

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СМО

Аналитическая модель СМО – это совокупность уравнений и формул, позволяющих определять вероятности состояний системы в процессе ее функционирования в зависимости от времени и рассчитывать значения показателей эффективности по заданным параметрам входящего потока и потоков каналов обслуживания.

Модели СМО, исследуемые аналитически, как правило, имеют следующие общие характеристики:

- пуассоновское распределение вероятностей поступления заявок;
- стандартное поведение заявок;
- правило обслуживания FIFO;
- единственная фаза обслуживания.

Аналитическая модель СМО в случае, когда все процессы смены состояний являются марковскими (пуассоновские входные потоки и потоки обслуживания), задается уравнениями Колмогорова:

$$\frac{dP_i}{dt} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{ij} P_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_{ki} P_k(t), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, \quad P_0(0) = 1, \quad P_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

где  $P_i(t)$  – вероятности  $i$ -го состояния СМО в момент времени  $t$ ;  
 $\lambda_{ij}$  – интенсивности переходов из  $i$ -ое в  $j$ -ое состояние за время  $\Delta t$ .

Если приравнять производные в этом уравнении нулю, то можно получить так называемое стационарное решение для  $t \rightarrow \infty$  путем решения соответствующих алгебраических уравнений. При построении аналитических моделей СМО на основе уравнений Колмогорова используют наглядное представление системы в виде графа с вершинами, отвечающими состояниям СМО, и дугами, соответствующими разрешенным переходам.

Общее правило составления дифференциальных уравнений, справедливое для любой непрерывной марковской цепи:

- в левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием.
- Если стрелка направлена из состояния, то соответствующий член имеет знак «минус»; если стрелка направлена в состояние – знак «плюс».
- Каждый член равен произведению интенсивности потока событий, соответствующего данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.