = 0$ и точку $(1, 2, 3)$, для которого ось Oz является осью симметрии.

690. Написать уравнение поверхности второго порядка, проходящей через три окружности:

$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 0; \quad x^2 + y^2 = 9,\ z = 1; \quad x^2 + y^2 = 25,\ z = 2,$$

и привести полученное уравнение к каноническому виду.

§7.2. Простейшие свойства поверхностей второго порядка

691. Найти центр и радиус окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, \\ 2x+2y+z+1=0. \end{cases}$$

692. Написать уравнения плоскостей, проходящих через прямую

$$\frac{x-13}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{4}$$

и касающихся сферы $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$.

693. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-40=0, \\ 2x+2y-z+4=0 \end{cases}$$

и через начало координат.

694. Доказать, что линия пересечения двух параболических цилиндров $y^2=x$, $z^2=1-x$ лежит на круглом цилиндре. Каково уравнение этого цилиндра?

695. Доказать, что параболоид вращения и круглый цилиндр, оси которых параллельны, пересекаются по эллипсу, большая ось которого лежит в плоскости, проходящей через оси данных поверхностей.

696. По какой линии пересекаются однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $a>b$, и сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$?

697. Доказать, что линия пересечения параболического цилиндра $z^2=x+y$ с параболоидом вращения $x^2+y^2=z$ лежит на сфере. Найти центр и радиус этой сферы.

698. По какой линии пересекаются эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, $p>q>0$, и сфера $x^2+y^2+z^2=2pz$?

699. Доказать, что ортогональная проекция любого плоского сечения параболоида вращения на плоскость, перпендикулярную оси параболоида, есть окружность или прямая.

700. По какой линии пересекаются два эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{где } a>b?$$

701. Найти линию пересечения поверхностей $x^2+y^2-z^2=a^2$, $x^2-y^2=2az$.

702. Найти острый угол между образующими конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, по которым его пересекает плоскость $5x + 10y - 11z = 0$.

703. Определить вид и расположение линии пересечения плоскости $x = 9$ и гиперболоида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1.$$

704. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и пересекающей однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$$

по гиперболе, действительная полуось которой равна 1.

705. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы плоскость $z = ax + by + c$ пересекала параболоид вращения $x^2 + y^2 = 2pz$ $(p > 0)$ по действительному эллипсу.

706. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$$

и плоскость $2x + 3y - 6 = 0$?

707. Составить уравнение поверхности второго порядка, зная, что она пересекает плоскость Oxy по окружности $x^2 + y^2 - 12x - 18y + 32 = 0$, $z = 0$, а плоскости Oxz и Oyz — по параболам, оси которых параллельны положительному направлению оси Oz, причем параметр параболы, лежащей в плоскости Oxz, равен 1.

708. Написать уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскость Oxy по параболе, а плоскости Oxz и Oyz — по окружностям радиусом r, касающимся положительных полуосей координат. Пользуясь преобразованием прямоугольных координат, привести уравнение к каноническому виду.

709. Найти геометрическое место фокусов гипербол, получающихся при пересечении гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

плоскостями, параллельными плоскости Oxy.

710. Составить уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точки $(0, 0, 0)$, $(1, 1, -1)$, $(0, 0, 1)$, для которой плоскости

$$x + y + z = 0, \quad 2x - y - z = 0, \quad y - z + 1 = 0$$

являются плоскостями симметрии. Написать каноническое уравнение этой поверхности и указать ее тип.

711. Составить уравнение поверхности второго порядка, для которой плоскости

$$x+y+z=0, \quad 2x-y-z-2=0, \quad y-z+1=0$$

являются плоскостями симметрии и которая проходит через точки $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,1,-1)$.

712. Найти тип поверхности, состоящей из прямых, по которым пересекаются взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через две данные прямые, в зависимости от взаимного расположения последних.

713. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных скрещивающихся прямых есть одно и то же число k.

§ 7.3. Приведение поверхности к каноническому виду

Направляющие векторы канонической системы координат (главные направления) для поверхности второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат уравнением

$$\begin{aligned} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0, \end{aligned} \qquad (7.1)$$

находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{12}x+(a_{22}-\lambda)y+a_{23}z=0, \\ a_{13}x+a_{23}y+(a_{33}-\lambda)z=0, \end{cases}$$

где в качестве λ берутся корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение всегда имеет три вещественных корня (с учетом кратностей).

Пусть $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ — единичные вектор-столбцы главных направлений, соответствующие корням λ_1, λ_2, λ_3. Если корни λ_i и λ_j различны, то соответствующие им векторы $\mathbf{e}_i'$ и $\mathbf{e}_j'$ ортогональны. Если же какие-то два корня совпадают, $\lambda_i=\lambda_j$, то соответствующие векторы $\mathbf{e}_i'$ и $\mathbf{e}_j'$ находятся из одной и той же системы уравнений.

В этом случае следует наложить дополнительное условие $(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = 0$ при нахождении этих векторов.

При переходе в систему координат, связанную с репером $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$, уравнение поверхности (7.1) перепишется в виде

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0, \tag{7.2}$$

где $a'_i = (a_1 \quad a_2 \quad a_3) \cdot \mathbf{e}'_i$. Далее, сдвигом начала отсчета, домножением уравнения на константу, возможно, перестановкой базисных векторов и умножением одного из них на -1 уравнение приводится к каноническому виду.

Центры поверхности (7.1) можно находить как решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3 = 0, \end{cases}$$

причем здесь не требуется, чтобы аффинная система координат $Oxyz$ была прямоугольной.

714. Определить вид поверхности и ее расположение относительно начальной системы координат, пользуясь преобразованием левой части ее уравнения:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$;
2) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
3) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
4) $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$;
5) $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0$.

715. Определить вид и расположение поверхности, пользуясь переносом системы координат:

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$;
2) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$;
3) $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$;
4) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$.

716. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из ее осей:

1) $z^2 = 2xy$;
2) $z = xy$;
3) $z^2 = 3x + 4y$;
4) $z^2 = 3x^2 + 4xy$;
5) $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

717. Доказать, что каждая из следующих поверхностей является поверхностью вращения, определить ее вид, написать каноническое уравнение и найти расположение поверхности относительно исходной системы координат:

1) $x^2-2y^2+z^2+4xy-4yz-8zx-14x-4y+14z+18=0$;
2) $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+4yz+8zx-6x+6y+6z+10=0$;
3) $2yz+2zx+2xy+2x+2y+2z+1=0$;
4) $3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz-2x-2y-2z-1=0$;
5) $2x^2+6y^2+2z^2+8xz-4x-8y+3=0$;
6) $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-4yz-2zx+10x-4y-2z+4=0$;
7) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$;
8) $4xy+4yz+4zx+4x+4y+4z+3=0$.

718. Определить вид каждой из следующих поверхностей, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0$;
2) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$;
3) $7x^2+7y^2+16z^2-10xy-8yz-8zx-16x-16y-8z+72=0$;
4) $4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y+10z-2=0$;
5) $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0$;
6) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$;
7) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;
8) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$;
9) $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$;
10) $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$;
11) $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x+4z=0$.

719. Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа (система координат аффинная):

1) $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$;
2) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$;
3) $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$;
4) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$;
5) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;
6) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+x+y-z=0$;
7) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0$;
8) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$;
9) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$;
10) $4xy+2x+4y-6z-3=0$;
11) $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$.

§ 7.4. Ортогональные инварианты поверхностей второго порядка

720. С помощью инвариантов

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}$$

найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

была:

1) эллипсоидом;
2) мнимым эллипсоидом;
3) мнимым конусом;
4) однополостным гиперболоидом;
5) двуполостным гиперболоидом;
6) конусом;
7) эллиптическим параболоидом;
8) гиперболическим параболоидом.

721 (Ортогональные полуинварианты). Доказать, что:

1) функции

$$I_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$I_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}$$

от коэффициентов многочлена второй степени с тремя переменными

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

являются инвариантами однородного ортогонального преобразования переменных;

2) I_3^* является инвариантом неоднородного ортогонального преобразования переменных, если

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix} = 0, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

3) I_2^* является инвариантом неоднородного ортогонального преобразования переменных, если $I_3 = I_4 = 0$ и

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad I_3^* = 0.$$

722. С помощью инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4 и полуинвариантов I_2^*, I_3^* найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы поверхность второго порядка, заданная общим уравнением, была:

1) эллиптическим цилиндром;
2) мнимым эллиптическим цилиндром;
3) парой мнимых пересекающихся плоскостей;
4) гиперболическим цилиндром;
5) парой действительных пересекающихся плоскостей;
6) параболическим цилиндром;
7) парой действительных параллельных плоскостей;
8) парой мнимых параллельных плоскостей;
9) парой совпадающих плоскостей.

723. Не производя замен координат, составить канонические уравнения поверхностей:

1) $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xz - 2yz - 6x - 14y + 9 = 0$;
2) $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xz - 2yz - 8x - 2y - 6z + 8 = 0$;
3) $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 2xz - 2yz - 2x - 8y + 2z + 5 = 0$;
4) $-z^2 + 4xy - 2xz + 2yz + 2x - 2y + 4z = 0$;
5) $4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 10x - 10y - 10 = 0$;
6) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz - yz - 3x - 2y - 3z + 5 = 0$;
7) $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 1 = 0$.

724. Найти наибольший угол φ между образующими конуса $z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0$, а также углы α, β, γ, которые составляет его ось с осями координат.

725. Выразить с помощью инвариантов условия, необходимые и достаточные для того, чтобы общее уравнение второй степени определяло параболоид вращения, и найти его параметр.

726. С помощью инвариантов выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы общее уравнение второй степени определяло гиперболический параболоид с равными параметрами главных сечений, и найти эти параметры.

727. С помощью инвариантов найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы общее уравнение второй степени с тремя неизвестными определяло однополостный или двуполостный гиперболоиды с равными полуосями.

Пользуясь инвариантами, написать каноническое уравнение этих гиперболоидов.

728. Дана поверхность второго порядка

$$x^2+y^2+z^2+2axy+2axz+2ayz=1.$$

Доказать, что при всех значениях параметра a эта поверхность является поверхностью вращения; найти направляющий вектор ее оси вращения.

Для каких значений параметра a поверхность будет эллипсоидом?

729. Определить k так, чтобы поверхность $x^2-2xy+kz^2=0$ была конусом вращения, и найти ось вращения.

730. Составить уравнение конуса второго порядка, пересекающего плоскость Oyz по окружности $y^2+z^2=2ry$, $x=0$, а плоскость Oxz — по параболе $z^2=2px$, $y=0$.

731. Составить уравнение конуса второго порядка, на котором лежат окружности

$$y^2+z^2-2by=0,\ x=0; \quad x^2+z^2-2ax=0,\ y=0.$$

732. Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей координатные плоскости по гиперболам

$$yz=\frac{a^2}{2},\ x=0; \quad xz=\frac{b^2}{2},\ y=0; \quad xy=\frac{c^2}{2},\ z=0.$$

Определить вид этой поверхности. Привести ее уравнение к каноническому виду при $a=b=c=1$.

733. Составить уравнение параболоида, проходящего через прямые $x=0$, $z=2$ и $y=0$, $z=-2$ и через две точки $(0, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$.

734. Доказать, что сумма чисел, обратных квадратам длин трех любых попарно перпендикулярных радиусов эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

постоянна и равна

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

735. Доказать, что все плоскости, проходящие через концы трех попарно перпендикулярных радиусов эллипсоида, касаются сферы, вписанной в куб, вписанный в эллипсоид.

736. Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра эллипсоида на плоскости, проходящие через концы трех попарно перпендикулярных диаметров эллипсоида, — это сфера, вписанная в куб, который, в свою очередь, вписан в данный эллипсоид.

737. Найти геометрическое место вершин прямого трехгранного угла, стороны которого касаются эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

§ 7.5. Касательные и диаметральные плоскости. Прямолинейные образующие

738. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы нераспадающаяся поверхность второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy+ \\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

касалась плоскости Oxy в начале координат.

739. Доказать, что касательная плоскость к поверхности второго порядка всегда пересекает поверхность по паре прямых (действительных, мнимых или совпадающих).

740. Написать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{5}=1,$$

проходящей через точку $(12, -3, -1)$ и параллельной оси Oz.

741. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$$

и касающейся эллипсоида

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1.$$

742. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\frac{x-15}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-11}{-1}$$
и касающейся гиперболического параболоида
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z.$$

743. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности
$$2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6yz-4x-y-2z=0,$$
проходящей через прямую $4x-5y=0$, $z-1=0$.

744. Найти касательную плоскость к поверхности
$$4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0,$$
параллельную плоскости $x+2y+2=0$.

745. Найти касательную плоскость к однополостному гиперболоиду
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$
отсекающую на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные a и b, и найти прямые, по которым эта плоскость пересекает гиперболоид.

746. Написать уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду
$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$
отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные p и q.

747. Даны гиперболический параболоид
$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=2z$$
и плоскость $2x+3y-z=0$. Написать уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых; найти эти прямые.

748. Найти точку пересечения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, по которым его пересекает плоскость, параллельная плоскости $x+y-z=0$, и определить угол между этими образующими.

749. Найти точку пересечения прямолинейных образующих гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$, по которым его пересекает плоскость, параллельная плоскости $x-y+z+1=0$, и определить угол между этими образующими.

750. Найти угол φ между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида

$$x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1,$$

проходящими через точку $(1, 4, 8)$, беря на этих образующих лучи, направленные от данной точки к горловому эллипсу.

751. Дан однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$$

Через его образующую

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$$

и точку $(0, 3, 0)$ проведена плоскость. Найти вторую прямую линии пересечения этой плоскости с гиперболоидом.

752. Доказать, что ортогональные проекции прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

и гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

на плоскости координат касаются сечений этих поверхностей координатными плоскостями (для гиперболического параболоида рассматриваются только проекции на плоскости Oyz и Oxz).

753. Найти прямолинейные образующие поверхности

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0,$$

проходящие через точку $(-1, -1, 1)$.

754. Дан гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z.$$

Через его образующую

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}$$

и точку $(1, 1, 1)$ проведена плоскость. Найти вторую прямую линии пересечения параболоида с этой плоскостью.

755. Доказать, что если уравнение

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy+\\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

определяет параболоид, то уравнение

$$2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0$$

является уравнением касательной плоскости к этому параболоиду.

756. 1) Найти координаты направляющих векторов прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) гиперболоида.

2) Рассмотреть частный случай, когда точка принадлежит горловому эллипсу поверхности.

757. Найти направляющие векторы прямолинейных образующих гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) параболоида.

758. Найти геометрическое место точек, лежащих на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

через каждую из которых проходят две взаимно перпендикулярные образующие.

759. Написать уравнение поверхности второго порядка, содержащей три прямые:

$$x=1/2,\ y=z;\quad y=-1,\ z=2x;\quad y=1,\ z=-2x.$$

760. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается невырожденной поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy+\\ +2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0?$$

761. Доказать, что любая плоскость пересекает любой однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид и конус второго порядка.

762. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ пересекает следующие поверхности:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ 3) $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ q>0)$?

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1;$

763. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ касается следующих поверхностей:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ 3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1;$ 5) $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$?

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1;$ 4) $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z;$

764. Написать уравнение поверхности второго порядка, проходящей через точку $(0, 0, 1)$, имеющей центр в точке $(0, 0, -1)$ и пересекающей плоскость Oxy по линии $3x^2-4xy-3=0$, $z=0$.

765. Даны однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$$

и плоскость $6x+4y-3z-12=0$. Определить направление хорд, которым сопряжена диаметральная плоскость, параллельная данной плоскости.

766. Написать уравнение диаметральной плоскости гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=2z,$$

проходящей через прямую $x=y$, $z=1$, и найти направление тех хорд, которым сопряжена эта плоскость.

767. Даны эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=2z$$

и две точки $(3, 0, 5)$ и $(0, 4, 7)$. Написать уравнение диаметральной плоскости параболоида, проходящей через данные точки, и определить направление сопряженных ей хорд.

768. Даны параболоид вращения $x^2+y^2=2pz$ и круглый цилиндр $(x-a)^2+z^2=r^2$. Написать уравнение плоскости, которая была бы диаметральной плоскостью как для параболоида, так и для цилиндра.

769. Написать уравнение плоскости, пересекающей однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{5}=1$$
по линии, центр которой находится в точке $(6, 6, 5)$.

770. Доказать, что если три некомпланарные хорды поверхности второго порядка проходят через одну точку и делятся ею пополам, то эта точка является центром поверхности.

771. Доказать, что если за ось Oz принять произвольную прямую, не имеющую асимптотического направления поверхности второго порядка, а за плоскость Oxy — диаметральную плоскость, сопряженную направлению этой прямой, то в уравнении поверхности будут отсутствовать члены с произведениями xz и yz.

772. Как запишется уравнение однополостного гиперболоида, если за начало координат принять точку поверхности, за оси Ox и Oy — проходящие через нее прямолинейные образующие, а за ось Oz — проходящий через нее диаметр?

773. Доказать, что каждая плоскость, параллельная оси симметрии эллиптического параболоида, является диаметральной плоскостью, сопряженной к однозначно определенному неасимптотическому направлению. Верно ли это для гиперболического параболоида?

774. Написать уравнение гиперболического параболоида, принимая за начало координат произвольную точку O поверхности, за оси Ox и Oy — прямолинейные образующие, проходящие через эту точку, за ось Oz — проходящий через нее диаметр, а за единичную точку E — произвольную точку поверхности, отличную от точки O.

775. Написать уравнение конуса второго порядка, принимая за оси Ox и Oy его образующие, за ось Oz — прямую, сопряженную плоскости, проходящей через эти образующие, а за единичную точку E — произвольную точку конуса, отличную от его вершины.

776. Как запишется уравнение поверхности второго порядка, если за начало координат принять точку O поверхности, за ось Oz — проходящий через эту точку диаметр, а за оси Ox и Oy — прямые, лежащие в касательной плоскости и имеющие сопряженные направления относительно данной поверхности?

777. Написать уравнение эллипсоида, принимая за начало координат его центр, за оси координат — попарно сопряженные диаметры, а за единичные точки осей координат — точки пересечения этих диаметров с эллипсоидом.

778. Две плоскости, каждая из которых параллельна направлению, сопряженному другой относительно поверхности второго порядка, называются сопряженными относительно этой поверхности. Найти необходимое и достаточное условие того, что две плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

сопряжены относительно поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{12}xy+\\+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a=0.$$

§ 7.6. Плоские сечения поверхностей второго порядка

779. Установить, пересекает ли плоскость $2x+2y+z-3=0$ эллипсоид $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$.

780. По какой линии плоскость $x+y-z+3=0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-4$?

781. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, полученных в сечении эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\quad (p>0,\ q>0)$$

двумя его сопряженными диаметральными плоскостями, то $p'+q'=$ $=p+q$.

782. Доказать, что если p' и q' — параметры парабол, полученных в сечении гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\quad (p>0,\ q>0)$$

двумя его сопряженными диаметральными плоскостями, то $p'-q'=$ $=p-q$.

783. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(a, 0, 0)$ и пересекающих однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

по двум параллельным прямым.

784. Найти линию пересечения однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ и плоскости $3x+4y-5z=0$.

785. Доказать, что плоскость

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}+D=0$$

пересекает гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0,\ q > 0)$$

по прямой, и составить ее уравнения.

786. По какой линии касательная плоскость к однополостному гиперболоиду рассекает его асимптотический конус?

787. По какой линии однополостный гиперболоид рассекается касательной плоскостью к его асимптотическому конусу?

788. Плоскость пересекает конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geqslant b,$$

по гиперболе. В каких границах может изменяться эксцентриситет гиперболы?

789. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и пересекающей по окружности эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

790. Составить уравнение плоскости, пересекающей гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \neq b,$$

по равносторонней гиперболе и проходящей через ось: 1) Ox; 2) Oy. Найти полуоси этих гипербол.

791. Составить уравнение плоскости, пересекающей гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0,\ q > 0,$$

по равносторонней гиперболе и проходящей через ось: 1) Ox; 2) Oy. Найти полуоси этих гипербол.

792. В каждом из следующих случаев определить вид линии пересечения поверхности с плоскостью и определить расположение линии относительно исходной системы координат:

1) $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x - z + 1 = 0$;

2) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1,\ x + z + \dfrac{4\sqrt{5}}{3} = 0$;

3) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 2x - 6z = 0,\ x - z = 0$.

793. Определить вид линии, по которой плоскость $x+y+z-1=0$ пересекает параболический цилиндр $y^2=2x$. Написать каноническое уравнение этой линии и найти каноническую систему координат.

794. Определить вид линии пересечения конуса $x^2+y^2-z^2=0$ с плоскостью $4x-3y-5z+4=0$. Написать каноническое уравнение этой линии и найти каноническую систему координат.

795. Определить вид линии пересечения однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ и плоскости $2x+2y+z-1=0$.

796. Найти фокусы эллипса, получающегося при пересечении цилиндра $x^2+y^2=36$ плоскостью $3x+4y+12z=0$.

797. Найти все значения параметра k, для каждого из которых плоскость пучка $2x+y+2+k(y+z)=0$ пересекает конус $x^2+y^2-z^2=0$ по эллипсу.

798. Через прямую $2x=2y=z$ провести плоскость, пересекающую гиперболический параболоид $4x^2-y^2+z=0$ по равносторонней гиперболе.

799. По линиям какого типа может пересекать плоскость каждую из следующих поверхностей:

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус;
5) эллиптический параболоид;
6) гиперболический параболоид?

800. Найти все плоскости, пересекающие по окружности каждую из следующих поверхностей:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>b>c$;
2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>b$;
3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, $a>b$;
4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, $a>b$;
5) $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$, $p>q>0$;
6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$.

801. Найти радиус кругового сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>b>c,$$

и однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>b,$$

плоскостью, проходящей через центр поверхности.

802. Найти необходимое и достаточное условие того, что плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7.3}$$

пересекает поверхность второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \tag{7.4}$$

по центральной линии. Определить координаты центра линии пересечения поверхности (7.4) с плоскостью (7.3).

803. Через данную точку (x_0, y_0, z_0) провести плоскость так, чтобы она пересекала поверхность

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

по центральной кривой с центром в этой точке при условии, что последняя не является центром данной поверхности.

804. Найти геометрическое место центров сечений (действительных или мнимых) эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

плоскости которых проходят через данную точку (x_0, y_0, z_0) вне эллипсоида.

805. Используя предыдущую задачу, найти конус второго порядка, образующие которого касаются эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

а центр лежит в точке (x_0, y_0, z_0) вне эллипсоида.

806. Найти границу тени, которую отбрасывает эллипсоид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$$

на плоскость $z = -1$, если источник света находится в точке (2, 2, 2).

807. Дан круговой конус

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = z^2.$$

Через точку (x_0, y_0, z_0) провести плоскость, пересекающую данный конус по невырожденной кривой второго порядка, один из фокусов которой находится в указанной точке.

808. Найти фокусы сечения конуса $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$ плоскостью $x + 2y + 2z = 24$.

809. Найти геометрическое место фокусов парабол, получающихся сечением кругового конуса

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = z^2.$$

810. Найти геометрическое место центров равносторонних гипербол, лежащих на гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p \neq q.$$

811. Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ пересекает параболический цилиндр $y^2 = 2px$ по параболе с параметром p.

Глава 8

Аффинные и изометрические преобразования

Аффинным преобразованием плоскости (пространства) называется взаимно однозначное отображение плоскости (пространства) на себя, удовлетворяющее следующему свойству: если точка C делит отрезок AB в некотором отношении λ, то ее образ делит отрезок, соединяющий образы точек A и B, в том же отношении.

Если на плоскости задана аффинная система координат Oxy, то каждому аффинному преобразованию соответствуют невырожденная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и вектор-столбец $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, такие что координаты (x', y') образа произвольной точки (x, y) вычисляются по формулам

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + x_0 \\ a_{21}x + a_{21}y + y_0 \end{pmatrix}.$$

И наоборот, эта формула задает некоторое аффинное преобразование для любых A, $\mathbf{v}$ при $\det A \neq 0$.

Аналогичным образом, если в пространстве задана аффинная система координат $Oxyz$, то каждое аффинное преобразование задается невырожденной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и вектор-столбцом} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0 \end{pmatrix}.$$

Аффинное преобразование, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками, называется *изометрическим* или *ортогональным*.

Из следующих трех утверждений любые два влекут третье:

1) система координат Oxy (или $Oxyz$) прямоугольная;

2) преобразование f изометрично;

3) матрица преобразования f в системе координат Oxy (соответственно $Oxyz$) ортогональна.

§ 8.1. Аффинные преобразования плоскости

Если не оговорено противное, система координат в задачах этого параграфа предполагается аффинной.

812. Даны два аффинных преобразования

$$f: x' = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}, \quad y' = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{29}{5};$$
$$g: x' = x - y + 4, \qquad y' = -x + 2y + 5.$$

Найти преобразование f^{-1}, обратное к f, и композиции $f^{-1} \circ g$ и $g \circ f^{-1}$.

813. Относительно системы координат Oxy задано аффинное преобразование $x' = 2x + 3y + 1$, $y' = x + 2y - 2$. Найти координаты прообразов точек $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, заданных в системе координат $O'uv$, если новые координаты связаны со старыми следующим образом:

1) $u = x - 1$, $v = y + 1$;
2) $u = -y$, $v = x$;
3) $u = x + y$, $v = x + 2y - 5$;
4) $x = 2u - v + 2$, $y = -3u + v - 1$.

814. Составить формулы аффинного преобразования, переводящего точки $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ в точки $(1, 3)$, $(-2, 1)$, $(0, 0)$ соответственно.

815. Найти аффинное преобразование, переводящее точку $(-1, 1)$ в точку $(1, 2)$, а векторы $(1, 1)$ и $(0, 1)$ в векторы $(0, 2)$ и $(2, -1)$ соответственно.

816. Найти аффинное преобразование, при котором все точки прямой $2x + 3y - 5 = 0$ неподвижны, а точка $(0, 1)$ переходит в точку $(2, -1)$.

817. При аффинном преобразовании точка $(0, 0)$ переходит в точку, симметричную ей относительно прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, а точки $(2, 0)$ и $(0, 3)$ меняются местами. Найти формулы этого преобразования. Система координат прямоугольная.

818. Найти аффинное преобразование, при котором прямые $10x - 4y - 1 = 0$ и $3x - 3y + 7 = 0$ переходят в прямые $x - 2y + 3 = 0$ и $x - y - 6 = 0$ соответственно, а точка $(1, -2)$ переходит в $(0, 10)$.

819. Найти аффинную классификацию троек несовпадающих прямых.

820. Относительно системы координат Oxy задано аффинное преобразование:

$$x' = 2x + 3y + 1, \quad y' = x + 2y - 2.$$

Записать это преобразование в системе координат $O'uv$, если новые координаты связаны со старыми следующим образом:

1) $u = x - 1$, $v = y + 1$;
3) $u = x + y$, $v = x + 2y - 5$;
2) $u = -y$, $v = x$;
4) $x = 2u - v + 2$, $y = -3u + v - 1$.

821. Дано аффинное преобразование

$$x' = 4x - 3y + 1, \quad y' = 3x + 4y + 5.$$

На прямой $x + y + 2 = 0$ найти точку, которая при этом преобразовании переходит в точку, также лежащую на этой прямой.

822. Даны аффинное преобразование

$$x' = x + y - 2, \quad y' = 2x - y - 3$$

и точка $A = (1, 4)$. Найти прямую, проходящую через точку A, которая переходит в прямую, также проходящую через A.

823. Дано аффинное преобразование

$$x' = 100x + 101y, \quad y' = 101x + 102y.$$

Найти вектор, который при этом преобразовании переходит в ортогональный ему вектор. Система координат прямоугольная.

824. Найти неподвижную точку аффинного преобразования, переводящего вершины треугольника A, B, C в точки B, C, A соответственно.

825. Известно, что аффинное преобразование переводит вершины треугольника ABC в середины K, L, M противолежащих сторон. Найти образы точек K, L, M и точки O пересечения медиан треугольника ABC при этом преобразовании. Выяснить геометрический смысл преобразования.

826. Найти неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования

$$x' = 3x + 4y + 6, \quad y' = 4x + 3y - 12.$$

827. Существуют ли аффинные преобразования:

1) имеющие неподвижные точки, но не имеющие инвариантных прямых (сколько неподвижных точек может иметь такое преобразование?);

2) имеющие инвариантные прямые, но не имеющие неподвижных точек (сколько инвариантных прямых может иметь такое преобразование?);

3) не имеющие ни неподвижных точек, ни инвариантных прямых?

828. Как запишется аффинное преобразование $x' = x + 4y$, $y' = = 2x + 3y$, если за оси новой системы координат $O'uv$ принять инвариантные прямые?

829. Доказать, что если аффинное преобразование обладает единственной неподвижной точкой, то всякая инвариантная прямая проходит через эту точку. Сколько в этом случае может быть инвариантных прямых?

830. В прямоугольной системе координат написать формулы поворота плоскости на угол φ вокруг точки (x_0, y_0).

831. Написать формулы преобразования гомотетии с коэффициентом k и центром в точке (x_0, y_0).

832. Найти преобразование подобия, являющееся композицией поворота на угол $\pi/2$ вокруг точки $(-1, 2)$ и гомотетии с центром в этой точке и коэффициентом 2. Система координат прямоугольная.

833. Найти преобразование подобия с неподвижной точкой $(1, 3)$, переводящее точку $(4, -1)$ в точку $(-9, 3)$. Система координат прямоугольная.

834. Найти аффинное преобразование, являющееся композицией симметрии относительно прямой $x + 2y + 3 = 0$ и гомотетии с центром в точке $(1, -2)$ на этой прямой и коэффициентом 5. Система координат прямоугольная.

835. Найти аффинное преобразование сжатия к прямой $x + y - - 2 = 0$ по перпендикулярному ей направлению с коэффициентом сжатия, равным 3. Система координат прямоугольная.

836. Выяснить геометрический смысл аффинного преобразования:

1) $x' = ax - by$, $y' = bx + ay$; 2) $x' = ax + by$, $y' = bx - ay$.

Система координат прямоугольная.

837. Относительно прямоугольной системы координат дано аффинное преобразование $x' = k_1 x$, $y' = k_2 y$, $k_1 > 1 > k_2 > 0$. Найти прямые, проходящие через начало координат, которые этим преобразованием изометрически отображаются на свои образы.

838. Относительно прямоугольной системы координат дано аффинное преобразование $x' = 2x + 2y$, $y' = x + 2y$. Найти пару взаимно перпендикулярных векторов, которая при этом преобразовании переходит в пару взаимно перпендикулярных векторов.

839. Доказать, что преобразование

$$x' = 12x + 5y - 6, \quad y' = 5x - 12y - 18$$

является преобразованием подобия, меняющим ориентацию. Представить это преобразование в виде композиции симметрии относительно прямой и гомотетии с центром на этой прямой. Система координат прямоугольная.

§ 8.2. Аффинные преобразования пространства

840. Найти аффинное преобразование, переводящее вершины тетраэдра $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$:

1) в вершины B, C, D, A соответственно;

2) в центры тяжести противолежащих граней.

Найти неподвижные точки, инвариантные прямые и инвариантные плоскости этих преобразований.

841. Найти множество, заметаемое прямыми, которые проходят через начало координат и изометрически отображаются на свои образы при аффинном преобразовании $x' = k_1x$, $y' = k_2y$, $z' = k_3z$, где не все k_i равны единице.

842. Выяснить геометрический смысл следующего аффинного преобразования (система координат прямоугольная, $a^2 + b^2 \neq 0$):

$$x' = ax - by, \quad y' = bx + ay, \quad z' = \sqrt{a^2 + b^2}z.$$

843. Доказать, что если аффинное преобразование обладает единственной неподвижной точкой, то все инвариантные прямые и плоскости проходят через эту точку.

844. Найти неподвижные точки, инвариантные прямые и инвариантные плоскости аффинного преобразования:

1) $x' = x + 2y + z, \quad y' = y + 2z + 1, \ z' = z + 2;$

2) $x' = 4x + 3y + 6, \ y' = 3y + z + 1, \ z' = 2z + 1;$

3) $x' = y, \ y' = z, \ z' = x + 1.$

845. Найти аффинное преобразование, при котором координатные плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ переходят в плоскости $x - y + z - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ и $2x - z + 1 = 0$ соответственно, а точка $(1, 1, 1)$ — в точку $(1, 1, 0)$.

846. Написать формулы ортогонального проектирования на плоскость $x + y + z = 1$. Система координат прямоугольная.

847. Существует ли аффинное преобразование, не имеющее инвариантных прямых и неподвижных точек, но имеющее инвариантную плоскость?

848. Найти аффинное преобразование сжатия по нормали к плоскости $x+2y+2z+2=0$ с коэффициентом сжатия 4. Система координат прямоугольная.

849. Найти формулы аффинного преобразования, являющегося композицией симметрии относительно прямой $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=5t$ и последующего сжатия пространства в два раза к этой прямой. Система координат прямоугольная.

850. Пусть ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, $\ell_1', \ell_2', \ell_3'$ — другие три попарно скрещивающиеся прямые, также не параллельные одной плоскости. Доказать, что существует единственное аффинное преобразование пространства, переводящее первую тройку прямых во вторую.

851. Пусть ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — три попарно скрещивающиеся прямые, параллельные одной плоскости, $\ell_1', \ell_2', \ell_3'$ — другие три попарно скрещивающиеся прямые, также параллельные некоторой плоскости. Существует ли аффинное преобразование пространства, переводящее первую тройку прямых во вторую.

852. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины скрещивающихся ребер произвольного тетраэдра, делит его на две одинаковые по объему части.

§ 8.3. Аффинные преобразования и линии второго порядка

853. Составить уравнения прообразов кривых
1) $x^2+y^2=1$, 2) $y^2=-2x$, 3) $(x-y+1)(x-y+2)=2$
при преобразовании $x'=2x-y$; $y'=x+2y$.

854. В условиях предыдущей задачи составить уравнения образов указанных кривых при данном аффинном преобразовании.

855. Доказать, что если a и b $(a \geqslant b)$ — полуоси образа единичной окружности при аффинном преобразовании, $\mathbf{v}$ — произвольный вектор и $\mathbf{v}'$ — его образ при том же преобразовании, то

$$b \leqslant \frac{|\mathbf{v}'|}{|\mathbf{v}|} \leqslant a.$$

856. Найти геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу, проходящих через концы двух его сопряженных диаметров.

857. Показать, что если линия второго порядка есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то геометрическое место точек, из которых к этому эллипсу можно провести касательные, имеющие сопряженные направления, есть эллипс
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$
Если же линия есть гипербола или парабола, то к ней нельзя провести касательные, имеющие сопряженные направления.

858. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, соединяющих концы сопряженных диаметров.

859. Доказать, что центр тяжести треугольника, вписанного в один эллипс и описанного около другого гомотетичного первому с тем же центром, совпадает с центром эллипсов.

860. Определить геометрическое место середин хорд эллипса
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
отсекающих от него сегменты постоянной площади S.

861. Доказать, что прямые, соединяющие концы сопряженных диаметров эллипса, касаются эллипса, гомотетичного данному. Найти коэффициент гомотетии.

862. Доказать, что отрезки MM_1 и MM_2 касательных, проведенных из точки M к эллипсу (M_1 и M_2 — точки касания), относятся между собой как диаметры, которым они параллельны.

863. Доказать, что вершины любого ромба, описанного около эллипса, лежат на осях симметрии того же эллипса.

864. Доказать, что эллипс наибольшей площади, вписанный в данный параллелограмм, касается его сторон в их серединах.

865. Доказать, что длины хорд, стягивающих дуги, заключенные между двумя параллельными секущими к эллипсу, относятся друг к другу как диаметры эллипса, параллельные этим хордам.

866. Около эллипса описан четырехугольник. Доказать, что сумма площадей двух треугольников, имеющих общей вершиной центр эллипса, а основаниями соответственно две противоположные стороны четырехугольника, равна сумме площадей двух других таких же треугольников.

867. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b.

868. Через точку A плоскости к эллипсу проведена секущая, пересекающая этот эллипс в точках P и Q. Доказать, что $\frac{|AP|\cdot|AQ|}{d^2}=$ $=\mathrm{const}$, где d — диаметр эллипса, параллельный секущей.

869. Доказать, что два сопряженных диаметра эллипса делят его на четыре равновеликие части.

870. Найти эллипс наименьшей площади, проходящий через три точки A, B, C плоскости, и вычислить его площадь.

871. Найти все аффинные преобразования, которые переводят в себя эллипс
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
и при этом:

1) сохраняют ориентацию плоскости;

2) меняют ориентацию плоскости.

872. Найти все аффинные преобразования, при которых гипербола $xy=c$ переходит в себя.

873. Найти все аффинные преобразования, которые переводят в себя гиперболу
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$
и при этом:

1) сохраняют ориентацию; 2) обращают ориентацию.

874. При помощи гиперболических функций $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ определить общее аффинное преобразование, которое переводит в себя гиперболу
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

875. Найти собственное аффинное преобразование, при котором гипербола $x^2-y^2=4$ переходит в себя, а точка $(2, 0)$ — в точку $(\sqrt{5}, 1)$. В какие точки это преобразование переводит фокусы гиперболы?

876. Рассмотрим два центральных радиус-вектора гиперболы, таких что площадь гиперболического сектора, образованного этими радиусами и дугой гиперболы, имеет данную величину. Доказать, что:

1) хорды, соединяющие концы этих радиус-векторов, касаются некоторой гиперболы, гомотетичной данной, причем точками касания служат середины хорд;

2) сегменты, заключенные между этими хордами и дугой гиперболы, имеют постоянную площадь;

3) треугольник, имеющий сторонами одну из этих хорд и касательные к гиперболе в ее концах, имеет постоянную площадь.

877. Найти аффинные преобразования, переводящие параболу $y^2=2px$ в себя. Найти среди них унимодулярные преобразования, т. е. преобразования, определитель которых равен 1.

878. Найти аффинное преобразование, переводящее параболу $y^2 = 2x$ в себя, при котором точки $(0, 0)$ и $(2, 2)$ переходят в точки $(2, 2)$ и $(2, -2)$ соответственно. В какие прямые переходят директриса и ось параболы при этом преобразовании?

879. Определить аффинное преобразование, переводящее в параболу $y^2 = 2px$ параболу

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

880. Определить геометрическое место точек, соответствующих фокусу параболы $y^2 = 2px$ при всех ее унимодулярных преобразованиях в ту же параболу.

881. Доказать, что существует и притом только одно аффинное преобразование, переводящее параболу в себя, при котором две данные точки параболы переходят в две другие данные точки параболы.

882. Доказать, что площадь сегмента параболы, отсекаемого хордой AB, составляет $2/3$ площади треугольника, сторонами которого служат хорда AB и касательные к параболе в концах хорды.

883. Найти геометрическое место середин хорд параболы $y^2 = 2px$, отсекающих сегменты параболы постоянной площади S.

884. Найти геометрическое место центров эллипсов, получающихся в пересечении эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостями, проходящими через точку (x_0, y_0, z_0).

885. Доказать, что плоскости, проходящие через концы трех взаимно сопряженных диаметров эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, касаются эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}$.

§ 8.4. Изометрические преобразования плоскости и пространства

Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной.

886. Найти неподвижную точку изометрического преобразования

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0, \quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + y_0, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

887. Написать формулы изометрического преобразования, являющегося композицией симметрии относительно прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с направляющим вектором $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, и переноса вдоль этой прямой на вектор, имеющий направление данного вектора и длину d.

888. Дано изометрическое преобразование $x'=x+x_0$, $y'=-y+y_0$, меняющее ориентацию плоскости. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии.

889. Дано изометрическое преобразование

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + x_0, \quad y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + y_0.$$

Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии.

890. Найти изометрическое преобразование, являющееся симметрией относительно прямой $Ax+By+C=0$.

891. Найти изометрическое преобразование, сохраняющее ориентацию и переводящее точку $(0, 2)$ в точку $(1, \sqrt{3})$, а точку $(1, \sqrt{3})$ в точку $(2, 2)$. Найти угол поворота и неподвижную точку этого преобразования.

892. Найти изометрическое преобразование, меняющее ориентацию и переводящее точку $(2, 0)$ в точку $(1, \sqrt{3})$, а точку $(1, \sqrt{3})$ — в точку $(3, \sqrt{3})$. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии.

893. Доказать, что любой поворот плоскости можно представить в виде композиции двух симметрий.

894. Пусть дано изометрическое преобразование:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Доказать, что если его матрица A отлична от единичной матрицы и $\det A = 1$, то это преобразование является композицией поворота вокруг некоторой оси и переноса вдоль этой оси. Найти угол φ этого поворота и направляющий вектор $\mathbf{a}$ оси вращения в двух случаях: когда $\mathbf{a}$ не коллинеарен единичному вектору $\mathbf{e}_1$ и когда они коллинеарны. Найти вектор $\mathbf{c}$ переноса вдоль оси вращения, уравнения оси вращений и канонический вид преобразования.

895. В тех же обозначениях доказать, что если $\det A = -1$ и $a_{11} + a_{22} + a_{33} \neq 1$, то преобразование (8.1) является композицией симметрии относительно некоторой плоскости и поворота вокруг некоторой оси, перпендикулярной этой плоскости. Найти угол φ этого поворота и направляющий вектор $\mathbf{a}$ оси вращения в двух случаях: когда $\mathbf{a}$ не коллинеарен единичному вектору $\mathbf{e}_1$ и $\varphi \neq \pi$, и когда они коллинеарны. Найти (*единственную*) неподвижную точку, плоскость симметрии, ось вращения и канонический вид преобразования.

896. Доказать, что если $\det A = -1$ и $a_{11}+a_{22}+a_{33}=1$ (в тех же обозначениях), то преобразование (8.1) является композицией симметрии относительно некоторой плоскости и переноса на вектор $\mathbf{d}$, компланарный этой плоскости. Найти плоскость симметрии, вектор $\mathbf{d}$ и канонический вид преобразования.

897. Пользуясь результатами предыдущих задач, доказать, что любое изометрическое преобразование пространства представляется в виде композиции конечного числа симметрий.

898. Найти изометрическое преобразование, являющееся композицией поворота на угол $\pi/2$ и переноса вдоль оси вращения на вектор с координатой 9 по отношению к оси вращения, зная, что ось вращения проходит через точку $(1, 0, 0)$ и имеет направляющий вектор $(-1, 2, 2)$.

899. Найти нетождественное изометрическое преобразование, оставляющее неподвижными три точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

900. В ориентированном пространстве даны два взаимно перпендикулярных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{a}'$, получающийся из вектора $\mathbf{a}$ при повороте пространства на угол φ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{b}$.

901. Выяснить геометрический смысл и найти канонический вид следующих изометрических преобразований пространства:

1) $$x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{15}{25}z + 3,\quad y' = \frac{12}{25}x + \frac{9}{25}y - \frac{20}{25}z - 4,\quad z' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 5;$$

2) $$x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1,\quad y' = \frac{11}{15}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{15}z - 2,\quad z' = \frac{2}{15}x + \frac{1}{3}y - \frac{14}{15}z - 1;$$

3) $$x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + 7,\quad y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 14,\quad z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 7;$$

4) $$x' = -\frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{8}{9}z + 14,\quad y' = -\frac{7}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + 2,\quad z' = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y - \frac{1}{9}z - 5;$$

5) $$x' = -z + 1,\quad y' = x,\quad z' = y;$$

6) $$x' = z + 1,\quad y' = x,\quad z' = y.$$

Глава 9

Проективная геометрия

§ 9.1. Проективная прямая

Имеются следующие классические модели проективной прямой.

1. *Модель пучка*. По определению, точками проективной прямой в этой модели называются прямые на плоскости, проходящие через некоторую фиксированную точку P.

2. *Модель пополненной прямой* (*аффинно-проективная прямая*). Эта модель получается добавлением одной точки, называемой *бесконечно удаленной* (или *несобственной*), к обычной аффинной прямой. Эта точка обозначается через ∞. Точки самой аффинной прямой называются *собственными* точками аффинно-проективной прямой.

3. *Арифметическая модель*. Точками проективной прямой в этой модели являются классы эквивалентности пропорциональных пар чисел (x_1, x_2), из которых исключена пара $(0, 0)$. При этом пары чисел (x_1, x_2) и (x_1', x_2') эквивалентны (пропорциональны), если найдется такое число λ, что $(x_1', x_2') = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Класс эквивалентности пары (x_1, x_2) обозначается через $(x_1 : x_2)$. Числа x_1, x_2, определенные с точностью до общего множителя λ, называются *однородными координатами* точки $(x_1 : x_2)$.

Сопоставление модели пучка и модели пополненной прямой. Пусть на плоскости выбрана прямая Γ, не проходящая через точку P. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку P, т. е. точку проективной прямой в модели пучка. Если прямая ℓ не параллельна Γ, то ей сопоставляется собственная точка аффинно-проективной прямой — точка пересечения $\ell \cap \Gamma$. Если же прямая ℓ параллельна Γ, то ей сопоставляется точка ∞.

Сопоставление модели пучка и арифметической модели. Зафиксировав на плоскости некоторую аффинную систему координат Px_1x_2 с началом в точке P, можно каждой точке модели пучка, т. е. прямой, проходящей через начало координат, сопоставить класс $(x_1 : x_2)$, где (x_1, x_2) — координаты ее направляющего вектора. Таким образом, выбор аффинной системы координат Px_1x_2 определяет систему однородных координат в модели пучка. Такая система координат называется *проективной*. Точки $(1:0)$ и $(0:1)$ называются *фундаментальными*, а точка $(1:1)$ — *единичной* точкой этой системы. Роль указанных трех точек такова. Если взять на проективной прямой произвольные три попарно различные точки E_1, E_2, E, то найдется ровно одна проективная система координат, в которой $E_1=(1:0)$, $E_2=(0:1)$ и $E=(1:1)$. Эта проективная система координат будет обозначаться E_1E_2E.

Сопоставление модели пополненной прямой и арифметической модели. Если на аффинной прямой выбрана аффинная координата x, то каждой собственной точке (x) пополненной прямой сопоставляется класс $(x:1)$, а несобственной точке — класс $(1:0)$. Система однородных координат, связанная с аффинной координатой x по этому правилу, будет называться *стандартной* проективной системой координат, ассоциированной с аффинной координатой x.

Ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, заданных по отношению к некоторой аффинной координате, определяется по формуле

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Оно определено, если хотя бы три из этих четырех точек различны, и может принимать значение ∞. Если какая-то из четырех точек $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ несобственная, то в формуле для ангармонического отношения следует брать соответствующий предел, например, если точка A несобственная, то $(ABCD)=(d-b)/(c-b)$.

Упорядоченная четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*, если $(ABCD)=-1$.

902. На аффинно-проективной прямой найти координаты середины отрезка E_1E_2 в проективной системе координат E_1E_2E, если E — несобственная точка прямой.

903. Пусть E — несобственная точка аффинно-проективной прямой. Найти проективные координаты точки, делящей отрезок E_1E_2 в отношении λ, в проективной системе координат E_1E_2E.

904. Принимая точки $E_1(-4)$, $E_2(2)$ за фундаментальные точки проективной системы, а точку $E(3)$ — за единичную, найти связь между проективными координатами $(x_1:x_2)$ точки M и ее аффинной координатой x.

905. На прямой введена аффинная координата x. Принимая точку с координатой 0 за фундаментальную точку E_1, точку с координатой 1 — за фундаментальную точку E_2 и несобственную точку — за единичную точку E проективной системы координат, найти связь между координатой x произвольной точки и ее проективными координатами $(x_1 : x_2)$.

906. Даны три точки $A(-2)$, $B(3)$ и $C(-1)$. Принимая эти точки соответственно за точки E_1, E_2 и E, найти проективные координаты точек $D(5)$, $F(-7)$, $G(4)$, $H(2)$, $O(0)$, $P(1)$ в проективной системе координат E_1E_2E.

907. С аффинной координатой x на аффинно-проективной плоскости ассоциирована стандартная проективная система координат E_1E_2E. Известно, что ангармоническое отношение (E_1E_2EM) равно a. Чему равна аффинная координата точки M?

908. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D проективной прямой в каждом из следующих случаев:

1) $A(3:1)$, $B(2:5)$, $C(1:0)$, $D(-2:1)$;
2) $A(1:3)$, $B(5:-2)$, $C(1:-1)$, $D(2:3)$;
3) $A(-1:1)$, $B(2:3)$, $C(7:11)$, $D(1:-1)$;
4) $A(1)$, $B(2)$, $C(-3)$, $D(\infty)$;
5) $A(1)$, $B(2)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$.

909. На проективной прямой даны три точки $A(1:2)$, $B(-1:1)$, $C(3:5)$. Известно, что $(ABCD) = 1/2$. Найти проективные координаты точки D.

910. Ангармоническое отношение $(ABCD)$ четырех точек A, B, C, D равно λ. Чему равно ангармоническое отношение:

1) $(BACD)$; 2) $(BCAD)$; 3) $(BCDA)$; 4) $(BADC)$?

911. В треугольнике PQR проведена медиана PM. Рассматривая пучок прямых, проходящих через точку P, как проективную прямую, найти в нем четвертую гармоническую прямую к прямым PQ, PR, PM.

912. В треугольнике PQR проведена биссектриса PM. Рассматривая пучок прямых, проходящих через точку P, как проективную прямую, найти в нем четвертую гармоническую прямую к прямым PQ, PR, PM.

913. На плоскости дан треугольник PQR, угол P которого прямой. В треугольнике проведена высота PM. Рассматривая пучок прямых, проходящих через точку P, как проективную прямую, найти в нем четвертую гармоническую прямую к прямым PQ, PR, PM.

914. На плоскости дана прямая ℓ, на которой отмечены три точки A, B, C. Показать, как при помощи линейки можно построить четвертую точку D, гармоническую к A, B, C, т. е. такую, что $(ABCD) = -1$.

§ 9.2. Проективные преобразования прямой

Проективным преобразованием проективной прямой называется любое взаимно однозначное отображение f этой прямой в себя, при котором сохраняется ангармоническое отношение любых четырех попарно различных точек: $(f(A)f(B)f(C)f(D)) = (ABCD)$.

Если на проективной прямой выбрана проективная система координат, то проективное преобразование f может быть задано следующим образом: f переводит точку $M(x_1 : x_2)$ в точку

$$M'(x_1' : x_2') = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 : c_{21}x_1 + c_{22}x_2),$$

где *матрица проективного преобразования*

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

невырожденна и определена с точностью до умножения на число:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda c_{11} & \lambda c_{12} \\ \lambda c_{21} & \lambda c_{22} \end{pmatrix}.$$

Преобразование f называется *собственным*, если $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$.

915. В каждом из следующих случаев найти проективное преобразование, переводящее точки A, B, C в точки A', B', C' соответственно:

1) $A = A'(0)$, $B = B'(1)$, $C(2)$, $C'(\infty)$;

2) $A = A'(0)$, $B = C'(1)$, $C = B'(2)$.

916 (Типы проективных преобразований прямой). При каком необходимом и достаточном условии проективное преобразование проективной прямой

$$\lambda x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2, \quad \lambda x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

1) не имеет неподвижных точек (*эллиптическое* преобразование);

2) имеет ровно две неподвижные точки (*гиперболическое* преобразование);

3) имеет только одну неподвижную точку (*параболическое* преобразование)?

917. Доказать, что проективное преобразование

$$\lambda x_1' = 3x_1 - 5x_2, \quad \lambda x_2' = x_1 + x_2$$

эллиптическое.

918. Может ли проективное преобразование прямой быть несобственным, если оно:

1) эллиптическое; 2) гиперболическое; 3) параболическое?

919. Найти общий вид преобразования, оставляющего неподвижными фундаментальные точки E_1 и E_2.

920. Найти неподвижные точки проективного преобразования

$$\lambda x_1' = x_1 + 2x_2, \quad \lambda x_2' = 4x_1 + 3x_2.$$

921. Найти все проективные преобразования, при которых две различные точки $(a:b)$ и $(c:d)$ неподвижны.

922 (Отражение относительно пары точек). Найти все проективные преобразования прямой, квадрат которых равен тождественному преобразованию, и определить их тип.

923. На проективной прямой даны три различные точки A, B, C. Доказать, что проективное преобразование, переводящее эти точки соответственно в точки B, C, A, является эллиптическим.

924. Проективное преобразование прямой переводит точки A, B, C в точки A, C, B соответственно. С помощью линейки построить вторую неподвижную точку этого преобразования.

925. Сколько существует параболических проективных преобразований проективной прямой, при которых данные точки A и B переходят в данные точки A' и B' при условии, что хотя бы три из четырех точек A, B, A', B' различны?

926. Пусть f — эллиптическое проективное преобразование прямой, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k}$ — его k-я степень. Доказать, что если преобразование f^k имеет неподвижную точку, то оно тождественно.

§ 9.3. Проективная плоскость

Имеются следующие классические модели проективной плоскости.

1. *Модель связки*. По определению, точками проективной плоскости в этой модели называются прямые в пространстве, проходящие через некоторую фиксированную точку P, а прямыми — плоскости, проходящие через эту же точку.

2. *Модель пополненной плоскости* (*аффинно-проективная плоскость*). Точками проективной плоскости в этой модели называются все собственные и несобственные пучки прямых на аффинной плоскости. Точки, соответствующие собственным пучкам, называются *собственными*, а несобственным — *бесконечно удаленными* (*несобственными*) точками аффинно-проективной плоскости. Прямыми являются обычные прямые, а также одна дополнительная прямая, называемая *несобственной*, которая по определению проходит через все бесконечно удаленные точки. По определению также считается, что прямая проходит через точку аффинно-проективной плоскости тогда и только тогда, когда она принадлежит соответствующему пучку.

3. *Арифметическая модель*. Точками проективной плоскости в этой модели являются классы эквивалентности пропорциональных троек чисел (x_1, x_2, x_3), из которых исключена тройка $(0, 0, 0)$. При этом тройки чисел (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) эквивалентны (пропорциональны), если найдется такое число λ, что

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Класс эквивалентности тройки (x_1, x_2, x_3) обозначается $(x_1 : x_2 : x_3)$. Числа x_1, x_2, x_3, определенные с точностью до общего множителя λ, называются *однородными координатами* точки $(x_1 : x_2 : x_3)$.

Сопоставление модели связки и модели пополненной плоскости. Пусть в пространстве выбрана плоскость Π, не проходящая через точку P. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку P, т. е. точку проективной плоскости в модели связки. Собственный пучок плоскостей, содержащих ℓ, высекает на плоскости Π пучок прямых, т. е. точку пополненной плоскости. Этот пучок является собственным тогда и только тогда, когда прямая ℓ пересекает Π.

Сопоставление модели связки и арифметической модели. Зафиксировав в пространстве некоторую аффинную систему координат $Px_1x_2x_3$ с началом в точке P, можно каждой точке модели связки, т. е. прямой, проходящей через начало координат, сопоставить класс $(x_1 : x_2 : x_3)$, где (x_1, x_2, x_3) — координаты ее направляющего вектора. Таким образом, выбор аффинной системы координат $Px_1x_2x_3$ определяет систему однородных координат в модели связки. Такая система координат называется *проективной*. Точки $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ и $(0:0:1)$ называются *фундаментальными*, а точка $(1:1:1)$ — *еди-*

ничной точкой этой системы. Роль этих четырех точек такова. Если взять на проективной плоскости произвольные четыре точки E_1, E_2, E_3, E, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то найдется ровно одна проективная система координат, в которой $E_1 = (1:0:0)$, $E_2 = (0:1:0)$, $E_3 = (0:0:1)$ и $E = (1:1:1)$. Эта проективная система координат будет обозначаться $E_1E_2E_3E$.

Сопоставление модели пополненной плоскости и арифметической модели. Если в аффинной плоскости выбрана аффинная система координат Oxy, то каждому собственному пучку прямых, проходящих через точку (x, y), сопоставляется класс $(x:y:1)$, а каждому несобственному пучку прямых, параллельных вектору (α, β), — класс $(\alpha:\beta:0)$. Таким образом, если $x_3 \neq 0$, то точке $(x_1:x_2:x_3)$ арифметической модели отвечает собственная точка с аффинными координатами $(x_1/x_3, x_2/x_3)$, а если $x_3 = 0$, то — несобственный пучок прямых, параллельных вектору (x_1, x_2). Система однородных координат, связанная с аффинными координатами x, y по этому правилу, будет называться *стандартной* проективной системой координат, ассоциированной с аффинной системой Oxy.

Принцип двойственности. Говорят, что прямая ℓ и точка A (или точка A и прямая ℓ) на проективной плоскости *инцидентны*, если прямая ℓ проходит через точку A. Для всякого высказывания об инцидентности точек и прямых проективной плоскости, а также ангармонических отношениях четверок точек, инцидентных одной прямой, или четверок прямых, инцидентных одной точке, имеется *двойственное высказывание*, которое получается из исходного заменой всех точек на прямые, а прямых — на точки. Принцип двойственности состоит в том, что справедливость исходного высказывания влечет справедливость двойственного высказывания и наоборот.

927. На аффинно-проективной плоскости введена проективная система координат $E_1E_2E_3E$ и аффинная система координат Oxy так, что в системе Oxy прямые E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 задаются уравнениями $x - 4 = 0$, $y - 3 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$ соответственно, а точка E имеет координаты $(3, 2)$. Найти:

1) проективные координаты точки M, аффинные координаты которой $(1, 1)$;

2) аффинные координаты точки N, проективные координаты которой $(4:3:-6)$;

3) проективные координаты несобственной точки Q оси Ox;

4) координаты точки R, проективные координаты которой $(5:5:-7)$, в стандартной проективной системе координат, ассоциированной с системой Oxy.

928. В аффинной системе координат Oxy прямые E_1E_2, E_2E_3, E_3E_1 задаются уравнениями $y=2$, $x=0$ и $y=0$ соответственно, а точка E имеет координаты $(1, 1)$. Найти в проективной системе координат $E_1E_2E_3E$ центр пучка прямых, параллельных оси Oy.

929. Фундаментальные точки и единичная точка проективной системы координат $E_1E_2E_3E$ имеют следующие декартовы координаты относительно аффинной системы координат Oxy: $E_1(1, 1)$, $E_2(-1, 1)$, $E_3(0, 0)$, $E(0, 1/2)$. Найти в системе координат $E_1E_2E_3E$ уравнения осей координат Ox, Oy и несобственной прямой.

930. На плоскости с аффинной системой координат Oxy дана точка $S(1/2, 1/3)$. Найти связь между однородными координатами $(x:y:z)$ точки M в стандартной проективной системе, ассоциированной с Oxy, и ее проективными координатами $(x_1:x_2:x_3)$ относительно системы $E_1E_2E_3E$, если за точки E_1, E_2, E_3, E принимаются соответственно точки O, Q, R, S, где Q и R — несобственные точки осей Ox и Oy соответственно.

931. На плоскости даны точки $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$, $D(-3, 4)$. Принимая их соответственно за фундаментальные точки E_1, E_2, E_3, E проективной системы координат, найти в ней координаты точек $F(-2, 0)$ и $G(5, 3)$.

932. Относительно проективной системы координат $E_1E_2E_3E$ даны фундаментальные и единичная точки другой системы $E_1'(4:1:1)$, $E_2'(4:4:1)$, $E_3'(0:4:1)$, $E'(2:1:1)$. Найти формулы, выражающие координаты $(x_1:x_2:x_3)$ произвольной точки относительно системы координат $E_1E_2E_3E$ через ее координаты $(x_1':x_2':x_3')$ в системе $E_1'E_2'E_3'E$.

933. На аффинно-проективной плоскости дан треугольник $E_1E_2E_3$, E — точка пересечения его медиан. В проективной системе координат $E_1E_2E_3E$ найти координаты несобственных точек сторон треугольника и уравнения его медиан.

934. Составить уравнение несобственной прямой аффинно-проективной плоскости в проективной системе координат $E_1E_2E_3E$, если за E принимается точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника $E_1E_2E_3$, длины сторон E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 которого равны a, b, c соответственно.

935. Составить уравнение несобственной прямой аффинно-проективной плоскости в проективной системе координат $E_1E_2E_3E$, если за E принимается точка пересечения высот треугольника $E_1E_2E_3$, длины сторон E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 которого равны a, b, c, а противолежащие углы — α, β, γ соответственно.

936. В проективной системе координат записать уравнение прямой, проходящей через точки $(1:2:-1)$ и $(3:5:-2)$.

937. В некоторой арифметической модели проективной плоскости даны четыре точки $A(1:2:3)$, $B(-1:2:2)$, $C(3:1:5)$, $D(2:0:1)$. Найти точку пересечения прямых AB и CD.

938 (Теорема Дезарга). Даны такие точки A, B, C, P, Q, R, что точки пересечения пар прямых PQ и AB, QR и BC, PR и AC лежат на одной прямой. Доказать, что прямые AP, BQ, CR принадлежат одному пучку.

939. На прямой E_1E_3 взяты две произвольные различные точки A и B, отличные от точек E_1 и E_3, на прямой E_1E_2 взяты две произвольные различные точки C и D, отличные от точек E_1 и E_2. Доказать, что точки пересечения пар прямых E_2E_3 и BC, E_2A и DB, E_3D и CA лежат на одной прямой.

940. Через две различные точки Q и R проективной плоскости проведены прямые: через точку Q — прямые ℓ_1, ℓ_3, ℓ_5; через точку Q — прямые ℓ_2, ℓ_4, ℓ_6. Обозначим через (ik) точку пересечения прямых ℓ_i и ℓ_k. Доказать, что прямые, проходящие через пары точек (12) и (45), (23) и (56), (34) и (61), принадлежат одному пучку.

941. Сформулировать и доказать предложение, двойственное предложению предыдущей задачи.

942. Доказать, что если A_1, A_2, A_3, A_4 — четыре точки проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то три точки пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, A_1A_3 и A_2A_4, A_1A_4 и A_2A_3 также не лежат на одной прямой.

943. Относительно проективной системы координат даны четыре точки $A(1:1:2)$, $B(3:-1:2)$, $C(11:-1:10)$, $D(3:7:10)$. Доказать, что они лежат на одной прямой. Найти ангармоническое отношение $(ABCD)$.

944. Даны три точки $A(1:2:3)$, $B(-3:2:4)$, $C(-2:4:7)$. Доказать, что они лежат на одной прямой, и найти к ним четвертую гармоническую точку D.

945. В проективной плоскости дан треугольник ABC и точка S, не лежащая ни на одной из его сторон. Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых AS, BS и CS соответственно с прямыми BC, CA и AB, а L, M и N — точки, четвертые гармонические к тройкам BCP, CAQ и ABR соответственно. Доказать, что точки L, M и N лежат на одной прямой.

946. Для предложения предыдущей задачи сформулировать и доказать предложение:

1) двойственное; 2) обратное; 3) обратное двойственному.

§ 9.4. Проективные преобразования плоскости

Проективным преобразованием проективной плоскости называется взаимно однозначное отображение f этой плоскости в себя, при котором любые три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой, а для любых четырех различных точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, сохраняется их ангармоническое отношение: $(f(A)f(B)f(C)f(D)) = (ABCD)$.

Если на проективной плоскости выбрана проективная система координат, то преобразование f можно задать с помощью некоторой невырожденной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

следующим образом: точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ переходит в точку

$$M'(x_1' : x_2' : x_3') = \\ = (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 : c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 : c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3).$$

Матрица C преобразования f определена с точностью до умножения на ненулевое число.

947. В какие точки переходят точки $A(1 : 2 : 3)$, $B(2 : -1 : 4)$, $C(-1 : 0 : 1)$ при проективном преобразовании

$$(x_1' : x_2' : x_3') = \big((2x_1 - 3x_2 + x_3) : (3x_1 - x_2 + 4x_3) : (3x_1 - 2x_2 + 5x_3)\big)?$$

948. В какие точки переходят фундаментальные точки и единичная точка при проективном преобразовании

$$(x_1' : x_2' : x_3') = \big((x_1 + x_2 - x_3) : (x_1 - 4x_2) : (x_1 + x_3)\big)?$$

949. На проективной плоскости даны четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что существует проективное преобразование, переводящее эти точки в вершины параллелограмма.

950. Найти проективное преобразование, которое оставляет фундаментальные точки данной проективной системы координат неподвижными, а единичную точку E переводит в точку $E'(c_1 : c_2 : c_3)$.

951. Найти проективное преобразование, переводящее фундаментальную точку E_1 данной проективной системы в E_2, точку E_2 — в E_3, точку E_3 — в E_1 и оставляющее на месте единичную точку.

952. Найти проективное преобразование аффинно-проективной плоскости, оставляющее на месте начало координат и единичную точку и переводящее несобственные точки осей Ox и Oy соответственно в точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

953. В какие прямые переходят прямые

$$\ell_1 : x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad \ell_2 : -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \quad \ell_3 : 4x_2 - 3x_3 = 0$$

при проективном преобразовании

$$(x_1' : x_2' : x_3') = (x_1 - 2x_2 + x_3 : 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 : x_1 - x_2)?$$

954. Найти общий вид тех проективных преобразований, которые:

1) переводят прямую $x_3 = 0$ в ту же прямую;

2) оставляют на месте все точки прямой $x_3 = 0$.

955. Найти проективное преобразование, которое оставляет на месте точку $(0, 0)$ и переводит прямые

$$x + y + 2 = 0, \quad x - y - 4 = 0, \quad x - 4y + 3 = 0$$

соответственно в прямые

$$x + 3y + 2 = 0, \quad x - 3y + 4 = 0, \quad x + 2y - 3 = 0.$$

§ 9.5. Линии второго порядка в проективных координатах

Общее уравнение *линии второго порядка* на проективной плоскости в проективных координатах имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0, \qquad (9.1)$$

в котором не все a_{ij} равны нулю.

Две линии второго порядка относятся к одному проективному классу, если существует проективное преобразование, переводящее одну из этих линий в другую. Две линии второго порядка относятся к разным проективным классам, если такого преобразования не существует. Указанное разбиение на классы называется *проективной классификацией* линий второго порядка. Множество всех линий второго порядка распадается на пять проективных классов:

1) мнимые овалы ($x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$);
2) (действительные) овалы ($x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$);
3) пары действительных прямых ($x_1^2-x_2^2=0$);
4) пары мнимых прямых ($x_1^2+x_2^2=0$);
5) пары совпадающих прямых ($x_1^2=0$).

Касательная к линии второго порядка (9.1) в точке $P(x_1^0:x_2^0:x_3^0)$ определяется уравнением

$$F'_{x_1^0}x_1+F'_{x_2^0}x_2+F'_{x_3^0}x_3=0.$$

Точка M называется *внутренней* точкой действительного овала, если любая прямая, проходящая через M, пересекает овал в двух различных точках. Точка M называется *внешней*, если существует прямая, проходящая через эту точку и не имеющая ни одной общей точки с данным овалом.

956. Определить проективный класс следующих кривых, пользуясь методом Лагранжа:

1) $2x_1^2+3x_1x_2-5x_1x_3+4x_2^2+2x_2x_3-x_3^2=0$;
2) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$;
3) $4x_1^2+16x_1x_2-8x_1x_3+15x_2^2-22x_2x_3-5x_3^2=0$;
4) $2x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+6x_2^2+4x_2x_3+7x_3^2=0$;
5) $4x_1^2+4x_1x_2-12x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+34x_3^2=0$.

957. Найти проективное преобразование, которое переводит:

1) окружность $x^2+y^2=1$ в гиперболу $x^2-y^2=1$;
2) гиперболу $x^2-y^2=1$ в параболу $y=x^2$;
3) окружность $x^2+y^2=1$ в параболу $y=x^2$;
4) пару пересекающихся прямых $x^2-y^2=0$ в пару параллельных прямых $x^2-1=0$;
5) эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

958. Найти уравнение окружности, описанной около квадрата, принимая три его вершины за фундаментальные точки, а четвертую — за единичную точку проективной системы координат.

959. Как преобразуется уравнение параболы $y^2=4x$, если от декартовых координат (x, y) перейти к проективным $(x_1:x_2:x_3)$, принимая $E_1(1, 0)$, $E_2(-1, 2)$, $E_3(-1, -2)$ за фундаментальные точки, начало координат — за единичную точку проективной системы координат?

960. Как преобразуется уравнение окружности $x^2+y^2=1$, если от декартовых координат (x, y) перейти к проективным $(x_1 : x_2 : x_3)$, принимая за стороны E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2 фундаментального треугольника прямые $1+y=0$, $1-y=0$, $x=0$, а за единичную точку — точку $E(1, 0)$?

961. Найти проективное преобразование, которое переводит окружность $x^2+y^2=25$ в себя, а точки $A(3, -4)$, $B(3, 4)$ и середину M хорды AB — в точки $A'(-4, 3)$, $B'(-4, -3)$ и середину M' хорды $A'B'$.

962. Найти проективное преобразование, которое переводит эллипс

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$$

в тот же эллипс, а точки эллипса $A(0, 5)$, $B(-10, 0)$, $C(8, 3)$ — соответственно в точки $A'(0, -5)$, $B'(0, 5)$, $C'(10, 0)$.

963. Найти общий вид тех проективных преобразований, при которых гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

переходит в ту же гиперболу, а касательные в вершинах к гиперболе переходят в ее асимптоты.

964. Найти проективное преобразование, при котором парабола $y^2=4x$ переходит в ту же параболу, а точки параболы $A(1, 2)$, $B(16, -8)$, $C(1, -2)$ переходят соответственно в точки $A'(1, 2)$, $B'(1, -2)$, $C'(0, 0)$.

965. Найти проективное преобразование параболы $y^2=4x$ в окружность $x^2+y^2=25$, при котором точки параболы $A(4, -4)$, $B(0, 0)$, $C(4, 4)$ переходят в точки окружности $A'(0, -5)$, $B'(5, 0)$, $C'(0, 5)$.

966. В проективной системе координат $E_1E_2E_3E$ составить общее уравнение овала, касающегося двух сторон E_3E_1 и E_3E_2 треугольника $E_1E_2E_3$ в вершинах E_1 и E_2.

967. Доказать, что любой овал на аффинно-проективной плоскости можно записать параметрически в виде

$$x(t)=\frac{c_{11}t^2+c_{12}t+c_{13}}{c_{31}t^2+c_{32}t+c_{33}}, \quad y(t)=\frac{c_{21}t^2+c_{22}t+c_{23}}{c_{31}t^2+c_{32}t+c_{33}}, \tag{9.2}$$

где матрица (c_{ij}) невырожденна. При каких условиях это уравнение определяет: 1) эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу?

968. Написать параметрические уравнения окружности $x^2+y^2=1$, принимая за параметр t точки M угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M и фиксированную точку $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ окружности.

969. Найти параметрические уравнения вида (9.2) гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

для которого при значениях параметра $t=-1$, $t=1$, $t=0$ получаются точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$ и несобственная точка асимптоты $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ соответственно.

970. Найти общее уравнение кривой второго порядка, заданной параметрическими уравнениями:

1) $x(t)=(t^2-1)/(t+2)$, $y(t)=(t^2+t)/(t+2)$;

2) $x(t)=(t+1)/(t-2)^2$, $y(t)=(t+2)/(t-2)^2$.

971. Пусть две параметрические кривые $(x(t), y(t))$ и $(u(t), v(t))$ вида (9.2) задают один и тот же овал на аффинно-проективной плоскости, т. е. существует функция $s(t)$ такая, что $u(s(t))=x(t)$, $v(s(t))=y(t)$. Доказать, что тогда функция $s(t)$ дробно-линейная:

$$s=\frac{at+b}{ct+d},$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица.

972. Пусть A_1, A_2, A_3 — три произвольные точки, лежащие на овале, а ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — касательные к овалу в этих точках. Доказать, что три точки пересечения прямых ℓ_1 и A_2A_3, ℓ_2 и A_3A_1, ℓ_3 и A_1A_2 лежат на одной прямой.

973. Доказать, что если треугольник $A_1A_2A_3$ описан около действительного овала, а A_4, A_5, A_6 — точки касания сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 с данной линией, то прямые A_1A_5, A_2A_6, A_3A_4 проходят через одну точку.

974. Доказать, что если уравнение

$$F(x_1, x_2, x_3) = \\ = a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0$$

определяет действительную невырожденную кривую второго порядка, то условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} F(x_1, x_2, x_3) > 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ была внутренней.

975. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, лежащие на проективной плоскости и такие, что прямые AA', BB', CC' проходят через одну точку. Доказать, что шесть точек пересечения прямых AB и $A'C'$, AB и $B'C'$, AC и $A'B'$, AC и $B'C'$, BC и $C'A'$, BC и $A'B'$ лежат на одной и той же линии второго порядка.

976. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — пять произвольных точек, лежащих на действительном овале. Доказать, что если ℓ — касательная к этому овалу в точке A_1, то три точки пересечения прямых ℓ и A_3A_4, A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_1A_5 лежат на одной прямой.

977 (Теорема Брианшона). Около действительной нераспадающейся линии второго порядка описан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Доказать, что прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 проходят через одну точку.

978. Доказать, что если стороны двух треугольников касаются линии второго порядка, то через шесть вершин этих треугольников можно провести линию второго порядка.

979. Действительная невырожденная кривая второго порядка задана общим уравнением второго порядка в проективных координатах. Найти необходимое и достаточное условие того, что прямая $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ пересекает данную кривую.

§ 9.6. Поляритет

Полярой точки $P(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$ относительно линии второго порядка (9.1) называется геометрическое место точек $M(x_1 : x_2 : x_3)$, гармонически сопряженных точке P относительно точек пересечения M' и M'' линии второго порядка с прямыми, проходящими через точку P, называемую *полюсом*.

Поляра является прямой линией, и ее уравнение имеет вид

$$F'_{x_1^0}x_1 + F'_{x_2^0}x_2 + F'_{x_3^0}x_3 = 0,$$

где $F'_{x_1^0}$, $F'_{x_2^0}$, $F'_{x_3^0}$ — частные производные от левой части уравнения (9.1) по x_1, x_2, x_3 соответственно, вычисленные в точке (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Две точки $M(y_1 : y_2 : y_3)$ и $N(z_1 : z_2 : z_3)$ называются полярно сопряженными относительно линии второго порядка, если каждая из них лежит на поляре другой относительно этой линии. Условие сопряженности имеет вид

$$z_1F'_{y_1} + z_2F'_{y_2} + z_3F'_{y_3} = 0 \quad \text{или} \quad y_1F'_{z_1} + y_2F'_{z_2} + y_3F'_{z_3} = 0.$$

Две прямые полярно сопряжены относительно линии второго порядка, если каждая из них проходит через полюс другой.

980. Найти поляру точки A относительно линии второго порядка, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ в каждом из следующих случаев:

1) $A(-4, 2)$, $F(x, y) = 6x^2 - 5xy - 4y^2 + 3x + 2y - 1$;
2) $A(6, 4)$, $F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 6x - 2y$;
3) $A(2, 1)$, $F(x, y) = 4x^2 + 3xy - y^2$;
4) $A(7, 5)$, $F(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3$;
5) $A(1, 1)$, $F(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y$.

981. Доказать, что директрисы линии второго порядка являются полярами соответствующих фокусов относительно данной линии.

982. Найти полюс прямой ℓ относительно линии второго порядка F в каждом из следующих случаев:

1) $\ell: 3x - y + 6 = 0$, $F: x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;
2) $\ell: x - 3 = 0$, $F: 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$;
3) $\ell: y = 0$, $F: 4x^2 + 2xy - 6x - 10y + 15 = 0$;
4) $\ell: x + 3y + 1 = 0$, $F: 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$;
5) $\ell: x - y + 3 = 0$, $F: 2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y - 5 = 0$.

983. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 1)$ и полярно сопряженной с прямой $4x - y + 30 = 0$ относительно линии второго порядка $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$.

984. На прямой $x + 5y - 18 = 0$ найти точку, полярно сопряженную с точкой $(-5, 4)$ относительно линии второго порядка $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$.

985. Даны две линии второго порядка: парабола $Ax^2 - 2y = 0$ и гипербола $2xy = A$. Найти точку, полярой которой относительно обеих кривых служила бы одна и та же прямая.

986. Пусть на овале Γ задана параметризация вида (9.2). Рассматривая Γ как проективную прямую и считая параметр t аффинной координатой на ней, определим ангармоническое отношение четырех точек овала. Доказать, что четверка точек A, B, C, D будет гармонической тогда и только тогда, когда прямые AC и BD полярно сопряжены относительно данного овала.

987. Показать, что если из каждой точки прямой, перпендикулярной к оси кривой второго порядка, опустить перпендикуляр на поляру этой точки, то все такие перпендикуляры проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси кривой.

988. Показать, что если две прямые проходят через фокус кривой второго порядка, то для того, чтобы они были полярно сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы они были взаимно перпендикулярны.

989. Найти кривую второго порядка, для которой ось Oy служит полярой точки $A(5, 0)$, а ось Ox — полярой точки $B(0, 3)$, зная, что она проходит через точки $M_1(1, 2)$ и $M_2(0, 3/2)$.

990. Определить геометрическое место полюсов касательных к окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ относительно окружности x^2+ $+y^2=25$.

991. Точка M перемещается по окружности $x^2+y^2=1$. Какую линию описывает точка пересечения касательной к окружности в этой точке с полярой той же точки относительно гиперболы $x^2-y^2=1$?

992. Показать, что если из внешней точки провести касательные к невырожденной кривой второго порядка, то прямая, соединяющая эту точку с серединой хорды прикосновения, будет диаметром кривой, сопряженным направлению этой хорды.

Часть II
Линейная алгебра

Глава 10

Основные понятия линейной алгебры

§ 10.1. Векторное пространство, линейная независимость

Векторным (или *линейным*) *пространством* над полем $\Bbbk$ (элементы которого будут называться *числами* или *скалярами*) называется множество V (элементы которого будут называться *векторами*) вместе с операциями:

1) сложения «+»: $V \times V \to V$, результат применения к паре векторов $u, v \in V$ обозначается через $u + v$,

2) умножения на числа «·»: $\Bbbk \times V \to V$, результат применения к $\lambda \in \Bbbk$ и $u \in V$ обозначается через $\lambda \cdot u$ или λu,

удовлетворяющими следующим аксиомам.

1. Множество V с операцией «+» является абелевой группой, т. е. для любых $u, v, w \in V$ имеют место равенства

$$u + v = v + u, \quad (u + v) + w = u + (v + w),$$

существует элемент $\mathbf{0} \in V$ (нулевой вектор) со свойством

$$u + \mathbf{0} = u \quad \forall u \in V,$$

для каждого вектора $u \in V$ определен противоположный вектор $-u$, такой что

$$u + (-u) = \mathbf{0}.$$

2. Умножение на числа ассоциативно и унитарно:

$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, \quad 1 \cdot u = u \quad \forall \lambda, \mu \in \Bbbk, u \in V.$$

3. Для любых $\lambda, \mu \in \Bbbk$ и $u, v \in V$ имеют место следующие соотношения дистрибутивности:

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

В дальнейшем мы будем обозначать нулевой вектор так же, как нулевой элемент 0 поля $\Bbbk$, поскольку из контекста всегда ясно, что подразумевается — число 0 или нулевой вектор.

Линейной оболочкой произвольного подмножества $X \subset V$ линейного пространства V, обозначаемой $\langle X \rangle$, называется минимальное линейное подпространство в V, содержащее X, т. е. такое подпространство W, что $X \subset W$ и любое другое линейное подпространство, содержащее X, содержит также и W. Линейная оболочка подмножества $X \subset V$ совпадает с множеством всевозможных линейных комбинаций вида $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, где $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$, $x_1, \ldots, x_k \in X$.

993. Доказать, что для любого вектора u имеют место равенства $0 \cdot u = 0$, $(-1) \cdot u = -u$.

994. В каких из следующих случаев указанные операции на множестве X определены и задают на нем структуру линейного пространства над полем $\Bbbk$:

1) $\Bbbk = \mathbb{R}$, X — полуплоскость $y \geqslant 0$, операции сложения и умножения на числа стандартные (т. е. покоординатные);

2) $\Bbbk = \mathbb{R}$, X — множество векторов на плоскости, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной прямой; операции стандартные;

3) $\Bbbk = \mathbb{R}$, X — множество векторов на плоскости, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной прямой; операции сложения «$\widehat{+}$» и умножения на числа «$\widehat{\cdot}$» заданы формулами

$$u \mathbin{\widehat{+}} v = u + v - x_0, \quad \lambda \mathbin{\widehat{\cdot}} u = \lambda u + (1 - \lambda) x_0,$$

где $x_0 \in X$ — фиксированный вектор;

4) $\Bbbk = \mathbb{R}$, X — множество векторов плоскости, лежащих в первом и третьем координатных углах ($xy \geqslant 0$); операции стандартные;

5) $\Bbbk = \mathbb{R}$, X — все векторы пространства, кроме векторов, параллельных некоторой прямой; операции стандартные;

6) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{Q}$; операции стандартные;

7) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{C}$; операции стандартные;

8) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $X = (0, \infty)$; операции сложения «$\widehat{+}$» и умножения на числа «$\widehat{\cdot}$» заданы формулами

$$u \mathbin{\widehat{+}} v = uv, \quad \lambda \mathbin{\widehat{\cdot}} u = u^{\lambda};$$

9) $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $X = (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$; операции такие же, как и в предыдущем пункте;

10) $\Bbbk = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$; операции заданы следующим образом:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0);$$

11) $\Bbbk$ любое, X — множество многочленов над $\Bbbk$ степени ровно n; операции стандартные;

12) $\mathbb{k}$ любое, X — множество многочленов над $\mathbb{k}$ степени не выше n;

13) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, X — множество монотонных функций на отрезке; операции стандартные;

14) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, X — множество всех бесконечных арифметических прогрессий со стандартными операциями;

15) $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, X — множество всех бесконечных геометрических прогрессий со стандартными операциями?

995. Можно ли задать структуру линейного пространства:

1) на множестве, состоящем из двух элементов;

2) на абелевой группе $\mathbb{Z}$ целых чисел;

3) на прямой $\mathbb{R}$ со следующей операцией умножения на числа: $\lambda \cdot u = \lambda^2 u$;

4) на прямой $\mathbb{R}$ с операцией умножения на числа $\lambda \cdot u = \lambda^3 u$?

996. Доказать, что в линейно независимой системе векторов всякая подсистема также линейно независима.

997. Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно независима, а система $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ линейно зависима. Доказать, что вектор a_{k+1} линейно выражается через остальные, и это разложение единственно.

998. Пусть вектор x линейно выражается двумя различными способами через векторы $a_1, \ldots, a_k$. Доказать, что система $a_1, \ldots, a_k$ линейно зависима.

999. Пусть a, b, c — линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависимы следующие системы векторов:

1) $a+b+c$, $a+b$, a;

2) $a+b$, $b+c$, $c+a$;

3) $a-b$, $b-c$, $c-a$;

4) $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$?

1000. Если каждый вектор системы векторов $y_1, \ldots, y_n$ есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_m$, то говорят, что система $y_1, \ldots, y_n$ линейно выражается через систему $x_1, \ldots, x_m$. Доказать транзитивность этого понятия: если система векторов $y_1, \ldots, y_n$ линейно выражается через систему $x_1, \ldots, x_m$, а система $z_1, \ldots, z_p$ линейно выражается через систему $y_1, \ldots, y_n$, то система векторов $z_1, \ldots, z_p$ линейно выражается через систему $x_1, \ldots, x_m$.

1001. Доказать, что если рассматривать $\mathbb{R}$ как линейное пространство над $\mathbb{Q}$, то векторы 1 и ξ из $\mathbb{R}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ξ иррационально.

1002. В условиях предыдущей задачи доказать, что при любом n векторы $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ξ — трансцендентное число.

1003. Каким условиям должен удовлетворять скаляр ξ, чтобы векторы $(\xi, 1, 0)$, $(1, \xi, 1)$ и $(0, 1, \xi)$ из $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимы? Каков будет ответ на этот же вопрос при замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$?

1004. Доказать линейную независимость всех геометрических прогрессий, начинающихся с единицы, в векторном пространстве бесконечных последовательностей.

1005. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций $(n>0)$:

1) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$;

2) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$;

3) $1, a_1 \cos x + b_1 \sin x, a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x, \ldots, a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ числа a_i и b_i не обращаются в нуль одновременно);

4) $1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x$; 5) $\sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$;

6) $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \ldots, \sin^n x, \cos^n x$, где $n>1$;

7) $1, \ln x, \ln 2x, \ldots, \ln nx$;

8) $2^{\alpha_1 x}, 2^{\alpha_2 x}, \ldots, 2^{\alpha_n x}$, где все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны;

9) $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_n}$, где все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны.

1006. Доказать, что в пространстве многочленов всякая конечная система, состоящая из многочленов различных степеней и не содержащая нуля, линейно независима.

1007. Каким условиям должны удовлетворять скаляры ξ, η, ζ, чтобы векторы $(1, \xi, \xi^2)$, $(1, \eta, \eta^2)$ и $(1, \zeta, \zeta^2)$ были линейно зависимы? Обобщить эту задачу на случай произвольной размерности.

1008. Доказать, что в каждой системе X векторов пространства $\mathbb{k}^n$, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, можно выбрать такую линейно независимую подсистему X', что линейные оболочки $\langle X \rangle$ и $\langle X' \rangle$ совпадают. Всякая такая подсистема X' называется *базой* данной системы X.

1009. Доказать, что все базы системы векторов состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *рангом* системы.

1010. Доказать, что в пространстве $\mathbb{k}^n$:

1) любой ненулевой вектор данной системы можно включить в базу этой системы;

2) любую линейно независимую подсистему можно дополнить до базы этой системы.

1011. Доказать, что если две системы векторов имеют одинаковый ранг и одна из этих систем линейно выражается через другую, то линейные оболочки этих систем совпадают.

1012. Найти ранг системы векторов:

1) $x_1=(1,-1,0,0)$, $x_3=(0,0,1,-1)$,
$x_2=(0,1,-1,0)$, $x_4=(-1,0,0,1)$;

2) $x_1=(1,1,1,1,1)$, $x_3=(1,-1,1,-1,1)$,
$x_2=(1,i,-1,-i,1)$, $x_4=(1,-i,-1,i,1)$.

1013. Для каждой из следующих систем векторов найти какую-либо базу:

1) $x_1=(-1,4,-3,-2)$, $x_3=(3,-2,1,0)$,
$x_2=(3,-7,5,3)$, $x_4=(-4,1,0,1)$;

2) $x_1=(14,-27,-49,113)$, $x_3=(-29,55,96,-227)$,
$x_2=(43,-82,-145,340)$, $x_4=(85,-163,-292,679)$;

3) $x_1=(3-i,1-2i,-7+5i,4+3i)$, $x_2=(1+3i,1+i,-6-7i,4i)$,
$x_3=(0,1,1,-3)$.

1014. Найти все базы следующих систем векторов:

1) $x_1=(1,2,3,0,-1)$, $x_2=(0,1,1,1,0)$, $x_3=(1,3,4,1,-1)$;

2) $x_1=(1+i,1-i,2+3i)$, $x_2=(i,1,2)$,
$x_3=(1-i,-1-i,-2+3i)$, $x_4=(4,-4i,12i)$.

§ 10.2. Базис, размерность, координаты

Система X векторов линейного пространства V называется максимальной, если линейная оболочка $\langle\{X,v\}\rangle$ системы, состоящей из X и произвольного вектора $v\in V$, совпадает с $\langle X\rangle$. Линейное пространство V называется конечномерным, если оно обладает конечной максимально линейно независимой системой $e_1,\ldots,e_n$ векторов. Число n векторов такой системы (не зависящее от выбора такой системы) называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$, сама же система $e_1,\ldots,e_n$ называется базисом пространства V. Коэффициенты разложения произвольного вектора v по базису $e_1,\ldots,e_n$, т.е. числа $v^1,\ldots,v^n$, такие что $v=v^1e_1+\ldots+v^ne_n$, называются *координатами* вектора v в этом базисе.

Если $e_1,\ldots,e_n$ и $f_1,\ldots,f_n$ — два базиса одного и того же векторного пространства, то *матрица перехода* от первого базиса ко второму — это матрица (c^i_j), в i-м столбце которой стоят координаты вектора f_i в базисе $e_1,\ldots,e_n$:

$$f_i=\sum_{j=1}^n c_i^j e_j.$$

1015. Найти координаты вектора (1,0,0) пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе:

1) $e_1=(0,1,0)$, $e_2=(0,0,1)$, $e_3=(1,0,0)$;

2) $e_1=(1,1,0)$, $e_2=(0,1,1)$, $e_3=(1,0,1)$.

1016. В каждом из следующих случаев проверить, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$, и найти координаты вектора x в этом базисе:

1) $n=3$, $e_1=(1,5,3)$, $e_2=(2,7,3)$, $e_3=(3,9,4)$; $x=(2,1,1)$;
2) $n=4$, $e_1=(1,2,-1,2)$, $e_2=(2,3,0,-1)$, $e_3=(1,2,1,4)$, $e_4=(1,3,-1,0)$; $x=(7,14,-1,2)$;
3) $n=4$, $e_1=(1,2,1,1)$, $e_2=(2,3,1,0)$, $e_3=(3,1,1,-2)$, $e_4=(4,2,-1,-6)$; $x=(0,0,2,7)$.

1017. Доказать, что многочлены 1, $t-a$, $(t-a)^2$, …, $(t-a)^n$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. Найти координаты многочлена $P(t)\in\mathbb{R}_n[t]$ в этом базисе.

1018. Доказать, что многочлены $2t+t^3$, t^3-t^5, $t+t^3$ образуют базис пространства нечетных многочленов степени не выше 5. Найти координаты многочлена $5t-t^3+2t^5$ в этом базисе.

1019. Доказать, что матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

образуют базис пространства вещественных матриц порядка 2, и найти координаты матрицы

$$\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix} \quad \text{в этом базисе.}$$

1020. Доказать, что матрицы

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

образуют базис пространства вещественных симметричных матриц порядка 3, и найти координаты матрицы

$$\begin{pmatrix}0 & 6 & 1\\ 6 & 3 & -3\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix} \quad \text{в этом базисе.}$$

1021. Найти координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ в базисе:

1) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;
2) $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1$;
3) $1+t^3, t+t^3, t^2+t^3, t^3, t^4+t^3, t^5+t^3$;
4) $1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3, (t-1)^4, (t-1)^5$.

1022. Доказать, что множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ матриц размера $m \times n$ с элементами из $\Bbbk$ образует линейное пространство над $\Bbbk$ относительно стандартных операций. Найти его размерность и какой-нибудь базис.

1023. Найти размерность и базис пространства матриц порядка n:

1) с нулевой последней строкой;
2) с нулевой диагональю;
3) диагональных;
4) верхнетреугольных;
5) симметричных;
6) кососимметричных.

1024. Найти размерность и базис пространств однородных многочленов от четырех переменных степеней 1, 2, 3 и 4.

1025. Найти размерность пространства однородных многочленов степени k от n переменных.

1026. Доказать, что последовательности

$$f_1 = (2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots) \quad \text{и} \quad f_2 = (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots)$$

образуют базис в пространстве последовательностей со свойством $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$, и разложить по этому базису последовательность $f = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots)$.

1027. Найти матрицу перехода от базиса

$$e_1 = (2, 3, -2), \quad e_2 = (5, 0, -1), \quad e_3 = (2, 1, -1)$$

в $\mathbb{R}^3$ к базису

$$e'_1 = (1, 1, -1), \quad e'_2 = (1, -1, 0), \quad e'_3 = (1, 1, 1).$$

1028. В пространстве многочленов степени не выше трех найти матрицу перехода от базиса $1,\ 1+t,\ 1+t^2,\ 1+t^3$ к базису $1+t^3$, $t+t^3$, t^2+t^3, t^3.

1029. Найти матрицу перехода от базиса $1, t, \ldots, t^n$ пространства $\Bbbk_n[t]$ многочленов степени не выше n к базису $1, (t+a), \ldots, (t+a)^n$.

1030. Найти матрицу перехода от базиса 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$ пространства тригонометрических многочленов степени не выше n к базису 1, $\cos(x-a)$, $\sin(x-a)$, $\cos 2(x-a)$, $\sin 2(x-a)$, …, $\cos n(x-a)$, $\sin n(x-a)$. Найти матрицу, обратную к ней.

1031. Пусть C_1 является матрицей перехода от первого базиса ко второму, а C_2 — матрицей перехода от второго базиса к третьему. Найти матрицу перехода от первого базиса к третьему.

1032. Как изменится матрица перехода от первого базиса ко второму, если:

1) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;
2) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;
3) записать векторы обоих базисов в обратном порядке;
4) прибавить к i-му вектору первого базиса j-й;
5) прибавить к i-му вектору второго базиса j-й;
6) умножить i-й вектор первого базиса на число λ;
7) умножить i-й вектор второго базиса на число λ?

§ 10.3. Линейные подпространства и операции над ними

Подмножество $X \subset V$ линейного пространства V над $\Bbbk$ называется *линейным подпространством*, если для любых векторов u, v из X и любого числа $\lambda \in \Bbbk$ векторы $u+v$ и λu также лежат в V.

Сумма $X+Y$ линейных подпространств $X, Y \subset V$ определяется как подмножество

$$\{v \in V \mid \exists x \in X,\ \exists y \in Y : x+y=v\}.$$

Если $X \cap Y = \{0\}$, то сумма $X+Y$ называется *прямой* и записывается символически $X \oplus Y$. В этом случае также говорят, что подпространство Y является *дополнительным* к подпространству X в пространстве V.

Если пространство V представлено в виде прямой суммы двух своих подпространств, X и Y, то для каждого вектора v имеется единственное разложение в виде

$$v = x + y,$$

где $x \in X$ и $y \in Y$. В этом случае вектор x называется *проекцией* вектора v на подпространство X вдоль (по направлению) подпространства Y.

Если U — подпространство векторного пространства V, то *факторпространством* пространства V по U называют линейное пространство, обозначаемое через V/U, элементами которого являются подмножества вида

$$v + U = \{x \in V;\ x - v \in U\},$$

где $v \in V$, для которых сложение и умножение на скаляр определены следующим образом:

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U, \quad \lambda(v_1 + U) = (\lambda v_1) + U.$$

1033. Является ли линейным подпространством в пространстве Mat_n матриц порядка n подмножество, образованное всеми:

1) матрицами с нулевой последней строкой;
2) матрицами с нулевой диагональю;
3) диагональными матрицами;
4) верхнетреугольными матрицами;
5) симметричными матрицами;
6) кососимметричными матрицами;
7) вырожденными матрицами;
8) невырожденными матрицами?

1034. Найти какой-либо базис и размерность подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$, которое задается условием $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

1035. В линейном пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим подмножество V, состоящее из тех многочленов $P(t)$, для которых:

1) $P(0) = 0$;
2) $P(0) = 1$;
3) $2P(0) = 5P(1)$;
4) $P(t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$;
5) $P(t) = P(1 - t)$;
6) $P(t) = P(-t)$;
7) $P(t) = -P(-t)$.

В каких случаях V является линейным подпространством в $\mathbb{R}_n[t]$? Вычислить его размерность и найти какой-нибудь базис.

1036. Доказать, что пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} W_\alpha$ произвольного семейства линейных подпространств $W_\alpha \subset V$ векторного пространства V также является линейным подпространством в V. Верно ли то же самое для объединения?

1037. Доказать что линейная оболочка объединения двух линейных подпространств одного и того же векторного пространства совпадает с суммой этих подпространств:

$$\langle X \cup Y \rangle = X + Y.$$

1038. Дано линейное пространство V и некоторое его подмножество X. Доказать, что линейная оболочка $\langle X\rangle$ совпадает с пересечением всех линейных подпространств, содержащих X.

1039 (Прямая сумма нескольких подпространств). *Суммой* подпространств $L_1, \ldots, L_k$ векторного пространства V называется линейная оболочка их объединения:

$$L_1+\ldots+L_k = \langle L_1\cup\ldots\cup L_k\rangle.$$

Говорят, что эти подпространства образуют *прямую сумму* (которая обозначается $L_1\oplus\ldots\oplus L_k$), если любой вектор $u\in L_1+\ldots+L_k$ представляется в виде

$$u = u_1+\ldots+u_k, \quad \text{где } u_i\in L_i,\ i=1, \ldots, k,$$

единственным образом. Доказать, что это условие равносильно каждому из условий ниже:

1) $L_i\cap\Big\langle\bigcup\limits_{j\neq i} L_j\Big\rangle=\{0\}$ для $i=1, \ldots, k$;

2) $L_i\cap(L_{i+1}+\ldots+L_k)=\{0\}$ для $i=1, \ldots, k-1$.

1040. Пусть L, M, N — подпространства линейного пространства V.

1) Показать, что равенство $L\cap(M+N)=(L\cap M)+(L\cap N)$ выполняется не всегда.

2) Доказать, что $L\cap(M+(L\cap N))=(L\cap M)+(L\cap N)$.

1041. Известно, что каждые два из трех данных подпространств L, M и N линейного пространства V образуют прямую сумму. Следует ли отсюда, что и все три подпространства L, M, N образуют прямую сумму?

1042. Может ли нетривиальное (т.е. ненулевое и отличное от всего пространства) подпространство линейного пространства иметь единственное дополнительное подпространство?

1043. Пусть M — линейное подпространство конечномерного линейного пространства V, а N — некоторое его дополнительное подпространство. Доказать равенство $\dim M+\dim N=\dim V$.

1044. Пусть M и N — конечномерные линейные подпространства линейного пространства V. Доказать равенство

$$\dim M+\dim N = \dim(M+N)+\dim(M\cap N).$$

1045. Пусть конечномерное пространство V является суммой своих подпространств M и N. Доказать, что всякое подпространство, дополнительное к $M\cap N$ в V, является прямой суммой некоторых подпространств, дополнительных к $M\cap N$ в M и в N соответственно.

1046. Доказать, что пространство $\mathbb{R}[t]$ многочленов с вещественными коэффициентами распадается в прямую сумму подпространства четных многочленов и подпространства нечетных многочленов. Верно ли это утверждение для многочленов над произвольным полем?

1047. Найти размерность и базис линейной оболочки системы векторов:

1) $(1, -1), (-1, 6), (-1, 1)$;

2) $(-3, 2, 0), (0, -4, 15), (-3, 6, -15)$;

3) $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 3), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2)$;

4) $(1, 2, 1, 3), (1, 1, 1, 3), (1, 0, 1, 3)$.

1048. Найти размерность и базис векторного пространства решений системы однородных линейных уравнений:

1) $(-3+2i)x^1 - ix^2 = 0$;

2) $\begin{cases} x^1 - 3x^2 = 0, \\ -2x^1 + 6x^2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^1 - 10x^2 + 10x^3 = 0, \\ -7x^1 + 4x^2 - 4x^3 = 0, \\ -2x^1 - 3x^2 + 3x^3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -3x^1 + x^2 - 2x^3 = 0, \\ 6x^1 - 2x^2 + 4x^3 = 0, \\ -15x^1 + 5x^2 - 10x^3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x^1 + 9x^2 + 8x^3 = 0, \\ x^2 + 6x^3 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x^1 + x^2 = 0, \\ 2x^1 + x^2 = 0, \\ x^1 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = 0$;

8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = 0.$

1049. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов:

1) $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$; 2) $(-1, 1), (1, -1)$; 3) $(2, 3), (1, 1)$;

4) $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 3)$; 5) $(1, 1, 2, 2)$;

6) $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 3), (3, -5, 7, 2), (1, -7, 5, -2)$;

7) $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 3)$;

8) $(0, 0, 0, 0)$.

1050. Принадлежит ли число $\sqrt[6]{2}$ линейной оболочке чисел 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{2}$ над полем рациональных чисел?

1051. В линейном пространстве $\mathbb{R}_8[t]$ многочленов степени не выше 8 заданы два подпространства

$$L_1 = \{P \in \mathbb{R}_8[t];\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\} \quad \text{и}$$
$$L_2 = \{P \in \mathbb{R}_8[t];\ P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = 0\}$$

соответственно. Найти базисы суммы и пересечения этих подпространств.

1052. В пространстве матриц Mat_n порядка n заданы подпространство S_n симметричных матриц и подпространство T_n строго верхнетреугольных матриц. Доказать, что $\mathrm{Mat}_n = S_n \oplus T_n$. Найти проекцию произвольной матрицы A на каждое из этих подпространств параллельно другому подпространству.

1053. В пространстве матриц Mat_n заданы подпространства S_n симметричных матриц и $V_{n,r}$ матриц, у которых последние $n-r$ строк нулевые. Найти размерности и базисы суммы и пересечения этих подпространств.

1054. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1 и L_2:

1) $L_1 = \langle (4, 2, 1), (-3, 2, 0), (-1, 4, 0) \rangle$,
$L_2 = \langle (-2, 3, 1), (5, 3, 13), (7, 0, 12) \rangle$;

2) $L_1 = \langle (1, 2, 3), (4, 3, 1), (2, -1, -5) \rangle$,
$L_2 = \langle (1, 1, 1), (-3, 2, 0), (-2, 3, 1) \rangle$;

3) $L_1 = \langle (1, 2, 3), (0, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$,
$L_2 = \langle (4, 3, 1), (1, 1, 0), (5, 3, 2) \rangle$;

4) $L_1 = \langle (1, 1, 1), (4, 2, 1), (2, 0, -1) \rangle$,
$L_2 = \langle (-2, 3, 1), (1, 4, 1), (5, -2, -1) \rangle$;

5) $L_1 = \langle (1, 2, 3), (1, -2, i), (2, 0, 3+i) \rangle$,
$L_2 = \langle (1, 0, 3i), (1, 4, 3+2i), (-1, 4, 3-4i) \rangle$;

6) $L_1 = \langle (1, -i, 1+i), (1, 0, 3i), (-1, 2i, -2+i) \rangle$,
$L_2 = \langle (1, -2, i), (2, 1+i, -i), (0, 5+i, -3i) \rangle$;

7) $L_1 = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 3-i), (2, 3, 2, 4-i), (1, 1, 1, 1-i) \rangle$,
$L_2 = \langle (0, 1, 0, 3-i), (0, 2, 0, 5-2i), (0, 2+i, 0, 6+i),$
$(1, 4+i, 5-i, -2-i) \rangle$;

8) $L_1 = \langle (1, 2, 3, 1, 1), (1, 0, 1, -2, -2), (2, 0, 1, -1, 0), (0, 1, 1, 0, 0) \rangle$,
$L_2 = \langle (1, 2, 0, 0, 2), (0, 1, -2, 3, -3), (-1, 2, 1, 2, 0),$
$(1, 1, -2, 0, 0) \rangle$;

9) $L_1 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$,
$L_2 = \langle (1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, 1, -1), (0, 1, -1, -1, 1),$
$(-2, 1, 0, 1, -1) \rangle$;

10) $L_1\colon \begin{cases} x_1+x_3+x_4-x_5=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases}$ $\quad L_2\colon \begin{cases} x_3+2x_4=0, \\ x_1-x_2-x_5=0; \end{cases}$

11) $L_1=\langle(1,1,-1,1,1),(0,1,-1,1,0),(1,2,-3,2,0)\rangle$,
$L_2=\langle(1,0,-2,1,1),(1,1,-2,1,0),(2,1,0,0,1)\rangle$;

12) $L_1=\langle(1,2,-2,2,1),(2,4,-5,4,1),(2,3,-3,3,2)\rangle$,
$L_2\colon \begin{cases} x_3+2x_4=0, \\ x_1-x_2+x_5=0; \end{cases}$

13) $L_1=\langle(1,1,-1,-1),(0,1,3,2),(2,1,-1,0)\rangle$,
$L_2=\langle(1,1,2,0),(0,1,1,0),(1,3,1,3)\rangle$.

§ 10.4. Линейные функции и отображения

Отображение $\mathbf{A}: U \to V$ двух линейных пространств над одним и тем же полем $\Bbbk$ называется *линейным*, если для любых векторов $x, y \in U$ и любого числа $\lambda \in \Bbbk$ имеют место равенства

$$\mathbf{A}(u+v) = \mathbf{A}(u)+\mathbf{A}(v), \quad \mathbf{A}(\lambda u) = \lambda\mathbf{A}(u). \tag{10.1}$$

Линейные отображения из U в $\Bbbk$ называются *линейными функциями* на U.

Биективное линейное отображение векторных пространств называется *линейным изоморфизмом*. Два пространства, между которыми существует линейный изоморфизм, называются *изоморфными*.

Если в пространствах U и V даны базисы $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$ соответственно, то каждому линейному отображению $\mathbf{A}\colon U \to V$ сопоставляется матрица $A=(a^i_j)$ размера $n \times m$, называемая *матрицей отображения* $\mathbf{A}$ в указанных базисах, по столбцам которой стоят координаты векторов $\mathbf{A}(e_1), \ldots, \mathbf{A}(e_m)$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$:

$$\mathbf{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a^j_i f_j. \tag{10.2}$$

Если $C=(c^i_j)$ — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_m$ к другому базису $e'_1, \ldots, e'_m$ в пространстве U, а $D=(d^i_j)$ — матрица перехода от базиса $f_1, \ldots, f_n$ к другому базису $f'_1, \ldots, f'_n$ в пространстве V, то отображение $\mathbf{A}$ имеет по отношению к паре базисов $e'_1, \ldots, e'_m$ и $f'_1, \ldots, f'_n$ матрицу

$$A' = D^{-1}AC.$$

В случае поля $\Bbbk = \mathbb{C}$ рассматриваются также *антилинейные* (или *полулинейные*) отображения, которые определяются аналогично линейным, с той лишь разницей, что

$$\mathbf{A}(\lambda u) = \bar{\lambda}\mathbf{A}(u). \tag{10.3}$$

1055. Какие из следующих отображений пространства $\mathbb{R}_n[x]$ в себя являются линейными:

1) $P(x) \mapsto P(1) \cdot 1$;
2) $P(x) \mapsto P'(x)$;
3) $P(x) \mapsto \int\limits_0^1 P(t)\,dt \cdot x^2$, $n \geqslant 2$;
4) $P(x) \mapsto P(0)P(1) \cdot x$, $n \geqslant 1$;
5) $P(x) \mapsto \dfrac{d^n}{dx^n} P(x^2)$;
6) $P(x) \mapsto x^n P(1/x)$;
7) $P(x) \mapsto \left(\int\limits_0^x P(t)\,dt\right)/x$?

1056. Рассмотрим линейное пространство всех сходящихся числовых последовательностей $\{a_n\}$. Какие из функций $\{a_n\} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\{a_n\} \mapsto \sup a_n$ и $\{a_n\} \mapsto a_1$ являются линейными?

1057. В линейном пространстве Mat_n вещественных матриц порядка n рассмотрим функции следа и определителя. Являются ли они линейными?

1058. Доказать, что для любой ненулевой линейной функции l на конечномерном линейном пространстве V существует базис, в котором функция l имеет вид $l(x) = x^1$, где x^1 — первая координата вектора $x \in V$ в этом базисе.

1059. Доказать, что отображение, обратное к линейному изоморфизму, также является линейным изоморфизмом. Вывести отсюда, что отношение изоморфности является отношением эквивалентности.

1060. Доказать, что линейные функции на произвольном векторном пространстве V также образуют линейное пространство (которое обозначается через V^* и называется *сопряженным* или *двойственным* к пространству V). Доказать, что для любого конечномерного пространства V имеется естественный изоморфизм между пространствами V и $(V^*)^*$.

1061. Пусть V — линейное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Доказать существование и единственность линейных функций $e^1, \ldots, e^n$ на V таких, что $e^i(e_j) = \delta^i_j$ (символ Кронекера). Проверить, что такое множество образует базис пространства V^* линейных функций на пространстве V (такой базис называется *двойственным* или *ду-*

альным к базису $e_1, \ldots, e_n$). Как он связан с координатами в базисе $e_1, \ldots, e_n$?

1062. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Доказать, что всякая линейная функция l на V имеет вид $l(x) = l_1 x^1 + \ldots + l_n x^n$, где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Какие координаты имеет функция l в дуальном базисе $e^1, \ldots, e^n$ пространства V^*?

1063. Пусть l — ненулевая линейная функция на линейном пространстве V (не обязательно конечномерном). Доказать, что *ядро* $\mathrm{Ker}(l)$ функции l, т. е. множество всех векторов $x \in V$, для которых $l(x) = 0$, является максимальным нетривиальным линейным подпространством в V, т. е. не содержится ни в каком подпространстве пространства V, отличном от себя и от V.

Доказать, что пространство $V / \mathrm{Ker}(l)$ одномерно.

1064. Доказать, что k линейных функций на n-мерном линейном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер является $(n-k)$-мерным подпространством.

1065. Доказать, что если ядра двух линейных функций l_1 и l_2 на линейном пространстве V (не обязательно конечномерном) совпадают, то существует такое ненулевое число λ, что $l_1(x) = \lambda l_2(x)$ для любого $x \in V$.

1066. Доказать, что всякому линейному отображению $\mathbf{A}\colon V \to W$ естественным образом соответствует линейное отображение $\mathbf{A}^*\colon W^* \to V^*$.

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_n$ — базисы пространств V и W соответственно, $e^1, \ldots, e^m$ и $f^1, \ldots, f^n$ — двойственные к ним базисы в V^* и W^*. Как связаны матрицы A и A^* линейных отображений $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ соответственно в этих базисах?

1067. *Аннулятором* $\mathrm{Ann}\, W$ подмножества W векторного пространства V называется множество всех линейных функций, обращающихся на W в нуль. Показать, что $\mathrm{Ann}\, W$ — линейное подпространство пространства V^* линейных функций и что если V конечномерно, то $\dim(\mathrm{Ann}\, W) = \dim V - \mathrm{rank}\, W$.

1068. Доказать, что, если W_1 и W_2 — подпространства некоторого конечномерного векторного пространства, то равенство $\mathrm{Ann}\, W_1 = \mathrm{Ann}\, W_2$ равносильно совпадению подпространств W_1 и W_2. Проверить соотношения $\mathrm{Ann}(W_1 + W_2) = \mathrm{Ann}\, W_1 \cap \mathrm{Ann}\, W_2$ и $\mathrm{Ann}(W_1 \cap W_2) = \mathrm{Ann}\, W_1 + \mathrm{Ann}\, W_2$.

1069. Пусть W — линейное подпространство некоторого конечномерного векторного пространства. Доказать, что $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W)) = W$.

1070. Пусть W — подпространство векторного пространства V, дополнительное к подпространству U. Доказать, что W изоморфно факторпространству V/U.

1071. Доказать, что для любого линейного подпространства U пространства V имеет место изоморфизм пространств $\mathrm{Ann}(U)$ и $(V/U)^*$.

1072. Показать, что множество всех полулинейных функций на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ имеет структуру линейного пространства над $\mathbb{C}$ размерности $n=\dim V$. Показать также, что функция l полулинейна тогда и только тогда, когда функция $\overline{l}$, задаваемая формулой $\overline{l}(x)=\overline{l(x)}$, линейна.

1073. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис комплексного линейного пространства V, а $e^1, \ldots, e^n$ — двойственный базис. Показать, что функции $\overline{e^1}, \ldots, \overline{e^n}$ образуют базис пространства полулинейных функций. Пусть C — матрица перехода к новому базису $f_1, \ldots, f_n$ в пространстве V. Найти матрицу перехода от базиса $\overline{e^1}, \ldots, \overline{e^n}$ к новому двойственному базису $\overline{f^1}, \ldots, \overline{f^n}$.

1074. В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n рассмотрим линейные функции l^i, $i=0, 1, \ldots, n$, заданные формулой

$$l^i(P) = \int\limits_0^{i+1} P(t)\,dt.$$

Доказать, что эти функции образуют базис в пространстве линейных функций на $\mathbb{R}_n[t]$.

1075. В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n рассмотрим линейные функции l^i, $i=0, 1, \ldots, n$, заданные формулой $l^i(P) = P^{(i)}(t_0)$. Доказать, что эти функции образуют базис в пространстве линейных функций на $\mathbb{R}_n[t]$. Найти двойственный базис $P_0, \ldots, P_n$ в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$.

1076. В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n рассмотрим линейные функции l^i, $i=0, 1, \ldots, n$, заданные формулой $l^i(P)=P(t_i)$, где $P(t)\in\mathbb{R}_n[t]$, а t_0, t_1, …, t_n — различные точки числовой прямой. Доказать, что эти функции образуют базис в пространстве линейных функций на $\mathbb{R}_n[t]$. Найти двойственный базис в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$.

1077. Доказать, что векторное пространство $(\mathbb{R}[t])^*$ линейных функций на пространстве $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов не изоморфно пространству $\mathbb{R}[t]$.

1078. В пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных квадратных матриц порядка n рассмотрим линейные функции l^{pq}, $p, q = 1, \ldots, n$, заданные формулой $l^{pq}(A) = \mathrm{tr}\,(U^p V^q A)$, где $A \in M_n$,

$$U = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{4\pi i/n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что эти функции образуют базис в пространстве линейных функций на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Найти двойственный базис (A_{pq}) в пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

1079. Линейное отображение $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В области определения выбран новый базис $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (0, 2, -1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$. Найти матрицу отображения $\mathbf{A}$ в этом базисе.

1080. Найти матрицу отображения из предыдущей задачи, если в области значений выбран новый базис: $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (1, 1)$, а базис в $\mathbb{R}^3$ оставлен без изменений.

§ 10.5. Аффинные пространства

Аффинным пространством, ассоциированным с данным линейным пространством V над полем $\Bbbk$, называется множество X (элементы которого называются *точками*) вместе с отображением $X \times V \to X$ (результат применения которого к $A \in X$ и $v \in V$ обозначается через $A + v$), удовлетворяющим следующим аксиомам.

1. Для любых двух точек $A, B \in X$ существует, притом единственный, вектор $v \in V$ такой, что $B = A + v$ (этот вектор обозначается через $\overrightarrow{AB}$, а также $B - A$).

2. Для любой точки A и любых двух векторов $u, v \in V$ имеет место равенство

$$(A + u) + v = A + (u + v) \tag{10.4}$$

(иначе говоря, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ для любых трех точек $A, B, C \in X$).

Аффинным подпространством (или *плоскостью*) в аффинном пространстве X называется любое подмножество Y вида

$$Y = A + L = \{A + v \mid v \in L\}, \tag{10.5}$$

где $A \in X$ — некоторая точка, а $L \subset V$ — линейное подпространство. *Размерностью* аффинного подпространства $A + L$ называют размерность соответствующего линейного подпространства L.

Про две непересекающиеся плоскости $P_1 = A_1 + L_1$ и $P_2 = A_2 + L_2$ в аффинном пространстве говорят, что они *скрещиваются по подпространству* $L_1 \cap L_2$.

Аффинной оболочкой данного подмножества Y аффинного пространства X, обозначаемой $\langle Y \rangle$, называется минимальная плоскость в X, содержащая Y.

Говорят, что набор точек $Y \subset X$ *аффинно независим*, если аффинная оболочка $\langle Y \rangle$ не совпадает с аффинной оболочкой никакого меньшего набора $Y' \subset Y$.

1081. Доказать, что для любой точки A аффинного пространства имеет место равенство $\overrightarrow{AA} = 0$.

1082. Доказать, что линейное пространство V становится аффинным пространством X, если точками $A \in X$ считать векторы $a \in V$, а отображение $X \times V \to X$ определить как $(x, a) \mapsto x + a$.

1083. Определить, является ли Y аффинным подпространством аффинного пространства X, и, если является, найти линейное подпространство L, с которым Y ассоциировано, в каждом из перечисленных ниже случаев:

1) X произвольное аффинное пространство, а Y — конечный набор точек из X;

2) X — плоскость $\mathbb{R}^2$, а Y — полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$;

3) X — плоскость $\mathbb{R}^2$, а Y — произвольная прямая на этой плоскости;

4) X — пространство $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной, а Y — подмножество таких многочленов $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, удовлетворяющих условию $P(0) + P(1) = 1$;

5) X — пространство $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной, а Y — подмножество многочленов $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, удовлетворяющих условию $P(0)P(1) = 1$.

1084. Доказать, что если прямая имеет две общие точки с аффинным подпространством, то она целиком содержится в нем.

1085. Доказать, что система точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинно независима тогда и только тогда, когда для произвольной точки O равенства

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$$

выполняются, если и только если все λ_i равны нулю.

1086. Доказать, что в k-мерной плоскости любая система из $k+2$ точек аффинно зависима.

1087. Доказать, что множество решений любой совместной системы неоднородных линейных уравнений образует аффинное подпространство.

1088. Составить параметрические уравнения плоскости

$$\begin{cases} 7x_1+9x_2-3x_3+11x_4+6x_5=9, \\ 3x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5=-3. \end{cases}$$

1089. Составить параметрические уравнения двумерной плоскости, проходящей через три точки: $A_1(0, 1, 0, 1, 5)$, $A_2(3, -1, 3, 4, 0)$, $A_3(2, 2, 7, 6, 1)$. Найти систему уравнений, задающую эту плоскость.

1090. Составить параметрические уравнения, а также найти систему линейных уравнений, которые задают аффинную оболочку объединения:

1) прямой $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$ и плоскости

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ x_3-x_4+x_5=0; \end{cases}$$

2) двух плоскостей

$$x_1=t_1+t_2,\ x_2=1-t_1,\ x_3=t_1+2t_2,\ x_4=t_1,\ x_5=t_2$$

и

$$x_1=t_1,\ x_2=t_2,\ x_3=1-t_1+t_2,\ x_4=2t_1-t_2,\ x_5=1-2t_1.$$

1091. Доказать, что две плоскости $P_1=p_1+L_1$ и $P_2=p_2+L_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $L_1=L_2$ и $p_2-p_1 \in L_1$.

1092. Доказать, что в пространстве многочленов $\Bbbk_n[t]$ степени не выше n подмножество $\{f \in \Bbbk_n[t] \mid f(\alpha)=\beta\}$ при фиксированных $\alpha, \beta \in \Bbbk$ является аффинным подпространством, и найти его размерность.

1093. Доказать, что две плоскости $P_1 = p_1 + L_1$ и $P_2 = p_2 + L_2$ пересекаются тогда и только тогда, когда $p_2 - p_1 \in L_1 + L_2$; в этом случае пересечение является плоскостью $P = p_0 + L_1 \cap L_2$ для некоторой точки p_0.

1094. Доказать, что любые две прямые в аффинном пространстве содержатся в одной трехмерной плоскости. Каким может быть взаимное расположение двух прямых в n-мерном аффинном пространстве при $n \geqslant 3$?

1095. Доказать, что любые две двумерные плоскости в аффинном пространстве содержатся в одной пятимерной плоскости. Каким может быть взаимное расположение двух двумерных плоскостей в n-мерном аффинном пространстве при $n \geqslant 5$?

1096. В аффинном пространстве заданы две плоскости: $P_1 = p_1 + L_1$ и $P_2 = p_2 + L_2$, где $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ и $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, причем каждая из систем векторов $\{a_1, \ldots, a_5\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ линейно независима. С помощью рангов r и R систем векторов $\{a_1, \ldots, a_5, b_1, b_2, b_3\}$ и $\{\overrightarrow{p_1 p_2}, a_1, \ldots, a_5, b_1, b_2, b_3\}$ выразить необходимые и достаточные условия того, чтобы данные плоскости:

1) скрещивались по точке;
2) пересекались в одной точке;
3) скрещивались по прямой;
4) пересекались по прямой;
5) скрещивались по двумерной плоскости;
6) пересекались по двумерной плоскости;
7) были параллельны;
8) совпадали.

1097. Определить взаимное расположение плоскостей P_1 и P_2:

1) $P_1: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ $\quad P_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$

2) $P_1: x_1 = 0, \ \ x_2 = 0, \ \ x_3 = t_1, \ x_4 = t_2, \ x_5 = 1,$
$P_2: x_1 = t_1, \ x_2 = t_2, \ x_3 = 0, \ \ x_4 = 0, \ \ x_5 = 0;$

3) $P_1 = (1, -1, 2, 1, 0) + \langle (2, 3, -1, 0, 4), (3, -2, 1, 0, 1) \rangle,$
$P_2 = (0, 1, -1, 0, 1) + \langle (4, -1, -4, 0, 7), (7, 5, 8, 0, 1) \rangle;$

4) $P_1: x_1 = 1 + t, \ x_2 = -2t, \ x_3 = t, \ x_4 = 1 + t, \ x_5 = 1 - t,$
$P_2: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Глава 11

Операторы в линейных пространствах

§ 11.1. Матрица линейного оператора

Линейные отображения из линейного пространства V в себя называются *линейными операторами* пространства V. *Матрица* $A=(a_i^j)$ линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ n-мерного векторного пространства V определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j, \; i = 1, \ldots, n.$$

При этом координаты образа вектора $v=(v^i)$ могут быть вычислены по формуле

$$(\mathbf{A}v)^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i v^j.$$

При переходе к другому базису $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_n$ матрица оператора меняется по следующему закону:

$$\widetilde{A} = C^{-1}AC,$$

где $\widetilde{A}$ — матрица того же оператора в новом базисе, а C — матрица перехода от старого базиса к новому.

1098. Найти матрицу линейного оператора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ (со стандартным скалярным произведением), заданного формулой $x \mapsto (x, a)\,a$, где вектор $a=(1, 2, 3)$, в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$ и в базисе $b_1=(1, 0, 1)$, $b_2=(2, 0, -1)$, $b_3=(1, 1, 0)$.

1099. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_5[x]$ многочленов степени не выше пятой и его базис $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$. Найти матрицы следующих операторов:

1) дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$;

2) сдвига $f(x) \mapsto f(x+1)$;

3) $f(x) \mapsto f(-x)$;

4) $f(x) \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1100. Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданного формулой $\mathbf{A}(x) = [v, x]$, где $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ обозначает векторное произведение, а $v=(2,-1,3)$. Какие операторы можно представить в виде $x\mapsto[v,x]$ для некоторого вектора $v\in\mathbb{R}^3$?

1101. Рассмотрим пространство Mat_2 квадратных матриц порядка 2. Определим при помощи матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

два отображения:

$$L_A\colon \mathrm{Mat}_2\to\mathrm{Mat}_2,\quad L_A(X)=AX,\quad X\in\mathrm{Mat}_2;$$
$$R_A\colon \mathrm{Mat}_2\to\mathrm{Mat}_2,\quad R_A(X)=XA,\quad X\in\mathrm{Mat}_2.$$

Проверить, что отображения L_A и R_A являются линейными операторами и найти их матрицы в базисе

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

1102. Пусть A, B — матрицы операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно в некотором фиксированном базисе. Какую матрицу имеет композиция $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$ этих операторов в том же базисе?

1103. Доказать, что определитель матрицы линейного оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном векторном пространстве не зависит от выбора базиса. Этот определитель называется *определителем оператора* $\mathbf{A}$ и обозначается $\det\mathbf{A}$.

1104. Доказать, что след матрицы линейного оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном векторном пространстве не зависит от выбора базиса. Этот след называется *следом оператора* $\mathbf{A}$ и обозначается $\operatorname{tr}\mathbf{A}$.

1105. Доказать, что на конечномерном линейном пространстве не существует таких линейных операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, что $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=\mathrm{Id}$.

1106. Как изменится матрица линейного оператора, если поменять местами i-й и j-й базисные векторы?

1107. Как изменится матрица линейного оператора, если i-й базисный вектор умножить на некоторое число $\lambda\neq0$?

1108. Как изменится матрица линейного оператора, если к i-му базисному вектору прибавить j-й?

1109. Как связаны матрица A оператора $\mathbf{A}$ в произвольном базисе $e_1,\ldots,e_n$ конечномерного пространства V и матрица A^* сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в дуальном базисе $e^1,\ldots,e^n$ пространства V^*?

1110. Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1=(3,2)$, $e_2=(2,1)$, если в стандартном базисе он имеет матрицу $\begin{pmatrix}-2&4\\5&1\end{pmatrix}$.

1111. Линейный оператор в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе:

1) e_1, e_3, e_2, e_4; 2) $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4$.

1112. Линейный оператор в некотором базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

1113. Линейный оператор $\mathbf{A}$ переводит векторы

$$a_1 = (1, 2, -1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (0, 0, 1)$$

в векторы

$$b_1 = (2, 1, -2), \quad b_2 = (1, 2, -3), \quad b_3 = (2, 3, 1)$$

соответственно. Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

1114. Линейный оператор в базисе

$$a_1 = (8, -6, 7), \quad a_2 = (-16, 7, -13), \quad a_3 = (9, -3, 7)$$

имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$b_1 = (1, -2, 1), \quad b_2 = (3, -1, 2), \quad b_3 = (2, 1, 2).$$

1115. Линейное пространство V разложено в прямую сумму двух своих подпространств $V = L_1 \oplus L_2$. Определим два отображения $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ пространства V в себя, для этого рассмотрим произвольный вектор $x = x_1 + x_2 \in V$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, тогда:

$$\mathbf{P}(x) = x_1, \quad \mathbf{R}(x) = -x_1 + x_2.$$

Доказать, что:

1) отображения $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ являются линейными операторами ($\mathbf{P}$ называется оператором проектирования на L_1 параллельно L_2, а $\mathbf{R}$ — оператором отражения в V относительно L_2 параллельно L_1);

2) $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{R}^2 = \mathrm{Id}, \quad \mathbf{R} = \mathrm{Id} - 2\mathbf{P}.$$

§ 11.2. Ядро и образ линейного оператора. Инвариантные подпространства. Проекторы. Комплексификация и овеществление

Образом линейного оператора $\mathbf{A}$, обозначаемым $\mathrm{Im}\,\mathbf{A}$, называется множество всех векторов v, для которых найдется такой вектор u, что $\mathbf{A}u = v$. Если образ оператора конечномерен, то его размерность называется *рангом* данного оператора и обозначается $\mathrm{rank}\,\mathbf{A}$.

Ядром $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество векторов v таких, что $\mathbf{A}(v) = 0$.

Подпространство U линейного пространства V называется *инвариантным* относительно оператора $\mathbf{A}$ на пространстве V, если для любого вектора $u \in U$ выполнено также $\mathbf{A}u \in U$.

Оператор $\mathbf{A}$ называется *идемпотентным* или *проектором*, если он удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.$$

Оператор $\mathbf{J}\colon V \to V$ в вещественном линейном пространстве V называется *комплексной структурой*, если он удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{J}^2 = -\mathrm{Id}\,.$$

Множество векторов вещественного линейного пространства V, обладающего некоторой комплексной структурой $\mathbf{J}$, может быть снабжено структурой комплексного пространства, а именно, определим умножение на комплексные числа (скаляры) векторов из V по правилу:

$$zv = (a+ib)v = a\,v + b\,\mathbf{J}v, \quad z = a+ib \in \mathbb{C}, \quad v \in V.$$

На прямой сумме $V \oplus V = \{(x, y) | x, y \in V\}$ двух экземпляров данного вещественного пространства V можно определить следующую стандартную комплексную структуру $\mathbf{J}_0$:

$$\mathbf{J}_0(x, y) = (-y, x), \quad (x, y) \in V \oplus V.$$

Комплексное линейное пространство $(V \oplus V, \mathbf{J}_0)$ называется *комплексификацией* вещественного пространства V и обозначается $V_{\mathbb{C}}$. При этом произвольный элемент (x, y) из $V_{\mathbb{C}}$ иногда обозначается по аналогии с комплексными числами как $x + iy$.

Комплексификацией линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в вещественном линейном пространстве V, называется оператор $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ в пространстве $V_{\mathbb{C}}$, определенный по правилу

$$\mathbf{A}_{\mathbb{C}}(x, y) = (\mathbf{A}x, \mathbf{A}y), \quad (x, y) \in V_{\mathbb{C}}.$$

Если V — комплексное линейное пространство, то на нем имеется естественная структура вещественного линейного пространства: произвольный вещественный скаляр α можно считать частным случаем комплексного скаляра. Полученное вещественное пространство $V_{\mathbb{R}}$ называется *овеществлением* комплексного линейного пространства V. Отметим, что как множество пространство $V_{\mathbb{R}}$ совпадает с V. *Овеществлением* $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ произвольного оператора $\mathbf{A}\colon V \to V$ называется отображение вещественного линейного пространства $V_{\mathbb{R}}$ в себя, заданное оператором $\mathbf{A}$. Очевидно, что это отображение линейно над $\mathbb{R}$.

1116. Доказать, что ядро $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ и образ $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ любого линейного оператора в пространстве V являются линейными подпространствами пространства V, причем если V конечномерно, то

$$\dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}) + \dim(\operatorname{Im}\mathbf{A}) = \dim V.$$

1117. Показать, что ядро и образ любого оператора $\mathbf{A}$ инвариантны относительно оператора $\mathbf{A}$.

1118. Найти ядро и образ следующих операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n:

1) оператор сдвига $\mathbf{T}\colon f(x) \mapsto f(x+1)$;

2) $\mathbf{R}\colon f(x) \mapsto f(-x)$;

3) $\mathbf{D}\colon f(x) \mapsto xf'(x)$;

4) $\mathbf{P}\colon f(x) \mapsto f(0)x$.

1119. Найти ядро и образ оператора дифференцирования:

1) в пространстве $\Bbbk_n[x]$ многочленов степени не выше n;

2) в пространстве $\Bbbk[x]$ всех многочленов одной переменной;

3) в вещественном пространстве V_n тригонометрических многочленов, т. е. 2π-периодических функций f на числовой прямой $\mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin kx + b_k \cos kx.$$

1120. Доказать, что для любых подпространств L_1 и L_2 конечномерного линейного пространства V, таких что $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$, найдется такой линейный оператор $\mathbf{A}$, что

$$\operatorname{Ker}\mathbf{A} = L_1, \quad \operatorname{Im}\mathbf{A} = L_2.$$

1121. Доказать, что ядро и образ любого идемпотентного оператора $\mathbf{A}$ образуют прямую сумму. Доказать, что $\mathbf{A}$ является оператором проектирования на подпространство $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ параллельно $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$.

1122. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — идемпотентные операторы (проекторы) в одном и том же векторном пространстве. Доказать, что оператор $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ идемпотентен (проектор) тогда и только тогда, когда $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{B}$.

1123. Пусть $\mathbf{A}$ — идемпотентный оператор в пространстве V. Доказать, что сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ в двойственном пространстве V^* также идемпотентен. Каковы его ядро и образ?

1124. Доказать, что сумма и пересечение подпространств L_1 и L_2, инвариантных относительно оператора $\mathbf{A}$, также инвариантны относительно оператора $\mathbf{A}$.

1125. Доказать, что если оператор $\mathbf{A}$ обратим, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имеют одни и те же инвариантные подпространства.

1126. Доказать, что если два оператора $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, определенные на одном и том же векторном пространстве, коммутируют, то ядро и образ оператора $\mathbf{A}$ инвариантны относительно $\mathbf{B}$.

1127. Охарактеризовать матрицы таких операторов $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, что

1) подпространство $\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$ инвариантно относительно $\mathbf{A}$;

2) подпространство $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle$ инвариантно относительно $\mathbf{A}$.

1128. Доказать, что конечномерное вещественное линейное пространство V, обладающее некоторой комплексной структурой $\mathbf{J}$, имеет четную размерность.

1129. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис вещественного пространства V. Доказать, что векторы

$$(e_1, 0) = e_1 + i0, \quad (e_2, 0) = e_2 + i0, \quad \ldots, \quad (e_n, 0) = e_n + i0$$

образуют базис комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ пространства V.

1130. Доказать, что вещественный оператор $\mathbf{A}$ вырожден тогда и только тогда, когда вырожден оператор комплексификации $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$.

1131. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис пространства V над полем $\mathbb{C}$. Доказать, что векторы $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ образуют базис овеществления $V_{\mathbb{R}}$.

1132. Пусть $\mathbf{A}$ — оператор, действующий в конечномерном комплексном пространстве V. Доказать, что оператор $\mathbf{A}_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ имеет неотрицательный определитель.

1133. Пусть V — вещественное линейное пространство. Доказать, что имеется следующий естественный изоморфизм вещественных пространств: $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \to V \oplus V$.

1134. Пусть V — вещественное линейное пространство и $\mathbf{J}$ — некоторая комплексная структура на нем. Доказать, что:

1) подпространство $L \subset V$ является одновременно и комплексным подпространством в $(V, \mathbf{J})$, если L является инвариантным подпространством оператора $\mathbf{J}$;

2) оператор $\mathbf{A} : V \to V$ определяет комплексный линейный оператор в пространстве $(V, \mathbf{J})$, если и только если операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ коммутируют: $\mathbf{AJ} = \mathbf{JA}$.

§ 11.3. Подстановка линейного оператора в многочлен. Аннулирующие многочлены

Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$, а $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен от x с коэффициентами из $\mathbb{k}$. Тогда по определению $P(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + \ldots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \,\mathrm{Id}$, где под произведением операторов понимается композиция, а Id — тождественный оператор в пространстве V.

Многочлен $P(x)$ называется *аннулирующим* для оператора $\mathbf{A}$, если $P(\mathbf{A}) = 0$. Если данный оператор $\mathbf{A}$ имеет хотя бы один аннулирующий многочлен, то *минимальным аннулирующим* (или просто *минимальным*) многочленом оператора $\mathbf{A}$ называется его аннулирующий многочлен минимально возможной степени со старшим коэффициентом, равным единице. Минимальный многочлен оператора $\mathbf{A}$ будет обозначаться $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Характеристическим многочленом оператора $\mathbf{A}$ на конечномерном векторном пространстве называется многочлен

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \,\mathrm{Id}),$$

где Id — тождественный оператор в том же пространстве.

Теорема Гамильтона—Кэли утверждает: характеристический многочлен $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ произвольного оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном линейном пространстве аннулирует $\mathbf{A}$: $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$.

Оператор $\mathbf{A}$ в пространстве V называется *полупростым*, если для любого подпространства $U \subset V$, инвариантного относительно $\mathbf{A}$, найдется дополнительное к U подпространство, также инвариантное относительно $\mathbf{A}$.

Оператор $\mathbf{A}$ называется *нильпотентным*, если существует такое натуральное N, что $\mathbf{A}^N = 0$.

1135. Доказать, что каковы бы ни были два многочлена $P(x)$, $Q(x)$ и линейный оператор $\mathbf{A}$, операторы $P(\mathbf{A})$ и $Q(\mathbf{A})$ коммутируют между собой.

1136. Доказать, что любой аннулирующий многочлен оператора делится на его минимальный многочлен. Вывести отсюда, что если оператор имеет хотя бы один аннулирующий многочлен, то его минимальный многочлен определен однозначно.

1137. Найти минимальный многочлен оператора $\mathbf{A}$ на пространстве V в каждом из следующих случаев:

1) V — пространство $\mathbb{R}_{100}[x]$ многочленов степени не выше 100, $\mathbf{A} = \dfrac{d^3}{dx^3}$ — оператор трехкратного дифференцирования;

2) $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ — оператор отражения относительно подпространства L_1 параллельно L_2, где $L_1, L_2 \neq 0$;

3) $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ — оператор проектирования на L_1 параллельно L_2, причем $L_1, L_2 \neq 0$;

4) $\mathbf{A} = \mathbf{T}$ — оператор транспонирования в пространстве Mat_n квадратных матриц порядка n;

5) $\mathbf{A}$ — оператор сдвига $f(x) \mapsto f(x+1)$ в пространстве $\mathbb{k}_{10}[x]$ многочленов степени не выше 10;

6) $\mathbf{A}$ — оператор в пространстве $\mathbb{R}^3$, заданный формулой $\mathbf{A}(x) = [v, x]$, где $[\cdot\,,\cdot]$ обозначает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, а v — некоторый фиксированный вектор;

7) $\mathbf{A}$ — оператор в трехмерном линейном пространстве над полем: а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) $\mathbb{Z}_2$, заданный в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1138. Доказать, что минимальный многочлен оператора не меняется при расширении поля. А именно, пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ — операторы в конечномерных пространствах над полями $\mathbb{k}$ и $\mathbb{k}'$ соответственно, причем $\mathbb{k}$ — подполе в $\mathbb{k}'$. Доказать, что если матрицы операторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ совпадают, то совпадают и их минимальные многочлены. Обобщить это утверждение на случай произвольных (не обязательно конечномерных) пространств.

1139. Пусть $\mathbf{A}$ — оператор на конечномерном пространстве V, а U — некоторое подпространство в V, инвариантное относительно $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{A}' : U \to U$ — ограничение оператора $\mathbf{A}$ на подпространство U, а $\mathbf{A}'' : V/U \to V/U$ — оператор на факторпространстве, определенный формулой

$$\mathbf{A}''(v+U) = \mathbf{A}(v) + U.$$

Доказать, что

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \chi_{\mathbf{A}'}(\lambda)\chi_{\mathbf{A}''}(\lambda).$$

1140. Пусть многочлен $f(\lambda)$ аннулирует оператор $\mathbf{A}$, действующий в пространстве V, причем $f(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$, где многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ взаимно просты. Доказать, что пространство V можно разложить в прямую сумму $V = L_1 \oplus L_2$ двух инвариантных относительно $\mathbf{A}$ подпространств.

1141. Доказать, что для любых взаимно простых многочленов $P(x)$, $Q(x)$ и любого линейного оператора $\mathbf{A}$ имеет место равенство

$$\operatorname{Ker}(P(\mathbf{A})Q(\mathbf{A})) = \operatorname{Ker}(P(\mathbf{A})) \oplus \operatorname{Ker}(Q(\mathbf{A})).$$

1142. Обобщить предыдущую задачу на случай произвольного числа попарно взаимно простых многочленов.

1143. Многочлен $S(x)$ назовем *полупростым*, если при любом его разложении $S(x) = Q(x)R(x)$ в произведение многочленов сомножители $Q(x)$ и $R(x)$ взаимно просты. Доказать, что минимальный многочлен $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda)$ оператора $\mathbf{A}$ на конечномерном векторном пространстве делится на максимальный полупростой делитель его характеристического многочлена $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

1144. Доказать, что линейный оператор в конечномерном пространстве полупрост тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda)$ полупрост (и следовательно, совпадает с максимальным полупростым делителем характеристического многочлена $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$).

1145. Доказать, что если оператор $\mathbf{A}$ является одновременно и полупростым, и нильпотентным, то он нулевой оператор.

1146. Показать, что матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ определяет:

а) полупростой оператор в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^2$;

б) нильпотентный оператор в стандартном базисе двумерного пространства над $\mathbb{Z}_2$.

1147. Какие из операторов в условии задачи 1137 являются нильпотентными, а какие — полупростыми?

1148 (Разложение Жордана). Доказать, что любой оператор $\mathbf{A}$ в конечномерном векторном пространстве над полем характеристики нуль представляется в виде суммы $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{N}$ коммутирующих операторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{N}$, в которой $\mathbf{S}$ — полупростой, а $\mathbf{N}$ — нильпотентный операторы.

1149. Для каждого из следующих операторов, заданного своей матрицей в стандартном базисе пространства $\Bbbk^n$, найти разложение Жордана:

1) $\Bbbk^n=\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

2) $\Bbbk^n=\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\Bbbk^n=\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\Bbbk^n=\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\Bbbk^n=\mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1150. Пусть V — пространство всех бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ с элементами из $\Bbbk$, $P(\lambda)=\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\ldots-a_1\lambda-a_0$ — некоторый многочлен. Рассмотрим оператор сдвига $\mathbf{T}$, действующий по формуле

$$\mathbf{T}\big((x_1, x_2, x_3, \ldots)\big) = (x_2, x_3, x_4 \ldots).$$

Пусть U — ядро оператора $P(\mathbf{T})$, а $\mathbf{T}'$ — ограничение оператора $\mathbf{T}$ на U. Найти

1) размерность подпространства U,

2) характеристический и минимальный многочлены оператора $\mathbf{T}'$.

1151. Доказать, что если степень минимального многочлена оператора $\mathbf{A}$ равна k, то найдется такой вектор v, что векторы v, $\mathbf{A}v$, … …, $\mathbf{A}^{k-1}v$ линейно независимы.

1152. Доказать, что характеристический многочлен оператора совпадает с минимальным тогда и только тогда, когда в некотором базисе этот оператор имеет матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Найти характеристический многочлен этого оператора.

1153. Доказать, что характеристический многочлен оператора **A** совпадает с его минимальным многочленом тогда и только тогда, когда каждый оператор, коммутирующий с **A**, представляется в виде $P(\mathbf{A})$, где $P(x)$ — некоторый многочлен.

§ 11.4. Собственные значения, собственные векторы

Пусть $\mathbf{A}\colon V \to V$ — линейный оператор. Если для некоторого $v \in V$, $v \neq 0$, и $\lambda \in \Bbbk$ выполнено равенство $\mathbf{A}v = \lambda v$, то v называется *собственным вектором* оператора **A** с *собственным значением* λ.

1154. Доказать, что множество всех собственных векторов оператора **A** с одним и тем же собственным значением λ вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство. Это подпространство называется *собственным подпространством*, отвечающим собственному значению λ, и обозначается через $V_\lambda(\mathbf{A})$.

1155. Доказать, что множество собственных значений оператора **A** на конечномерном пространстве совпадает со множеством корней многочлена $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Кратность корня λ в характеристическом многочлене будет называться *кратностью собственного значения* λ.

1156. Доказать, что если $v_1, \ldots, v_k$ — собственные векторы одного и того же оператора с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то векторы $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.

1157. Пусть V — вещественное пространство и $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}^2 = -\operatorname{Id}$, — комплексная структура на нем. Доказать, что:

1) собственными значениями комплексификации $\mathbf{J}_{\mathbb{C}}$ являются i и $-i$;

2) комплексификация $V_{\mathbb{C}}$ пространства V раскладывается в прямую сумму собственных подпространств: $V_{\mathbb{C}} = V_i \oplus V_{-i}$.

1158. Пусть V — комплексное пространство. *Сопряженное* комплексное линейное пространство $\overline{V}$ как множество совпадает с V, операция сложения векторов также совпадает со сложением в V, а умножение на комплексные числа определено следующим образом:

$$\lambda \cdot v = \overline{\lambda} v, \quad v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

(в правой части последнего равенства подразумевается умножение в V). Установить естественный изоморфизм $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to V \oplus \overline{V}$.

1159. Доказать, что если характеристический многочлен $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ оператора **A**, действующего в пространстве V размерности n, имеет ровно n попарно различных корней, то существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица оператора **A** диагональна.

1160. Доказать, что все собственные значения оператора **A** в конечномерном пространстве отличны от нуля тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

1161. Доказать, что если **A** — невырожденный оператор на конечномерном пространстве, то **A** и $\mathbf{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы. Как связаны между собой их соответствующие собственные значения?

1162. Доказать, что размерность собственного подпространства $V_\lambda(\mathbf{A})$ не превосходит кратности корня λ в характеристическом многочлене оператора **A**.

1163. Доказать, что кратность корня λ полупростого оператора совпадает с размерностью собственного подпространства V_λ этого оператора.

1164. Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейных операторов:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1165. Найти собственные значения и собственные подпространства оператора транспонирования $\mathbf{T}: X \to X^\top$, действующего в пространстве Mat_n квадратных матриц порядка n.

1166. Найти собственные значения и собственные подпространства оператора:

1) проектирования **P** на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2;

2) отражения **R** относительно L_2 параллельно L_1.

1167. Найти собственные значения, их кратности и соответствующие собственные подпространства операторов дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$ и двукратного дифференцирования $\dfrac{d^2}{dx^2}$, действующих:

1) в пространстве вещественных многочленов степени не выше n;

2) в пространстве вещественных тригонометрических многочленов вида

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx;$$

3) в пространстве, порожденном системой функций $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные числа.

1168. Пусть $p_0(t)$ — произвольный фиксированный вещественный многочлен, отличный от константы. Определим преобразование φ пространства $\mathbb{R}[t]$ всех вещественных многочленов в себя, которое сопоставляет произвольному многочлену $p(t)$ его остаток $r(t)$ при делении на $p_0(t)$: $\varphi(p(t)) = r(t)$, $p(t) = q(t)p_0(t) + r(t)$.

1) Показать, что φ является линейным оператором, причем $\varphi^2 = \varphi$.

2) Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ.

3) Доказать, что всё пространство $\mathbb{R}[t]$ разложимо в прямую сумму собственных подпространств оператора φ.

4) Найти все инвариантные подпространства оператора φ.

5) В подпространстве $\mathbb{R}_3[t]$ многочленов степени не выше 3 найти базис из собственных векторов и записать матрицу преобразования φ в этом базисе, если а) $p_0 = t$; б) $p_0 = t^2 + 1$; в) $p_0 = (t-1)^3$.

1169. Пусть **A**, **B** — линейные операторы на конечномерном пространстве. Доказать, что собственные значения операторов **AB** и **BA** совпадают.

1170. Пусть **A**, **B** — линейные операторы в произвольном векторном пространстве. Доказать, что ненулевые собственные значения операторов **AB** и **BA** совпадают.

1171. Пусть x — собственный вектор оператора **A** с собственным значением λ, а $f(t)$ — некоторый многочлен. Доказать, что x является собственным вектором оператора $f(\mathbf{A})$ с собственным значением $f(\lambda)$.

1172. Пусть **D** — оператор дифференцирования, а **X** — оператор умножения на x в бесконечномерном пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов (или пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно гладких функций) от x с вещественными коэффициентами. Рассмотрим также операторы

$$\mathbf{A}_- = \mathbf{X} + \mathbf{D}, \quad \mathbf{A}_+ = \mathbf{X} - \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = -\mathbf{D}^2 + \mathbf{X}^2 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.$$

Доказать следующие тождества:

1) $\mathbf{D}\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^n\mathbf{D} = n\,\mathbf{X}^{n-1}$; 3) $\mathbf{A}_+\mathbf{A}_- + \mathrm{Id} = \mathbf{A}_-\mathbf{A}_+ - \mathrm{Id} = \mathbf{H}$;

2) $\mathbf{A}_-\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_+\mathbf{A}_- = 2\,\mathrm{Id}$; 4) $\mathbf{H}\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_+\mathbf{H} = 2\mathbf{A}_+$, $\mathbf{H}\mathbf{A}_- - \mathbf{A}_-\mathbf{H} = -2\mathbf{A}_-$.

1173. В условиях предыдущей задачи доказать, что если функция $\psi(x)$ является собственным вектором оператора $\mathbf{H}$ с собственным значением λ, то $\mathbf{A}_+\psi$ и $\mathbf{A}_-\psi$ также будут собственными векторами (если они ненулевые) для оператора $\mathbf{H}$ с собственными значениями $\lambda+2$ и $\lambda-2$ соответственно.

1174. В условиях задачи 1172 доказать, что если ψ_0 лежит в ядре оператора $\mathbf{A}_-$, то векторы $\psi_k = \mathbf{A}_+^k\psi_0$ являются собственными для оператора $\mathbf{H}$. Вычислить соответствующие собственные значения λ_k.

1175. Рассмотрим

$$P_k(x) = \exp\Big(\frac{x^2}{2}\Big)\mathbf{A}_+^k\Big(\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\Big), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

(многочлены Эрмита), где оператор $\mathbf{A}_+$ определен в задаче 1172. Доказать следующие тождества:

1) $P_k{}'' - 2xP_k' + 2kP_k = 0$ для любого $k = 0, 1, \ldots$ (дифференциальное уравнение для многочленов Эрмита);

2) $P_{k+1} = 2xP_k - (2k+2)P_{k-1}$ (рекуррентное соотношение для многочленов Эрмита).

1176. Доказать, что для данного оператора $\mathbf{A}$ в n-мерном пространстве над полем $\Bbbk$ существует базис, в котором $\mathbf{A}$ имеет диагональную матрицу, тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) характеристический многочлен $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ имеет n корней (с учетом кратностей);

2) оператор $\mathbf{A}$ полупрост.

1177. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду заменой базиса. В случае, когда это возможно, найти базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе:

$$1)\ \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad 3)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1178. Матрицы A и B называются *подобными*, если существует невырожденная матрица C, для которой $B = C^{-1}AC$. Определить, какая из двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

подобна матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1179. Определить, какая из двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1180. Доказать, что если операторы **A** и **B** коммутируют, то для любого собственного значения λ оператора **A** собственное подпространство $V_\lambda(\mathbf{A})$ инвариантно относительно **B**.

1181. Доказать, что линейный оператор в конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем всегда имеет хотя бы один собственный вектор.

1182. Доказать, что линейный оператор в пространстве V размерности n над алгебраически замкнутым полем всегда имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$.

1183. Доказать, что для любого линейного оператора **A** в конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем найдется базис, в котором матрица этого оператора верхнетреугольная.

1184. Привести матрицы преобразования к треугольному виду и найти базис, в котором они имеют этот вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1185. Показать, что в пространстве V размерности n над алгебраически замкнутым полем всякий оператор **A** имеет инвариантные подпространства всех размерностей от 0 до n.

1186. Пусть $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \ldots$ — набор попарно коммутирующих операторов на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Доказать, что

1) операторы $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \ldots$ имеют общий собственный вектор;

2) найдется базис, в котором матрица каждого из операторов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \ldots$ верхнетреугольная.

§ 11.5. Жорданова нормальная форма линейных операторов

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *корневым* для оператора $\mathbf{A}$, если $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathrm{Id})^N v = 0$ для некоторых $\lambda \in \Bbbk$ и натурального N.

Матрица

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

называется *жордановой клеткой* размера n с собственным значением λ. Блочно-диагональная матрица с жордановыми клетками на диагонали называется *жордановой матрицей*. Базис пространства V называется *жордановым* для оператора $\mathbf{A}$, если матрица $\mathbf{A}$ в этом базисе является жордановой (*жорданова форма* оператора $\mathbf{A}$).

1187 (Корневое подпространство). Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в пространстве V. Доказать, что множество $R_\lambda(\mathbf{A}) \subset V$, состоящее из всех корневых векторов оператора $\mathbf{A}$, отвечающих данному собственному значению λ, и нулевого вектора, является линейным подпространством в V.

1188. Доказать, что если операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ перестановочны, то каждое корневое подпространство $R_\lambda(\mathbf{A})$ оператора $\mathbf{A}$ инвариантно относительно $\mathbf{B}$.

1189. Найти собственные значения и корневые подпространства линейных операторов, заданных следующими матрицами:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1190. Найти собственные значения и корневые подпространства оператора дифференцирования d/dx, действующего в пространстве вещественных бесконечно дифференцируемых функций на прямой $\mathbb{R}$.

1191 (Корневое разложение). Доказать, что для любого оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем имеет место разложение

$$V = \bigoplus_{\lambda} R_\lambda(\mathbf{A}),$$

где сумма берется по всем собственным значениям λ оператора $\mathbf{A}$.

1192. Доказать, что размерность корневого подпространства $R_\lambda(\mathbf{A})$ равна кратности корня λ в характеристическом многочлене $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

1193. Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в пространстве V над алгебраически замкнутым полем. Для собственного значения λ оператора $\mathbf{A}$ обозначим через π_λ оператор проектирования на корневое подпространство $R_\lambda(\mathbf{A})$ параллельно прямой сумме остальных корневых подпространств. Доказать, что формулы

$$\mathbf{S} = \sum_\lambda \lambda\pi_\lambda, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$$

задают полупростой и нильпотентный операторы из разложения Жордана (см. задачу 1148).

1194. Доказать, что разложение Жордана $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$ для оператора $\mathbf{A}$ в конечномерном векторном пространстве над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (над произвольным полем нулевой характеристики) единственно.

1195. Пусть $\mathbf{A}$ — нильпотентный оператор на конечномерном линейном пространстве V, т. е. $\mathbf{A}^k = 0$ для некоторого k. Доказать, что V можно так разложить в прямую сумму инвариантных подпространств V_i, $i = 1, \ldots, m$, чтобы ограничение оператора $\mathbf{A}$ на V_i имело в некотором базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1196. В условиях предыдущей задачи доказать, что $m = \dim(\operatorname{Ker} A)$, и, таким образом, количество клеток указанного вида не зависит от способа разложения.

1197. Обозначим через r_j количество жордановых клеток размера j в разложении нильпотентного оператора $\mathbf{A}$, для которого $\mathbf{A}^k = 0$. Доказать равенства:

$$\begin{aligned} r_k &= \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^k) - \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^{k-1}); \\ r_{k-1} + r_k &= \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^{k-1}) - \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^{k-2}); \\ r_{k-2} + r_{k-1} + r_k &= \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^{k-2}) - \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^{k-3}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_k &= \dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, найти выражения r_j через $\dim(\operatorname{Ker}\mathbf{A}^m)$, где $m = 1, \ldots, k$.

1198. Найти жорданову форму оператора двукратного дифференцирования в пространстве $\mathbb{C}_{10}[t]$ многочленов степени не выше 10.

1199. Найти жорданову форму J и жорданов базис (e_i) для следующих операторов:

1) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & -8 \\ -6 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \\ -20 & -2 & -10 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & -1 & -4 \\ -12 & -20 & 3 & 12 \\ 12 & 20 & -4 & -13 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} -5 & -9 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & 9 & -5 & -12 \\ -9 & -9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

1200. Найти жорданову форму J, матрицу C перехода к жорданову базису, матрицы проекторов на корневые подпространства и разложение Жордана для следующих операторов:

1) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -14 & 10 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & -13 & 10 \\ 3 & -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -8 \\ -3 & -3 & -12 & 19 \\ 4 & 6 & 16 & -22 \\ 2 & 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 & 10 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & -9 & 10 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -8 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} -7 & 9 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 8 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

§ 11.6. Подстановка оператора (матрицы) в функцию числового аргумента

1201. Найти k-ю степень A^k жордановой клетки

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{порядка } n. \tag{11.1}$$

1202. Доказать, что значение многочлена $f(x)$ от жордановой клетки (11.1) определяется формулой

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \dfrac{f''(\alpha)}{2!} & \dfrac{f'''(\alpha)}{3!} & \dots & \dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \dfrac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \dfrac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

1203. Пусть $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ — минимальный многочлен оператора $\mathbf{A}$. Если для каждого $k = 1, \dots, s$ функция $f(\lambda)$ определена в точке λ_k и дифференцируема в ней по меньшей мере $r_k - 1$ раз, то говорят, что функция $f(\lambda)$ *определена на спектре* оператора $\mathbf{A}$, а систему чисел

$$(f^{(j)}(\lambda_k))_{1 \leqslant k \leqslant s;\, 1 \leqslant j \leqslant r_k - 1}$$

называют *системой значений* функции $f(\lambda)$ *на спектре* оператора $\mathbf{A}$. Доказать, что значения многочленов $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ от оператора $\mathbf{A}$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают значения этих многочленов на спектре оператора $\mathbf{A}$.

1204. Пусть функция $f(\lambda)$ определена на спектре оператора $\mathbf{A}$ с минимальным многочленом $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$. Рассмотрим многочлен

$$r(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} \Big(\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}(\lambda - \lambda_k) + \ldots + \alpha_{k,r_s}(\lambda - \lambda_k)^{r_k - 1}\Big) \cdot \frac{\mu_{\mathbf{A}}(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{r_k}},$$

где

$$\alpha_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{(\lambda - \lambda_k)^{r_k} f(\lambda)}{\mu_{\mathbf{A}}(\lambda)} \right)^{(j-1)}_{\lambda = \lambda_k},$$

$j = 1, 2, \dots, r_k$, $k = 1, 2, \dots, s$. Доказать, что:

1) системы значений многочлена $r(\lambda)$ и функции $f(\lambda)$ на спектре оператора $\mathbf{A}$ совпадают;

2) среди всех многочленов с этим свойством $r(\lambda)$ имеет наименьшую степень.

Этот многочлен $r(\lambda)$ называется *интерполяционным многочленом* функции $f(\lambda)$ *на спектре* оператора $\mathbf{A}$. Значение $f(\mathbf{A})$ функции f от оператора $\mathbf{A}$ по определению полагается равным $r(\mathbf{A})$.

1205. Вычислить A^{100}, где

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \\ -20 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

1206. Вычислить A^{101}, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1207. Вычислить $\exp A$, где:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1208. Для любой квадратной матрицы A доказать тождество

$$\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A.$$

1209. Найти $\cos A$ и $\sin A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

1210. Найти $\ln A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

1211. Решить уравнение $X^2 = A$, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

1212. На пространстве $\mathbb{C}_n[t]$ многочленов степени не выше n рассмотрим оператор дифференцирования $\mathbf{D}$:

$$(\mathbf{D}f)(x) = f'(x).$$

Вычислить $\exp \mathbf{D}$.

§ 11.7. Нахождение инвариантных подпространств

1213. Найти все нетривиальные подпространства трехмерного пространства, инвариантные относительно линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1214. Найти в трехмерном линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ все подпространства, которые являются инвариантными относительно каждого из двух операторов, заданных матрицами

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1215. Найти все нетривиальные инвариантные подпространства оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, отображающего произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^3$ в $[x, a]$ ($[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, a — фиксированный вектор).

1216. Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве многочленов $\Bbbk_n[x]$, где поле $\Bbbk$ имеет нулевую характеристику.

1217. Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в подпространстве функций на числовой прямой, порожденном функциями $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Чему равно общее число таких подпространств?

1218. Найти $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданного матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 12

Билинейные и квадратичные функции

Билинейной функцией на линейном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется такое отображение $\varphi\colon V\times V\to\Bbbk$, что для каждого $a\in V$ отображения $\varphi(a,\cdot)\colon V\to\Bbbk$ и $\varphi(\cdot,a)\colon V\to\Bbbk$ являются линейными функциями на V.

Полуторалинейной функцией на линейном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ называется такое отображение $\varphi\colon V\times V\to\mathbb{C}$, что для каждого $a\in V$ отображение $\varphi(a,\cdot)\colon V\to\mathbb{C}$ является линейной функцией на V, а отображение $\varphi(\cdot,a)\colon V\to\mathbb{C}$ — полулинейной функцией на V.

Если в линейном пространстве V зафиксирован базис $e_1,\ldots,e_n$, то *матрицей* билинейной (полуторалинейной) функции φ в этом базисе называется матрица, составленная из элементов $\varphi_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, $1\leqslant i,j\leqslant n$.

Во всех задачах этой главы предполагается, что все пространства являются конечномерными и $\Bbbk=\mathbb{R}$ или $\Bbbk=\mathbb{C}$.

§ 12.1. Общие сведения о билинейных и полуторалинейных функциях

Левым ядром билинейной функции φ, заданной на линейном пространстве V, называется множество L векторов $x\in V$, для которых $\varphi(x,y)=0$ при всех $y\in V$. Аналогично *правое ядро* $R\subset V$ определяется как множество таких векторов $x\in V$, что $\varphi(y,x)=0$ для всех $y\in V$.

Билинейная функция называется *невырожденной*, если ее левое и правое ядра нулевые.

1219. Привести пример невырожденной билинейной функции, ограничение которой на некоторое ненулевое подпространство равно нулю.

1220. Показать, что вектор x тогда и только тогда принадлежит левому (соответственно, правому) ядру билинейной функции, когда $B^\top X=0$ (соответственно $BX=0$), где B — матрица функции, а X —

столбец координат $x^1, \ldots, x^n$, при этом размерности правого и левого ядер совпадают.

1221. Найти левое L и правое R ядра билинейной функции

$$\varphi(x, y) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 6x^2y^2$$

в $\mathbb{R}^2$ и убедиться, что $L \neq R$.

1222. Пусть φ — невырожденная билинейная (соответственно, полуторалинейная) функция, l — линейная (соответственно, полулинейная) функция. Показать, что существует такой вектор b, что для всех векторов a имеет место равенство $l(a) = \varphi(a, b)$.

1223. Пусть в линейном пространстве V дана билинейная (полуторалинейная) функция φ с матрицей B в некотором базисе. Показать, что для любого оператора $\mathbf{A}$ в пространстве V функция $\varphi_{\mathbf{A}}(a, b) = \varphi(a, \mathbf{A}b)$ билинейна (соответственно, полуторалинейна) и имеет в том же базисе матрицу BA, где A — матрица оператора $\mathbf{A}$. Показать, что сопоставление $\mathbf{A} \mapsto \varphi_{\mathbf{A}}$ задает линейное отображение пространства операторов в пространство билинейных (соответственно, полуторалинейных) функций, и это отображение является изоморфизмом тогда и только тогда, когда функция φ невырожденна.

1224. Доказать, что для любой ненулевой полуторалинейной функции φ существует такой вектор a, что $\varphi(a, a) \neq 0$.

1225. Пусть φ — невырожденная полуторалинейная функция. Доказать, что если для оператора $\mathbf{A}$ имеет место тождество $\varphi(v, \mathbf{A}v) = 0$ для любого вектора v, то $\mathbf{A} = 0$. Показать, что это утверждение перестает быть верным, если вместо полуторалинейной рассматривать билинейную функцию.

1226. Пусть на линейном пространстве V задана невырожденная билинейная (или полуторалинейная) функция. Пусть $W \subset V$ — подпространство, на котором данная функция тождественно обращается в нуль. Доказать, что $\dim W \leqslant \frac{1}{2} \dim V$.

§ 12.2. Симметрические и кососимметрические, эрмитовы и косоэрмитовы функции

Билинейную функцию φ называют *симметрической* (*кососимметрической*), если $\varphi(b, a) = \varphi(a, b)$ (соответственно $\varphi(b, a) = -\varphi(a, b)$) для всех $a, b \in V$.

Квадратичной функцией на линейном пространстве V над полем $\Bbbk$ называется такое отображение $\varphi\colon V \to \Bbbk$, которое квадратично по координатам, т. е. в некоторой системе координат имеет вид однородного многочлена второй степени от координат:

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x^ix^j, \quad a_{ij} \in \Bbbk, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Такой многочлен называется *квадратичной формой*.

Две квадратичные формы

$$\varphi = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x^ix^j, \quad \psi = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}x^ix^j$$

называются *эквивалентными*, если существует замена координат, переводящая одну форму в другую.

Квадратичная функция φ имеет *диагональный вид* в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$, если $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i)^2$ для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$. Если все λ_i равны ± 1 или 0, такой диагональный вид называется *нормальным*. *Сигнатурой* квадратичной функции (формы) называется разность между числом положительных и числом отрицательных коэффициентов в ее нормальном виде, называемыми положительным и отрицательным индексами инерции.

Полуторалинейная функция φ называется *эрмитовой* (*косоэрмитовой*), если $\varphi(b, a) = \overline{\varphi(a, b)}$ (соответственно $\varphi(b, a) = -\overline{\varphi(a, b)}$) для всех $a, b \in V$. Ее нормальный вид — $\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i$.

Пусть φ — билинейная или полуторалинейная функция с одним из вышеуказанных условий симметрии на пространстве V, а $W \subset V$ — подпространство. Подпространство

$$W^{\perp} = \{u \in V : \varphi(u, w) = 0 \text{ для всех } w \in W\}$$

называется *дополнением к W относительно функции φ*.

1227. Доказать, что для симметрической или кососимметрической билинейной функции φ левое и правое ядра совпадают. Это подпространство называют ядром функции φ и обозначают $\operatorname{Ker}\varphi$. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для эрмитовых функций.

1228. Доказать, что любую билинейную функцию можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической функций, а любую полуторалинейную функцию можно представить в виде суммы эрмитовой и косоэрмитовой функций. Верно ли аналогичное утверждение в случае пространства над произвольным полем?

1229. Пусть φ — билинейная или полуторалинейная функция на пространстве V с одним из условий симметрии, а $W \subset V$ — подпространство. Доказать, что $W \cap W^{\perp}$ совпадает с ядром ограничения φ на W.

1230. Пусть φ — билинейная или полуторалинейная функция на линейном пространстве V с одним из условий симметрии, а $W \subset V$ — подпространство. Доказать, что $V = W + W^{\perp}$ тогда и только тогда, когда функция φ невырожденна на W.

1231. Доказать, что условие $\varphi(b, a) = \overline{\varphi(a, b)}$ не может быть выполнено тождественно ни для какой ненулевой билинейной функции на комплексном линейном пространстве. Доказать, что ненулевая полуторалинейная функция φ не может быть ни симметрической, $\varphi(b, a) = \varphi(a, b)$, ни кососимметрической, $\varphi(b, a) = -\varphi(a, b)$.

1232. Пусть $\varphi : L \times L \to \Bbbk$ — билинейная функция со свойством: если $\varphi(x, y) = 0$, то $\varphi(y, x) = 0$. Доказать, что тогда φ либо симметрична, либо кососимметрична.

1233. Пусть φ — симметрическая или кососимметрическая билинейная функция (а в случае комплексного пространства — эрмитова функция). Пусть W — подпространство линейного пространства V, а $W^{\perp}$ — его ортогональное дополнение относительно φ. Доказать, что $\dim W^{\perp} \geqslant \dim V - \dim W$ и равенство имеет место при условии $\operatorname{Ker} \varphi \cap W = 0$.

1234. Пусть φ — невырожденная билинейная или полуторалинейная функция с одним из условий симметрии, а W_0 – ядро ограничения φ на подпространство W. Доказать, что $(W^{\perp})_0 = W_0 = W \cap W^{\perp}$.

1235. Доказать, что если неотрицательная вещественная квадратичная функция обращается в нуль хотя бы на одном ненулевом наборе вещественных значений переменных, то эта функция вырожденна.

1236. Доказать, что ψ косоэрмитова тогда и только тогда, когда функция $i\psi$ эрмитова. Доказать, что любая косоэрмитова функция диагонализируема с числами $\pm i$ и нулями на диагонали.

1237. Доказать, что определитель любой эрмитовой матрицы — действительное число, а определитель любой косоэрмитовой матрицы — действительное или чисто мнимое (в зависимости от размерности).

1238. Доказать, что для симметрической (или эрмитовой) функции φ над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) множество всех векторов a, для которых $\varphi(a, a) = 0$, тогда и только тогда есть подпространство линейного пространства, когда один из индексов инерции формы φ равен нулю.

1239. Пусть $Q(x, y)$ — эрмитова форма на комплексном линейном пространстве V, ${}^RQ(x, y) = \operatorname{Re} Q(x, y)$. Доказать, что:

1) ${}^RQ(x, y)$ — (вещественная) билинейная форма на пространстве ${}^RV$;

2) билинейная форма ${}^RQ(x, y)$ инвариантна относительно умножения на комплексные числа, по модулю равные единице, т. е. для $\lambda \in C$ с $|\lambda| = 1$ ${}^RQ(\lambda x, \lambda y) = {}^RQ(x, y)$;

3) любая вещественная билинейная форма на пространстве ${}^RV$, инвариантная относительно умножения на комплексные числа, по модулю равные единице, представима в виде $\operatorname{Re} Q(x, y)$ для эрмитовой билинейной формы $Q(x, y)$ на V и притом единственным образом.

1240. Пусть φ — вещественная билинейная симметрическая или комплексная эрмитова функция. Доказать, что неравенство

$$|\varphi(a, b)|^2 \leqslant \varphi(a, a)\,\varphi(b, b)$$

имеет место для всех пар векторов a, b в том и только в том случае, когда один из индексов инерции φ равен нулю. Неравенство является строгим для любых линейно независимых пар векторов тогда и только тогда, когда один из индексов инерции совпадает с размерностью пространства.

1241. Пусть существуют линейная замена координат (возможно вырожденная), переводящая квадратичную функцию φ в функцию ψ, и замена — переводящая функцию ψ в функцию φ. Доказать, что эти две функции эквивалентны, т. е. существует невырожденное преобразование, переводящее одну из этих функций в другую.

1242. Доказать, что квадратичная функция в вещественном линейном пространстве распадается в произведение двух линейных функций тогда и только тогда, когда ее ранг не превосходит 2, а в случае ранга 2 сигнатура равна нулю. Доказать, что для распадения квадратичной функции в комплексном пространстве в произведение двух линейных функций необходимо и достаточно, чтобы ее ранг не превосходил 2.

1243. Доказать, что вещественная квадратичная функция является неотрицательно определенной тогда и только тогда, когда ее матрица A представляется в виде $A = C^{\top}C$ для некоторой вещественной матрицы C. При этом форма положительно определена, если матрица C невырожденна.

1244 (Критерий Сильвестра). Доказать, что квадратичная функция положительно определена тогда и только тогда, когда все ее угловые главные миноры (т. е. миноры, образованные первыми k строками и первыми k столбцами матрицы) положительны.

1245. Доказать, что в положительно определенной квадратичной функции все коэффициенты при квадратах положительны и что это условие не является достаточным для положительной определенности функции.

1246. Доказать следующие утверждения.

1. Для положительной определенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы все главные (т. е. симметричные относительно главной диагонали) миноры ее матрицы были положительны.

2. Для того чтобы квадратичная функция f была неотрицательно определена (т. е. $f \geqslant 0$ для всех значений переменных), необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были неотрицательны. Показать, что (в отличие от положительно определенных функций) для неотрицательности f недостаточно неотрицательности всех угловых миноров ее матрицы.

3. Для того чтобы вещественная симметричная матрица A представлялась в виде $A = C^{\top}C$ для некоторой вещественной невырожденной матрицы C, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительны.

4. Для того чтобы вещественная симметричная матрица A представлялась в виде $A = C^{\top}C$ для некоторой вещественной матрицы C, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были неотрицательны. Если ранг матрицы A равен r, то и ранг C равен r, и можно считать, что в матрице C первые r строк линейно независимы, а остальные — нулевые.

1247. Доказать, что если квадратичная функция с матрицей A положительно определена, то и квадратичная функция с матрицей A^{-1} также положительно определена.

1248. Доказать, что квадратичная функция f тогда и только тогда отрицательно определена (т. е. функция $-f$ положительно определена), когда знаки угловых миноров $D_1, D_2, \ldots, D_n$ чередуются, и $D_1 < 0$.

1249. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис для билинейной или полуторалинейной функции φ ранга r, в котором ее матрица является блочно-диагональной, с единственным ненулевым блоком размера $r \times r$ в левом верхнем углу. Показать, что такой же вид будет иметь матрица этой функции в любом базисе вида $a_1, \ldots, a_r, e_{r+1}, \ldots, e_n$.

1250. Доказать, что ранг симметричной, кососимметричной или эрмитовой матрицы равен максимальному размеру ненулевых главных миноров.

1251. Пусть B — отличный от нуля главный минор порядка r матрицы симметрической билинейной или комплексной эрмитовой функции φ ранга r. Доказать, что если главные угловые миноры $B_1, B_2, \ldots, B_r = B$ минора B отличны от нуля, то существует базис, в котором матрица функции φ имеет диагональный вид с числами

$$B_1,\ \frac{B_2}{B_1},\ \ldots,\ \frac{B}{B_{r-1}}$$

на диагонали.

1252. Пусть φ — (косо)симметрическая билинейная или комплексная эрмитова функция с ядром $\operatorname{Ker}\varphi$. Доказать, что $\operatorname{Ker}\varphi = W^{\perp}$ для любого дополнительного к $\operatorname{Ker}\varphi$ подпространства W и что ограничение φ на такое W невырожденно.

1253. Пусть φ — невырожденная (косо)симметрическая билинейная или комплексная эрмитова функция, ограничение которой на подпространство W размерности k невырожденно, а ограничение на подпространство $W_1 \supset W$ размерности $k+1$ вырожденно. Доказать, что найдется подпространство $W_2 \supset W_1$ размерности $k+2$, ограничение на которое функции φ снова невырожденно. Проверить, что в симметричном вещественном и эрмитовом случаях знаки определителей ограничений φ на W и на W_2 различны, а в кососимметричном случае эти знаки совпадают.

1254. Пусть φ — (косо)симметрическая билинейная или комплексная эрмитова функция ранга r, невырожденная на некотором подпространстве W размерности $k < r$, а $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — линейно независимые векторы, порождающие вместе с W все пространство. Доказать, что среди этих векторов найдутся $r-k$ таких, что вместе с W они порождают содержащее W подпространство размерности r, ограничение φ на которое невырожденно. Используя предыдущую задачу, показать, что если ограничения φ на все линейные оболочки $\langle W, e_j \rangle$ вырожденны, то существует пара векторов e_j, e_l, для которых ограничение φ на их линейную оболочку невырожденно.

1255. Пусть B — (косо)симметричная или комплексная эрмитова матрица. Показать, что любой отличный от нуля главный минор матрицы B содержится в максимальном главном миноре, размер которого равен рангу матрицы B. Показать, что если некоторый главный минор порядка r отличен от нуля, а все его окаймляющие главные миноры порядков $r+1$ и $r+2$ равны нулю, то r — ранг матрицы B.

1256. Пусть f — квадратичная функция на вещественном линейном пространстве, a и b — такие векторы, что $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Доказать, что векторы a и b линейно независимы.

§ 12.3. Приведение к каноническому виду

Во всех задачах этого параграфа для удобства записи индексы у координат пишутся внизу.

1257. Для квадратичных функций f и g выяснить, существует ли линейное преобразование, переводящее функцию f в функцию g:

1) $f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$,
$g=5y_1^2+6y_2^2+12y_1y_2$;

2) $f=2x_1^2+3x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,
$g=4y_1^2+y_2^2+9y_3^2-12y_1y_3$;

3) $f=x_1^2+5x_2^2+11x_3^2+6x_4^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3-14x_3x_4$,
$g=-y_1^2-3y_2^2+9y_3^2+6y_4^4-4y_1y_2+2y_1y_3+10y_2y_3-4y_2y_4-$
$-14y_3y_4$.

1258. Методом Лагранжа привести квадратичную функцию к нормальному виду, найти матрицу соответствующего линейного преобразования:

1) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+5x_3^2$;
2) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$;
3) $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$;
4) $x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$;
5) $4x_2^2+x_3^2+3x_1x_3-4x_2x_3$;
6) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4$;
7) $x_1^2+5x_2^2+9x_3^2+5x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3-8x_3x_4$.

1259. Показать, что симметрическая билинейная функция на двумерном линейном пространстве над полем характеристики 2, заданная матрицей $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, не приводится к диагональному виду.

1260. Пусть $\varphi(x,y)$ — ненулевая кососимметрическая билинейная функция в n-мерном линейном пространстве. Доказать, что существует базис, в котором $\varphi(x,y)$ имеет канонический вид:

$$\varphi(x,y)=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3+\ldots$$
$$\ldots+x_{2k-1}y_{2k}-x_{2k}y_{2k-1},\quad 1\leqslant k\leqslant n/2.$$

1261. Привести кососимметрическую билинейную функцию к каноническому виду (с нахождением преобразования):

1) $x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 - 2y_1x_3 + x_2y_3 - x_3y_2$;

2) $x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - x_1y_4 + x_4y_1 + 4x_2y_4 - 4x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3$;

3) $x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 2x_1y_4 + 2x_4y_1 - 7x_2y_3 + 7x_3y_2 + 3x_2y_4 - 3x_4y_2 - 4x_3y_4 + 4x_4y_3$;

4) $2x_1y_2 + x_1y_3 + 3x_1y_4 - 2x_2y_1 - 2x_2y_4 - x_3y_1 + x_3y_4 - 3x_4y_1 + 2x_4y_2 - x_4y_3$;

5) $-2x_1y_2 + x_1y_4 + 2x_2y_1 + 3x_2y_3 + 2x_2y_4 - 3x_3y_2 - x_3y_4 - x_4y_1 - 2x_4y_2 + x_4y_3$.

1262. Следующие квадратичные функции привести к диагональному виду и найти выражение новых координат через старые:

1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j$, где не все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны нулю;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$;

3) $\sum\limits_{i<j}^{n} x_i x_j$;

4) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$;

5) $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - s)^2$, где $s = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

1263. Пусть дана квадратичная функция вида

$$\varphi = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - l_{p+2}^2 - \ldots - l_{p+q}^2,$$

где l_i, $i = 1, \ldots, p+q$, — вещественные линейные функции от $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что положительный индекс инерции функции φ не превосходит p, а отрицательный индекс инерции не превосходит q.

1264. В пространстве $\mathbb{R}_1[x]$ многочленов степени не выше 1 дана квадратичная функция

$$\varphi(P) = \int\limits_0^a P^2(x)(x-1)\,dx,$$

где $a > 0$. Найти положительный p и отрицательный q индексы инерции этой квадратичной функции в зависимости от a.

1265. Найти все значения параметра α, при которых данная квадратичная форма положительно определена:

1) $5x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

2) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1x_2 + 2x_1x_3$.

1266. Привести эрмитову полуторалинейную функцию к нормальному виду (с нахождением преобразования):

1) $i\bar{x}_1x_2 - i\bar{x}_2x_1$;

2) $\bar{x}_1x_1 + 9\bar{x}_2x_2 + 9\bar{x}_3x_3 + 3i\bar{x}_1x_2 - 3i\bar{x}_2x_1 - 3\bar{x}_1x_3 - 3\bar{x}_3x_1 + 7i\bar{x}_2x_3 - 7i\bar{x}_3x_2$.

1267. Привести косоэрмитову полуторалинейную функцию к нормальному виду (с нахождением преобразования):

1) $\bar{x}_1x_2 - \bar{x}_2x_1$;

2) $i\bar{x}_1x_1 + 9i\bar{x}_2x_2 + 9i\bar{x}_3x_3 - 3\bar{x}_1x_2 + 3\bar{x}_2x_1 - 3i\bar{x}_1x_3 - 3i\bar{x}_3x_1 - 7\bar{x}_2x_3 + 7\bar{x}_3x_2$.

Глава 13

Пространства со скалярным произведением

§ 13.1. Элементарные свойства скалярного произведения

Векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *евклидовым пространством*, если задана функция, сопоставляющая каждой паре векторов $x, y \in V$ некоторое число, обозначаемое символом (x, y) и называемое *скалярным произведением* векторов x и y. Эта функция должна удовлетворять следующим свойствам-аксиомам:

1) билинейности:

$$(x, y+z) = (x, y) + (x, z), \qquad (x+y, z) = (x, z) + (y, z),$$
$$(\alpha x, y) = (x, \alpha y) = \alpha(x, y) \quad \text{для всех } x, y, z \in V, \ \alpha \in \mathbb{R};$$

2) симметричности:

$$(x, y) = (y, x) \quad \text{для всех } x, y \in V;$$

3) положительной определенности:

$$(x, x) > 0, \quad \text{если } x \neq 0.$$

Основным примером для нас будет n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ столбцов (или строк), в котором скалярное произведение (x, y) двух столбцов

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad x^i, y^j \in \mathbb{R},$$

определяется стандартным образом: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i y^i$.

В задачах этой главы, там, где речь идет о евклидовом пространстве, и если это не оговорено особо, предполагается именно это пространство и именно это стандартное скалярное произведение.

Комплексное линейное пространство U называется *эрмитовым пространством*, если определена функция, сопоставляющая каждой паре векторов $x, y \in U$ некоторое комплексное число, обозначаемое символом (x, y) и называемое *эрмитовым скалярным произведением* векторов x и y. Эта функция должна удовлетворять следующим свойствам-аксиомам:

1) полуторалинейности:

$$(x, y+z) = (x, y) + (x, z), \qquad (x+y, z) = (x, z) + (y, z),$$
$$(\overline{\alpha} x, y) = (x, \alpha y) = \alpha(x, y) \quad \text{для всех } x, y, z \in U, \ \alpha \in \mathbb{C};$$

2) эрмитовости:

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \text{для всех } x, y \in U;$$

3) положительной определенности:

$$(x, x) > 0, \quad \text{если } x \neq 0.$$

Заметим, что о положительной определенности имеет смысл говорить лишь в случае, когда $(x, x) \in \mathbb{R}$. Для эрмитовой формы это выполнено автоматически: $(x, x) = \overline{(x, x)}$.

Основным примером для нас будет n-мерное пространство $\mathbb{C}^n$ столбцов (или строк), в котором скалярное произведение (x, y) двух столбцов

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad x^i, y^j \in \mathbb{C},$$

определяется стандартным образом: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x^i} y^i$.

В задачах этой главы, там, где речь идет об эрмитовом пространстве, и если это не оговорено особо, предполагается именно это пространство и именно это стандартное скалярное произведение.

Длиной $|x|$ вектора x в евклидовом или эрмитовом пространстве V называется (неотрицательное) число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

В евклидовом и эрмитовом пространствах выполняется *неравенство Коши—Буняковского*

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны. Это неравенство позволяет дать определение *угла* φ между векторами x и y евклидова (но не эрмитова!) пространства:

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Векторы x и y называются *ортогональными* (перпендикулярными), если $(x, y) = 0$. Система $\{a_\alpha\}$ попарно ортогональных векторов называется *ортогональной*. Если при этом она является базисом линейного пространства V, то эта система называется *ортогональным базисом* пространства V. *Ортонормированным базисом* $\{e_\alpha\}$ называется такой ортогональный базис, в котором все векторы имеют единичную длину: $|e_\alpha| = 1$.

1268. Доказать, что требование билинейности (полуторалинейности) в аксиомах евклидова (эрмитова) пространства можно заменить на линейность по второму аргументу.

1269. Показать, что функция f от векторов x и y действительной плоскости, заданная формулой

$$f(x, y) = (x^1, x^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix},$$

определяет евклидово скалярное произведение на плоскости. Найти скалярное произведение векторов $(1, -1)$ и $(4, 1)$.

1270. Рассмотрим функцию f от векторов x и y двумерного пространства, заданную следующим образом:

$$(x, y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что эта формула определяет евклидово скалярное произведение тогда и только тогда, когда $a > 0$, $ad - b^2 > 0$.

1271. Найти длины следующих векторов эрмитова пространства $\mathbb{C}^3$: 1) $(1, i, i)$; 2) $(1, 1+i, 1-i)$.

1272. Проверить, являются ли евклидовыми скалярными произведениями в пространстве многочленов степени не выше n следующие билинейные функции:

1) $(f, g) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n$, где

$$f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n, \quad g = g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n;$$

2) $(f, g) = f(x_0)g(x_0) + f(x_1)g(x_1) + \ldots + f(x_n)g(x_n)$, где $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ — произвольные фиксированные попарно различные вещественные числа;

3) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

1273. Даны многочлены x^2 и x^4. Найти их длины и угол φ между ними в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 4 со скалярным произведением, заданным интегралом:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

1274. Проверить, является ли:

1) евклидовым скалярным произведением в пространстве вещественных квадратных матриц порядка n следующая функция от пары матриц A и B:

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top B);$$

2) эрмитовым скалярным произведением в пространстве комплексных квадратных матриц порядка n следующая функция от пары матриц C и D:

$$(C, D) = \operatorname{tr}(\overline{C}^\top D).$$

1275. Пользуясь неравенством Коши—Буняковского, доказать следующие неравенства:

1) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)$;

2) $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\right)$, где a_i, b_i — произвольные действительные числа, а $f(x)$, $g(x)$ — произвольные непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.

1276. При помощи неравенства Коши—Буняковского доказать, что в евклидовом (эрмитовом) пространстве выполнены неравенства треугольника

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

причем правое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны и одинаково направлены.

1277 (Теорема Пифагора). Доказать, что если векторы x и y в евклидовом (эрмитовом) пространстве ортогональны, то

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Верно ли обратное утверждение?

1278. Доказать, что в параллелограмме, натянутом на векторы x и y евклидова пространства, сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин сторон. Верно ли аналогичное утверждение для эрмитова пространства?

1279. Доказать, что всякое подпространство L евклидова (эрмитова) пространства V является евклидовым (эрмитовым) пространством относительно ограничения на L скалярного произведения из V, т. е. скалярного произведения, определенного следующим образом: скалярное произведение $(l_1, l_2)_L$ двух векторов $l_1, l_2 \in L$ равно их скалярному произведению $(l_1, l_2)_V$ как векторов из V. Такое скалярное произведение называется скалярным произведением, индуцированным вложением $L \subset V$ подпространства L в пространство V.

1280. На внешней прямой сумме $V \oplus W$ двух евклидовых (эрмитовых) пространств V и W ввести евклидово (эрмитово) скалярное произведение так, чтобы индуцированные стандартными вложениями

$$V \subset V \oplus W : v \mapsto v+0 \quad \text{и} \quad W \subset V \oplus W : w \mapsto 0+w$$

скалярные произведения на V и W совпадали с их исходными скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_W$ соответственно, а подпространства V и W были ортогональны друг другу.

1281. Доказать неравенство Коши—Буняковского для эрмитова пространства:

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

1282. Пусть V — вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}}$. Показать, что его комплексификация $V_{\mathbb{C}}$ может быть превращена в эрмитово пространство, если ввести в ней эрмитово скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ по формуле

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)_{\mathbb{C}} = (x_1, x_2)_{\mathbb{R}} + (y_1, y_2)_{\mathbb{R}} + i\big((x_1, y_2)_{\mathbb{R}} - (y_1, x_2)_{\mathbb{R}}\big).$$

Пространство $V_{\mathbb{C}}$ с определенным таким образом эрмитовым произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ будем называть комплексификацией $V_{\mathbb{C}}$ евклидова пространства V. Какое эрмитово пространство получается комплексификацией из стандартного $\mathbb{R}^n$?

1283. Доказать, что если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в вещественном евклидовом пространстве V, то векторы $e_1 + i \cdot 0$, $e_2 + i \cdot 0, \ldots, e_n + i \cdot 0$ будут задавать ортонормированный базис в комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ относительно эрмитова скалярного произведения, введенного в предыдущей задаче.

1284. Пусть W — эрмитово пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим его овеществление $W_{\mathbb{R}}$. Доказать, что $W_{\mathbb{R}}$ становится евклидовым пространством, если ввести в $W_{\mathbb{R}}$ евклидово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}$ по формуле

$$(z_1, z_2)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(z_1, z_2).$$

В случае $W = \mathbb{C}^n$ написать формулу для значения $(z_1, z_2)_{\mathbb{R}}$ в стандартных координатах $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ овеществленного пространства $W_{\mathbb{R}}$, заданных равенствами $x^k + iy^k = z^k$. Показать, что если овеществить таким образом стандартное эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$, то получится стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n}$.

1285. Показать, что в условиях предыдущей задачи векторы z и iz всегда ортогональны относительно $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}$.

1286. Показать, что мнимая часть $\mathrm{Im}(\cdot, \cdot)$ эрмитова скалярного произведения является вещественной кососимметрической билинейной функцией в эрмитовом пространстве W, причем форма $\mathrm{Im}(\cdot, \cdot)$ инвариантна относительно умножения на i, т. е.

$$\mathrm{Im}(iz_1, iz_2) = \mathrm{Im}(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in W.$$

1287. Показать, что эрмитово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ однозначно восстанавливается как по своей действительной части $\mathrm{Re}(\cdot, \cdot)$, так и по своей мнимой части $\mathrm{Im}(\cdot, \cdot)$. Для этого выразить:

1) мнимую часть $\mathrm{Im}(\cdot, \cdot)$ через действительную часть $\mathrm{Re}(\cdot, \cdot)$ и наоборот;

2) само скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ через $\mathrm{Re}(\cdot, \cdot)$ и отдельно через $\mathrm{Im}(\cdot, \cdot)$.

§ 13.2. Ортогональные системы векторов

Для построения ортогональных систем векторов в евклидовом или эрмитовом пространстве V применяется *процесс ортогонализации Грама—Шмидта*. Рассмотрим линейную оболочку $L = \langle a_1, a_2, \ldots, a_l \rangle$ векторов из пространства V. Для простоты будем предполагать, что система $\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ линейно независима. Построим ортогональный базис $\{b_i\}$ оболочки L по следующим формулам:

$$b_1 = a_1,$$
$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}\, b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(b_i, a_k)}{(b_i, b_i)}\, b_i, \quad k = 2, 3, \dots, l.$$

Переход от системы $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ к системе $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ мы и будем называть процессом ортогонализации Грама—Шмидта.

1288. Доказать, что всякая ортогональная система ненулевых векторов евклидова (эрмитова) пространства линейно независима.

1289. Проверить ортогональность данных векторов и дополнить их до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$: $(1, -1, -1, 1)$, $(3, 1, 1, -1)$.

1290. Проверить ортогональность пары векторов $(1, -i, 1 + i)$, $(1 + i, -1 + i, 0)$ эрмитова пространства $\mathbb{C}^3$ и дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{C}^3$.

1291. Относительно евклидова скалярного произведения $(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ проверить ортогональность следующей системы матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и дополнить ее до ортогонального базиса всего пространства вещественных квадратных матриц второго порядка.

1292. Дополнить данную систему векторов до ортонормированного базиса всего трехмерного пространства:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \quad a_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1, -5, 1).$$

1293. Дополнить систему векторов до ортонормированного базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

1294. Дополнить данную систему векторов до ортонормированного базиса всего эрмитова пространства $\mathbb{C}^4$:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, 0, -1), \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0).$$

1295. Методом ортогонализации Грама—Шмидта построить ортогональный базис подпространства, порожденного векторами:

1) $(1, -1, -1, -1)$, $(5, -2, 0, -1)$, $(3, 4, 2, 1)$, $(4, -1, 1, 0)$;

2) $(1, 2, 0, -1)$, $(3, -6, 1, 3)$, $(6, 1, 1, 2)$, $(7, 3, 1, 1)$.

1296. Методом ортогонализации Грама—Шмидта построить ортогональный базис подпространства пространства многочленов, порожденного многочленами x^3, x^4, x^5, x^6 со скалярным произведением, заданным интегралом:

1) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$; 2) $(f, g) = \int\limits_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

1297. Методом ортогонализации Грама—Шмидта построить ортогональный базис эрмитова пространства $\mathbb{C}^3$, порожденного векторами $(1+i, 0, 1-i)$, $(1+i, -i, 1+i)$, $(-2i, 1, 2)$.

1298. Доказать, что процесс ортогонализации не увеличивает длины ортогонализуемых векторов, т. е.

$$|b_k| \leqslant |a_k|, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где векторы b_k получены из системы a_k процессом ортогонализации. При каких условиях для некоторого l, $1 < l \leqslant n$, имеет место равенство $|b_l| = |a_l|$?

1299. Доказать, что в процессе ортогонализации системы векторов a_k евклидова пространства возникает нулевой вектор b_l, если и только если исходная система a_k была линейно зависимой. Точнее, $b_l = 0$ тогда и только тогда, когда вектор a_l линейно выражается через векторы a_i, $i = 1, 2, \ldots, l-1$.

1300. Последовательность многочленов задана рекуррентной формулой

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad \ldots,$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

1) Найти явные выражения для $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$, $T_5(x)$.

2) Доказать, что $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$.

3) Доказать, что определенные таким образом многочлены образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n со скалярным произведением, заданным интегралом

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

4) Найти квадрат длины многочлена $T_k(x)$.

Определенные таким образом многочлены называются *многочленами Чебышёва* (*первого рода*).

1301. Последовательность многочленов задана рекуррентной формулой

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad \ldots,$$
$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Найти явные выражения для $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$.

Определенные таким образом многочлены называются *многочленами Лежандра*.

1302. Доказать, что многочлены, определенные формулами

$$P_0(x) = 1; \quad P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2-1)^k], \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

1) образуют ортогональный базис в пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением, заданным интегралом $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$;

2) совпадают с многочленами Лежандра $P_k(x)$, введенными в предыдущей задаче.

3) Найти квадрат длины многочлена $P_k(x)$.

1303. Доказать, что ортогональный базис $Q_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением, заданным интегралом

$$(f, g)_{a,b} = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx,$$

может быть получен некоторой линейной заменой переменной $x = x(t)$ из многочленов Лежандра $P_k(x)$ (т. е. $Q_k(t) = P_k(x(t))$).

1) Найти эту замену.

2) Как будут связаны между собой длины $\|Q_k\|_{a,b}$ и $\|P_k\|_{-1,1}$? (Здесь $\|\cdot\|_{a,b}$ — длина многочлена относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{a,b}$.)

1304. Доказать, что матрица перехода от базиса $a_1, a_2, \ldots, a_k$ к базису $b_1, b_2, \ldots, b_k$, полученному в результате процесса ортогонализации из базиса $a_1, a_2, \ldots, a_k$, всегда является верхнетреугольной, причем все диагональные элементы этой матрицы равны единице.

1305. Пусть даны линейно независимая система векторов a_1, $a_2, \ldots, a_k$ и такая ортогональная система $c_1, c_2, \ldots, c_k$, что матрица перехода от первой системы ко второй является верхнетреугольной. Доказать, что векторы b_i ортогональной системы, полученной из $a_1, a_2, \ldots, a_k$ процессом ортогонализации, отличаются от векторов системы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ лишь постоянными множителями: $b_i = \alpha_i c_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

1306. Доказать, что в результате применения процесса ортогонализации к многочленам $1, x, x^2, \ldots, x^n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ получаются многочлены, отличающиеся лишь постоянными множителями от многочленов Лежандра $P_k(x)$. Найти эти множители.

1307. Ортогональной (унитарной) матрицей U называется матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому в евклидовом (эрмитовом) пространстве. Доказать, что:

1) столбцы (строки) матрицы U образуют ортонормированную систему относительно стандартного скалярного произведения столбцов (строк);

2) $U\bar{U}^\top = \bar{U}^\top U = E$, где E — единичная матрица.

1308. Доказать, что произвольную невырожденную матрицу A можно представить в виде произведения $A = UR$ ортогональной (унитарной) матрицы U и верхнетреугольной матрицы R. Насколько однозначно такое представление?

1309. Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

в виде произведения ортогональной матрицы U на верхнетреугольную R с положительными числами на диагонали.

1310. Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & -2-i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

в виде произведения унитарной матрицы U на верхнетреугольную R.

1311. Доказать, что координаты x^i, $i = 1, \ldots, n$, произвольного вектора x относительно ортогонального базиса $e_1, \ldots, e_n$ могут быть найдены по формулам

$$x^i = \frac{(e_i, x)}{(e_i, e_i)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Такие координаты называют *коэффициентами Фурье* вектора x относительно ортогонального базиса $e_1, \ldots, e_n$.

1312. В евклидовом пространстве непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

проверить попарную ортогональность функций следующей системы:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx.$$

1313. В подпространстве, порожденном функциями

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \cos x, \quad f_2 = \sin x, \quad f_3 = \cos 2x,$$
$$f_4 = \sin 2x, \quad f_5 = \cos 3x, \quad f_6 = \sin 3x,$$

евклидова пространства тригонометрических многочленов со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

найти коэффициенты Фурье функции $\cos^3 x$ относительно ортогонального базиса $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

1314. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — ортонормированная система векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Доказать, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{i=1}^{k} (e_i, x)^2 \leqslant |x|^2,$$

причем равенство (равенство Парсеваля) достигается для всех x тогда и только тогда, когда система $e_1, e_2, \ldots, e_k$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$, т. е. $k = n$.

Показать, что число (e_i, x) равно длине проекции вектора x на одномерное пространство, порожденное вектором e_i, а если система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образует базис в $\mathbb{R}^n$, то (e_i, x) просто равно i-й координате x^i вектора x относительно этого базиса.

§ 13.3. Матрица Грама. *n*-Мерный объем

Матрицей Грама $G(a_1, a_2, \dots, a_l)$ системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_l$ называется матрица, составленная из их попарных скалярных произведений:

$$G(a_1, a_2, \dots, a_l) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_l, a_1) & (a_l, a_2) & \dots & (a_l, a_l) \end{pmatrix}.$$

Определителем Грама $g(a_1, a_2, \dots, a_l)$ системы векторов $a_1, a_2, \dots$ $\dots, a_l$ называется определитель соответствующей матрицы Грама:

$$g(a_1, a_2, \dots, a_l) = \det G(a_1, a_2, \dots, a_l).$$

1315. Найти матрицу Грама системы векторов $1, x, x^2$ в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением, заданным следующим образом:

1) $(f, g) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 g_2$, где
$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2$, $g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2$;

2) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$;

3) $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.

1316. Доказать, что матрица Грама $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = G$ системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ эрмитова пространства является эрмитовой, т. е. $G = \overline{G}^{\top}$.

1317. Доказать, что система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель Грама $g(a_1, a_2, \dots, a_k)$ этой системы равен нулю.

1318. Две системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ называются взаимными, если

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Доказать, что каждая из двух взаимных систем векторов линейно независима.

1319. Доказать, что для любого базиса евклидова пространства существует, причем единственный, взаимный базис. Если исходный базис ортонормирован, то его взаимный базис совпадает с ним.

1320. Даны две взаимные системы векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Доказать, что при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ система $y_{k+1}, \ldots, y_n$ векторов является базисом ортогонального дополнения линейной оболочки системы $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

1321. Найти взаимный базис для системы $1, x, x^2$ в евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением, заданным следующим образом:

1) $(f, g) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 g_2$, где
$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2$, $g = g_0 + g_1 x + g_2 x^2$;

2) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$;

3) $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.

1322. Дан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства и его матрица Грама $G = G(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Найти матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к взаимному с ним базису.

1323. Пусть S — матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Найти матрицу перехода T от базиса $f_1, f_2, \ldots, f_n$, взаимного с $e_1, e_2, \ldots, e_n$, к базису $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$, взаимному с $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$:

1) в евклидовом пространстве;

2) в эрмитовом пространстве.

1324. Доказать, что квадрат длины ортогональной составляющей z вектора x относительно пространства L, заданного своим базисом $a_1, a_2, \ldots, a_k$, может быть вычислен при помощи определителя Грама:

$$|z|^2 = \frac{g_{k+1}(a_1, \ldots, a_k, x)}{g_k(a_1, \ldots, a_k)}.$$

1325. Доказать, что определитель Грама $g(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ не меняется при процессе ортогонализации, т. е.

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_k) = g(b_1, b_2, \ldots, b_k),$$

где векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k$ получены процессом ортогонализации из системы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

1326. Доказать, что все главные миноры матрицы Грама линейно независимой системы векторов всегда положительны, а в случае линейно зависимой системы — неотрицательны.

1327. Выразить при помощи определителей Грама $g_0 = 1$, $g_1(a_1), \ldots$ $\ldots, g_n(a_1, \ldots, a_n)$ подсистем системы векторов $a_1, \ldots, a_n$ квадраты длин $|b_k|^2$, $k = 1, \ldots, n$, векторов, полученных из $a_1, \ldots, a_n$ процессом ортогонализации.

1328. Доказать, что формулы процесса ортогонализации (с точностью до умножения ортогональных векторов b_i на некоторые константы α_i, т. е. формулы для $b_i' = \alpha_i b_i$) могут быть переписаны в виде

$$b_1' = a_1,$$

$$b_2' = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & a_1 \\ (a_2, a_1) & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_n' = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_{n-1}) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n, a_1) & \dots & (a_n, a_{n-1}) & a_n \end{vmatrix}.$$

1329. Доказать, что n-й многочлен Лежандра (см. задачу 1302) равен, с точностью до некоторого числового множителя c_n, следующему выражению:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g(1, x, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^n) x^k,$$

где $g(1, x, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^n)$ — определитель Грама системы векторов-многочленов, полученной удалением многочлена x^k из стандартного базиса $1, x, x^2, \dots, x^n$ многочленов степени не выше n. Напомним, что скалярное произведение задано по формуле

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x)\, dx$$

для произвольных многочленов f_1 и f_2.

1330. Доказать, что для определителя Грама $g(a_1, a_2, \dots, a_k)$ справедливо неравенство (*неравенство Адамара*)

$$g(a_1, a_2, \dots, a_k) \leqslant |a_1|^2 \dots |a_k|^2,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ попарно ортогональны или хотя бы один из них равен нулю.

1331. Доказать, что вещественная симметричная матрица $A = (a_{ij})$ является матрицей Грама некоторой системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ евклидова пространства, т. е. $a_{ij} = (e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A неотрицательны.

1332. Доказать, что любая эрмитова матрица $A=(a_{ij})$ с неотрицательными главными минорами является матрицей Грама некоторой системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ эрмитова пространства V: $a_{ij} = (e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

1333. Может ли матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

быть матрицей Грама:

1) некоторой линейно независимой системы векторов евклидова пространства;

2) некоторой (необязательно линейно независимой) системы векторов?

1334. Может ли матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

быть матрицей Грама некоторой линейно независимой системы векторов?

1335. Может ли матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

быть матрицей Грама некоторой системы векторов (необязательно линейно независимой)?

n-Мерным *параллелепипедом* $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$, построенным по системе линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ векторного пространства, называется множество векторов, представимых в виде линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Если векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ попарно ортогональны, то параллелепипед $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется *прямоугольным*. Определим *объем* n-мерного параллелепипеда индуктивно.

1) $n=1$. Объемом назовем длину $|a_1|$ вектора a_1: $V(a_1) = |a_1|$.

2) $n=2$. В этом случае двумерный объем — это площадь параллелограмма $V(a_1, a_2)$, построенного на векторах a_1, a_2. При этом

$V(a_1, a_2) = V(a_1)h_2$, где h_2 — высота параллелограмма, опущенная на сторону a_1, или, что то же самое, ортогональная составляющая вектора a_2 относительно подпространства, порожденного вектором a_1.

3) $n=3$. Для объема трехмерного параллелепипеда $V(a_1, a_2, a_3)$ известна формула $V(a_1, a_2, a_3)=V(a_1, a_2)h_3$, где $V(a_1, a_2)$ — площадь двумерной грани, заданной векторами a_1, a_2, а h_3 — длина ортогональной составляющей вектора a_3 относительно подпространства, порожденного векторами a_1, a_2 (высота параллелепипеда).

4) Индуктивный переход. Определим n-мерный объем $V(a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n)$ параллелепипеда, построенного на линейно независимых векторах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, по формуле «площадь (объем) основания на высоту», т. е.

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})h_n,$$

где h_n — длина ортогональной составляющей вектора a_n относительно подпространства, порожденного векторами $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

1336. Доказать корректность определения n-мерного объема (т. е. его независимость от выбора порядка в системе векторов $a_1, \ldots, a_n$), связав его с определителем Грама $g(a_1, \ldots, a_n)$ формулой

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{g(a_1, \ldots, a_n)}.$$

1337. Доказать, что если векторы $a_1, \ldots, a_n$ заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе, то объем $V(a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n)$ параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, может быть найден по формуле

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = |\det A|,$$

где $\det A$ — определитель матрицы, по столбцам (или по строкам) которой записаны координаты $\{a_i^j\}$ векторов $a_1, \ldots, a_n$.

1338. Выяснить геометрический смысл неравенства Адамара

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant |a_1|^2 \ldots |a_n|^2$$

и обращения его в равенство.

1339. Доказать обобщенное неравенство Адамара

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leqslant g(a_1, a_2, \ldots, a_p)g(a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_k), \quad 1 \leqslant p \leqslant k,$$

и выяснить его геометрический смысл. В каком случае неравенство превращается в равенство?

1340. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Записав явно в координатах неравенство Адамара, найти верхнюю оценку квадрата определителя произвольной вещественной матрицы (a_{ij}).

1341. Доказать, что определитель $\det(a_{ij})$ матрицы положительно определенной квадратичной формы удовлетворяет неравенству

$$\det(a_{ij}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1342. Вычислить объем 4-мерного параллелепипеда, заданного векторами a_1, a_2, a_3, a_4, если:

1) $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$,
$a_3 = (1, 0, 1, -1)$, $a_4 = (1, -3, 1, 2)$;
2) $a_1 = (1, 1, 0, -1)$, $a_2 = (1, -1, 0, 1)$,
$a_3 = (1, 0, 1, 1)$, $a_4 = (0, -1, -1, 1)$;
3) $a_1 = (1, 1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$,
$a_3 = (1, 0, 1, 1)$, $a_4 = (0, 1, 1, 1)$;
4) $a_1 = (1, 1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)$,
$a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.

§ 13.4. Ортогональное дополнение

Ортогональным дополнением $L^\perp$ подпространства L евклидова или эрмитова пространства V называется множество векторов, которые ортогональны всем векторам из L:

$$L^\perp = \{x \in V \mid (x, l) = 0 \ \ \forall l \in L\}.$$

1343. Доказать, что ортогональное дополнение $L^\perp$ к линейному подпространству L евклидова (эрмитова) пространства V является линейным подпространством. В случае n-мерного евклидова пространства V найти размерность $L^\perp$, если размерность L равна k.

1344. Пусть L — подпространство конечномерного евклидова пространства V. Доказать, что все пространство V есть прямая сумма L и его ортогонального дополнения $L^\perp$: $V = L \oplus L^\perp$.

1345. Доказать следующие свойства ортогонального дополнения $L^\perp$ к линейному подпространству L в конечномерном евклидовом пространстве V:

1) $(L^\perp)^\perp = L$;
2) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;
3) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$;
4) $V^\perp = 0$, $0^\perp = V$.

1346. Найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ подпространства L, натянутого на векторы:

1) $a_1 = (1, 2, 0, -1)$, $a_2 = (0, -1, 1, 3)$, $a_3 = (3, 4, 2, 3)$;

2) $a_1 = (1, 0, -2, -1)$, $a_2 = (1, 1, 5, 4)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$.

1347. Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение $L^{\perp}$ подпространства L, если L задано системой линейных однородных уравнений:

1) $\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 + 3x^4 = 0, \\ 3x^1 - 4x^2 - x^3 + 7x^4 = 0, \\ x^2 - 2x^3 - x^4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 = 0, \\ x^1 + x^2 + x^3 + 2x^4 = 0, \\ 2x^2 + x^3 + x^4 = 0. \end{cases}$

1348. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2n}[x]$ многочленов степени не выше $2n$ со скалярным произведением, заданным интегралом

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx,$$

найти ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к подпространству $L = \langle 1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n} \rangle$ (подпространству четных многочленов).

1349. В евклидовом пространстве квадратных матриц со скалярным произведением

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A^{\top}B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

найти ортогональное дополнение к подпространству:

1) верхнетреугольных матриц;

2) симметричных матриц.

1350. Найти ортогональную проекцию $x^{\parallel}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (9, 1, 3, -1)$ при проекции на подпространство $L = \langle (3, 0, 4, 1), (1, 1, 1, -1), (3, -3, 5, 5) \rangle$.

1351. Найти ортогональную проекцию $x^{\parallel}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (2, 5, -2, 3)$ при проекции на подпространство $L = \langle (-3, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 1) \rangle$.

1352. Найти ортогональную проекцию Y и ортогональную составляющую Z матрицы X в евклидовом пространстве вещественных квадратных матриц второго порядка со скалярным произведением $(A, B) = \operatorname{tr}(A^{\top}B) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}$ при проекции на подпространство $L = \langle A_1, A_2 \rangle$, где

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

§ 13.5. Расстояния и углы

1353. Назовем *расстоянием* между двумя векторами x и y евклидова (эрмитова) пространства величину $|x-y|$. Расстоянием $\rho(x, L)$ от вектора x до линейного подпространства L называется число, равное $\inf\limits_{l\in L}|x-l|$ — нижняя грань расстояний от вектора x до векторов подпространства L.

Доказать, что расстояние $\rho(x, L)$ равно длине ортогональной составляющей z вектора x относительно подпространства L.

1354. Найти расстояние между вектором $(7, 1, 1, 1)$ и подпространством $L=\langle(1, 0, 1, 2), (3, -1, -1, -4)\rangle$.

1355. Найти расстояние между вектором v и подпространством L, заданным системой однородных линейных уравнений:

1) $v=(-1, 3, -3, 5)$, $L\colon \begin{cases} x+2y+z+t=0, \\ 5x-2y+z-9t=0; \end{cases}$

2) $v=(-1, 5, 3, 5)$, $L\colon \begin{cases} -4x+3y+2z+t=0, \\ -x+2y-z=0; \end{cases}$

3) $v=(10, 3, 1, -5)$, $L\colon \begin{cases} x-y+z+t=0, \\ 5x+3y-7z-4t=0. \end{cases}$

1356. В пространстве многочленов степени не выше n рассматриваются три различных скалярных произведения:

$$(f, g)_0=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx, \quad (f, g)_1=\int\limits_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx,$$

$$(f, g)_2=\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Относительно каждого скалярного произведения (т. е. в каждом из этих трех евклидовых пространств) найти расстояния d_0, d_1, d_2 от многочлена x^n до подпространства L многочленов степени меньше n.

1357. Определим угол φ между вектором x и подпространством L в евклидовом пространстве V как наименьший угол, который образует x с векторами из L, т. е. $\varphi=\inf\limits_{y\in L}(\widehat{x, y})$. Доказать, что этот угол φ равен углу между вектором x и его ортогональной проекцией $x^{\parallel}$ на подпространство L, если $x^{\parallel}\neq 0$, и равен $\pi/2$, если $x^{\parallel}=0$.

1358. Найти угол между вектором x и подпространством L, если:

1) $x=(4, -8, 0, 1)$, $L=\langle(-1, 1, 2, 3), (2, 0, 1, 1)\rangle$;

2) $x=(5, -1, 3, 5)$, $L=\langle(4, -2, -2, 0), (5, -10, 8, 3)\rangle$;

3) $x=(-3, 3, -1, 5)$, $L=\langle(1, 4, -1, 6), (2, 2, 4, -3)\rangle$;

4) $x=(3, 1, 1, 1)$, $L=\langle(1, 1, -1, 2), (1, -1, 0, 1), (1, -1, 0, -3)\rangle$.

1359. Найти угол φ между вектором x и подпространством L, заданным системой линейных уравнений:

1) $x=(-1,5,3,5)$, $L\colon \begin{cases} -2x+4y-2z=0, \\ -10x+5y+8z+3t=0; \end{cases}$

2) $x=(-1,3,-3,5)$, $L\colon \begin{cases} -x+4y+z+6t=0, \\ 4x+2y+2z-3t=0; \end{cases}$

3) $x=(6,2,0,3)$, $L\colon \begin{cases} x-y-z=0, \\ x+y+t=0. \end{cases}$

1360. Определение угла между прямой и плоскостью, угла между двумя прямыми и угла между плоскостями в трехмерном пространстве может быть обобщено на многомерный случай следующим образом.

1) Пусть L_1 и L_2 — два подпространства некоторого конечномерного евклидова пространства, пересекающиеся лишь по нулевому вектору: $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Максимум функции

$$f(x,y) = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$$

на декартовом произведении $(L_1 \setminus \{0\}) \times (L_2 \setminus \{0\})$ принимаем за косинус угла между подпространствами L_1 и L_2. С другой стороны, этот угол является минимальными среди углов $\varphi(x,y)$ между всеми парами ненулевых векторов x и y: $x \in L_1$, $y \in L_2$.

Доказать, что если подпространства L_1 и L_2 не ортогональны, то для определенного таким образом угла справедливы равенства

$$\min_{\substack{x\in L_1,\, x\neq 0\\ y\in L_2,\, y\neq 0}} \varphi(x,y) = \min_{x\in L_1,\, x\neq 0} \varphi(x, x^{\parallel}) = \min_{y\in L_2,\, y\neq 0} \varphi(y^{\parallel}, y),$$

где $x^{\parallel}$ — ортогональная проекция вектора x на L_2, а $y^{\parallel}$ — ортогональная проекция вектора y на L_1.

Доказать, что если подпространства L_1 и L_2 ортогональны, то угол между ними равен $\pi/2$.

2) Если $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$ и $L_1 \neq L_1 \cap L_2$, $L_2 \neq L_1 \cap L_2$, угол φ определяется как угол между подпространствами $W_1 = L_1 \cap (L_1 \cap L_2)^{\perp}$ и $W_2 = L_2 \cap (L_1 \cap L_2)^{\perp}$.

3) Если же $L_1 = L_1 \cap L_2$ или $L_2 = L_1 \cap L_2$ (т.е. одно из подпространств содержится в другом), то значение угла φ полагается равным нулю.

1361. Даны два подпространства L_1 и L_2, заданные как линейные оболочки: $L_1 = \langle (3,3,4,4), (3,-3,4,-4) \rangle$ и $L_2 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$.

Доказать, что все векторы из подпространства L_1 образуют один и тот же угол с подпространством L_2; найти этот угол.

1362. Доказать, что угол между подпространствами можно находить следующим образом.

Пусть L_1 и L_2 — два подпространства евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, пересекающиеся лишь по нулевому вектору: $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, x — произвольный вектор подпространства L_1, а $x^{\parallel}$ — его ортогональная проекция на подпространство L_2. Доказать, что:

1) функции $g(x) = (x, x)$ и $f(x) = (x^{\parallel}, x^{\parallel})$ являются квадратичными функциями, заданными на подпространстве L_1, причем функция $g(x)$ положительно определена;

2) косинус угла φ между подпространствами L_1 и L_2 равен $\sqrt{\lambda_{\max}}$, где $\lambda_{\max}$ — максимальный корень уравнения $\det(F - \lambda G) = 0$, где F, G — матрицы (в некотором базисе подпространства L_1) квадратичных функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

1363. Найти угол между подпространством $\langle e_1, e_2\rangle$ и подпространством $\langle a_1, a_2\rangle$, где $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ и $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, в каждом из следующих случаев:

1) $a_1 = (2, 3, 1, 6)$, $a_2 = (3, 2, -6, -1)$;
2) $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (2, 1, -2, -1)$;
3) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 3, -5)$;
4) $a_1 = (1, 0, 2, 2)$, $a_2 = (0, 1, 1, -1)$;
5) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 7, -7)$.

1364. Найти угол между подпространствами L_1 и L_2 четырехмерного пространства, где

$$L_1 = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)\rangle, \quad L_2 = \langle (2, 2, 1, 0), (1, -2, 2, 0)\rangle.$$

§ 13.6. Геометрия аффинных евклидовых пространств

Расстояние $\rho(M, N)$ между двумя точками M и N аффинного пространства A определяется как длина вектора $\overrightarrow{MN}$:

$$\rho(M, N) = |\overrightarrow{MN}|.$$

Соответственно определим расстояние $\rho(X, Y)$ между двумя подмножествами X и Y в A как $\rho(X, Y) = \inf\limits_{M\in X, N\in Y} \rho(M, N)$. *Углом между двумя аффинными подпространствами* (M_1, V_1) и (M_2, V_2) будем называть угол между соответствующими линейными подпространствами V_1 и V_2.

В аффинном евклидовом (эрмитовом) пространстве A мы можем ввести *прямоугольную систему координат*: пусть O — некоторая фиксированная точка пространства A, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис линейного евклидова (эрмитова) пространства V. Тогда *прямоугольными координатами* x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, точки $M \in A$ будем называть координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\overrightarrow{OM} = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n.$$

Операция сложения «точка + вектор» определена стандартным образом:

$$M = \begin{pmatrix} m^1 \\ m^2 \\ \vdots \\ m^n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad M + a = \begin{pmatrix} m^1 + a^1 \\ m^2 + a^2 \\ \vdots \\ m^n + a^n \end{pmatrix}.$$

1365. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, заданного своими вершинами $A(-3, 4, 1, 2)$, $B(1, 2, 3, 3)$, $C(5, 4, -3, 3)$.

1366. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(5, 1, 0, 8)$ на плоскость, проходящую через три точки $A(1, 2, 3, 4)$, $B(2, 3, 4, 5)$, $C(2, 2, 3, 7)$.

1367. Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(4, 2, -5, 1)$ на плоскость, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} 2x^1 - 2x^2 + x^3 + 2x^4 = 9, \\ 2x^1 - 4x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 12. \end{cases}$$

1368. Найти угол между прямой $x^1 = x^2 = 2x^3 = 2x^4$ и плоскостью

$$\begin{cases} 3x^1 - 2x^2 + x^4 = 1, \\ x^2 + x^3 = -1. \end{cases}$$

1369. Доказать, что расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между двумя аффинными подпространствами $P_1 = M_1 + L_1$ и $P_2 = M_2 + L_2$ аффинного евклидова пространства E может быть найдено как длина ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ относительно подпространства $L_1 + L_2$.

1370. Плоскость P проходит через точки $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 2, 0, 0)$, $C(1, 2, 0, 1)$, а прямая l — через две точки $D(1, 1, 1, 2)$, $E(1, 1, 2, 1)$.

Определить взаимное расположение прямой l и плоскости P, написать уравнения и найти длину общего перпендикуляра.

1371. Плоскость P проходит через точки $A(1, 1, 1, 1)$, $B(3, 0, 1, 1)$, $C(1, 1, -1, 2)$, а прямая l — через две точки $D(4, 2, 1, 6)$, $E(0, 5, 4, 4)$. Определить взаимное расположение прямой l и плоскости P и найти расстояние ρ между ними.

1372. Найти расстояние между двумя плоскостями, если первая проходит через точки $A_1(4, 5, 3, 2)$, $B_1(5, 7, 5, 4)$, $C_1(6, 3, 4, 4)$, а вторая — через точки $A_2(1, -2, 1, -3)$, $B_2(3, -2, 3, -2)$, $C_2(2, -4, 1, -4)$.

1373. Доказать, что расстояние h от точки M аффинного евклидова пространства до плоскости, проходящей через точку N параллельно подпространству L, заданному своим базисом $a_1, a_2, \ldots, a_k$, может быть найдено при помощи определителя Грама по формуле

$$h^2 = \frac{g(a_1, a_2, \ldots, a_k, \overrightarrow{MN})}{g(a_1, a_2, \ldots, a_k)}.$$

1374. Найти расстояние между точкой $(5, -1, 4, -3)$ и двумерной плоскостью, заданной системой неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 4, \\ 3x^1 - 3x^2 + x^3 - x^4 = 4. \end{cases}$$

1375. Найти расстояние между прямой l и плоскостью P, если:

1) $l = (9, -2, -1, -1) + \langle (2, -2, -1, -1) \rangle$,
$P = (2, 1, 3, -3) + \langle (3, -2, 2, 0), (-5, 2, 0, 2) \rangle$;

2) $l = (2, 4, 0, 14) + \langle (0, 1, -2, 5) \rangle$,
$P = (4, 1, -2, 5) + \langle (-1, 1, -1, 5), (1, 1, -3, 3) \rangle$.

1376. Найти расстояние между прямой l и плоскостью P, заданной системой уравнений:

1) $l = (9, -2, -1, -1) + \langle (2, -2, -1, -1) \rangle$, $P: \begin{cases} 2x + 4y + z + t = 8, \\ 2x + 7y + 4z - 2t = 29; \end{cases}$

2) $l = (2, -3, 1, -4) + \langle (-1, 2, 1, 1) \rangle$, $P: \begin{cases} x + y + z + 12t = 19, \\ 5x + 2y - 7z - 6t = -7; \end{cases}$

3) $l = (2, 4, 0, 14) + \langle (0, 1, -2, 5) \rangle$, $P: \begin{cases} 2x - 2y + z + t = 9, \\ 4x + 2y + 3z + t = 17. \end{cases}$

1377. Найти расстояние между многочленом $3x/5$ и аффинным подпространством многочленов вида $x^3 + P(x)$, где $P(x)$ — произвольный многочлен степени не выше 2, в аффинном евклидовом пространстве многочленов степени не выше 3 со скалярным произведением, заданным интегралом

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

1378. Найти расстояние между аффинным подпространством многочленов вида $5x^3 + L$, где L есть линейное подпространство многочленов, порожденное многочленами x^2 и x, и аффинной прямой многочленов вида $3x + \mathrm{const}$ в аффинном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_3[x]$ многочленов степени не выше 3 со скалярным произведением, заданным как и в предыдущей задаче.

1379. Найти расстояние h от точки $M = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ аффинного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ до гиперплоскости $a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots$ $\ldots + a_nx^n + b = 0$.

1380. В треугольнике $A_1A_2A_3$ евклидовой плоскости:

1) выразить элементы матрицы Грама $G(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) = (g_{ij})$ через длины $a_{12} = |\overrightarrow{A_1A_2}|$, $a_{23} = |\overrightarrow{A_2A_3}|$, $a_{13} = |\overrightarrow{A_1A_3}|$ сторон треугольника;

2) выяснить геометрический смысл условия положительности определителя матрицы Грама $G(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$.

1381. Задан занумерованный двумя индексами набор чисел $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$, $a_{01} = a_{02} = a_{03} = \varepsilon$. При каких значениях ε:

1) любая тройка a_{ij}, a_{ik}, a_{jk} чисел данного набора может быть реализована как набор длин $a_{pq} = |A_pA_q|$ сторон некоторого треугольника $A_iA_jA_k$ евклидова пространства;

2) данный набор чисел может быть набором длин $a_{pq} = |A_pA_q|$ ребер некоторого тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ в трехмерном аффинном евклидовом пространстве;

3) данный набор чисел может быть реализован как набор расстояний между некоторой четверкой точек A_0, A_1, A_2, A_3 двумерной евклидовой плоскости?

1382. Задан набор из C_n^2 неотрицательных чисел a_{ij}, пронумерованных двумя индексами $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, $i < j$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный набор $\{a_{ij}\}$ был набором

1) длин ребер некоторого $(n-1)$-мерного симплекса, вложенного в n-мерное аффинное евклидово пространство;

2) попарных расстояний между n точками некоторого евклидова пространства.

В последнем случае определить наименьшую размерность такого пространства.

§ 13.7. n-Мерный куб и n-мерный симплекс

Единичным кубом в n-мерном аффинном евклидовом пространстве E будем называть множество точек, координаты которых (в некотором ортонормированном базисе) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant x^i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Соответственно просто *n-мерным кубом* называется прямоугольный параллелепипед с ребрами одинаковой длины.

Правильным n-мерным симплексом в $(n+1)$-мерном аффинном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ будем называть множество точек, координаты которых (в некотором ортонормированном базисе) удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^i = 1, \quad x^i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

1383. Найти кратчайшее расстояние между двумерной гранью единичного четырехмерного куба и его диагональю, не пересекающей эту грань.

1384. Доказать, что ортогональные проекции вершин n-мерного куба на любую его диагональ делят ее на n равных частей.

1385. Найти угол между диагональю четырехмерного куба и его одно-, двух- и трехмерной гранями.

1386 (Теорема Пифагора в n-мерном пространстве). Доказать, что квадрат диагонали n-мерного прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины.

1387. Найти угол между диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

1388. Найти число:

1) диагоналей n-мерного куба;

2) диагоналей n-мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

1389. Найти длину диагонали n-мерного куба с ребром a.

1390. Какие трехмерные тела получаются в сечении четырехмерного куба $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid -1 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, 2, 3, 4\}$ трехмерной гиперплоскостью $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = \varepsilon$ при значениях $\varepsilon = 0, 2, 3, 4, 5$? Сравнить результаты с аналогичной трехмерной задачей.

1391. В n-мерном кубе $I_1 : |x^i| \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ мы «раздвинули» на 10^{-3} его стенки, т. е. получили новый куб $I_{1+10^{-3}} : |x^i| \leqslant 1 + \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Найти размерность n, в которой объем куба $I_{1+10^{-3}}$ будет не менее чем в два раза превышать объем исходного куба I_1.

1392. Доказать, что прямая, соединяющая центры двух противоположных граней правильного симплекса, перпендикулярна к этим граням.

1393. Найти расстояние между k-мерной гранью правильного n-мерного симплекса с ребром единичной длины и противоположной ей $(n-k-1)$-мерной гранью.

1394. Найти угол между двумерными гранями правильного четырехмерного симплекса.

§ 13.8. Метод наименьших квадратов и интерполяция функций

1395. Рассмотрим некоторые вектор x и подпространство L в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказать, что среди векторов подпространства L ортогональная проекция $x^{\|}$ вектора x на L «наименее уклоняется» от данного вектора x, т. е.

$$|x-x^{\|}| \leqslant |x-l| \quad \forall l \in L.$$

Метод наименьших квадратов (*МНК*). Системы линейных неоднородных уравнений, встречаемые в реальных практических вычислениях, очень часто бывают *несовместными*. Более точно: рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix} = b, \quad m \geqslant n.$$

Введем векторы-столбцы:

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad a_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

Будем дополнительно считать, что векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейно независимы. Наша система $Ax=b$ совместна тогда и только тогда, когда вектор-столбец b принадлежит линейной оболочке L векторов a_i, $i=1, 2, \dots, n$. Если $b \notin L$, мы можем определить лишь *псевдорешение*, т. е. такой набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$, который минимизирует квадратичное отклонение $\sum\limits_j (a_i^j x^i - b^j)^2$. Очевидно, что в случае точного решения квадратичное отклонение равно нулю.

1396. Доказать, что псевдорешение можно найти как решение новой неоднородной системы уравнений, составленной при помощи матрицы Грама $G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \ldots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b, a_1) \\ \vdots \\ (b, a_n) \end{pmatrix}.$$

Каков геометрический смысл найденных констант $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

В общей ситуации, когда векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависимы, псевдорешение находится уже неоднозначно. Можно оставить из $a_1, a_2, \ldots, a_n$ только линейно независимые векторы и применить к ним уже разобранный метод наименьших квадратов, а затем по найденному решению выписать псевдорешение исходной системы (неоднозначно).

1397. Методом наименьших квадратов найти псевдорешение следующих несовместных систем линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 4y = 1, \\ x + y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^1 - x^3 = 1, \\ x^2 + x^3 = -1, \\ x^1 - x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - x^3 = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2, \\ 2x - y = 1, \\ x - 2y = -1, \\ x + y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^1 - x^3 = 1, \\ x^2 + x^3 - x^4 = -1, \\ x^1 - x^2 = 0, \\ -x^1 + x^3 + 2x^4 = 1, \\ x^2 + x^3 - x^4 = 1. \end{cases}$

Интерполяция (*приближение*) *функции*. В приложениях очень важна задача (точного или приближенного) восстановления функции $f(x)$ по отдельным ее значениям или по каким-то другим ее данным.

П р и м е р. *Интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$L_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, \varphi_k(x),$$

$$\varphi_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}, \quad k = 0, \ldots, n, \tag{13.1}$$

решает задачу точного восстановления многочлена f степени n по его значениям $f(x_k)$ в $n+1$ попарно различных точках $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называются *узлами интерполяции*.

1398. Доказать, что система многочленов $\varphi_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$, из (13.1) образует ортонормированный базис пространства многочленов степени не выше n относительно скалярного произведения

$$(f, g) = f(x_0)g(x_0) + f(x_1)g(x_1) + \ldots + f(x_n)g(x_n),$$
$$-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < +\infty.$$

1399. Даны $2n+1$ попарно различных точек x_i, $i = 0, \ldots, 2n$, отрезка $[0, 2\pi]$. В пространстве V_{2n+1} тригонометрических многочленов

$$V_{2n+1} = \left\{c_0 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ldots + c_{2n-1} \cos nx + c_{2n} \sin nx\right\}$$

найти такие тригонометрические многочлены t_k, что

$$t_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Показать, что t_k образуют ортонормированный базис пространства V_{2n+1} относительно скалярного произведения

$$(f, g) = f(x_0)g(x_0) + f(x_1)g(x_1) + \ldots + f(x_{2n})g(x_{2n}).$$

1400. Доказать, что в пространстве V_{2n+1} тригонометрических многочленов существует, и притом единственное, решение $\mathcal{T}_{2n+1}$ системы уравнений

$$\mathcal{T}_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, 2n,$$

где $x_0, \ldots, x_{2n}$ — $2n+1$ попарно различных точек отрезка $[0, 2\pi]$, а $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция.

1401. Найти многочлен h минимальной степени такой, что в данных попарно различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ его значения и производные совпадают со значениями и производными данной функции:

$$h(x_i) = f(x_i), \quad h'(x_i) = f'(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа L_n^f можно интерполировать произвольную функцию f на числовой прямой по таблице ее значений $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, где $-\infty < x_0 < \ldots < x_n < +\infty$.

1402. Доказать, что если множество $\{x_i, i=0, \ldots, n\}$ узлов интерполяции симметрично относительно нуля, то из четности (нечетности) функции $f(x)$ следует четность (нечетность) функции $L_n^f(x)$.

В общей ситуации восстановления функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ на отрезке $[a, b]$ выбирается некоторая система линейно независимых функций $\varphi_i(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и интерполяцией $L_n^f(x)$ называется линейная комбинация $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\varphi_i(x)$ функций $\varphi_i(x)$, где константы a_i, $i=0, \ldots, n$, выбираются в зависимости от постановки задачи. В разобранном примере интерполяционного многочлена Лагранжа эти константы находились просто из условия совпадения значений $L_n^f(x)$ и $f(x)$ в точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. В общем случае приходится использовать разные системы функций, например обычный базис многочленов $\{1, x, \ldots, x^k, \ldots\}$ или систему $\{1, \cos x, \sin x, \ldots$ $\ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\}$, если решается задача восстановления 2π-периодической функции на отрезке $[0, 2\pi]$.

1403. Введем пространство V_{n+1} дискретных функций $f\colon M_{n+1} \to \mathbb{R}$ на конечном множестве $M_{n+1} = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Показать, что V_{n+1} является евклидовым пространством относительно скалярного произведения $(f, g) = f(x_0)g(x_0) + f(x_1)g(x_1) + \ldots + f(x_n)g(x_n)$. Указать какой-нибудь ортонормированный базис пространства V_{n+1}.

Рассмотрим пространство $F[a, b]$ вещественнозначных функций на отрезке $[a, b]$ и определим отображение ограничения

$$\rho_{n+1}\colon F[a, b] \to V_{n+1}, \quad \rho_{n+1}(f) = (f(x_0), \ldots, f(x_n)),$$

т. е. отображение, сопоставляющее функции f набор ее значений в точках $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$. Сохраним за $\rho_{n+1}(f)$ обозначение f и будем обозначать длину (норму) функции в V_{n+1} как $\|f\|_{n+1}$.

Метод наименьших квадратов для интерполяции функции по таблице ее значений. Произведем интерполяцию $L_m^f(x)$, $m \leqslant n$, в виде

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i(x),$$

исходя из условия минимальности суммы квадратов отклонений:

$$\|L_m^f(x) - f\|_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (L_m^f(x_i) - f(x_i))^2 = \min_a \sum_{i=0}^{n} (L_m(x_i) - f(x_i))^2.$$

1404. Доказать, что решение $L_m^f(x)$ задачи интерполяции по методу наименьших квадратов в пространстве V_{n+1} существует и единственно, причем коэффициенты a_i, $i=0, \ldots, m$, находятся из системы неоднородных линейных уравнений

$$G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ \vdots \\ (f, \varphi_m) \end{pmatrix},$$

где $G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — матрица Грама системы функций $\varphi_0(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_m(x)$ в евклидовом пространстве V_{n+1}.

1405. Методом наименьших квадратов найти интерполяцию (наилучшее среднеквадратичное приближение) функции f, заданной значениями $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$:

1) линейным многочленом $L_1^f(x) = b_1x + b_0$ (т. е. интерполировать по системе функций $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$);

2) квадратичным многочленом $L_2^f(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$;

3) многочленом 3-й степени $L_3^f(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$.

Найти квадратичное отклонение $\|L_i^f - f\|_4$ в каждом из этих случаев.

1406. Доказать, что в случае ортонормированной системы функций $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ коэффициенты a_i, $i=0, \ldots, n$, равняются коэффициентам Фурье функции f, т. е. линейная комбинация с коэффициентами Фурье функции f есть наилучшая интерполяция функции f.

Интерполируемая функция может быть задана во всех точках, задача ее интерполяции заключается в ее приближении линейной комбинацией функций специального вида. При этом возникает другое евклидово пространство функций и, соответственно, другая норма $\|f\|$. Интерполяция снова находится из условия $\min_{a_i} \|L_n(x) - f\|$.

1407. Методом наименьших квадратов найти в евклидовом пространстве непрерывно дифференцируемых функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

интерполяцию (наилучшее среднеквадратичное приближение) непрерывно дифференцируемой функции f при помощи системы функций $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=\cos x$, $\varphi_2(x)=\sin x$.

Глава 14

Операторы в пространствах со скалярным произведением

Под *пространством* (конечномерным, если не оговорено противное) *со скалярным произведением* понимается вещественное пространство с фиксированной невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной функцией, либо комплексное пространство с фиксированной невырожденной эрмитовой или косоэрмитовой полуторалинейной функцией (последняя предполагается полулинейной по первому аргументу и линейной по второму). Вещественное пространство с положительно определенной симметрической билинейной функцией называется *евклидовым*; вещественное пространство с произвольной невырожденной симметрической билинейной функцией с индексами инерции p и q называется *псевдоевклидовым* типа (p, q). Вещественное пространство с невырожденной кососимметрической билинейной функцией называется *симплектическим*. Базис симплектического пространства, имеющий матрицу Грама $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, называется *гамильтоновым*. Комплексное пространство с положительно определенной эрмитовой полуторалинейной функцией (линейной по второму аргументу) называется *эрмитовым*; комплексное пространство с произвольной невырожденной эрмитовой полуторалинейной функцией называется *псевдоэрмитовым*.

В пространстве V со скалярным произведением оператор $\mathbf{A}^*$ называется *сопряженным* к оператору $\mathbf{A}$, если $(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}^* y)$ для любых векторов x, y пространства V. В случае когда $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, т. е. $(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}y)$, оператор $\mathbf{A}$ называется *самосопряженным*. Самосопряженный оператор в евклидовом пространстве называют иногда *симметрическим*, а в эрмитовом — *эрмитовым оператором*.

Самосопряженный оператор называется *неотрицательным*, если для всех $x \in V$ выполнено $(\mathbf{A}x, x) \geqslant 0$. Если же $(\mathbf{A}x, x) > 0$ для всех $x \neq 0$, $x \in V$, то оператор $\mathbf{A}$ называется *положительным*. Если операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ коммутируют, $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, то оператор $\mathbf{A}$ называется *нормальным*.

В пространствах со скалярным произведением рассматривается важный класс операторов $\mathbf{A}$, сохраняющих скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, — *изометрические* операторы:

$$(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y) = (x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

Изометрические операторы в евклидовом, симплектическом и эрмитовом пространстве называются также *ортогональными*, *симплектическими* и *унитарными* соответственно.

Также выделяется класс таких операторов, что $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$, т. е. $(\mathbf{A}x, y) = -(x, \mathbf{A}y)$. В вещественном пространстве со скалярным произведением (евклидовом, псевдоевклидовом и симплектическом) они называются *кососимметрическими*, а в комплексном пространстве со скалярным произведением (эрмитовом и псевдоэрмитовом) — *косоэрмитовыми*.

Полярным разложением оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве называется его представление в виде $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{U}_1$ или $\mathbf{A} = \mathbf{U}_2\mathbf{P}_2$, где $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — самосопряженные неотрицательные, а $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ — ортогональные (унитарные) операторы.

§ 14.1. Операторы в евклидовом (эрмитовом) пространстве

14.1.1. Сопряженный оператор

1408. Найти сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$, если оператор $\mathbf{A}$ представляет собой умножение всех векторов на одно и то же число λ (гомотетию).

1409. Найти сопряженный оператор к оператору поворота евклидовой плоскости на угол α.

1410. Пусть оператор $\mathbf{A}$ в некотором базисе евклидова (эрмитова) пространства имеет матрицу A, а скалярное произведение — матрицу Грама G. Найти матрицу A^* сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в этом базисе.

1411. Пусть (e_1, e_2) — ортонормированный базис евклидова пространства и оператор $\mathbf{A}$ имеет матрицу A в базисе (e_1', e_2'). Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в этом базисе, если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad (e_1', e_2') = (e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $(e_1', e_2') = (3e_1 + 2e_2, -2e_1 - e_2)$.

1412. Пусть (e_1, e_2) — ортонормированный базис эрмитова пространства, оператор **A** в базисе $(e_1 + ie_2, ie_1 - 2e_2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в этом базисе.

1413. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[t]$ степени не выше 2 найти матрицы оператора дифференцирования $\mathbf{A} = \dfrac{d}{dt}$ и сопряженного к нему оператора $\mathbf{A}^*$ в базисе $1, t, t^2$, если скалярное произведение задано следующим образом:

1) $(f, g) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 g_2$, где
$f = f_0 + f_1 t + f_2 t^2$, $g = g_0 + g_1 t + g_2 t^2$;

2) $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t) g(t) dt$;

3) $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$.

1414. Найти сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$, если оператор **A** представляет собой:

1) проектирование евклидовой плоскости на ось абсцисс параллельно биссектрисе первой и третьей четвертей;

2) ортогональное проектирование на подпространство евклидова (эрмитова) пространства.

1415. Найти оператор $\mathbf{C}^*$, сопряженный к оператору **C** умножения на фиксированную матрицу C, $\mathbf{C}(X) = CX$, в евклидовом (эрмитовом) пространстве матриц со стандартным скалярным произведением

$$(A, B) = \operatorname{tr} \overline{A^{\top}} B = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}.$$

1416. В бесконечномерном евклидовом пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx$$

задан оператор **A**, значение которого $\mathbf{A}(f)$ на произвольном многочлене f определяется по формуле

$$\mathbf{A}(f)(x) = \int\limits_a^b P(x, y) f(y) dy,$$

где $P(x, y)$ — некоторый фиксированный многочлен от двух переменных. Доказать, что сопряженный ему оператор $\mathbf{A}^*$ задается формулой

$$\mathbf{A}^*(f)(x) = \int\limits_a^b P(y,x)f(y)dy.$$

1417. Доказать, что операция перехода к сопряженному оператору в евклидовом (эрмитовом) пространстве обладает следующими свойствами:

1) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$; 2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$; 3) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$; 4) $(\lambda\mathbf{A})^* = \bar{\lambda}\mathbf{A}^*$; 5) $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$ для невырожденного оператора $\mathbf{A}$.

1418. *Правым* (*левым*) *графиком* оператора $\mathbf{A}$ в линейном пространстве V называется подмножество прямой суммы $V \oplus V$, состоящее из всех элементов вида $(x, \mathbf{A}x)$ (соответственно из всех элементов вида $(\mathbf{A}x, x)$). Показать, что левый и правый графики оператора являются линейными подпространствами в $V \oplus V$. Показать далее, что правый график $\{(x, \mathbf{A}x)\}$ оператора $\mathbf{A}$ и левый график $\{(\mathbf{B}x, x)\}$ оператора $\mathbf{B}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве ортогональны как подпространства пространства $V \oplus V$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^*$. Скалярное произведение во внешней прямой сумме вводится стандартным образом (см. задачу 1280).

1419. *Лапласианом* оператора $\mathbf{A}$ называется оператор $L(\mathbf{A}) = \mathbf{AA}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Доказать, что ядро оператора $L(\mathbf{A})$ совпадает с пересечением ядер операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$.

1420. Доказать, что если один и тот же вектор x является собственным для линейного оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ и для сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ с собственным значением μ, то $\lambda = \bar{\mu}$.

1421. Доказать, что если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа оператора $\mathbf{A}$, то собственными числами сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ будут сопряженные числа $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$.

1422. Пусть для оператора $\mathbf{A}$ существует базис из собственных векторов. Доказать, что тогда для сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ также имеется базис из собственных векторов, причем можно выбрать собственные базисы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ для операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ соответственно так, чтобы они образовывали пару взаимных базисов:

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

1423 (Теорема Шура). Доказать, что в эрмитовом пространстве для любого оператора существует ортонормированный базис, в котором матрица данного оператора имеет треугольный вид.

1424. Как связаны между собой жордановы формы операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$?

1425. Пусть $\mathbf{A}$ — (не обязательно линейное) отображение евклидова пространства V в себя, для которого существует сопряженное отображение, т. е. отображение $\mathbf{A}^*$ со свойством $(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}^*y)$ для всех $x, y \in V$. Доказать, что тогда $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ линейны.

1426. Пусть $\mathbf{A}\colon V \to W$ — линейное отображение евклидовых (эрмитовых) пространств. Показать, что равенство $(x, \mathbf{A}^*y) = (\mathbf{A}x, y)$, $x \in V$, $y \in W$, единственным образом определяет сопряженное линейное отображение $\mathbf{A}^*\colon W \to V$. Это отображение является нулевым лишь при $\mathbf{A} = 0$ и обладает всеми свойствами сопряженного оператора, приведенными в задаче 1417.

1427. Пусть $\mathbf{A}$ — такой оператор, что $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ является проектором. Доказать, что тогда $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ — также проектор.

1428. Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор, заданный в евклидовом пространстве V, и $\mathbf{A}^*$ — оператор, ему сопряженный. Доказать, что:

1) если e — собственный вектор оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и x — вектор, ортогональный к e, то векторы $\mathbf{A}e$ и $\mathbf{A}x$ ортогональны;

2) если для каждого вектора x, ортогонального к вектору e, векторы $\mathbf{A}e$ и $\mathbf{A}x$ ортогональны, то вектор e является собственным вектором оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

1429. Доказать, что для того чтобы линейный оператор $\mathbf{A}$, заданный в конечномерном евклидовом пространстве, переводил ортогональный базис пространства в ортогональную систему векторов, необходимо и достаточно, чтобы векторы этого базиса были собственными векторами оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}^*$ — оператор, сопряженный к $\mathbf{A}$.

14.1.2. Самосопряженные операторы

1430. Доказать, что матрица A самосопряженного оператора в ортонормированном базисе:

1) симметрична в случае евклидова пространства;

2) эрмитова, т. е. $A = \overline{A}^{\top}$, в случае эрмитова пространства.

1431. В стандартном базисе четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найти матрицу оператора ортогонального проектирования пространства на подпространство $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

1432. В стандартном базисе четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найти матрицу ортогонального проектирования пространства на двумерное подпространство

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

1433. В стандартном базисе четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найти матрицу ортогонального отражения пространства относительно одномерного подпространства, порожденного вектором $e=(1, 1, 1, 1)$.

1434. В стандартном базисе четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ найти матрицу ортогонального отражения пространства относительно двумерного подпространства

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_3+x_4=0. \end{cases}$$

1435. Доказать, что для того чтобы оператор проектирования пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы подпространства V_1 и V_2 были ортогональны.

1436. Показать, что оператор $\mathbf{C}$ умножения на симметричную (эрмитову) матрицу C, $\mathbf{C}(X)=CX$, в евклидовом (эрмитовом) пространстве вещественных (комплексных) квадратных матриц порядка n со стандартным скалярным произведением

$$(A, B) = \operatorname{tr}(\overline{A^\top} B) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}$$

является самосопряженным.

1437. Показать, что оператор двукратного дифференцирования $\mathbf{A}=\dfrac{d^2}{dx^2}$ является самосопряженным оператором в пространстве V тригонометрических многочленов

$$V = \{a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Показать, что функции $1/2$, $\cos x$, $\sin x$, ..., $\cos nx$, $\sin nx$ образуют собственный ортонормированный базис оператора $\mathbf{A}$, найти соответствующие собственные значения.

1438. Показать, что оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n, значение которого на произвольном многочлене f задано формулой

$$\mathbf{A}(f) = \frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{df}{dx}\Big],$$

является самосопряженным оператором относительно скалярного произведения $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Найти матрицу этого оператора в базисе, составленном из многочленов Лежандра $P_0(x), P_1(x), \ldots$ $\ldots, P_n(x)$, где

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^k).$$

1439. Показать, что оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n, значение которого на произвольном многочлене f задано формулой

$$\mathbf{A}(f) = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{df}{dx}\right),$$

является самосопряженным оператором относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе, составленном из многочленов Чебышёва (первого рода) $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n$, где $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

1440. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — самосопряженный оператор в евклидовом пространстве V, то V представляется в виде прямой суммы ядра и образа этого оператора: $V = \operatorname{Ker}\mathbf{A} \oplus \operatorname{Im}\mathbf{A}$.

1441. Доказать, что для того чтобы произведение двух самосопряженных операторов было самосопряженным оператором, необходимо и достаточно, чтобы эти операторы были перестановочны.

1442. Доказать, что в евклидовом пространстве линейная комбинация самосопряженных операторов является самосопряженным оператором. Верно ли аналогичное утверждение в эрмитовом пространстве?

1443. Доказать, что все собственные значения самосопряженного (эрмитова) оператора в эрмитовом пространстве и все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора в евклидовом пространстве вещественны.

1444. Показать, что собственные векторы самосопряженного оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

1445. Доказать, что ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к инвариантному подпространству L самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ также является инвариантным подпространством для этого оператора.

1446. Доказать, что для самосопряженного оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора. Матрицу оператора в этом базисе, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где по диагонали стоят вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (собственные значения оператора), будем называть *каноническим видом* самосопряженного оператора, соответствующий базис будет называться *каноническим* базисом самосопряженного оператора.

1447. Показать, что в евклидовом пространстве оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$. Верно ли аналогичное утверждение в эрмитовом пространстве?

1448. Каков вид жордановой нормальной формы самосопряженного оператора?

1449. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для самосопряженного оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 5 & 4+3i \\ 4-3i & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1450. Выяснить, может ли матрица A являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе, если

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1451. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ быть матрицей самосопряженного оператора (для некоторого евклидова скалярного произведения в $\mathbb{R}^3$)? Если да, то найти соответствующую матрицу Грама.

1452. Доказать, что два самосопряженных оператора в евклидовом или эрмитовом пространстве коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий канонический базис.

1453. Показать, что самосопряженный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве положителен (неотрицателен) тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (неотрицательны).

1454. Показать, что для любого оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве имеют место следующие утверждения:

1) самосопряженные операторы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ неотрицательны;

2) $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ являются положительными тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ невырожден;

3) операторы $\mathbf{E}+\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}+\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ (здесь $\mathbf{E}$ — тождественный оператор) невырожденны.

1455. Показать, что самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве является положительным тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица скалярного произведения G и матрица оператора A связаны соотношением $A=G^{-1}$.

1456. Показать, что для любого положительного (неотрицательного) самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ существует, притом единственный, положительный (соответственно, неотрицательный) самосопряженный оператор $\mathbf{B}$, для которого $\mathbf{A}=\mathbf{B}^2$. Оператор $\mathbf{B}$ называется неотрицательным *квадратным корнем* из $\mathbf{A}$.

1457. Найти неотрицательный квадратный корень из оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1458. Пусть A — произвольная вещественная матрица размера $m \times n$. Доказать, что квадратные матрицы A^*A и AA^* являются симметричными и неотрицательно определенными. Корни из собственных значений матрицы A^*A называются *сингулярными числами* матрицы A.

1459. Пусть A — произвольная действительная (комплексная) невырожденная матрица. Доказать, что A может быть представлена в виде произведения матриц $A=U_1CU_2$, где U_1 и U_2 — ортогональные (унитарные) матрицы, а C — диагональная матрица, у которой по диагонали стоят вещественные положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Доказать, что эти числа являются сингулярными числами матрицы A (см. предыдущую задачу). Разложение $A=U_1CU_2$ называется *сингулярным разложением* матрицы A. Каков геометрический смысл этого разложения?

1460. Пусть $\mathbf{A}\colon V\to\widetilde{V}$ — линейное отображение ранга r из n-мерного евклидова пространства V в m-мерное $\widetilde{V}$. Доказать, что в пространствах V и $\widetilde{V}$ можно так выбрать ортонормированные базисы $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \dots, \widetilde{e}_m$ соответственно, что матрицы отображений $\mathbf{A}\colon V\to\widetilde{V}$ и $\mathbf{A}^*\colon \widetilde{V}\to V$ (определение $\mathbf{A}^*$ см. в задаче 1426), записанные в этих базисах, имеют вид

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0\quad\dots\quad 0}}^{n-r}} \end{array}\\
A = & \left(\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & \alpha_r & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right), \\
 & \text{(последние } m-r \text{ строк)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{0\quad\dots\quad 0}}^{m-r}} \end{array}\\
A^* = & \left(\begin{array}{cccc|ccc}
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & \dots & 0 & \alpha_r & 0 & \dots & 0\\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right), \\
 & \text{(последние } n-r \text{ строк)}
\end{array}$$

Базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_m$ называются *сингулярными базисами* линейного отображения **A**. Доказать, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ являются ненулевыми сингулярными числами матрицы отображения **A**.

1461. Пусть A — симметричная положительно определенная матрица. Доказать, что A представляется в виде произведения $A = LR$, где L и R — соответственно нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы.

1462. Представить симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения нижнетреугольной матрицы L на верхнетреугольную R.

1463 (Эрмитово разложение). Показать, что любой оператор **A** в эрмитовом пространстве единственным образом представляется в виде $\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2$, где $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ — самосопряженные операторы. Какой смысл имеет это разложение в случае одномерного пространства?

1464. Найти эрмитово разложение оператора **A**, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2+i & 7+3i \\ 5-i & 1-i \end{pmatrix}.$$

1465. Доказать, что:

1) эрмитовы матрицы размера 2×2 с нулевым следом образуют линейное подпространство V_H^0 вещественного пространства V_H всех эрмитовых матриц размера 2×2;

2) размерность пространства V_H^0 равна трем, причем в качестве базиса можно взять так называемые *матрицы Паули*:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

3) V_H^0 является евклидовым пространством относительно скалярного произведения

$$(A, B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\overline{A}^\top B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB),$$

причем матрицы Паули S_1, S_2, S_3 образуют ортонормированный базис этого пространства.

1466. С помощью матриц Паули удобно задавать матричную реализацию алгебры кватернионов $\mathbb{H}$. Проверить, что отображение $\rho : \mathbb{H} \to W$, заданное на образующих алгебры кватернионов

$$\rho(1) = E, \quad \rho(i) = iS_1, \quad \rho(j) = iS_2, \quad \rho(k) = iS_3,$$

определяет изоморфизм ρ алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ и алгебры W комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$.

14.1.3. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы

1467. Показать, что матрица кососимметрического оператора в ортонормированном базисе евклидова пространства кососимметрична. Аналогично матрица A косоэрмитова оператора в ортонормированном базисе эрмитова пространства косоэрмитова, т. е. $A = -\overline{A}^{\top}$.

1468. Показать, что любой кососимметрический оператор в двумерном евклидовом пространстве представляется в виде композиции поворота плоскости на угол $\pi/2$ и гомотетии.

1469. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженном векторным произведением $[\cdot, \cdot]$, зададим оператор φ_a по формуле $\varphi_a(x) = [x, a]$, где $a \in \mathbb{R}^3$ — некоторый фиксированный вектор. Доказать, что оператор φ_a является кососимметрическим оператором.

1470. Показать, что оператор L_C левого умножения на кососимметричную (косоэрмитову) матрицу C, $L_C(X) = CX$, в евклидовом (эрмитовом) пространстве вещественных (комплексных) матриц порядка n со стандартным скалярным произведением

$$(A, B) = \operatorname{tr}(\overline{A^{\top}}B) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}$$

является кососимметрическим (косоэрмитовым).

1471. Доказать, что линейный оператор переводит каждый вектор пространства в вектор, ему ортогональный, тогда и только тогда, когда этот оператор кососимметрический.

1472. Доказать, что собственные векторы косоэрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

1473. Доказать, что ортогональное дополнение $L^{\perp}$ к инвариантному подпространству L кососимметрического (косоэрмитова) оператора $\mathbf{A}$ тоже инвариантно относительно этого оператора.

1474. Показать, что для кососимметрического оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора состоит из двумерных блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

и одномерных нулевых блоков, расположенных на главной диагонали. Матрицу оператора в этом базисе будем называть каноническим видом кососимметрического оператора, а сам базис — каноническим базисом.

1475. Показать, что кососимметрический оператор в нечетномерном евклидовом пространстве вырожден.

1476. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженном векторным произведением $[\cdot, \cdot]$, зададим оператор φ_a по формуле $\varphi_a(x) = [x, a]$, где $a \in \mathbb{R}^3$ — некоторый фиксированный вектор. Найти (не вычисляя канонического базиса) канонический вид оператора φ_a как кососимметрического оператора.

1477. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженном векторным произведением $[\cdot, \cdot]$, всякий кососимметрический оператор φ может быть представлен в виде

$$\varphi = \varphi_a(x) = [x, a],$$

где $a \in \mathbb{R}^3$ — некоторый фиксированный вектор.

1478. Показать, что корни характеристического многочлена кососимметрического оператора в евклидовом пространстве, а также собственные значения косоэрмитова оператора в эрмитовом пространстве — чисто мнимые числа (или нули).

1479. Доказать, что косоэрмитов оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве диагонализируем в некотором ортонормированном базисе. Матрицу косоэрмитова оператора в этом базисе, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} i\varphi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & i\varphi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & i\varphi_n \end{pmatrix}$$

(где по диагонали стоят чисто мнимые числа $i\varphi_k$, $\varphi_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$), мы будем называть каноническим видом косоэрмитова оператора $\mathbf{A}$, а сам базис — каноническим базисом.

1480. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис косоэрмитова оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2i & 2+i \\ -2+i & -2i \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1481. Доказать, что комплексификация $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ кососимметричного оператора $\mathbf{A}$, действующего в евклидовом пространстве V, является косоэрмитовым оператором в соответствующем эрмитовом пространстве $V_{\mathbb{C}}$ (комплексификации пространства V). Причем если оператор $\mathbf{A}$ был задан (вещественной кососимметричной) матрицей в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства V, то эта матрица будет являться и матрицей комплексификации $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ в ортонормированном базисе $e_1+i0, e_2+i0, \ldots, e_n+i0$ эрмитова пространства $V_{\mathbb{C}}$.

1482. Доказать, что в каноническом виде кососимметрического оператора $\mathbf{A}$ двумерные блоки вида $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, и векторы e_{2k-1}, e_{2k} канонического базиса, относящиеся к таким блокам, т. е. такие, что

$$\mathbf{A}(e_{2k-1}) = -ae_{2k}, \quad \mathbf{A}(e_{2k}) = ae_{2k-1},$$

могут быть найдены следующим образом.

Комплексификация $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ данного оператора имеет такую же матрицу A, что и оператор $\mathbf{A}$. Найдем характеристические числа этой матрицы A. Рассмотрим корень $\lambda = ia$. Найдем базис соответствующего собственного подпространства $V_\lambda \subset V$ и ортогонализуем его (относительно эрмитова скалярного произведения). Пусть $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_l$ — получившиеся векторы. Обозначим через x_j и y_j их действительные и мнимые части: $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Система вещественных векторов $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_l, y_l$ ортогональна, причем $|x_j| = |y_j|$, $j = 1, \ldots, l$ (в евклидовом пространстве), и оператор $\mathbf{A}$ действует на ее векторах нужным образом:

$$\mathbf{A}(x_j) = -ay_j, \quad \mathbf{A}(y_j) = ax_j, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Нормируем векторы $x'_j = x_j/|x_j|$, $y'_j = y_j/|y_j|$ и включим их в канонический базис. Каждая такая пара векторов x'_j, y'_j будет отвечать блоку вида $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ канонического вида оператора $\mathbf{A}$.

1483. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис кососимметрического оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ -7 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1484. Пусть V — пространство бесконечно дифференцируемых периодических функций с периодом 2π с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

Показать, что в этом пространстве оператор дифференцирования $\mathbf{A} = \dfrac{d}{dx}$ является кососимметрическим. Найти матрицу его ограничения $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}|_{V_{2n+1}}$ на подпространство V_{2n+1} тригонометрических многочленов в базисе

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

пространства V_{2n+1}. Найти собственные функции и собственные значения комплексификации $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbb{C}}$ оператора $\widetilde{\mathbf{A}}$.

1485. Как устроена жорданова нормальная форма косоэрмитова оператора?

1486. Можно ли так ввести скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n, где $n \geqslant 1$, чтобы оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$ стал бы кососимметрическим?

1487. Показать, что любой оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом (соответственно, эрмитовом) пространстве единственным образом представляется в виде суммы самосопряженного и кососимметрического (соответственно самосопряженного и косоэрмитова) операторов.

1488. Показать, что операция $\mathbf{A} \mapsto i\mathbf{A}$ умножения операторов в эрмитовом пространстве на мнимую единицу устанавливает изоморфизм вещественного пространства всех самосопряженных операторов и вещественного пространства косоэрмитовых операторов.

Показать также, что этот изоморфизм является и изоморфизмом евклидовых пространств, где скалярное произведение в пространствах самосопряженных и косоэрмитовых операторов задается единой формулой $(A, B) = \mathrm{tr}(A^*B)$.

1489. Доказать, что для любой кососимметрической билинейной функции в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором ее матрица имеет блочно-диагональный вид с блоками вида $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ или (0), на главной диагонали.

1490. Доказать, что для любой косоэрмитовой полуторалинейной функции в эрмитовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором ее матрица имеет диагональный вид с чисто мнимыми числами (или нулями) на диагонали.

14.1.4. Ортогональные и унитарные операторы. Группы преобразований

1491. Является ли ортогональным (соответственно, унитарным) оператором в евклидовом (соответственно, эрмитовом) пространстве:

1) ортогональное проектирование на подпространство;

2) ортогональное отражение относительно подпространства?

1492. Доказать, что любое отображение евклидова пространства на себя, сохраняющее скалярное произведение, линейно.

1493. Доказать, что если оператор $\mathbf{A}$ сохраняет длины всех векторов евклидова пространства V, т. е. $|\mathbf{A}x| = |x|$ для всех $x \in V$, то он является ортогональным оператором.

1494. Доказать, что матрица A ортогонального (унитарного) оператора, записанная в ортонормированном базисе, удовлетворяет соотношению $A^\top A = AA^\top = E$ (соответственно $\overline{A}^\top A = A\overline{A}^\top = E$), т. е. является ортогональной (соответственно, унитарной) матрицей.

1495. Показать, что оператор L_C умножения слева на произвольную ортогональную (унитарную) матрицу C, $L_C(X) = CX$, в евклидовом (соответственно, эрмитовом) пространстве вещественных (соответственно, комплексных) матриц со скалярным произведением

$$(A, B) = \mathrm{tr}(\overline{A}^\top B) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}$$

является ортогональным (унитарным).

1496. Доказать, что все ортогональные (унитарные) матрицы порядка n имеют одинаковую длину относительно стандартного скалярного произведения

$$(A, B) = \mathrm{tr}(\overline{A}^\top B) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}.$$

Найти эту длину.

1497. Доказать, что:

1) множество ортогональных (унитарных) операторов образует группу относительно операции композиции операторов;

2) множество ортогональных (унитарных) матриц образует группу относительно операции умножения матриц;

3) группы, определенные в п. 1 и 2, изоморфны. Общее их обозначение: $U(n)$ — группа унитарных операторов (матриц) пространства n-мерного эрмитова пространства, $O(n)$ — группа ортогональных операторов (матриц) n-мерного евклидова пространства.

1498. Как устроены группы $O(1)$, $U(1)$, $O(2)$?

1499. Доказать, что множество ортогональных матриц с положительным определителем образует подгруппу в полной ортогональной группе $O(n)$. Эта подгруппа обозначается через $SO(n)$.

1500. Доказать, что множество унитарных матриц с единичным определителем образует подгруппу в группе $U(n)$. Эта подгруппа обозначается через $SU(n)$.

1501. Как устроены группы $SO(1)$, $SU(1)$, $SO(2)$, $SU(2)$?

1502. Показать, что собственные значения ортогонального оператора могут быть равны только ± 1. Показать, что корни характеристического многочлена ортогонального оператора в евклидовом пространстве, а также собственные значения унитарного оператора в эрмитовом пространстве — числа, по модулю равные единице. Верно ли, что если ортогональный оператор **A** принадлежит $SO(n)$, то все его собственные значения равны 1?

1503. Доказать, что собственные векторы унитарного оператора, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.

1504. Доказать, что ортогональное дополнение $L^\perp$ к любому инвариантному подпространству L ортогонального (унитарного) оператора тоже является инвариантным подпространством для этого оператора.

1505. Показать, что для ортогонального оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора состоит из двумерных блоков вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

и одномерных блоков вида (± 1), расположенных на главной диагонали. Матрицу оператора в этом базисе будем называть *каноническим видом* ортогонального оператора, а сам базис — *каноническим базисом*.

1506. Доказать, что унитарный оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве диагонализируем в некотором ортонормированном базисе. Матрицу унитарного оператора в этом базисе, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix},$$

мы будем называть *каноническим видом* унитарного оператора $\mathbf{A}$, а сам базис — *каноническим базисом*.

1507. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

3) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$.

1508. Проверить, что матрица

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 & i & 1 \\ -1 & -i & -1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}$$

является одновременно и унитарной, и косоэрмитовой. Найти канонический вид и базис заданного ею оператора, рассматриваемого как:

1) унитарный; 2) косоэрмитов.

1509. Проверить, что матрица

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & i & -1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

является одновременно и унитарной, и эрмитовой. Найти канонический вид и соответствующий канонический базис заданного ею оператора, рассматриваемого как:

1) унитарный; 2) самосопряженный.

1510. Пусть подпространство L евклидова (соответственно, эрмитова) пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) задано своим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Доказать, что матрица A (в стандартном базисе) оператора ортогонального отражения относительно подпространства $L^\perp$ имеет вид

$$A = E - 2W(W^*W)^{-1}W^*,$$

где $W = (w_j^i)$ — матрица размера $n \times m$, в которой по столбцам записаны координаты векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$:

$$w_j^i = (e_j)^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Как будет выглядеть матрица A' оператора ортогонального отражения относительно самого подпространства L?

1511. Пусть подпространство L евклидова (соответственно, эрмитова) пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) задано своим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

Доказать, что матрица A (в стандартном базисе) оператора ортогонального проектирования на подпространство L имеет вид

$$A = W(W^*W)^{-1}W^*,$$

где $W = (w_j^i)$ — матрица размера $n \times m$, в которой по столбцам записаны координаты векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$:

$$w_j^i = (e_j)^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

1512. Доказать, что если оператор **A** является одновременно унитарным (соответственно, ортогональным) и самосопряженным, то он является оператором ортогонального отражения относительно некоторого подпространства эрмитова (соответственно, евклидова) пространства. Доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством симметричных ортогональных матриц порядка n и множеством всех подпространств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

1513. Доказать, что комплексификация $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ ортогонального оператора $\mathbf{A}$, действующего в евклидовом пространстве V, является унитарным оператором в соответствующем эрмитовом пространстве $V_{\mathbb{C}}$ (комплексификации пространства V). Причем если оператор $\mathbf{A}$ был задан (вещественной ортогональной) матрицей в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства V, то эта матрица будет являться и матрицей комплексификации $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ в ортонормированном базисе $e_1 + i0, e_2 + i0, \ldots, e_n + i0$ эрмитова пространства $V_{\mathbb{C}}$.

1514. Доказать, что в каноническом виде ортогонального оператора $\mathbf{A}$ двумерные блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

и векторы e_{2k-1}, e_{2k} канонического базиса, относящиеся к таким блокам, т. е. такие, что

$$\mathbf{A}(e_{2k-1}) = \cos\varphi\, e_{2k-1} + \sin\varphi\, e_{2k}, \quad \mathbf{A}(e_{2k}) = -\sin\varphi\, e_{2k-1} + \cos\varphi\, e_{2k},$$

могут быть найдены следующим образом.

Рассмотрим комплексификацию $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ нашего оператора. Согласно предыдущей задаче, оператор $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ имеет такую же матрицу, что и исходный оператор $\mathbf{A}$ (в базисе $e_1 + i0, e_2 + i0, \ldots, e_n + i0 \in V_{\mathbb{C}}$). Найдем характеристические числа матрицы A. Для каждого корня $\lambda = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ найдем базис соответствующего собственного подпространства $V_\lambda \subset V$ и ортогонализуем его (относительно эрмитова скалярного произведения). Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_l$ — получившиеся векторы, где x_j, y_j, $j = 1, \ldots, l$, — соответствующие действительные и мнимые части. Тогда система вещественных векторов $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_l, y_l$ ортогональна, причем $|x_j| = |y_j|$, $j = 1, \ldots, l$ (в евклидовом пространстве), а оператор $\mathbf{A}$ действует на ее векторах нужным образом:

$$\mathbf{A}(x_j) = \cos\varphi\, x_j + \sin\varphi\, y_j, \quad \mathbf{A}(y_j) = -\sin\varphi\, x_j + \cos\varphi\, y_j.$$

Нормируем векторы $x_j' = x_j/|x_j|$, $y_j' = y_j/|y_j|$ и включаем их в канонический базис. Каждая такая пара векторов x_j', y_j' отвечает блоку $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

1515. Не находя канонического ортонормированного базиса, найти канонический вид ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$1)\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix};\quad 2)\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

1516. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

$$1)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad 7)\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad 5)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix};\quad 6)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

1517. В некотором базисе e_1, e_2, e_3 пространства V оператор $\mathbf{A}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Можно ли ввести в пространстве V такое скалярное произведение, чтобы относительно него оператор $\mathbf{A}$ стал ортогональным оператором? Если да, то указать соответствующую матрицу Грама.

1518. В базисе e_1, e_2, e_3 пространства V оператор $\mathbf{A}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно ли ввести в пространстве V такое скалярное произведение, чтобы оператор $\mathbf{A}$ относительно него стал:

1) ортогональным; 2) самосопряженным?

В случае положительного ответа, указать соответствующую матрицу Грама в базисе e_1, e_2, e_3.

1519. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — косоэрмитов оператор в эрмитовом пространстве, то оператор $\exp\mathbf{A}$ является унитарным. Верно ли аналогичное утверждение в евклидовом пространстве (т. е. если $\mathbf{B}$ кососимметрический оператор, то $\exp\mathbf{B}$ — ортогональный оператор)?

1520. Найти такую кососимметричную матрицу B, что

$$\exp B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

1521. Доказать, что любой унитарный оператор представляется в виде $\exp\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — некоторый косоэрмитов оператор. Верно ли аналогичное утверждение для ортогональных операторов (т. е. любой ортогональный оператор представляется в виде $\exp\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — кососимметрический оператор)?

1522. Пусть $\mathbf{A}_{t,a}$ — оператор поворота в $\mathbb{R}^3$ вокруг некоторого единичного вектора a на угол t, а φ_a — оператор, определенный по формуле: $\varphi_a(x) = [a, x]$, где $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что $\mathbf{A}_{t,a} = \exp(t\varphi_a)$.

1523 (Формулы Кэли). Доказать, что следующие формулы устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством всех эрмитовых операторов и подмножеством множества всех унитарных операторов, не имеющих -1 среди своих собственных значений:

1) $\mathbf{U} = (\mathbf{E} + i\mathbf{F})(\mathbf{E} - i\mathbf{F})^{-1}$;

2) $\mathbf{F} = i(\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1}$,

где $\mathbf{E}$ — тождественный оператор. Более точно, доказать, что в первой формуле оператор $\mathbf{U}$ является унитарным для любого эрмитова оператора $\mathbf{F}$, причем оператор $\mathbf{U} + \mathbf{E}$ обратим, а во второй — $\mathbf{F}$ является эрмитовым оператором при любом таком унитарном операторе $\mathbf{U}$, что $\mathbf{U} + \mathbf{E}$ обратим.

1524 (Формулы Кэли, вещественный случай). Доказать, что формула:

1) $\mathbf{O} = (\mathbf{E} - \mathbf{K})(\mathbf{E} + \mathbf{K})^{-1}$ определяет ортогональный оператор (причем $\mathbf{E} + \mathbf{O}$ обратим) при произвольном кососимметрическом операторе $\mathbf{K}$;

2) $\mathbf{K} = (\mathbf{E} - \mathbf{O})(\mathbf{E} + \mathbf{O})^{-1}$ определяет кососимметрический оператор при любом таком ортогональном операторе $\mathbf{O}$, что $\mathbf{E} + \mathbf{O}$ обратим.

1525. Пусть $\mathbf{A}$ — унитарный оператор в конечномерном пространстве. Доказать, что для любого натурального n существует такой унитарный оператор $\mathbf{B}$, что $\mathbf{B}^n=\mathbf{A}$, причем его можно искать в виде $B=g(\mathbf{A})$, где g — многочлен.

1526. Доказать, что любая унитарная матрица U представляется в виде произведения вещественной ортогональной матрицы на комплексную симметричную.

1527. Представить унитарную матрицу U в виде произведения ортогональной матрицы A на комплексную симметричную матрицу T:

$$1)\ U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \\ -1 & i & -1 & i \\ -i & 1 & -i & 1 \end{pmatrix};\qquad 2)\ U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 & i & 1 \\ -1 & -i & -1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$

1528. Доказать, что для векторов x и y евклидова (унитарного) пространства такой ортогональный (унитарный) оператор $\mathbf{A}$, что $\mathbf{A}x=y$, существует тогда и только тогда, когда $|x|=|y|$.

1529. Доказать, что для пар векторов x_1, y_1 и x_2, y_2 евклидова пространства V существует ортогональный оператор $\mathbf{A}$, переводящий первую пару во вторую, $\mathbf{A}(x_1)=x_2$, $\mathbf{A}(y_1)=y_2$, тогда и только тогда, когда $|x_1|=|x_2|$, $|y_1|=|y_2|$ и угол между векторами x_1 и y_1 равен углу между x_2 и y_2.

1530. Доказать, что система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве переводится ортогональным (унитарным) оператором в систему $y_1, y_2, \ldots, y_k$ тогда и только тогда, когда матрицы Грама обеих систем совпадают:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = G(y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

1531. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве угол $\varphi(L_1, L_2)$ между двумя подпространствами L_1 и L_2 является единственным ортогональным инвариантом их взаимного расположения:

1) если $\mathbf{A}$ — ортогональный оператор, а L_1, L_2 — подпространства, то $\varphi(L_1, L_2)=\varphi(\mathbf{A}(L_1), \mathbf{A}(L_2))$;

2) если $\varphi(L_1, L_2)=\varphi(L_1', L_2')$, а $\dim L_1=\dim L_1'$, $\dim L_2=\dim L_2'$, то существует такой ортогональный оператор $\mathbf{A}'$, что $\mathbf{A}'(L_i)=L_i'$, $i=1, 2$ (пары (L_1, L_2) и (L_1', L_2') являются ортогонально конгруэнтными).

1532. В многомерном случае введенный ранее угол между подпространствами перестает быть единственным ортогональным инвариантом. Проверьте следующее.

Даны две пары подпространств:

$$L_1 = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle, \quad L_2 = \langle(1,-1,1,1),(1,1,2,-2)\rangle;$$
$$L_1' = \langle(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle, \quad L_2' = \langle(1,-1,1,-1),(1,1,1,1)\rangle.$$

Доказать, что $\varphi(L_1, L_2) = \varphi(L_1', L_2')$ (найти этот угол), но при этом не существует ортогонального оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, переводящего L_1 в L_1', а L_2 в L_2'.

1533. Доказать, что полным набором ортогональных инвариантов взаимного расположения пары пересекающихся по нулю подпространств L_1, L_2 $(L_1 \cap L_2 = \{0\})$ являются все характеристические значения λ_i, а не только максимальное $\lambda_{\max}$, пары квадратичных функций $f(x) = (x^{\|}, x^{\|})$ и $g(x) = (x, x)$, определенных на подпространстве L_1, где через $x^{\|}$ обозначена ортогональная проекция произвольного вектора $x \in L_1$ на подпространство L_2. Более точно: Даны две пары подпространств (L_1, L_2) и (L_1', L_2'), причем $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, $L_1' \cap L_2' = \{0\}$ и $\dim L_1 = \dim L_1'$, $\dim L_2 = \dim L_2'$. Пара (L_1, L_2) переводится в пару (L_1', L_2') ортогональным оператором тогда и только тогда, когда соответствующие характеристические уравнения $\det(F - \lambda G) = 0$ и $\det(F' - \lambda G') = 0$ имеют одинаковые корни, где F, G и F', G' есть матрицы квадратичных функций f, g и f', g' соответственно.

1534. Пусть $x' = Ax + b$ — изометрическое преобразование аффинного евклидова пространства. Доказать, что это преобразование имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда вектор b ортогонален к собственному линейному подпространству V_1, соответствующему собственному значению $+1$ оператора $\mathbf{A}$.

1535. Доказать, что всякое изометрическое преобразование аффинного евклидового пространства обладает либо неподвижной точкой, либо инвариантной прямой.

1536. В четырехмерном аффинном евклидовом пространстве написать формулу преобразования симметрии относительно плоскости, заданной параметрическими уравнениями

$$x_1 = 1 + t_1, \quad x_2 = 1 + t_2, \quad x_3 = t_1 - t_2, \quad x_4 = t_1 + t_2.$$

1537. В четырехмерном аффинном евклидовом пространстве написать формулу преобразования вращения на угол $\pm\arccos(4/5)$ вокруг плоскости, заданной параметрическими уравнениями

$$x_1 = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}t_1, \quad x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t_1, \quad x_3 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t_1, \quad x_4 = -1 + t_2.$$

1538. Определить геометрический смысл преобразования аффинного евклидова пространства, заданного формулой

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1539. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство V_H^0 эрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом, снабженное скалярным произведением $(A, B) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\overline{A}^\top B)$. Доказать, что линейный оператор $\mathbf{F}_U\colon V_H^0 \to V_H^0$, заданный при помощи произвольной унитарной матрицы U по формуле $\mathbf{F}_U(X) = U^* X U$, является ортогональным оператором на пространстве V_H^0.

1540. Найти такие унитарные (2×2)-матрицы $U_\varphi, U_\psi, U_\theta$ с единичным определителем, что оператор $F_U\colon V_H^0 \to V_H^0$ представляет собой соответственно:

1) вращение на угол φ вокруг

$$e_3 = S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$F_{U_\varphi}(S_1) = \cos\varphi\, S_1 + \sin\varphi\, S_2, \quad F_{U_\varphi}(S_2) = -\sin\varphi\, S_1 + \cos\varphi\, S_2;$$

2) вращение на угол ψ вокруг

$$e_1 = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3) вращение на угол θ вокруг

$$e_2 = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(в трехмерном евклидовом пространстве V_H^0 с ортонормированном базисом $e_1 = S_1$, $e_2 = S_2$, $e_3 = S_3$).

Выразить найденные матрицы U_φ, U_ψ, U_θ в виде экспонент от косоэрмитовых операторов.

1541. Доказать, что любое собственное $(\det A = 1)$ ортогональное преобразование (вращение) $\mathbf{A}$ евклидова пространства $V_H^0 = \mathbb{R}^3$ может быть представлено как оператор $\mathbf{F}_U\colon V_H^0 \to V_H^0$, где $U = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}$ —

некоторая унитарная (2×2)-матрица с единичным детерминантом. Комплексные числа a и b, $|a|^2+|b|^2=1$, называются *параметрами Кэли—Клейна* преобразования (вращения) $\mathbf{F}_U$.

1542. Доказать, что отображение $\mathbf{F}_U\colon V_H^0\to V_H^0$, построенное выше, определяет гомоморфизм групп, $F\colon SU(2)\to O(3)$, т. е. $\mathbf{F}_{U_1U_2}=$ $=\mathbf{F}_{U_1}\mathbf{F}_{U_2}$, причем:

1) ядро $\operatorname{Ker}F$ этого гомоморфизма ($\operatorname{Ker}F$ есть множество таких матриц $U\in SU(2)$, что $\mathbf{F}_U=\mathrm{Id}$ — тождественное преобразование $\mathbb{R}^3$) состоит из двух матриц: $\operatorname{Ker}F=\{E,-E\}$;

2) образ $\operatorname{Im}F$ отображения $F\colon SU(2)\to O(3)$ равен $SO(3)\subset O(3)$;

3) параметры a и b Кэли—Клейна вращения трехмерного пространства могут быть произвольными комплексными числами такими, что $|a|^2+|b|^2=1$, причем пары a_1, b_1 и a_2, b_2 определяют одно и то же преобразование $F_U\in SO(3)$ тогда и только тогда, когда $a_1=\pm a_2$, $b_1=\pm b_2$.

1543. Рассмотрим алгебру кватернионов $\mathbb{H}$ и подпространство $\mathbb{H}_0$ чисто мнимых кватернионов — линейную оболочку образующих $\langle i,j,k\rangle$.

Доказать, что для оператора $\psi_{\widetilde{q}}\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}$, определенного своим значением $\psi_{\widetilde{q}}(q)=\widetilde{q}^{-1}q\widetilde{q}$ на произвольном кватернионе q, где $|\widetilde{q}|=1$, справедливы следующие утверждения:

1) подпространство чисто мнимых кватернионов $\mathbb{H}_0$ является инвариантным подпространством: $\psi_{\widetilde{q}}(\mathbb{H}_0)\subset\mathbb{H}_0$;

2) оператор $\psi_{\widetilde{q}}$ сохраняет длину (норму) кватернионов: $|\psi_{\widetilde{q}}(q)|=$ $=|q|$ для всех $q\in\mathbb{H}$.

1544. Доказать, что множество $\mathbb{H}_1$ кватернионов единичной длины образует группу относительно операции умножения кватернионов, причем эта группа изоморфна $SU(2)$.

1545 (Параметризация Кэли—Клейна матриц вращений при помощи алгебры кватернионов $\mathbb{H}$). Доказать, что любая ортогональная (3×3)-матрица A с единичным детерминантом $\det A=1$ (т. е. любая матрица из группы $SO(3)$) имеет вид

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(ac+bd)\\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab)\\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d — такие вещественные числа, что $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Обратно, любая матрица указанного вида является матрицей из группы $SO(3)$.

14.1.5. Полярное разложение

1546. Доказать, что для произвольного невырожденного оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве существуют такие положительные самосопряженные операторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и ортогональные (унитарные) операторы $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, что имеют место полярные разложения $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_2\mathbf{P}_2$.

1547. Доказать, что операторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ в полярных разложениях $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_2\mathbf{P}_2$ (см. предыдущую задачу) определены однозначно, причем $\mathbf{U}_1=\mathbf{U}_2$.

1548. Доказать, что если $\mathbf{A}$ — невырожденный оператор, а $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{U}=\mathbf{U}\mathbf{P}_2$ — его полярные разложения, то имеет место соотношение подобия $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{U}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{U}^{-1}$.

1549. Доказать, что для произвольного оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве существуют такие неотрицательные самосопряженные операторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и ортогональный (унитарный) оператор $\mathbf{U}$, что имеют место полярные разложения $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{U}=\mathbf{U}\mathbf{P}_2$.

1550. Представить оператор $\mathbf{A}$, заданный своей матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ в некотором ортонормированном базисе, в виде произведения $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{U}$ положительного самосопряженного оператора $\mathbf{B}$ и ортогонального оператора $\mathbf{U}$.

1551. Представить данный оператор $\mathbf{A}$, заданный своей матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ в некотором ортонормированном базисе, в виде произведения $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{U}$ положительного самосопряженного оператора $\mathbf{B}$ и ортогонального оператора $\mathbf{U}$.

1552. Представить оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ в некотором ортонормированном базисе, в виде произведения $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{U}$ неотрицательного самосопряженного оператора $\mathbf{B}$ и ортогонального оператора $\mathbf{U}$. Насколько неоднозначен выбор оператора $\mathbf{U}$?

1553. Представить данный оператор $\mathbf{A}$, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

в некотором ортонормированном базисе, в виде произведения $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{U}$ неотрицательного самосопряженного оператора $\mathbf{B}$ и ортогонального оператора $\mathbf{U}$.

1554. Найти оба полярных разложения (т. е. представления $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{A} = \mathbf{U}_2\mathbf{B}_2$) оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1555. Найти полярное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{BU}$ оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

1556. Найти полярное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{BU}$ оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3+i & 1+3i \\ 3-i & 1-3i \end{pmatrix}.$$

14.1.6. Нормальные операторы

1557. Доказать, что самосопряженные, ортогональные (унитарные), кососимметрические (косоэрмитовы) операторы являются нормальными операторами.

1558. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ является нормальным тогда и только тогда, когда для любого вектора x выполнено

$$|\mathbf{A}x| = |\mathbf{A}^*x|.$$

1559. Доказать, что линейный оператор $\mathbf{A}$ тогда и только тогда является нормальным, когда в его полярном разложении $\mathbf{A} = \mathbf{BU}$, где $\mathbf{B}$ — неотрицательный самосопряженный, а $\mathbf{U}$ — унитарный (ортогональный) оператор, операторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{U}$ коммутируют.

1560. Пусть $\mathbf{A}$ — нормальный оператор, а оператор $\mathbf{B}$ коммутирует с $\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Доказать, что $\mathbf{B}$ также коммутирует с $\mathbf{A}^*$.

1561. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — нормальные операторы, а оператор $\mathbf{C}$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{AC} = \mathbf{CB}$. Доказать, что $\mathbf{A}^*\mathbf{C} = \mathbf{CB}^*$.

1562. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда в его эрмитовом разложении $\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2$ самосопряженные операторы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ (эрмитовы компоненты оператора $\mathbf{A}$) коммутируют.

1563. Доказать, что если оператор $\mathbf{A}$ нормален, то для любого скаляра λ оператор $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ также нормален.

1564. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда в его полярных разложениях $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{P}_2$ операторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ совпадают.

1565. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда существует общий канонический ортонормированный базис неотрицательного оператора $\mathbf{P}_1$ и ортогонального (унитарного) оператора $\mathbf{U}$ его полярного разложения $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{U}$. Аналогичное утверждение имеет место и для полярного разложения $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{P}_2$.

1566. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда собственные числа неотрицательного оператора $\mathbf{P}_1$ в его полярном разложении $\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{U}$ равны модулям собственных чисел $\mathbf{A}$. Аналогичное утверждение имеет место и для полярного разложения $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{P}_2$.

1567. Доказать, что собственный вектор x нормального оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве с собственным значением λ является также собственным вектором оператора $\mathbf{A}^*$ с собственным значением $\bar{\lambda}$.

1568. Доказать, что ортогональное дополнение к собственному вектору нормального оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве инвариантно относительно $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$.

1569. Доказать, что собственные векторы нормального оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

1570. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис пространства, состоящий из собственных векторов. Верно ли это утверждение в евклидовом пространстве (сравнить с задачей 1447)?

1571. Доказать, что для любого (конечного или бесконечного) множества попарно коммутирующих нормальных операторов в эрмитовом пространстве существует общий ортонормированный канонический базис.

1572. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда любой его собственный вектор является собственным и для $\mathbf{A}^*$. Верно ли это утверждение в евклидовом пространстве?

1573. Показать, что в эрмитовом пространстве инвариантные подпространства для нормального оператора $\mathbf{A}$ также инвариантны относительно $\mathbf{A}^*$.

1574. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда инвариантность подпространства W относительно $\mathbf{A}$ влечет инвариантность $W^{\perp}$ относительно $\mathbf{A}$. Верно ли это утверждение в евклидовом пространстве?

1575. Доказать, что ограничение нормального оператора на инвариантное подпространство в эрмитовом пространстве является нормальным оператором.

1576. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ является многочленом от $\mathbf{A}$.

1577. Доказать, что если W — инвариантное подпространство относительно нормального оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом пространстве, то $W^{\perp}$ также инвариантно.

1578. Доказать, что нормальный оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом (эрмитовом) пространстве является:

1) самосопряженным тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественны;

2) кососимметрическим (косоэрмитовым) тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена равны либо нулю, либо чисто мнимым комплексным числам;

3) ортогональным (унитарным) тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена равны по модулю единице.

1579. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в евклидовом пространстве является нормальным тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе он имеет блочно-диагональную матрицу, состоящую из блоков размера 1 и размера 2 вида $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$. Эта матрица называется *каноническим видом* нормального оператора, а соответствующий ортонормированный базис — *каноническим базисом* нормального оператора.

1580. Доказать, что в каноническом виде нормального оператора $\mathbf{A}$ двумерные блоки вида

$$\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R},$$

и векторы e_{2k-1}, e_{2k} канонического базиса, относящиеся к таким блокам, т. е.

$$\mathbf{A}(e_{2k-1}) = \mu e_{2k-1} + \nu e_{2k}, \quad \mathbf{A}(e_{2k}) = -\nu e_{2k-1} + \mu e_{2k},$$

могут быть найдены следующим образом.

Рассмотрим комплексификацию $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ нашего оператора. Оператор $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$ имеет такую же матрицу, что и $\mathbf{A}$. Пусть $\lambda = \mu + i\nu$ — корень характеристического многочлена этой матрицы. Найдем базис соответствующего собственного подпространства $V_\lambda \subset V$ и ортогонализуем его (относительно эрмитова скалярного произведения): пусть $z_1, z_2, \ldots, z_l$ — получившиеся векторы, где x_j, y_j — их действительные и мнимые части: $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Тогда система вещественных векторов $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_l, y_l$ ортогональна, причем $|x_j| = |y_j|$, $j = 1, \ldots, l$ (относительно евклидова скалярного произведения), а оператор $\mathbf{A}$ действует на векторах системы нужным образом: $\mathbf{A}(x_j) = \mu x_j + \nu y_j$, $\mathbf{A}(y_j) = -\nu x_j + \mu y_j$. Нормируем векторы

$$x_j' = \frac{x_j}{|x_j|}, \quad y_j' = \frac{y_j}{|y_j|}$$

и включаем их в канонический базис: каждая такая пара векторов x_j', y_j' отвечает блоку $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$.

1581. Доказать, что минимальный многочлен нормального оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве есть произведение попарно различных неприводимых сомножителей.

1582. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис нормального оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

1583. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис нормального оператора, заданного (в некотором ортонормированном базисе) матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1584. Доказать, что оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе $\mathbb{R}^3$ матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 2 & 1 \\ -2 & \lambda_0 & -2 \\ -1 & 2 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

нормален при любых вещественных значениях λ_0. Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис.

14.1.7. Операторы в евклидовых пространствах и системы линейных уравнений

1585 (Теорема Фредгольма). Неоднородная система линейных уравнений

$$Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$$

совместна тогда и только тогда, когда вектор-столбец $b \in \mathbb{R}^m$ ортогонален всем решениям однородной системы $A^\top x = 0$ с транспонированной матрицей $A^\top$.

1586. При помощи теоремы Фредгольма исследовать совместность следующих систем линейных неоднородных уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 109, \\ -x_1 + x_2 = -50, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 103; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \dfrac{13}{17}, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = \dfrac{15}{17}, \\ x_1 + x_4 = \dfrac{1}{19}. \end{cases}$

1587 (Альтернатива Фредгольма). Доказать, что либо неоднородная система линейных уравнений $Ax = b$ совместна при любой правой части b, либо однородная система $A^\top x = 0$ имеет ненулевые решения.

1588. При помощи теоремы Фредгольма исследовать совместность следующих систем линейных неоднородных уравнений при различных значениях λ:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \lambda, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 - \lambda, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 1 + 3\lambda, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 7. \end{cases}$

Обсуждая в гл. 13 метод наименьших квадратов, мы накладывали некоторое ограничение на ранг матрицы A несовместной системы линейных уравнений $Ax = b$, а именно: система столбцов матрицы A должна была быть линейно независимой. В общем же случае предлагалось выделить базис системы столбцов и применить к нему метод наименьших квадратов. При этом у исходной системы $Ax = b$ возникало целое семейство псевдорешений. Уточним теперь некоторые детали.

1589. Доказать, что множество псевдорешений системы $Ax=b$ образует аффинное подпространство (линейное многообразие)

$$P = x' + \operatorname{Ker} A$$

в $\mathbb{R}^n$ (x' — некоторое псевдорешение).

1590. Пусть $P = x' + \operatorname{Ker} A$ — аффинное подпространство псевдорешений системы $Ax=b$, а $x'' \in P$ — некоторое псевдорешение. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $x'' \perp \operatorname{Ker} A$; 2) $|x''| = \min_{x\in P} |x|$; 3) $x'' \in \operatorname{Im} A^*$.

Доказать, что существует единственный вектор x'', определенный условиями 1—3. Он называется *нормальным псевдорешением*.

Псевдорешения системы $Ax=b$ можно находить при помощи сингулярных базисов оператора $\mathbf{A}$ (см. задачу 1460).

1591. Рассмотрим систему $Ax=b$, где A — матрица оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ снабжены стандартными скалярными произведениями. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — канонический базис неотрицательного самосопряженного оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — его положительные (т. о. ненулевые) собственные значения, отвечающие собственным векторам $e_1, e_2, \ldots, e_r$ соответственно. Доказать, что общее псевдорешение x' системы $Ax=b$ имеет вид

$$x' = \frac{(\mathbf{A}^*b, e_1)}{\lambda_1}e_1 + \ldots + \frac{(\mathbf{A}^*b, e_r)}{\lambda_r}e_r + \alpha_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \alpha_n e_n,$$

причем нормальное псевдорешение

$$x'_{\text{norm}} = \frac{(\mathbf{A}^*b, e_1)}{\lambda_1}e_1 + \ldots + \frac{(\mathbf{A}^*b, e_r)}{\lambda_r}e_r.$$

Если мы имеем несовместную систему $Ax=b$ линейных неоднородных уравнений, то с точки зрения теории линейных операторов речь идет о ситуации, когда оператор $\mathbf{A}$ необратим, а вектор b не лежит в его образе $\operatorname{Im}\mathbf{A}$. С помощью скалярного произведения удается определить так называемый *псевдообратный оператор* $\mathbf{A}^+$, который будет «наилучшим образом заменять» несуществующий обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$.

1592. Дан произвольный оператор $\mathbf{A}\colon V \to W$, где V и W — евклидовы пространства размерностей n и m. Выберем в них ортогональные дополнения к ядру $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ и образу $\operatorname{Im}\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$ соответственно:

$$(\operatorname{Ker}\mathbf{A})^\perp \oplus \operatorname{Ker}\mathbf{A} = V.$$

Определим оператор

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}|_{(\operatorname{Ker}\mathbf{A})^\perp}\colon (\operatorname{Ker}\mathbf{A})^\perp \to \operatorname{Im}\mathbf{A}, \quad \widetilde{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{A}(x) \quad \forall x \in (\operatorname{Ker}\mathbf{A})^\perp.$$

Доказать, что $\widetilde{\mathbf{A}}$ — обратимый оператор. Заметим, что $\widetilde{\mathbf{A}}$ есть оператор не только с иной областью определения, но и с другой областью значений, чем у исходного оператора $\mathbf{A}$.

1593. Пусть матрица A системы уравнений определяет некоторое линейное отображение $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ можно считать евклидовыми, снабдив их соответствующими (например стандартными) скалярными произведениями. Определим псевдообратный оператор $\mathbf{A}^+$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^+(x) = \widetilde{\mathbf{A}}^{-1}(x), && x \in \operatorname{Im}\mathbf{A}, \\ &\mathbf{A}^+(x) = 0, && x \in (\operatorname{Im}\mathbf{A})^\perp, \end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}|_{(\operatorname{Ker}\mathbf{A})^\perp}$ — оператор, построенный в предыдущей задаче. Доказать, что:

1) если оператор $\mathbf{A}$ является обратимым, то $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$;

2) вектор $x' = \mathbf{A}^+ b$ представляет собой нормальное псевдорешение системы $Ax = b$.

1594. Доказать, что ядро и образ псевдообратного оператора $\mathbf{A}^+$ совпадают соответственно с ядром и образом сопряженного $\mathbf{A}^*$ оператора.

1595. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ и $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_m \in W$ — сингулярные базисы (см. задачу 1460) оператора $\mathbf{A}\colon V \to W$. Найти матрицу псевдообратного оператора $\mathbf{A}^+$ относительно этих двух базисов.

1596. Пусть $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение евклидовых пространств, заданное матрицей A. Определим отображение $\mathbf{B}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: пусть $y \in \mathbb{R}^m$, тогда значение $\mathbf{B}(y) \in \mathbb{R}^n$ определим как (единственное) нормальное псевдорешение системы $Ax = y$. Доказать, что:

1) $\mathbf{B}$ — линейный оператор;

2) $\mathbf{B}$ совпадает с псевдообратным оператором $\mathbf{A}^+$.

1597. Найти псевдообратный оператор $\mathbf{A}^+$ для оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1598. Доказать следующие свойства псевдообратных операторов:

1) $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$; 3) $(\mathbf{AA}^+)^* = \mathbf{AA}^+$, $(\mathbf{AA}^+)^2 = \mathbf{AA}^+$;

2) $(\mathbf{A}^*)^+ = (\mathbf{A}^+)^*$; 4) $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$, $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^2 = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.

1599. Пусть столбцы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ матрицы A оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}^m$ линейно независимы. Доказать, что матрица A^+ псевдообратного оператора $\mathbf{A}^+$ может быть найдена следующим образом: i-й столбец a_i^+, $i = 1, \ldots, m$, матрицы A^+ есть псевдорешение системы линейных уравнений

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i$$

(здесь e_i — i-й вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^m$), найденное методом наименьших квадратов.

1600. Найти псевдообратный оператор $\mathbf{A}^+$ для оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \to \mathbb{R}^4$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1601. Доказать, что матрица A^+ псевдообратного оператора $\mathbf{A}^+$ (определенного относительно стандартного скалярного произведения) равна нормальному псевдорешению матричного уравнения $AX = E$ (рассмотренного как неоднородная система линейных уравнений с nm неизвестными).

1602. Пусть ранг матрицы A оператора $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ равен n. Доказать, что матрица A^+ псевдообратного оператора $\mathbf{A}^+$ (определенного относительно стандартного скалярного произведения) может быть вычислена по следующей формуле:

$$A^+ = (A^\top A)^{-1} A^\top.$$

Ряд алгоритмов, созданных для решения систем линейных уравнений, основан на следующих задачах о некоторых элементарных ортогональных (унитарных) преобразованиях.

1603. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Назовем элементарным вращением $\mathbf{A}_{ij}(\varphi)$ поворот на угол φ в двумерном подпространстве с базисом e_i, e_j.

Найти матрицу оператора $\mathbf{A}_{ij}(\varphi)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Доказать, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ существует набор из $n-1$ элементарных вращений таких, что их композиция $\mathbf{A}$ переводит вектор v в вектор $|v|e_1 = (|v|, 0, \ldots, 0)$.

1604. Доказать, что любая ортогональная матрица A может быть представлена в виде произведения $N=\dfrac{n(n-1)}{2}$ матриц $A_{i_N j_N}(\varphi_N), \ldots$ $\ldots, A_{i_1 j_1}(\varphi_1)$ элементарных вращений и диагональной матрицы A_d, у которой на диагонали стоят $\{\pm 1\}$:

$$A = A_{i_N j_N}(\varphi_N)\ldots A_{i_1 j_1}(\varphi_1) A_d.$$

1605. Рассмотрим подпространство L евклидова (эрмитова) пространства $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ размерности $n-1$, заданное уравнением $(x, w) = 0$, где w — некоторый вектор $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, причем $|w| = 1$. Пусть $\mathbf{A}$ — оператор ортогонального отражения относительно L. Доказать, что матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$A = E - 2ww^*,$$

где w — столбец координат вектора w, рассмотренный как матрица размера $n \times 1$. Операторы такого вида будем называть операторами элементарного отражения.

1606. Пусть x — произвольный вектор единичной длины пространства $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Найти такой оператор отражения относительно гиперплоскости L (см. предыдущую задачу), т. е. найти такой вектор w, что

$$(E - 2ww^*)(x) = e_1.$$

Где геометрически расположено соответствующее подпространство L?

1607. Доказать, что любая унитарная (ортогональная) матрица может быть представлена в виде произведения $n-1$ матриц элементарных отражений и диагональной унитарной (ортогональной) матрицы.

1608. Придумать алгоритмы для представления произвольной вещественной квадратной матрицы A в виде произведения $A = UR$ ортогональной матрицы U на верхнетреугольную матрицу R с помощью:

1) элементарных вращений $A_{ij}(\varphi)$;

2) элементарных отражений $E - 2ww^*$.

Как с помощью такого представления $A = UR$ решать системы неоднородных линейных уравнений?

§ 14.2. Операторы в псевдоевклидовых, эрмитовых, симплектических пространствах и в пространствах с общим скалярным произведением

14.2.1. Сопряженные операторы

1609. Пусть оператор $\mathbf{A}$ в некотором базисе имеет матрицу A, а скалярное произведение — матрицу G. Найти матрицу A' сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в этом базисе. Рассмотреть случаи ортонормированных базисов в евклидовом, псевдоевклидовом, эрмитовом и псевдоэрмитовом пространствах и гамильтоновых базисов в симплектическом пространстве.

1610. Оператор $\mathbf{A}$ в гамильтоновом базисе двумерного симплектического пространства имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе.

1611. Показать, что для любого оператора $\mathbf{A}$ в пространстве со скалярным произведением $\operatorname{Im}\mathbf{A}^* = (\operatorname{Ker}\mathbf{A})^{\perp}$ и $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^* = (\operatorname{Im}\mathbf{A})^{\perp}$.

1612. Показать, что ранг композиции $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ равен размерности образа ограничения

$$\mathbf{A}\big|_{\operatorname{Im}\mathbf{A}^*}\colon \operatorname{Im}\mathbf{A}^* \to \operatorname{Im}\mathbf{A}$$

оператора $\mathbf{A}$ на подпространство $\operatorname{Im}\mathbf{A}^*$, а ранг композиции $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ равен размерности образа ограничения

$$\mathbf{A}^*\big|_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\colon \operatorname{Im}\mathbf{A} \to \operatorname{Im}\mathbf{A}^*$$

оператора $\mathbf{A}^*$ на подпространство $\operatorname{Im}\mathbf{A}$.

1613. Показать, что

$$\operatorname{Ker}\big(\mathbf{A}\big|_{\operatorname{Im}\mathbf{A}^*}\big) = \operatorname{Ker}\mathbf{A} \cap (\operatorname{Ker}\mathbf{A})^{\perp}, \quad \operatorname{Ker}\big(\mathbf{A}^*\big|_{\operatorname{Im}\mathbf{A}}\big) = \operatorname{Im}\mathbf{A} \cap (\operatorname{Im}\mathbf{A})^{\perp}.$$

1614. Построить пример пространства со скалярным произведением и оператора $\mathbf{A}$ в нем, для которого имеет место следующее соотношение рангов:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^* \neq \operatorname{rank}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}).$$

1615. Доказать, что подпространство L линейного пространства со скалярным произведением инвариантно относительно оператора $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$.

1616. Пусть операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ в пространстве со скалярным произведением имеют общий неизотропный собственный вектор x с собственными значениями λ и μ соответственно. Доказать, что $\mu = \overline{\lambda}$ (ср. с задачей 1420).

1617. Показать, что оператор π является проектором тогда и только тогда, когда таковым является сопряженный оператор π^*. При этом если π — проектирование на подпространство W_1 параллельно подпространству W_2, то π^* — проектирование на $W_2^{\perp}$ параллельно $W_1^{\perp}$.

14.2.2. Операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрические операторы)

1618. Пусть V и W — векторные пространства со скалярным произведением одинакового типа и $f\colon V \to W$ — некоторое отображение, сохраняющее скалярное произведение. Показать, что f линейно и является изоморфизмом на некоторое подпространство в W.

1619. Доказать свойства изометрических операторов:

1) изометрический оператор невырожден;

2) оператор, обратный к изометрическому, также является изометрическим;

3) произведение изометрических операторов является изометрическим оператором.

Таким образом, изометрические операторы образуют группу относительно композиции.

1620. Доказать, что определитель матрицы оператора, сохраняющего скалярное произведение, по абсолютной величине равен 1.

1621. Показать, что данное подпространство инвариантно относительно оператора, сохраняющего скалярное произведение, тогда и только тогда, когда инвариантно его ортогональное дополнение.

1622. Показать, что оператор в псевдоевклидовом или псевдоэрмитовом пространстве, сохраняющий скалярные квадраты всех векторов (т. е. сохраняющий псевдодлину векторов), является изометрическим.

1623. Пусть в псевдоевклидовом или псевдоэрмитовом пространстве заданы два таких ненулевых вектора a, b, что $(a, a) = (b, b)$. Доказать, что найдется сохраняющий скалярное произведение оператор, переводящий a в b.

1624. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$.

1625. Доказать, что матрица A является матрицей изометрического оператора в ортонормированном базисе псевдоевклидова пространства типа (p, q) тогда и только тогда, когда $A^{\top}PA = P$, где P —

диагональная матрица вида:

$$P = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}).$$

Такие матрицы A называются *псевдоортогональными*; они образуют группу относительно умножения (см. задачу 1619), обозначаемую $O(p, q)$.

1626. Доказать, что матрица A является матрицей изометрического оператора в ортонормированном базисе псевдоэрмитова пространства типа (p, q) тогда и только тогда, когда $\overline{A}^{\top} PA = P$, где P — диагональная матрица вида

$$P = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}).$$

Такие матрицы A называются *псевдоунитарными*; они образуют группу относительно умножения (см. задачу 1619), обозначаемую $U(p, q)$.

1627. Доказать, что матрица A является матрицей изометрического оператора в гамильтоновом базисе $2n$-мерного симплектического пространства тогда и только тогда, когда $A^t \Omega A = \Omega$, где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы называются *симплектическими*; они образуют группу относительно умножения (см. задачу 1619), обозначаемую $Sp(2n)$.

1628. Пусть оператор **A** в некотором базисе имеет матрицу A, а скалярное произведение — матрицу G. Найти условие на матрицу A, необходимое и достаточное для того, чтобы оператор **A** сохранял скалярное произведение.

1629. Доказать, что любая псевдоортогональная матрица типа $(1, 1)$ (см. задачу 1625) имеет вид

$$\pm\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

(параметризация Лоренца группы $O(1, 1)$).

1630. Доказать, что любая псевдоортогональная матрица типа (1, 1) (см. задачу 1625) имеет вид
$$\pm\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \pm\operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \pm\operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}.$$
(гиперболические повороты).

1631. Доказать, что оператор **A** в двумерном симплектическом пространстве является симплектическим (сохраняет скалярное произведение) тогда и только тогда, когда его определитель равен 1.

1632. Пусть оператор **A** в симплектическом пространстве в некотором гамильтоновом базисе имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, где A_i — матрицы размера $m\times m$. Доказать, что оператор **A** является симплектическим (сохраняет скалярное произведение) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:
$$A_1^\top A_3 = A_3^\top A_1, \quad A_2^\top A_4 = A_4^\top A_2, \quad A_1^\top A_4 - A_3^\top A_2 = E$$
(ср. с предыдущей задачей).

1633. Пусть V — комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(a,b)=\operatorname{Re}(a,b)+i\operatorname{Im}(a,b)$ типа (p,q) и $e_1,\ldots$ $\ldots, e_n$ — некоторый ортонормированный базис в нем. Показать, что овеществленное пространство $V_{\mathbb{R}}$ является одновременно псевдоевклидовым типа $(2p,2q)$ относительно скалярного произведения $\operatorname{Re}(a,b)$ и симплектическим относительно скалярного произведения $\operatorname{Im}(a,b)$. При этом базис $e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n$ является соответственно ортонормированным и гамильтоновым относительно введенных скалярных произведений.

1634. Доказать, что овеществление унитарного (псевдоунитарного) оператора является одновременно ортогональным (псевдоортогональным) и симплектическим оператором относительно скалярных произведений из предыдущей задачи. Таким образом, овеществленная унитарная (псевдоунитарная) матрица является одновременно ортогональной (псевдоортогональной) и симплектической.

1635. Пусть $V_{\mathbb{R}}$ — овеществление некоторого комплексного псевдоэрмитова пространства V. Доказать, что если вещественный оператор **A** в пространстве $V_{\mathbb{R}}$ сохраняет псевдоевклидово скалярное произведение $\operatorname{Re}(a,b)$ и симплектическое скалярное произведение $\operatorname{Im}(a,b)$ (см. задачу 1633), то он является овеществлением некоторого псевдоэрмитова оператора в пространстве V. Таким образом, $U(p,q)=O(2p,2q)\cap Sp(2n)$, в частности $U(n)=O(2n)\cap Sp(2n)$.

1636. Доказать, что если овеществление $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ некоторого оператора $\mathbf{A}$ в комплексном эрмитовом пространстве является ортогональным оператором относительно евклидова скалярного произведения $\mathrm{Re}(a, b)$ (см. задачу 1633), то оператор $\mathbf{A}$ является унитарным. Таким образом, $U(n) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$.

1637. Доказать, что если овеществление $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ некоторого оператора $\mathbf{A}$ в эрмитовом пространстве является симплектическим оператором относительно скалярного произведения $\mathrm{Im}(a, b)$ (см. задачу 1633), то оператор $\mathbf{A}$ является унитарным. Таким образом,

$$U(n) = GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(2n).$$

1638. Доказать, что определитель любой симплектической матрицы A (см. задачу 1627) равен 1.

1639. Показать, что оператор $\mathbf{A}$ сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда этим свойством обладает сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$.

1640. Пусть $\mathbf{A}\colon V \to W$ — линейное отображение пространств со скалярным произведением. Показать, что $\mathbf{A}$ сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathrm{Id}$ — тождественный изоморфизм (здесь $\mathbf{A}^*\colon W \to V$ — сопряженное линейное отображение; см. задачу 1426). В частности, если $\dim W = \dim V$, то $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$.

14.2.3. Самосопряженные (симметрические, эрмитовы) и кососимметрические (косоэрмитовы) операторы

1641. Пусть оператор $\mathbf{A}$ в некотором базисе имеет матрицу A, а скалярное произведение — матрицу G. Найти условие на матрицу A, необходимое и достаточное для того, чтобы оператор $\mathbf{A}$ являлся самосопряженным. Рассмотреть отдельно случаи ортонормированных базисов в евклидовом, эрмитовом, псевдоевклидовом и псевдоэрмитовом пространствах и случай гамильтонова базиса в симплектическом пространстве.

1642. Показать, что для любого отображения $\mathbf{A}\colon V \to W$ пространств со скалярными произведениями композиции $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ (см. задачу 1426) являются самосопряженными операторами в W и V соответственно.

1643. Показать, что оператор, подобный самосопряженному, не обязательно самосопряжен.

1644. Показать, что если оператор $\mathbf{U}$ изометрический, а $\mathbf{A}$ — самосопряженный, то оператор $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ также является самосопряженным (т. е. оператор, изометрически подобный самосопряженному, самосопряжен).

1645. Показать, что для любого оператора $\mathbf{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве самосопряженные операторы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ подобны. В произвольном пространстве со скалярным произведением операторы $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ подобны, если оператор $\mathbf{A}$ невырожден. Показать, что условие невырожденности в последнем утверждении существенно.

1646. Показать, что проектор π на подпространство W_1 параллельно подпространству W_2 является самосопряженным тогда и только тогда, когда подпространства W_1 и W_2 ортогональны.

1647. Показать, что собственные значения самосопряженного оператора в псевдоэрмитовом пространстве, для которых соответствующие собственные векторы неизотропны, вещественны (ср. с задачей 1616). Для изотропных собственных векторов это может быть не выполнено (привести пример).

1648. Показать, что неизотропные собственные векторы самосопряженного оператора в псевдоэрмитовом пространстве, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Для изотропных собственных векторов это может быть не выполнено (привести пример).

1649. Верно ли, что в псевдоэрмитовом пространстве самосопряженный оператор имеет ортонормированный базис из собственных векторов?

1650. Пусть $\mathbf{A}$ — самосопряженный оператор в произвольном пространстве со скалярным произведением, а V — инвариантное подпространство относительно $\mathbf{A}$. Доказать, что ортогональное дополнение $V^{\perp}$ также инвариантно (ср. с задачей 1615).

1651. Показать, что для самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ в произвольном пространстве со скалярным произведением выполнено $\operatorname{Im}\mathbf{A} = (\operatorname{Ker}\mathbf{A})^{\perp}$ и $\operatorname{Ker}\mathbf{A} = (\operatorname{Im}\mathbf{A})^{\perp}$.

1652. Построить пример самосопряженного оператора в псевдоевклидовом пространстве, все корни характеристического многочлена которого вещественны, но который при этом не диагонализируем.

1653. Показать, что самосопряженный оператор, сохраняющий скалярное произведение, диагонализируем в некотором ортонормированном базисе с числами 1 и -1 на диагонали.

1654. Показать, что самосопряженный оператор $\mathbf{A}$, для которого $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$ — тождественный оператор, сохраняет скалярное произведение.

1655. Показать, что если оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, сохраняет скалярное произведение, то он самосопряжен.

1656. Показать, что определитель матрицы самосопряженного оператора в псевдоэрмитовом (в частности, эрмитовом) пространстве — вещественное число.

1657. Показать, что определитель матрицы косоэрмитова оператора, действующего в псевдоэрмитовом пространстве размерности n, есть чисто мнимое число (или 0), если n — нечетно, и действительное число, если n — четно.

1658. Сопоставление оператору $\mathbf{A}$ функции $\varphi(x, y) = (x, \mathbf{A}y)$ устанавливает изоморфизм пространства операторов пространству билинейных (или полуторалинейных) функций. Показать, что при этом изоморфизме:

1) самосопряженным операторам в евклидовом (эрмитовом) пространстве соответствуют симметрические (эрмитовы) функции;

2) кососимметрическим (косоэрмитовым) операторам в евклидовом (эрмитовом) пространстве соответствуют кососимметрические (косоэрмитовы) функции;

3) самосопряженным (кососимметрическим) операторам в симплектическом пространстве соответствуют кососимметрические (симметрические) билинейные функции.

1659. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ в симплектическом пространстве является самосопряженным тогда и только тогда, когда для любого вектора x векторы $\mathbf{A}x$ и x ортогональны.

Глава 15

Квадратичные функции и поверхности второго порядка

§15.1. Квадратичные функции в евклидовом пространстве

Каноническим базисом квадратичной функции f, заданной в некотором евклидовом пространстве V, называется такой ортонормированный базис, в котором $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x^i)^2$ (т. е. не содержит произведений координат). Указанный вид называется *каноническим видом* этой квадратичной функции.

1660. Доказать, что канонический вид квадратичной функции в евклидовом пространстве определен однозначно с точностью до перестановки коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Показать, что эти коэффициенты могут быть найдены как характеристические числа матрицы данной квадратичной функции, записанной в произвольном ортонормированном базисе.

1661. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие квадратичные функции к каноническому виду, и указать этот канонический вид:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

2) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

3) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

4) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

5) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

6) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 - 4\sqrt{2}x_2x_3$;

7) $5x_1^2 - 7x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

8) $5x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 3\sqrt{6}x_1x_3 - 3\sqrt{6}x_2x_3$;

9) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$;

10) $x_2^2 + 5x_3^2 + 3x_4^2 - 12x_1x_3 + 12x_1x_4 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4$;

11) $3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_5^2 + x_6^2 + 8x_1x_2 - 6x_3x_4 + 4x_5x_6$.

1662. Пусть U — ортогональный оператор в евклидовом пространстве V. Определим квадратичную функцию равенством $f(x) =$

$= (x, Ux)$. Показать, что канонический базис оператора U является одновременно каноническим базисом квадратичной функции f. Найти канонический вид f, зная канонический вид оператора U.

1663. Ортогональным преобразованием привести квадратичную функцию $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$ к каноническому виду (с нахождением канонического базиса).

1664. Пусть даны две квадратичные функции f и g. Они называются *ортогонально эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования координат. Доказать, что функции f и g ортогонально эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают характеристические многочлены их матриц.

1665. Пусть f и g — пара квадратичных функций от одних и тех же переменных, причем g положительно определена. Выберем произвольное линейное преобразование, приводящее функцию g к нормальному виду, а функцию f — к каноническому:

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Доказать, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с точностью до перестановки определяются однозначно, т. е. не зависят от выбора линейного преобразования. Доказать, что эти числа являются корнями так называемого λ-уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$, где A и B — матрицы функций f и g соответственно.

1666. Пусть f и g — пара квадратичных функций от одних и тех же переменных, A и B — их матрицы. Доказать, что множество корней уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$ не меняется при невырожденных линейных преобразованиях переменных.

1667. Доказать, что если к положительно определенной квадратичной функции f прибавить квадрат ненулевой линейной функции от тех же переменных, то определитель матрицы функции f увеличится.

1668. Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

— положительно определенная квадратичная функция и

$$g(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказать, что для определителей матриц этих функций выполнено неравенство $D_f \leqslant a_{11} D_g$.

1669. Для данной пары квадратичных функций выяснить, какая из них является положительно определенной, и найти преобразование координат, приводящее эту функцию к нормальному, а другую — к каноническому виду; указать этот канонический вид:

1) $f = x_1^2 + 6x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3,$
$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3;$

2) $f = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2x_3,$
$g = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3;$

3) $f = 5x_1^2 + 27x_2^2 + 35x_3^2 + 20x_1x_2 - 14x_1x_3 - 52x_2x_3,$
$g = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 8x_2x_3;$

4) $f = 15x_2^2 - 15x_3^2 - 36x_1x_2 - 60x_1x_3 + 16x_2x_3,$
$g = 9x_1^2 + 13x_2^2 + 14x_3^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3;$

5) $f = 7x_1^2 + 17x_2^2 + 27x_3^2 + 18x_1x_2 - 24x_1x_3 - 24x_2x_3,$
$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$

6) $f = 4x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_3^2 + 12x_4^4 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 - 14x_2x_3 - 10x_2x_4 + 16x_3x_4,$
$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4;$

7) $f = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{5}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{5}{2}x_4^4 + 2x_1x_2 + 5x_1x_3 - 12x_1x_4 - 10x_2x_3 + 33x_2x_4 - 16x_3x_4,$
$g = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_4;$

8) $f = -x_1^2 - 6x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 10x_3x_4,$
$g = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_3x_4.$

1670. Пусть f и g — две положительно определенные квадратичные функции от одних и тех же переменных. Пусть одно невырожденное линейное преобразование переменных приводит функцию f к виду $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, а функцию g — к нормальному виду, а другое невырожденное линейное преобразование приводит функцию f к нормальному виду, а функцию g — к виду $g = \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i^2$. Найти связь между коэффициентами λ_i и μ_i.

1671. Доказать, что следующие пары квадратичных функций нельзя привести к диагональному виду одним вещественным невырожденным линейным преобразованием:

1) $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2,\quad g = x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2;$

2) $f = 2x_1x_2 - x_2^2,\qquad g = x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2.$

1672. Доказать, что для двух пар квадратичных функций f_1, g_1 и f_2, g_2, где g_1 и g_2 положительно определены, невырожденное линейное преобразование, одновременно переводящее f_1 в f_2 и g_1 в g_2, существует тогда и только тогда, когда корни уравнений

$$\det(A_1-\lambda B_1)=0 \quad \text{и} \quad \det(A_2-\lambda B_2)=0$$

совпадают.

1673. Существует ли невырожденное линейное преобразование, одновременно переводящее пару квадратичных функций f_1, g_1 в пару f_2, g_2:

1) $f_1=-x_1^2-6x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$,
$g_1=x_1^2+6x_1x_2-2x_1x_3+13x_2^2-10x_2x_3+3x_3^2$,
$f_2=10x_1^2+12x_1x_2+12x_1x_3+30x_2^2+12x_2x_3+3x_3^2$,
$g_2=9x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+13x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$;

2) $f_1=3x_1^2+6x_1x_2-18x_1x_3+12x_2^2-24x_2x_3+28x_3^2$,
$g_1=x_1^2+2x_1x_2-6x_1x_3+10x_2^2-12x_2x_3+14x_3^2$,
$f_2=4x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$,
$g_2=6x_1^2-12x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2-4x_2x_3+x_3^2$;

3) $f_1=3x_1^2+6x_1x_2+12x_2^2-6x_2x_3+9x_3^2$,
$g_1=x_1^2+2x_1x_2+10x_2^2-6x_2x_3+5x_3^2$,
$f_2=5x_1^2-12x_1x_2+4x_1x_3+12x_2^2-8x_2x_3+2x_3^2$,
$g_2=3x_1^2-8x_1x_2+2x_1x_3+8x_2^2-4x_2x_3+x_3^2$?

1674. Пусть f — квадратичная функция в евклидовом пространстве V, A — ее матрица в некотором ортонормированном базисе, $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\lambda_n$ — упорядоченные собственные значения матрицы A, $L\subset V$ — линейное подпространство коразмерности один. Рассмотрим новую квадратичную функцию g, являющуюся ограничением функции f на L. Пусть $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\ldots\leqslant\mu_{n-1}$ — упорядоченные собственные значения матрицы квадратичной функции g в некотором ортонормированном базисе пространства L. Доказать, что

$$\lambda_1\leqslant\mu_1\leqslant\lambda_2\leqslant\mu_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\mu_{n-1}\leqslant\lambda_n.$$

1675. Пусть f — квадратичная форма на евклидовом пространстве V. Определим для каждых двух ортогональных векторов $a, b\in V$ функцию $\varphi_{a,b}(t)=f(a\cos t+b\sin t)$. Доказать, что направление вектора a является главным направлением формы f тогда и только тогда, когда для любого вектора b, ортогонального вектору a, выполнено $\left.\dfrac{d\varphi_{a,b}}{dt}\right|_{t=0}=0$.

§ 15.2. Поверхности второго порядка

1676. Пусть $f_2(x)+2f_1(x)+f_0=0$ — общее уравнение поверхности второго порядка в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, где f_2 и f_1 — квадратичная и линейная функции соответственно, а f_0 — число, и пусть $r \geqslant 1$ — ранг квадратичной функции f_2. Доказать, что следующий список уравнений дает аффинную классификацию поверхностей второго порядка в $\mathbb{R}^n$.

I. $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_r^2=1$, $0 \leqslant k \leqslant r$.

При $k=r=n$ поверхность называется действительным $(n-1)$-мерным эллипсоидом; при $k=0$, $r=n$ — мнимым $(n-1)$-мерным эллипсоидом; при $0<k<r=n$ называется $(n-1)$-мерным гиперболоидом; при $r<n$ — цилиндром над соответствующей $(r-1)$-мерной поверхностью.

II. $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_r^2=0$, $k \geqslant \dfrac{r}{2}$ при четном r и $k \geqslant \dfrac{r+1}{2}$ при нечетном r.

При $k<r=n$ поверхность называется действительным $(n-1)$-мерным конусом; при $r<n$ — цилиндром над $(r-1)$-мерным конусом или конической поверхностью.

III. $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_r^2=2x_{r+1}$, $k \geqslant \dfrac{r}{2}$ при четном $r<n$ и $k \geqslant \dfrac{r+1}{2}$ при нечетном $r<n$.

При $r=n-1$ поверхность называется $(n-1)$-мерным параболоидом; при $r<n-1$ — цилиндром над соответствующим $(r-1)$-мерным параболоидом.

1677. Определить аффинный тип сечения поверхности

$$x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_1-2x_3-2x_4+1=0$$

плоскостью $x_1+x_2+x_3+x_4-1=0$.

1678. Найти каноническое уравнение и каноническую систему координат для поверхности:

1) $2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4-2x_2-4x_3-{}$ $-6x_4+5=0$;

2) $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+3x_4^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3-2x_2x_4-{}$ $-2x_3x_4+8x_1-8x_2=0$;

3) $4x_1x_2+4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3+4x_2x_4+4x_3x_4+3x_4^2+14x_4+{}$ $+11=0$,

заданной относительно ортонормированного базиса.

1679. Определить аффинный тип сечения поверхности

$$x_1^2+x_2^2-2x_4^2+4x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_4-2x_3x_4=0$$

плоскостью $x_2+x_3+x_4-1=0$.

1680. Найти максимальную размерность плоскости, содержащейся в поверхности второго порядка, заданной в n-мерном аффинном пространстве, если эта поверхность является:

1) конусом $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n$;

2) гиперболоидом $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2=1,\quad 1\leqslant k\leqslant n$;

3) параболоидом $x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_{n-1}^2=2x_n,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1$.

1681. Найти все прямолинейные образующие поверхности $x_1^2+x_2^2-x_3^2=2x_4$, проходящие через точку $(1, 1, 1, 1/2)$.

1682. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ — две квадратичные функции, хотя бы одна из которых положительно определена. Доказать, что поверхности $f=1$ и $g=1$ не пересекаются тогда и только тогда, когда функция $f-g$ является знакоопределенной.

Глава 16

Тензоры

Пусть $C_{e\to e'}$ — матрица перехода от базиса $e=(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $e'=(e'_1, \ldots, e'_n)$ в n-мерном пространстве V, так что $e'_k=(C_{e\to e'})^j_k e_j$ (здесь и далее во всех формулах подразумевается суммирование по повторяющимся вверху и внизу индексам в пределах от 1 до размерности пространства V).

Тензором типа (p, q) на пространстве V размерности n называется соответствие T, сопоставляющее каждому базису $e=(e_1, \ldots, e_n)$ набор из n^{p+q} чисел $(T^e)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ (называемых *компонентами* или *координатами* тензора T в данном базисе), зависящих от p верхних и q нижних индексов, каждый из которых принимает значения от 1 до n, причем для разных базисов они связаны соотношениями, называемыми *тензорным законом изменения*,

$$(T^{e'})^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = D^{i_1}_{k_1}\ldots D^{i_p}_{k_p} C^{m_1}_{j_1}\ldots C^{m_q}_{j_q} (T^e)^{k_1\ldots k_p}_{m_1\ldots m_q},$$

где для краткости мы обозначили $C=C_{e\to e'}$ и $D=C_{e'\to e}$. Тензоры типа (p, q) образуют линейное пространство $\mathbf{T}^p_q(V)$ относительно операций покомпонентного сложения и умножения на скаляры. Число $p+q$ называется *валентностью* тензора. Имея дело с базисами e, e', e'' и т. д., мы будем писать T, T', T'', ... вместо T^e, $T^{e'}$, $T^{e''}$, ... Пространство

$$\mathbf{T}(V) = \bigoplus_{p,q\geqslant 0} \mathbf{T}^p_q(V)$$

несет структуру ассоциативной алгебры относительно операции тензорного умножения

$$\mathbf{T}^p_q \times \mathbf{T}^r_s \to \mathbf{T}^{p+r}_{q+s}, \quad (T, S) \mapsto T\otimes S, \quad (T\otimes S)^{i_1\ldots i_{p+r}}_{j_1\ldots j_{q+s}} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\cdot S^{i_{p+1}\ldots i_{p+r}}_{j_{q+1}\ldots j_{q+s}}.$$

Сверткой тензора $T\in\mathbf{T}^p_q$ *по паре индексов* (r, s) называется тензор ${}^r_sT\in\mathbf{T}^{p-1}_{q-1}$, определяемый формулой

$$({}^r_sT)^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}} = T^{i_1\ldots i_{r-1}k\, i_{r+1}\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{s-1}k\, j_{s+1}\ldots j_{q-1}},$$

где подразумевается суммирование по k.

Полилинейной функцией типа (p,q) *на* V называется отображение

$$F\colon \underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{p}\times\underbrace{V\times\ldots\times V}_{q}\to\Bbbk,$$

линейное над полем скаляров $\Bbbk$ по каждому аргументу (при фиксированных остальных). Пространство полилинейных функций типа (p,q) обозначим через $\mathbf{P}^p_q(V)$. Имеют место взаимно обратные линейные изоморфизмы

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^p_q\to\mathbf{T}^p_q,\quad F\mapsto T_F,\quad (T_F)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}&:=F(e^{i_1},\ldots,e^{i_p},e_{j_1},\ldots,e_{j_q}),\\ \mathbf{T}^p_q\to\mathbf{P}^p_q,\quad T\mapsto F_T,\quad F_T(a_{i_1}e^{i_1},\ldots,a_{i_p}e^{i_p},v^{j_1}e_{j_1},\ldots,v^{j_q}e_{j_q})&:=\\ &=a_{i_1}\ldots a_{i_p}v^{j_1}\ldots v^{j_q}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\end{aligned}$$

позволяющие отождествлять пространство $\mathbf{P}^p_q$ с пространством тензоров $\mathbf{T}^p_q$.

Пусть g_{ij} — матрица скалярного произведения в V, а g^{ij} — обратная матрица, рассматриваемые как тензоры типа $(0,2)$ и $(2,0)$ соответственно (см. задачи ниже). Операции *поднятия* и *опускания индекса* у тензора $T\in\mathbf{T}^p_q$ задают отображения $\mathbf{T}^p_q\to\mathbf{T}^{p+1}_{q-1}$ и $\mathbf{T}^p_q\to\mathbf{T}^{p-1}_{q+1}$ соответственно по формулам (результат традиционно обозначается тем же символом):

$$T^{i_1\ldots i_{p+1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}=g^{i_1k}T^{i_2\ldots i_{p+1}}_{k\,j_1\ldots j_{q-1}},\qquad T^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q+1}}=g_{j_1k}T^{k\,i_1\ldots i_{p-1}}_{j_2\ldots j_{q+1}}.$$

Приведенные формулы для поднятия и опускания первого индекса выписываются аналогично и для других индексов.

Пусть S_p — симметрическая группа (группа перестановок p элементов), $\Bbbk$ — поле характеристики нуль. Рассмотрим линейные отображения *симметрирования* и *альтернирования*:

$$\mathrm{Sym}\colon\mathbf{T}^p_0\to\mathbf{T}^p_0,\quad (\mathrm{Sym}(T))^{i_1\ldots i_p}=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}T^{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}},$$

$$\mathrm{Alt}\colon\mathbf{T}^p_0\to\mathbf{T}^p_0,\quad (\mathrm{Alt}(T))^{i_1\ldots i_p}=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^\sigma T^{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(p)}},$$

где $(-1)^\sigma$ равно знаку (четности) перестановки. Аналогичные отображения определены для пространства $\mathbf{T}^0_q$. Тензоры, неподвижные относительно этих отображений, называются симметрическими или кососимметрическими соответственно. Эти тензоры образуют линейные пространства: $\mathbf{S}^p(V)=\mathrm{Sym}(\mathbf{T}^p_0)$ — *симметрических тензоров типа* $(p,0)$, $\Lambda^p(V)=\mathrm{Alt}(\mathbf{T}^p_0)$ — *кососимметрических тензоров* типа

$(p, 0)$, называемых также *p-векторами*, и $\Omega_q(V) = \mathrm{Alt}(\mathbf{T}_q^0)$ — *кососимметрических тензоров типа* $(0, q)$, называемых также *внешними q-формами* (2-векторы обычно называют бивекторами). Пусть

$$\mathbf{S}(V) = \bigoplus_{p\geqslant 0} \mathbf{S}^p(V), \quad \Lambda(V) = \bigoplus_{p\geqslant 1} \Lambda^p(V), \quad \Omega(V) = \bigoplus_{p\geqslant 1} \Omega_q(V).$$

На симметрических (кососимметрических) тензорах определена операция симметрического (соответственно, внешнего) умножения

$$S \bullet T = \mathrm{Sym}(S \otimes T)$$

(соответственно $S \wedge T = \dfrac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(S \otimes T)$ для (кососимметрических) тензоров валентностей k и l).

В n-мерном пространстве V рассмотрим соответствие, сопоставляющее каждому базису e набор чисел $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = (-1)^\sigma$, если $(i_1, \ldots, i_n) = \sigma(1, \ldots, n)$, $\sigma \in S_n$, и $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = 0$, если среди $i_1, \ldots, i_n$ имеются повторения. В ориентированном евклидовом пространстве V рассмотрим соответствие, сопоставляющее каждому базису e набор чисел

$$\mathbf{v}_{i_1\ldots i_n} = \mathrm{or}(e)\sqrt{\det\|g_{ij}\|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n},$$

где $\mathrm{or}(e) = 1$, если базис e положительно ориентирован и $\mathrm{or}(e) = -1$, если базис e отрицательно ориентирован. Это соответствие определяет кососимметрический тензор типа $(0, n)$, называемый дискриминантным, или элементом объема. Аналогично определяются $\varepsilon^{i_1\ldots i_n}$ и $\mathbf{v}^{i_1\ldots i_n}$, если в формуле вместо g_{ij} взять g^{ij}.

Ориентированным объемом параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, \ldots, v_n$ пространства $\mathbb{R}^n$, относительно базиса e называется число, по абсолютной величине равное объему и взятое со знаком «+», если ориентации наборов (e_i) и (v_i) одинаковы, и «−» — в противоположном случае.

Тензорным произведением линейных пространств V и W называется факторпространство пространства формальных линейных комбинаций упорядоченных пар $v \circ w$, $v \in V$, $w \in W$, по подпространству, порожденному элементами:

1) $(kv) \circ w - v \circ (kw)$, $k(v \circ w) - v \circ (kw)$, $k \in \Bbbk$,
2) $(v + v') \circ w - v \circ w - v' \circ w$, $v \circ (w + w') - v \circ w - v \circ w'$.

Полученное линейное пространство (относительно операций на представителях) обозначается через $V \otimes W$, а класс эквивалентности элемента $v \circ w$ — через $v \otimes w$. Если $f \colon V \to V'$ и $g \colon W \to W'$ суть линейные отображения, то формула $(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v) \otimes g(w)$ определяет линейное отображение $f \otimes g \colon V \otimes W \to V' \otimes W'$.

§ 16.1. Основные понятия

1683. Тензор типа $(1, 0)$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ компоненты (i_0 — фиксированное число, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$)

$$a^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_0, \\ 0, & \text{если } i \neq i_0. \end{cases}$$

Найти компоненты этого тензора в новом базисе $e'_1, \ldots, e'_n$, если известна матрица перехода $C = (c^i_j)$ от старого базиса к новому.

1684. Тензор типа $(0, 1)$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ компоненты (i_0 — фиксированное число, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$)

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_0, \\ 0, & \text{если } i \neq i_0. \end{cases}$$

Найти компоненты этого тензора в новом базисе $e'_1, \ldots, e'_n$, если известна матрица перехода $C = (c^i_j)$ от старого базиса к новому.

1685. Проверить, что вектор (соответственно ковектор (линейная функция), линейный оператор, билинейная форма) на V определяет тензор типа $(1, 0)$ (соответственно $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$).

1686. Убедиться, что определенные выше отображения пространств тензоров $\mathbf{T}^p_q$ и полилинейных функций $\mathbf{P}^p_q$ корректно заданы, линейны и биективны. Как запишется операция $\otimes$ в терминах $\mathbf{P}^p_q$?

1687. Проверить, что тензорное произведение и свертка — корректно определенные тензорные операции.

1688. Показать, что сопоставление символа Кронекера δ^i_j любому базису задает тензор типа $(1, 1)$. Какой линейный оператор и какая полилинейная функция соответствуют ему?

1689. Показать, что $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ не является тензором.

1690. Пусть $v \in V$, $\varphi \in V^*$. Найти образ оператора, соответствующего тензору $v \otimes \varphi$, в пространстве V.

1691. Зафиксируем базис e_1, e_2, e_3 в V и определим тензор $A = e^1 \otimes e_2 - e^2 \otimes e_3 + e^3 \otimes e_1 \in \mathbf{T}^1_1$ и трилинейное отображение $F \in \mathbf{P}^0_3$, $F(v_1, v_2, v_3) = \det \|v^i_j\|$, где v^i_j — i-я координата вектора v_j в указанном базисе. Вычислить $(A \otimes T_F)^1_{2133}$ и $(T_F \otimes A)^1_{2133}$.

1692. Пусть в базисе e_1, e_2, e_3 компоненты тензора $T \in \mathbf{T}^2_3(V)$ определены как $T^{ij}_{ksm} = 2i$. Найти $(T')^{12}_{223}$, если $e'_i = \sum\limits_{j \leqslant i} (i - j + 1) e_j$.

1693. Показать, что тензор типа $(1, 1)$, инвариантный относительно всех ортогональных замен координат в $\mathbb{R}^n$, пропорционален тензору δ^i_j.

1694. Показать, что тензор третьей валентности, инвариантный относительно произвольных замен координат, равен нулю.

1695. Найти общий вид тензора четвертой валентности, инвариантного относительно произвольной замены координат. Рассмотреть различные случаи (p, q), $p+q=4$.

1696. Выразить след оператора $\mathbf{A}$ в виде результата тензорных операций.

1697. Выразить детерминант матрицы оператора в виде результата тензорных операций.

1698. Пусть A — линейный оператор. Найти выражения для величин A^i_i, $A^i_j A^j_i$, $A^i_j A^j_k A^k_i$ через корни и коэффициенты характеристического многочлена $\det(A-\lambda E)$.

1699. Рассмотрим полилинейную функцию $F\in\mathbf{P}^n_n(V)$, $\dim V=n$, заданную формулой

$$F(\varphi^1, \ldots, \varphi^n, v_1, \ldots, v_n) = \det\|\varphi^j(v_i)\|, \quad v_i \in V, \quad \varphi^j \in V^*.$$

Для данного базиса $e_1, \ldots, e_n$ найти компоненты T_F.

1700. Пусть $\varphi\in\mathbf{P}^p_q$. Показать, что значение φ на конкретном наборе ковекторных аргументов ξ^j и векторных аргументов v_i, т. е. $\varphi(\xi^1, \ldots, \xi^p, v_1, \ldots, v_q)$, совпадает с $(p+q)$-кратной сверткой тензора $T_\varphi \otimes \xi^1 \otimes \ldots \otimes \xi^p \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_q$ типа $(p+q, p+q)$.

1701. Пусть $\mathbb{R}_n[x]$ — пространство всех многочленов степени не выше n от переменной x с вещественными коэффициентами. Убедиться, что отображение $l\colon \mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}$, заданное каждым из следующих способов:

1) $l(p):=p(0)$, $p\in\mathbb{R}_n[x]$, 2) $l(p):=\int\limits_0^1 p(x)\,dx$, $p\in\mathbb{R}_n[x]$,

3) $l(p):=\int\limits_0^1 p(x)\,dx+p(0)$, $p\in\mathbb{R}_n[x]$,

определяет ковектор. Пусть

$$q = 1+x+x^2+\ldots+x^n,$$

а $d=\frac{d}{dx}\in\mathbf{T}^1_1(\mathbb{R}_n[x])$ — оператор дифференцирования. Найти в этих трех случаях $F_d(l, q)$ (значение соответствующей полилинейной функции).

§ 16.2. Тензорные произведения пространств

1702. Проверить, что $V\otimes W$ является линейным пространством.

1703. Пусть $\Bbbk[x]$ — пространство всех многочленов от переменной x с коэффициентами в поле $\Bbbk$, а $\Bbbk[x, y]$ — пространство многочленов от x и y. Доказать, что соответствие $f\otimes g \mapsto fg$ задает линейный изоморфизм $\Bbbk[x]\otimes\Bbbk[y]\to\Bbbk[x,y]$.

1704. Пусть $\Bbbk_n[x]$ — пространство всех многочленов степени не выше n от переменной x с коэффициентами в поле $\Bbbk$, а $\Bbbk_{n,m}[x,y]$ — пространство многочленов от x и y, степени не выше n по x и не выше m по y. Доказать, что соответствие $f\otimes g\mapsto fg$ задает линейный изоморфизм $\Bbbk_n[x]\otimes\Bbbk_m[y]\to\Bbbk_{n,m}[x,y]$.

1705. Доказать ассоциативность и коммутативность (с точностью до естественных изоморфизмов) операции тензорного произведения пространств.

1706. Установить естественный изоморфизм

$$\mathbf{T}^p_q(V)\cong \underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q}.$$

1707. Рассмотрим $F\in\mathbf{P}^{p+p'}_{q+q'}$. Доказать, что отображение

$$\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{q}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{p}\to\mathbf{P}^{p'}_{q'},$$

$$(v_1\otimes\ldots\otimes v_q\otimes a^1\otimes\ldots\otimes a^p)\mapsto\widehat{F}[v_1,\ldots v_q,a^1\ldots,a^p],$$

$$\widehat{F}[v_1,\ldots,v_q,a^1,\ldots,a^p](a^{p+1},\ldots,a^{p+p'},v_{q+1},\ldots v_{q+q'})=$$
$$=F(a^1,\ldots,a^{p+p'},v_1,\ldots v_{q+q'})$$

определяет линейное отображение $\widetilde{F}:\mathbf{P}^q_p\to\mathbf{P}^{p'}_{q'}$.

1708. Пусть $\dim V=n$, $\dim W=m$, а $e_1,\ldots,e_n$ и $f_1,\ldots,f_m$ — некоторые базисы пространств V и W. Доказать, что $\dim(V\otimes W)=n\cdot m$, а в качестве базиса можно выбрать $e_i\otimes f_j$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$.

1709. Пусть имеются разложения пространств в прямые суммы: $V=\bigoplus_i V_i$, $W=\bigoplus_j W_j$. Доказать, что $V\otimes W\cong\bigoplus_{i,j}V_i\otimes W_j$ (после естественного отождествления).

1710. В частном случае изоморфизм тензорного произведения и пространства тензоров (см. задачу 1706) превращается в канонический изоморфизм $\tau: V^*\otimes V\to\mathscr{L}(V)$, где $\mathscr{L}(V)$ — пространство линейных операторов. Вычислить (предварительно обосновав независимость от размерности):

1) $\tau(e^1\otimes e_3+2\,e^2\otimes e_4)(e_1+2\,e_2-3\,e_3)$;
2) $\tau((e^1+2\,e^7)\otimes e_2-4\,e^3\otimes e_4)(e_1+e_2+e_3-e_7)$;
3) $\tau(e^2\otimes(e_3-2\,e_4)+3\,e^4\otimes e_2)(e_1+e_2-e_3-e_4)$.

1711. В обозначениях предыдущей задачи найти при $\dim V = 4$

$$\tau^{-1}(\tau(e^1 \otimes e_3 - 2e^2 \otimes e_4) \circ \tau(e^2 \otimes (e_3 - e_4) + 2e^4 \otimes e_2) - 2\,\mathrm{Id}),$$

где $\circ$ обозначает композицию отображений.

1712. Пусть $V = \mathbb{R}_n[x]$ — пространство всех многочленов степени не выше n от переменной x с вещественными коэффициентами, а функция $l\colon V \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$l(p) = \int_0^1 p(x)\,dx + p(0), \quad p \in \mathbb{R}_n[x],$$

определяет ковектор. Рассмотрим также многочлены $r = 1 - x + x^2$ и $q = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Найти $\tau(l \otimes r)(q)$.

1713. Показать, что $f \otimes g$, определенное в теоретической части, — корректно заданное линейное отображение.

1714. Будем обозначать $V^{\otimes p} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p}$ и $f^{\otimes p} = \underbrace{f \otimes \ldots \otimes f}_{p}$, где f — линейное отображение. Доказать, что $\operatorname{rank}(f^{\otimes p}) = (\operatorname{rank}(f))^p$. В частности, тензорная степень обратимого оператора обратима.

1715. Для операторов в пространстве V доказать формулы:

1) $(f \circ g)^{\otimes p} = f^{\otimes p} \circ g^{\otimes p}$;
2) $(\mathrm{Id}_V)^{\otimes p} = \mathrm{Id}_{V^{\otimes p}}$;
3) для обратимого f имеем $(f^{\otimes p})^{-1} = (f^{-1})^{\otimes p}$;
4) $(c \cdot f)^{\otimes p} = c^p \cdot f^{\otimes p}$, где $c \in \mathbb{k}$.

Здесь $\circ$ обозначает композицию отображений.

1716. Доказать, что $\operatorname{tr}(f^{\otimes p}) = (\operatorname{tr}(f))^p$, где f — линейный оператор.

1717. Пусть $e_1, \ldots, e_p$ — (не обязательно различные) собственные векторы оператора $f\colon V \to V$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ соответственно. Доказать, что $e_1 \otimes \ldots \otimes e_p$ является собственным вектором оператора $f^{\otimes p}$, отвечающим собственному значению $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_p$.

1718. Пусть линейный оператор $f\colon V \to V$ приводится к диагональному виду. Доказать, что в этом случае $f^{\otimes p}$ также диагонализируем. Верно ли обратное утверждение?

1719. Пусть λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ — все собственные значения оператора $f\colon V \to V$, взятые с учетом кратностей, $\dim V = n$. Доказать, что набор всех собственных значений оператора $f^{\otimes p}$ с учетом кратностей состоит из всевозможных произведений

$$\lambda_{k_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_p}, \quad k_s = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, p.$$

1720. Доказать, что $\det(f^{\otimes p}) = (\det f)^{pn^{p-1}}$, где f — оператор в V, $\dim V = n$.

1721. Пусть линейные операторы $f\colon V \to V$ и $g\colon W \to W$ имеют соответствующие разложения на инвариантные подпространства $V = \bigoplus_i V_i$, $W = \bigoplus_j W_j$. Доказать, что $V \otimes W = \bigoplus_{i,j} V_i \otimes W_j$ — разложение на инвариантные подпространства для $f \otimes g$.

1722. Пусть $\dfrac{d}{dx}$ и $\dfrac{d}{dy}$ — операторы дифференцирования в пространствах многочленов $\mathbb{R}_n[x]$ и $\mathbb{R}_m[y]$ соответственно. Выяснить аналитический смысл оператора $\dfrac{d}{dx} \otimes \dfrac{d}{dy}$ и найти его жорданову форму.

1723. Найти жорданову форму тензорного произведения двух операторов, имеющих следующие жордановы формы:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 16.3. Симметрические и кососимметрические тензоры

Если p-вектор равен внешнему произведению p векторов, то он называется *разложимым*.

1724. Проверить, что операторы Sym и Alt в пространстве $\mathbf{T}_0^p$ обладают следующими свойствами (где $\circ$ обозначает композицию отображений):

1) $\mathrm{Sym} \circ \mathrm{Sym} = \mathrm{Sym}$, $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$, т. е. Sym и Alt — проекторы;

2) $\mathrm{Sym} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt} \circ \mathrm{Sym} = 0$ при $p > 1$;

3) $\mathrm{Ker}(\mathrm{Sym}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Alt}) = 0$ при $p = 2$ и $\mathrm{Ker}(\mathrm{Sym}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Alt}) \neq 0$ при $p > 2$;

4) $(\mathrm{Id} - \mathrm{Sym})(\mathrm{Id} - \mathrm{Alt})$ — проектор. Найти его ранг при $p = 3$.

1725. Показать, что $\mathbf{S}(V)$ с операцией $\bullet$ и $\Lambda(V)$ с операцией $\wedge$ являются ассоциативными алгебрами. При этом:

1) $S \bullet T = T \bullet S$;

2) $S \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge S$, если $S \in \Lambda^p(V)$, $T \in \Lambda^q(V)$;

3) алгебра $\mathbf{S}(V)$ изоморфна алгебре $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, где $n = \dim V$.

1726. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Доказать, что тензоры
$$\underbrace{e_1 \bullet \ldots \bullet e_1}_{s_1} \bullet \ldots \bullet \underbrace{e_n \bullet \ldots \bullet e_n}_{s_n}, \quad s_1 + \ldots + s_n = p,$$
образуют базис пространства $\mathbf{S}^p(V)$. Вычислить его размерность.

1727. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Доказать, что тензоры
$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n,$$
образуют базис в $\Lambda^p(V)$. Вычислить его размерность и размерность пространства $\Lambda(V)$. Провести аналогичные рассуждения для $\Omega_q(V)$.

1728. Доказать, что линейная оболочка множества
$$\{\underbrace{v \bullet \ldots \bullet v}_{k} \mid v \in V\}$$
равна $\mathbf{S}^k(V)$ (поле $\Bbbk$ характеристики 0).

1729. Доказать, что естественные вложения
$$V_1 \to V_1 \oplus V_2, \quad v \mapsto (v, 0), \quad V_2 \to V_1 \oplus V_2, \quad v \mapsto (0, v),$$
индуцируют изоморфизмы
$$\bigoplus_{i=0}^{p} \mathbf{S}^i(V_1) \otimes \mathbf{S}^{p-i}(V_2) \cong \mathbf{S}^p(V_1 \oplus V_2),$$
$$\bigoplus_{i=0}^{p} \Lambda^i(V_1) \otimes \Lambda^{p-i}(V_2) \cong \Lambda^p(V_1 \oplus V_2).$$

1730. Пусть $\dim V > 2$. Показать, что пространства $\Lambda^2(\Lambda^2(V))$ и $\Lambda^4(V)$ не изоморфны.

1731. Показать, что внешнее произведение $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ векторов $a_1, a_2, \ldots, a_p$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы линейно зависимы.

1732. Пусть T — кососимметрический ковариантный тензор валентности n в пространстве V, причем $n = \dim V$. Показать, что все его компоненты с точностью до знака совпадают с $T_{12\ldots n}$ (говорят, что тензор T имеет единственную существенную компоненту). Доказать, что эта компонента преобразуется по правилу
$$T'_{12\ldots n} = \det C \cdot T_{12\ldots n},$$
где $\det C$ — определитель матрицы перехода к новому базису. Аналогично, в контравариантном случае доказать формулу $(T')^{12\ldots n} = (\det C)^{-1} \cdot T^{12\ldots n}$.

1733. Пусть $a_1, \ldots, a_p$ и $b_1, \ldots, b_p$ — два набора линейно независимых векторов. Доказать, что $a_1 \wedge \ldots \wedge a_p = \lambda \cdot b_1 \wedge \ldots \wedge b_p$ тогда и только тогда, когда линейные оболочки двух наборов векторов совпадают. При этом λ равно определителю матрицы перехода от второй системы векторов к первой.

1734. Показать, что линейная оболочка системы линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_k$ совпадает с множеством тех векторов a, для которых $T \wedge a = 0$, где $T = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$.

1735. Пусть $T \in \Lambda^p(V)$; определим

$$\mathrm{Ann}(T) = \{a \in V \,|\, T \wedge a = 0\}.$$

Доказать, что T представим в виде $\widetilde{T} \wedge S$, где $S = a_1 \wedge \ldots \wedge a_k \neq 0$, тогда и только тогда, когда $a_i \in \mathrm{Ann}(T)$ для $i = 1, \ldots, k$.

1736. Доказать, что соответствие $T \mapsto \mathrm{Ann}(T)$ осуществляет биекцию множества ненулевых разложимых p-векторов в V (рассматриваемых с точностью до умножения на скаляр) на множество p-мерных подпространств пространства V.

1737. Показать, что для $T \in \Lambda^p(V)$ размерность пространства $\mathrm{Ann}(T)$ не превосходит p, причем равенство имеет место в точности тогда, когда T есть внешнее произведение линейно независимых векторов.

1738. Дан кососимметрический тензор $T \in \Lambda^{n-1}(V)$, где $\dim V = n$. Доказать, что найдутся такие векторы $a_1, \ldots, a_{n-1}$, что $T = a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}$ (т. е. $(n-1)$-вектор T разложим). Аналогично, для $S \in \Omega_{n-1}(V)$ найдутся такие ковекторы $\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}$, что $S = \xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^{n-1}$.

1739. Доказать, что бивектор T представим в виде $a \wedge b$ для некоторых векторов a и b тогда и только тогда, когда $T \wedge T = 0$.

1740. Пусть φ — невырожденная билинейная функция на V. Доказать, что на пространстве $\Lambda^2(V)$ можно определить такую невырожденную билинейную форму Φ, что для любых элементов $v_i \in V$, $i = 1, \ldots, 4$, выполняется

$$\Phi(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) = \det\begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_3) & \varphi(v_1, v_4) \\ \varphi(v_2, v_3) & \varphi(v_2, v_4) \end{pmatrix}.$$

1741. Пусть $f : V \to V$ — линейный оператор. Показать, что оператор $f^{\otimes p}$ (тензорная степень) коммутирует с оператором Alt, тем самым определено линейное отображение $f^{\wedge p} : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V)$.

1742. Пусть $\dim V = n$, $f : V \to V$ — линейный оператор. Доказать, что оператор $f^{\wedge(n-1)}$ либо равен 0, либо невырожден, либо имеет ранг 1.

1743. Пусть $f\colon V\to V$ — линейный оператор, $\dim V=n$. Поскольку $\dim\Lambda^n(V)=1$, оператор $f^{\wedge n}$ является умножением на скаляр. Доказать, что этот скаляр равен $\det f$.

1744. Доказать формулы ($\circ$ — композиция):

1) $(f\circ g)^{\wedge p}=f^{\wedge p}\circ g^{\wedge p}$;

2) $(\mathrm{Id}_V)^{\wedge p}=\mathrm{Id}_{V^{\wedge p}}$;

3) для обратимого f имеем $(f^{\wedge p})^{-1}=(f^{-1})^{\wedge p}$;

4) $(c\cdot f)^{\wedge p}=c^p\cdot f^{\wedge p}$, где $c\in\Bbbk$.

1745. Пусть $e_1, \ldots, e_p$ — линейно независимые собственные векторы оператора $f\colon V\to V$, отвечающие соответственно собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (не обязательно различным). Доказать, что $e_1\wedge\ldots\wedge e_p$ является собственным вектором оператора $f^{\wedge p}$, отвечающим собственному значению $\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_p$.

1746. Пусть линейный оператор $f\colon V\to V$ приводится к диагональному виду. Доказать, что в этом случае $f^{\wedge p}$ также диагонализируем. Верно ли обратное?

1747. Пусть λ_k $(k=1, \ldots, n)$ — все собственные значения оператора $f\colon V\to V$, взятые с учетом кратностей, $\dim V=n$. Доказать, что набор всех собственных значений оператора $f^{\wedge p}$ с учетом кратностей состоит из всевозможных произведений

$$\lambda_{k_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{k_p},\quad 1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_p\leqslant n.$$

1748. Доказать, что $\det(f^{\wedge p})=(\det f)^{\binom{n-1}{p-1}}$, где $f\colon V\to V$ — линейный оператор, $\dim V=n$.

1749. Пусть характеристический многочлен оператора $f\colon V\to V$, $\dim V=n$, равен $\sum\limits_{p=0}^{n}a_p\lambda^{n-p}$. Доказать равенство $\operatorname{tr}(f^{\wedge p})=(-1)^{n-p}a_p$.

1750. Найти следы операторов $f^{\wedge p}$ для нетривиальных $\Lambda^p(V)$, если f задан своей матрицей:

1) $\begin{pmatrix}2&3&0\\2&-2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2&-1&3&7\\3&2&-4&5\\0&0&5&4\\0&0&-2&3\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&2&-1\\1&-3&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&3&5&0\\-2&4&-1&0\\2&0&3&2\\3&0&-2&7\end{pmatrix}$.

1751. Доказать, что если $\operatorname{tr}(f^{\wedge p})=0$ для любого $p=1, 2, \ldots$, то оператор $f\colon V\to V$ нильпотентен.

1752. Найти жорданову форму $f^{\wedge 2}$ по известной жордановой форме f:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\qquad 3)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1753. Пусть W является k-мерным подпространством V. Описать естественное вложение $\Lambda^p(W)$ в $\Lambda^p(V)$. Доказать, что оператор $f: V \to V$ имеет W своим инвариантным подпространством тогда и только тогда, когда $\Lambda^k(W)$ инвариантно относительно $f^{\wedge k}$.

1754. Определим для ковектора $\varphi \in V^*$ *оператор внутреннего произведения* как отображение

$$i(\varphi): \mathbf{T}_0^p \to \mathbf{T}_0^{p-1},$$
$$F_{i(\varphi)T}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) = F_T(\varphi, \varphi_1 \ldots, \varphi_{p-1}), \quad \varphi_i \in V^*,$$

где, как и выше, $F_T \in \mathbf{P}_0^p$ — полилинейная функция, соответствующая $T \in \mathbf{T}_0^p$. Доказать что оператор внутреннего произведения переводит симметрические тензоры в симметрические, а кососимметрические — в кососимметрические. Пусть φ_1 и φ_2 — два ковектора. Показать, что операторы $i(\varphi_1)$ и $i(\varphi_2)$ коммутируют в $\mathbf{S}(V)$ и антикоммутируют в $\Lambda(V)$.

§ 16.4. Тензоры в евклидовых и симплектических пространствах

1755. Пусть φ — невырожденная билинейная функция. Доказать, что сопоставление каждому базису матрицы, обратной к матрице φ в этом базисе, определяет тензор типа $(2, 0)$.

1756. Представить операции поднятия и опускания индекса (стоящего на любом месте) в терминах произведения и свертки. Тем самым убедиться, что поднятие и опускание — корректно определенные тензорные операции.

1757. Показать, что если мы ограничимся ортогональными заменами координат в евклидовом пространстве, то закон изменения для верхних индексов будет совпадать с законом изменения для нижних. Точнее, если в некоторой ортогональной системе координат $T^{i_1 \ldots i_p} = T_{i_1 \ldots i_p}$ для всех $i_1, \ldots, i_p$, то они равны и в любой другой ортогональной системе координат.

1758. Пусть в базисе e_1, e_2, e_3 матрица скалярного произведения равна $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Провести опускание и поднятие индексов у тензоров (координаты приведены в указанном базисе):

1) $e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3$; 2) $T^i_j = i + j$.

Ответ дать в виде координат в этом базисе.

1759. В пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n от переменной x с вещественными коэффициентами рассмотрим скалярное произведение

$$\langle p, q \rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx, \quad p, q \in \mathbb{R}_n[x].$$

Пусть $e_0 = 1$, $e_1 = x$, $e_2 = x^2$, ..., $e_n = x^n$ — базис. Найти координаты в дуальном базисе ковектора, полученного поднятием индекса у $q = 1 + 2x + 3x^2$, при $n = 2$.

1760. Пусть в базисе (e_i) матрица евклидова скалярного произведения в пространстве V равна $\|g_{ij}\|$, а уравнение $a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = 0$ задает $(n-1)$-мерное подпространство (гиперплоскость) W. Доказать, что выражения $v^i = g^{ij}a_j$, рассматриваемые как компоненты некоторого вектора в данном базисе, определяют вектор нормали к W.

1761. В условиях предыдущей задачи найти формулы для вычисления расстояния от вектора $u = (u^i)$ до гиперплоскости W в терминах тензорных операций.

1762. Применить формулу из предыдущей задачи к нахождению расстояния от $u = (1, 2, 1, 3)$ до $x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 = 0$, если

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1763. Пусть V — пространство со скалярным произведением, а $\tau : V \to V^*$ — изоморфизм, определяемый этим произведением, $(a, b) = \tau(a)b$. Доказать, что результат опускания индекса у вектора $a \in V$ (рассматриваемого как тензор типа $(1, 0)$) совпадает с ковектором $\tau(a)$ в случае симметричного скалярного произведения и с $-\tau(a)$ в случае симплектического. Аналогично результат подъема индекса у ковектора $\xi \in V^*$ совпадает, соответственно, с $\tau^{-1}(\xi)$ и с $-\tau^{-1}(\xi)$.

1764. Рассмотрим линейный оператор $f: V \to V$ в пространстве V со скалярным произведением и соответствующую ему билинейную функцию $\varphi_f(a, b) = (f(a), b)$. Показать, что результат опускания индекса на первое место у оператора f, рассматриваемого как тензор типа (1, 1), совпадает с тензором, соответствующим функции φ_f в случае симметричного скалярного произведения, и с $-\varphi_f$ в случае симплектического.

1765. Пусть $G = \|g_{ij}\|$ — матрица скалярного произведения в векторном пространстве V. Показать, что в результате подъема второго индекса у G получится символ Кронекера δ_i^j, в то время как при подъеме первого индекса получится δ_j^i для симметричного скалярного произведения и $-\delta_j^i$ для симплектического.

1766. Пусть, как и выше, $\tau: V \to V^*$ — изоморфизм, определяемый заданным в пространстве V скалярным произведением. Для билинейной функции φ на V определим билинейную функцию φ^* на V^* формулой

$$\varphi^*(\xi, \eta) = \varphi(\tau^{-1}(\xi), \tau^{-1}(\eta)).$$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис пространства V, а $e^1, \ldots, e^n$ — дуальный базис в V^*. Пусть B и G — матрицы в базисе $\{e_i\}$ формы φ и скалярного произведения соответственно. Убедиться, что тензор, соответствующий φ^*, получен из φ двукратным подъемом индекса. Показать, что матрица φ^* в базисе $\{e^j\}$ равна $G^{-1}BG^{-1}$ в случае симметрического скалярного произведения и $-G^{-1}BG^{-1}$ в случае кососимметрического произведения. Рассмотреть частный случай φ, равного скалярному произведению в пространстве V.

1767. Доказать, что ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, \ldots, v_n$, равен

$$V_e(v_1, \ldots, v_n) = \sqrt{\det \|g_{ij}\|} \cdot \det \|v_j^i\|,$$

где v_j^i — i-я координата вектора v_j. При этом

$$(V_e(v_1, \ldots, v_n))^2 = \Gamma(v_1, \ldots, v_n),$$

где Γ — определитель Грама.

1768. Доказать, что ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, \ldots, v_n$, равен

$$V_e(v_1, \ldots, v_n) = \mathbf{v}_{i_1 \ldots i_n} v_1^{i_1} \ldots v_n^{i_n},$$

где v_j^i — i-я координата вектора v_j. Что определяет его знак? Как в случае $\mathbb{R}^3$ он связан с ориентированным объемом, изучавшимся в курсе аналитической геометрии?

1769. Доказать, что:

1) $\mathbf{v}^{i_1\ldots i_n} = g^{i_1k_1}\ldots g^{i_nk_n}\mathbf{v}_{k_1\ldots k_n}$;

2) $\mathbf{v}_{i_1\ldots i_n} = g_{i_1k_1}\ldots g_{i_nk_n}\mathbf{v}^{k_1\ldots k_n}$;

3) ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $v_1, \ldots, v_n$, равен

$$V_e(v_1, \ldots, v_n) = \mathbf{v}^{i_1\ldots i_n} g_{i_1k_1}\ldots g_{i_nk_n} v_1^{k_1}\ldots v_n^{k_n},$$

где v_j^i — i-я координата вектора v_j.

1770. Описать в терминах тензорных операций вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений в $\mathbb{R}^3$.

1771. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ элемент объема $\mathbf{v}_{ijk}$. Показать, что билинейное отображение $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto z$, определяемое формулой $z^k = g^{ki}\mathbf{v}_{ijm}x^j y^m$, совпадает с векторным произведением (для базисов положительной ориентации).

1772. Рассмотрим тензор $\mathbf{v}_{ijkl}$ в $\mathbb{R}^4$. Пусть заданы векторы x, y и z из $\mathbb{R}^4$. Сопоставим произвольному базису набор чисел

$$u^i = g^{im}\mathbf{v}_{mjks}x^j y^k z^s.$$

Доказать, что:

1) u^i — вектор;

2) этот вектор ортогонален x, y и z;

3) его длина равна трехмерному объему параллелепипеда, построенного на x, y и z.

1773. Пусть $a \in \mathbf{T}_1^1(V)$ — линейный оператор, $\dim V = n$. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i_k}^m \varepsilon_{i_1\ldots i_{k-1} m i_{k+1}\ldots i_n} = \varepsilon_{i_1\ldots i_n}\operatorname{tr}(a).$$

1774. Доказать формулы:

1) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix}$; 3) $\sum\limits_{k,j}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rjk} = 2\delta_{ir}$;

2) $\sum\limits_{k}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$; 4) $\sum\limits_{k,j,i}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$,

где δ — символ Кронекера, а ε определено в начале гл. 16.

§16.5. Операция Ходжа и евклидова структура

1775. Для k-формы $T\in\Omega_k(\mathbb{R}^n)$ на (ориентированном) пространстве $\mathbb{R}^n$ определим $(n-k)$-форму $*T\in\Omega_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(*T)_{i_1\ldots i_{n-k}} = \frac{1}{k!}\mathbf{v}_{i_1\ldots i_{n-k}j_1\ldots j_k} g^{j_1m_1}\ldots g^{j_km_k} T_{m_1\ldots m_k}.$$

Убедиться, что $(n-k)$-форма $*T$ корректно определена. Проверить формулу

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)}T.$$

1776. Пусть e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, e^i — дуальный базис в $(\mathbb{R}^3)^*$. Проверить непосредственно, что в этой ситуации:

1) $*e^1=e^2\wedge e^3$, $*e^2=e^3\wedge e^1$, $*e^3=e^1\wedge e^2$;

2) $*(e^2\wedge e^3)=e^1$, $*(e^3\wedge e^1)=e^2$, $*(e^1\wedge e^2)=e^3$;

3) $*c=ce^1\wedge e^2\wedge e^3$, $*(ce^1\wedge e^2\wedge e^3)=c$, где $c=\mathrm{const}\in\Omega_0(\mathbb{R}^3)$;

4) $*(*T)=T$ для всех размерностей; как это согласуется с предыдущей задачей?

1777. Пусть $\mathbb{R}_3[x]$ — пространство всех многочленов степени не выше 3 от переменной x с вещественными коэффициентами и скалярным произведением $(p, q)=\int\limits_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$, $p, q\in\mathbb{R}_3[x]$. Пусть ковектор q' получен опусканием индекса у $q=1+x+x^2+x^3$. Найти $*q'$.

1778. Пусть $T, S\in\Omega_p(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\langle T, S\rangle = \frac{1}{p!}g^{i_1j_1}\ldots g^{i_pj_p}T_{i_1\ldots i_p}S_{j_1\ldots j_p}.$$

Проверить, что

$$T\wedge *S = \langle T, S\rangle\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}\in\Omega_n(\mathbb{R}^n)$, как и прежде, — элемент объема.

1779. Убедиться, что $\langle T, S\rangle$ — скаляр. Проверить, что определенная в предыдущей задаче операция $\langle T, S\rangle$ задает евклидово скалярное произведение на $\Omega_p(\mathbb{R}^n)$ для каждого p.

1780. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, e^i — дуальный базис в $(\mathbb{R}^3)^*$. Вычислить в $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$ евклидово расстояние в смысле задачи 1779 от $e^2\wedge e^3$ до прямой, порожденной элементом $e^1\wedge e^3-2e^2\wedge e^1$.

1781. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$, e^i — дуальный базис в $(\mathbb{R}^4)^*$. Вычислить в $\Omega_2(\mathbb{R}^4)$ евклидово расстояние в смысле задачи 1779 от $e^2\wedge e^3+2e^1\wedge e^4$ до плоскости, порожденной элементами $e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^1$ и $e^2\wedge e^4-2e^1\wedge e^3$.

Ответы

К главе 1

§ 1.1

1. 1) $(-x, -y)$; 2) $(x, -y)$; 3) $(-x, y)$; 4) (y, x); 5) $(-y, -x)$.
2. 1) $(-x, -y, -z)$; 2) $(x, -y, -z)$; 3) $(x, y, -z)$; 4) (z, y, x).
3. $2d$. **4.** $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$. **5.** $\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_A + k(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B)$.
6. 1) $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)$; 2) $\mathbf{r}_C = \dfrac{\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_B}{1+\lambda}$.
7. 1) $\lambda > 0$; 2) $-1 < \lambda < 0$; 3) $\lambda < -1$. **8.** $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C}{3}$. **9.** $(-11, 2, -1)$.
10. $\mathbf{r}_D = \dfrac{b\,\mathbf{r}_B + c\,\mathbf{r}_C}{b+c}$. **11.** $D\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $M\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $S(-1, -3)$. **12.** $-\lambda$.
13. 1) Радиус-вектор точки, симметричной вершине M параллелограмма $ABMC$ относительно точки A;
2) радиус-вектор точки, симметричной точке A относительно точки M;
3) радиус-вектор середины P медианы AK треугольника ABC;
4) вектор $\overrightarrow{AP}$; 5) вектор $\overrightarrow{MA}$; 6) не задает.
14. Пересекает ось Oz в точке $(0, 0, 5/3)$.
16. Окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом $\sqrt{a^2 - c^2}$.
17. Две прямые, перпендикулярные к прямой AB и находящиеся на расстоянии a^2/c от середины отрезка AB.
18. Прямая, на которой лежит гипотенуза треугольника.
19. Окружность, вписанная в треугольник.
20. Окружность с центром в вершине D параллелограмма $ACBD$ и радиусом $\sqrt{|AC|^2 + |CB|^2 - |AB|^2}$, если угол C острый, вершина D, если угол C прямой, и пустое множество — если тупой.
21. Окружность с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и радиусом $\frac{1}{3}\sqrt{3a^2 - (|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2)}$.
23. Окружность с центром в точке, лежащей на прямой AB и делящей направленный отрезок AB в отношении $-k^2$, и радиусом $\dfrac{k}{|1-k^2|}|AB|$.
24. Две прямые, соединяющие середины противоположных сторон прямоугольника.
25. Внешность окружностей, если они совпадают ($O_1 = O_2$, $r_1 = r_2$);
пустое множество, если окружности концентрические ($O_1 = O_2$, $r_1 \neq r_2$);
прямая, перпендикулярная отрезку O_1O_2 и делящая его в отношении

$$(r_1^2 - r_2^2 + |O_1O_2|^2) : (r_2^2 - r_1^2 + |O_1O_2|^2),$$

если окружности не пересекаются и не являются концентрическими;

часть прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, лежащая вне окружностей, если данные окружности пересекаются в двух точках; общая касательная, проведенная в точке касания, если данные окружности касаются.
26. Прямая, перпендикулярная к прямой OA и находящаяся от точки O на расстоянии $(a^2+r^2)/(2a)$.
27. Два луча: $x=-1$, $|y|\geqslant 3$.
28. Дуга окружности $(x+7/3)^2+y^2=(8/3)^2$, $x\leqslant -19/8$.
29. Четыре прямые: $x\pm 2y=0$, $x\pm y/2=0$ в прямоугольной системе координат, осями которой служат данные прямые.
30. Граница квадрата, образованного прямыми $x\pm y=3$, $x\pm y=-3$.
31. Диагонали квадрата и описанная около квадрата окружность.
32. Два отрезка, симметричные относительно третьей прямой и высекающие квадрат из полосы между первыми двумя прямыми, а также продолжения диагоналей этого квадрата.
33. Если принять средние линии прямоугольника за оси координат, причем большую из них за ось абсцисс, то искомое геометрическое место будет состоять из двух отрезков $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=\pm a$ и четырех лучей $|x|\geqslant a$, $y=\pm x$.

§ 1.2

34. $B(1,0)$, $C\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $E\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$.
35. 1) $|AB|=\sqrt{3}$; 2) $|CD|=10$; 3) $|EF|=5$.
36. $\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$. **37.** 1) $B\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $C\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$. **38.** $(\rho_0, 2\varphi_1-\varphi_0)$.
39. $A\left(2, \frac{17\pi}{12}\right)$, $B\left(3, \frac{7\pi}{12}\right)$, $C\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$.
40. $S=1$. **41.** $A(1,\sqrt{3})$, $B(-1,1)$, $C(0,5)$, $D\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.
42. $A\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $C(5,0)$, $D\left(10, -\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.
43. $(2+5\sqrt{3}, 8)$. **44.** $M_1\left(6\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $M_2\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$.
45. $x=\rho\cos(\varphi+\varphi_0)+x_0$, $y=\rho\sin(\varphi+\varphi_0)+y_0$.
47. $(3+2\sqrt{3}, 6-\sqrt{3})$, $(3-2\sqrt{3}, 6+\sqrt{3})$. **48.** $(4,2)$ и $(0,4)$.
49. Два решения: $C(1,3)$, $D(-1,1)$ и $C(5,-1)$, $D(3,-3)$.
50. $x-2y=2$. **51.** Два решения: $(21,-3)$ и $(3,21)$.
52. Два решения: $B_1\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 3\right)$, $C_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 4\right)$ и $B_2\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, 3\right)$, $C_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 4\right)$.
53. $|a|$ — расстояние от прямой до полюса; если $a\geqslant 0$, то φ_0 — угол, образуемый с полярной осью перпендикуляром, опущенным из полюса на данную прямую; в случае $a\leqslant 0$ этим углом будет $\varphi_0+\pi$.
54. $x+y=2$, $(2\sqrt{2}, \pi/4)$. **55.** 1) $\rho=\dfrac{2}{\cos(\varphi-\pi/3)}$; 2) $\rho=\dfrac{3}{\cos(\varphi-\pi/2)}$.

56. $\rho=\dfrac{a}{\cos(\varphi+2\pi/3)}$, $\rho=\dfrac{a}{\cos(\varphi-2\pi/3)}$. **57.** $\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)=r_0^2$.

58. $A\Big(9, -\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \arcsin\dfrac{1}{9}\Big)$, $B\Big(3, -\dfrac{3\pi}{4}, \arcsin\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)\Big)$,

$C\Big(5, -\dfrac{\pi}{2}, \arcsin\dfrac{3}{5}\Big)$, $D\Big(\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{4}, \arcsin\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big)$, $E\Big(1, \dfrac{\pi}{2}, 0\Big)$.

59. $\Big(2, \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}, -\dfrac{\pi}{6}\Big)$. **60.** $\Big(\dfrac{\sqrt{6}}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$.

61. $S=\rho\arccos\big(\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\big)$.

62. $A\Big(5, -\arccos\dfrac{3}{5}, 5\Big)$, $B\Big(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}, -1\Big)$, $C(6, \pi, 8)$.

63. $\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$, $\dfrac{\pi}{4}$. **64.** $\cos\alpha=\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$.

§ 1.3

65. 0. **67.** $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$.

68. $\overrightarrow{BC}=\dfrac{4\mathbf{l}-2\mathbf{k}}{3}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2\mathbf{l}-4\mathbf{k}}{3}$. **69.** $\overrightarrow{BC}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{q}$, $\overrightarrow{DE}=-\mathbf{p}$, $\overrightarrow{EF}=-\mathbf{p}-\mathbf{q}$.

70. Точка пересечения медиан треугольника. **71.** Например, $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

72. $\overrightarrow{A'A}=-\mathbf{r}$, $\overrightarrow{A'B'}=\mathbf{p}$, $\overrightarrow{A'D'}=\mathbf{q}$, $\overrightarrow{A'C'}=\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\overrightarrow{A'B}=\mathbf{p}-\mathbf{r}$, $\overrightarrow{A'D}=\mathbf{q}-\mathbf{r}$.

73. $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{d}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{DB}=\mathbf{b}-\mathbf{d}$, $\overrightarrow{DM}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}-\mathbf{d}$, $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}$.

74. $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}}{2}$, $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{RS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2}$. **75.** $\overrightarrow{EF}=\dfrac{\mathbf{m}+\mathbf{p}}{2}$.

76. *Указание*. Повернуть плоскость вокруг центра многоугольника на угол $\dfrac{2\pi}{n}$, где n — число его вершин.

78. $\mathbf{r}_C=\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_D-\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{B'}=\mathbf{r}_{A'}+\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{D'}=\mathbf{r}_{A'}+\mathbf{r}_D-\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{C'}=\mathbf{r}_{A'}+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_D-2\mathbf{r}_A$.

79. $\dfrac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$. **80.** 1) $(3, 22, -3)$; 2) $(19, 39, 30)$.

81. 1) $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$; 2) $\mathbf{d}=5\mathbf{a}+4\mathbf{b}$; 3) $\mathbf{d}=4\mathbf{a}-\mathbf{c}$.

82. 1) Векторы **a**, **b** и **c** линейно независимы; 2) $\mathbf{c}=\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\dfrac{2}{3}\mathbf{b}$;

3) векторы **a**, **b** и **c** линейно зависимы, но вектор **c** не может быть представлен как линейная комбинация **a** и **b**, так как **a** и **b** коллинеарны.

84. $\Big(0, \dfrac{13}{4}, \dfrac{17}{4}\Big)$. **85.** $(63, -51, 25)$. **86.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$.

87. $A(-1, -1)$, $B(0, -1)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$.

88. $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 2)$, $E(1, 2)$, $F(-1, 1)$.

89. $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C\Big(\dfrac{1}{k}, 1\Big)$, $D(1, 0)$, $M\Big(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{k}{k+1}\Big)$, $S\Big(0, \dfrac{k}{k-1}\Big)$.

90. $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(1, 1, -1)$.

91. $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 1, 1)$, $C(1, -2, 1)$, $D(1, 1, -2)$. **92.** $\Big(\dfrac{a^2}{2(a+b)}, \dfrac{b^2}{2(a+b)}\Big)$.

93. Точка пересечения биссектрис треугольника, образованного средними линиями данного.

§ 1.4

94. 1) 20; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) 18; 5) -3. **95.** -19. **96.** $\alpha=\arccos\frac{4}{5}$.
98. $\frac{\pi}{3}$. **99.** $-\frac{3}{2}$. **100.** 0. **101.** $\overrightarrow{CH}=(\mathbf{a}^2\mathbf{b}+\mathbf{b}^2\mathbf{a})/(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)$.
103. $|CD|=\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}|BC|^2+\frac{1}{1+\lambda}|CA|^2-\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}|AB|^2}$.
107. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}$.
108. 1) 31; 2) 13; 3) 0. **109.** 1) -7; 2) 17.
110. 1) $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{2}$. **112.** $\left(-\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)$. **113.** $(-2,4,-2)$.
114. -3. **115.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **116.** $(-4,7,-3)$.
117. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}},-\frac{11}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$. **118.** 5. **119.** $(12,-3,4)$. **120.** $(3,8,-6)$.
121. $\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$.

§ 1.5

122. 1), 2) Отрицательная; 3) положительная. **123.** Противоположную.
124. В любых, для которых ориентированная площадь $S_{\text{or}}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ базисного параллелограмма равна 1.
125. $\mathbf{b}=(-2,-5)$. **128.** $S=5$, $h=2$.
129. $\frac{\lambda\mu\nu+1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$.

Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PR}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

130. $\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}$; $\frac{1}{7}$.
131. 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) $-\arccos\frac{8}{\sqrt{65}}$.
132. 1), 3) Отрицательная; 2) положительная. **133.** Одинаковую.
134. Вне. **135.** $\overrightarrow{OM}=(1,-1,2)$; вне. **136.** 1) $-2\mathbf{c}$; 2) $\mathbf{c}$; 3) $3\mathbf{c}/4$.
141. $\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]/|\mathbf{a}|$. **142.** $\mathbf{c}=\cos\varphi\left(\mathbf{b}-\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}\mathbf{a}\right)+\sin\varphi\,\frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|}$.
143. 1) $(6,-3,-3)$; 2) $(-12,-26,8)$; 3) $(0,0,0)$.
144. 1) $(9,-2,16)$; 2) $(-13,-13,-13)$. **145.** $18\sqrt{2}$. **146.** $S=\frac{15}{2}$, $h=5$.
147. 1) -7; 2) $(-46,29,-12)$; 3) $(-7,7,7)$.
148. $\left(\frac{6\sqrt{5}}{25},-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{8\sqrt{5}}{25}\right)$. **149.** $\left(\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$.
151. $\sqrt{2\left(S_1+S_2+d^2+\left(\frac{S_1-S_2}{2d}\right)^2\right)}$.
158. *Указание.* Использовать тождество $\big([[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}],\mathbf{d}\big)=\big([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]\big)$.
160. $h=11$. **161.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$.
163. 1) $\alpha[\mathbf{e},[\mathbf{f},\mathbf{e}]]$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 2) $\mathbf{f}=\frac{(\mathbf{f},\mathbf{e})\mathbf{e}}{\mathbf{e}^2}++\frac{[\mathbf{e},[\mathbf{f},\mathbf{e}]]}{\mathbf{e}^2}$.

164. 1) $\mathbf{x}=\dfrac{\alpha[\mathbf{b},\mathbf{c}]+\beta[\mathbf{c},\mathbf{a}]+\gamma[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$; 2) $\mathbf{x}=\dfrac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$.

165. $\mathbf{r}_1-\dfrac{(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3)}{[\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]^2}[\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]$.

166. $\mathbf{a}^1=\dfrac{[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{a}^2=\dfrac{[\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{a}^3=\dfrac{[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)}$.

167. $\cos A=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, $\quad\cos\alpha=\dfrac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$,

$\cos B=\dfrac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$, $\quad\cos\beta=\dfrac{\cos B+\cos C\cos A}{\sin C\sin A}$,

$\cos C=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$, $\quad\cos\gamma=\dfrac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}$.

168. $V=abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

169. *Указание.* Использовать тождество $\big([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{b}]\big)=(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}^2-(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{c})$.

170. $V=\dfrac{1}{6}abc\,\dfrac{1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$.

§ 1.6

171. $|\mathbf{e}_1|=\sqrt{g_{11}}$, $|\mathbf{e}_2|=\sqrt{g_{22}}$, $\cos\omega=\dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$, $\quad S=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\sqrt{\det G}$.

172. $|\mathbf{a}|=\sqrt{g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2}$.

173. $\cos\varphi=\dfrac{g_{11}x_1x_2+g_{12}(x_1y_2+x_2y_1)+g_{22}x_2y_2}{\sqrt{g_{11}x_1^2+2g_{12}x_1y_1+g_{22}y_1^2}\sqrt{g_{11}x_2^2+2g_{12}x_2y_2+g_{22}y_2^2}}$.

174. $V=\sqrt{\det G}$. **175.** $V=\sqrt{\det G}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{pmatrix}\right|$. **176.** $5\sqrt{2}$.

177. $\cos\varphi_1=\dfrac{x_1+x_2\cos\omega_{12}+x_3\cos\omega_{13}}{|\mathbf{a}|}$, $\quad\cos\varphi_2=\dfrac{x_1\cos\omega_{21}+x_2+x_3\cos\omega_{23}}{|\mathbf{a}|}$,

$\cos\varphi_3=\dfrac{x_1\cos\omega_{31}+x_2\cos\omega_{32}+x_3}{|\mathbf{a}|}$, где

$$|\mathbf{a}|^2=(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+2x_1x_2\cos\omega_{12}+2x_2x_3\cos\omega_{23}+2x_3x_1\cos\omega_{31}.$$

178. $x^1y_1+x^2y_2+x^3y_3$. **179.** $\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}&g^{13}\\g^{12}&g^{22}&g^{23}\\g^{13}&g^{23}&g^{33}\end{pmatrix}=G^{-1}$.

180. $x_i=g_{i\alpha}x^\alpha$, где $x_i=(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)$.

181. $|\mathbf{e}^1|=|\mathbf{e}^2|=|\mathbf{e}^3|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $(\widehat{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2})=(\widehat{\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3})=(\widehat{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^3})=\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

182. $z_1=\begin{vmatrix}x^2&x^3\\y^2&y^3\end{vmatrix}\sqrt{\det G}$, $z_2=\begin{vmatrix}x^3&x^1\\y^3&y^1\end{vmatrix}\sqrt{\det G}$, $z_3=\begin{vmatrix}x^1&x^2\\y^1&y^2\end{vmatrix}\sqrt{\det G}$.

183. $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}$. **184.** $\arccos\dfrac{1}{3}$.

185. $g_{12}=g_{21}$, $g_{11}>0$ (или $g_{22}>0$), $\det G>0$.

К главе 2

§ 2.1

186. $\frac{4}{5}$.   **187.** $\sqrt{2}$.

190. Эллипс с фокусами $F_{1,2}$ и большой полуосью a.

Указание. Принять середину отрезка F_1F_2 за начало координат, а прямую F_1F_2 — за ось абсцисс (рис. 1).

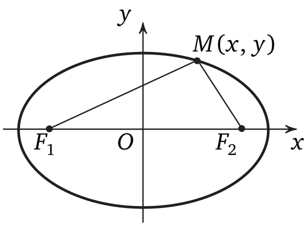

Рис. 1

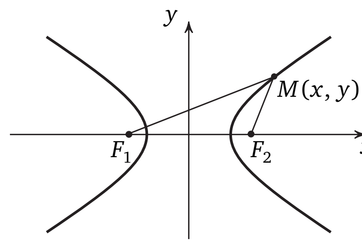

Рис. 2

191. Гипербола с фокусами F_1, F_2, действительной полуосью a и мнимой полуосью b, где $b^2 = c^2 - a^2$ (рис. 2).

Указание. Принять середину отрезка F_1F_2 за начало координат, а прямую F_1F_2 — за ось Ox.

192. 1) Объединение двух эллипсов с фокусами O_1 и O_2, большая ось одного из которых равна $r_2 + r_1$, а другого — $r_2 - r_1$;

2) объединение эллипса с фокусами O_1, O_2, большая ось которого равна $r_1 + r_2$, и прямой O_1O_2;

3) объединение эллипса и гиперболы с фокусами O_1, O_2, большая и действительная оси которых равны, соответственно, $r_1 + r_2$ и $r_2 - r_1$;

4) объединение прямой O_1O_2 и гиперболы с фокусами O_1, O_2 и действительной осью $r_2 - r_1$;

5) объединение двух гипербол с фокусами O_1, O_2, действительные оси которых равны $r_1 + r_2$ и $r_1 - r_2$.

193. Парабола с фокусом F и директрисой d (рис. 3).

Указание. За начало координат принять середину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую d, а за положительное направление оси Ox — направление OF.

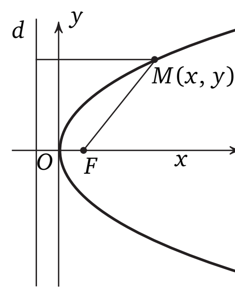

Рис. 3

194. Объединение двух парабол с фокусом O, фокальные оси которых перпендикулярны прямой ℓ. Фокальный параметр одной из парабол равен $r + d$, где d — длина перпендикуляра OA, опущенного на прямую ℓ, а фокальная ось направлена вдоль вектора $\overrightarrow{AO}$. Фокальный параметр второй равен $|r - d|$, а ось направлена вдоль $\overrightarrow{AO}$ при $d > r$ и в обратную сторону при $d<r$. Если данная окружность касается прямой ℓ (т. е. $d=r$), то вторая парабола вырождается в прямую OA. Если прямая ℓ проходит через точку O (т. е. $d=0$), то параболы имеют одинаковые фокальные параметры r, а оси их направлены в противоположные стороны.

195. Эллипс при $e<1$ и гипербола при $e>1$ с фокусом F, соответствующей директрисой d и эксцентриситетом e.

196. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $b=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}a$. **197.** В эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{(a/k)^2}=1$.

198. 1) Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; 2) гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

203. $(|\mathbf{r}_1|:|\mathbf{r}_2|)_{\max}=\dfrac{1+e}{1-e}$, $(|\mathbf{r}_1|:|\mathbf{r}_2|)_{\min}=\dfrac{1-e}{1+e}$.

204. В случае эллипса и гиперболы — окружность с центром в другом фокусе и радиусом, равным большой оси эллипса (соответственно, действительной оси гиперболы); в случае параболы — директриса.

205. В случае эллипса и гиперболы — окружность, построенная на большой оси или на действительной оси соответственно; в случае параболы — касательная в ее вершине.

206. *Указание.* Использовать задачи 199, 200, 204.

207. *Указание.* Рассмотреть две окружности — линии касания шаров Данделена и конуса — и воспользоваться фокальным свойством эллипса.

208. *Указание.* Рассмотреть две окружности — линии касания шаров Данделена и конуса — и воспользоваться фокальным свойством гиперболы.

210. *Указание.* Рассмотреть плоскость Γ' линии касания шара Данделена и конуса. Доказать, что прямая пересечения Γ' и Γ есть директриса искомой параболы, а ее фокус есть точка касания шара и Γ.

211. Эллипс с полуосями a и b, осями симметрии которого являются данные прямые.

Указание. Составить параметрическое уравнение.

212. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 4).

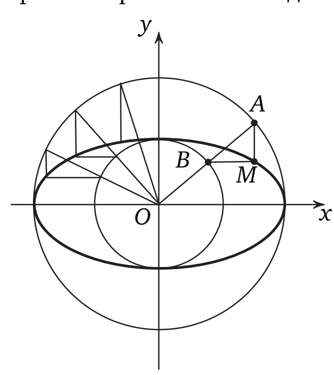

Рис. 4

213. 1) $\rho^2\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{25}+\dfrac{\sin^2\varphi}{16}\right)=1$;

2) $\rho=\dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$; 3) $\rho=\dfrac{16}{5+3\cos\varphi}$.

214. 1) $\rho=\dfrac{16}{3-5\cos\varphi}$; 2) $\rho=\dfrac{16}{3+5\cos\varphi}$.

215. $\rho=\dfrac{1}{1-\cos\varphi}$.

216. 1) Эллипс с полуосями 5 и 3, один из фокусов которого находится в начале координат, а второй — в точке $(8, 0)$;

2) парабола с фокальным параметром $p=\dfrac{2}{3}$ и фокусом в начале координат, для которой полярная ось является фокальной осью; $y^2=\dfrac{4}{3}x$;

3) гипербола с полуосями 3, 4, один из фокусов которой находится в начале отсчета, а второй — в точке $(10, \pi) = (-10, 0)$.

217. *Указание.* Использовать полярную систему координат.

218. *Указание.* Использовать полярную систему координат.

219. $-e^2$, где e — эксцентриситет данной линии.

§ 2.2

220. Две равные окружности радиусом $a/2$, касающиеся BC в точке O.

221. Окружность, проходящая через точку O, центр которой лежит на перпендикуляре OA к прямой ℓ, а радиус равен $b^2/2a$, с выколотой точкой O. *Указание.* Перейти к полярной системе координат.

222. Две полуокружности радиусом $a\sqrt{2}$, центры которых C_1 и C_2 — концы диаметра, перпендикулярного к OA. Полуокружности расположены в полуплоскостях, ограниченных прямыми AC_1, AC_2, не содержащих точку O.

Указание. Перейти к полярной системе координат.

223. Окружность, проходящая через точку A, центр которой лежит на луче AB, а радиус равен $bc/(b+c)$.

Указание. Перейти к полярной системе координат.

226. $\rho = \dfrac{v}{w}\varphi$ (рис. 5). **229.** $(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2)$, $\rho = c\sqrt{2\cos 2\varphi}$ (рис. 6).

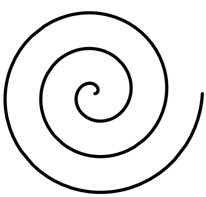

Рис. 5

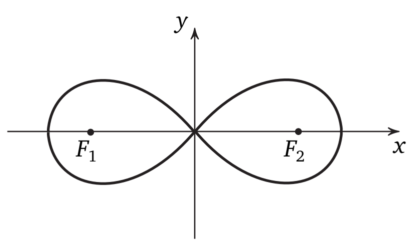

Рис. 6

230. 1) $\pm\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{\pi}{2}$. **231.** $\rho^2(1-a^2) - 2\rho(ab + c\cos\varphi) + c^2 - b^2 = 0$.

232. Лемниската Бернулли: $(x^2+y^2)^2 = 2sxy$, $\rho = \sqrt{s\sin 2\varphi}$ (рис. 7).

233. $\rho = \dfrac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$; $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ (рис. 8).

235. $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$ или $(x^2+y^2)(x-a)^2 - b^2x^2 = 0$ (рис. 9).

236. $\rho = a\cos\varphi + b$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; $(x^2+y^2-ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$ (рис. 10).

237. 1) $\pm\arccos\dfrac{b}{a}$; 2) π.

238. *Указание.* Перейти к обобщенной полярной системе координат.

239. $\rho = 4a\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; $(x^2+y^2-2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$ (частный случай улитки Паскаля, рис. 11).

240. $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + a\,\mathrm{tg}\,\varphi$; $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$ (рис. 12). **241.** 1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\pm\dfrac{\pi}{4}$.

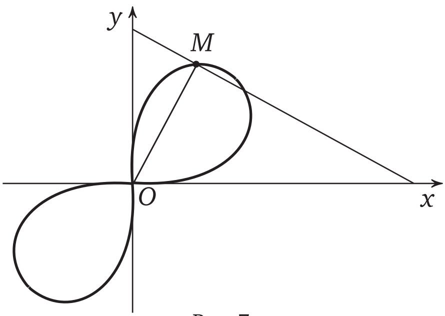

Рис. 7

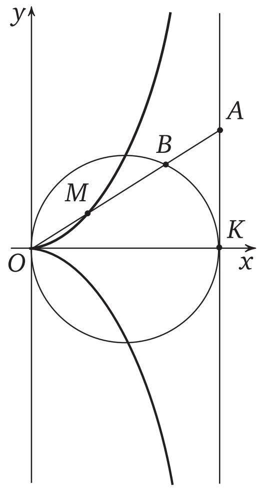

Рис. 8

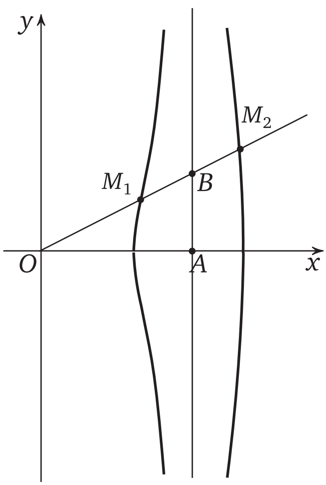

Рис. 9

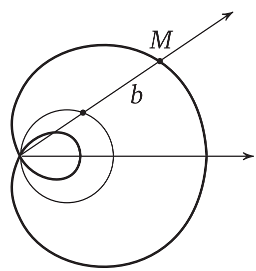

Рис. 10

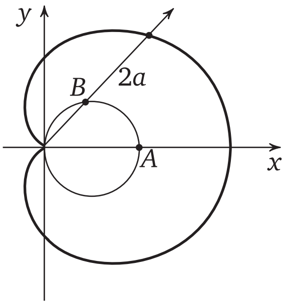

Рис. 11

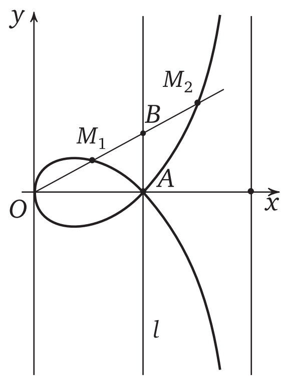

Рис. 12

242. $\rho = a\sin 2\varphi$; $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.
243. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $|x|^{2/3}+|y|^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 13).
244. $(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0$.
245. $x = a\cos^2\varphi$, $y = a\operatorname{tg}\varphi$; $x = \dfrac{a^3}{y^2+a^2}$ (рис. 14).
246. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $-\infty < t < \infty$ (рис. 15).
247. $x = (R+r)\cos t - r\cos\dfrac{R+r}{r}t$, $y = (R+r)\sin t - r\sin\dfrac{R+r}{r}t$ (рис. 16).
248. $x = (R-r)\cos t + r\cos\dfrac{R-r}{r}t$, $y = (R-r)\sin t - r\sin\dfrac{R-r}{r}t$ (рис. 17).
251. $x = \sqrt{r^2-(a+b)^2\sin^2\varphi}+a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, где φ — угол между осью Ox и движущимся отрезком; $4a^2x^2(b^2-y^2) = \bigl(b(r^2-a^2-x^2)-(2a+b)y^2\bigr)^2$.
252. $x = r(\cos t + t\sin t)$, $y = r(\sin t - t\cos t)$, где t — угол, образуемый радиусом, идущим в точку касания, с положительным направлением оси Ox.
253. На отрезке, соединяющем середины сторон BC и AD.
256. При $|OP|\neq|OQ|$ по эллипсу с центром в точке O и полуосями $|OP|+|OQ|$ и $\bigl||OP|-|OQ|\bigr|$, причем большая ось направлена вдоль $\overrightarrow{OP}$ в момент совпадения направлений векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$; при $|OP|=|OQ|$ эллипс вырождается в отрезок длины $2|OP|$.

Указание. Выбрать декартову систему координат с началом в точке O, а ось Ox — вдоль прямой OP (или OQ) в момент их совпадения.
257. Равносторонняя гипербола или пара перпендикулярных прямых.
258. Объединение отрезка AB (без точек A и B) и ветви гиперболы, асимптоты которой образуют угол $\pi/3$ с лучом AB; центр C делит отрезок AB в отношении $1/2$, а точка D пересечения с прямой AB — в отношении 2.
259. Нет.

К главе 3

§ 3.1

260. 1) $4x-y-20=0$; 4) $x+2y-5=0$; 7) $3x+2y+1=0$;
2) $x-1=0$; 5) $7x-2y+14=0$; 8) $x-3y+8=0$.
3) $2x+y+1=0$; 6) $y=2$;
261. Например, $x=3+3t$, $y=-1+2t$; отрезок $9/2$ на оси Ox и отрезок -3 на оси Oy; $2/3$. **262.** $2x+3y-8=0$.
263. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$; $x = x_1-(x_2-x_1)t$, $y = y_1-(y_2-y_1)t$.
264. $5x+7y-11=0$. **265.** $7x+y+18=0$.
266. $3x+2y-6=0$, $3x+8y+12=0$.
267. Отрезок, соединяющий середину основания с серединой высоты треугольника.

Указание. Принять за оси координат основание и высоту треугольника.
268. Отрезок, соединяющий середины диагоналей.

Указание. Принять за оси координат диагонали четырехугольника.

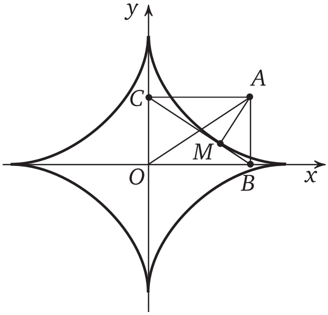

Рис. 13

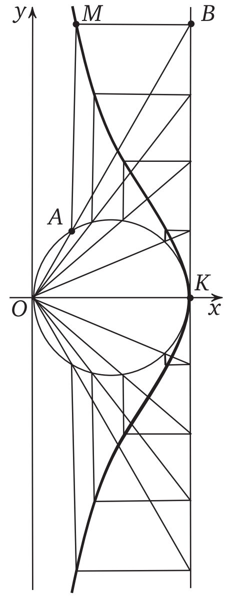

Рис. 14

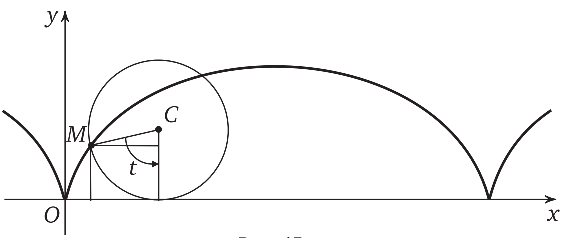

Рис. 15

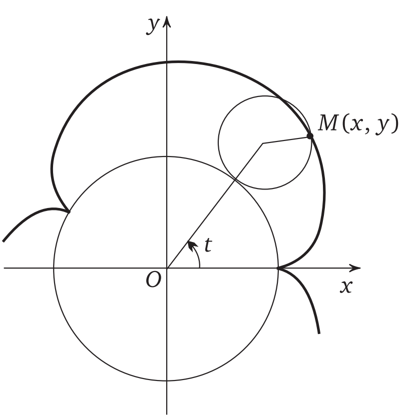

Рис. 16

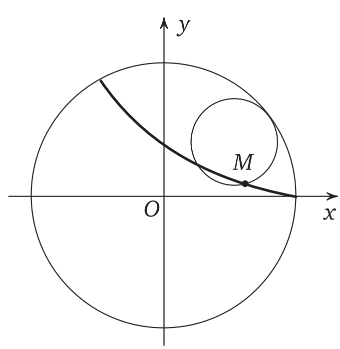

Рис. 17

§ 3.2

269. 1) $Aa+Bb\neq 0$; 2) $Aa+Bb=0$, $Ax_0+By_0+C\neq 0$;
3) $Aa+Bb=0$, $Ax_0+By_0+C=0$.

270. 1) $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$; 2) $a_1b_2-a_2b_1=0$, $(x_2-x_1)b_1-(y_2-y_1)a_1\neq 0$;
3) $a_1b_2-a_2b_1=0$, $(x_2-x_1)b_1-(y_2-y_1)a_1=0$.

271. 1) Параллельны; 2) совпадают; 3) пересекаются в точке $\left(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$;
4) пересекаются в точке $(-1, 4)$; 5) совпадают; 6) параллельны.

272. 1) $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$ и все миноры $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ отличны от нуля;

2) $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}\neq 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0$;

3) миноры $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ и определитель $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ должны быть отличны от нуля;

4) только один из трех миноров $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, а также $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$;

5) два уравнения пропорциональны и только один из трех миноров $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ равен нулю;

6) ровно два уравнения пропорциональны и $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$;

7) три уравнения пропорциональны.

273. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$.

274. В любом, кроме -1. **275.** $x+y-12=0$.

276. Всегда делит в отношении $(C_1-C_3):(C_3-C_2)$.

277. 1) Первые две параллельны, а третья их пересекает;
2) образуют треугольник;
3) пересекаются ровно в одной точке, причем никакие две не совпадают;
4) попарно параллельны, причем вторая прямая делит полосу между первой и третьей в отношении $\frac{15}{13}$;
5) первые две совпадают, а третья их пересекает;

6) первая и третья совпадают, а вторая им параллельна;

7) все три прямые совпадают.

279. Любые три прямые, не лежащие в одном пучке, т. е. такие, что либо они образуют треугольник, либо две прямые параллельны, а третья их пересекает.

280. Возможны следующие случаи:

1) одна прямая; 3) несобственный пучок;

2) собственный пучок; 4) все прямые плоскости.

281. $32x-9=0$, $32y-19=0$, $19x-9y=0$. **282.** $R\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\lambda=\frac{1}{3}$.

284. 1) $\lambda\mu\nu=1$, $1+\lambda+\lambda\mu\neq 0$; 2) $\lambda\mu\nu=1$, $1+\lambda+\lambda\mu=0$.

Указание. Ввести систему координат, принимая за начало координат точку A, а за базис — векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

§ 3.3

285. Числа Ax_0+By_0+C и Ax_0+By_0+D имеют разные знаки.

286. Точка B лежит в полосе между данными прямыми, точки C и D — в разных полуплоскостях, а точка A — на второй прямой.

287. $\lambda=-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

288. 1) Продолжение отрезка за точку B; 2) отрезок AB;

3) продолжение отрезка за точку A.

290. Данная прямая пересекает стороны CB и AB и продолжение отрезка AC за точку A.

291. Нет.

292. $\mathbf{a}_1=(A_1B_2-A_2B_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)\cdot(-B_1, A_1)$,

$\mathbf{a}_2=(A_1B_2-A_2B_1)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)\cdot(B_2, -A_2)$.

293. Числа

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}(A_1x_0+B_1y_0+C_1),\quad \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}(A_2x_0+B_2y_0+C_2),\quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}(A_3x_0+B_3y_0+C_3)$$

должны иметь одинаковые знаки.

§ 3.4

294. $2x+y-2=0$. **295.** $(2, 3)$. **296.** $(-1, 4)$. **297.** $(-3, 4)$.

298. $x+y+8=0$.

299. Основания: $x+7y-8=0$, $x+7y-58=0$;

боковые стороны: $3x-4y-24=0$, $4x+3y+18=0$.

300. $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$.

301. $(-3, 0)$, $(-15, -8)$. **302.** $8x+6y-27=0$, $8x+6y+13=0$.

303. $x=3$, $3x-4y-13=0$. **304.** $x+4=0$, $3x-4y+20=0$.

305. Две прямые: $x-2y=0$ и $6x+3y+10=0$.

306. $\dfrac{\operatorname{sgn}(A_1x_0+B_1y_0+C_1)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)=\dfrac{\operatorname{sgn}(A_2x_0+B_2y_0+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2)$.

307. $7x-y+1=0$. **308.** $x-y+1=0$.
309. $y+1=0$ и $8x-15y+41=0$.
310. $x-y=0$, $7x-56y+25=0$, $77x+21y-50=0$.
311. $(-1,-5)$, $(-2,2)$. **312.** $3x-y+9=0$, $3x-y-3=0$, $x+3y+7=0$.
313. Два решения:

$$x-3y+1=0,\quad x-3y+12=0,\quad 3x+y-1=0,\quad 3x+y+10=0 \quad \text{и}$$
$$7x+y-15=0,\quad 7x+y-26=0,\quad x-7y+7=0,\quad x-7y-4=0.$$

314. $x^2+(y-4)^2=5$; $x^2+(y+1)^2=5$.
315. $3x-4y+21=0$, $3x-4y+1=0$.
316. $3x-4y+4=0$, $3x-4y-21=0$. **317.** $(5/12, -5/12)$.
318. Два решения: $C(-2,4)$, $r=\sqrt{2}$ и $C(-3,1)$, $r=2\sqrt{2}$.
319. $C(-2,-6)$, $r=2\sqrt{2}$. **320.** 1) $(-1,2)$; 2) $(-11,-18)$.
321. $x-1=0$, $(\sqrt{5}-\sqrt{2})x-(\sqrt{5}+2\sqrt{2})y-3\sqrt{2}=0$,
$(\sqrt{5}+\sqrt{2})x+(\sqrt{5}+2\sqrt{2})y-3\sqrt{2}-2\sqrt{5}=0$;
$C(1,-7+2\sqrt{10})$, $r=2(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$.
322. $C'(5-2\sqrt{10},1)$, $r=2(\sqrt{5}-\sqrt{2})$. **323.** $(-3,-3)$.
325. Два решения:
1) $A_1B_1\colon x+2y-3=0$, $B_1C_1\colon 2x-y-6=0$,
$C_1D_1\colon x+2y-23=0$, $D_1A_1\colon 2x-y+14=0$;
2) $A_2B_2\colon x+2y-3=0$, $B_2C_2\colon 2x+y-18=0$,
$C_2D_2\colon x+2y-23=0$, $D_2A_2\colon 2x+y+2=0$.
326. Два решения:
1) $A_1B_1\colon 3x+5y-57=0$, $B_1C_1\colon 5x-3y+37=0$,
$C_1D_1\colon 3x+5y-9=0$, $D_1A_1\colon 5x-3y-11=0$;
2) $A_2B_2\colon 9x-y-27=0$, $B_2C_2\colon x+9y-31=0$,
$C_2D_2\colon 9x-y+21=0$, $D_2A_2\colon x+9y-79=0$.
327. $x-7y+32=0$, $x-y+2=0$. **328.** 1) $\pi/5$; 2) $4\pi/5$. **329.** $3\pi/4$.
330. $5x+y-16=0$, $x-5y+2=0$.
331. $\operatorname{tg}(\widehat{\ell_1,\ell_2})=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}(\widehat{\ell_2,\ell_3})=\dfrac{9}{8}$, $\operatorname{tg}(\widehat{\ell_3,\ell_1})=-\dfrac{7}{3}$.
332. $\arccos\left(\dfrac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)}}\operatorname{sgn}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\right)$.
333. $M_1(4,0)$, $M_2(-1,5)$. **334.** $2x-y+4=0$. **335.** $7x+y+12=0$.
336. $C(-1,-4)$. **337.** $-\dfrac{3}{5}$.
338. $\cos\varphi=-\operatorname{sgn}\big((A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)\big)\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.
339. $\cos\varphi_{12}=-\operatorname{sgn}\left(\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}\right)\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.
340. $(A_1A_2+B_1B_2)\cdot\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}<0$.

§ 3.5

341. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k\sqrt{\det G}}{g_{11}+kg_{12}}$. **342.** $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k\sin\omega}{1+k\cos\omega}$.

343. $\operatorname{tg}\varphi=(k_2-k_1)\sqrt{\det G}/(g_{11}+g_{12}(k_1+k_2)+g_{22}k_1k_2)$.

344. $\operatorname{tg}\varphi=(k_2-k_1)\sin\omega/(1+(k_1+k_2)\cos\omega+k_1k_2)$.

345. $A_1A_2g_{22}-g_{12}(A_1B_2+A_2B_1)+B_1B_2g_{11}=0$.

346. $1+(k_1+k_2)\cos\omega+k_1k_2=0$.

347. $(A\cos\omega-B)(x-x_0)+(A-B\cos\omega)(y-y_0)=0$.

348. 1) $g_{11}x+g_{12}y+C=0$ (в частном случае $x+y\cos\omega+C=0$),

2) $g_{21}x+g_{22}y+C=0$ (в частном случае $x\cos\omega+y+C=0$),

где C принимает все действительные значения.

349. $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|\sqrt{\det G}}{\sqrt{g_{11}A^2-2g_{12}AB+g_{22}B^2}}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{g^{11}A^2+2g^{12}AB+g^{22}B^2}}$, где g^{ij} — метрические коэффициенты базиса $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, взаимного с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

350. $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|\sin\omega}{\sqrt{A^2-2AB\cos\omega+B^2}}$. **351.** $d=3$.

352. $x\sqrt{g_{11}}\pm y\sqrt{g_{22}}=0$; в частном случае $x\pm y=0$.

К главе 4

§ 4.1

353. $2x-y+4z-7=0$. **354.** $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

355. 1) $x-1=0,\ y-2=0,\ z-3=0$;

2) $x=1+t,\ y=2,\ z=3$; $x=1,\ y=2+t,\ z=3$; $x=1,\ y=2,\ z=3+t$;

3) $x=t,\ y=2t,\ z=3t$.

356. $-x+y+z+2=0$. **357.** $-9x+5y+7z+7=0$.

358. $x=1-3u-2v,\ y=2-u,\ z=5-4u-2v$; $x+y-z+2=0$.

359. $\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{pmatrix}=0$.

360. Четыре решения: $x+y+z-9=0$, $x+y-z-7=0$, $x-y+z+1=0$, $-x+y+z-3=0$.

361. $2x+4y-z=9$. **362.** $\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ \alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=0$.

363. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{\sqrt2}=\dfrac{z-3}{-1}$. **364.** $(-1,1,1)$. **365.** $x=2+t,\ y=2t,\ z=0$.

366. 1) $z=0,\ 3x+2y-6=0$; 2) $15x+10y+6z-30=0$; 3) $3x+2y-6=0$.

367. $x=2+2t,\ y=3+2t,\ z=1+t$.

368. 1) $x+2y-z-2=0$; 3) $7x-9y-3z+5=0$;

2) $x-y+z-4=0$; 4) $3y-5z+12=0$.

369. 1) $6x-7y-4z+10=0$, 2) $x+y+4z-8=0$, 3) $7x-y+4z-4=0$.

370. 1) $7x+6y-11z+13=0$, 2) $2x+13y-15z-7=0$.

371. $x=-1+t$, $y=-3+4t$, $z=1-t$. **372.** $2x+y-1=0$.
373. 1) $(1, 3, 1)$; 2) $u=1/2$, $v=0$.
374. 1) $(-6, -4, -3)$; 2) $u+v=1$, $u=0$, $v=0$; 3) $39u+9v-1=0$.
375. $\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0. \end{cases}$ **376.** $\begin{cases} 5x+y-8z+17=0, \\ 12x+9y-16z+18=0. \end{cases}$
377. $\begin{cases} y-2z+4=0, \\ 3x+4y-z-10=0. \end{cases}$

§ 4.2

379. 1) Пересекаются по прямой $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$;
2) совпадают; 3) параллельны;
4) пересекаются по прямой $\dfrac{x-1}{24}=\dfrac{y-3}{25}=\dfrac{z-2}{1}$;
5) совпадают; 6) параллельны.
380. 1) Параллельны; 2) пересекаются в точке $(0, 6, 1)$;
3) прямая лежит в плоскости; 4) пересекаются в точке $(2, 1, 1)$;
5) параллельны.
381. 1) Пересекаются; 2) совпадают; 3) параллельны;
4) скрещиваются; 5) параллельны.
382. 1) $r=R=2$; 2) $r=1, R=2$; 3) $r=R=1$.
383. 1) $r=3$; 2) $r=2$, $R=3$; 3) $r=R=2$.
384. 1) $Aa+Bb+Cc\neq 0$; 2) $Aa+Bb+Cc=0$;
3) $Aa+Bb+Cc=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.
385. 1) $R=3$; 2) $R=r=2$; 3) $R=2$ и $r=1$; 4) $R=r=1$.
386. 1) $(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(aA_2+bB_2+cC_2)-(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+$ $+D_2)(aA_1+bB_1+cC_1)\neq 0$;

2) $(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(aA_2+bB_2+cC_2)-(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)\times$ $\times(aA_1+bB_1+cC_1)=0$ и по крайней мере одно из чисел $aA_1+bB_1+cC_2$ или $aA_2+bB_2+cC_2$ отлично от нуля;

3) $aA_1+bB_1+cC_1=0$, $aA_2+bB_2+cC_2=0$ и по крайней мере одно из чисел $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1$ или $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2$ отлично от нуля;

4) $aA_1+bB_1+cC_1=0$, $aA_2+bB_2+cC_2=0$, $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$.

387. Плоскость, параллельная данным прямым и проходящая через точку, делящую в отношении λ один из указанных отрезков.
388. 1) $r=3$; 2) $r_1=r_2=r_3=r=R=2$; 3) $r_1=r_2=r_3=r=2$, $R=3$;
4) $r=2$, $R=3$, $(r_1-1)(r_2-1)(r_3-1)=0$;
5) $r=1$, $R_1=R_2=R_3=R=2$; 6) $r=R=2$, $(r_1-1)(r_2-1)(r_3-1)=0$;
7) $r=1$, $R=2$ $(R_1-1)(R_2-1)(R_3-1)=0$; 8) $r=R=1$.
389. 1) Имеют единственную общую точку;
2) первая и третья параллельны, а вторая их пересекает;

3) три плоскости попарно параллельны, причем первая делит любой отрезок с концами на второй и третьей в отношении $5:12$;

4) попарно различны и содержат одну общую прямую;

5) образуют призму;

6) первая и третья совпадают, а вторая их пересекает.

390. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$,

$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$.

391. 1) $R<4$; 2) $r=R=2$; 3) $r<R<4$. **393.** $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$.

394. 1) Возможны случаи: единственная плоскость, пучок плоскостей, связка плоскостей;

2) те же случаи, что и в предыдущем пункте, а также все плоскости.

395. 1) $x+6y-1=0$; 2) $3x+z-3=0$. **396.** $2x-7y-4z+7=0$.

397. Два решения: $7x-2y+7z+4=0$, $x-z+4=0$.

398. $x+4y-2z+1=0$. **399.** $50x+17y+5z-68=0$.

400. $100x+34y+10z-17=0$. **401.** Два решения: $6x-y=0$, $y=0$.

402. Семь плоскостей:

$$x-z-6=0, \quad x+y-10=0, \quad x+2y-z-8=0, \quad 2x+y-z-14=0,$$
$$x-y-z-2=0, \quad 2x+y+z-16=0, \quad 5x+y-2z-28=0.$$

403. $\begin{cases} 5x-2y-2z-3=0, \\ 17x-11y+z+6=0. \end{cases}$ **404.** $4y-3z-3=0$. **405.** $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=3$.

406. $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}+\dfrac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}+\dfrac{A_3x+B_3y+C_3z+D_3}{A_3x_0+B_3y_0+C_3z_0+D_3}=3$.

§ 4.3

407. Точки B и C. **408.** $x-y+3z-9=0$.

409. Плоскость пересекает продолжение отрезка AB за точку B.

410. $-\dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}$. **411.** $\begin{vmatrix} x_0-x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_0-y_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ z_0-z_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2-x_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_2-y_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ z_2-z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$.

413. Числа $Ax_0+By_0+Cz_0+D$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+E$ имеют разные знаки.

414. $(A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 + D_i)\, d_i > 0$, где d_i — алгебраическое дополнение элемента D_i, $i = 1, 2, 3, 4$, в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}.$$

415. 1) Три решения: $3x + y - 5 = 0$, $x + 3y + 2z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$, точка P лежит внутри параллелограмма в первом случае и вне — во втором и третьем;

2) $x + 3y + 2z - 12 = 0$, точка P лежит внутри параллелограмма.

§ 4.4

416. $x - 3y - z + 6 = 0$. **417.** $2x + 3y - 2z - 3 = 0$.
418. $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$. **419.** $3x - 4y - 5z - 13 = 0$.
420. $2x + 3y + 7z - 1 = 0$.
421. $x = 2 + u + 2v$, $y = -1 - 2u + 3v$, $z = 1 + u - v$.
422. $2x - 7y - 6z - 5 = 0$. **423.** $5x + 3y - 2z + 1 = 0$.
424. $23x + 7y - 62z - 19 = 0$, $59x - 17y + 7z - 40 = 0$.
425. $x = 1$, $y = -7t$, $z = 2t$; $x = t$, $y = -7$, $z = 2t$.
426. $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$, $z = z_0 + Ct$. **427.** $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$, $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$.
428. Линия пересечения плоскостей

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

429. $\sqrt{14}$. **430.** $\sqrt{5/6}$. **431.** $(-5, 1, 0)$. **432.** $(9, 2, 11)$.
433. $(0, 0, -2)$, $\left(0, 0, -\dfrac{82}{13}\right)$. **434.** $(13, 4, -9)$. **435.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
436. Два решения: $x + 3y - z + 13 = 0$, $x + 3y - z - 9 = 0$.
437. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **438.** $\dfrac{5}{6\sqrt{6}}$. **439.** $\dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. **440.** $\arccos \dfrac{1}{15\sqrt{2}}$.
441. 1) $4x - 4y + 4z - 7 = 0$, $10x + 6y - 4z - 5 = 0$;
2) $7x - 5y - 2z + 8 = 0$, $x + 7y - 14z - 10 = 0$.
442. $64x - 47y - 16z + 75 = 0$.
443. $(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0$.
444. В тупом. **445.** $4x - 16y - 4z - 1 = 0$. **446.** $18x - 2y - 4z - 5 = 0$.
447. $5x + 3y - 6z + 6 = 0$. **448.** $\left(-\dfrac{19}{6}, -\dfrac{5}{6}, 0\right)$.
449. Центр $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$, радиус равен $\dfrac{3}{2}$.
450. В зависимости от расположения плоскостей сфер может быть 5, 6, 7 или 8.

451. $\arccos\frac{1}{3}$. **452.** $x=3-t,\ y=2+t,\ z=1+t$. **453.** $\frac{\pi}{4}$.

454. Два решения: $x+3y=0,\ 3x-y=0$.

455. 1) $x+y+z\pm a=0,\ -x+y+z\pm a=0,\ x-y+z\pm a=0,\ x+y-z\pm a=0$;

2) $\arccos\frac{1}{3}$; 3) $C(0,0,0),\ r=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

456. Два решения: $2x+y+1=0,\ y-2z+3=0$.

457. Два решения: $x+y+z=0,\ x+y-z+2=0$.

Указание. Рассмотреть пучок плоскостей, осью которого является данная прямая.

458. $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_3A_1+B_3B_1+C_3C_1)(A_2A_3+B_2B_3+C_2C_3)<0$.

459. $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; $\ell: x=2t-\frac{2}{3},\ y=2t,\ z=t+\frac{11}{6}$; $r=1$.

460. $\begin{cases} 5x+6y-2z+1=0, \\ 10x-11y-8z-5=0. \end{cases}$ **461.** $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-3}$.

462. $5x-11y+4z+5=0,\ x+y-1=0;\ d=3\sqrt{2}$;

точки пересечения $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{17}{6}\right),\ \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{7}{6}\right)$.

463. $\frac{1}{\sqrt{21}}$; $26x-y+11z+26=0,\ 10x-27y+z-1=0$.

464. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{\frac{5}{2}}$. **465.** 2. **466.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

§ 4.5

467. $d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{\Delta}$, где

$$\Delta = g^{11}A^2+g^{22}B^2+g^{33}C^2+2g^{23}BC+2g^{31}CA+2g^{12}AB = -\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}.$$

Указание. Нормальный вектор к плоскости $\mathbf{n}=A\mathbf{e}^1+B\mathbf{e}^2+C\mathbf{e}^3$, где $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3$ — базис, взаимный с базисом $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$; $g^{ij}=(\mathbf{e}^i,\mathbf{e}^j)$.

468. $\arccos(\pm\lambda/\sqrt{\mu\nu})$, где

$$\lambda = g^{11}A_1A_2+g^{22}B_1B_2+g^{33}C_1C_2+g^{12}(A_1B_2+A_2B_1)+$$
$$+g^{23}(B_1C_2+B_2C_1)+g^{13}(C_1A_2+C_2A_1),$$
$$\mu = g^{11}A_1^2+g^{22}B_1^2+g^{33}C_1^2+2g^{12}A_1B_1+2g^{23}B_1C_1+2g^{13}C_1A_1,$$
$$\nu = g^{11}A_2^2+g^{22}B_2^2+g^{33}C_2^2+2g^{12}A_2B_2+2g^{23}B_2C_2+2g^{13}C_2A_2,$$

или

$$\cos\varphi = \mp\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} : \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_2 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & B_2 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix}}.$$

469. $g^{11}A_1A_2+g^{22}B_1B_2+g^{33}C_1C_2+g^{12}(A_1B_2+A_2B_1)+g^{23}(B_1C_2+B_2C_1)+$ $+g^{13}(C_1A_2+C_2A_1)=0$, или

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

470. $\varphi=\arcsin\bigl(|aA+bB+cC|/\sqrt{mn}\bigr)$, где

$$m=g_{11}a^2+g_{22}b^2+g_{33}c^2+2g_{12}ab+2g_{23}bc+2g_{13}ac,$$
$$n=g^{11}A^2+g^{22}B^2+g^{33}C^2+2g^{12}AB+2g^{23}BC+2g^{13}AC.$$

471. $(g_{11}a+g_{12}b+g_{13}c):(g_{12}a+g_{22}b+g_{23}c):(g_{13}a+g_{23}b+g_{33}c)=A:B:C$. или $(g^{11}A+g^{12}B+g^{13}C):(g^{12}A+g^{22}B+g^{23}C):(g^{13}A+g^{23}B+g^{33}C)=a:b:c$.

472. $V=\dfrac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix}}\cdot\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix}\right|.$

473. $\dfrac{\det G}{g_{33}}(g^{11}x_0^2+2g^{12}x_0y_0+g^{22}y_0^2)$.

К главе 5

474. $x'=-x+1$, $y'=-y+1$. **475.** $O(-4,-1)$, $\mathbf{e}_1(-2,-1)$, $\mathbf{e}_2(-5,-2)$.

476. 1) $O'(-5,1)$, $\mathbf{e}_1'=(3,-1)$, $\mathbf{e}_2'=(-4,2)$; 2) $\mathbf{a}=(-1,1)$;

3) $x'=x+2y+3$, $y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}y+1$; 4) $(-6,2)$;

5) $x+3y+2=0$, $x+2y+3=0$; 6) $9x'-14y'-12=0$.

477. 1) $x=\dfrac{1}{3}x'+\dfrac{1}{3}y'-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}x'-\dfrac{1}{3}y'+\dfrac{7}{3}$;

2) $O'\Bigl(-\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3}\Bigr)$, $\mathbf{e}_1'=\dfrac{1}{3}(1,2)$, $\mathbf{e}_2'=\dfrac{1}{3}(1,-1)$;

3) $O(-2,-3)$, $\mathbf{e}_1=(1,2)$, $\mathbf{e}_2=(1,-1)$.

478. $x'=\dfrac{3}{11}x+\dfrac{2}{11}y-\dfrac{1}{11}$, $y'=-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{2}{5}$.

479. $5x'-2y'-17=0$. **480.** $x-38y-116=0$.

Указание. Принять данные стороны треугольника за оси, а точку N — за единичную точку новой системы координат.

481. $x-5y+3=0$.

Указание. Принять за новые оси координат данные стороны треугольника, а за единичную точку — точку пересечения его медиан.

482. $3x+8y-17=0$, $6x-y-17=0$, $9x+7y+17=0$.

Указание. Принять медианы треугольника за новые оси координат, а данную вершину — за единичную точку.

483. $x=\dfrac{x'}{2\cos(\omega/2)}-\dfrac{y'}{2\sin(\omega/2)}$, $y=\dfrac{x'}{2\cos(\omega/2)}+\dfrac{y'}{2\sin(\omega/2)}$.

484. $x = -\dfrac{x'\cos\omega}{\sin\omega} + \dfrac{y'}{\sin\omega}$, $y = \dfrac{x'}{\sin\omega} - \dfrac{y'\cos\omega}{\sin\omega}$. **485.** $(2-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}-1)$.

486. $x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5}$, $y' = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y$. **488.** $(7, -11)$.

489. $x = -\dfrac{4}{5}x' - \dfrac{3}{5}y' - 3$, $y = -\dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y' - 2$.

490. $O(0,0,0)$, $A(-1,1,1)$, $B(1,-1,1)$, $C(1,1,-1)$.

491. $x = x' + 2y' - z' - 1$, $y = -x' + 2y' + z' + 3$, $z = -y' + z'$;
$x' = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}y + z + \dfrac{1}{2}$, $y' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}y - \dfrac{1}{2}$, $z' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}y + z - \dfrac{1}{2}$.

492. 1) $O'(1,-2,1)$, $\mathbf{e}'_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}'_2 = (2,1,-1)$, $\mathbf{e}'_3 = (-1,2,-1)$;
2) $x' = x + 3y + 5z$, $y' = -y - 2z$, $z' = y + z + 1$; 3) $(3,1,-1)$;
4) $x' + 2y' - z' + 1 = 0$, $y' + 2z' - 2 = 0$, $y' + z' - 1 = 0$;
5) $x' - 3y' - 8z' + 5 = 0$; 6) $\dfrac{x'+4}{2} = \dfrac{y'-2}{-1} = \dfrac{z'+2}{-1}$.

493. $x' = \dfrac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}$, $y' = \dfrac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}$,
$z' = \dfrac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3}$.

494. $x' = z$, $y' = -x$, $z' = -y$.

495. $x = -\dfrac{2}{7}x' + \dfrac{6}{7}y' - \dfrac{3}{7}z' - 2$, $y = -\dfrac{6}{7}x' - \dfrac{3}{7}y' - \dfrac{2}{7}z' + 4$, $z = \dfrac{3}{7}x' - \dfrac{2}{7}y' - \dfrac{6}{7}z' + 1$.

496. $x' = x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z$, $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}z$, $z' = \sqrt{\dfrac{2}{3}}z$.

497. $\sum\limits_i x'_i\alpha_{ki} = \sum\limits_j x_j\omega_{jk}$, $k = 1, 2, 3$.

498. $x = \dfrac{1}{3}x' - \dfrac{2}{3}y' + \dfrac{2}{3}z' + 1$, $y = -\dfrac{2}{3}x' - \dfrac{2}{3}y' - \dfrac{1}{3}z' + 2$,
$z = -\dfrac{2}{3}x' + \dfrac{1}{3}y' + \dfrac{2}{3}z' + 3$.

499. $x' = \dfrac{-x - y - z + 1}{\sqrt{3}}$, $y' = \dfrac{2x - y - z + 1}{\sqrt{6}}$, $z' = \dfrac{-y + z + 3}{\sqrt{2}}$.

500. $x' = \dfrac{2x + 2y + z + 2}{3}$, $y' = \dfrac{x - 2y + 2z}{3}$, $z' = \dfrac{2x - y - 2z - 1}{3}$.

К главе 6

§ 6.1

501. 1) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; 3) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

502. 1) $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{100} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

503. $S(-3,-1)$, $r = \sqrt{41}$, $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 41$.

504. $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$. **505.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$.

506. $(y-5)^2 - (x-2)^2 = 9$. **507.** $y^2 = 8x - 8$.

508. $3(y-6) + 2(x-2)^2 = 0$. **509.** $\dfrac{x^2}{196} + \dfrac{y^2}{145} = 1$, $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{48} = 1$.

510. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$.

511. $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$.

Указание. Перейти к новой ортогональной системе координат $O'x'y'$ с началом в центре эллипсе, для которой $O'x'$ — фокальная ось, а $O'y'$ — перпендикулярная ей прямая.

512. $x^2+2xy+y^2-12x+24y-54=0$. **513.** $x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$.

514. $x^2+2xy+y^2-6x+2y-7=0$. **515.** $4xy+3y^2-2y-1=0$.

516. $x^2-6xy+y^2-2x-2y+5=0$. **517.** $11x^2-20xy-4y^2+18x+36y=0$.

518. Два решения: $xy=1$ и $(2-x)y=1$. **519.** $\dfrac{x^2}{432}-\dfrac{y^2}{75}=1$.

520. $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=(A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)$.

521. Ветвь гиперболы с полуосями $a=\sqrt{S/\operatorname{tg}\alpha}$, $b=\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$, имеющая стороны угла своими асимптотами.

523. $4x^2+6xy-4y^2-26x+18y-39=0$.

524. $4xy+3y^2+4y-11=0$. **525.** $4x^2-4xy+y^2-16x-2y=0$.

526. $\dfrac{(x-y+1)^2}{8}+\dfrac{(x+y+1)^2}{2}=1$, или $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$.

527. $\dfrac{(x+y+1)^2}{4}+\dfrac{(x-y+1)^2}{12}=1$, или $x^2+xy+y^2+2x-y+2=0$.

528. $x^2+2xy+y^2+5x-y=0$. **529.** $\dfrac{(4x+3y-25)^2}{625}+\dfrac{(3x-4y)^2}{10000/9}=1$.

530.
$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}-\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+\frac{4(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)}{A^2+B^2}}.$$

531. $\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

§ 6.2

532. Фокусы $(\pm a, \pm a)$, соответствующие директрисы $x+y\pm a=0$.

533. 1) $(\pm 13, 0)$; 2) $(0, \pm 17)$. **534.** $F(0, 1)$. **535.** $x=-3/2$.

536. 1) $(0, \pm 4)$, $y=\pm 5$; 2) $(0, \pm 6)$, $y=\pm 2/3$; 3) $(0, 1/3)$, $y+1/3=0$.

537. 1) Эллипс: $\dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{3}=1$, центр $(-2, 1)$, большая ось $y=1$;

2) гипербола: $\dfrac{x'^2}{1}-\dfrac{y'^2}{1/4}=1$, центр $(1, -3)$, действительная ось $x=1$;

3) парабола: $y'^2=\dfrac{x'}{2}$, вершина $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, касательная в вершине $y=1$, положительное направление оси симметрии — вектор $(0, -1)$;

4) мнимый эллипс: $48x'^2+64y'^2=-1$, центр $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, большая ось $y=\dfrac{1}{4}$;

5) гипербола: $\dfrac{x'^2}{1/12}-\dfrac{y'^2}{1/8}=1$, центр $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, действительная ось $x=\dfrac{3}{2}$;

6) парабола: $y'^2=\dfrac{3x'}{2}$, вершина $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, касательная в вершине $y=-\dfrac{1}{2}$, положительное направление оси симметрии — вектор $(0, -1)$;

7) парабола: $y'^2=x'$, вершина $\left(-\dfrac{3}{16}, \dfrac{1}{4}\right)$, касательная в вершине $x=-\dfrac{3}{16}$, положительное направление оси симметрии — вектор $(-1, 0)$;

8) пара пересекающихся прямых: $3x'^2-2y'^2=0$, центр $(-1,1)$, биссектриса острого угла параллельна оси Oy.

538. 1) $(1,1)$; 2) $(-1,2)$;
3) прямая центров $4x+2y-5=0$; 4) нет центра.

539. 1) Мнимый эллипс: $\dfrac{x'^2}{4}+y'^2=-1$; $x'=\dfrac{x-y+3}{\sqrt{2}}$, $y'=\dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}$;

2) парабола: $y'^2=\dfrac{2}{\sqrt{5}}x'$; $x'=\dfrac{-2x+y+3}{\sqrt{5}}$, $y'=\dfrac{x+2y+1}{\sqrt{5}}$;

3) парабола: $y'^2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'$; $x'=\dfrac{-2x+y+\frac{21}{4}}{\sqrt{5}}$, $y'=\dfrac{x+2y+\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}$;

4) гипербола: $\dfrac{x'^2}{320}-\dfrac{y'^2}{160}=1$, $x'=\dfrac{3x+y-59}{\sqrt{10}}$, $y'=\dfrac{x-3y+12}{\sqrt{10}}$.

540. 1) Эллипс: $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$, центр $O'(2,3)$, угловой коэффициент большой оси $k=-\dfrac{1}{2}$;

2) эллипс: $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{1}=1$, $O'(1,1)$, $k=-1$;

3) эллипс: $\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{4}=1$, $O'(1,1)$, $k=-1$;

4) гипербола: $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, центр $O'(0,1)$, угловой коэффициент действительной оси $k=\dfrac{3}{2}$;

5) гипербола: $\dfrac{x'^2}{25}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'(1,0)$, $k=\dfrac{1}{4}$;

6) гипербола: $\dfrac{x'^2}{16}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'(1,-1)$, $k=\dfrac{4}{3}$;

7) парабола: $p=1$, вершина $(0,0)$, орт оси $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$;

8) парабола: $p=\sqrt{2}$, вершина $(1,1)$, орт оси $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

9) парабола: $p=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, вершина $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, орт оси $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

541. 1) $\dfrac{x'^2}{1}-\dfrac{y'^2}{9}=1$; 2) $x=\dfrac{x'+3y'}{\sqrt{10}}-1$, $y=\dfrac{3x'-y'}{\sqrt{10}}+2$;
3) центр $O'(-1,2)$; фокусы $(0,5)$, $(-2,-1)$;
4) уравнения директрис: $x+3y-6=0$, $x+3y-4=0$;
уравнения асимптот: $3x+4y-5=0$, $y-2=0$;
уравнения касательных в вершинах: $x+3y-5\pm\sqrt{10}=0$.

§ 6.3

542. 1) $x^2-y^2=1$; 2) $\dfrac{x^2}{2/3}-\dfrac{y^2}{2/5}=1$; 3) $x^2+\dfrac{y^2}{2/5}=1$; 4) $y^2=2\sqrt{\dfrac{2}{5}}x$;
5) $x^2-y^2=0$; 6) $\dfrac{x^2}{2/3}+\dfrac{y^2}{1/3}=-1$; 7), 8) таких кривых нет.

544. $I_1I_3<0$ и $I_2>0$; квадраты полуосей равны $-I_3/(\lambda_i I_2)$, где λ_i — корни уравнения $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$; $S=\pi|I_3|/I_2^{3/2}$.
545. $I_2<0,\ I_1I_3<0$. **546.** $I_1=I_3=0$. **548.** $F(x,y)-I_3/I_2=0$.
549. $I_2=0$ и $I_3\neq 0$; $p^2=-\dfrac{I_3}{I_1^3}$.
550. $I_2<0$ и $I_3=0$; $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, где $\lambda_1,\ \lambda_2$ — корни характеристического уравнения.
552. $d^2=-4I_2^*/I_1^2$. **553.** $I_1F(x_0,y_0)<0$. **554.** $I_1F(x_0,y_0)<0$.
556. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & b \end{vmatrix}<0.$

§ 6.4

557. 1) Парабола; 2) две параллельные прямые; 3) гипербола; 4) пара параллельных прямых.
558. 1) Эллипс; 2) парабола; 3) гипербола; 4) гипербола; 5) эллипс; 6) парабола; 7) пара пересекающихся прямых; 8) пара пересекающихся прямых; 9) пара пересекающихся прямых; 10) пара параллельных прямых.

§ 6.5

559. 1) $\left(\dfrac{A\alpha}{2}+\dfrac{B\beta}{2}-C\right)^2<(A^2+B^2)\left(\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma\right)$;
2) $\left(\dfrac{A\alpha}{2}+\dfrac{B\beta}{2}-C\right)^2>(A^2+B^2)\left(\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma\right)$;
3) $\left(\dfrac{A\alpha}{2}+\dfrac{B\beta}{2}-C\right)^2=(A^2+B^2)\left(\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\beta^2}{4}-\gamma\right)$;
560. $a_1x+a_2y=0$. **561.** $3x+4y-24=0,\ 3x-28y-120=0$.
562. 1) $2x\pm 3y+12=0$; 2) $10x+3\sqrt{7}y-48=0,\ 10x+51\sqrt{7}y-384=0$; 3) $8x+3\sqrt{2}y+36=0$; 4) точка лежит внутри эллипса, решений нет.
563. 1) $3x-y\pm 3\sqrt{5}=0$; 2) $5x-2y\pm 9=0$.
564. 1) $x+2=0,\ 5x+8y-6=0$; 2) $5x\pm 6y-8=0$; 3) $x-\sqrt{3}y-1=0$; 4) решений нет; 5) $17x-30y-16=0$; 6) решений нет.
565. 1) Решений нет; 2) $2x-y+2=0$; 3) $x-y+4=0,\ 4x-y+1=0$.
566. 1) $11x+18y-29=0,\ 5x+9y-14=0$; 2) $14x+27y-23=0$; 3) касательных нет.
567. 1) $0\neq\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$;
2) при выполнении одного из двух условий:
2′) $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=0,\ x_0y_0\neq 0$; 2″) $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$;
3) при выполнении одного из двух условий:
3′) $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$; 3″) $x_0=y_0=0$.

568. $A^2a^2+B^2b^2-C^2=0$. **569.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **570.** $a^2A^2-b^2B^2=C^2\neq 0$.

571. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **572.** $B^2p=2AC$. **575.** $y^2=4x$.

576. $x+2y\pm 9=0$, $x-2y\pm 9=0$. **577.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$.

578. $9x^2-264xy+16y^2-72x-96y+144=0$; $\left(\frac{8}{17}, \frac{9}{17}\right)$.

579. $2x^2-xy-x+y+5=0$. **580.** $25x^2-30xy+9y^2-150x-90y+225=0$.

581. $x^2+2xy+4y^2-6x-12y+9=0$. **584.** $a=\frac{\sqrt{269}}{2\sqrt{5}}$, $b=\frac{12}{\sqrt{5}}$.

585. Окружность радиусом $\sqrt{a^2+b^2}$ с центром в центре эллипса.

586. В системе координат, определенной данными прямыми, — часть окружности $x^2+y^2=a^2+b^2$, $x, y\in[a, b]$.

587. Окружность радиусом $\sqrt{a^2-b^2}$ с центром в центре гиперболы без точек пересечения с асимптотами, если $a>b$; пустое множество при $a\leqslant b$.

588. Касательная к параболе в ее вершине.

§ 6.6

589. $8x+25y=0$. **590.** $x=9/2$. **591.** $17x-4y-4=0$.

592. $2x-y=5$. **593.** $32x+25y-89=0$.

594. 1) $4x+5y=0$; 2) $14x-y-40=0$. **595.** $x-y-1=0$.

596. 1) Асимптоту с направлением (α, β); 2) всю плоскость.

597. $2x+3y-5=0$, $5x+3y-8=0$.

598. Диаметры первой кривой $3x-y+3=0$, $2y+3=0$,
второй — $3x-y+3=0$, $4y-3=0$.

599. 1) $x+y-2=0$, $x-y=0$; 2) $x+y=0$, $x-y-4=0$;
3) $2x-4y-5=0$; 4) $3x+y+1=0$, $x-3y+3=0$; 5) $2x-4y-1=0$.

602. $x^2+y^2-1=0$.

603. $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$.

Указание. Принять векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ за единичные векторы осей $O'x'$ и $O'y'$.

604. $x^2-2xy+2y^2-2x+1=0$. **605.** $y^2=2x$.

607. $x^2+4xy+4y^2-4x-4y=0$.

Указание. Принять диаметр за ось $O'x'$, а касательную — за ось $O'y'$.

608. $y=3x+2$, $y=3x-2$, $x+1=0$.

610. *Указание.* Перейти к новой системе координат, оси которой соединяют противоположные точки касания.

614. $9x^2+12xy+16y^2-72x-96y+144=0$.

615. $4x^2+6xy+9y^2-36x-54y=0$.

616. $9x^2-24xy+16y^2-60x-16y+256=0$.

617. $Q(2, 1/2)$, $R(2, 0)$, $S(3, 7/2)$.

618. Пара прямых: $(2x-y-2)(y-2)=0$.

619. Прямые PQ, PR и QR состоят из центров пар пересекающихся прямых, средние линии треугольника PQR — из центров пар параллельных прямых. Центры эллипсов и гипербол заметают области, отмеченные буквами Э и Г на рис. 18.

Указание. Принять вершину данного треугольника за начало, а две стороны, выходящие из нее, — за единичные векторы осей координат.

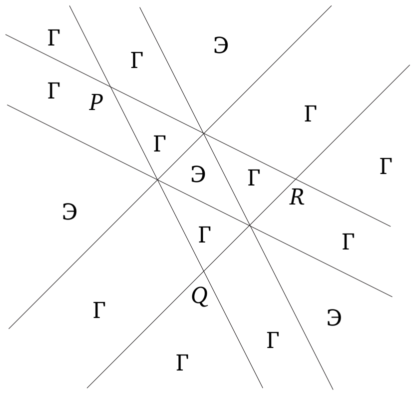

Рис. 18

620. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{cx}{a^2}=0$.

621. Гипербола $\frac{x(x-x_1)}{a^2}-\frac{y(y-y_1)}{b^2}=0$ без точек пересечения с данной гиперболой.

§ 6.7

622. $8x-6y-13=0$. **628.** $6x^2-4xy+2y^2+12x-99=0$.

629. $x^2-6xy-y^2+12x-6y+22=0$.

630. Условия 1, 4, 7, 10, 11 накладывают одно линейное соотношение на коэффициенты кривой Г; условия 6, 8, 9, 12 — два соотношения; условия 2, 3, 5, 13 накладывают нелинейные соотношения.

635. Прямая RS, где $PRQS$ — параллелограмм, стороны которого имеют данные направления.

636. $x^2-4xy-6x+9=0$. **637.** $2x^2+2xy+y^2-2x-2y=0$.

638. $6x^2+3xy-y^2+2x-y=0$. **639.** $9x^2+16y^2-36x-48y=0$.

642. $16x^2+47xy+30y^2-112x-172y+196=0$.

643. $10x^2+32xy+10y^2-10x-10y=0$.

645. $\lambda=\frac{f_{12}(x_0,y_0)f_{34}(x_0,y_0)f_{56}(x_0,y_0)}{f_{23}(x_0,y_0)f_{45}(x_0,y_0)f_{16}(x_0,y_0)}$, где (x_0, y_0) — произвольная точка данной кривой, отличная от P_i, $i=1, \ldots, 6$.

647. $x^2+2xy+y^2+24x-24y+144=0$. **648.** Прямая $x+y=1/2$.

К главе 7

§ 7.1

649. Два решения: $x^2+y^2+(z+1)^2=12$, $x^2+y^2+(z+4)^2=27$.

650. $C\left(1, \dfrac{8}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $r=\dfrac{\sqrt{74}}{3}$.

651. Два решения: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-6z+10=0$, $x^2+y^2+z^2+2x-$ $-2y+2z-6=0$.

652. $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\gamma=0$.

653. $\big(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\big)^2=(a^2+b^2+c^2)\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+$ $+(z-z_0)^2\big)\cos^2\varphi$.

Указание. Воспользоваться формулой для косинуса угла между векторами $\mathbf{u}$ и $\overrightarrow{SM}$, где $M(x, y, z)$ — произвольная точка конуса.

654. $11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0$.

655. $z^2=\pm 2xy$.

656. $z^2+2xy+2\sqrt{2}xz+2\sqrt{2}yz=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-$ $-3z'^2=0$.

657. $xy+yz+zx=0$. **658.** $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0$.

659. $19x^2-29y^2-4z^2-64xy-16xz+8yz-304x+512y+128z+1216=0$.

660. $3x^2-3y^2+z^2=0$.

661. $2xy=(z-a)^2$; каноническое уравнение $x'^2-y'^2-z'^2=0$.

662. $y^2+2x(z-p)=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-z'^2=0$.

663. $36x^2-9y^2-4z^2=0$. **664.** $ayz+bzx+cxy=0$.

665. $y^2-z^2+2xz-2yz-2x+2z=0$.

666. $\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2=r^2(a^2+b^2+c^2)$.

Указание. Воспользоваться формулой расстояния от точки до прямой.

667. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4zx+16x+14y+22z-39=0$.

668. $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-3=0$.

669. $4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz-28x+2y+16z+45=0$.

Указание. Написать каноническое уравнение цилиндра в системе $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$; перейти к исходной системе координат.

670. $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1=0$.

671. $\gamma^2x^2+(\gamma y-\beta z)^2=\gamma^2r^2$; каноническое уравнение $\gamma^2x'^2+(\gamma^2+\beta^2)y'^2=$ $=\gamma^2r^2$.

672. $(-x+z-3)^2-\dfrac{(-y+z-3)^2}{4}=1$. **673.** $y^2+z^2-2yz-2x+2z=0$.

674. $2x^2-y^2-z^2+xy-xz+2yz-4x-y+z+11=0$.

675. Эллипсоид вращения (рис. 19): $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$.

676. Двуполостный гиперболоид вращения (рис. 20): $\dfrac{z^2}{a^2}-\dfrac{x^2+y^2}{b^2}=1$.

677. Однополостный гиперболоид вращения (рис. 21): $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

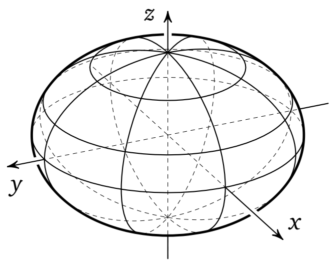

Рис. 19

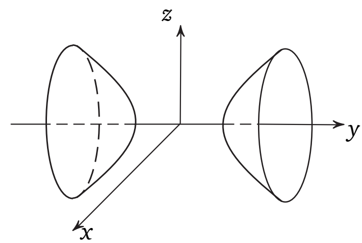

Рис. 20

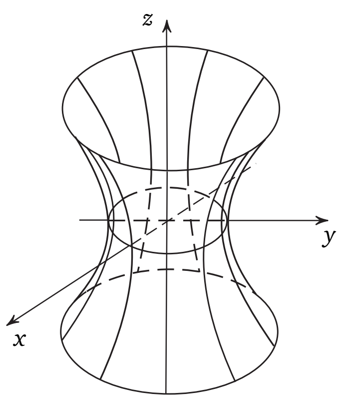

Рис. 21

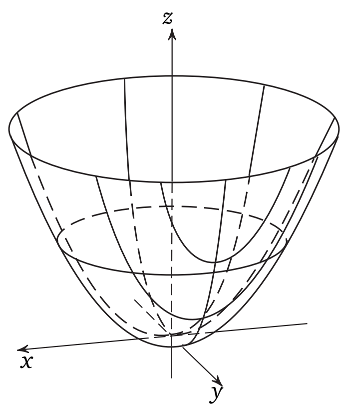

Рис. 22

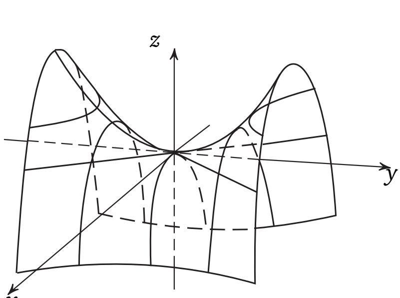

Рис. 23

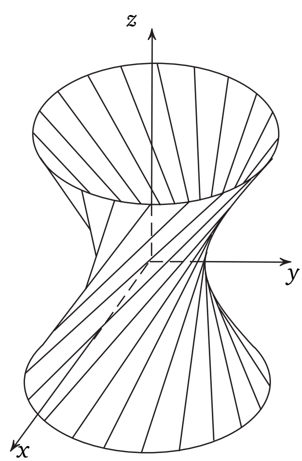

Рис. 24

678. $x^2+y^2=2pz$.

679. $z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$ — эллиптический параболоид, если оси парабол имеют одинаковые направления (рис. 22); $z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$ — гиперболический параболоид, если оси парабол имеют противоположные направления (рис. 23).

680. $x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\gamma=r^2$ (рис. 24). **681.** $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{(z-6)^2}{36}=0$.

682. $5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz-6x+6y+6z+10=0$.

Указание. В каноническом уравнении параболоида вращения $x'^2+y'^2=2pz'$ выражение $x'^2+y'^2$ есть квадрат расстояния от произвольной точки параболоида до оси $O'z'$, а $|z'|$ — расстояние от той же точки до плоскости $O'x'y'$.

683.
$$\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2=$$
$$=2p\sqrt{a^2+b^2+c^2}\big(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)\big).$$

684.
$$\frac{1}{a^2}\big(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)\big)^2+$$
$$+\frac{1}{b^2}\left(\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2\right)=1.$$

685. $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{(z-2)^2}{16}=1$. **686.** $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{108}-\dfrac{z^2}{36}=-1$.

687. $\dfrac{(x-2)^2}{1/3}+\dfrac{(y-3)^2}{3/4}=-2(z-6)$. **688.** $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36/5}=1$.

689. Два решения: $x^2-y^2+z^2-2z=0$; $x^2-y^2-z^2+4z=0$.

690. $x^2+y^2-4z^2-4z-1=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-4z'^2=0$.

§ 7.2

691. Центр $\left(\dfrac{10}{3}, -\dfrac{14}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$, радиус равен 3.

692. $8x+4y+z-100=0$, $2x-2y+z-28=0$.

693. $x^2+y^2+z^2+22x+16y-6z=0$. **694.** $y^2+z^2=1$.

696. Две окружности радиусом a. **697.** Центр $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, радиус $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

698. По двум окружностям, лежащим в плоскостях $z=\pm\sqrt{p/q-1}\,y$.

700. По двум эллипсам. **701.** Четыре прямые $x=\pm\dfrac{z+a}{\sqrt{2}}$, $y=\pm\dfrac{z-a}{\sqrt{2}}$.

702. $\arccos\dfrac{121}{125}$.

703. Гипербола, действительная полуось которой равна 4, мнимая полуось равна 8. Центр в точке $(9, 0, 0)$, действительная ось параллельна оси Oz.

704. Четыре плоскости $x=\pm3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\pm3\sqrt{2}$.

705. $p(a^2+b^2)+2c>0$. **706.** Прямая $\left(\dfrac{9}{2}, -1, 1\right)+(3, -2, 1)t$.

707. $x^2+y^2-12x-18y-2z+32=0$.

708. $x^2+y^2+z^2-2xy-2rx-2ry-2rz+r^2=0$; каноническое уравнение $\dfrac{x'^2}{r/\sqrt{2}}+\dfrac{z'^2}{r\sqrt{2}}=2y'$.

709. Две параболы (без вершин):

$$y=0,\quad x^2=2(p+q)z,\qquad z\neq 0;$$
$$x=0,\quad y^2=-2(p+q)z,\quad z\neq 0.$$

710. Однополостный гиперболоид $4x^2-y^2-z^2-10xy-10xz-y+z=0$; каноническое уравнение $12x'^2-18y'^2+2z'^2=1$.

Указание. Если принять плоскости симметрии за координатные плоскости, то уравнение поверхности можно записать в виде $Ax'^2+By'^2+Cz'^2+D=0$, где $|x'|$, $|y'|$, $|z'|$ — расстояния от точки поверхности до плоскостей симметрии.

711. Два решения:

$$(x+y+z+1)(x+y+z-1)=0 \quad \text{и} \quad (2x-y-z-2)(y-z+1)=0.$$

712. Круглый цилиндр, если прямые параллельны; конус второго порядка, если прямые пересекаются и не перпендикулярны; однополостный гиперболоид, если прямые скрещиваются и не перпендикулярны; пара перпендикулярных плоскостей, если прямые пересекаются или скрещиваются под прямым углом.

713. Однополостный гиперболоид при $k\neq 1$, гиперболический параболоид при $k=1$.

Указание. Принять за начало координат середину O общего перпендикуляра к двум прямым, за ось Oz — этот общий перпендикуляр, а за оси Ox и Oy — прямые, лежащие в плоскости, параллельной данным прямым, и являющиеся биссектрисами углов между проекциями данных прямых на эту плоскость.

§ 7.3

714. 1) Пара пересекающихся плоскостей $x+y+z-1=0$, $x+y-z+1=0$;

2) сфера $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2+z^2=\dfrac{16}{9}$;

3) круглый цилиндр $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$;

4) круговой конус $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(z-\dfrac{2}{3}\right)^2=0$;

5) пара параллельных плоскостей $2x-y\pm 6=0$.

715. 1) Эллипсоид $\dfrac{x'^2}{49}+\dfrac{y'^2}{49/4}+\dfrac{z'^2}{49/9}=1$; центр $(3, -1, 2)$, большая, средняя и малая оси соответственно параллельны осям Ox, Oy и Oz;

2) однополостный гиперболоид вращения $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{16}-\dfrac{z'^2}{16}=-1$; центр $(-4, 0, -6)$, ось вращения параллельна оси Ox;

3) круговой конус $x'^2-\frac{y'^2}{3}+z'^2=0$; вершина $(3,5,-2)$, ось вращения параллельна оси Oy;

4) параболоид вращения; $p=\frac{5}{12}$, вершина $\left(10,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения, направленный внутрь параболоида, $(-1,0,0)$.

716. 1) Круговой конус $-x'^2+y'^2+z'^2=0$; угол между осью и образующими конуса равен $\pi/4$, вершина $(0,0,0)$, направляющий вектор оси конуса $(1,1,0)$;

2) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z'$; вершина $(0,0,0)$, базисные векторы канонической системы координат $O'x'y'z'$: $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\mathbf{e}_3'=(0,0,1)$;

3) параболический цилиндр $z'^2=5x'$; $O'(0,0,0)$, базисные векторы канонической системы координат $O'x'y'z'$: $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right)$, $\mathbf{e}_3'=(0,0,1)$;

4) круговой конус $-4x'^2+y'^2+z'^2=0$; вершина $(0,0,0)$, направляющий вектор оси $(2,1,0)$;

5) гиперболический цилиндр $z'^2-2x'^2=1$; центр направляющей гиперболы $(0,0,0)$, направляющий вектор ее действительной оси $(1,1,0)$, направляющий вектор оси цилиндра $(-1,1,0)$.

717. 1) Однополостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{2/3}+\frac{y'^2}{2/3}-\frac{z'^2}{1/3}=1$; центр $O'(1,1,-1)$, направляющий вектор оси вращения $(2,1,-2)$;

2) параболоид вращения $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}z'$; вершина $O'(1,0,-1)$, направляющий вектор оси вращения $(2,1,-2)$;

3) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{1/2}+\frac{y'^2}{1/2}-\frac{z'^2}{1/4}=-1$; центр $O'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $(1,1,1)$;

4) эллипсоид вращения $x'^2+y'^2+\frac{z'^2}{4}=1$; центр $O'(1,1,1)$, направляющий вектор оси вращения $(1,1,1)$;

5) двуполостный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{1/6}+\frac{y'^2}{1/6}-\frac{z'^2}{1/2}=-1$; центр $O'\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, направляющий вектор оси вращения $(1,0,-1)$;

6) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{1}{6}$; линия центров $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$;

7) круглый цилиндр $x'^2+y'^2=\frac{2}{3}$; линия центров $x=y=z$;

8) круговой конус $x'^2+y'^2-2z'^2=0$; вершина $O'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $(1,1,1)$.

718. 1) Параболический цилиндр $y'^2=\frac{4x'}{3}$; $O'(2,1,-1)$,

$$\mathbf{e}_1'=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\quad \mathbf{e}_2'=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\quad \mathbf{e}_3'=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right);$$

2) эллиптический цилиндр $x'^2/2+y'^2=1$; $O'(0,1,0)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

3) эллиптический параболоид $x'^2+\dfrac{y'^2}{2/3}=2z'$; $O'(2,2,1)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);$$

4) гиперболический параболоид $x'^2-y'^2=2z'$; $O'(0,0,1)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},-\frac{4}{3\sqrt{2}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);$$

5) гиперболический параболоид $x'^2/2+y'^2=2z'$; $O'(1,2,3)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right);$$

6) эллипсоид $\dfrac{x'^2}{2}+y'^2+\dfrac{z'^2}{2/3}=1$; $O'(1,2,-1)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);$$

7) двуполостный гиперболоид $\dfrac{x'^2}{4/5}+\dfrac{y'^2}{4/15}-\dfrac{z'^2}{4/25}=-1$; $O'(0,1,-2/5)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\quad \mathbf{e}'_3=(0,0,1);$$

8) эллиптический параболоид $\dfrac{x'^2}{5\sqrt{2}/4}+\dfrac{y'^2}{\sqrt{2}/2}=2z'$; $O'\left(-\dfrac{1}{40},-\dfrac{19}{40},\dfrac{1}{2}\right)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);$$

9) однополостный гиперболоид $3x'^2+6y'^2-2z'^2=1$; $O'\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

10) гиперболический цилиндр $x'^2-y'^2=1/3$; $O'(-1,0,0)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

11) эллиптический цилиндр $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{4/3}=1$; $O'(-2,-2,0)$,

$$\mathbf{e}'_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \mathbf{e}'_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \mathbf{e}'_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

719. 1) Эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус;
5) эллиптический параболоид;
6) гиперболический параболоид;
7) эллиптический цилиндр;
8) гиперболический цилиндр;
9) параболический цилиндр;
10) гиперболический параболоид;
11) однополостный гиперболоид.

§ 7.4

720. 1) $I_2>0$, $I_1I_3>0$, $I_4<0$; 2) $I_2>0$, $I_1I_3>0$, $I_4>0$;
3) $I_2>0$, $I_1I_3>0$, $I_4=0$;
4) $I_3\neq 0$, $I_4>0$ и хотя бы одно из условий $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$;
5) $I_3\neq 0$, $I_4<0$ и хотя бы одно из условий $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$;
6) $I_2\leqslant 0$ или $I_1I_3\leqslant 0$, $I_4=0$; 7) $I_3=0$, $I_4<0$; 8) $I_3=0$, $I_4>0$.

Указание. Воспользоваться правилом знаков Декарта о числе положительных корней алгебраического уравнения.

722. 1) $I_4=I_3=0$, $I_2>0$, $I_1I_3^*<0$; 6) $I_4=I_3=I_2=0$, $I_3^*\neq 0$;
2) $I_4=I_3=0$, $I_2>0$, $I_1I_3^*>0$; 7) $I_4=I_3=I_2=I_3^*=0$, $I_2^*<0$;
3) $I_4=I_3=I_3^*=0$, $I_2>0$; 8) $I_4=I_3=I_2=I_3^*=0$, $I_2^*>0$;
4) $I_4=I_3=0$, $I_2<0$, $I_3^*\neq 0$; 9) $I_4=I_3=I_2=I_3^*=I_2^*=0$.
5) $I_4=I_3=I_3^*=0$, $I_2<0$;

723. 1) $\dfrac{x^2}{1/2}+\dfrac{y^2}{1/5}-z^2=1$; 4) $\dfrac{x^2}{1/\sqrt{6}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2/27}}=2z$; 7) $\dfrac{x^2}{1/2}+\dfrac{y^2}{1/6}=1$.
2) $\dfrac{x^2}{1/2}+\dfrac{y^2}{1/5}-z^2=-1$; 5) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{4}=1$;
3) $\dfrac{x^2}{1/2}+\dfrac{y^2}{1/5}-z^2=0$; 6) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1/2}+\dfrac{z^2}{2/5}=-1$;

724. $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$. **725.** $I_3=0$, $I_4<0$, $I_1^2=4I_2$; $p=\dfrac{\sqrt{-I_4}}{I_2}$.

726. $I_1=I_3=0$, $I_4>0$; $p=q=\dfrac{\sqrt{I_4}}{I_2}$.

727. $I_2=-I_1^2$, $I_3=-I_1^3$, $I_4\neq 0$; $x^2+y^2-z^2=\dfrac{I_4}{I_3^{4/3}}$. **728.** $(1, 1, 1)$; $-\dfrac{1}{2}<a<1$.

729. $k=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; $2x^2-4xy+(1\pm\sqrt{5})z^2=0$; оси вращения $(1\pm\sqrt{5})x-2y=0$, $z=0$.

730. $y^2+z^2+\dfrac{p}{r}xy-2px-2ry=0$.

Указание. Для конической поверхности $I_4=0$.

731. $x^2+y^2+z^2+\dfrac{a^2+b^2}{ab}xy-2ax-2by=0$.

732. $\dfrac{2xy}{c^2}+\dfrac{2yz}{a^2}+\dfrac{2zx}{b^2}=1$; двуполостный гиперболоид; каноническое уравнение при $a=b=c=1$: $x'^2+y'^2-2z'^2=-1$.

733. $z^2+3xz-yz+6x+2y-4=0$ и $z^2-2xy+2xz-yz+4x+2y-4=0$.

735. *Указание.* Использовать предыдущую задачу.

737. Сфера $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$.

§ 7.5

738. $a_1=a_2=a=0$, $a_3\neq 0$. **740.** $3x+4y-24=0$, $3x-28y-120=0$.

741. Два решения: $z=2$, $x+2y=8$.

742. Два решения: $2x-y-2z-8=0$, $14x-3y-6z-144=0$.

743. $4x-5y-2z+2=0$. **744.** Два решения: $x+2y-2=0$, $x+2y=0$.

745. Два решения: 1) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=1$; $x=a$, $\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$; $y=b$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$;

2) $\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; $x=a$, $\dfrac{y}{b}=-\dfrac{z}{c}$; $y=b$, $\dfrac{x}{a}=-\dfrac{z}{c}$.

746. $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}-\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\Big)z=1$.

747. $2x+3y-z+32=0$; $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+24}{2}=\dfrac{z+32}{8}$, $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+24}{2}=\dfrac{z+32}{4}$.

748. Точки $(1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$, угол равен $\pi/3$.

749. Точка пересечения $(-1,-1,0)$, угол равен $\pi/2$.

750. $\cos\varphi=\dfrac{83}{85}$. **751.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.

753. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$, $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$. **754.** $\dfrac{x+48}{4}=\dfrac{y+36}{-3}=\dfrac{z}{-24}$.

755. *Указание.* Данная плоскость пересекает параболоид по двум прямым.

756. 1) $\left(a\,\dfrac{x_0z_0/(ac)\pm y_0/b}{x_0^2/a^2+y_0^2/b^2},\, b\dfrac{y_0z_0/(bc)\mp y_0/b}{x_0^2/a^2+x_0^2/b^2},\, c\right)$; 2) $\left(\pm\dfrac{a}{b}y_0,\, \mp\dfrac{b}{a}x_0,\, c\right)$.

757. $\left(\sqrt{p},\, \sqrt{q},\, \dfrac{x_0}{\sqrt{p}}-\dfrac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$, $\left(\sqrt{p},\, -\sqrt{q},\, \dfrac{x_0}{\sqrt{p}}+\dfrac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$.

758. Гипербола, получающаяся при пересечении параболоида плоскостью $z=\dfrac{q-p}{2}$, когда $p\neq q$; пара прямых $\dfrac{x}{\sqrt{p}}\pm\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0$, $z=0$, когда $p=q$.

759. $4x^2+y^2-z^2=1$. **760.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix}=0.$

762. 1) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2>D^2$; 2) $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2>-D^2$;

3) $pA^2+qB^2>2CD$.

763. 1) $a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2=D^2$; 2) $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=D^2$;

3) $a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2=-D^2$; 4) $pA^2+qB^2=2CD$; 5) $pA^2-qB^2=2CD$.

764. $3x^2-4xy+z^2+2z-3=0$. **765.** $(2,3,4)$. **766.** $x-y=0$, $(2,3,0)$.

767. $4x+3y-12=0$, $(16,27,6)$. **768.** $x=a$. **769.** $3x+2y-z-25=0$.

772. 1) $a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_3z=0$, $a_{33}\neq 0$, $a_{12}\neq 0$, $a_3\neq 0$.

Указание. Из условия принадлежности осей Ox, Oy поверхности следует, что $a_{11}=a_1=a_2=a_{22}=0$; так как диаметр Oz сопряжен с плоскостью Oxy, то $a_{13}=a_{23}=0$.

773. Неверно. **774.** $z=xy$. **775.** $z^2=xy$.

776. $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_3z=0$. **777.** $x^2+y^2+z^2=1$.

778. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & B_1 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$

§ 7.6

779. Пересекает.

Указание. Написать параметрические уравнения плоскости в виде $x=u$, $y=v$, $z=-2u-2v+3$, подставить полученные выражения для x, y, z в уравнение эллипсоида и определить вид линии пересечения по ее уравнению в координатах u и v.

780. По гиперболе. См. указание к предыдущей задаче. **783.** $\dfrac{y}{b}\pm\dfrac{z}{c}=0$.

784. Две параллельные прямые: $\begin{cases}4x-3y+1=0,\\ 3x+4y-5z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x-3y-1=0,\\ 3x+4y-5z=0.\end{cases}$

785. $\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}+D=0,\\ \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)D+2z=0.\end{cases}$ **786.** По гиперболе.

787. По двум параллельным прямым.

788. $1<e\leqslant\sqrt{a^2+c^2}/c$. **789.** $cy\pm bz=0$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

790. 1) Если $a>b$, то $bz\pm\sqrt{a^2-b^2}\,y=0$; полуоси равны a; если $a<b$, то таких плоскостей нет.

Указание. Повернуть систему координат вокруг оси Ox.

2) Если $a<b$, то $az\pm\sqrt{b^2-a^2}\,x=0$; полуоси гиперболы равны b; если $a>b$, то таких плоскостей нет.

791. 1) Если $p>q$, то $y\sqrt{p-q}\pm z\sqrt{q}=0$; полуоси гипербол равны $\sqrt{pq}$; если $p\leqslant q$, то таких плоскостей нет;

2) если $p<q$, то $x\sqrt{q-p}\pm z\sqrt{p}=0$; полуоси гипербол равны $\sqrt{pq}$; если $p\geqslant q$, то таких плоскостей нет.

792. 1) Парабола, параметр $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, вершина $\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$, вектор оси параболы, направленный внутрь, $(1,0,1)$;

2) эллипс с полуосями $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, центр $\left(-\dfrac{6}{\sqrt{5}},0,-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\right)$, направляющий вектор большей оси $(0,1,0)$, направляющий вектор меньшей оси $(1,0,-1)$;

3) парабола, параметр $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, вершина $(0,0,0)$, вектор оси параболы, направленный внутрь, $(1,0,1)$.

Указание. Повернуть систему координат вокруг оси Oy на угол $\pi/4$.

793. Парабола

$$y'^2=\frac{3x'}{\sqrt{2}},\quad O'\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{2},\frac{11}{8}\right),\quad \mathbf{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \mathbf{e}_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Указание. Ввести в данной плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке $(0,0,1)$ и базисом $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, написать параметрическое уравнение данной плоскости и подставить выражения для x, y, z через координаты в плоскости в уравнение цилиндра.

794. Парабола $y'^2 = \dfrac{4\sqrt{2}x'}{5}$, $O'\Big(-\dfrac{8}{25}, \dfrac{6}{25}, \dfrac{2}{5}\Big)$, $\mathbf{e}'_1 = \Big(\dfrac{4}{5\sqrt{2}}, -\dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$, $\mathbf{e}'_2 = \Big(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\Big)$.

Указание. Ввести в данной плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке $(-1, 0, 0)$ и базисом $\Big(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\Big)$, $\left(\dfrac{16}{15\sqrt{2}}, \dfrac{13}{15\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$, написать параметрические уравнения этой плоскости, подставить выражения для x, y, z через плоскостные координаты в уравнение конуса и исследовать полученное уравнение.

795. Гипербола $\dfrac{7}{6}x'^2 - \dfrac{49}{54}y'^2 = 1$, $O'\Big(\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}, -\dfrac{1}{7}\Big)$, $\mathbf{e}'_1 = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big)$, $\mathbf{e}'_2 = \left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}, -\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\right)$.

796. $\Big(\dfrac{18}{13}, \dfrac{24}{13}, -\dfrac{25}{26}\Big)$, $\Big(-\dfrac{18}{13}, -\dfrac{24}{13}, \dfrac{25}{26}\Big)$.

797. $k < -\dfrac{5}{2}$.

Указание. Рассмотреть проекцию линии пересечения конуса и плоскости пучка на плоскость Oyz.

798. Две плоскости: $x - y + (-2 \pm \sqrt{7})(2x - z) = 0$.

Указание. Рассмотреть пучок плоскостей $x - y + k(2x - z) = 0$, проходящих через данную прямую. Ввести в плоскости пучка прямоугольную систему координат с базисом

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big), \quad \left(\frac{k-2}{\sqrt{6}\sqrt{5k^2+4k+2}}, \frac{-5k-2}{\sqrt{6}\sqrt{5k^2+4k+2}}, \frac{2k+2}{\sqrt{6}\sqrt{5k^2+4k+2}}\right),$$

затем записать параметрические уравнения плоскости пучка, подставить полученные выражения для x, y, z через плоскостные координаты в уравнение параболоида и воспользоваться условием $I_1 = 0$.

799. 1) Эллипс, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых;

2) эллипс, гипербола, пара пересекающихся прямых, парабола, две параллельные прямые;

3) эллипс, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых, гипербола, парабола, пара мнимых параллельных прямых;

4) эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых, пара совпадающих прямых, пара мнимых пересекающихся прямых;

5) эллипс, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых, парабола;

6) гипербола, пара пересекающихся прямых, парабола, прямая.

800. 1) $c\sqrt{a^2 - b^2}x \pm a\sqrt{b^2 - c^2}z + D = 0$, где $|D| < ac\sqrt{a^2 - c^2}$;

2) $c\sqrt{a^2 - b^2}y \pm b\sqrt{a^2 + c^2}z + D = 0$, где $D \in \mathbb{R}$;

3) $c\sqrt{a^2 - b^2}y + b\sqrt{a^2 + c^2}z + D = 0$, где $|D| > bc\sqrt{b^2 + c^2}$;

4) $c\sqrt{a^2 - b^2}y \pm b\sqrt{a^2 + c^2}z + D = 0$, где $D \in \mathbb{R}$, $D \neq 0$;

5) $\pm\sqrt{\dfrac{p-q}{p}}\,y+z+D=0$, где $D<\dfrac{p-q}{2}$;

6) $\sqrt{a^2-b^2}\,y\pm az+D=0$, где $D\in\mathbb{R}$.

801. b.

802. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}\neq 0$; из системы $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_1=\lambda A, \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_2=\lambda B, \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_3=\lambda C, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$ определяются координаты (x, y, z) центра линии пересечения.

803. $(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1)(x-x_0)+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2)(y-y_0)+$ $+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_3)(z-z_0)=0$.

804. Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}-\dfrac{zz_0}{c^2}=0$.

805. $\left(\dfrac{x_0(x-x_0)}{a^2}+\dfrac{y_0(y-y_0)}{b^2}+\dfrac{z_0(z-z_0)}{c^2}\right)^2=$
$$=\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right).$$

806. Эллипс $2x^2+2y^2-xy+6x+6y-18=0$, $z=-1$.

807. Два решения:
$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)-\left(r^2z_0\pm\sqrt{(1+r^2)(r^2z_0^2-x_0^2-y_0^2)}\right)(z-z_0)=0.$$

808. $(4, 5, 5)$ и $(8, 4, 4)$. **809.** Конус $x^2+y^2=\left(1+\dfrac{1}{r^2}\right)z^2$.

810. Гиперболический цилиндр $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=q^2-p^2$ без линии пересечения с плоскостью $2z=q^2-p^2$.

811. $C^2(A^2+B^2+C^2)^2=(B^2+C^2)^3$, $C\neq 0$.

К главе 8

§ 8.1

812. $f^{-1}\colon x'=2x+y-5,\ y'=3x-y+7$;
$f^{-1}\circ g\colon x'=-x+2y-8,\ y'=4x-3y+24$;
$g\circ f^{-1}\colon x'=x+8,\ y'=4x-5y+14$.

813. 1) $(-6, 4)$, $(-1, 1)$, $(-4, 3)$; 3) $(-38, 23)$, $(-26, 16)$, $(-31, 19)$;
2) $(-6, 4)$, $(-5, 3)$, $(-3, 2)$; 4) $(-6, 4)$, $(12, -7)$, $(7, -4)$.

814. $x'=3x+y-5$, $y'=-5x-4y+13$.

815. $x'=-2x+2y-3$, $y'=3x-y+6$.

816. $x'=-x-3y+5$, $y'=2x+4y-5$.

817. $x'=-\dfrac{18}{13}x-\dfrac{10}{39}y+\dfrac{36}{13}$, $y'=\dfrac{15}{26}x-\dfrac{8}{13}y+\dfrac{24}{13}$.

818. $x'=4x+2y$, $y'=7x-y+1$.

819. Любая такая тройка прямых аффинно эквивалентна одной из следующих троек: $x=0,\ y=0,\ x+y=0$; $x=0,\ y=0,\ x+y=1$; $x=0,\ x=1,\ y=0$; $x=0,\ x=1,\ x=k$, где $k\in\mathbb{R}$ и $k\neq 0, 1$.

820. 1) $u' = 2u + 3v - 1$, $v' = u + 2v - 2$;

2) $u' = 2u - v + 2$, $v' = -3u + 2u + 1$;

3) $u' = u + 2v + 9$, $v' = u + 3v + 7$;

4) $u' = 9u - 2v + 1$, $v' = 23u - 5v + 2$.

821. $(-1, -1)$. **822.** $13x + 7y - 41 = 0$.

823. Два решения: $(1, -1)$, $(51, -50)$.

824. Точка пересечения медиан треугольника.

825. Точки K, L, M переходят в середины отрезков AK, BL и CM соответственно; точка O неподвижна; геометрический смысл — гомотетия с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC и коэффициентом $-1/2$.

826. Неподвижная точка $(5, -4)$, инвариантные прямые $x - y - 9 = 0$, $x + y - 1 = 0$.

827. 1) Существуют (не более одной),

2) существуют (одна или бесконечно много),

3) существуют.

828. $u' = 5u$, $v' = -v$. **829.** Одна, две или бесконечно много.

830. $x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + (x_0(1 - \cos\varphi) + y_0\sin\varphi)$,

$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + (-x_0\sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi))$.

831. $x' = kx + x_0(1 - k)$, $y' = ky + y_0(1 - k)$.

832. $x' = -2y + 3$, $y' = 2x + 4$.

833. $x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{13}{5}$, $y' = -\frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{41}{5}$.

834. $x' = 3x - 4y - 10$, $y' = -4x - 3y - 4$.

835. $x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$, $y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$.

836. 1) Композиция поворота в положительном направлении вокруг начала координат на угол $\arccos(a/\sqrt{a^2 + b^2})$ и гомотетии с коэффициентом $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ и центром в начале координат;

2) композиция симметрии относительно прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом $b/(a + \sqrt{a^2 + b^2})$, и гомотетии с коэффициентом $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ и центром в начале координат.

837. $\sqrt{k_1^2 - 1}\,x \pm \sqrt{1 - k_2^2}\,y = 0$. **838.** $(4, 1 + \sqrt{17})$, $(4, 1 - \sqrt{17})$.

839. Симметрия относительно прямой $x - 5y - 6 = 0$ и гомотетия с центром в точке $(1, -1)$ и с коэффициентом 13.

§ 8.2

840. 1) $x' = -x - y - z + 1$, $y' = x$, $z' = y$; неподвижная точка $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, инвариантная прямая $\frac{x - 1/4}{1} = \frac{y - 1/4}{-1} = \frac{z - 1/4}{1}$, инвариантная плоскость $2x + 2z - 1 = 0$;

2) $x' = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $z' = -\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}$; неподвижная точка $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, инвариантные прямые и инвариантные плоскости — все прямые и плоскости, проходящие через неподвижную точку.

841. $(1-k_1^2)x^2+(1-k_2^2)y^2+(1-k_3^2)z^2=0$.
842. Композиция гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\sqrt{a^2+b^2}$ и поворота вокруг оси Oz на угол $\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
844. 1) Нет ни неподвижных точек, ни инвариантных прямых, ни инвариантных плоскостей;

2) неподвижная точка $M(-2, 0, -1)$, инвариантные прямые проходят через точку M и имеют направляющие векторы $(1, 0, 0)$, $(3, -1, 0)$, $(3, -2, 2)$, инвариантные плоскости $z+1=0$, $y+z+1=0$, $2x+6y+3x+7=0$;

3) неподвижных точек и инвариантных плоскостей нет, инвариантная прямая $x=y-1/3=z-2/3$.
845. $x'=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}$, $y'=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}y-\frac{3}{4}z-\frac{3}{4}$, $z'=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}$.
846. $x'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}$, $y'=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}$, $z'=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}$.
847. Существует, например: $x'=x$, $y'=y+1$, $z'=y+z$, инвариантная плоскость $x=0$.
848. $x'=\frac{11}{12}x-\frac{1}{6}y-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}$, $y'=-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}$, $z'=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}$.
849. $x'=-\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}$, $y'=-\frac{1}{10}x-\frac{9}{20}y-\frac{1}{4}z+3$, $z'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}z$.
851. Существует, если отношения расстояния от первой прямой до второй к расстоянию от второй до третьей одинаковы для обеих троек прямых.

§ 8.3

853. 1) $5x^2+5y^2=1$; 2) $x^2+4xy+4y^2+4x-2y=0$;
3) $(x-3y+1)(x-3y-2)=0$.
854. 1) $x^2+y^2=5$; 2) $x^2-4xy+4y^2+20x+10y=0$;
3) $(3x-y+5)(3x-y+10)=50$.
856. Эллипс, получаемый из данного гомотетией с центром в центре эллипса и коэффициентом $\sqrt{2}$.
858. Эллипс, получаемый из данного гомотетией с центром в центре эллипса и коэффициентом $\sqrt{2}/2$.
860. Эллипс, гомотетичный данному с коэффициентом гомотетии r, который является корнем уравнения $ab\left(\arccos\dfrac{r}{a}-\dfrac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a^2}\right)=S$.
861. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **867.** πab.
870. Эллипс, касающийся в точках A, B, C прямых, параллельных BC, CA, AB соответственно, $S_{\text{эл}}=\dfrac{4S_{ABC}}{3\sqrt{3}}\pi$.
871. 1) $x'=x\cos\varphi-\frac{a}{b}y\sin\varphi$, $y'=\frac{b}{a}x\sin\varphi+y\cos\varphi$;
2) $x'=x\cos\varphi+\frac{a}{b}y\sin\varphi$, $y'=\frac{b}{a}x\sin\varphi-y\cos\varphi$.
872. $x'=kx$, $y'=\dfrac{y}{k}$ и $x'=ky$, $y'=\dfrac{x}{k}$, $k\neq 0$ — вещественное число.

873. 1) $x' = \frac{1}{2}\Big(\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)x + \frac{a}{2b}\Big(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)y,\ y' = \frac{b}{2a}\Big(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)x + \frac{1}{2}\Big(\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)y,$ $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$;

2) $x' = \frac{1}{2}\Big(\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)x - \frac{a}{2b}\Big(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)y,\ y' = \frac{b}{2a}\Big(-\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)x - \frac{1}{2}\Big(\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big)y,$ $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

874. $x' = x\,\mathrm{ch}\,\varphi \pm \frac{a}{b} y\,\mathrm{sh}\,\varphi,\ y' = \frac{b}{a} x\,\mathrm{sh}\,\varphi \pm y\,\mathrm{ch}\,\varphi;$

$x' = -x\,\mathrm{ch}\,\varphi \pm \frac{a}{b} y\,\mathrm{sh}\,\varphi,\ y' = -\frac{b}{a} x\,\mathrm{sh}\,\varphi \pm y\,\mathrm{ch}\,\varphi.$

875. $x' = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{1}{2}y,\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{2}y;\ (\pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{2})$.

877. $x' = \frac{\lambda^2}{2p}(2px - 2\mu y + \mu^2),\ y' = \lambda(y - \mu),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$; унимодулярные при $\lambda = 1$.

878. $x' = 4x - 4y + 2,\ y' = -2y + 2$; директриса переходит в прямую $x - 2y + 4 = 0$, ось переходит в прямую $y = 2$.

879. $x' = -\frac{\lambda^2}{2p}\big(2(a_1 - \alpha\mu)x + 2(a_2 - \beta\mu)y + a_0 - \mu^2\big),\ y' = \lambda(\alpha x + \beta y + \mu),$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$.

880. $y^2 = 2p(x - p/2)$. **883.** Парабола $y^2 = 2p(x - a)$, где $a = (9S^2/32p)^{1/3}$.

884. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0$.

§ 8.4

886. $x = (x_0 - y_0\,\mathrm{ctg}(\varphi/2))/2,\ y = (x_0\,\mathrm{ctg}(\varphi/2) + y_0)/2$.

887. $x' = x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi + x_0(1 - \cos 2\varphi) - y_0 \sin 2\varphi + d\cos\varphi,$

$y' = x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi - x_0\sin 2\varphi + y_0(1 + \cos 2\varphi) + d\sin\varphi.$

888. Ось симметрии $y = y_0/2$, вектор переноса $(x_0, 0)$.

889. Ось симметрии $\frac{x - x_0/2}{\cos(\varphi/2)} = \frac{y - y_0/2}{\sin(\varphi/2)}$,

вектор переноса $\frac{(x_0(1 + \cos\varphi) + y_0\sin\varphi)/2,\ (x_0\sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi))}{2}$.

890. $x' = x - 2A\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2},\ y' = y - 2B\frac{Ax + By + C}{A^2 + B^2}$.

891. $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2,\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$; угол поворота $\pi/6$; неподвижная точка $(1, 2 + \sqrt{3})$.

892. $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2,\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$; ось симметрии $y = \sqrt{3}(x - 1)$; вектор переноса $\Big(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$.

894. Угол поворота определяется из соотношения $\cos\varphi = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$, $0 < \varphi \leqslant \pi$. Координаты направляющего вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ оси вращения определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - 1)a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 = 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} - 1)a_2 + a_{23}a_3 = 0, \\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + (a_{33} - 1)a_3 = 0 \end{cases}$$

и неравенства $\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_1 \\ 0 & a_{21} & a_2 \\ 0 & a_{31} & a_3 \end{vmatrix} > 0$, если векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{a}$ не коллинеарны и $\varphi \neq \pi$; в случае если векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, следует воспользоваться неравенством $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_1 \\ 1 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} > 0$. Канонический вид преобразования $\gamma = (\mathbf{a}, \mathbf{b})/|\mathbf{a}|$, где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$:

$$\begin{cases} \bar{x}' = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \\ \bar{y}' = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi, \\ \bar{z}' = \bar{z} + \gamma. \end{cases}$$

Вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ переноса вдоль оси вращения определяется равенством $\mathbf{c} = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a}$. Координаты точек, лежащих на оси вращения, удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 - b_1, \\ a_{21}x + (a_{22} - 1)y + a_{23}z = c_2 - b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)z = c_3 - b_3. \end{cases}$$

895. Координаты направляющего вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ оси вращения определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} + 1)a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3 = 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} + 1)a_2 + a_{23}a_3 = 0, \\ a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + (a_{33} + 1)a_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

и неравенства $\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & a_1 \\ 0 & a_{21} & a_2 \\ 0 & a_{31} & a_3 \end{vmatrix} > 0$, если векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{a}$ не коллинеарны и $\varphi \neq \pi$; в случае если векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, следует воспользоваться неравенством

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_1 \\ 1 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} > 0.$$

Плоскость симметрии и ось вращения проходят через единственную неподвижную точку данного преобразования, определяемую из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - 1)y + a_{23}z + b_2 = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)z + b_3 = 0. \end{cases}$$

Канонический вид преобразования: $\bar{x}' = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi$, $\bar{y}' = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi$, $\bar{z}' = -\bar{z}$.

896. Вектор $\mathbf{d}$ находится из равенства $\mathbf{d}=\mathbf{b}-\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}\mathbf{a}$, где координаты вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ определяются из системы (∗). Канонический вид преобразования: $\overline{x}'=-\overline{x}$, $\overline{y}'=\overline{y}+\beta$, где $\beta=|\mathbf{d}|$, $\overline{z}'=\overline{z}$. Плоскость симметрии определяется любым из следующих линейных уравнений, не имеющим вида $0=0$:

$$(a_{11}-1)x+a_{12}y+a_{13}z=d_1-b_1,$$
$$a_{21}x+(a_{22}-1)y+a_{23}z=d_2-b_2,$$
$$a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-1)z=d_3-b_3.$$

898. $x'=\frac{1}{9}x-\frac{8}{9}y+\frac{4}{9}z-\frac{19}{9}$, $y'=\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}y+\frac{7}{9}z+\frac{50}{9}$, $z'=-\frac{8}{9}x+\frac{1}{9}y+\frac{4}{9}z+\frac{62}{9}$.

899. $x'=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}$, $y'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}$, $z'=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}$.

900. $\mathbf{a}'=\mathbf{a}\cos\varphi+\dfrac{1}{|\mathbf{b}|}[\mathbf{b},\mathbf{a}]\sin\varphi$.

901. 1) Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси с направляющим вектором $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$, проходящей через точку $(3, -4, 0)$; канонический вид $\overline{x}'=-\overline{y}$, $\overline{y}'=\overline{x}$, $\overline{z}'=\overline{z}$;

2) поворот на угол $\arccos\left(-\frac{29}{30}\right)$ вокруг оси с направляющим вектором $\left(\frac{7}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}\right)$, проходящей через точку $(5, 1, 0)$; канонический вид $\overline{x}'=-\frac{29}{30}\overline{x}-\frac{\sqrt{59}}{30}\overline{y}$, $\overline{y}'=\frac{\sqrt{59}}{30}\overline{x}-\frac{29}{30}\overline{y}$, $\overline{z}'=\overline{z}$;

3) композиция симметрии относительно плоскости $x+2y+3z-7=0$ и переноса на вектор $(6, 12, -10)$, компланарный этой плоскости; канонический вид $\overline{x}'=-\overline{x}$, $\overline{y}'=\overline{y}+2\sqrt{70}$, $\overline{z}'=\overline{z}$;

4) композиция симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $\left(9, -3, \frac{3}{2}\right)$ и перпендикулярной к вектору $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, и поворота на угол $\pi/2$ вокруг оси, проходящей через указанную точку, с указанным направляющим вектором; канонический вид $\overline{x}'=-\overline{y}$, $\overline{y}'=\overline{x}$, $\overline{z}'=-\overline{z}$;

5) композиция симметрии относительно плоскости, проходящей через точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и перпендикулярной к вектору $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, и поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси, проходящей через указанную точку, с указанным направляющим вектором; канонический вид

$$\overline{x}'=\frac{1}{2}\overline{x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{y},\quad \overline{y}'=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{y},\quad \overline{z}'=-\overline{z};$$

6) винтовое движение; ось вращения имеет направляющий вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и проходит через точку $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; угол поворота $\frac{2\pi}{3}$; вектор сдвига $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; канонический вид

$$\overline{x}'=-\frac{1}{2}\overline{x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{y},\quad \overline{y}'=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{x}-\frac{1}{2}\overline{y},\quad \overline{z}'=\overline{z}+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

К главе 9

§ 9.1

902. $(-1:1)$. **903.** $(-1:\lambda)$. **904.** $(x_1:x_2)=(7(x-2):(4+x))$.
905. $(x_1:x_2)=((x-1):x)$.
906. $D(-1:14)$, $F(-1:2)$, $G(-1:24)$, $H(1:16)$, $O(3:8)$, $P(1:6)$.
907. a. **908.** 1) $12/25$; 2) $-76/9$; 3) ∞; 4) $5/4$; 5) 1.
909. $(5:7)$. **910.** 1) $1/\lambda$; 2) $(\lambda-1)/\lambda$; 3) $\lambda/(\lambda-1)$; 4) λ.
911. Прямая, параллельная стороне QR, проходящая через точку P.
912. Биссектриса угла, смежного с данным.
913. Прямая, соединяющая вершину прямого угла треугольника с серединой отрезка гипотенузы, отсекаемого на ней биссектрисами внутреннего и внешнего углов при этой вершине.

§ 9.2

915. 1) $x'=-x/(x-2)$; 2) $x'=2x/(3x-2)$.
916. 1) $D<0$; 2) $D>0$; 3) $D=0$, где $D=(c_{11}-c_{22})^2+4c_{12}c_{21}$.
918. 1) Нет; 2) да; 3) нет. **919.** $x_1'=c_{11}x_1$, $x_2'=c_{22}x_2$.
920. $(1:-1)$, $(1:2)$.
921. $\lambda x_1'=\begin{vmatrix}\alpha a & b\\ \beta c & d\end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix}a & \alpha a\\ c & \beta c\end{vmatrix}x_2$, $\lambda x_2'=\begin{vmatrix}\alpha b & b\\ \beta d & d\end{vmatrix}x_1+\begin{vmatrix}a & \alpha b\\ c & \beta d\end{vmatrix}x_2$, $\alpha\beta\neq 0$.
922. Тождественное преобразование и такие несобственные гиперболические преобразования $\lambda x_1'=c_{11}x_1+c_{12}x_2$, $\lambda x_2'=c_{21}x_1+c_{22}x_2$, что $c_{11}+c_{22}=0$.
925. Два, если $(AB'BA')>0$; не существует, если $(AB'BA')\leqslant 0$; одно, если $(AB'BA')=\infty$.

§ 9.3

927. 1) $M(3:2:-1)$; 2) $N(12,9)$; 3) $Q(5:0:-3)$; 4) $R(1:1:0)$.
928. $(0:1:-1)$.
929. $x_1+x_2=0$ — уравнение оси Ox, $x_1-x_2=0$ — уравнение оси Oy, $x_1+x_2+2x_3=0$ — уравнение несобственной прямой.
930. $(x_1:x_2:x_3)=((-6x-6y+6z):2x:3y)$.
931. $F(-15:4:-24)$, $G(3:4:-4)$.
932. $(x_1:x_2:x_3)=((8x_1'-4x_2'):(2x_1'-4x_2'+4x_3'):(2x_1'-x_2'+x_3'))$.
933. $(0:1:-1)$, $(1:0:-1)$, $(1:-1:0)$; $x_3-x_2=0$, $x_1-x_3=0$, $x_2-x_1=0$.
934. $ax_1+bx_2+cx_3=0$. **935.** $\dfrac{ax_1}{\cos\alpha}+\dfrac{bx_2}{\cos\beta}+\dfrac{cx_3}{\cos\gamma}=0$.
936. $x_1-x_2-x_3=0$. **937.** $(2:0:1)$. **943.** $(ABCD)=-9$. **944.** $D(4:0:-1)$.

§ 9.4

947. $A'(-1:13:14)$, $B'(11:23:28)$, $C'(-1:1:2)$.
948. $E_1'(1:1:1)$, $E_2'(1:-4:0)$, $E_3'(-1:0:1)$, $E'(1:-3:2)$.

950. $\lambda x_1' = c_1 x_1,\ \lambda x_2' = c_2 x_2,\ \lambda x_3' = c_3 x_3.$

951. $\lambda x_1' = x_3,\ \lambda x_2' = x_1,\ \lambda x_3' = x_2.$

952. $x' = \dfrac{x}{x+y-1},\ y' = \dfrac{y}{x+y-1}.$

953. $\ell_1'\colon 8x_1 - 6x_2 + 11x_3 = 0,\ \ell_2'\colon 7x_1 + 6x_2 - 36x_3 = 0,\ \ell_3'\colon -18x_1 + x_2 + 14x_3 = 0.$

954. 1) $\lambda x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3,\ \lambda x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3,\ \lambda x_3' = x_3;$
2) $\lambda x_1' = x_1 + c_{12}x_2,\ \lambda x_2' = x_2 + c_{23}x_3,\ \lambda x_3' = c_{33}x_3.$

955. $x' = \dfrac{-15x+43y}{5x-9y+16},\ y' = \dfrac{7x-3y}{5x-9y+16}.$

§ 9.5

956. 1) Овал; 2) овал; 3) пара действительных прямых;
4) овал; 5) пара мнимых прямых.

957. 1) Например, $x' = \dfrac{1}{x},\ y' = \dfrac{y}{x};$
2) например, $x' = \dfrac{1}{x+y},\ y' = \dfrac{x-y}{x+y};$
3) например, $x' = \dfrac{x}{y+1},\ y' = -\dfrac{y-1}{y+1};$
4) например, $x' = \dfrac{x}{y},\ y' = \dfrac{1}{y};$
5) например, $x' = \dfrac{a^2}{x},\ y' = \dfrac{ay}{x}.$

958. $2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0.$ **959.** $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$ **960.** $x_3^2 - x_1x_2 = 0.$

961. $x' = -\dfrac{13x+25}{x+13},\ y' = -\dfrac{12y}{x+13}.$

962. $x' = \dfrac{30(x-2y+10)}{x-9y+55},\ y' = \dfrac{-5(x+9y-35)}{x-9y+55}.$

963. $x' = \pm\dfrac{b}{y}(x\operatorname{ch}\theta + a\operatorname{sh}\theta),\ y' = \pm\dfrac{b^2}{ay}(x\operatorname{sh}\theta + a\operatorname{ch}\theta).$

964. $x' = 25\dfrac{x+y+1}{x-11y+121},\ y' = 10\dfrac{-x+5y+11}{x-11y+121}.$

965. $x' = 5\dfrac{-x+4}{x+4},\ y' = \dfrac{10y}{x+4}.$ **966.** $2\mu x_1x_2 + x_3^2 = 0,\ \mu \neq 0.$

967. 1) $c_{32}^2 - 4c_{13}c_{33} < 0;$ 2) $c_{32}^2 - 4c_{13}c_{33} = 0;$ 3) $c_{32}^2 - 4c_{13}c_{33} > 0.$

Указание. Проективным преобразованием перевести данную кривую в параболу $x = t,\ y = t^2$.

968. $x(t) = \dfrac{(t^2-1)\cos\varphi - 2t\sin\varphi}{1+t^2},\ y(t) = \dfrac{(1-t^2)\sin\varphi - 2t\cos\varphi}{1+t^2}.$

969. $x(t) = \dfrac{a}{2}\Big(t + \dfrac{1}{t}\Big),\ y(t) = \dfrac{b}{2}\Big(t - \dfrac{1}{t}\Big).$

970. 1) $2x^2 + 3y^2 - 5xy + x - 2y = 0;$ 2) $16x^2 + 9y^2 - 24xy + x - y = 0.$

979. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} > 0.$

§ 9.6

980. 1) $55x-6y+10=0$; 2) $15x+11y+14=0$; 3) $19x+4y=0$; 4) несобственная прямая; 5) поляра не определена.

982. 1) $(-3,1)$; 2) $(3,3)$; 3) $(0,3)$;
4) $(1:-1:0)$ — несобственная точка;
5) полюс неопределенный, геометрическое место полюсов — прямая $9x-y+19=0$.

983. $y=1$. **984.** $(-7,5)$. **985.** $(1,-A)$.

989. $7x^2+2xy-6x-10y+15=0$.

990. $15x^2-4xy+12y^2+50x+100y-625=0$.

991. Ось Ox и две касательные к окружности в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$.

К главе 10

§ 10.1

994. В п. 1, 4—6, 9, 11, 13, 15 операции не определены корректно; в п. 10 операции определены, но не удовлетворяют аксиомам линейного пространства; в п. 2 операции определены только в случае, когда данная прямая проходит через начало координат, и в этом случае она является линейным пространством; в п. 3, 7, 8, 12, 14 X является линейным пространством над $\Bbbk$ относительно указанных операций.

995. 1) «Да» в случае поля $\mathbb{Z}_2$ и «нет» в противном случае; 2), 3) нет; 4) да.

999. 1), 2) Нет; 3), 4) да.

1003. $\xi=0$ или $\xi=\pm\sqrt{2}$ в случае $\mathbb{R}^3$; $\xi=0$ для $\mathbb{Q}^3$.

1005. В п. 6, 7 функции линейно зависимы; в остальных пунктах функции линейно независимы.

1007. $(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)=0$. **1012.** 1) 3; 2) 4.

1013. 1) x_1, x_2; 2) x_1, x_2; 3) x_1, x_2.

1014. 1) Любые два вектора; 2) x_1, x_2; x_2, x_3; x_2, x_4.

§ 10.2

1015. 1) $(0,0,1)$; 2) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1016. 1) $(0,-5,4)$; 2) $(0,2,1,2)$; 3) $(67,-51,-3,11)$.

1017. $\left(P(a), \frac{1}{1!}P'(a), \ldots, \frac{1}{n!}P^{(n)}(a)\right)$. **1018.** $(4,-2,-3)$.

1019. $(-1,2,-1,1)$. **1020.** $(1,1,-1,1,1,1)$.

1021. 1) $(1,-1,-1,1,-1,1)$; 2) $(2,-1,-1,1,-1,1)$; 3) $(1,-1,-1,2,-1,1)$; 4) $(0,1,6,7,4,1)$.

1022. Размерность равна mn; в качестве базиса можно взять семейство матриц E_{ij}, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, имеющих единицу на пересечении строки с номером i и столбца с номером j и нули на остальных местах.

1023. 1) Размерность n^2-n; базис E_{ij}, $1\leqslant i\leqslant n-1$, $1\leqslant j\leqslant n$;

2) размерность n^2-n; базис E_{ij}, $1\leqslant i, j\leqslant n$, $i\neq j$;

3) размерность n; базис E_{ii}, $1\leqslant i\leqslant n$;

4) размерность $\dfrac{n(n+1)}{2}$; базис E_{ij}, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$;

5) размерность $\dfrac{n(n+1)}{2}$; базис $E_{ij}+E_{ji}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, и E_{ii}, $1\leqslant i\leqslant n$;

6) размерность $\dfrac{n(n-1)}{2}$; базис $E_{ij}-E_{ji}$, $1\leqslant i<j\leqslant n$.

1024. 1) Размерность 4, базис x_i, $1\leqslant i\leqslant 4$;

2) размерность 10, базис x_i^2, $1\leqslant i\leqslant 4$, и x_ix_j, $1\leqslant i, j\leqslant 4$, $i\neq j$;

3) размерность 20, базис x_i^3, $1\leqslant i\leqslant 4$, $x_i^2x_j$, $1\leqslant i, j\leqslant 4$, $i\neq j$, и $x_ix_jx_k$, $1\leqslant i, j, k\leqslant 4$, $i\neq j\neq k$;

4) размерность 35, базис x_i^4, $1\leqslant i\leqslant 4$, $x_i^3x_j$, $1\leqslant i, j\leqslant 4$, $i\neq j$, $x_i^2x_jx_k$, $1\leqslant i, j, k\leqslant 4$, $i\neq j\neq k$, $x_i^2x_j^2$, $1\leqslant i, j\leqslant 4$, $i\neq j$, и $x_1x_2x_3x_4$.

1025. C_{n+k-1}^{k-1}. **1026.** $f=f_1-f_2$. **1027.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9\\ -1 & -1 & 7\\ 4 & 5 & -26\end{pmatrix}$.

1028. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1029. (c_i^j), где $c_i^j=0$ при $j>i$ и $c_i^j=C_i^ja^{i-j}$ при $j\leqslant i$.

1030. $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \cos a & -\sin a & & & & \text{\Large 0} & \\ & \sin a & \cos a & & & & & \\ & & & \cos 2a & -\sin 2a & & & \\ & & & \sin 2a & \cos 2a & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & & & & \cos na & -\sin na \\ & & & & & & \sin na & \cos na \end{pmatrix}.$$

1031. C_1C_2.

1032. 1) Поменяются местами i-я и j-я строки;

2) поменяются местами i-й и j-й столбцы;

3) элементы матрицы отразятся симметрично относительно центра матрицы;

4) из j-й строки матрицы вычтется i-я;

5) к i-му столбцу матрицы добавится j-й;

6) i-я строка матрицы умножится на $\dfrac{1}{\lambda}$;

7) i-й столбец матрицы умножится на λ.

§ 10.3

1033. 1)—6) да; 7) только при $n=1$; 8) нет.

1034. Размерность $n-1$; базис, например, $(1,-1,0,\dots,0)$, $(0,1,-1,0,\dots,0)$, …, $(0,\dots,0,1,-1)$.

1035. 1) Размерность n, базис $t, t^2, \dots, t^n$;
2) не является векторным пространством;
3) размерность n, базис $5-3t, 5-3t^2, \dots, 5-3t^n$;
4) не является векторным пространством;
5) размерность $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, базис $1, \left(t-\frac{1}{2}\right)^2, \left(t-\frac{1}{2}\right)^4, \dots, \left(t-\frac{1}{2}\right)^{2[n/2]}$;
6) размерность $\left[\frac{n}{2}\right]+1$, базис $1, t^2, \dots, t^{2k}$, где $k=\left[\frac{n}{2}\right]$;
7) размерность $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, базис $t, t^3, \dots, t^{2k-1}$, где $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

1036. Неверно.

1040. 1) *Указание.* Рассмотреть три прямые на плоскости, проходящие через одну точку.

1041. Нет, достаточно рассмотреть три различные прямые на плоскости, проходящие через начало координат. **1042.** Нет.

1046. Утверждение верно, если характеристика поля не равна двум, и неверно в противном случае.

1047. 1) Размерность 2, базис состоит из первых двух данных векторов;
2) размерность 2, базис состоит из первых двух данных векторов;
3) размерность 4, базис состоит из всех четырех данных векторов;
4) размерность 2, базис состоит из первых двух данных векторов.

1048. 1) Размерность 1, базис $(-i, 3-2i)$; 2) размерность 1, базис $(3,1)$;
3) размерность 1, базис $(0,1,1)$;
4) размерность 2, базис $(2,0,-3)$ и $(1,3,0)$;
5) размерность 1, базис $(23,-18,3)$; 6) размерность 0;
7) размерность 0;
8) размерность 3, базис $(1,2,0,0,0)$, $(-13,0,10,2,0)$, $(1,0,2,0,-2)$.

1049. 1) $x_1-2x_2+x_3=0$; 2) $x_1+x_2=0$; 3) $0=0$;
4) $x_1-x_3=0$, $x_1-2x_2+x_4=0$; 5) $x_1-x_2=0$, $x_3-x_4=0$, $2x_1-x_3=0$;
6) $3x_1-x_2-2x_3=0$; 7) $0=0$; 8) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

1050. Нет.

1051. Базис суммы:

$$(t-1)^3,\quad (t-1)^3t,\quad (t-1)^3t^2,\quad (t-1)^3t^3,\quad (t-1)^3t^4,\quad (t-1)^3t^5,$$
$$(t+1)^3t^3,\quad (t+1)^3t^4,\quad (t+1)^3t^5,$$

базис пересечения:

$$(t^2-1)^3,\quad (t^2-1)^3t,\quad (t^2-1)^3t^2.$$

1052. Проекция на S_n: $s_{ij}=s_{ji}=a_{ji}$ при $i\leqslant j$; проекция на T_n: $t_{ij}=a_{ij}-a_{ji}$ при $i<j$ и $t_{ij}=0$ при $i\geqslant j$.

1053. Размерность суммы равна $\dfrac{n(n+1)}{2}+nr-\dfrac{r(r+1)}{2}$, базис
$$E_{ij}+E_{ji},\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\quad E_{ij},\quad 1\leqslant i\leqslant r,\quad i<j;$$
размерность пересечения равна $\dfrac{r(r+1)}{2}$, базис $E_{ij}+E_{ji}$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant r$, где E_{ij} — матрица с единицей на пересечении i-й строки и j-го столбца и нулями на остальных местах.

1054. 1) Размерность суммы 3, базис произвольный;
размерность пересечения 2, базис $(-2, 3, 1)$, $(5, 3, 13)$;
2) размерность суммы 3, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(40, 45, 43)$;
3) размерность суммы 3, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(1, 0, 1)$;
4) размерность суммы 3, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(3, 1, 0)$;
5) размерность суммы 3, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(0, 4, 3-i)$;
6) размерность суммы 3, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(9+10i, 2-16i, -10-3i)$;
7) размерность суммы 4, базис произвольный;
размерность пересечения 2, базис $(0, 1, 0, 3-i)$, $(0, 2, 0, 5-2i)$;
8) размерность суммы 5, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(3, 2, -1, -2, 4)$;
9) размерность суммы 5, базис произвольный;
размерность пересечения 3, базис $(0, 1, -1, -1, 1)$, $(3, 0, 1, 0, 2)$, $(-3, 4, 3, 3, 1)$;
10) размерность суммы 4, базис $(1, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, -2, 1, 0)$, $(0, 1, -1, 1, 0)$, $(0, 0, -2, 1, 0)$;
размерность пересечения 2, базис $(1, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, -2, 1, 0)$;
11) размерность суммы 4, базис $(0, 1, -1, 1, 0)$, $(3, 1, -2, 1, 2)$, $(1, 1, -2, 1, 0)$, $(2, 1, 0, 0, 1)$;
размерность пересечения 2, базис $(3, 1, -2, 1, 2)$, $(1, 1, -2, 1, 0)$;
12) размерность суммы 5, базис произвольный;
размерность пересечения 1, базис $(1, 1, -2, 1, 0)$;
13) размерность суммы 4, базис произвольные;
размерность пересечения 2, базис $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2, 1)$.

§ 10.4

1055. Все, кроме п. 4. **1056.** Первая и третья.
1057. След является линейной функцией, определитель — только в случае $n=1$.
1062. $(l_1, \ldots, l_n)$. **1073.** $\left(\overline{C}^{\top}\right)^{-1}$. **1075.** $P_i(t)=(t-t_0)^i/i!$.

1076. Двойственный базис образуют многочлены

$$P_i(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots\widehat{(t-t_i)}\ldots(t-t_n)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\ldots\widehat{(t_i-t_i)}\ldots(t_i-t_n)}$$

(крышка означает пропуск соответствующего сомножителя).

1077. *Указание.* Доказать, что в $\mathbb{R}[t]$ любая линейно независимая система векторов не более чем счетна, а в $(\mathbb{R}[t])^*$ имеется несчетное семейство линейно независимых функций.

1078. $A_{pq} = \frac{1}{n}V^{-q}U^{-p}$. **1079.** $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. **1080.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -12 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 10.5

1083. 1) Является, только если Y состоит из одной точки, $L=\{0\}$;
2) нет; 3) да, $L=\langle v\rangle$, где v — направляющий вектор прямой;
4) да, $L=\{P(t)\in\mathbb{R}[t];\ P(0)+P(1)=0\}$; 5) нет.

1088. Например, $x_1=-9+t_2$, $x_2=8+t_1-2t_2-2t_3$, $x_3=3t_1$, $x_4=t_2$, $x_5=3t_3$.

1089. Например, $x_1=3t_1+2t_2$, $x_2=1-2t_1+t_2$, $x_3=3t_1+7t_2$, $x_4=1+3t_1+5t_2$, $x_5=5-5t_1-4t_2$; например, $17x_1+15x_2-7x_3-15=0$, $13x_1+9x_2-7x_4-2=0$, $23x_1+2x_3+15x_5-75=0$.

1090. 1) Например, $x_1=1+t_1+4t_2$, $x_2=t_1-2t_2$, $x_3=t_1+t_2$, $x_4=t_1+t_2+t_3$, $x_5=t_1+t_3$; $x_1+x_2-2x_3=1$, $x_2-x_3-3x_4+3x_5=0$;
2) например, $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, $x_3=s_3$, $x_4=s_4$, $x_5=s_5$; система пустая.

1092. n.

1094. Взаимное расположение такое же, как в трехмерном пространстве: они могут пересекаться, скрещиваться, совпадать и быть параллельными.

1095. Плоскости могут:
1) скрещиваться по точке;
2) пересекаться в одной точке;
3) скрещиваться по прямой;
4) пересекаться по прямой;
5) быть параллельными;
6) совпадать.

1096. 1) $R=9$, $r=8$; 2) $R=r=8$; 3) $R=8$, $r=7$; 4) $R=r=7$;
5) $R=7$, $r=6$; 6) $R=r=6$; 7) $R=6$, $r=5$; 8) никогда.

1097. 1) Пересекаются в точке $(2,-1,1,-1,1)$;
2) скрещиваются по точке;
3) скрещиваются по вектору $(5,1,0,0,5)$;
4) прямая параллельна плоскости.

К главе 11

§ 11.1

1098. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 5 \\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ 8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1099. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

1100. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; операторы, заданные в стандартном базисе кососимметричными матрицами.

1101. $L_A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$; $R_A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$.

1102. AB. **1105.** *Указание.* Показать, что $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$.

1106. В матрице поменяются местами i-я и j-я строки, а также i-й и j-й столбцы.

1107. i-й столбец матрицы умножится на λ, а i-я строка — разделится на λ.

1108. К i-му столбцу матрицы добавится j-й, а из j-й строки вычтется i-я.

1109. $A^* = A^\top$. **1110.** $\begin{pmatrix} 32 & 22 \\ -47 & -33 \end{pmatrix}$.

1111. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

1112. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **1113.** $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **1114.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 11.2

1118. 1) $\operatorname{Ker}\mathbf{T} = \{0\}$, $\operatorname{Im}\mathbf{T} = \mathbb{R}_n[x]$;

2) $\operatorname{Ker}\mathbf{R} = \{0\}$, $\operatorname{Im}\mathbf{R} = \mathbb{R}_n[x]$;

3) ядро $\operatorname{Ker}\mathbf{D}$ состоит из констант, а образ $\operatorname{Im}\mathbf{D}$ — из подпространства многочленов с нулевым свободным членом;

4) ядро $\operatorname{Ker}\mathbf{P}$ состоит из многочленов с нулевым свободным членом, а образ $\operatorname{Im}\mathbf{P}$ является одномерным подпространством линейных многочленов αx, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1119. 1) Если поле $\Bbbk$ имеет нулевую характеристику, то ядро состоит из констант, а образ есть подпространство $\Bbbk_{n-1}[x]$; если характеристика поля $\Bbbk$ равна p, где $p>0$, то ядро является подпространством многочленов вида $\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant \frac{n}{p}} a_{jp}x^{jp}$, а образ состоит из многочленов степени не выше n вида

$$\sum_{k\neq p} a_k x^k;$$

2) если поле $\Bbbk$ имеет нулевую характеристику, то ядро состоит из констант, а образ совпадает со всем пространством $\Bbbk[x]$; если же характеристика поля $\Bbbk$ равна p, где $p>0$, то ядро состоит из многочленов вида $a_0+a_px^p+a_{2p}x^{2p}+\ldots+a_{lp}x^{lp}$, где l некоторое натуральное число, а образ — из всех многочленов вида $\sum\limits_{k\neq p} a_kx^k$;

3) ядро состоит из констант, образ — подпространство тригонометрических многочленов вида

$$f(x)=\sum_{k>0}^{n} a_k\sin kx+b_k\cos kx.$$

1123. $\operatorname{Ker}\mathbf{A}^*=\operatorname{Ann}(\operatorname{Im}\mathbf{A})$, $\operatorname{Im}\mathbf{A}^*=\operatorname{Ann}(\operatorname{Ker}\mathbf{A})$.

1127. Блочно-треугольные матрицы вида:

$$1)\ \begin{pmatrix} K & L\\ 0 & N\end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} K & 0\\ M & N\end{pmatrix},$$

где K, L, M, N — матрицы размеров $k\times k$, $k\times(n-k)$, $(n-k)\times k$, $(n-k)\times$ $\times(n-k)$ соответственно.

§ 11.3

1137. 1) λ^{34}; 2) λ^2-1; 3) $\lambda^2-\lambda$; 4) $\lambda^2-\lambda$; 5) $(\lambda-1)^{11}$; 6) $\lambda(\lambda^2+|v|^2)$; 7а) $\lambda^2-3\lambda$; 7б) λ^2; 7в) $\lambda^2-\lambda$.

1139. *Указание.* Рассмотреть матрицу оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1,\ldots,e_n$, первые k векторов которого лежат в U, где $k=\dim U$.

1147. 1) Нильпотентный; 2) полупростой; 3) полупростой; 4) полупростой; 5) не полупростой и не нильпотентный; 6) полупростой; 7а) полупростой; 7б) нильпотентный; 7в) полупростой.

1148. *Указание.* Пусть $S(\lambda)$ — максимальный полупростой делитель многочлена $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Показать, что если $R(\lambda)$ — такой многочлен, что многочлен $S'(\lambda)R(\lambda)-1$ делится на $Q(\lambda)$, где $Q(\lambda)=\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)/S(\lambda)$, то можно положить $\mathbf{N}=S(\mathbf{A})R(\mathbf{A})$.

1149. 1) $S=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$, $N=0$;

2) $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

3) $S=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

4) $S=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

5) $S=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 6 & 3 & 2\\ -2 & -3 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ -2 & -3 & -6 & -4\end{pmatrix}$, $N=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -3 & -3 & -2\\ 2 & 3 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -3 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

1150. 1) $\dim U=n$; 2) $\chi_{\mathbf{T}'}(\lambda)=(-1)^n P(\lambda)$, $\mu_{\mathbf{T}'}(\lambda)=P(\lambda)$.

Указание. Взять в качестве базиса в U последовательности $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где

$$e_1 = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, \ldots), \quad \ldots, \quad e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, \ldots).$$

1152. $(-1)^n(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0)$.

§ 11.4

1158. *Указание.* Использовать предыдущую задачу и естественные изоморфизмы $V_i \to V$ и $V_{-i} \to \overline{V}$.

1161. Взаимно обратны.

1164. 1) Корень $\lambda=-1$ кратности 3, $V_{-1}=\langle(1, -1, 1)\rangle$;

2) два корня: $\lambda_1=1$ кратности 1 и $\lambda_{2,3}=0$ кратности 2, $V_1=\langle(1, -1, 2)\rangle$, $V_0=\langle(0, 1, -1)\rangle$;

3) два корня: $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_{3,4}=0$, оба кратности 2, $V_1=\langle(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$, $V_0=\langle(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0\rangle$;

4) корень $\lambda=2$ кратности 4, $V_2=\langle(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$.

1165. Собственные значения -1 и 1; $V_{-1}(\mathbf{T})$ — подпространство кососимметричных матриц, $V_1(\mathbf{T})$ — подпространство симметричных матриц.

1166. 1) Собственные значения 0 и 1; $V_1(\mathbf{P})=L_1$, $V_0(\mathbf{P})=L_2$;

2) собственные значения -1 и 1; $V_1(\mathbf{P})=L_2$, $V_{-1}(\mathbf{P})=L_1$.

1167. Оператор $\dfrac{d}{dx}$: 1), 2) собственное значение 0, собственное подпространство V_0 — константы; 3) собственные значения — $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, собственное подпространство V_{λ_k} — одномерное подпространство, порожденное $e^{\lambda_k x}$; оператор $\dfrac{d^2}{dx^2}$: 1) собственное значение 0, собственное подпространство V_0 — линейные многочлены $ax+b$; 2) собственные значения $0, -1, -4, \ldots, -k^2, \ldots$ $\ldots, -n^2$, собственное подпространство V_0 состоит из констант, а подпространство V_{-k^2} двумерно и функции $\cos kx$, $\sin kx$ образуют его базис; 3) собственные значения $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, собственное подпространство $V_{\lambda_k^2}$ — одномерное подпространство, порожденное функцией $e^{\lambda_k x}$.

1168. 2) Два собственных значения: $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$, собственное подпространство V_1 — многочлены степени меньше m, собственное подпространство V_0 — многочлены, делящиеся на $p_0(t)$;

4) всевозможные подпространства вида $L_1 \oplus L_2$, где L_1, L_2 — некоторые подпространства в V_1 и V_0 соответственно;

5а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $1, t, t^2, t^3$;

5б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $1, t, t^2+1, t^3+t$;

5в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $1, t, t^2, (t-1)^3$.

1174. $\lambda_k = 2k+1$.

1177. 1) Матрица к диагональному виду не приводится;

2) $e_1 = (1, 1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 0, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 0, 1)$, $e_4 = (1, -1, -1, -1)$;

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

3) $e_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0)$, $e_3 = (0, -1, 1, 0)$, $e_4 = (-1, 0, 0, 1)$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1178. Матрица A. **1179.** Матрица A.

1182. *Указание.* Рассмотреть подпространство $\operatorname{Ker} l$, где $l \in V^*$ — собственный вектор сопряженного оператора.

1183. *Указание.* Будем строить искомый базис последовательно: в качестве его первого вектора возьмем собственный вектор v_1 оператора $\mathbf{A}$, рассмотрим далее фактороператор, действующий в факторпространстве $V/\langle v_1 \rangle$.

У этого оператора тоже найдется собственный вектор (класс смежности) $v_2+\langle v_1\rangle$, вектор v_2 исходного пространства (представитель класса смежности) включим в качестве второго вектора искомого базиса, и т. д.

1184. 1) Например, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{e}_1=(1,0,-1)$, $\widetilde{e}_2=(0,1,-1)$, $\widetilde{e}_3=(0,0,1)$;

2) например, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $e_1=(1,-2,1)$, $e_2=(0,1,-2)$, $e_3=(0,0,1)$.

1186. 1) *Указание.* Воспользоваться задачей 1180 и индукцией.

2) *Указание.* Построить базис по индукции: в качестве первого вектора такого базиса взять общий собственный вектор v данного набора, далее рассмотреть соответствующий набор фактороператоров, действующих в факторпространстве $V/\langle v\rangle$, второй базисный вектор искомого базиса будет соответствовать общему собственному вектору набора фактороператоров, и т. д.

§ 11.5

1189. 1) $\lambda_{1,2,3}=-1$, все пространство является корневым;

2) $\lambda_{1,2}=2$, $\lambda_{3,4}=0$, $R_2=\langle(1,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$, $R_0=\langle(1,0,0,0),(0,1,0,1)\rangle$.

1190. Множество собственных значений λ совпадает с $\mathbb{R}$ (собственные векторы — функции $\exp\lambda x$), корневые подпространства V_λ образованы функциями вида $\exp\lambda x P(x)$, где $P(x)$ — некоторый многочлен.

1191. *Указание.* Использовать теорему Гамильтона — Кэли и задачи 1141, 1142.

1194. *Указание.* Пусть $\mathbf{A}=\mathbf{S}+\mathbf{N}=\mathbf{S}_1+\mathbf{N}_1$ — два разложения Жордана. Оператор $\mathbf{S}_1$ коммутирует с $\mathbf{S}$, так как оба эти оператора являются многочленами от $\mathbf{A}$. Оператор $\mathbf{S}-\mathbf{S}_1$ полупрост (доказать!). Операторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_1$ также коммутируют, причем $\mathbf{N}-\mathbf{N}_1$ нильпотентен (доказать!). Оператор $\mathbf{S}-\mathbf{S}_1=$ $=\mathbf{N}-\mathbf{N}_1$ одновременно полупрост и нильпотентен, а значит, тривиален (см. задачу 1145).

1195. *Указание.* Использовать систему вложенных подпространств

$$0\subset\operatorname{Ker}\mathbf{A}\subset\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^2)\subset\ldots\subset\operatorname{Ker}(\mathbf{A}^k)=V.$$

1197. *Указание.* См. указание к задаче 1195.

1198. Две жордановы клетки размера 5 и 6 с собственным значением 0.

1199. 1) $J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3) $J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 2\end{pmatrix};$

4) $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}-3\\ -5\\ 7\end{pmatrix};$

5) $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$

6) $J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$

7) $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}-2\\ -3\\ 3\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 3\end{pmatrix};$

8) $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$

9) $J=\begin{pmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}b\\ 0\\ b\\ 0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ b\\ 0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$

10) $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$

11) $J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ e_5=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix};$

12) $J=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}8\\ -8\\ 8\\ -8\\ 8\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}12\\ -4\\ -4\\ 12\\ -20\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}14\\ -2\\ -2\\ -2\\ 14\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}15\\ -1\\ -1\\ -1\\ -1\end{pmatrix};$

13) $J=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$,

$$e_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\ e_6=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix};$$

14) $J=\begin{pmatrix}3&1&0&0&0&0\\0&3&1&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$,

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\ e_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ e_6=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix};$$

15) $J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}-6\\-3\\10\\-9\end{pmatrix};$

16) $J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\2\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\\-4\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}3\\3\\-11\\12\end{pmatrix};$

17) $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}-2\\-1\\6\\-5\end{pmatrix};$

18) $J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix},\ e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}-6\\-3\\10\\-9\end{pmatrix}.$

1200. 1) $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-3&2&1\\0&4&-1&1\\2&-3&2&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$, $\pi_1=\begin{pmatrix}3&0&-3&0\\0&0&0&0\\2&0&-2&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$,

$$\pi_{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&3&0\\0&1&0&0\\-2&0&3&0\\-1&0&1&1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}5&0&-6&0\\0&-1&0&0\\4&0&-5&0\\2&0&-2&-1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}2&-2&-8&10\\-1&1&4&-5\\2&-2&-8&10\\1&-1&-4&5\end{pmatrix};$$

2) $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-2&4&-1&1\\2&-3&2&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$, $\pi_1=\begin{pmatrix}-1&-2&-5&8\\2&4&10&-16\\-2&-4&-10&16\\-1&-2&-5&8\end{pmatrix}$,

$$\pi_2=\begin{pmatrix}2&2&5&-8\\-2&-3&-10&16\\2&4&11&-16\\1&2&5&-7\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}3&2&5&-8\\-2&-2&-10&16\\2&4&12&-16\\1&2&5&-6\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&-1&-2&3\\2&2&4&-6\\1&1&2&-3\end{pmatrix};$$

3) $J=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-3&2&1\\0&4&-1&1\\2&-3&2&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$, $\pi_{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,

$$S=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}2&-2&-8&10\\-1&1&4&-5\\2&-2&-8&10\\1&-1&-4&5\end{pmatrix};$$

4) $J=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&1&1&0\\1&1&2&1&0\\0&0&-2&2&1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$, $\pi_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&-2&-1\\0&0&-1&-2&-1\\0&0&-1&-2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\pi_2=\begin{pmatrix}1&0&1&2&1\\0&1&1&2&1\\0&0&2&2&0\\0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}2&0&1&2&1\\0&2&1&2&1\\0&0&3&2&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&-1&0&1&2\\1&-1&0&1&2\\0&0&2&4&4\\0&0&-2&-4&-4\\0&0&1&2&2\end{pmatrix};$$

5) $J=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3&0&0&0\\-1&-2&0&1&0\\0&0&-2&2&1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$,

$$\pi_1=S=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&1\\-1&-1&2&2&1\\0&0&2&4&4\\0&0&-2&-4&-4\\0&0&1&2&2\end{pmatrix};$$

6) $J=\begin{pmatrix}-2&1&0&0&0\\0&-2&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&1&2&1&0\\2&-1&2&-1&-1\\0&0&2&4&-3\\0&0&-1&-4&3\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$, $\pi_{-2}=\begin{pmatrix}1&0&1&2&-3\\0&1&-2&-4&7\\0&0&2&2&0\\0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

$$\pi_0=\begin{pmatrix}0&0&-1&-2&3\\0&0&2&4&-7\\0&0&-1&-2&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}-2&0&-2&-4&6\\0&-2&4&8&-14\\0&0&-4&-4&0\\0&0&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}-2&-1&6&6&-1\\4&2&-12&-12&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};$$

7) $J=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&1&2&1&1\\2&1&3&-1&0\\0&0&-3&4&2\\0&0&-1&2&1\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}$,

$$\pi_{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1&3&2\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&6&4\\0&0&-1&4&2\\0&0&1&-3&-1\end{pmatrix},\ \pi_0=\begin{pmatrix}0&0&1&-3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&2&-6&-4\\0&0&1&-3&-2\\0&0&-1&3&2\end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix}-1&0&1&-3&-2\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&-6&-4\\0&0&1&-4&-2\\0&0&-1&3&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}-6&9&5&-1&3\\-4&6&3&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};$$

8) $J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\pi_{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$S=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} -6 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

9) $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \pi_{-2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 11 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 11.6

1201. $\begin{pmatrix} \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & C_k^3\alpha^{k-3} & \dots & C_k^{n-1}\alpha^{k-n+1} \\ 0 & \alpha^k & C_k^1\alpha^{k-1} & C_k^2\alpha^{k-2} & \dots & C_k^{n-2}\alpha^{k-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^k \end{pmatrix}$,

где полагается $C_k^m=0$ при $m>k$.

1205. $\begin{pmatrix} 307 & 100 & 203 \\ 310 & 101 & 205 \\ -614 & -200 & -406 \end{pmatrix}$. **1206.** $\begin{pmatrix} -102 & -103 & -204 \\ -101 & -100 & -200 \\ 101 & 101 & 201 \end{pmatrix}$.

1207. 1) $\begin{pmatrix}\cos 3 & -\sin 3\\ \sin 3 & \cos 3\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$,

3) $\dfrac{\cos\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}+\dfrac{\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

1209. $\cos A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$, $\sin A=A$. **1210.** $\ln A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2}\\ 1 & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2}\\ -1 & \frac{11}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$.

1211. 1) $X=\pm\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}$, $X=\pm\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$;

2) $X=\pm\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{17}{8} & -\frac{13}{8}\\ \frac{1}{2} & -\frac{13}{8} & -\frac{17}{8}\\ -\frac{1}{2} & \frac{21}{8} & \frac{25}{8}\end{pmatrix}$.

1212. Оператор сдвига: $((\exp\mathbf{D})f)(x)=f(x+1)$.

§ 11.7

1213. Прямая $l=\langle(2,2,-1)\rangle$; любая прямая в плоскости $x_1-x_2+x_3=0$; сама эта плоскость и любая плоскость, проходящая через прямую l.

1214. $\{0\}$, $\langle(1,-2,1)\rangle$, плоскость $x-2y+z=0$, все пространство $\mathbb{R}^3$.

1215. Одномерное — прямая $\langle a\rangle$, двумерное — плоскость, ортогональная к a.

1216. Нулевое подпространство и подпространства $\Bbbk_k[x]$ многочленов степени не выше k, $k=0, 1, \ldots, n$.

1217. Нулевое подпространство и всевозможные подпространства вида $\langle e^{\lambda_{i_1}x}, \ldots e^{\lambda_{i_p}x}\rangle$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant k$. Их общее число равно 2^k.

1218. 1) Подпространство L: $x_1-2x_2+x_3=0$;

2) семейство подпространств $L_{\alpha,\beta}$: $(2\alpha+3\beta)x_1-\alpha x_2+\beta x_3=0$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$;

3) два подпространства $L_\pm$: $2x_1-x_2\pm(2x_3-2x_4)=0$.

К главе 12

§ 12.1

1219. Функция $\varphi(x,y)=x^1y^1-x^2y^2$, подпространство $x^1=x^2$.

1221. L порождается вектором $(3,-1)$, R — вектором $(2,-1)$.

1224. *Указание.* Рассмотреть $\varphi(a+ib, a+ib)$.

§ 12.2

1228. Утверждение верно над полями характеристики, отличной от двух.
1231. *Указание.* Рассмотреть $\varphi(a+ib, a+ib)$.
1232. *Указание.* Воспользоваться тождеством $g(a, g(a,c)b-g(a,b)c)=0$.
1250. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.
1251. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей и применить процесс ортогонализации Грама.
1253. *Указание.* W_2 — линейная оболочка W_1 и вектора, не содержащегося в $W_0^{\perp}=W_1+W_1^{\perp}$, где W_0 — одномерное ядро ограничения φ на W_1.
1254. *Указание.* Среди линейных оболочек $\langle W, e_j\rangle$ найдутся $r-k$ таких, чьи одномерные пересечения с $W^{\perp}$ порождают подпространство, дополнительное к $\operatorname{Ker}\varphi\subset W^{\perp}$. Взять сумму этого подпространства с W и воспользоваться задачей 1252.
1255. *Указание.* Рассмотреть функцию с матрицей B и воспользоваться предыдущей задачей.

§ 12.3

1257. 1) Нет; 2) да; 3) нет.

1258. 1) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$, $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$; 2) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$;

3) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$; 4) $y_1^2-y_2^2+y_3^2$, $\begin{pmatrix}1&-1&-\sqrt{3}\\1&1&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}$;

5) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&1\end{pmatrix}$; 6) $y_1^2-y_2^2-y_3^2+y_4^2$, $\begin{pmatrix}1&-\sqrt{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-1\sqrt{2}\\0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$;

7) $y_1^2+y_2^2-y_3^2+y_4^2$, $\begin{pmatrix}1&2&-7&\frac{72}{11}\\0&1&-3&\frac{31}{11}\\0&0&1&-1\\0&0&0&\frac{1}{11}\end{pmatrix}$.

1261. 1) $u_1v_2-u_2v_1$, матрица преобразования, например

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix};$$

2) $u_1v_2-u_2v_1+u_3v_4-u_4v_3$, матрица преобразования, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3) $u_1v_2-u_2v_1+u_3v_4-u_4v_3$, матрица преобразования, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4) $u_1v_2-u_2v_1+u_3v_4-u_4v_3$, матрица преобразования, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

5) $u_1v_2-u_2v_1+u_3v_4-u_4v_3$, матрица преобразования, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

1262. 1) y_1^2; если $a_i \neq 0$, то

$$y_1 = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad \ldots,$$
$$y_{i-1} = x_{i-1}, \quad y_i = x_1, \quad y_{i+1} = x_{i+1}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n;$$

2) $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \ldots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$;

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{2}, \quad y_2 = x_2 + \frac{x_3+x_4+\ldots+x_n}{3}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n;$$

3) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \frac{3}{4}y_4^2 - \frac{4}{6}y_5^2 - \frac{5}{8}y_6^2 - \ldots - \frac{n-1}{2(n-2)}y_n^2$;

$$y_1 = \frac{x_1+x_2}{2} + x_3 + x_4 + \ldots + x_n, \quad y_2 = \frac{x_1-x_2}{2},$$
$$y_3 = x_3 + \frac{x_4+x_5+\ldots+x_n}{2}, \quad y_4 = x_4 + \frac{x_5+x_6+\ldots+x_n}{3}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n.$$

Указание. Свести к предыдущей задаче.

4) Если n четно, то $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\ldots+y_{n-1}^2-y_n^2$;

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2},\ (i=1,3,5,\ldots,n-3),\quad y_{n-1}=\frac{x_{n-1}+x_n}{2},$$
$$y_i=\frac{x_{i-1}-x_i+x_{i+1}}{2},\ (i=2,4,6,\ldots,n-2),\quad y_n=\frac{x_{n-1}+x_n}{2};$$

если n нечетно, то $y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\ldots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2$;

$$y_i=\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2},\quad (i=1,3,5,\ldots,n-2),$$
$$y_i=\frac{x_{i-1}-x_i+x_{i+1}}{2},\quad (i=2,4,6,\ldots,n-1),\quad y_n=x_n;$$

5) $\frac{n-1}{n}y_1^2+\frac{n-2}{n-1}y_2^2+\ldots+\frac{2}{3}y_{n-2}^2+\frac{1}{2}y_{n-1}^2$;

$y_1=x_1-\frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{n-1}$, $y_2=x_2-\frac{x_3+x_4+\ldots+x_n}{n-2}$, $\ldots$, $y_{n-1}=x_{n-1}-x_n$, $y_n=x_n$.

Указание. Представить функцию в виде

$$\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\sum_{i<j}x_ix_j$$

и применить метод индукции.

1264. При $a\in(0,3-\sqrt{3})$ $p=0$, $q=2$; при $a=3-\sqrt{3}$ $p=0$, $q=1$; при $a\in(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$ $p=1$, $q=1$; при $a=3+\sqrt{3}$ $p=1$, $q=0$; при $a\in(3+\sqrt{3},+\infty)$ $p=2$, $q=1$.

1265. 1) При $\alpha>2$; 2) при $|\alpha|<\sqrt{5/3}$.

1266. 1) $\bar{x}_1x_1-\bar{x}_2x_2$, матрица преобразования, например, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$;

2) $\bar{x}_1x_1+\bar{x}_2x_2-\bar{x}_3x_3$, матрица преобразования, например,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6i\\ 0 & i & 1\\ 0 & -1 & -i\end{pmatrix}.$$

1267. 1) $-i\bar{x}_1x_1+i\bar{x}_2x_2$, матрица преобразования, например,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix};$$

2) $i\bar{x}_1x_1+i\bar{x}_2x_2-i\bar{x}_3x_3$, матрица преобразования, например,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6i\\ 0 & i & 1\\ 0 & -1 & -i\end{pmatrix}.$$

К главе 13

§ 13.1

1269. Векторы ортогональны. **1271.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$.

1272. 1) Да; 2) да, 3) да. **1273.** $|x^2|=\sqrt{\frac{2}{5}}$, $|x^4|=\sqrt{\frac{2}{9}}$, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{45}}{7}$.

1274. 1) Да; 2) да.
1277. В евклидовом пространстве — да; в эрмитовом пространстве — нет.
1278. Да. **1280.** $(v_1+w_1, v_2+w_2)_{V\oplus W}=(v_1, w_1)_V+(v_2, w_2)_W$.
1281. *Указание.* Из неотрицательности $(x+ty, x+ty)$ для всех $t\in\mathbb{R}$ вывести неравенство $|\mathrm{Re}(x, y)|\leqslant|x||y|$, затем, используя представление $(x, y)=$ $=|(x, y)|e^{i\varphi}$, рассмотреть вектор $x'=xe^{i\varphi}$ и неравенство $|\mathrm{Re}(x', y)|\leqslant|x'||y|$.
1282. Стандартное эрмитово пространство $\mathbb{C}^n$.
1284. $(z_1, z_2)_{\mathbb{R}}=\sum\limits_{k=1}^{n} x_1^k x_2^k+\sum\limits_{k=1}^{n} y_1^k y_2^k$.
1287. *Указание.* Воспользоваться свойством $(x, iy)=i(x, y)$, выразив (x, iy) и $i(x, y)$ через соответствующие действительную и мнимую части.
1) $\mathrm{Re}(x, y)=\mathrm{Im}(x, iy)$, $\mathrm{Im}(x, y)=-\mathrm{Re}(x, iy)$;
2) $(x, y)=\mathrm{Re}(x, y)-i\,\mathrm{Re}(x, iy)$, $(x, y)=\mathrm{Im}(x, iy)+i\,\mathrm{Im}(x, y)$.

§ 13.2

1289. Например, можно добавить $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 1, 1, 2)$.
1290. Например, $(-1, i, 1+i)$.
1291. Например, можно добавить $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.
1292. Два решения $a_3=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{6}}(5, 2, 5)$.
1293. Например: $a_3=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $a_4=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
1294. Например: $a_3=\dfrac{(1, i, 1, -i)}{2}$, $a_4=\dfrac{(i, 1, -i, 1)}{2}$.
1295. 1) $(1, -1, -1, -1)$, $(3, 0, 2, 1)$, $(1, 3, -1, -1)$;
2) $(1, 2, 0, -1)$, $(5, -2, 1, 1)$, $(0, 1, 0, 2)$.
1296. 1) x^3, x^4, $x^5-\frac{7}{9}x^3$, $x^6-\frac{9}{11}x^4$;
2) x^3, $x^4-\frac{7}{8}x^3$, $x^5-\frac{8}{5}x^4+\frac{28}{45}x^3$, $x^6-\frac{9}{4}x^5+\frac{18}{11}x^4-\frac{21}{55}x^3$.
1297. $(1+i, 0, 1-i)$, $(1, -i, i)$, $(-i, 2, 1)$.
1298. $|b_l|=|a_l|$ тогда и только тогда, когда $(a_l, a_j)=0$, $j=1, 2, \ldots, l-1$, $l>1$.
1300. 1) $T_2(x)=2x^2-1$, $T_3(x)=4x^3-3x$, $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$, $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$.
2) *Указание.* Воспользоваться формулой из тригонометрии $\cos\alpha\cos\beta=$ $=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$.
3) *Указание.* При интегрировании воспользоваться подстановкой $x=$ $=\cos\theta$, свойством 2.
4) $\|T_k\|^2=\frac{\pi}{2}$, если $k\geqslant 1$, $\|T_0\|^2=\pi$.
1301. $P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$, $P_3(x)=\dfrac{5x^3-3x}{2}$, $P_4(x)=\dfrac{35x^4-30x^2+3}{8}$,
$$P_5(x)=\frac{63x^5-70x^3+15x}{3}.$$

1302. 2) *Указание.* Воспользоваться интегрированием по частям и тем обстоятельством, что многочлен $u_k(x)=(x^2-1)^k$ имеет в точках -1 и 1 нули кратности k.

3) $\|P_k\|^2=\dfrac{2}{2k+1}$.

Указание. Интегрированием по частям показать, что

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^k(1+x)^k\,dx=\frac{k!}{(k+1)(k+2)\ldots(2k)}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2k}\,dx.$$

1303. 1) $x=\dfrac{2t-a-b}{b-a}$; 2) $\|Q_k\|_{a,b}=\sqrt{\dfrac{b-a}{2}}\,\|P_k\|_{-1,1}$.

1306. $f_k=c_kP_k$, где $c_k=\dfrac{2^k(k!)^2}{(2k)!}$.

Указание. Применить предыдущую задачу.

1308. Представление однозначно с точностью до умножения на диагональную матрицу, т. е. если $A=UR=U'R'$, то $U=U'D$, $R=D^{-1}R'$, где D — диагональная матрица, причем диагональные элементы равны по модулю единице.

Указание. Представить матрицу A как матрицу перехода от ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к некоторому базису $e_i'=\sum\limits_{j=1}^{n}a_i^je_j$. Применить к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ процесс ортогонализации, затем ортонормировать получившийся базис. Обозначим новый ортонормированный базис как $e_1'', e_2'', \ldots, e_n''$. Эрмитова (ортогональная) матрица U в разложении — это матрица перехода от ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1'', e_2'', \ldots, e_n''$.

1309. $U=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&-1\\2&-1&-2\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&1&1\\0&0&9\end{pmatrix}$.

1310. $U=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1+i&-1\\i&1+i\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&-3\\0&3\end{pmatrix}$. **1313.** $\left(0, \dfrac{3}{4}, 0, 0, 0, \dfrac{1}{4}, 0\right)$.

§ 13.3

1315. 1) Единичная матрица; 2) $\begin{pmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}$.

1321. 1) $1, x, x^2$; 2) $\dfrac{3(3-5x^2)}{8}, \dfrac{3x}{2}, \dfrac{15(3x^2-1)}{8}$; 3) $1-x^2, \dfrac{x}{2}, \dfrac{3x^2}{2}-1$.

1322. G^{-1}. **1323.** 1) $T=(S^\top)^{-1}$; 2) $T=(\bar{S}^\top)^{-1}$.

1327. $|b_k|^2=\dfrac{g_k(a_1, \ldots, a_k)}{g_{k-1}(a_1, \ldots, a_{k-1})}$, $k=1, \ldots, n$.

1329. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.

1333. 1) Нет; 2) да. **1334.** Нет. **1335.** Нет.

1338. Объем n-мерного параллелепипеда не превосходит произведения длин его ребер, выходящих из одной вершины, и равен этому произведению тогда и только тогда, когда эти ребра попарно ортогональны.
1339. Объем n-мерного параллелепипеда не превосходит произведения объемов двух его дополнительных «граней» и равен этому произведению в том и только том случае, когда эти «грани» взаимно перпендикулярны, либо хотя бы одна из них имеет нулевой объем; равенство имеет место тогда и только тогда, когда $(a_i, a_j) = 0$, $i = 1, \ldots, p+1$, $j = p+1, \ldots, k$.
1340. $|(a_{ij})|^2 \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ (иногда именно это неравенство называют неравенством Адамара).
1342. 1) 30; 2) 2; 3) 3; 4) 0.

§ 13.4

1343. $n-k$.
1346. 1) Например, $b_1 = (2, -1, -1, 0)$, $b_2 = (-1, 0, 3, -1)$;
2) например, $b = (1, 1, 2, -3)$.
1347. 1) Например, $\begin{cases} 3x^1 + 2x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 - x^4 = 0; \end{cases}$ 2) $x^1 + x^3 - x^4 = 0$.
1348. $L^\perp = \langle x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n-1} \rangle$ — подпространство многочленов нечетных степеней.
1349. 1) Подпространство нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали;
2) подпространство кососимметричных матриц.
1350. $x^\parallel = (5, 2, 6, -1)$, $x^\perp = (4, -1, -3, 0)$.
1351. $x^\parallel = (0, 1, 0, -1)$, $x^\perp = (2, 4, -2, 4)$.
1352. $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 13.5

1354. $\dfrac{\sqrt{273}}{7}$. **1355.** 1) $\sqrt{33}$; 2) $\sqrt{30}$; 3) 9.
1356. $d_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}C_{2n}^n}$, $d_1 = \dfrac{2^n\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}C_{2n}^n}$, $d_2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Указание. Ортогональная составляющая вектора x^n равна $\alpha P_n(x)$, где $\dfrac{1}{\alpha}$ равняется коэффициенту при максимальной степени x^n в многочлене $P_n(x)$, а сам многочлен $P_n(x)$ равен n-му многочлену Лежандра (см. задачу 1302) в случае $(\cdot,\cdot)_1$, n-му многочлену Чебышёва (см. задачу 1300) для $(\cdot,\cdot)_2$ и получается линейной заменой из n-го многочлена Лежандра (см. задачу 1303) для $(\cdot,\cdot)_0$.
1358. 1) $\varphi = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; 3) $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; 4) $\dfrac{\pi}{4}$.

1359. 1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 3) $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{30}}{21}$. **1361.** $\arccos\frac{3}{5}$.

1363. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\arccos\frac{1}{3}$; 5) $\frac{\pi}{4}$.

1364. $\arccos\frac{2}{3}$.

§ 13.6

1365. $|AB|=5$, $|AC|=9$, $|BC|=2\sqrt{14}$, $\cos A=\frac{5}{9}$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$, $\cos C=\frac{2\sqrt{14}}{9}$.

1366. $\sqrt{14}$; $(2, 1, 2, 9)$. **1367.** 5, $(2, -2, -3, 2)$. **1368.** $\frac{\pi}{3}$.

1370. Плоскость и прямая скрещиваются по точке; уравнения общего перпендикуляра $x^1-1=x^2-1=x^3-\frac{3}{2}=x^4-\frac{3}{2}$; длина общего перпендикуляра равна $\frac{1}{2}$.

1371. $l\parallel P$, $\rho=5$. **1372.** 3. **1374.** 5. **1375.** 1) $\frac{27}{5}$; 2) $\sqrt{6}$.

1376. 1) $\frac{27}{5}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{6}$. **1377.** $\frac{2\sqrt{2/7}}{5}$. **1378.** $2\sqrt{\frac{2}{7}}$.

1379. $h=\dfrac{|a_1x_0^1+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}$.

1380. 1) $g_{11}=a_{12}^2$, $g_{22}=a_{13}^2$, $g_{12}=\dfrac{a_{23}^2-a_{12}^2-a_{13}^2}{2}$;
2) неравенство треугольника.

1381. 1) $\varepsilon>\frac{1}{2}$; 2) $\varepsilon>\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1382. Рассмотрим матрицу G с матричными элементами

$$g_{ii}=a_{0i}^2, \quad g_{ij}=\frac{a_{ij}^2-a_{0i}^2-a_{0j}^2}{2}.$$

1) Матрица G положительно определена, т. е. все ее угловые миноры положительны;

2) матрица G неотрицательно определена, т. е. все ее главные, а не только угловые миноры неотрицательны (см. задачу 1246). В этом случае наименьшая размерность находится как порядок наибольшего отличного от нуля главного минора матрицы G.

Указание. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ — искомые точки. Выразить элементы матрицы Грама $G(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}})$ через числа набора $\{a_{ij}\}$.

§ 13.7

1383. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **1385.** $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$. **1387.** $\arccos\frac{\sqrt{k}}{n}$.

1388. 1) 2^{n-1}; 2) при $n=2k+1$ ортогональных диагоналей нет; при $n=2k$ искомое число равно $C_n^k/2=C_{2k-1}^{k-1}$. **1389.** $a\sqrt{n}$.

1390. Если $|\varepsilon|>4$, то пересечение пусто;
если $|\varepsilon|=4$ — одна точка; если $2<|\varepsilon|<4$ — правильный тетраэдр;
если $\varepsilon=0$ — правильный октаэдр; $\varepsilon=2,3$ — правильный тетраэдр.

1391. $n\geqslant\dfrac{\ln 2}{\ln 1+10^{-3}}\approx 1000\ln 2$. **1393.** $\sqrt{\dfrac{n+1}{2(n-k)(k+1)}}$.

1394. $\arccos\dfrac{2}{3}$ — для граней, имеющих ровно одну общую вершину;
$\arccos\dfrac{1}{3}$ — для граней, имеющих ровно две общие вершины;
0 — если грани совпадают.

§ 13.8

1396. Линейная комбинация $x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n$ есть ортогональная проекция вектор-столбца b исходной системы на подпространство $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$.

1397. 1) $x=-\dfrac{3}{5}$, $y=\dfrac{3}{5}$; 2) $x=\dfrac{13}{11}$, $y=\dfrac{12}{11}$; 3) $\left(0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$; 4) $(1,1,0,1)$.

1399. $t_k(x)=\displaystyle\prod_{j=0,j\neq k}^{2n}\frac{\sin((x-x_j)/2)}{\sin((x_k-x_j)/2)}$.

1401. $h=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\Big(f(x_i)+(x-x_i)\big(f'(x_i)-2f(x_i)\varphi_i'(x_i)\big)\Big)\varphi_i^2(x)$, где многочлены $\varphi_i(x)$ определены формулой (13.1).

1403. Базис образуют, например, δ-функции $\delta_i: M_{n+1}\to\mathbb{R}$,

$$\delta_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

1405. 1) $L_1^f(x)=\dfrac{13}{10}x+\dfrac{4}{5}$, $\|L_1^f-f\|_4=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$;
2) $L_2^f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{11}{20}x+\dfrac{21}{20}$, $\|L_2^f-f\|_4=\dfrac{1}{\sqrt{20}}$;
3) $L_3^f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x+1$, $\|L_3^f-f\|_4=0$ — точное решение.

1407. $L_2^f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\sin x$, где

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx,\quad a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx,\quad a_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin x\,dx.$$

К главе 14

§ 14.1

1408. Умножение на $\bar\lambda$. **1409.** Поворот на угол $-\alpha$. **1410.** $A^*=G^{-1}\bar{A}^{\top}G$.

1411. 1) $\begin{pmatrix}7 & 12\\ -1 & -2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -17 & 11\end{pmatrix}$. **1412.** $\begin{pmatrix}-3+2i & -3-5i\\ -2 & -3i\end{pmatrix}$.

1413. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$$1)\ A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix};\quad 2)\ A^*=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & \frac{15}{2} & 0\end{pmatrix};\quad 3)\ A^*=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0\\ \frac{3}{2} & 0 & 1\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

1414. 1) Проектирование на биссектрису 2-й и 4-й четвертей параллельно оси ординат; 2) $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}$.

1415. Умножение на сопряженную матрицу $\overline{C}^{\top}$: $\mathbf{C}^*(X)=\overline{C}^{\top}X$.

1422. *Указание.* Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — собственный базис оператора $\mathbf{A}$. Показать, что подпространство $L_k=\langle x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n\rangle$ инвариантно относительно $\mathbf{A}$. Далее рассмотреть ортогональное дополнение $L_k^{\perp}$.

1423. *Указание.* Доказать, что в n-мерном эрмитовом пространстве у любого оператора существует $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство. Далее по индукции построить базис, в котором матрица оператора имеет треугольный вид, затем ортогонализовать и нормировать полученный базис.

1424. Чтобы получить жорданову форму оператора $\mathbf{A}^*$, нужно в жордановой форме оператора $\mathbf{A}$ заменить по диагонали собственные значения λ_i на $\overline{\lambda}_i$.

1431. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. **1432.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1433. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. **1434.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

1437. $\lambda_0=0$ (кратности 1), $\lambda_1=-1$ (кратности 2), …, $\lambda_n=-n^2$ (кратности 2).

1438. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & -n(n+1)\end{pmatrix}$.

Указание. Воспользоваться интегрированием по частям.

1439. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & -1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & -n^2\end{pmatrix}$.

Указание. Воспользоваться интегрированием по частям.

1442. Верно лишь для линейных комбинаций с вещественными коэффициентами.

1443. *Указание.* Для евклидова пространства использовать комплексификацию оператора.

1446. *Указание.* Использовать три предыдущих задачи.

1447. Нет.

1448. Диагональная вещественная матрица.

1449. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $e'_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = \left(\frac{4+3i}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-4+3i}{5\sqrt{2}}\right)$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $e'_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $e'_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

4) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
$e'_3 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
$e'_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$;

6) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$,
$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0, 1)$, $e'_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -1, 2, 1)$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, базис: $e'_1 = (0, 1, 0)$, $e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$,
$e'_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1450. 1) Нет, так как корни характеристического многочлена не вещественны; 2) нет, так как оператор не диагонализируем; 3) да.

1451. Да; матрица Грама, например, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1457. 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1459. Преобразование с матрицей A есть композиция ортогонального (унитарного) преобразования U_2 с последующим растяжением C (сжатием) по перпендикулярным осям и еще одного ортогонального (унитарного) преобразования U_1. Или так: преобразование с матрицей A переводит $(n-1)$-мерную единичную сферу $|x|=1$ в $(n-1)$-мерный эллипсоид с каноническим уравнением $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2=1$.

Указание. Матрица C — матрица арифметического квадратного корня из A^*A.

1460. *Указание.* $\lambda_1=\alpha_1^2$, $\lambda_2=\alpha_2^2$, …, $\lambda_r=\alpha_r^2$ — ненулевые (положительные) собственные значения оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ находятся как векторы канонического базиса оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, а $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_m$ — канонический базис оператора $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$, причем

$$\widetilde{e}_1=\frac{Ae_1}{\lambda_1}, \quad \widetilde{e}_2=\frac{Ae_2}{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad \widetilde{e}_r=\frac{Ae_r}{\lambda_r}.$$

1461. Воспользовавшись алгоритмом ортогонализации, представить неотрицательный квадратный корень из A (см. задачу 1456) в виде произведения ортогональной и верхнетреугольной матриц.

1462. $L=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\\1&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&1\\0&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$. **1463.** $z=x+iy$.

Указание. Показать, что $\mathbf{H}_1=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)$, $\mathbf{H}_2=\frac{1}{2i}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*)$.

1464. $\begin{pmatrix}2&6+2i\\6-2i&1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1&1-i\\1+i&-1\end{pmatrix}$. **1476.** $\begin{pmatrix}0&|a|&0\\-|a|&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1480. 1) $\begin{pmatrix}ai&0\\0&-ai\end{pmatrix}$, $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $\begin{pmatrix}3i&0\\0&-3i\end{pmatrix}$, $e_1=\left(\frac{1-2i}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1-2i}{\sqrt{6}}\right)$;

3) $\begin{pmatrix}3i&0&0\\0&-3i&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $e_1=\left(\frac{-1+3i}{6}, \frac{-1-3i}{6}, \frac{4}{6}\right)$,

$e_2=\left(\frac{-1-3i}{6}, \frac{-1+3i}{6}, \frac{4}{6}\right)$, $e_3=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

1483. 1) $\begin{pmatrix}0&3&0\\-3&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $e_1=\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$,

$e_2=\left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $e_3=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;

2) $\begin{pmatrix}0&5&0\\-5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $e_1=\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=\left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, базис (определен неоднозначно): $e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$,

$$e_2=\left(0, \frac{1}{5\sqrt{2}}, 0, \frac{7}{5\sqrt{2}}\right),\ e_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ e_4=\left(0, \frac{7}{5\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{5\sqrt{2}}\right);$$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, базис (определен неоднозначно):

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ e_2=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$
$$e_3=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ e_4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

1484.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -n & 0 \end{pmatrix};$$

собственные функции оператора $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbb{C}}$: $f_0=1$, $f_{\pm k}(x)=e^{\pm kix}$, $k=1, \dots, n$; собственные значения: $\lambda_0=0$, $\lambda_{\pm k}=\pm ki$, $k=1, \dots, n$.

1485. Жорданова форма содержит только одномерные клетки, а собственные числа на диагонали чисто мнимые или нули.

1486. Косоэрмитов оператор диагонализируем, а $\frac{d}{dx}$ — нет.

Указание. Воспользоваться комплексификацией оператора $\frac{d}{dx}$.

1491. 1) Нет; 2) да.

1493. *Указание.* Воспользоваться формулой

$$(x, y) = \frac{1}{2}\big((x+y, x+y)-(x, x)-(y, y)\big).$$

1496. $\sqrt{n}$.

1498. $O(1)=\{\pm 1\}$, $U(1)=\{e^{i\varphi}\}$, $O(2)$ — группа матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}$.

1501. Изоморфны следующим матричным группам: $SO(1)=SU(1)=\{E\}$; $SO(2)$ — группа матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi\in\mathbb{R}$; $SU(2)$ — группа матриц вида $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, $a, b\in\mathbb{C}$, $|a|^2+|b|^2=1$.

1502. Нет.

1507. 1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(i,\sqrt{2}-1)$, $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(i,-1-\sqrt{2})$;

2) $\begin{pmatrix}e^{i\varphi} & 0\\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i,1)$, $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-i,1)$;

3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1+i2\sqrt{2}}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-i2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2=\dfrac{1}{2}(1,-1,i\sqrt{2})$,

$e_3=\dfrac{1}{2}(1,-1,-i\sqrt{2})$;

4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)$, $e_2=\dfrac{1}{2}(1,-i,-\sqrt{2})$,

$e_3=\dfrac{1}{2}(1,-i,\sqrt{2})$.

1508. 1), 2) $\begin{pmatrix}i & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-i,0,0,1)$, $e_2=\dfrac{1}{2}(1,i,1,-i)$,

$e_3=\dfrac{1}{2}(i,1,-i,1)$, $e_4=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i,0)$.

1509. 1), 2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{2}(i,-1,-i,-1)$, $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i,0,0,1)$,

$e_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,i,1,0)$, $e_4=\dfrac{1}{2}(1,-i,1,i)$.

1510. $A'=2W(W^*W)^{-1}W^*-E$.

1512. *Указание.* Рассмотреть канонический вид самосопряженного оператора **A**. Биекция строится так: подпространству L сопоставляется оператор ортогонального отражения относительно L.

1515. 1) $\begin{pmatrix}\dfrac{6}{7} & \dfrac{\sqrt{13}}{7} & 0\\ -\dfrac{\sqrt{13}}{7} & \dfrac{6}{7} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}\dfrac{3}{7} & \dfrac{2\sqrt{10}}{7} & 0\\ -\dfrac{2\sqrt{10}}{7} & \dfrac{3}{7} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

1516. 1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $e_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$;

2) $\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$, $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$, $e_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$;

3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(5, 2, 5)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $e_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(1, -5, 1)$;

4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{2}(1, 0, \sqrt{2}, 1)$, $e_2 = \frac{1}{2}(-1, -\sqrt{2}, 0, 1)$,

$e_3 = \frac{1}{2}(0, 1, -1, \sqrt{2})$, $e_4 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, -1, 0)$;

5) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$,

$e_3 = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}(\sqrt{2}+1, -1-\sqrt{2}, 1, -1)$, $e_4 = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}(1, -1, -1-\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$;

6) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3, 2, 1, -2)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, -1)$,

$e_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$, $e_4 = \frac{1}{6}(3, -1, -5, 1)$;

7) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 2, -1, 6)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1, 0)$,

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -2, 1, 1)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -1, -4, 0)$.

1517. Нет, так как оператор имеет собственное значение 5.

1518. 1) Да, матрица Грама, например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 2) нет.

1519. Да. **1520.** $B = \begin{pmatrix} 0 & -(\varphi + 2\pi k) \\ \varphi + 2\pi k & 0 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{Z}$ — любое.

1521. Нет, верно только для ортогональных операторов с определителем 1.

1522. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей.

1523. *Указание.* Использовать числовое представление $\mu = e^{if} = \frac{1+if}{1-if}$, $f \in \mathbb{R}$, чисел, по модулю равных единице, и его обращение $f = i\frac{1-\mu}{1+\mu}$, а также представление $\mathbf{U} = e^{i\mathbf{F}}$ унитарного оператора $\mathbf{U}$ из задачи 1521.

1525. *Указание.* Воспользоваться каноническим видом унитарного оператора и интерполяционным многочленом Лагранжа для построения такого многочлена g, что $B=g(A)$.

1526. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей: для данной унитарной матрицы U рассмотреть унитарную матрицу $U^{\top}U$, найти такой корень T из нее, что он является: а) симметричной комплексной матрицей; б) унитарной матрицей. Показать, что матрица $UT^{-1}=UT^{*}$ является вещественной и унитарной, а значит, ортогональной.

1527. 1) $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$;

2) $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$.

1532. $\frac{\pi}{4}$; вторая пара подпространств изоклинна (т. е. угол между любым вектором $x\in L_1'$ и подпространством L_2' один и тот же), а первая — нет.

1536. $\bar{x}=Ax+b$, где $b=\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$, $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1537. $\bar{x}=Ax+b$ и $\bar{x}=A^{t}x+b$, где $b=\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$, $A=\begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ \frac{16}{45} & \frac{37}{45} & -\frac{4}{9} & 0 \\ \frac{13}{45} & \frac{16}{45} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1538. Композиция (прямая сумма) вращений на угол $\arccos\frac{4}{5}$ вокруг взаимно ортогональных плоскостей π_1 и π_2, заданных уравнениями

$$\pi_1\colon x_1=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}t_1-\frac{1}{3}t_2,\ x_2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2,\ x_3=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}t_1+\frac{2}{3}t_2,\ x_4=-1;$$

$$\pi_2\colon x_1=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}t_1,\qquad x_2=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}t_1,\qquad x_3=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}t_1,\qquad x_4=-1+t_2.$$

1540. 1) $U_{\varphi}=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}$.

Указание. S_3 является собственным вектором с $\lambda=1$ для F_{U_φ}, т.е.

$$U_\varphi S_3 U_\varphi^* = S_3.$$

Из этого соотношения находится вид матрицы U_φ;

$$2)\ U_\psi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\psi}{2} & i\sin\frac{\psi}{2} \\ i\sin\frac{\psi}{2} & \cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}; \qquad 3)\ U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix};$$

$U_\varphi = e^{\frac{i\varphi}{2}S_3}$, $U_\psi = e^{\frac{i\psi}{2}S_1}$, $U_\theta = e^{\frac{i\theta}{2}S_2}$.

1541. *Указание.* При помощи углов Эйлера представить собственную ортогональную матрицу в виде произведения матриц элементарных вращений вокруг координатных осей и воспользоваться предыдущей задачей.

1542. *Указание.* Показать, что произвольную матрицу из $SU(2)$ можно представить в виде произведения элементарных матриц $U_\varphi, U_\psi, U_\theta$, задающих вращения $F_{U_\varphi}, F_{U_\psi}, F_{U_\theta}$ на углы φ, ψ, θ вокруг базисных векторов S_3, S_2, S_1 соответственно (см. задачу 1540).

1544. *Указание.* Воспользоваться матричной реализацией алгебры $\mathbb{H}$ (см. задачу 1466).

1545. *Указание.* Связать оператор $\psi_{\tilde q}$ с операторами F_U, построенными в задачах 1540, 1541, 1542, и вычислить координаты векторов $\psi_{\tilde q}(i)$, $\psi_{\tilde q}(j)$, $\psi_{\tilde q}(k)$.

1546. Положим $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ (см. задачи 1454 и 1456). Тогда непосредственно проверяется, что $\mathbf{U}_1 = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}$ и $\mathbf{U}_2 = \mathbf{A}\mathbf{P}_2^{-1}$ — ортогональны (унитарны).

1547. Так как $\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}\mathbf{U}_1^{-1}$ и $\mathbf{P}_2 = \mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{A}$ — положительные самосопряженные операторы, имеем $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$ и аналогично $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$, т.е. $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ определены однозначно (см. задачу 1456). Значит, $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ также определены однозначно. Пусть теперь $\mathbf{A} = \mathbf{U}_2\mathbf{P}_2$ — полярное разложение. Положим $\mathbf{P}_3 = \mathbf{U}_2\mathbf{P}_2\mathbf{U}_2^{-1}$ — положительный самосопряженный оператор, для которого $\mathbf{A} = \mathbf{P}_3\mathbf{U}_2$. В то же время $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{U}_1$. В силу однозначности $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_3$ и $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

1548. $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{P}_1^2 = \mathbf{U}\mathbf{P}_2\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{P}_2\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}(\mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{U}^{-1}$.

1550. $\begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1551. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1552. $B = \frac{5\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

1553. $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1554. Оба разложения являются неоднозначными:

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\-1&-1&-5\\-1&-1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-2\\-2&-2&-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-5\\-1&-1&-5\\-1&-1&-5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-2&-2&-1\\-1&2&-2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&5\\1&1&5\\5&5&25\end{pmatrix}.$$

1555. $\begin{pmatrix}2&i\\2i&-1\end{pmatrix}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&3i\\3i&1\end{pmatrix}.$

1556. $\begin{pmatrix}3+i&1+3i\\3-i&1-3i\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}3&i\\-i&3\end{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&i\\1&-i\end{pmatrix}.$

1558. Если $\mathbf{A}$ нормален, то $(\mathbf{A}x,\mathbf{A}x)=(\mathbf{A}^*\mathbf{A}x,x)=(\mathbf{A}\mathbf{A}^*x,x)=(\mathbf{A}^*x,\mathbf{A}^*x)$. Обратно, если $|\mathbf{A}x|=|\mathbf{A}^*x|$, то симметрическая билинейная функция $\varphi(x,y)=\big((\mathbf{A}^*\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{A}^*)x,y\big)$ такова, что $\varphi(x,x)=0$ для любого x. Поэтому $\varphi\equiv 0$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

1566. *Указание.* Использовать предыдущую задачу. В случае евклидова пространства использовать комплексификацию $\mathbf{A}_{\mathbb{C}}$.

1567. В силу задачи 1563, достаточно это доказать для $\lambda=0$. Тогда $|\mathbf{A}^*x|=|\mathbf{A}x|=0$ (см. задачу 1558), т. е. $\mathbf{A}^*x=0$ и $x\in\operatorname{Ker}\mathbf{A}^*$.

1568. Пусть $\mathbf{A}x=\lambda x$ и $y\in\langle x\rangle^{\perp}$. Тогда $\mathbf{A}^*x=\bar{\lambda}x$ (см. предыдущую задачу) и $(x,\mathbf{A}y)=(\mathbf{A}^*x,y)=\lambda(x,y)=0$, т. е. $\mathbf{A}y\in\langle x\rangle^{\perp}$. Для $\mathbf{A}^*$ аналогично.

1569. Пусть $\mathbf{A}x=\lambda x$, $\mathbf{A}y=\mu y$ и $\lambda\neq\mu$. Тогда $\bar{\lambda}(x,y)=(\mathbf{A}x,y)=(x,\mathbf{A}^*y)=\bar{\mu}(x,y)$ (см. задачу 1567), т. е. $(x,y)=0$.

1570. Для эрмитова пространства можно доказать утверждение индукцией по размерности, используя две предыдущие задачи и тот факт, что в таком пространстве любой оператор имеет собственный вектор. В евклидовом пространстве утверждение неверно: оператор $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ нормален (ортогонален), но не имеет собственных векторов.

1571. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей и задачей 1452 о попарно коммутирующих операторах.

1572. В эрмитовом пространстве, воспользовавшись тем, что ортогональное дополнение к собственному вектору инвариантно относительно $\mathbf{A}$, построить ортонормированный собственный базис и воспользоваться предыдущей задачей. В евклидовом пространстве утверждение неверно: рассмотреть пример оператора с матрицей $\begin{pmatrix}2&-2\\1&2\end{pmatrix}$.

1573. Использовать тот факт, что инвариантное подпространство диагонализируемого оператора — линейная оболочка нескольких собственных векторов и задачи 1567, 1570.

1574. Если **A** нормален, то **A** диагонализируем в ортонормированном базисе (см. задачу 1570). Поэтому для любого инвариантного W подпространства W и $W^{\perp}$ являются линейными оболочками некоторых собственных векторов. Обратное утверждение доказать путем построения собственного ортонормированного базиса индукцией по размерности, беря в качестве W линейную оболочку произвольного собственного вектора и сводя утверждение к пространству $W^{\perp}$. В евклидовом пространстве утверждение неверно: например, оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств, но не является нормальным.

1576. *Указание.* Воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа $L_n(\lambda_k) = \overline{\lambda}_k$ и задачей 1570.

1577. *Указание.* Использовать комплексификацию оператора и задачу 1574.

1579. Использовать комплексификацию оператора и задачу 1570.

1581. *Указание.* Использовать задачи 1570 и 1579.

1582. $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}$, базис: $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

1583. $\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, базис: $e_1' = (0, 1, 0)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

1584. *Указание.* Применить задачу 1571.

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & -3 & 0 \\ 3 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

базис (определен неоднозначно):

$$e_1' = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right), \quad e_2' = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad e_3' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

1586. 1) Система совместна; 2) система несовместна.

1588. 1) $\lambda = 1$ система совместна, $\lambda \neq 1$ — система несовместна;
2) $\lambda \neq -2$ система совместна, $\lambda = -2$ система несовместна.

1595. $A^{+} = \left(\begin{array}{cccc:c} \frac{1}{\alpha_1} & & & & \\ & \frac{1}{\alpha_2} & & & 0 \\ & & \ldots & & \\ & & & \frac{1}{\alpha_r} & \\ \hdashline & & 0 & & 0 \end{array}\right)$, где $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_r^2$ — ненулевые (положительные) собственные значения оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}\colon V \to V$.

1597. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$. **1600.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1602. *Указание.* Использовать задачу 1599.

1603. $A_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \sin\varphi & \dots & \cos\varphi & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

1604. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей. 1-й шаг: в качестве вектора v рассмотреть 1-й столбец A.

1606. $w = \dfrac{x - \sqrt{(x,x)}e_1}{|x - \sqrt{(x,x)}e_1|}$.

Указание. Рассмотреть двумерное пространство $L(x, e_1)$, натянутое на векторы x и e_1. Искомый вектор $w \in L(x, e_1)$ ортогонален биссектрисе угла между x и e_1 в двумерной плоскости $L(x, e_1)$.

1607. *Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей: в качестве вектора x рассмотреть последовательно столбцы получающихся матриц.

1608. Решение системы $Ax = b$ ищется обратным ходом метода Гаусса применительно к системе $Rx = U^*b$ с треугольной матрицей R.

§ 14.2

1609. $A' = G^{-1}\overline{A}^t G$; в случае гамильтонова базиса в симплектическом пространстве $A' = -\Omega A^t \Omega$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

1610. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1613.** *Указание.* Использовать задачи 1611 и 1612.

1614. Пусть в двумерном псевдоевклидовом пространстве типа $(1, 1)$ оператор $\mathbf{A}$ имеет в некотором ортонормированном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицами операторов $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{AA}^*$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ будут соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1628. $\overline{A}^{\top} G A = G$. **1630.** *Указание.* Положить $\beta = \operatorname{th}\varphi$ в предыдущей задаче.

1632. *Указание.* Воспользоваться задачей 1627.

1634. *Указание.* Матрица $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ является матрицей овеществления оператора умножения на мнимую единицу.

1635. *Указание.* Воспользоваться задачей 1618.

1636. *Указание.* Используя соотношение $\mathrm{Re}(ia, b) = \mathrm{Im}(a, b)$ доказать, что $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ также является симплектическим оператором относительно скалярного произведения $\mathrm{Im}(a, b)$. Далее воспользоваться предыдущей задачей.

1637. См. указание к предыдущей задаче.

1641. $A = G^{-1}\overline{A}^{\top}G$; для указанных базисов в евклидовом, эрмитовом и симплектическом пространствах соответственно $A = A^{\top}$, $A = \overline{A}^{\top}$ и $A = -\Omega A^t \Omega$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

1645. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ на псевдоевклидовой плоскости.

1647. См. ответ к задаче 1648.

1648. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{C}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = \bar{x}^1 y^1 - \bar{x}^2 y^2$ имеет два собственных вектора $(1, \pm i)$ с собственными значениями $\pm i$. Их скалярное произведение равно 2.

1649. Нет: в $\mathbb{C}^2$ со скалярным произведением $(x, y) = \bar{x}^1 y^1 - \bar{x}^2 y^2$ оператор $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ самосопряжен, но не диагонализируем.

1652. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ на псевдоевклидовой плоскости.

1653. $(\mathbf{A}^2(x), y) = (\mathbf{A}(x), \mathbf{A}(y)) = (x, y)$. Поэтому $\mathbf{A}^2$ — тождественный оператор, следовательно, $\mathbf{A}$ имеет собственные числа ± 1.

1656. *Указание.* Использовать задачу 1641.

К главе 15

§ 15.1

1661. 1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$, $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$;

2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$, $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$;

4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$; 5) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2$;

6) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $4y_1^2-4y_2^2+2y_3^2$; 7) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $3y_1^2-9y_2^2+9y_3^2$;

8) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $8y_1^2-4y_2^2+2y_3^2$; 9) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $2y_1^2+4y_2^2+6y_3^2$;

10) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $9y_1^2-9y_2^2+9y_4^2$;

11) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$, $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2-5y_4^2+5y_5^2$.

1662. Если нормальный вид оператора U состоит из двумерных клеток поворотов на углы α_i, $i=1, \ldots, k$, из n единиц и m минус единиц, то

$$f = \cos\alpha_1(x_1^2+x_2^2)+\cos\alpha_2(x_3^2+x_4^2)+\ldots+\cos\alpha_k(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2)+x_{2k+1}^2+\ldots$$
$$\ldots+x_{2k+n}^2-x_{2k+n+1}^2-\ldots-x_{2k+n+m}^2.$$

1663. При четном $n=2k$ имеем

$$f = \cos\frac{\pi}{k}(x_1^2+x_2^2)+\cos\frac{2\pi}{k}(x_3^2+x_4^2)+\ldots$$
$$\ldots+\cos\frac{\pi(k-1)}{k}(x_{2k-3}^2+x_{2k-2}^2)+x_{2k-1}^2-x_{2k}^2,$$

матрица перехода C равна

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}
1 & \cos\frac{\pi}{k} & \cos\frac{2\pi}{k} & \cos\frac{3\pi}{k} & \ldots & \cos\frac{\pi(2k-1)}{k}\\
1 & -\sin\frac{\pi}{k} & -\sin\frac{2\pi}{k} & -\sin\frac{3\pi}{k} & \ldots & -\sin\frac{\pi(2k-1)}{k}\\
1 & \cos\frac{2\pi}{k} & \cos\frac{4\pi}{k} & \cos\frac{6\pi}{k} & \ldots & \cos\frac{2\pi(2k-1)}{k}\\
1 & -\sin\frac{2\pi}{k} & -\sin\frac{4\pi}{k} & -\sin\frac{6\pi}{k} & \ldots & -\sin\frac{2\pi(2k-1)}{k}\\
1 & \cos\frac{3\pi}{k} & \cos\frac{6\pi}{k} & \cos\frac{9\pi}{k} & \ldots & \cos\frac{3\pi(2k-1)}{k}\\
1 & -\sin\frac{3\pi}{k} & -\sin\frac{6\pi}{k} & -\sin\frac{9\pi}{k} & \ldots & -\sin\frac{3\pi(2k-1)}{k}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & \cos\frac{(k-1)\pi}{k} & \cos\frac{2(k-1)\pi}{k} & \cos\frac{3(k-1)\pi}{k} & \ldots & \cos\frac{\pi(k-1)(2k-1)}{k}\\
1 & -\sin\frac{(k-1)\pi}{k} & -\sin\frac{2(k-1)\pi}{k} & -\sin\frac{3(k-1)\pi}{k} & \ldots & -\sin\frac{\pi(k-1)(2k-1)}{k}\\
1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & -1
\end{pmatrix};$$

при нечетном $n=2k-1$ имеем $f=\cos\frac{\pi}{k}(x_1^2+x_2^2)+\cos\frac{2\pi}{k}(x_3^2+x_4^2)+\ldots$ $\ldots+\cos\frac{\pi(k-1)}{k}(x_{2k-3}^2+x_{2k-2}^2)+x_{2k-1}^2$, матрица перехода получается из матрицы C вычеркиванием последних строки и столбца.

Указание. Применить предыдущую задачу.

1667. *Указание.* Пусть $g=f+l^2$, где $l=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$; без ограничения общности можно считать, что $c_n\neq 0$. Проверить, что после преобразования $y_i=x_i$, $i=1,\ldots,n-1$, $y_n=l/c_n$, $D_{g'}=D_{f'}+c_n^2D_{n-1}$, где f' и g' — функции, полученные указанным преобразованием из f и g, а D_{n-1} — угловой минор порядка $n-1$ функции f'.

1668. *Указание.* Представить функцию f в виде

$$f=a_{11}\Big(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\Big)^2+f'(x_2,\ldots,x_n)$$

и воспользоваться предыдущей задачей.

1669. 1) Положительно определена g, преобразование

$$\begin{pmatrix}
-\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{6}}\\
\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\
\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f=5x_1^2-x_2^2-x_3^2;$$

2) положительно определена g, преобразование

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = 5x_1^2 - x_2^2 - x_3^2;$$

3) положительно определены обе функции, преобразование

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2;$$

4) положительно определена g, преобразование

$$\begin{pmatrix} -\frac{26}{81} & -\frac{23}{81} & -\frac{17}{81} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{4}{27} & -\frac{10}{27} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = 3x_1^2 - 3x_2^2;$$

5) положительно определены обе функции, преобразование

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2;$$

6) положительно определены обе функции, преобразование

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_4^2;$$

7) положительно определена g, преобразование

$$\begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2;$$

8) положительно определена g, преобразование

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

приводит функцию g к нормальному виду, канонический вид

$$f = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2.$$

1670. С точностью до перестановки $\lambda_i = 1/\mu_i$.

1673. 1) Нет; 2) да; 3) нет.

§ 15.2

1677. Гиперболический параболоид.

1678. 1) $-\frac{x_1^2}{9} - \frac{x_2^2}{9} - \frac{x_3^2}{9} + \frac{x_4^2}{3} = 1$, $O' = (0, 1, 2, 3)$,

$$e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \quad e_3' = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}\right),$$

$$e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right), \quad e_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$, $O' = (-1, 1, 0, 0)$,

$$e_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$e_2' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad e_4' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

3) $\frac{x_1^2}{\sqrt{7}} + \frac{x_2^2}{\sqrt{7}} - \frac{x_3^2}{2/\sqrt{7}} = 2x_4$, $O' = (0, 0, 0, 1)$,

$$e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \quad e_3' = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}}\right),$$

$$e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right), e_4' = \left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{2}{\sqrt{7}}\right).$$

1679. Однополостный гиперболоид.

1680. 1) $\min(k, n-k)$; 2) $\min(k-1, n-k)$; 3) $\min(k, n-k-1)$.
1681. Параметрические уравнения прямых: $x_1=1+t\cos\varphi$, $x_2=1+t\sin\varphi$, $x_3=1\pm t$, $x_4=(\cos\varphi+\sin\varphi\mp 1)t$, где $\varphi\in[0, 2\pi)$.

К главе 16

§16.1

1683. $(a')^i=d^i_{i_0}$, где $D=C^{-1}=(d^i_j)$. **1684.** $(a')_i=c^{i_0}_i$.
1688. Тождественный оператор; полилинейная функция $P_\delta\colon V^*\times V\to\Bbbk$ по формуле $P_\delta(\varphi, v):=\varphi(v)$.
1690. Подпространство $\langle v\rangle$, порожденное вектором v. **1691.** 0; -1. **1692.** 0.
1695. Единственный нетривиальный случай $(2, 2)$. Тогда

$$T^{ij}_{kl}=\lambda\delta^i_k\otimes\delta^j_l+\mu\delta^i_l\otimes\delta^j_k.$$

1696. ${}^1_1A$.
1697. ${}^1_1({}^2_2(\ldots{}^n_n(\operatorname{Alt}(A\otimes A\otimes\ldots\otimes A)\ldots))$, где n — размерность пространства.
1698. Это соответственно суммы 1-х, 2-х и 3-х степеней корней. Они выражаются через коэффициенты при помощи симметрических многочленов.
1699. ${T_F}^{i_1\ldots i_n}_{j_1\ldots j_n}$ равно знаку перестановки $\begin{pmatrix} i_1 & i_2\ldots i_n\\ j_1 & j_2\ldots j_n\end{pmatrix}$, если $\{i_1, \ldots, i_n\}=\{j_1, \ldots \ldots, j_n\}$, и 0 в противоположном случае.
1701. 1) 1; 2) n; 3) $n+1$.

§16.2

1710. 1) e_3+4e_4; 2) $-e_2-4e_4$; 3) $-3e_2+e_3-2e_4$.
1711. $-2e^1\otimes e_1-2e^2\otimes e_2-2e^3\otimes e_3-6e^4\otimes e_4$.
1712. $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)(1-x+x^2)$. **1718.** Да.
1722. Каждому $x^n\otimes y^j$ $(x^i\otimes y^m)$ при $j=m, \ldots, 0$ (соответственно $i=n-1, \ldots \ldots, 0$) отвечает жорданова клетка размера $\min(n, j)+1$ (соответственно $\min(m, i)+1$) с собственным значением 0.
1723. 1) $\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ 0&2&1&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0\\ 0&0&6&1&0&0\\ 0&0&0&6&1&0\\ 0&0&0&0&6&0\\ 0&0&0&0&0&6\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

§16.3

1724. 4) $\dfrac{2(n-1)n(n+1)}{3}$. **1726.** $\dbinom{n+p-1}{p}$. **1727.** $\dbinom{n}{p}$, 2^n.
1728. *Указание.* $v_1\bullet\ldots\bullet v_k=\mathrm{const}\cdot\sum\limits_i(-1)^i\sum(v_{j_1}+\ldots+v_{j_{k-i}})\bullet\ldots$

$$\ldots\bullet(v_{j_1}+\ldots+v_{j_{k-i}}).$$

1746. Обратное неверно.

1750. 1) При $p=1$ след равен -2, при $p=2$ след равен 10, при $p=3$ след равен 25;
2) при $p=1$ след равен -5, при $p=2$ след равен -3, при $p=3$ след равен 13;
3) при $p=1$ след равен 12, при $p=2$ след равен 63, при $p=3$ след равен 156; при $p=4$ след равен 184;
4) при $p=1$ след равен 15, при $p=2$ след равен 81, при $p=3$ след равен 193; при $p=4$ след равен 192.

1752. 1) $\begin{pmatrix} 4&1&0&0&0&0\\ 0&4&1&0&0&0\\ 0&0&4&1&0&0\\ 0&0&0&4&1&0\\ 0&0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&0&4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&0&0\\ 0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&2&1&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-2&0&0\\ 0&0&0&0&2&1\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

§ 16.4

1758. 1) $e^1\otimes e^1+e^2\otimes e^1+2e^3\otimes e^2$; $e_1\otimes e_2-e_2\otimes e_2-e_1\otimes e_3+2e_2\otimes e_3$;
2) $T_{11}=7$, $T_{12}=10$, $T_{13}=13$, $T_{21}=5$, $T_{22}=7$, $T_{23}=9$, $T_{31}=8$, $T_{32}=10$, $T_{33}=12$; $T^{11}=-1$, $T^{12}=-1$, $T^{13}=-1$, $T^{21}=4$, $T^{22}=5$, $T^{23}=6$, $T^{31}=2$, $T^{32}=5/2$, $T^{33}=3$.

1759. $\left(3, \frac{19}{2}, \frac{43}{30}\right)$. **1761.** $\dfrac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{g_{ij}v^iv^j}}=\dfrac{u^ka_k}{\sqrt{g^{ij}a_ia_j}}$. **1762.** $5\sqrt{\frac{5}{39}}$.

1770. Пусть g — тензор, задающий скалярное произведение, так что $\langle x, y\rangle = g_{ij}x^iy^j = {}^1_1({}^2_2(g\otimes x\otimes y))$. В ориентированном пространстве для базисов положительной ориентации

$$\langle x, y, z\rangle = {}^1_1({}^2_2({}^3_3(v\otimes x\otimes y\otimes z))); \quad [x, y]^i = {}^2_1({}^3_1({}^4_2(g\otimes v\otimes x\otimes y))).$$

§ 16.5

1777. $*q'=\det\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{vmatrix}(-x\wedge x^2\wedge x^3+1\wedge x^2\wedge x^3-1\wedge x\wedge x^3+1\wedge x\wedge x^2)$.

1780. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **1781.** $\sqrt{5}$.

Список литературы

1. *Андреев К. А.* Сборник упражнений по аналитической геометрии. 2-е изд. М., 1904.
2. *Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1957.
3. *Бахвалов Н. С., Кобельков Г. М., Поспелов В. В.* Задачи по курсу «Методы вычислений». Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1989.
4. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.
5. *Гюнтер И. М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. 11-е изд. М.: Гостехиздат, 1947.
6. *Житомирский О. К.* Аналитическая геометрия: конспект, задачи с решениями, задачи для упражнений. Л.: Изд-во «Сеятель» Е. В. Высоцкого, 1924.
7. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
8. *Кострикин А. И.* (редактор). Сборник задач по линейной алгебре. М.: Факториал, 1995.
9. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.
10. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.
11. *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражения по аналитической геометрии. 30-е изд. М.: Наука, 1970.
12. *Шифф В. И.* Сборник упражнений и задач по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. 3-е изд. СПб.: Вольф, 1910.

Для самостоятельной работы мы рекомендуем следующую литературу:

13. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
14. *Веселов А. П., Троицкий Е. В.* Лекции по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2004.
15. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал, 2001.
16. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.
17. *Ильин В. А., Ким Г. Д.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1998.
18. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
19. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
20. *Постников М. М.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979.
21. *Постников М. М.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.

22. *Федорчук В. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990.
23. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
24. *Шилов Е. Г.* Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин кМир науки и медициныњ: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru