

Теория планирования эксперимента традиционно используется в химии, физике, сельском хозяйстве. В управлении производством, экономике натурный эксперимент исключен, так как труден и дорогостоящ, однако машинный эксперимент, когда все факторы находятся под управлением исследователя – возможен.

Машинный эксперимент имеет целый ряд преимуществ по сравнению с физическим:

- возможность управления условиями проведения эксперимента;
- легкость воспроизведения условий проведения экспериментов;
- легкость прерывания и возобновления эксперимента.

Трудности машинных экспериментов:

- наличие корреляции в выходных последовательностях;
- определение интервала моделирования  $(0, T)$ .

Теория и практика использования методов планирования в настоящее время достаточно хорошо разработана.

Чтобы сделать правильный выбор для своего проекта, начинающему исследователю необходимо изучить основы теории планирования эксперимента.

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Основные типы переменных при построении модельных экспериментов: факторы и отклики. Используемые термины:

1) фактор = режим = независимая переменная = входная переменная = экзогенная переменная

2) отклик = выход = параметр оптимизации = зависимая переменная = выходная переменная = переменная состояния = эндогенная переменная

Уровни – это значения квантования каждого фактора.

Для выбора плана эксперимента следует:

- определить критерии планирования эксперимента. В качестве основных критериев планирования рассматриваются: отклик, число варьируемых факторов, число уровней, необходимое число измерений переменной отклика;
- синтезировать экспериментальную модель;
- сравнить полученную модель с существующими моделями, со стандартными планами и выбрать оптимальный план.

Применяя системный подход выделяют следующие этапы планирования экспериментов:

- построение структурной модели;

- построение функциональной модели;
- построение экспериментальной модели.

Структурная модель характеризуется

- числом факторов;
- числом уровней для каждого фактора.

Структурная модель имеет вид:  $N_s = q_1 q_2 q_3 \dots q_k$ ,

где  $N_s$  – число элементов эксперимента;  $k$  – число факторов эксперимента;  $q_i$  – число уровней  $i$ -го фактора,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Элемент – это основной структурный блок эксперимента, определяемый как простейший эксперимент в случае одного фактора и одного уровня, т. е.  $k = 1, q = 1, N_s = 1$ .

Функциональная модель определяет количество элементов структурной модели, которые должны служить действительными измерителями отклика, т.е. определять, сколько необходимо иметь различных информационных точек. Подобные функциональные модели могут быть либо совершенными, либо несовершенными. Функциональная модель называется совершенной, если в измерении отклика участвуют все ее элементы, т. е.  $N_f = N_s$ . Функциональная модель называется несовершенной, если число имеющих место откликов меньше числа элементов, т.е.  $N_f < N_s$ .

В идеале – когда структурная модель совпадает с функциональной, однако в имитационном эксперименте существует ограничение на ресурс. Функциональная модель должна позволить установить компромисс между имеющимися ресурсами и числом элементов эксперимента:  $N = pq^k$ , где  $p$  – число повторений экспериментов;  $q$  – число уровней факторов;  $k$  – число факторов (входных параметров и переменных). С учетом ограничений на ресурсы нужно определить  $q, k, p$ .

Вид экспериментальной модели определяется должным образом подобранными критериями планирования. Разработка плана эксперимента включает ряд шагов, в ходе которых экспериментатор должен ответить на ряд важных вопросов.

Шаг первый: выбор переменной отклика (целевой функции, параметра оптимизации), который зависит от цели исследования.

Основные требования к параметру оптимизации:

- он должен быть эффективным с точки зрения достижения цели;
- универсальным;
- количественным;
- статистически эффективным (наиболее точным);
- имеющим физический смысл, простым и легко вычисляемым;

- существующим (при различных состояниях, ситуациях).

Шаг второй: выделение существенных факторов. Обычно число таких факторов довольно велико, и потому необходимо выделять среди них несколько наиболее существенных. Тем более, из опыта известно, что в большинстве систем 20% факторов определяют 80% свойств системы, а остальные 80% факторов определяют лишь 20% ее свойств. Вопрос необходимо рассматривать с различных точек зрения и, в первую очередь, с точки зрения цели моделирования. Предварительная процедура, которая упрощает эту задачу – анализ чувствительности имитационной модели.

Каждый фактор при проведении эксперимента может быть:

- 1) постоянным и тем самым играть роль граничных условий эксперимента (в имитационной модели это входные переменные);
- 2) переменным, но неуправляемым и вносить тем самым вклад в ошибки эксперимента (в имитационной модели это, как правило, внешние, экзогенные переменные);
- 3) измеряемым и управляемым.

Для построения плана эксперимента важны факторы третьего вида. В имитационной модели это – параметры.

Основные требования к факторам: управляемость (это позволяет реализовать активный эксперимент) и однозначность.

Требования к совокупности факторов:

- полнота;
- точность фиксации;
- совместимость и отсутствие линейной корреляции, независимость факторов, т.е. возможность установления факторов на любом уровне, вне зависимости от уровней других факторов.

Третий шаг разработки плана эксперимента состоит в определении уровней, на которых следует измерять и устанавливать данный фактор. Минимальное число уровней фактора, не являющегося постоянным, равно двум. Очевидно, что число уровней следует выбирать минимально возможным и в то же время достаточным для достижения целей эксперимента. Каждый дополнительный уровень увеличивает стоимость эксперимента, и следует тщательно оценивать необходимость его введения.

Одинаковое число уровней для каждого фактора (в особенности если уровней всего два-три) дает определенные аналитические преимущества. Такие структурные модели

симметричны и имеют вид:  $N = q^k$ . ( $q$  – количество уровней;  $k$  – количество факторов) Уровни могут быть:

- качественные или количественные;
- фиксированные или случайные.

Количественной называется переменная, величина которой может быть измерена с помощью некоторой интервальной или относительной шкалы. Примерами могут служить доход, загрузка, цена, время и т. п.

Качественной называется переменная, величина которой не может быть измерена количественно, а упорядочивается методами ранжирования. Примерами качественных переменных могут служить машины, политика, географические зоны, организации, решающие правила, тип очереди в системах массового обслуживания, стратегии в системах принятия решений и т.п.

Число уровней равно минимальному числу точек, необходимых для восстановления полиномиальной функции.

Анализ данных существенно упрощается, если сделать уровни равноотстоящими друг от друга. Такое расположение позволяет рассматривать ортогональное разбиение и тем самым упрощает определение коэффициентов полиномиальной функции. Поэтому обычно две крайние точки интересующей нас области изменения количественной переменной выбирают

как два ее уровня, а остальные уровни располагают так, чтобы они делили полученный отрезок на равные части.

Фиксированные уровни означает, что мы управляем уровнями квантования или устанавливаем их.

Если уровни квантования выбираются случайно (например, с помощью метода Монте-Карло), то уровни называются случайными.

Если используемая для построения эксперимента математическая модель имеет фиксированные параметры, она называется жесткой моделью.

Если факторы модели могут изменяться случайным образом, она называется вероятностной моделью.

Если модель содержит как фиксированные, так и случайные факторы, она называется смешанной моделью.

## ПЛАН ОДНОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Наиболее простой эксперимент в ИМ – однофакторный эксперимент. Изменяется один фактор. (Уровни исследуемого фактора могут быть качественными или количественными, фиксированными или случайными). Число наблюдений или прогонов для каждого уровня режима или фактора определяется допустимыми затратами, желаемой мощностью проверки или статистической значимостью результатов.



Математическая модель такого эксперимента:  $X_{ij} = \mu + T_j + \varepsilon_{ij}$ , где  $X_{ij}$  обозначает  $i$ -е наблюдение ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на  $j$ -м уровне ( $j = 1, 2, \dots, k$  уровней). Например,  $X_{42}$  обозначает четвертое наблюдение или прогон на втором уровне фактора;  $\mu$  – общее влияние всего эксперимента;  $T_j$  – влияние  $j$ -го уровня,  $\varepsilon_{ij}$  – случайная ошибка  $i$ -го наблюдения на  $j$ -м уровне. (В большинстве рассматриваемых в литературе экспериментальных моделей предполагается нормально распределенной случайной величиной с нулевым средним и дисперсией, одинаковой для всех  $j$ ).

Типичный план однофакторного эксперимента с  $k$  уровнями фактора. План однофакторного ДАНа.

<i>Уровень фактора</i>	<i>1</i>	<i>2 ...</i>	<i>j ...</i>	<i>k</i>
	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{1j}$	$x_{1k}$
	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{2j}$	$x_{2k}$
	...			
<i>Среднее</i>	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_k$

## ПРОЦЕДУРЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основные методы анализа результатов:

1. Простейший (процедура ANOVA). Если режим или фактор имеют лишь два уровня, то можно использовать процедуры прямой проверки гипотез с использованием стандартных критериев ( $t$ ,  $F$ , или отношений).

2. Если фактор или режим имеет более двух уровней, то обычно используется однофакторный дисперсионный анализ (ДАН) с нулевой гипотезой  $T_j = 0$  для всех  $j$ . Количество наблюдений или прогонов не обязательно одинаково для различных уровней фактора. Если нулевая гипотеза верна, то наблюдение  $X_{ij}$  не зависит от уровня фактора и имеет среднее  $\mu$  и случайную ошибку.

Большинство описанных в литературе классических экспериментальных планов основано на использовании дисперсионного или регрессионного анализа после сбора данных. Обычно при наличии качественных факторов используется дисперсионный анализ, а в случае, когда все факторы количественные, – регрессионный анализ.

3. Методы множественного ранжирования. Методы множественных сравнений. Данные методы применяются при сравнении нескольких вариантов систем, когда изучаются  $k$  систем, каждой системе соответствует одна частная комбинация уровней факторов, варьируемых в эксперименте.

Методы множественного ранжирования – статистические методы полного (для всей совокупности) и неполного ранжирования, в литературе называются методами принятия решений. Эти методы позволяют определить число наблюдений, которые надо взять из каждой  $k > 2$  совокупностей, чтобы выбрать наилучшую совокупность. Наилучшая, обычно, – та совокупность, которая имеет наибольшее (или наименьшее) – среднее. (Критерием отбора может быть и дисперсия).

Методы множественных сравнений. Если число экспериментов задано, тогда можно произвести различные типы сравнений между средними совокупностей:

- сравнение со стандартным  $M_0$  средним, соответствующим имеющейся эталонной системе  $(M_i - M_0) i = 1, \dots, k - 1$ ;
- все попарные сравнения  $(M_i - M_j), i \neq j$ ;
- построить линейные контрасты  $C_i M_i$  и сравнить со стандартной системой и т.п.)