LOGICA

Le strutture linguistiche possono essere divise tra:

- PROPOSIZIONI: frasi per le quali ha senso porsi la domanda: "questa frase è vera o falsa?". Non pretendiamo, comunque, di avere una risposta. Le proposizioni, che si indicano con le lettere p, q, r, s..., sono frasi che possono assumere due valori di verità (VERO o FALSO).

- PREDICATI: sono frasi che dipendono da un parametro, definito il quale divengono proposizioni. Il soggetto, quindi, in questo caso è parametrizzato. Ad es.: "n è un numero pari", in questi termini non ha senso porsi la domanda "vero o falso?", ma specializzando n, osserviamo che la frase genera una famiglia infinita di proposizioni ("1 è un numero pari", "2 è un numero pari", ... e così via).

- ALTRE COSE: sono frasi che non rientrano nelle precedenti categorie, ad es "altolà!"

LA LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

Data una proposizione, si possono compiere alcune operazioni: i CONNETTIVI LOGICI.

* NEGAZIONE: $\neg p$ (non p)

p	$\neg p$
V	F
F	V

→ si chiama TAVOLA DI VERITÀ

* CONGIUNZIONE: $p \wedge q$ (p e q)

* DISGIUNZIONE: $p \vee q$ (p o q)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	($p \dot\vee q$)
V	V	V	V	(F)
V	F	F	V	(V)
F	V	F	V	(V)
F	F	F	F	(F)
			$\vee$ = vel	$\dot\vee$ = aut

* <u>IMPLICAZIONE LOGICA</u>: $p \rightarrow q$ (se p allora q, p implica q)

* <u>BIIMPLICAZIONE LOGICA</u>: $p \leftrightarrow q$ (p se e solo se q)

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Assioma: REGOLA DELL'ANDATA E RITORNO

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

Per mezzo di questo assioma possiamo dimostrare la tavola di verità dell'implicazione

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	A'	F
F	V	F	A	F	F
F	F	V	B	B'	V

I casi critici sono quelli con ipotesi (p) falsa. La congiunzione $(p \to q) \wedge (q \to p)$ è vera solo se entrambe le proposizioni $(p \to q)$ e $(q \to p)$ sono vere, quindi dev'essere $B = B' = V$.
Inoltre, se vogliamo che l'implicazione sia diversa dalla biimplicazione $(p \to q \neq p \leftrightarrow q)$ dobbiamo porre $A = A' = V$.

es: "se il leone ha 7 zampe allora vincerò al lotto" è vera, infatti nella logica vengono osservati solo i valori di verità e non il significato della proposizione. Quindi essendo l'antecedente sempre falso, l'implicazione è vera.

es: se $p \to q$ è vera, sotto quali ipotesi si può dedurre che q è vera?

p	q	$p \to q$
V	V	V
~~V~~	~~F~~	~~F~~
F	V	V
F	F	V

Posso dedurre che q è vera, solo se so che p è vera (MODUS PONENS)

Dato un certo numero di proposizioni, utilizzando i connettivi logici, è possibile costruire le PROPOSIZIONI COMPOSTE

es: $[\neg p \vee (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (r \vee s)$

Gli esempi più comuni di proposizioni composte sono le TAUTOLOGIE, proposizioni che assumono unicamente il valore VERO, e le CONTRADDIZIONI, che assumono invece il solo valore FALSO.

es: $(p \vee \neg p)$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

è una TAUTOLOGIA

$(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

è una CONTRADDIZIONE

"Una frase e il suo contrario non possono essere contemporaneamente vere"

Aristotele
(Principio di non contraddizione)

Il matematico Boole ha ricavato che anche per le opera[illegible] della logica vale la proprietà DISTRIBUTIVA. A Boole si deve l'algebra della logica.

partendo da $(p \vee q) \wedge r$, Boole associò la congiunzione al prodotto tra numeri e la disgiunzione alla somma, allora siccome

$$(p+q)r = pr + qr$$

egli pensò che anche

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Con le tavole di verità si prova che, effettivamente, quest'ultima proposizione composta è una tautologia.

Similmente si possono ricavare altre strutture, come ad esempio:

- $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

LA LOGICA DEI PREDICATI

L'ambiente, all'interno del quale considero un predicato $P(x)$, si chiama UNIVERSO del discorso (U). Il predicato $P(x)$ diviene una proposizione per ogni specializzazione di x nell'universo U.

$$\forall x' \in U \quad P(x') \text{ è una proposizione}$$

es: "L'insieme limitato A ammette estremo superiore" = P(A)

se considero U = insieme dei numeri razionali, allora la proposizione P(A) a volte è vera, altre è falsa:

se $A = [0;1]$ allora P(A) è vera

se $A = [0;\pi]$ allora P(A) è falsa

se considero, invece, U = insieme dei numeri reali, allora P(A) è sempre vera.

Le operazioni che abbiamo visto per le proposizioni valgono anche per i predicati:

$$\neg P(x)$$

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

$$P(x) \rightleftarrows Q(x)$$

Oltre a queste, ne esistono delle altre:

① "Esiste un elemento x_0 di U tale che $P(x_0)$ è vera" $\exists x P(x)$

$\exists x P(x)$ si chiama QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

② "Per ogni elemento x_0 di U $P(x_0)$ è vera" $\forall x P(x)$

$\forall x P(x)$ si chiama QUANTIFICATORE UNIVERSALE nell'esempio precedente, la proposizione 1 è vera sia per U che per U'. Mentre la 2 è vera per i numeri reali, e falsa per i razionali

$$\mathcal{P} = \{P(x) : x \in U\} = \{P_x : x \in U\}$$

insieme delle proposizioni di soggetto generico appartenente a U

collezione delle famiglie di proposizioni

es: $P(n)$ = "n è un numero pari"

$\mathcal{P}$ = { "1 è un numero pari"; "2 è un numero pari", "3 è un numero pari", ... }

Ritornando ai quantificatori:

se $U = \{x_1; x_2\}$ allora $\mathcal{P} = \{P(x_1); P(x_2)\}$

$\exists x P(x)$ è vera se almeno una tra $P(x_1)$ e $P(x_2)$ è vera, cioè se $P_{x_1} \vee P_{x_2}$

se $U = \{x_1; x_2; \ldots, x_n\}$ allora $\mathcal{P} = \{P(x_1), P(x_2), \ldots P(n)\}$

① $\exists x P(x)$ è vera se almeno una tra $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ è vera, cioè $P_{x_1} \vee P_{x_2} \vee \ldots \vee P_{x_n}$
per la disgiunzione generica si usa la scrittura $\bigvee_{x \in U} P_x$ o $\bigvee_{x \in P(\mathbb{R})} P_x$ (o $\bigvee \mathcal{P}$) se penso a $\mathcal{P}$ come ad una collezione

② $\forall x P(x)$ è vera se sono tutte vere, cioè $\bigwedge_{x \in U} P_x$ o $\bigwedge_{x \in P(\mathbb{R})} P_x$ (o $\bigwedge \mathcal{P}$) se penso a $\mathcal{P}$ come ad una collezione es: U = insieme dei numeri reali

P(x) = "l'insieme X possiede estremo superiore"

Se X è superiormente limitato, è vera, se X è superiormente illimitato è falsa.

* $\bigvee \emptyset$ è falsa (dovrei trovare un elemento dell'insieme vuoto che renda vera la proposizione)

$\bigwedge \emptyset$ è vera (dovrei trovare un elemento dell'insieme vuoto che la renda falsa)

PROBABILITÀ - LA LOGICA DELL'INCERTEZZA -

Lo studio della probabilità nasce dall'esigenza dell'uomo di dare una risposta e prendere una decisione di fronte ad una situazione di incertezza. Un esempio tratto dalla vita quotidiana è: "Domani piove? Devo decidere se andare al mare o al cinema".
Quando si parla di calcolo delle probabilità ci si trova ad affrontare proposizioni di cui non si conosce il valore di verità. Esse non devono riguardare necessariamente il futuro ma anche il passato, ad esempio "Napoleone ha bevuto il thè alle 15:00 a Parigi". È una proposizione, ma non so se è vera o falsa. Un'altra persona, uno storico appassionato potrebbe invece conoscere il valore di verità di questa proposizione. Osserviamo, quindi, che l'incertezza è SOGGETTIVA: una proposizione che ha valore di verità conosciuto per un individuo, può essere sconosciuto per un altro, che può farne conoscenza con un'indagine. Il tasso di informazione è, quindi, variabile, e la probabilità è una teoria dell'individuo. I valori di verità più conosciuti sono quelli delle tautologie, ma spesso non tutte le tautologie sono conosciute dalla totalità degli individui.
Il calcolo delle probabilità si propone di dare regole razionali all'individuo per aiutarlo in situazioni di incertezza.

Introduciamo il discorso con un esempio:

Considero le seguenti proposizioni a proposito del lancio di un dado a sei facce:

1. "Esce il 2"
2. "Esce un numero primo"
3. "Esce un numero >10"
4. "Esce un numero <100"
5. "Esce un numero pari"
6. "Esce un numero <5"
7. "Esce un numero primo pari"
8. "Esce il 2 oppure il 4 oppure il 6"
9. "Esce un numero con una sola cifra"
10. "Esce un numero dispari"

Vogliamo determinare i legami logici tra le varie proposizioni e vedere se possiamo affermare qualcosa sul valore di verità di ciascuna proposizione. Dobbiamo introdurre uno stato di informazione (o stato di conoscenza) senza il quale non possiamo neanche dire che la proposizione 4 è vera (non sappiamo se il dado è stato lanciato!).

Stato d'informazione A) Il dado è stato lanciato.

Lo stato A corrisponde alla minima conoscenza possibile. Vediamo che cosa è possibile affermare a riguardo delle proposizioni:

PROP VERE	PROP FALSE	PROP. COL MEDESIMO VALORE DI VERITÀ:
4, 9	3	1, 7 : $1 \leftrightarrow 7$
		5, 8 : $5 \leftrightarrow 8$

Si dice che le proposizioni 1 e 7 sono modi diversi per dire la stessa cosa, ovvero descrizioni linguistiche diverse del medesimo evento.
Ci sono infine delle proposizioni delle quali, allo stato di informazione attuale, non possiamo dire nulla. Esse sono: 2, 6, 10.

Stato d'informazione B): Il dado è stato lanciato ed è uscito un numero pari.

PROP VERE	PROP FALSE	PROP. COL MEDESIMO VALORE DI VERITÀ
4, 9, 5, 8	3, 10	1, 2 : $1 \leftrightarrow 2$
		1, 7 : $1 \leftrightarrow 7$
		7, 2 : $2 \leftrightarrow 7$

Le proposizioni 1, 2, 7 rappresentano la stessa cosa.
Della proposizione 6 ancora non possiamo affermare nulla.

Stato d'informazione C): Il dado è stato lanciato ed è uscito il 2 oppure il 4.

PROP VERE	PROP FALSE	PROP COL MEDESIMO VALORE DI VERITÀ
4, 5, 6, 8, 9	3, 10	1; 2: $1 \leftrightarrow 2$
		1; 7: $1 \leftrightarrow 7$
		2; 7: $2 \leftrightarrow 7$

Ancora una volta le proposizioni rappresentano lo stesso evento. Con questo stato d'informazione posso dire qualcosa a riguardo di ciascuna proposizione. Infatti con l'aumentare della conoscenza, aumenta anche il numero di proposizioni alle quali è possibile assegnare valori di verità

Stato d'informazione D): Il dado è stato lanciato ed è uscito il numero N.

Lo stato D corrisponde alla massima conoscenza possibile. Conoscendo il numero uscito posso assegnare un valore di verità a tutte le proposizioni: esse saranno o vere o false. Le classi in cui posso dividere le proposizioni sono quindi ovviamente solo due

Ancora una volta le proposizioni rappresentano lo stesso evento. Con questo stato d'informazione posso dire qualcosa a riguardo di ciascuna proposizione. Infatti con l'aumentare della conoscenza, aumenta anche il numero di proposizioni alle quali è possibile assegnare valori di verità

Stato d'informazione <u>D</u>: Il dado è stato lanciato ed è uscito il numero N.

Lo stato D corrisponde alla massima conoscenza possibile. Conoscendo il numero uscito posso assegnare un valore di verità a tutte le proposizioni: esse saranno o vere o false. Le classi in cui posso dividere le proposizioni sono quindi ovviamente solo due

DEFINIZIONE DI EVENTO

Indichiamo con α uno stato di informazione (una famiglia di proposizioni di valore logico noto)
(nell'esempio precedente, è rappresentato dalle proposizioni A, B, C, D)

Chiamiamo $\mathbb{P}$ una famiglia di proposizioni chiusa per congiunzione, disgiunzione e negazione, implicazione e biimplicazione (cioè se p_1 e p_2 appartengono a $\mathbb{P}$, anche la loro congiunzione, la loro disgiunzione, ..., appartiene a $\mathbb{P}$). Le proposizioni sono d'interesse per il problema analizzato
*
(nell'esempio $\mathbb{P}$ è formato dalle proposizioni 1, 2, 3, ... 10)

Scelta una proposizione $p \in \mathbb{P}$, scrivere $\alpha \vdash p$ equivale al dire "nello stato di informazione α è asseribile la verità di p."

(nell'esempio: $A \vdash 4$ - nello stato di info. A è asseribile la verità della proposizione 4
$A \vdash 9$; $A \vdash (1 \leftrightarrow 7)$; $A \vdash (5 \rightarrow 8)$)

Introduciamo su $\mathbb{P}$ la seguente relazione d'equivalenza sub α: siano p e q due proposizioni appartenenti a $\mathbb{P}$, esse sono equivalenti se nello stato di informazione α è asseribile la verità di $p \leftrightarrow q$, cioè che esse sono espressioni diverse del medesimo oggetto. Si dice che:

siano $p, q \in \mathbb{P}$ $\quad p \underset{\alpha}{\sim} q$ se e solo se $\alpha \vdash (p \leftrightarrow q)$

[$p \underset{\alpha}{\sim} q$ si legge p equivalente q sub α]

TEOREMA

La relazione $\sim_\alpha$ appena descritta è una relazione d'equivalenza.

IPOTESI: siano $p, q \in P$ $\quad p \sim_\alpha q$ sse $\alpha \vdash (p \leftrightarrow q)$

TESI: • $p \sim_\alpha p$ (vale la proprietà RIFLESSIVA)

• se $p \sim_\alpha q$ allora $q \sim_\alpha p$ (vale la proprietà SIMMETRICA)

• se $p \sim_\alpha q$ e $q \sim_\alpha r$ allora $p \sim_\alpha r$ (vale la proprietà TRANSITIVA)

Dimostrazione: dimostrare che vale la proprietà riflessiva è banale: infatti, non è difficile credere che p abbia lo stesso valore di verità di p. Per il secondo punto, sappiamo che $\alpha \vdash (p \leftrightarrow q)$ che significa che o p e q sono entrambi veri o sono entrambi falsi, allora anche q e p lo sono ($\alpha \vdash (q \leftrightarrow p)$). Infine, vogliamo dimostrare che vale anche la proprietà transitiva: sappiamo che $\alpha \vdash (p \leftrightarrow q)$ e che $\alpha \vdash (q \leftrightarrow r)$ con $p, q, r \in P$. Allora se p è VERA anche q lo è, e se q è VERA anche r lo è, quindi $\alpha \vdash (p \leftrightarrow r)$; se p è falsa anche q lo è, e se q è FALSA anche r lo è, quindi $\alpha \vdash (p \leftrightarrow r)$.

Ne segue che, essendo $\sim_\alpha$ una relazione d'equivalenza, è possibile suddividere P in CLASSI D'EQUIVALENZA, ciascuna delle quali prende il nome di EVENTO.

$$E = [p]_\alpha = \{p' \in P : p' \sim_\alpha p\}$$

Si dice che un EVENTO (sub α) è una qualsiasi classe d'equivalenza rispetto a $\approx_\alpha$.
Gli eventi formano una partizione di $\mathbb{P}$, perché le classi sono disgiunte ed esaustive (la loro unione equivale a $\mathbb{P}$).

Supponiamo che in $\mathbb{P}$ ci siano una proposizione vera, tautologia (ad es.: $p \vee \neg p$), e una proposizione falsa, contraddizione (ad es. $p \wedge \neg p$):

$[p \vee \neg p]_\alpha = \Omega$ si chiama EVENTO CERTO (sub α)

$[p \wedge \neg p]_\alpha = \emptyset_\alpha$ si chiama EVENTO IMPOSSIBILE (sub α)

Ritornando all'esempio:

se $\alpha = A$
$\Omega = \{4, 9\}$
$\emptyset = \{3\}$
$E_1 = \{1, 7\}$ $E_2 = \{5, 8\}$ $E_3 = \{2\}$ $E_4 = \{6\}$ $E_5 = \{10\}$

se $\alpha = B$
$\Omega = \{4, 5, 8, 9\}$
$\emptyset = \{3; 10\}$
$E_1 = \{1; 2; 7\}$ $E_2 = \{6\}$

se $\alpha = C$
$\Omega = \{4, 5, 6, 8, 9\}$
$\emptyset = \{3, 10\}$
$E = \{1; 2; 7\}$

se $\alpha = D$
$\Omega = \{\ldots\}$
$\emptyset = \{\ldots\}$

Abbiamo visto l'evento certo Ω e l'evento impossibile Φ. Ogni evento che non sia certo o impossibile si chiama EVENTO POSSIBILE, del quale, nello stato di informazione non conosciamo il valore di verità.

☆ Il valore di verità di un evento $E = [p]_\alpha$ = valore di verità di p

dim: • considero p e p' due rappresentanti della stessa classe d'equivalenza E

• voglio dim che se p è vera anche E è vero.

• $E = [p']_\alpha$ equivale a dire che $\alpha \vdash p' \leftrightarrow p$, cioè con lo stato di informazione α posso asserire la verità di $p' \leftrightarrow p$

• allora se p' è vero, anche p è vero.

☆ La negazione di un evento E è $\bar{E} = [\neg p]_\alpha$

dim: $E = [p]_\alpha$, scelgo un altro rappresentante p': $E = [p']_\alpha$, so quindi che $\alpha \vdash p \leftrightarrow p'$

dimostriamo che $(p \leftrightarrow p') \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg p')$ è una tautologia, quindi è vera $[\neg p]_\alpha = [\neg p']_\alpha$

p	p'	$p \leftrightarrow p'$	$\neg p$	$\neg p'$	$\neg p \leftrightarrow \neg p'$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

OPERAZIONI TRA EVENTI

Dati $E = [p]_\alpha$ e $F = [q]_\alpha$:

★ CONGIUNZIONE: $E \wedge F = [p \wedge q]_\alpha$

dim: Scelti p' e q' rappresentanti degli eventi E ed F, $(E = [p']_\alpha , F = [q']_\alpha)$
voglio provare che $[p' \wedge q']_\alpha = [p \wedge q]_\alpha$.

So che $\alpha \vdash p' \leftrightarrow p$ e $\alpha \vdash q' \leftrightarrow q$ ⟹ in α $p' \leftrightarrow p$ vera e $q' \leftrightarrow q$ vera

voglio dimostrare che $\alpha \vdash (p' \wedge q' \leftrightarrow p \wedge q)$ ⟹ $(p' \wedge q')$ e $(p \wedge q)$ hanno lo stesso valore di verità

la congiunzione $(p' \wedge q')$ è vera solo se p' e q' sono vere. Allora anche p e q sono vere per ipotesi (in α $p' \leftrightarrow p$ vera, $q' \leftrightarrow q$ vera). Ne segue che anche $(p \wedge q)$ è vera.

★ DISGIUNZIONE: $E \vee F = [p \vee q]_\alpha$

dim: scelti p' e q' tali che $E = [p']_\alpha$ e $F = [q']_\alpha$

so che $\alpha \vdash p' \leftrightarrow p$ cioè in α $p' \leftrightarrow p$ vera

$\alpha \vdash q' \leftrightarrow q$ $q' \leftrightarrow q$ vera

voglio dim che $\alpha \vdash p' \vee q' \leftrightarrow p \vee q$ cioè in α $p' \vee q' \leftrightarrow p \vee q$ vera

Ragionando come per la situazione precedente, supponiamo $(p' \vee q')$ vera: non posso dedurre nulla di certo da ciò, solo che una tra p' e q' dev'essere vera, ma non so quale. Allora ragionando per assurdo, diciamo che $p \vee q$ è falsa: significa che sia p che q sono false e di conseguenza lo sono anche p' e q' per ipotesi. In tal caso $(p' \vee q')$ è falsa, mentre l'avevo supposta vera!

★ CONGIUNZIONE ARBITRARIA: $\wedge P' = [\wedge \{p' : p' \in P'\}]_\alpha$

★ DISGIUNZIONE ARBITRARIA: $\vee P' = [\vee \{p' : p' \in P'\}]_\alpha$

(con P' formato dalle proposizioni p')

PROPRIETÀ

1) $E \wedge E = E$ proprietà di IDEMPOTENZA

infatti $E \wedge E = [p \wedge p]_\alpha = [p]_\alpha = E$ perchè $p \wedge p \leftrightarrow p$ è tautologia

p	p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$
V	V	V	V
F	F	F	V

2) $E \wedge F = F \wedge E$ proprietà COMMUTATIVA

infatti $E \wedge F = [p \wedge q]_\alpha$ e $F \wedge E = [q \wedge p]$, $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ è tautologia

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

3) $(E \wedge F) \wedge G = E \wedge (F \wedge G)$ proprietà ASSOCIATIVA

infatti, se $E = [p]_\alpha$ e $F = [q]_\alpha$ e $G = [s]_\alpha$, $(p \wedge q) \wedge s \leftrightarrow p \wedge (q \wedge s)$ è una tautologia

4) $E \wedge \Omega = E$ proprietà dell'ELEMENTO NEUTRO della congiunzione

infatti, se $E = [p]_\alpha$ e $\Omega = [s]_\alpha$, voglio dim che $[p \wedge s]_\alpha = [p]_\alpha$ cioè $p \wedge s \Leftrightarrow p$

p	s	$p \wedge s$
V	V	V
F	V	F

5) $E \wedge \Phi = \Phi$ proprietà di ANNULLAMENTO

infatti, se $\Phi = [t]_\alpha$ in α t è falsa, quindi anche $p \wedge t$ è falsa, $[p \wedge t]_\alpha = [t]_\alpha$

6) $(E \wedge F) \vee G = (E \vee G) \wedge (F \vee G)$ proprietà DISTRIBUTIVA della disgiunzione rispetto alla congiunzione

7) $\overline{(\overline{E})} = E$ LEGGE DELLA DOPPIA NEGAZIONE

infatti, se $\overline{E} = [\neg p]_\alpha$ e $\overline{(\overline{E})} = [\neg(\neg p)]_\alpha$, $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ è tautologia

8) $\overline{(E \wedge F)} = \overline{E} \vee \overline{F}$ FORMULA DI DE MORGAN

infatti $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ è tautologia:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

9) $\overline{(E \vee F)} = \overline{E} \wedge \overline{F}$ FORMULA DI DE MORGAN

infatti $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ è tautologia

PRINCIPIO DI DUALITÀ

Se si ha una relazione tra eventi, composti mediante la congiunzione, e generica, allora si può sostituire il segno $\wedge$ col segno $\vee$ della disgiunzione.

Così nei casi precedenti, valgono le seguenti proprietà:

1) $E \vee E = E$

2) $E \vee F = F \vee E$

3) $(E \vee F) \vee G = E \vee (F \vee G)$

4) $E \vee \Omega = \Omega$

5) $(E \vee F) \wedge G = (E \wedge G) \vee (E \wedge F)$

6) $E \vee \emptyset = E$

- $\overline{\emptyset} = \Omega$ • $\overline{\Omega} = \emptyset$

L'IMPLICAZIONE TRA EVENTI

Dati due eventi $E = [p]_\alpha$ e $F = [q]_\alpha$ si dice che E implica F se allo stato d'informazione α dalla verità di p segue la verità di q.

$$E \to F \iff \alpha \vdash p \to q$$

Dim: se $E = [p']_\alpha$ cioè $\alpha \vdash p' \leftrightarrow p$ [1]

e $F = [q']_\alpha$ cioè $\alpha \vdash q' \leftrightarrow q$ [2]

voglio dim che $\alpha \vdash p' \to q'$ [3]

supponiamo vera $\alpha \vdash p \to q$ [4]

assumiamo p' vera, allora per la [1] in α p è vera. Per la [4] anche q è vera e per la [2] anche q' lo è. Quindi se p' e q' sono vere, anche $p' \to q'$ è vera!

es: α = è stato lanciato il dado

$E_1 = \{$"esce il 2", "esce un numero primo pari"$\}$

$E_2 = \{$"esce pari", "esce il 2 o il 4 o il 6"$\}$

$E_3 = \{$"esce un numero primo"$\}$

$E_4 = \{$"esce un numero minore di 5"$\}$

$E_5 = \{$"esce un numero dispari"$\}$

possiamo affermare che:

$E_1 \rightarrow E_3$ $\qquad E_3 \not\rightarrow E_4$

$E_1 \rightarrow E_2$ $\qquad E_4 \not\rightarrow E_3$

$E_1 \rightarrow E_4$

$E_5 \rightarrow E_3$

PROPRIETÀ DELL' IMPLICAZIONE:

1) $E \to E$ PROPRIETÀ RIFLESSIVA. Infatti $p \to p$ è una tautologia

2) $E \to F$, $F \to E \Rightarrow E = F$ PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA

$E \to F$ significa che $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ V
$F \to E$ significa che $\alpha \vdash q \to p$, cioè in α $q \to p$ V
} in α $(p \to q) \wedge (q \to p)$ vero

Si può dimostrare che $(p \to q) \wedge (q \to p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ è una tautologia

3) $E \to F$, $F \to G \Rightarrow E \to G$ PROPRIETÀ TRANSITIVA

$E \to F$, significa che $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ è V
$F \to G$, significa che $\alpha \vdash q \to r$, cioè in α $q \to r$ V
} in α $(p \to q) \wedge (q \to r)$ vero

Si può dimostrare che $(p \to q) \wedge (q \to r) \leftrightarrow (p \to r)$ è una tautologia

Verificando le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva, l'implicazione è una RELAZIONE D'ORDINE (parziale, perchè possono esistere eventi tra loro non confrontabili).

* L'evento MINIMO secondo l'implicazione è l'evento certo Ω, perché ogni evento implica l'evento certo.

L'evento MASSIMO secondo l'implicazione è l'evento impossibile $\emptyset$, perché l'evento impossibile (antecedente falso) implica ogni evento.

$$\emptyset \to E \to \Omega$$

** $E \to F \iff \bar{F} \to \bar{E}$

$E \to F$ significa che $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ V.

So che $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ è una tautologia

quindi se $p \to q$ è vero (ipotesi) allora anche $(\neg q \to \neg p)$ è vero, allora è vero

$\bar{F} = [\neg q]_\alpha \to [\neg p]_\alpha = \bar{E}$

*** $E \to F \iff E \wedge F = E$

$E \to F$ significa che $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ V (ipotesi)

$E \wedge F = [p \wedge q]_\alpha$ $\qquad \alpha \overset{?}{\vdash} p \wedge q$

$E = [p]_\alpha$

Se p è vero (se fosse falso il problema non si pone) allora per ipotesi anche q è vero.

Se p e q sono vere, allora anche $p \wedge q$ in α è vera.

$E \to F \iff \bar{E} \vee F = F$

$E \to F$ significa che $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ V

$\bar{E} \vee F = [p \vee q]_\alpha$ $\quad \alpha \overset{?}{\vdash} p \vee q$

se p è vero allora per ipotesi anche q è vero $\Rightarrow p \vee q$ è vera.

$E \to F \iff E \wedge \bar{F} = \emptyset$

$E \to F$ significa $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ V

$E \wedge \bar{F} = [p \wedge \neg q]_\alpha$, $\quad \alpha \overset{?}{\vdash} p \wedge \neg q$

in α, p può essere vero o falso. Se p è vero anche q è vero per ipotesi. ?

$E \to F \iff \bar{E} \vee F = \Omega$

$E \to F$ significa che $\alpha \vdash p \to q$, cioè in α $p \to q$ V

$\bar{E} \vee F = [\neg p \vee q]_\alpha$ voglio provare che $\alpha \vdash \neg p \vee q$

In α p può essere vero o falso. Se p è vero, q è vero per ipotesi $\Rightarrow \neg p \vee q$ V

se p è falso, $\neg p$ è vero $\Rightarrow \neg p \vee q$ vero

✳ $E \to E \vee F$

✳ ✳ $E \vee F \to G$ se $E \to G$ e $F \to G$

Osserviamo che l'implicazione nella logica degli eventi equivale all'inclusione nella teoria degli insiemi. I parallelismi che abbiamo già osservato tra logica degli eventi e teoria degli insiemi saranno sintetizzati nel teorema fondamentale.

☆ EVENTI INCOMPATIBILI

Due eventi $E=[p]_\alpha$ e $F=[q]_\alpha$ si dicono INCOMPATIBILI se la loro congiunzione è l'evento impossibile

$$E \wedge F = \emptyset \quad \text{cioè} \quad \alpha \models \neg(p \wedge q)$$

Diciamo che E e F sono COMPATIBILI quando la loro congiunzione non è uguale all'evento impossibile

$$E \wedge F \neq \emptyset$$

☆ FAMIGLIA DI EVENTI ESAUSTIVA

Una famiglia di eventi ($\mathcal{E}$) è ESAUSTIVA se la disgiunzione della famiglia è uguale all'evento certo; ciò significa che $\mathcal{E}$ è esaustiva se in essa c'è almeno un evento vero.

$$\bigvee \mathcal{E} = \Omega$$

Da i due concetti appena descritti arriviamo a parlare di un concetto molto importante:

PARTIZIONE DELL'EVENTO CERTO

Una famiglia di eventi $\mathcal{E}$ si dirà PARTIZIONE DELL'EVENTO CERTO se essa è esaustiva, e se comunque scelgo due eventi di $\mathcal{E}$ essi sono tra loro incompatibili. In tal caso in $\mathcal{E}$ c'è uno e un solo evento vero.

$\mathcal{E}$ è PARTIZIONE di Ω se:

- $\mathcal{E}$ è ESAUSTIVA
- $\forall E, F \in \mathcal{E}$ con $E \neq F \Rightarrow E \cap F = \emptyset$

esempi di PARTIZIONI dell'evento certo:

$\mathcal{E} = \{\Omega\}$

$\mathcal{E} = \{\Omega, \emptyset\}$

$\mathcal{E} = \{E, \bar{E}\}$

esempi di PARTIZIONI dell'evento certo nel lancio di un dado:

1) considero le proposizioni p_i dell'evento E_i = "esce il numero i" $(E_i = [p_i]_\alpha)$

$\mathcal{E}_1 = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ è una partizione dell'evento certo

DESCRIZIONE ALEATORIA DEL LANCIO DI UN DADO

infatti $\bigvee_{i=1}^{6} E_i = \vee \mathcal{E} = \Omega$ e $E_i \wedge E_j = \emptyset$ se $i \neq j$

2) considero gli eventi E_p = "esce un numero pari" e

E_D = "esce un numero dispari"

$\mathcal{E}_2 = \{E_p, E_D\}$ è una partizione dell'evento certo

3) considero gli eventi $E_>$ = "esce un numero > 3"

$E_=$ = "esce 3"

$E_<$ = "esce un numero < 3"

$\mathcal{E}_3 = \{E_>, E_=, E_<\}$ è una partizione dell'evento certo esempi di PARTIZIONI dell'evento certo nella partita di calcio tra le squadre A e B. Si dice che la conclusione della partita è una situazione aleatoria

α: la partita si effettuerà e terminerà in modo regolare

1) considero gli eventi V = "A vince", P = "A perde", X = "A pareggia"

$E_1 = \{$A vince, A perde, A pareggia$\}$ è una PARTIZIONE dell'evento certo

2) considero il predicato $[i, j]$ = "A fa i reti e B fa j reti" e gli eventi $E_j = [i, j]$ con $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

$E_2 = \{E_{ij} : i, j = 0, 1, 2 \ldots\}$ è una partizione dell'evento certo e ha un numerabile di eventi

Considero ora gli eventi E_1 = "A segna qualche rete"

E_2 = "A non segna"

E_3 = "A e B segnano complessivamente 4 reti"

E_4 = "A e B segnano complessivamente 5 reti"

Conoscendo quale tra gli elementi della famiglia $\mathcal{E}_1$ è vero, cosa posso dedurre dei valori di verità degli eventi $E_1, \bar{E}_2, E_3, E_4$?

E_1:

$V \rightarrow \bar{E}_1$ — solo se è vero l'evento V = "A vince" risolvo l'indeterminatezza dell'evento E_1 = "A segna qualche rete".

$P \wedge E_1 \neq 0 \quad P \wedge \bar{E}_1 \neq 0$

$X \wedge E_1 \neq 0 \quad P \wedge \bar{E}_1 \neq 0$

E_2:

$V \rightarrow E_2$ — Anche in questo caso, solo l'evento V risolve l'indeterminat di E_2 (se V vero, $\bar{E}_2$ falso).

$P \wedge E_2 \neq \emptyset \quad P \wedge \bar{E}_2 \neq \emptyset$

$X \wedge E_2 \neq \emptyset \quad X \wedge \bar{E}_2 \neq \emptyset$

E_3:

$V \wedge E_3 \neq \emptyset \quad V \wedge \bar{E}_3 \neq \emptyset$ — L'evento E_3 è compatibile con tutti e tre gli eventi V, P, X

$P \wedge E_3 \neq \emptyset \quad P \wedge \bar{E}_3 \neq \emptyset$

$X \wedge E_3 \neq \emptyset \quad X \wedge \bar{E}_3 \neq \emptyset$

E_4:

$V \wedge E_4 \neq \emptyset \quad V \wedge \bar{E}_4 \neq \emptyset$ — Solo la verità dell'evento X = "A pareggia" ci fa dedurre la falsità dell'evento E_4.

$P \wedge E_4 \neq \emptyset \quad P \wedge \bar{E}_4 \neq \emptyset$

$X \rightarrow \bar{E}_4$

Invece, conoscendo l'evento vero della partizione $\mathcal{E}_2$, posso assegnare un valore di verità a ciascuno degli eventi E_1, E_2, E_3, E_4.

Considero una partizione dell'evento certo, di solito per indicarla si usa il simbolo $\mathbb{P}$, e chiamo ω un suo elemento generico che sia un COSTITUENTE (cioè $\omega \neq \emptyset$) e infine scelgo un evento qualsiasi E. Esistono tre possibili connessioni logiche tra ω ed E, e cioè:

1) $\omega \rightarrow E$

2) $\omega \rightarrow \bar{E}$

3) $\omega \wedge E \neq \emptyset \quad \omega \wedge \bar{E} \neq \emptyset$

infatti: $\omega = \omega \wedge \underset{E \vee \bar{E}}{\underset{\shortparallel}{\Omega}} = \omega \wedge (E \vee \bar{E}) = (\omega \wedge E) \vee (\omega \wedge \bar{E})$

perché questa disgiunzione non sia falsa i due termini possono essere:
- o entrambi non impossibili 3)
- $\omega \wedge E \neq \emptyset$ cioè $\omega = \omega \wedge \bar{E}$ 2)
- $\omega \wedge \bar{E} \neq \emptyset$ cioè $\omega = \omega \wedge E$ 1)

Tenendo conto di queste considerazioni, E si dirà:

★) LOGICAMENTE DIPENDENTE da $\mathbb{P}$ se sussistono la 1) o la 2), cioè se per ogni costituente ω si ha $\omega \rightarrow E$ o $\omega \rightarrow \bar{E}$. In questo caso, risolta l'incertezza della partizione ottengo il valore di verità dell'evento.

★) LOGICAMENTE SEMIDIPENDENTE da $\mathbb{P}$ se sussistono la 1), la 2) o la 3), cioè per alcuni costituenti potrò stabilire il valore di verità dell'evento, per altri no.

★) LOGICAMENTE INDIPENDENTE da $\mathbb{P}$ se sussiste il caso 3) per ogni costituente ω.

es: considero un'estrazione di cinque numeri al lotto su una data ruota.

gli eventi di interesse sono: A = "il primo numero estratto è un numero con una sola cifra"

B = "viene estratto il numero 10"

C = "Esce l'ambo 20, 50"

D = "Il terzo numero estratto è il 10"

le partizioni sono: $\mathbb{P}_1$ = cinquine ordinate $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ $\quad \binom{90}{5} \cdot 5!$

$\mathbb{P}_2$ = cinquine non ordinate $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ $\quad \binom{90}{5}$

$\mathbb{P}_3$ = primo estratto n_1 $\quad 90$

A è logicam. dipendente da $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_3$; è logicam. semidipendente da $\mathbb{P}_2$

B è logicam. dipendente da $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$; è logicam. semidipendente da $\mathbb{P}_3$

C è logicam. dipendente da $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$, è logicam. indipendente da $\mathbb{P}_3$

D è logicam. dipendente da $\mathbb{P}_1$; è logicam. semidipendente da $\mathbb{P}_2$ e $\mathbb{P}_3$.

osservazione:

Gli eventi A, B, C, D sono tutti logicamente dipendenti da $\mathbb{P}_1$. Quali sono i costituenti di $\mathbb{P}_1$ che implicano A? Posso esprimere A nel modo seguente:

$$A = \vee \{ n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 : n_1 \leq 9, n_2 \dots n_5 \leq 90, \text{tutti distinti} \}$$

$$A = \vee \{ \omega : \omega \to A \}$$

$$A = \bigvee_{\omega \to A} \omega$$

Allora anche $B = \vee \{ \omega : \exists i \; n_i = 10 \}$

$$C = \vee \{ \omega : \exists i,j \; n_i = 20 \text{ e } n_j = 50 \}$$

$$D = \vee \{ \omega : n_3 = 10 \}$$

Gli eventi A, B, C, D sono eventi del tipo $E = \bigvee_{\omega \to E} \omega = \vee \{ \omega : \omega \to E \}$

es di legame semi dipendente:

$$\omega = 10 \to \overline{A}$$

TEOREMA FONDAMENTALE SULLA LOGICA DIPENDENZA

Un evento E è logicamente dipendente da una partizione $\mathbb{P}$ se e solo se l'evento E equivale alla disgiunzione dei costituenti che implicano E.

$$E \text{ è logicamente dipendente da } \mathbb{P} \Leftrightarrow E = \bigvee_{\omega \to E} \omega = \bigvee \{\omega : \omega \to E\}$$

Dimostrazione della condizione di necessità:

Voglio dimostrare che, se l'evento E è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$, allora gli eventi E e $\bigvee_{\omega \to E} \omega$ sono il medesimo evento.

IPOTESI: E è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$

chiamo $F = \bigvee_{\omega \to E} \omega$ (F: almeno uno dei costituenti di $\mathbb{P}$ che implicano E è vero)

TESI: $E = F$ (basta provare che $F \to E$ ① e che $E \to F$ ②)

DIM: ① Dalla verità di F voglio arrivare alla verità di E. Suppongo vero l'evento F: essendo F una disgiunzione, deduco che almeno un suo elemento, lo chiamo ω_0, è vero: cioè $\exists\, \omega_0 : \omega_0 \to E$. Essendo l'implicazione vera perché $F = \bigvee \{\omega : \omega \to E\}$, allora dev'essere vero anche l'evento E. Ho ottenuto che se F è vero, lo è anche E, cioè $F \to E$.

② Dalla verità di E voglio arrivare alla verità di F. Suppongo vero l'evento E; supponiamo per assurdo che l'evento F sia falso. La disgiunzione F è falsa quando sono falsi tutti i costituenti $\omega : \omega \to E$. Essendo $\mathbb{P}$ una partizione, esiste un suo elemento, lo chiamo $\tilde{\omega}$, vero. Inoltre essendo E logicamente dipendente da $\mathbb{P}$, dev'essere o $\tilde{\omega} \to E$ (impossibile, perché ogni $\omega \to E$ è falso) o $\tilde{\omega} \to \bar{E}$. Essendo $\tilde{\omega}$ vero per $\tilde{\omega} \to \bar{E}$ segue che $\bar{E}$ è vero e quindi E è falso $\to$ vado contro l'ipotesi!

Dimostrazione della condizione sufficiente

Voglio dimostrare il viceversa del teorema precedente: se $E = \bigvee_{w \to E} w$ allora E è logic. dipendente da P
cioè se prendo una disgiunzione arbitraria di costituenti (si chiamano anche casi elementari) $\vee w$ e chiamo $\vee_w = E$, allora E è logicamente dipendente dalla partizione $\mathbb{P}$

IPOTESI: $E = \bigvee_{w \to E} w$

TESI: E è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$, cioè scelto un w' qualsiasi o $w' \to E$
o $w' \to \bar{E}$

DIM: scelgo un costituente qualsiasi w' e suppongo $w' \not\to E$ e che $w' \not\to \bar{E}$ per assurdo

si ricade nel terzo caso

$w' \wedge E \neq \emptyset$ $\quad w' \wedge \bigvee_{w \to E} w \neq \emptyset$

per prop distributiva $\bigvee_{w \to E} [w' \wedge w] \neq \emptyset$

$w' \wedge \bar{E} \neq \emptyset$ $\quad w' \wedge \overline{\bigvee_{w \to E} w} \neq \emptyset$

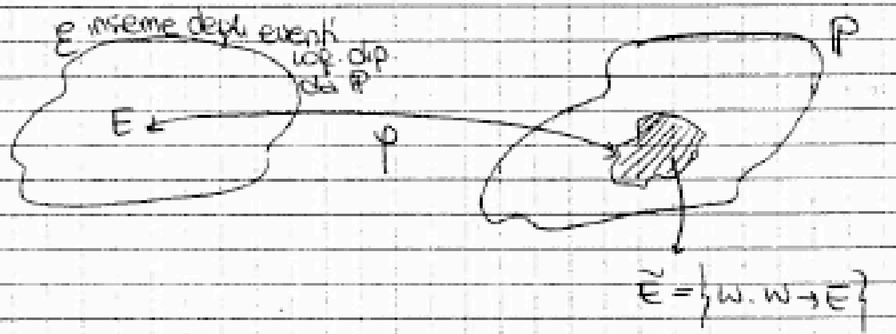
osservo che $w \wedge w' = \begin{cases} w' & \text{se } w' = w \\ \emptyset & \text{se } w' \neq w \end{cases}$ perché w e w' sono costituenti della partizione

ma allora $\exists\, \bar{w} : \bar{w} \to E$, $\bar{w} \wedge w' \neq \emptyset \Rightarrow \bar{w} = w' \Rightarrow w' \to E$

Si può dimostrare anche dicendo che $\bigvee_{w} (w' \wedge w) = \emptyset$

$\Rightarrow w' = w' \wedge (E \vee \bar{E}) = \underbrace{(w' \wedge E)}_{\emptyset} \vee (w' \wedge \bar{E}) = w' \wedge \bar{E} \qquad w' \to \bar{E}$

Iniziamo ora a parlare dell'applicazione, chiamo φ, che porta un evento E, logicamente dipendente da una partizione $\mathbb{P}$, nel sottoinsieme $\tilde{E}$ della partizione formato dai costituenti ω che implicano E



L'applicazione φ, per il teorema precedente, è SURIETTIVA

$$\varphi : E \to \tilde{E} \in \underbrace{P(\mathbb{P})}_{\text{insieme delle parti}}$$

Essa è anche INIETTIVA, quindi BIETTIVA : se $\tilde{E} = \tilde{F}$ $\quad E = \bigvee_{\omega \in \tilde{E}} \omega = \bigvee_{\omega \in \tilde{F}} \omega = F$

Osservazione: l'evento impossibile è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$? Sì, perchè ogni costituente implica l'evento certo, cioè la negazione dell'evento impossibile:

$$\text{ogni } \omega \to \overline{\emptyset} = \Omega \qquad (\text{ogni } \omega \text{ rende vera la 2})$$

Invece non esiste un ω che implichi l'evento impossibile:

$$\nexists\, \omega : \omega \to \emptyset \quad \text{perchè} \quad \emptyset \neq \omega = \omega \wedge \emptyset = \emptyset$$

Da ciò si deduce che l'insieme dei costituenti che implicano l'evento impossibile è l'insieme vuoto $(\tilde{\emptyset} = \emptyset)$.

Inoltre, $\tilde{\Omega} = \mathbb{P}$

L'applicazione φ costruisce un vocabolario tra eventi logicamente dipendenti e sottoinsiemi della partizione. Vogliamo vedere se essa traduce in modo efficiente anche i connettivi logici (negazione, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) con gli operatori insiemistici (complementazione, $\cup$, $\cap$, $\subset$). In tal caso si potrà lavorare in modo indifferente a livello logico e a livello di teoria degli insiemi. Dobbiamo dimostrare le seguenti equazioni:

$$\text{①} \quad \widetilde{E \wedge F} = \widetilde{E} \cap \widetilde{F}$$

$$\text{②} \quad \widetilde{E \vee F} = \widetilde{E} \cup \widetilde{F}$$

$$\text{③} \quad \widetilde{(\bar{E})} = \widetilde{E}^c \qquad (\widetilde{E}^c \text{ è il complementare dell'immagine})$$

$$\text{④} \quad E \rightarrow F \Leftrightarrow \widetilde{E} \subset \widetilde{F}$$

Cominciamo dalla prima: $\widetilde{E \wedge F} = \widetilde{E} \cap \widetilde{F}$ in termini di insiemi equivale a dire

$$\{\omega : \omega \rightarrow E \wedge F\} = \{\omega : \omega \rightarrow E\} \cap \{\omega : \omega \rightarrow F\}$$

IPOTESI: $\omega \rightarrow E \wedge F$

TESI: $\omega \rightarrow E$ e $\omega \rightarrow F$

DIM: supponiamo per assurdo che $\omega \not\rightarrow E$ allora $\omega \wedge E \neq \omega$

essendo logicam. dipendente dev'essere $\omega \rightarrow \bar{E}$, e quindi $\omega \wedge \bar{E} = \omega$

Sappiamo che $\omega \rightarrow E \wedge F$ (ipotesi), quindi $\omega = \omega \wedge (E \wedge F)$. Otteniamo la seguente equazione impossibile. $\emptyset \neq \omega = (\omega \wedge E) \wedge (\omega \wedge F) = ((\omega \wedge \bar{E}) \wedge E) \wedge (\omega \wedge F) =$

quindi $\omega \rightarrow E$ $\qquad = \omega \wedge \underbrace{(E \wedge \bar{E})}_{\emptyset} \wedge \omega \wedge F = \emptyset$

DEFINIZIONE

Scelte due partizioni dell'evento certo $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, $\mathbb{P}$ è più FINE di $\mathbb{P}'$ se e solo se ogni costituente di $\mathbb{P}'$ è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P} \text{ è più fine di } \mathbb{P}' \iff \forall \omega' \in \mathbb{P}' \; \omega' \text{ è logicamente dipendente da } \mathbb{P}$$

$$\iff \forall \omega' \in \mathbb{P}' \; \omega' = \vee \{ \omega \in \mathbb{P} \,.\, \omega \to \omega' \}$$

La relazione "è più fine di" è una relazione d'ordine parziale sull'insieme delle partizioni.

es: Riprendiamo il gioco del lotto, e consideriamo le seguenti partizioni:

$\mathbb{P}_1$ cinquine ordinate

$\mathbb{P}_2$ cinquine non ordinate

$\mathbb{P}_3$ primo estratto

Si dice che $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$ sono diversi dettagli descrittivi dello stesso problema aleatorio, più o meno grossolani ("grossolano" è il contrario di "fine"). Vediamo subito che $\mathbb{P}_3$ è il più grossolano di tutti, mentre $\mathbb{P}_1$ è il più fine (non si può dire di più sull'estrazione del lotto oltre ai numeri estratti e al loro ordine). Si dice che:

$\mathbb{P}_1$ è più fine di $\mathbb{P}_2$

$\mathbb{P}_2$ è più fine di $\mathbb{P}_3$

TEOREMA

Date due partizioni $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$, se ogni costituente di $\mathbb{P}$ implica qualche costituente di $\mathbb{P}'$ allora $\mathbb{P}$ è più fine di $\mathbb{P}'$.

$$\underbrace{\forall \omega \in \mathbb{P}\ \exists \omega' \in \mathbb{P}' : \omega \to \omega'}_{\text{IPOTESI}} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P} \text{ è più fine di } \mathbb{P}'}_{\text{TESI}}$$

Dimostrare che $\mathbb{P}$ è più fine di $\mathbb{P}'$ significa dimostrare che ogni costituente di $\mathbb{P}'$ è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$: voglio dimostrare, quindi, che:

$$\forall \omega \in \mathbb{P} \quad \text{o} \quad 1)\ \omega \to \omega_0' \qquad \text{con } \omega_0' \in \mathbb{P}'$$
$$\text{o} \quad 2)\ \omega \to \overline{\omega_0'}$$

Dall'ipotesi $\exists \omega' \in \mathbb{P}' : \omega \to \omega'$ se $\omega' = \omega_0'$ $\boxed{\omega \to \omega_0'}$ 1)

invece se $\omega' \neq \omega_0'$ so che $\omega' \wedge \omega_0' = \emptyset$ perché costituenti

Posso esprimere ω nel modo seguente: so che $\omega \to \omega'$ quindi $\omega = \omega \wedge \omega'$

$$\underline{\omega} = \omega \wedge (\omega_0' \vee \overline{\omega_0'}) \underset{\text{prop. distr.}}{=} (\omega \wedge \omega_0') \vee (\omega \wedge \overline{\omega_0'}) = [(\omega \wedge \omega') \wedge \omega_0'] \vee (\omega \wedge \overline{\omega_0'}) =$$

$$= \underbrace{\omega \wedge (\omega' \wedge \omega_0')}_{\emptyset} \vee (\omega \wedge \overline{\omega_0'}) = \underline{\omega \wedge \overline{\omega_0'}}$$

Siamo giunti all'equazione $\omega = \omega \wedge \overline{\omega_0'}$ che equivale a dire $\boxed{\omega \to \overline{\omega_0'}}$ 2)

Abbiamo dimostrato quindi che esiste un costituente ω_0' di $\mathbb{P}'$ logicamente dipendente da $\mathbb{P}$ cioè un qualsiasi costituente ω di $\mathbb{P}$ o implica ω_0' o il suo contrario $\overline{\omega_0'}$

es: Gioco del lotto. Considero la famiglia $\mathcal{E}$ degli eventi

A = "viene estratto il 10"
B = "vengono estratti il 20 e il 50"
C = "il terzo estratto è il 10"

Voglio determinare il dettaglio descrittivo del problema aleatorio compatibile con $\mathcal{E}$ meno fine, cioè la partizione $\mathbb{P}$, rispetto la quale gli eventi sono logicamente dipendenti.

Considero la congiunzione $B' \wedge A' \wedge C'$ sapendo che, dato l'evento E, E' è E o $\bar{E}$.

es: $A \wedge B \wedge C$, $\bar{A} \wedge B \wedge C$ ... Tra di loro questi eventi sono incompatibili e la loro disgiunzione dà l'evento certo: si tratta di una partizione di Ω, rispetto la quale ciascuno tra gli eventi A, B, C è logicamente dipendente.

$\mathbb{P}'$: $A \wedge B \wedge C$
$A \wedge B \wedge \bar{C}$ — osservo che $\bar{A} \wedge$ è impossibile:
$A \wedge \bar{B} \wedge C$
$A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$
$\cancel{\bar{A} \wedge B \wedge C} = \emptyset$ — $B = (B \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge \bar{C} \wedge A) \vee (B \wedge C \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge \bar{C} \wedge \bar{A})$
$\cancel{\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C} = \emptyset$
$\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$
$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$

Voglio dimostrare che ogni partizione $\mathbb{P}$ ($\neq \mathbb{P}'$) rispetto la quale gli eventi A, B, C sono logic. dip. è più fine di $\mathbb{P}'$.

scelgo $w \in \mathbb{P}$ $\quad w \to B'$, $w \to A'$, $w \to C'$ $\quad \Big| \quad w \to \underbrace{A' \wedge C' \wedge D'}_{\text{è un costituente di } \mathbb{P}'}$

Per il teorema precedente $\mathbb{P}$ è più fine di $\mathbb{P}'$.

PARTIZIONE GENERATA da una famiglia $\mathcal{E}$

Si chiama $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ l'insieme dei possibili costituenti derivanti dalla famiglia di eventi $\mathcal{E}$.

Se $\mathcal{E}$ ha un solo elemento, $\mathcal{E} = \{E\}$, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ne ha due, $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \{E, \bar{E}\}$

Se $\mathcal{E}$ ha 2 elementi, $\mathcal{E} = \{E_1, E_2\}$, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ne ha 4: $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \{E_1 \wedge E_2, \bar{E}_1 \wedge E_2, E_1 \wedge \bar{E}_2, \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2\}$

se $\mathcal{E}$ ha n elementi, $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ne ha 2^n.

Voglio dimostrare che l'insieme $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ è una partizione dell'evento certo. Infatti gli elementi di $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ sono a due a due incompatibili:

infatti $E_1' \wedge E_2' \wedge \dots \wedge E_n' = E_1'' \wedge E_2'' \wedge \dots \wedge E_n''$ solo se scelgo in entrambi E_1 o in entrambi $\bar{E}_1$, se scelgo in entrambi E_2 o $\bar{E}_2$ ...

La famiglia $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ è anche esaustiva perchè $\bigvee E_1' \wedge E_2' \wedge \dots \wedge E_n' = \Omega$

infatti $\Omega = \bigwedge_{i=1}^{n} (E_i \vee \bar{E}_i) = \bigvee_{i=1}^{n} (E_1' \wedge \dots \wedge E_n')$

per es: scelgo una famiglia $\mathcal{E}$ di 2 elementi $\mathcal{E} = \{E_1, E_2\}$

$$\Omega = (E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2) = [(E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge E_2] \vee [(E_1 \vee \bar{E}_1) \wedge \bar{E}_2] =$$

$$= [(E_1 \wedge E_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2)] \vee [(E_1 \wedge \bar{E}_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2)] =$$

$$= (E_1 \wedge E_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = \bigvee (E_1' \wedge E_2')$$

× E_i è logicamente dipendente da $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

× Considero una partizione dell'evento certo $\mathbb{P}$ tale che E_i sia logicamente dipendente da $\mathbb{P}$. Voglio dimostrare che $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ è il modo più grezzo per descrivere la situazione aleatoria: cioè che $\mathbb{P}$ è più fine di $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

dim: sia ω un costituente di $\mathbb{P}$. Dev'essere $\omega \to E_i$ o $\omega \to \bar{E}_i$, cioè $\omega \to E_i' \; \forall_{i=1..n}$

quindi $\omega \to E_1' \wedge \ldots \wedge E_n'$, che è un elemento di $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

es: considero 3 eventi E_1, E_2, E_3; voglio trovare i costituenti della partizione generata $\mathbb{P}(\mathcal{E})$

ipotesi: $E_1 \vee E_3 = \Omega$ [per semplicità $E_1E_2E_3 = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$]

$E_2 \to E_1 \wedge \bar{E}_3$

i possibili costituenti sono:

$E_1E_2E_3 = E_2$ perché $\boxed{E \to F \Leftrightarrow E = E \wedge F}$ $E_2 = E_2 \wedge (E_1 \wedge E_3) \Rightarrow E_2 = E_2 \wedge E_1 \wedge E_3$

$E_1E_2\bar{E}_3 = \emptyset$ $E_2 = E_1 \wedge E_3 \; / \wedge \bar{E}_3$ $E_2 \wedge \bar{E}_3 = (E_1 \wedge E_3) \wedge \bar{E}_3 = E_1 \wedge (E_3 \wedge \bar{E}_3) = \emptyset$

$E_1\bar{E}_2E_3$

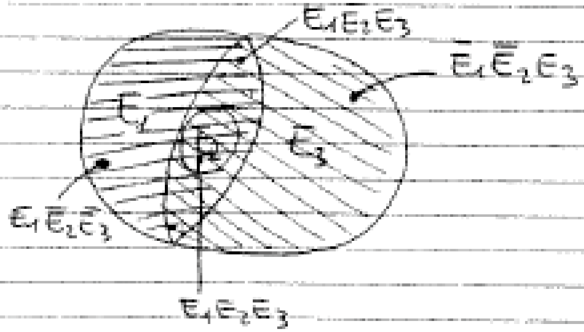
$E_1\bar{E}_2\bar{E}_3$

$\bar{E}_1E_2\bar{E}_3 = \emptyset$ $\overline{E_1 \vee E_3} = \Omega$ $\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_3 = \emptyset$

$\bar{E}_1E_2E_3 = \emptyset$

$\bar{E}_1\bar{E}_2E_3$

$\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3 = \emptyset$



$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \{E_1E_2E_3,\ E_1\bar{E}_2E_3,\ E_1\bar{E}_2\bar{E}_3,\ \bar{E}_1\bar{E}_2E_3\}$

ES: considero gli eventi E_1, E_2, E_3, tali che

$$E_1 \wedge E_3 = \emptyset$$

$$E_2 \rightarrow E_1 \vee E_3$$

$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \\ E_1 E_2 \bar{E}_3 \\ \bar{E}_1 E_2 E_3 \\ \bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3 \\ \bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \end{array}\right\} \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

$$E_1 E_2 E_3 = \emptyset$$
$$E_1 \bar{E}_2 E_3 = \emptyset$$
$$\bar{E}_1 E_2 \bar{E}_3 = \emptyset$$

ES: considero due eventi $E_1, E_2 \neq \emptyset$. So che E_2 è logicamente semidipendente dalla partizione $\mathbb{P}(E_1) = \{E_1; \bar{E}_1\}$. Cosa si può dire del legame logico di E_1 con la partizione $\mathbb{P}(E_2) = \{E_2; \bar{E}_2\}$?

Affinché un evento E sia semidipendente da $\mathbb{P}$, dev'essere che per alcuni costituenti ω valga $\omega \rightarrow E$ o $\omega \rightarrow \bar{E}$, e per altri $\omega \wedge E \neq \emptyset$ e $\omega \wedge \bar{E} \neq \emptyset$.

se $\omega = E_1$

$$\begin{cases} E_1 \rightarrow E_2 \\ \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \neq \emptyset \\ \bar{E}_1 \wedge E_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} E_1 \rightarrow \bar{E}_2 \\ \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \neq \emptyset \\ \bar{E}_1 \wedge E_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{E}_2 \rightarrow \bar{E}_1 \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} E_2 \rightarrow \bar{E}_1 \\ \vdots \end{cases}$$

se $\omega = \bar{E}_1$

$$\begin{cases} \bar{E}_1 \rightarrow E_2 \\ E_1 \wedge E_2 \neq \emptyset \\ E_1 \wedge \bar{E}_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2 \\ E_1 \wedge E_2 \neq \emptyset \\ E_1 \wedge \bar{E}_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{E}_2 \rightarrow E_1 \\ \vdots \end{cases} \qquad \begin{cases} E_2 \rightarrow E_1 \\ \vdots \end{cases}$$

Da ciò si ricava che i costituenti di $\mathbb{P}(E_2)$ o implicano E_1, o il suo contrario, o non sono incompatibili con essi.

LA VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA

Tutto ciò che abbiamo visto fino ad ora ($\mathbb{P}$ famiglia di proposizioni, $\mathcal{K}$ stato di informazione, E evento, $\mathbb{P}$ partizione dell'evento certo, logica dipendenza, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ partizione generata da una famiglia $\mathcal{E}$ di eventi) fa parte della DESCRIZIONE DELL'INCERTEZZA, che è la prima fase che bisogna affrontare davanti ad un fenomeno aleatorio. Da questo momento in poi procederemo con la valutazione numerica dell'incertezza.

INDICATORE DI UN EVENTO

Sia E un evento, $|E|$ è un numero, ed è uguale a 1 se l'evento E è vero, uguale a 0 se l'evento E è falso.

$$|E| = \begin{cases} 1 & \text{se } E \text{ vero} \\ 0 & \text{se } E \text{ falso} \end{cases} \qquad |\Omega| = 1 \qquad |\emptyset| = 0$$

Ogni altro indicatore diverso da $|\Omega|$ e da $|\emptyset|$ si chiama NUMERO ALEATORIO, perchè può assumere entrambi i valori (non so quale dei due per scarsa informazione).

★ $|\overline{E}| = 1 - |E|$

infatti $|\overline{E}| = \begin{cases} 1 & \text{se } \overline{E} \text{ vero, cioè se } E \text{ falso}, \ |E| = 0 \\ 0 & \text{se } \overline{E} \text{ falso, cioè se } E \text{ vero}, \ |E| = 1 \end{cases}$

★ $|E \wedge F| = |E| \cdot |F|$

infatti $|E \wedge F| = \begin{cases} 1 & \text{se } E \wedge F \text{ vero} \quad \begin{cases} E \text{ vero } |E| = 1 \\ F \text{ vero } |F| = 1 \end{cases} \\ 0 & \text{se } E \wedge F \text{ falso} \quad \begin{cases} E \text{ vero } |E| = 1 \\ F \text{ falso } |F| = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E \text{ falso } |E| = 0 \\ F \text{ vero } |F| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} E \text{ falso } |E| = 0 \\ F \text{ falso } |F| = 0 \end{cases} \end{cases}$

★ $|E \vee F| = |E| + |F|$ se $E \wedge F = \emptyset$ (E, F incompatibili)

infatti $|E \vee F| = \begin{cases} 0 & \text{se } E \vee F \text{ falso} - \begin{cases} |E| = 0 \\ |F| = 0 \end{cases} \\ 1 & \text{se } E \vee F \text{ vero} \quad \begin{cases} |E| = 0 \\ |F| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |E| = 1 \\ |F| = 0 \end{cases} \end{cases}$

★ $|E \vee F| = |E| + |F| - |E \wedge F| = |E| + |F| - |E| \cdot |F|$

infatti se $\begin{matrix} |E| = 1 \\ |F| = 1 \end{matrix}$ $E \wedge F$ è vero, cioè $|E \wedge F| = 1$, mentre in tutti gli altri casi $|E \wedge F| = 0$

ACQUISTO DI UN EVENTO ALEATORIO

Dato un evento aleatorio E possibile, posso pensare di acquistarlo e conferirgli quindi un prezzo p.
Il guadagno è diverso per me che lo compro e per chi invece lo vende. Nel primo caso $G = |E| - p$, nel secondo caso $G = p - |E|$

$$G = S(|E| - p) \quad \text{con } S = +1 \text{ se acquisto}, \; S = -1 \text{ se vendo}$$

Il problema che ci poniamo è quello di determinare un PREZZO EQUO per lo scommettitore e per il banco.

Per lo scommettitore $G = \begin{cases} 1-p & \text{se } E \text{ è vero} \\ -p & \text{se } E \text{ è falso} \end{cases}$

Se $1-p<0$ e $-p<0$ (cioè se $p>1$), lo scommettitore perderebbe sempre: PERDITA CERTA

Per il banco $G = \begin{cases} p-1 & \text{se } E \text{ è vero} \\ p & \text{se } E \text{ è falso} \end{cases}$

Se $p-1<0$ e $p<0$, il banco perderebbe sempre: PERDITA CERTA.

Quindi il prezzo p dev'essere compreso tra 0 e 1 perché ci sia incontro tra la domanda e l'offerta.

Se gli eventi sono due $\begin{vmatrix} E_1, E_2 \\ p_1 \quad p_2 \end{vmatrix}$, il guadagno $G = S_1(|E_1| - p_1) + S_2(|E_2| - p_2)$ dipende dalla partizione $\mathbb{P}(E_1, E_2)$

$$\mathbb{P}(E_1, E_2) = \{E_1E_2 ; E_1\bar{E}_2 ; \bar{E}_1E_2 ; \bar{E}_1\bar{E}_2\} \qquad G : \mathbb{P}(E_1, E_2) \to \mathbb{R}$$

Siamo in situazione di perdita certa per lo scommettitore quando $\max G < 0$, per il banco quando $\min G > 0$. Avviene incontro tra domanda e offerta quando $\min G < 0 < \max G$

Se prendo n eventi arbitrari $E_1, \dots, E_n$: $\forall S_1 \dots S_n$

$$G = \sum_{i=1}^{n} S_i(|E_i| - p_i) \qquad G : \mathbb{P}(E_1 \dots E_n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Il sistema di prezzi $p_1 \dots p_n$ è equo se evita la perdita certa, cioè $\nexists$ $\min G < 0 < \max G$

Il concetto di probabilità è legato al concetto di prezzo equo, che abbiamo introdotto perché ci riporta ad esempi tipici dell'ambito economico.

Chiameremo $P(E)$ il prezzo p relativo all'evento E.

ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

1. $P(\Omega)=1 \qquad (P(\emptyset)=0)$

perchè $G = S(|\Omega| - p(\Omega)) = S(1-p(\Omega))$

G è costante (min=max), dev'essere $1-p(\Omega)=0$ cioè $P(\Omega)=1$

se così non fosse si cadrebbe in una situazione di perdita certa, per il banco o per lo scommettitore

2. $0 \leq P(E) \leq 1$

3. $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ TEOREMA SULL'ADDITIVITÀ DEI PREZZI (con $E \wedge F = \emptyset$)

dim: scelgo E_1, E_2 incompatibili $E_1 \wedge E_2 = \emptyset$

ades: E_1 = "I estratto al lotto è 5" associo p_1

E_2 = "I estratto è 25" associo p_2

$E_1 \vee E_2$ = "I estratto è 5 o 25" associo p

$$G = S_1(|E_1| - p_1) + S_2(|E_2| - p_2) + S(|E_1 \vee E_2| - p)$$

$$G = S_1|E_1| - S_1p_1 + S_2|E_2| - S_2p_2 + S|E_1| + S|E_2| - Sp$$

$$G = \underbrace{(S_1 + S)|E_1| + (S_2 + S)|E_2|}_{\text{parte aleatoria}} - \underbrace{(S_1p_1 + S_2p_2 + Sp)}_{\text{parte certa}}$$

Per rendere certo il guadagno devo rende $= 0$ la parte aleatoria, ovvero porre

$S = 1$ compro
$S_1 = -1$ vendo
$S_2 = -1$ vendo

$$G = -(-p_1 - p_2 + p) = p_1 + p_2 - p$$

Essendo G costante, $\max G = \min G = 0$ cioè $p = p_1 + p_2$ e quindi $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

* ALGEBRA DI EVENTI

Una famiglia di eventi è un'algebra di eventi (in tal caso si indica con $\mathcal{A}$) se gode delle seguenti proprietà:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $E \in \mathcal{A} \rightarrow \bar{E} \in \mathcal{A}$
- $E, F \in \mathcal{A} \rightarrow E \vee F \in \mathcal{A}$

TEOREMA

Se gli eventi E ed $F \in \mathcal{A}$ allora $E \wedge F \in \mathcal{A}$

dim: per De Morgan $E \wedge F = \overline{\bar{E} \vee \bar{F}}$

per le proprietà dell'algebra di eventi se $E \in \mathcal{A}$ anche $\bar{E} \in \mathcal{A}$, stessa cosa per F. Allora se $\bar{E}$ e $\bar{F} \in \mathcal{A}$ anche $\bar{E} \vee \bar{F}$, per la terza proprietà, $\in \mathcal{A}$. E infine anche $\overline{\bar{E} \vee \bar{F}} \in \mathcal{A}$.

$$\Rightarrow \quad E \wedge F \in \mathcal{A}$$

La famiglia $\mathcal{A}$ è quindi chiusa per negazioni, congiunzioni e disgiunzioni.

Esempi di algebra:

1) Sia $\mathbb{P}$ una partizione dell'evento certo. Indico con $A(\mathbb{P})$ l'insieme degli eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$. Osserviamo che:

- $\Omega \in A(\mathbb{P})$ perché logicamente dipendente da $\mathbb{P}$
- se E è logic. dipendente da $\mathbb{P}$ ($\forall \omega: \omega \to E = (\overline{E}) \vee \omega \to \overline{E}$) anche $\overline{E}$ è logicam. dip. da $\mathbb{P}$. Quindi se $E \in A(\mathbb{P})$ anche $\overline{E} \in A(\mathbb{P})$
- se E e F sono logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$, allora anche $E \vee F$ è logic. dip. da $\mathbb{P}$. Perché:

$$E = \bigvee_{\omega \to E} \omega \qquad E \vee F = \Big(\bigvee_{\omega \to E} \omega\Big) \vee \Big(\bigvee_{\omega' \to F} \omega'\Big) = \bigvee_{\omega'' \to E \vee F} \omega''$$
$$F = \bigvee_{\omega' \to F} \omega'$$

Da queste osservazioni possiamo dedurre che $A(\mathbb{P})$ è un'algebra di eventi.

2) $A = \{\emptyset, \Omega\}$ (è l'algebra più piccola possibile)

$\Omega \in A$, se $\emptyset \in A$, anche $\overline{\emptyset} = \Omega \in A$, se $\emptyset$ e $\Omega \in A$, anche $\emptyset \vee \Omega = \Omega \in A$

3) se A è un'algebra $\Rightarrow \{\emptyset, \Omega\} \in A$

4) $A = \{\emptyset, \Omega, E, \overline{E}\}$ è l'algebra individuata dall'evento E.

5) Dati E, F $A = \{\emptyset, \Omega, E, F, \overline{E}, \overline{F}, E \vee F, E \wedge F, \overline{E} \wedge F, \overline{E} \vee F, E \wedge \overline{F}, E \vee \overline{F}, \overline{E} \wedge \overline{F}, \overline{E} \vee \overline{F}, \overline{E \vee F}\}$

X PROBABILITÀ

La probabilità su un algebra $\mathcal{A}$ di eventi è un applicazione che ad ogni elemento di $\mathcal{A}$ associa un numero reale e che gode delle seguenti proprietà:

$P_r : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

① $P_r(\Omega) = 1$

② $0 \leq P_r(E) \leq 1$

③ $P_r(E \vee F) = P_r(E) + P_r(F)$ se $E \wedge F = \emptyset$ $\forall E, F \in \mathcal{A}$

↳ PROPRIETÀ DELLA FINITA ADDITIVITÀ

Osserviamo che possiamo enunciare la terza proprietà solo perché abbiamo definito l'algebra come una famiglia di proposizioni chiusa per disgiunzione ($\forall E, F \in \mathcal{A}$ $E \vee F \in \mathcal{A}$)

Da questo momento in poi quando parleremo di E, F... sottintenderemo che essi $\in \mathcal{A}$.

TEOREMA (sulle proprietà della probabilità)

1) $P_r(\bar{E}) = 1 - P_r(E)$

sappiamo che $E \vee \bar{E} = \Omega$ e che $P_r(E \vee \bar{E}) = P(\Omega) \overset{①}{=} 1$

ma anche che $P_r(E \vee \bar{E}) \overset{③}{=} P_r(E) + P_r(\bar{E})$

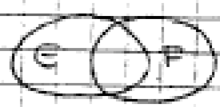
quindi $P_r(E) + P_r(\bar{E}) = 1$ da cui $P_r(\bar{E}) = 1 - P_r(E)$

es: $P_r(\emptyset) = P_r(\bar{\Omega}) = 1 - P_r(\Omega) = 1 - 1 = 0$

2) $P_r(E \vee F) + P_r(E \wedge F) = P_r(E) + P_r(F)$

esprimiamo la disgiunzione $E \vee F$ come disgiunzione di due eventi incompatibili:

$$E \vee F = E \vee (\bar{E} \wedge F)$$

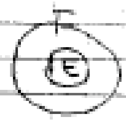


$$P_r(E \vee F) \overset{③}{=} P_r(E) + P_r(\bar{E} \wedge F) = P_r(E) + P_r(F) - P_r(E \wedge F)$$

$$F = \underbrace{(\bar{E} \wedge F) \vee (E \wedge F)}_{\text{incompatibili}}$$

$P_r(F) = P_r(\bar{E} \wedge F) + P_r(E \wedge F)$ da cui $P_r(\bar{E} \wedge F) = P_r(F) - P_r(E \wedge F)$

3) $E \to F \Rightarrow P_r(E) \leq P_r(F)$ PROPRIETÀ DI MONOTONIA DELLA PROBABILITÀ



$E \to F$ significa che $F = E \vee \overset{\text{incompatibili}}{(\bar{E} \wedge F)}$

allora $P_r(F) = P_r(E) + P_r(\bar{E} \wedge F) \underset{②}{\geq} P_r(E)$

$$P_r(\bar{E} \wedge F) \geq 0$$

4) $P_r(E_1 \vee \ldots \vee E_n) = P_r(E_1) + \ldots + P_r(E_n)$ se $E_i \wedge E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

se $n=2$ si ricade nella 3), altrimenti si dimostra per induzione:

base dell'induzione: $n=2$ vera

ipotesi induttiva: 4) vera per n, voglio provare che è vera anche per $n+1$

ipotesi: $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}$: $E_i \wedge E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

$P_r(E_1 \vee \ldots \vee E_n \vee E_{n+1}) = P_r((E_1 \vee \ldots \vee E_n) \vee E_{n+1})$ $*$

osservo che gli eventi $E_1 \vee \ldots \vee E_n$ e E_{n+1} sono incompatibili:

$$(E_1 \vee \ldots \vee E_n) \wedge E_{n+1} = \underbrace{(E_1 \wedge E_{n+1})}_{= \emptyset} \vee \ldots \vee \underbrace{(E_n \wedge E_{n+1})}_{= \emptyset} = \emptyset$$

per ipotesi

$*$ applico la 3): $P_r((E_1 \vee \ldots \vee E_n) \vee E_{n+1}) = P_r(E_1 \vee \ldots \vee E_n) + P_r(E_{n+1}) =$

$= P_r(E_1) + \ldots + P_r(E_n) + P_r(E_{n+1})$ per ipotesi induttiva

Per enunciare il 5° punto del teorema, è necessario richiamare alcune nozioni di base:

LE SERIE NUMERICHE

Data una successione di numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, si chiama RIDOTTA ENNESIMA $s_n = a_1 + \dots + a_n$

Si chiama SERIE la successione di termini così definita:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

Se esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n = \ell$ allora $a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ell$

Una serie numerica è a termini positivi quando $a_n \geq 0 \ \forall n$. In tal caso la successione $(s_n)_{n \geq 1}$ è nondecrescente, quindi, per il teorema sul limite delle funzioni monotone, esiste il limite per $n \to +\infty$.
Se già $a_n \leq 0 \ \forall n$, posso dire che $-a_n \geq 0$ e arrivare alla stessa conclusione del caso precedente.

Possiamo, quindi, affermare che, se i termini a_n hanno tutti lo stesso segno, allora $\exists \lim_{n \to +\infty} s_n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n \begin{cases} \text{finito} \\ +\infty \end{cases} \quad \text{con } a_n \geq 0 \ \forall n$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
$a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}, \dots$ che legame c'è tra $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} a_{2n+1}$, $\sum_{n \geq 1} a_{2n}$?
$a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} a_{2n+1} + \sum_{n \geq 1} a_{2n}$$

TEOREMA DELLA PERMUTABILITÀ DELLA SERIE

Sia π una permutazione di numeri naturali $(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}, \dots, a_{\pi(n)}, \dots)$, allora è vero che

$$\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = \sum_{n\geq 1} a_n$$

5) Data una successione di eventi $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ a due a due incompatibili ($E_i \wedge E_j = \emptyset$ $i \neq j$) e con disgiunzione appartenente all'algebra ($\bigvee_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$),

$$\sum_{n\geq 1} P_r(E_n) \leq P_r\left(\bigvee_{n\geq 1} E_n\right)$$ (è la 4) generalizzata per un numero infinito di eventi).

considero i primi n eventi, so che

$$E_1 \vee \dots \vee E_n \to \bigvee_{n\geq 1} E_n$$

allora, dalla 3) $P_r(E_1 \vee \dots \vee E_n) \leq P_r(\bigvee_{n\geq 1} E_n)$

che equivale dalla 4) $P_r(E_1) + \dots + P_r(E_n) \leq P_r(\bigvee_{n\geq 1} E_n)$ $\forall n$

$$\sum_{n\geq 1} P_r(E_n) = \lim_{n\to+\infty} (P_r(E_1) + \dots + P_r(E_n)) \leq P_r\left(\bigvee_{n\geq 1} E_n\right)$$

esiste perché la serie è formata da num. positivi.

T. PERMANENZA DEL SEGNO

es.: $0 \leq a_1 = P_r(E_1)$ $\quad s_1 = a_1 \quad \leq k$

$0 \leq a_2 = P_r(E_2)$ $\quad s_2 = a_1 + a_2 \quad \leq k$

$0 \leq a_n = P_r(E_n)$ $\quad s_n = a_1 + \dots + a_n \leq k$

$$\exists \sum_{n\geq 1} a_n \overset{def}{=} \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + \dots + a_n) \leq k$$

6) $$Pr(E_1 \vee \dots \vee E_n) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1 \dots n\}} (-1)^{\#J-1} \, Pr\Big(\bigwedge_{j \in J} E_j\Big)$$ con $\#J$ = cardinalità di J (num. di elem. di J)

si chiama FORMULA DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

Abbiamo visto che $Pr(E_1 \vee E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2) - Pr(E_1 \wedge E_2)$

vediamo cosa succede con tre eventi:

$$Pr(\underbrace{E_1 \vee E_2}_{E} \vee \underbrace{E_3}_{F}) = Pr(E_1 \vee E_2) + Pr(E_3) - Pr((E_1 \vee E_2) \wedge E_3)$$

$$= Pr(E_1) + Pr(E_2) - Pr(E_1 \wedge E_2) + Pr(E_3) - Pr((E_1 \wedge E_3) \vee (E_2 \wedge E_3))$$

$$= Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr(E_3) - Pr(E_1 \wedge E_2) - Pr(E_1 \wedge E_3) - Pr(E_2 \wedge E_3) + Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$

$$= Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr(E_3) - [Pr(E_1 \wedge E_2) + Pr(E_1 \wedge E_3) + Pr(E_2 \wedge E_3)] + Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$

Osserviamo che le probabilità di un numero dispari di eventi sono precedute dal segno "+", le altre dal "-"

es: $$Pr(E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee E_4) = Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr(E_3) + Pr(E_4) +$$
$$- [Pr(E_1 \wedge E_2) + Pr(E_1 \wedge E_3) + Pr(E_1 \wedge E_4) + Pr(E_2 \wedge E_3) + Pr(E_2 \wedge E_4) + Pr(E_3 \wedge E_4)]$$
$$+ Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) + Pr(E_1 \wedge E_3 \wedge E_4) + Pr(E_2 \wedge E_3 \wedge E_4) + Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_4)$$
$$- Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge E_4)$$

7) $P_r\left(\bigvee_{w \to E} w\right) \leq P_r(E) \leq 1 - P_r\left(\bigvee_{w' \to \bar{E}} w'\right)$

Sapendo che: $\mathbb{P}$ partizione dell'evento certo, fatta con elementi dell'algebra ($w \in \mathcal{A}$)
$E \in \mathcal{A}$, per il quale ha senso calcolare la probabilità
w generico costituente di $\mathbb{P}$

[abbiamo visto che $\bigvee \emptyset = \emptyset$ quindi $\bigvee_{w \to E} w = \emptyset$ se $\nexists\, w \to E$
$\bigvee_{w' \to \bar{E}} w' = \emptyset$ se $\nexists\, w' \to \bar{E}$]

dim: prima disuguaglianza $P_r(E) \geq P_r\left(\bigvee_{w \to E} w\right)$

dal punto di vista descrittivo, è vero che $\bigvee_{w \to E} w \to E$

quindi per la 3) $P_r\left(\bigvee_{w \to E} w\right) \leq P_r(E)$

seconda disuguaglianza $P_r(E) \leq 1 - P_r\left(\bigvee_{w' \to \bar{E}} w'\right)$

$E \to \bigwedge_{w' \to \bar{E}} \bar{w}'$ (dim: suppongo E vero, e $\bigwedge_{w' \to \bar{E}} \bar{w}'$ falso: allora $\exists\, w' \to \bar{E}$ $\bar{w}'$ falso $\Rightarrow w'$ vero
$\Rightarrow \bar{E}$ vero
$\Rightarrow E$ falso imp!)

allora per la 3) $P_r(E) \leq P_r\left(\bigwedge_{w' \to \bar{E}} \bar{w}'\right)$

ma $\bigwedge_{w' \to \bar{E}} \bar{w}' = \overline{\bigvee_{w' \to \bar{E}} w'}$ (de morgan)

per la 1) $P_r\left(\bigwedge_{w' \to \bar{E}} \bar{w}'\right) = 1 - P_r\left(\bigvee_{w' \to \bar{E}} w'\right)$

e quindi $P_r(E) \leq 1 - P_r\left(\bigvee_{w' \to \bar{E}} w'\right)$

es: Partita di calcio tra A e B α: la partita si svolge e termina in modo regolare

E_1: "A vince l'incontro" $m_A > m_B$ con m_A = reti di A, m_B = reti di B

E_2: "B non segna" $m_B = 0$

E_3: "A segna una sola rete" $m_A = 1$

E_4: "A segna due sole reti" $m_A = 2$

1) Trova la partizione generata

Essendo $E_3 \wedge E_4 = \emptyset$ posso togliere i costituenti così definiti: $E_1 E_2 E_3 E_4 = \emptyset$ (ce ne sono 4)

Anche i seguenti sono impossibili $(m_A > m_B) \wedge (m_B > 0) \wedge (m_A = 1) \wedge (m_A \neq 2) = \emptyset$

$(m_A \leq m_B) \wedge (m_B = 0) \wedge (m_A \neq 1) \wedge (m_A = 2) = \emptyset$

$(m_A < m_B) \wedge (m_B = 0) \wedge (m_A = 1) \wedge (m_A \neq 2) = \emptyset$

La partizione generata è formata dai seguenti costituenti: $\bar{E}_1 E_2 E_3 \bar{E}_4$, $\bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 E_4$, $\bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4$, $\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3 \bar{E}_4$, $E_1 E_2 \bar{E}_3 E_4$, $E_1 E_2 E_3 \bar{E}_4$, $E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 E_4$, $E_1 E_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4$, $E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4$.

DIPENDENZA DA UNA FAMIGLIA DI EVENTI $\mathcal{E}$

Sia $\mathcal{E}$ una famiglia di eventi qualsiasi. Scelto un evento E qualsiasi, esso è logicamente dipendente da $\mathcal{E}$ se il suo valore di verità è noto qualora si conoscano i valori di ogni evento della famiglia.

S: Tornando all'esempio precedente, chiamo $\mathcal{E}$ la famiglia costituita dagli eventi E_1, E_2, E_3, E_4, e considero gli eventi:

F: A vince 2 a 1 $(m_A = 2 \ , m_B = 1)$

G: A vince 3 a 0 $(m_A = 3 \ , m_B = 0)$

E: B perde segnando meno di 3 reti $(m_A > m_B \ , m_B < 3)$

H: pareggio $(m_A = m_B)$

Voglio vedere se, conoscendo i valori di verità della famiglia, posso dedurre i valori di verità di F, G, E, H. Innanzitutto bisogna studiare la partizione generata:

$\omega_1 = E_1 E_2 \bar{E}_3 E_4 \qquad m_A = 2 \quad m_B = 0$

$\omega_2 = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 E_4 \qquad m_A = 2 \quad m_B = 1$

$\omega_3 = E_1 E_2 E_3 \bar{E}_4 \qquad m_A = 1 \quad m_B = 0$

$\omega_4 = E_1 E_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4 \qquad m_A \geq 3 \quad m_B = 0$

$\omega_5 = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4 \qquad m_A \geq 3 \quad m_A > m_B > 0$

$\omega_6 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3 \bar{E}_4 \qquad m_A = 1 \quad m_B \geq 1$

$\omega_7 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 E_4 \qquad m_A = 2 \quad m_B \geq 2$

$\omega_8 = \bar{E}_1 E_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4 \qquad m_A = m_B = 0$

$\omega_9 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \bar{E}_4 \qquad m_A = 0 \quad m_B \geq 1 \text{ o } m_B \geq m_A \geq 3$

- F è logicamente dipendente da $\mathcal{E}$ perché coincide ad un suo costituente ($F = \omega_2$)
- G è logicamente semidipendente da $\mathcal{E}$ perché, nostante quasi tutti i costituenti implicano la sua negazione, ce ne è uno compatibile con esso ($\omega_{h \neq 4} \to \bar{G}$, $\omega_4 \wedge G \neq \emptyset$ $\omega_4 \wedge \bar{G} \neq \emptyset$)
- E è logicamente semidipendente da $\mathcal{E}$ perché $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \to E$
  $\omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9 \to \bar{E}$
  $\omega_5 \wedge E \neq \emptyset \quad \omega_5 \wedge \bar{E} \neq \emptyset$
- H è logicamente semidipendente da $\mathcal{E}$ perché $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \to \bar{H}$
  $\omega_8 \to H$
  $\omega_6, \omega_7, \omega_9$ compatibili con H e $\bar{H}$

$\omega_6, \omega_7, \omega_8$ compatibili con H e $\bar{H}$

CASO FINITO

Considero $\mathbb{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ partizione finita dell'evento certo, e $\mathcal{A}$ algebra degli eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$

Chiamo p_i la probabilità del costituente ω_i: $\quad p_i = P_r(\omega_i)_{i=1,\dots,n}$

So che $\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n = \Omega$ e che $\omega_i \wedge \omega_j = \emptyset \; (i \neq j)$ perché costituenti di $\mathbb{P}$.

Allora $1 = P_r(\Omega) = P_r(\omega_1 \vee \dots \vee \omega_n) = P_r(\omega_1) + \dots + P_r(\omega_n) = p_1 + \dots + p_n$

ho ottenuto che $\quad p_1 + \dots + p_n = 1 \quad$ con $p_i \geq 0 \;\; i=1,\dots,n$

Scelgo ora un evento E logic. dipendente $\left(E = \bigvee_{i \in \{i : \omega_i \to E\}} \omega_i\right)$, allora:

$$P_r(E) = P_r\left(\bigvee_{i \in \{i:\omega_i \to E\}} \omega_i\right) = \sum_{i \in \{i:\omega_i \to E\}} P_r(\omega_i) = \boxed{\sum_{i \in \{i:\omega_i \to E\}} p_i = P_r(E)}$$

Se ipotizzo che i costituenti abbiano la stessa probabilità, ricado nel CASO SIMMETRICO

$p_i = p \quad i=1,\dots,n \qquad p = \frac{1}{n}$ con n = numero dei costituenti di $\mathbb{P}$

allora $\qquad \boxed{P_r(E) = \frac{h}{n} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}} \qquad$ con $\#\{i : \omega_i \to E\} = h$

[si dice che ω_i è caso favorevole ad E se $\omega_i \to E$]

TEOREMA

Scelgo come voglio n numeri non negativi di somma = 1. $[p_1, \ldots, p_n \geq 0 \quad p_1 + \ldots + p_n = 1]$

Per ogni evento $E = \bigvee_{i \in \{i : \omega_i \to E\}} \omega_i$, Posta per definizione $P(E) = \sum_{i \in \{i : \omega_i \to E\}} p_i$, voglio dimostrare che P è una probabilità su Ω.

dim: devo provare le proprietà delle probabilità su Ω.

1) $P(\Omega) = 1$ Vero perché $P(\Omega) = \sum_{i \in \{i : \omega_i \to \Omega\}} p_i = p_1 + \ldots + p_n = 1$

2) $P(E) \geq 0$ Vero (ovvio)

NB: nella 2° proprietà non è necessario porre $P(E) \leq 1$ perché ogni evento $E \to \Omega$ e per la 3) $P_r(E) \leq P_r(\Omega) = 1$

3) $P(E \vee F) = P(E) + P(F)$ se $E \wedge F = \emptyset$ dimostrazione:

Sia: $\widetilde{E \vee F} = \{h : \omega_h \to E \vee F\}$

$\widetilde{E} = \{i : \omega_i \to E\}$ voglio dimostrare che $\sum_{h \in \{h : \omega_h \to E \vee F\}} p_h = \sum_{\substack{i \in \{i : \omega_i \to E\} \\ \omega_i \in \widetilde{E}}} p_i + \sum_{\substack{j \in \{j : \omega_j \to F\} \\ \omega_j \in \widetilde{F}}} p_j$

$\widetilde{F} = \{j : \omega_j \to F\}$

$\emptyset = \widetilde{E \wedge F} = \widetilde{E} \cup \widetilde{F}$

Sono disgiunti e incompatibili, ho trovato l'uguaglianza es: tornando all'esempio precedente assegno le probabilità $p_1 \dots p_9$ ai costituenti $w_1 \dots w_9$, tali che $p_1 + \dots + p_9 = 1$ e $p_i \geq 0$

Nel caso simmetrico, $p_i = \frac{1}{9}$

$Pr(E_1) = Pr(w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \vee w_5) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{5}{9}$

$Pr(E_2) = p_1 + p_3 + p_4 + p_8 = \frac{4}{9}$

$Pr(E_3) = p_3 + p_6 = \frac{2}{9}$

$Pr(E_4) = p_1 + p_2 + p_7 = \frac{3}{9}$

$Pr(F) = p_2 = \frac{1}{9}$

Cosa si può dire di G, H, E che sono semidipendenti da $\mathcal{E}$?

- $Pr\left(\bigvee_{w \to G} w\right) \leq Pr(G) \leq 1 - Pr\left(\bigvee_{w' \to \bar{G}} w'\right)$

  $Pr(\emptyset) \leq Pr(G) \leq 1 - Pr\left(\bigvee_{h \neq 4} w_h\right) = 1 - \sum_{h \neq 4} p_h = p_4$

  $0 \leq Pr(G) \leq p_4 \Rightarrow 0 \leq Pr(G) \leq \frac{1}{9}$

- $Pr(w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4) \leq Pr(E) \leq 1 - Pr(w_6 \vee w_7 \vee w_8 \vee w_9)$

  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq Pr(E) \leq p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$ $\quad \frac{4}{9} \leq Pr(E) \leq \frac{5}{9}$

- $Pr(w_8) \leq Pr(H) \leq 1 - Pr(w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4 \vee w_5)$

  $p_8 \leq Pr(H) \leq p_6 + p_7 + p_8 + p_9$ $\quad \frac{1}{9} \leq Pr(H) \leq \frac{4}{9}$

PROBABILITÀ NEL GIOCO DEL LOTTO

Consideriamo le cinquine ordinate di numeri come casi simmetrici, perché hanno la stessa probabilità di essere estratte. La partizione dell'evento certo ha per costituenti tutte le possibili cinquine ordinate:

$$\mathbb{P}: \omega = (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$$

La numerosità della partizione è di $\binom{90}{5}5!$ costituenti. $\binom{90}{5}5!$ sono quindi i casi possibili. (5'273'912'160)

$$P_r(\text{una cinquina}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{\binom{90}{5}5!} \quad (\simeq 0{,}19 \cdot 10^{-9})$$

☆ Calcoliamo ora la probabilità che esca un numero n:
Osserviamo che l'evento E = "esca un numero n" è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$.

$$E = \bigvee \{(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) : n_i = n \text{ per qualche } i \leq 5\}$$

$$P_r(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{\binom{89}{4}4! \cdot 5}{\binom{90}{5}5!} \overset{(*)}{=} \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}}$$

(*) $\binom{89}{4}4! \cdot 5$: fissato n, ci sono $\binom{89}{4}4!$ modi per riempire le altre 4 caselle, per ciascuno dei quali, ci sono 5 modi diversi per inserire n.

Osserviamo che non è necessario considerare ordinate le cinquine: possiamo pensare ad una partizione meno fine della precedente, formata comunque da casi simmetrici: la partizione delle cinquine non ordinate

$\mathbb{P}'$: $\omega = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\} = \bigvee_{5!} (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$

$$P_2(\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}) = \sum_{5!}^{5!} P_2((n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)) = 5! \frac{1}{\binom{90}{5}5!} = \frac{1}{\binom{90}{5}}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}'$ è ancora formata da casi simmetrici: conviene lavorare su $\mathbb{P}'$.

☆ Qual è la probabilità che venga estratto l'ambo (i, j)?

$$P_2(E) = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} \left(= 0{,}0024 \; \boxed{= 0{,}2\,\%} \right)$$

☆ Qual è la probabilità di vincere puntando sulla terna (a, b, c)?

(*) Gli eventi che considero, quando punto su un terno, sono E = "esce il terno", E_1 = "escono a, b", E_2 = "escono b, c", E_3 = "escono c, a". Si vince se è vero uno dei 3. $(E \vee E_1 \vee E_2 \vee E_3)$
$P_2(\text{vincere}) = P_2(E) + P_2(E_1) + P_2(E_2) + P_2(E_3)$.

Se punto su (a, b, c) vinco se esce a, b; b, c o c, a e, se esce il terno vinco anche per i tre ambi! (*)

$$P_2(\text{terna}) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \qquad P_2(\text{ambo}) = \frac{\binom{87}{3}}{\binom{90}{5}} \qquad P_2(\text{vincere}) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} + 3\frac{\binom{87}{3}}{\binom{90}{5}} = 0{,}00732 \; \boxed{= 0{,}7\,\%}$$

PROBABILITÀ NELLA TAVOLA ROTONDA

Considero una tavola rotonda con 10 sedie, e 5 coppie di uomini e donne. So che le dieci persone si siedono "a caso". Voglio valutare la probabilità che una coppia prefissata (i,j) si sieda accanto.

Le persone possono disporsi in $10!$ ($= 3628800$) modi diversi.

$$\mathbb{P} \ni \omega = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}) \qquad n° \text{cost} = 10!$$

Con "a caso" si intende che ogni decupla ha la stessa probabilità (caso simmetrico)
$Pr(\omega) = 1/10!$

$E =$ "la coppia (i,j) si siede vicino" è logicamente dipendente da $\mathbb{P}$.

$$Pr(E) = \frac{8! \cdot 20}{10!} = \frac{2}{9}$$

1,2	6,7	2,1	7,6
2,3	7,8	3,2	8,7
3,4	8,9	4,3	9,8
4,5	9,10	5,4	10,9
5,6	10,1	6,5	1,10

→ per ogni coppia di posti fissata ci sono $8!$ costituenti.

Potevo però scegliere una partizione meno fine che risolveva allo stesso modo il problema

$\mathbb{P}': \omega = \{m, n\}$ dove m, n sono i posti occupati dalla coppia.

$\{m, n\}$ è disgiunzione di $2 \cdot 8!$ decuple di $\mathbb{P}$

I costituenti di $\mathbb{P}'$ sono $\binom{10}{2} = 45$ $(\ll 10!)$

l'evento E = "la coppia (i, j) si siede vicino" è anche log.c. dip. da $\mathbb{P}'$.

$$P_r(E) = \frac{10}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}$$

i casi favorevoli sono 10 perché non conta l'ordine.

Esiste un'altra partizione meno fine di $\mathbb{P}$ e più fine di $\mathbb{P}'$:

$\mathbb{P}'': \omega = (m ; n)$ dove m = posto occupato dal primo elem. della coppia (i)
n = " " " secondo " " " (j)

I costituenti di $\mathbb{P}''$ sono 90

$$P_r(E) = \frac{10 \cdot 2}{90} = \frac{2}{9}$$

10 sono i modi per fissare m e due i modi per posizionare n accanto ad m (destra e sinistra).

PROBABILITÀ NEL LANCIO DI UNA MONETA

Se la moneta è equilibrata, cioè perfetta, esce croce o esce testa sono casi simmetrici.

E_1: esce T al primo lancio

E_2: esce T al secondo lancio

⋮

E_n: esce T all'ennesimo lancio

⋮

Osservazioni: $E_1, \dots, E_n, \dots$ sono eventi compatibili, e la loro disgiunzione $\bigvee_{n\geq 1} E_n \neq \Omega$ (leggi "esce T prima o poi") non è l'evento certo

$\overline{\bigvee_{n\geq 1} E_n} = \bigwedge_{n\geq 1} \overline{E}_n$: "non esce mai testa"

Nel caso finito, quando avevamo gli eventi $E_1, \dots, E_n$, consideravamo come partizione di Ω la partizione generata, $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n$

Ora abbiamo un numerabile di eventi, per analogia possiamo fare:

$\mathbb{P}(E_1, \dots, E_n, \dots)$ $\bigwedge_{n\geq 1} E'_n$ è partizione generata da un numerabile di eventi

Considero allora la $\mathbb{P}(E_1, \dots, E_n, \dots)$ $\bigwedge_{n\geq 1} E'_n$

ES: $E_1 \bar{E}_2 E_3 \bar{E}_4 \dots \bar{E}_{2n} E_{2n+1}$ = "esce T nei lanci dispari"

$\bar{E}_1 \dots \bar{E}_{1000} E_{1001} \bar{E}_{\substack{M \\ M>1001}} \dots$ = "esce T solo nel 1001° lancio"

Si chiama tempo d'attesa, nel caso dell'esempio, il numero di lanci che si deve effettuare prima di vedere per la prima volta testa.

Considero allora la partizione $\mathbb{P}(T_1, \dots, T_n, \dots T_\infty)$:

T_1: esce T per la prima volta al primo lancio

T_2: esce T per la prima volta al secondo lancio

⋮

T_n: esce T per la prima volta all'ennesimo lancio

⋮

sono incompatibili, ma $\bigvee_{n\geq 1} T_n \neq \Omega$ perché T potrebbe non uscire mai. Aggiungo T_∞:

$T_\infty = \overline{\bigvee_{n\geq 1} T_n} = \bigwedge_{n\geq 1} \bar{T}_n$ (non esce mai testa)

$T_\infty, T_1, \dots, T_n$ è partizione dell'evento certo, logicamente dipendente dalla famiglia di $E_1 \dots E_n$ perché:

$T_1 = E_1$

$T_2 = \bar{E}_1 \wedge E_2$

$T_3 = \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3$

⋮

$T_n = \bar{E}_1 \wedge \dots \wedge \bar{E}_{n-1} \wedge E_n$

⋮

$T_\infty = \bigwedge_{n\geq 1} \bar{E}_n$

Sia $\mathcal{A}$ l'algebra degli eventi logicamente dipendenti da $E_1, \dots, E_n, \dots$. La partizione generata dagli eventi $E_1 \dots E_n$ è $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n$ (ha 2^n costituenti)
Essendo caso simmetrico:

$$Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = \frac{1}{2^n} \qquad \text{e quindi } Pr(T_n) = \frac{1}{2^n}$$

$$Pr(\underbrace{\text{esca } T \text{ entro}}_{\bigvee_{i=1}^{n} T_i} \text{ l'ennesimo lancio}) = Pr(T_1) + \dots + Pr(T_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Ricordando le propr. delle serie geometriche: $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

$$Pr(\text{esca } T \text{ entro l'ennesimo lancio}) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - 1 = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Osserviamo che $T_\infty \rightarrow \overline{\text{"esca } T \text{ entro l'ennesimo lancio"}}$, quindi:

$$Pr(T_\infty) \le Pr(\overline{\text{esca } T \text{ entro l'ennesimo lancio}}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$0 \le Pr(T_\infty) \le \frac{1}{2^n} \qquad \text{qualunque sia } n$$

Se $n \to +\infty$, $\frac{1}{2^n} \to 0$, quindi, per il teorema del doppio confronto, $Pr(T_\infty) = 0$

Ciò non significa che l'evento T_∞ sia impossibile, nella realtà potrebbe accadere che non esca mai testa. Ma è aspettativa razionale per l'individuo credere che questo non divenga mai. Un evento di questo tipo, con $Pr=0$, si chiama EVENTO TRASCURABILE (o praticamente impossibile). L'evento impossibile è trascurabile, ma non è detto che eventi trascurabili siano impossibili.

Abbiamo visto, nel quinto punto del teorema sulle proprietà della probabilità che

$$\underline{\sum_{n\geq 1} Pr(E_n) \leq Pr\Big(\bigvee_{n\geq 1} E_n\Big)} \qquad 1)$$

con $E_1, E_2, \dots, E_n$, a due a due incompatibili.

Vediamo ora due situazioni per le quali si può sostituire "=" al "≤" o il "<" al "≤" della relazione 1).

(2.) consideriamo i tempi di attesa del primo successo:

so che $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{P_r(T_\infty)} + \sum_{n\geq 1} P_r(T_n) \leq \underset{\overset{\shortparallel}{P_r(\Omega)=1}}{P_r(T_\infty \vee \bigvee_{n\geq 1} T_n)}$

quindi $\sum_{n\geq 1} P_r(T_n) \leq 1$ cioè $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \leq 1$

riprendiamo alcune nozioni sulle serie:

$a>0 \quad a\neq 1 \quad 1+a+a^2+\dots+a^n+\dots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} (1+a+a^2+\dots+a^n) = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } a<1 \end{cases}$$

è successione monotona

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$$

quindi $P_r(T_\infty) + \sum_{n\geq 1} P_r(T_n) = 1 = P_r(T_\infty \vee \bigvee_{n\geq 1} T_n)$

la 1), in questo caso, diviene $\sum_{n\geq 1} P_r(F_n) = P_r(\bigvee_{n\geq 1} F_n)$

6. SCELTA A CASO DI UN NUMERO NATURALE

Scelgo come algebra l'insieme dei sottoinsiemi di numeri naturali $\mathcal{A}$ = ins delle parti $2^{\mathbb{N}}$
scelgo $F \subset \mathcal{A}$, insieme di numeri naturali. Voglio discutere la probabilità di scegliere F dai numeri naturali.

$1 \; 2 \; 3 \; \dots, n] \; n+1$

Scelgo a caso un orizzonte n e considero gli elementi di F che precedono $(n+1)$

$[F \cap \{1 \dots n\}]$: n sono i casi possibili, $\#[F \cap \{1, \dots, n\}]$ sono quelli favorevoli

$\dfrac{\#[F \cap \{1 \dots n\}]}{n}$ è una successione, quindi posso pormi il problema se esiste il lim per $n \to +\infty$.
Se il limite esiste allora:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\#[F \cap \{1 \dots n\}]}{n} \underset{def}{=} Pr(F)}$$

- se $F = \{m\}$ $Pr(F) = 0$ finché $n < m$ $F \cap \{1 \dots n\} = \emptyset$ $Pr(F) = 0$ quando $n > m$ $F \cap \{1 \dots n\} = \{m\}$ $Pr(F) = \frac{1}{n} \to 0$

- se $F = \{pari\}$ $Pr(F) = \frac{1}{2}$

- se $F = \{$numeri naturali multipli di $k > 0\}$ $Pr(F) = \frac{1}{k}$

Cosa si può dedurre se $P_r(F) = 0$?

dalla def di limite: $a_n \geq 0$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ significa $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ $a_n < \varepsilon$

Allora il numero di elementi di F è piccolo in confronto al numero di naturali prima di n.
Possiamo dire che andando avanti ci sono sempre meno elementi di F. (si diradano).

TEOREMA: P_r(insieme dei numeri primi) $= 0$

Osserviamo, quindi, che: $\sum_{n \geq 1} P_r(\{n\}) = 0 < P_r\left(\bigvee_{n \geq 1} \{n\}\right) = 1$

In questo caso, la 1) è $\sum_{n \geq 1} P_r(F_n) < P_r\left(\bigvee_{n \geq 1} F_n\right)$

NB Per semplicità (convenienza matematica) assumeremo che se $E_1, \dots, E_n, \dots$ sono a due a due incompatibili, allora

$$\sum_{n \geq 1} P_r(E_n) = P_r\left(\bigvee_{n \geq 1} E_n\right)$$ PROPRIETÀ di NUMERABILE ADDITIVITÀ

Può essere $Pr(E_n) = p \quad \forall n$? Cioè, può avere ogni evento E_n uguale probabilità?

$$p + p + \ldots + p + \ldots = Pr\left(\bigvee_{n \geq 1} E_n\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } p = 0 \\ +\infty & \text{se } p > 0 \quad \left[\lim_{n \to +\infty} (np) = +\infty\right] \end{cases}$$

Se ogni evento ha la stessa probabilità, allora ogni evento ha prob. $= 0$.

es: sia $P = \{w_1, \ldots, w_n, \ldots\}$ partizione dell'evento certo

posso dare $Pr(w_n) = p \quad \forall n$? NO altrimenti $Pr(w_n) = 0$

$$0 = \sum_{n \geq 1} Pr(w_n) \underset{\substack{\text{propr. di numerabile} \\ \text{additività}}}{=} Pr\left(\bigvee_{n \geq 1} w_n\right) = Pr(\Omega) = 1 \quad \text{assurdo}$$

I concetti visti finora sono i seguenti:

$\mathcal{A}$ algebra di eventi se: • $\Omega \in \mathcal{A}$

• $E \in \mathcal{A} \to \bar{E} \in \mathcal{A}$

• $E, F \in \mathcal{A} \to E \vee F \in \mathcal{A}$

P probabilità se: • $P(\Omega) = 1$

• $P(E) \geq 0$

• $P(E \vee F) = P(E) + P(F)$ con $E \wedge F = \emptyset$

siano $E_1, \dots, E_n, \dots$ a due a due incompatibili, e $\vee_{n \geq 1} E_n \in \mathcal{A}$, allora

$$\sum_{n \geq 1} P_r(E_n) \leq P_r\left(\bigvee_{n \geq 1} E_n\right)$$

Possiamo ignorare la condizione $\left(\bigvee_{n\geq 1} E_n\right) \in \mathcal{A}$, introducendo due nuovi concetti.

$\mathcal{A}$ è σ-algebra di eventi se gode delle seguenti proprietà:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $E \in \mathcal{A} \rightarrow \bar{E} \in \mathcal{A}$
- $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A} \rightarrow \bigvee_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{A}$

Una sigma-algebra è chiusa non solo per disgiunzioni finite, ma anche per disgiunzioni numerabili.

P_r è una probabilità numerabilmente additiva (o σadditiva) se:

- $P_r(\Omega) = 1$
- $P_r(E) \geq 0$
- $P_r\left(\bigvee_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} P_r(E_n)$ con $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{A}$ e a due a due incompatibili

L'ultimo punto è una generalizzazione al caso numerabile della 4° equazione del teorema sulle proprietà della probabilità.

se $E_1, \dots, E_n$ a due a due incomp. allora $P_r\left(\bigvee_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P_r(E_i)$

AMBIENTE NUMERABILE

Sia $\mathbb{P} = \{w_1, \dots, w_m, \dots\}$ una part. dell'evento certo con un numerabile di costituenti.

$p_m = P_r(w_m) \qquad \bigvee_{m \geq 1} w_m = \Omega$ $\quad A$ = eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$ (è l'algebra)

Sia P_r una probabilità σ-additiva: $\sum_{m \geq 1} P_r(w_m) = P_r\left(\bigvee_{m \geq 1} w_m\right) = P_r(\Omega) = 1$

Scelgo un evento E logicamente dipendente da $\mathbb{P}$ $\quad E = \bigvee_{m \geq 1} w_m = \bigvee_{w_m \to E} w_m$ (per il t. fondamentale)

voglio dimostrare che $\boxed{P_r(E) = \sum_{m \geq 1} p_m = \sum_{m \in \{m : w_m \to E\}} p_m}$

<u>Dim</u>:

Al 7° punto del teorema sulle proprietà avevamo dimostrato che:

$$P_r\left(\bigvee_{w_m \to E} w_m\right) \leq P_r(E) \leq 1 - P_r\left(\bigvee_{w_m \to \overline{E}} w'_m\right)$$

per σ-additività

$$\sum_{m \in \{m : w_m \to E\}} p_m \leq P_r(E) \leq 1 - \sum_{m \in \{m : w_m \to \overline{E}\}} p_m$$

SERIE: $a_1, \dots, a_n, \dots \geq 0$

A, B partizione dei numeri naturali: $A \cup B = \mathbb{N}$ $A \cap B = \emptyset$

per la PROPRIETÀ COMMUTATIVA ED ASSOCIATIVA vale: $\sum_{n \in A} a_n + \sum_{n \in B} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$

Allora: $\sum_{n \geq 1} p_n = \sum_{n \in \{n : w_n \to E\}} p_n + \sum_{n \in \{n : w_n \to \bar{E}\}} p_n = \sum_{n \geq 1} p_n = 1$

$$1 - \sum_{n \in \{n : w_n \to \bar{E}\}} p_n = \sum_{n \in \{n : w_n \to E\}} p_n \Rightarrow P_r(E) = \sum_{n \in \{n : w_n \to E\}} p_n$$

Quindi se E è logic. dip. da $\mathbb{P}$, $P_r(E) = \sum_{n \in \{n : w_n \to E\}} p_n$

es: Lancio di una moneta:

E_n = esce testa al lancio ennesimo

T_n = esce testa per la prima volta al lancio ennesimo

T_∞ = non esce mai testa

$T_\infty, T_1, T_2, \dots$ è una partizione dell'evento certo

$$P_r(T_\infty) + \sum_{n \geq 1} P_r(T_n) = 1$$

1) Qual è la probabilità che esca testa per la prima volta in un lancio dispari?

$$E = \bigvee_{m \geq 1} T_{2m-1} \qquad Pr\Big(\bigvee_{m\geq 1} T_{2m-1}\Big) \underset{\text{+ precedente}}{=} \sum_{m\geq 1} Pr(T_{2m-1}) = \sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{2^{2m-1}}\right) = \sum_{m\geq 1} \frac{2}{4^m} =$$

$$= 2\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{2}{4}\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

La probabilità che T esca per la prima volta in un lancio dispari è $\frac{2}{3}$, in un lancio pari è $\frac{1}{3}$:

$$\Omega = E(\text{pari}) \vee E(\text{dispari}) \vee T_\infty \qquad [\text{sono incompatibili}]$$

$$Pr(\Omega) = 1 = Pr(E(\text{pari})) + Pr(E(\text{dispari})) + Pr(T_\infty)$$

$$1 = Pr(E(\text{pari})) + \frac{2}{3} \qquad Pr(E(\text{pari})) = \frac{1}{3}$$

C'è una grossa differenza in quanto il primo lancio è dispari: $Pr(T_1) = \frac{1}{2}$ $Pr(T_2) = \frac{1}{4}$

2) Qual è la probabilità che esca Testa per la prima volta in un lancio multiplo di un numero naturale k ($k = 1, 2, \dots, n$)?

$E = \bigvee_{n \geq 1} T_{kn}$ $\qquad Pr\left(\bigvee_{n \geq 1} T_{kn}\right) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{kn} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^k}\right)^n = \frac{1}{2^k} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{n-1} =$

$= \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k - 1}$

3) Qual è la probabilità che esca Testa per la prima volta in un lancio n tale che $\frac{n}{k}$ ha resto $0 \leq r < k$

$E = \bigvee_{h \geq 0} T^{hk+r}$ $\qquad Pr\left(\bigvee_{h \geq 0} T^{hk+r}\right) = \sum_{h \geq 0} Pr\left(T^{hk+r}\right) = \sum_{h \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{hk+r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \sum_{h \geq 0} \left(\frac{1}{2^k}\right)^h =$

$= \frac{1}{2^r} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \frac{2^k}{(2^k - 1) 2^r} = \frac{2^{k-r}}{2^k - 1}$

Nell'ambiente finito: $\mathbb{P}$ $\quad \begin{matrix} w_1, \dots, w_m \\ p_1 \quad\; p_m \end{matrix}$ $\quad$ se $p_1 + \dots + p_m = 1$ con $p_1 \dots p_m \geq 0$

se E è logic. dip. da $\mathbb{P}$: $P(E) = \sum_{i : \{i : w_i \to E\}} p_i$ è una probabilità su $\mathcal{A}$ (di eventi log. dip. da $\mathbb{P}$)

Allora se fisso in modo arbitrario $p_1, \dots, p_m \geq 0$ tali che $\sum_{m \geq 1} p_m = 1$ e posto E logic. dip. da $\mathbb{P}$

se $P(E) = \sum_{m \in \{m : w_m \to E\}} p_m$ allora P è prob. σadditiva sulla σalgebra degli eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$.

OSSERVAZIONE

Se $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$, cioè se la serie è convergente, il resto n-esimo della serie tende a zero:

$a_1, \dots, a_n, \dots \geq 0$ $\quad \sum_{n\geq 1} a_n$ il resto n-esimo $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n \to 0$ (è infinitesimo)

$$s = \sum_{n\geq 1} a_n = \underbrace{(a_1 + \dots + a_m)}_{\substack{\downarrow \text{ se } m \to +\infty \\ s}} + \underbrace{\sum_{n=m}^{+\infty} a_n}_{\substack{\downarrow \text{ se } m \to +\infty \\ 0}}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{m} > 0 : \forall m \geq \bar{m} \quad \sum_{n=\bar{m}}^{+\infty} a_n < \varepsilon$$

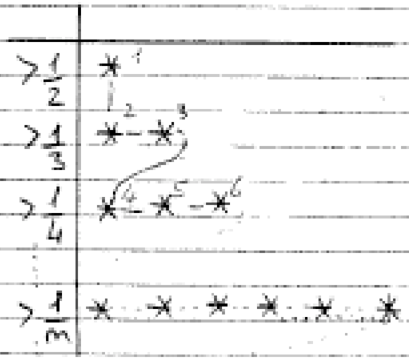
Sono favoriti i primi costituenti: la σ-additività è condizione squilibrata

$$P_r\left(\bigcup_{n=\bar{m}}^{+\infty} \omega_n\right) = \sum_{n=\bar{m}}^{+\infty} p_n < \varepsilon$$

AMBIENTE ARBITRARIO (più che numerabile)

Sia $\mathbb{P}$ una partizione con più di un numerabile di costituenti e sia ω un suo generico costituente.

Quanti costituenti ω possono avere probabilità positiva al massimo?



Quanti ω possono avere probabilità $> \frac{1}{2}$? 1

se $P_r(\omega) > \frac{1}{2}$ $\quad \omega' \neq \omega \quad 1 \geq P_r(\omega \cup \omega') = \overset{>\frac{1}{2}}{P_r(\omega)} + \overset{<\frac{1}{2}}{P_r(\omega')}$

Posso associare a ciascun costituente un numero naturale: possono avere prob. positiva solo un numerabile di costituenti.

PROPRIETÀ

Presa una successione arbitraria di eventi in $\mathfrak{A}$ $E_1, \dots, E_m, \dots$, è vero che:

$$Pr\left(\bigvee_{m\geq 1} E_m\right) \leq \sum_{m\geq 1} Pr(E_m)$$

dim: $\bigvee_{m\geq 1} E_m = E_1 \vee (\overline{E_1} \wedge E_2) \vee (\overline{E_1 \vee E_2} \wedge E_3) \vee \dots \vee (\overline{E_1 \vee \dots \vee E_{m-1}} \wedge E_m) \vee \dots$

sono eventi a due a due incompatibili, allora:

$$Pr\left(\bigvee_{m\geq 1} E_m\right) = Pr(E_1) + Pr(\overline{E_1} \wedge E_2) + Pr(\overline{E_1 \vee E_2} \wedge E_3) + \dots + Pr(\overline{E_1 \vee \dots \vee E_{m-1}} \wedge E_m) \dots$$

so che $\overline{E_1} \wedge E_2 \rightarrow E_2$ allora $Pr(\overline{E_1} \wedge E_2) \leq Pr(E_2)$

so che $\overline{E_1 \vee E_2} \wedge E_3 \rightarrow E_3$ allora $Pr(\overline{E_1 \vee E_2} \wedge E_3) \leq Pr(E_3)$

so che $\overline{E_1 \vee \dots \vee E_{m-1}} \wedge E_m \rightarrow E_m$ allora $Pr(\overline{E_1 \vee \dots \vee E_{m-1}} \wedge E_m) \leq Pr(E_m)$

La proprietà delle serie: $\sum_{m\geq 1} a_m \leq \sum_{m\geq 1} b_m$ se $a_m \leq b_m$ $\forall m \geq 1$, mi fa concludere che:

$$Pr\left(\bigvee_{m\geq 1} E_m\right) \leq \sum_{m\geq 1} Pr(E_m)$$

Se $Pr(E_m) = 0$ $\forall m$ allora $Pr\left(\bigvee_{m\geq 1} E_m\right) = 0$

CONSEGUENZE

① $\boxed{\text{se } P_r(E_m)=1 \ \forall m \quad \text{allora} \quad P_r\left(\bigwedge_{m\geq 1} E_m\right)=1}$

infatti $P_r(\overline{E_m})=0 \ \forall m \rightarrow P_r\left(\bigvee_{m\geq 1} \overline{E_m}\right)=0$

ma $P_r\left(\bigvee_{m\geq 1} \overline{E_m}\right)=P_r\left(\overline{\bigwedge_{m\geq 1} E_m}\right)=0$ quindi $P_r\left(\bigwedge_{m\geq 1} E_m\right)=1-P_r\left(\overline{\bigwedge_{m\geq 1} E_m}\right)=1$

② Considero una successione NON DECRESCENTE DI EVENTI tale che ogni evento implica il successivo.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{se } E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow \ldots \rightarrow E_m \rightarrow \ldots \\ \text{allora } \lim_{m\to+\infty} P_r(E_m)=P_r\left(\bigvee_{m\geq 1} E_m\right) \end{array}}$$

Per prima cosa dobbiamo chiederci se il limite esiste:

se $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \ldots \rightarrow E_m \rightarrow \ldots$ allora $P_r(E_1) \leq P_r(E_2) \leq \ldots \leq P_r(E_m) \leq \ldots$ è quindi una successione monotona: esiste il limite.

$$\bigvee_{n\geq 1} E_n = E_1 \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2) \vee (\bar{E}_2 \wedge E_3) \vee \dots \vee (\bar{E}_{n-1} \wedge E_n) \vee \dots$$

sarebbe $\overline{E_1 \vee E_2} \wedge E_3$
ma $E_1 \to E_2$ quindi
$E_1 \vee E_2 = E_2$

$$P_r\Big(\bigvee_{n\geq 1} E_n\Big) = P_r(E_1) + P_r(\bar{E}_1 \wedge E_2) + P_r(\bar{E}_2 \wedge E_3) + \dots + P_r(\bar{E}_{n-1} \wedge E_n) + \dots$$

per additività

$$= P_r\Big(\underbrace{E_1 \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2) \vee (\bar{E}_2 \wedge E_3) \vee \dots \vee (\bar{E}_{n-1} \wedge E_n)}_{E_n}\Big) + P_r(\bar{E}_n \wedge E_{n+1}) + \dots$$

$$= P_r(E_n) + \underbrace{\sum_{m\geq n} P_r(\bar{E}_m \wedge E_{m+1})}_{\to \text{RESTO n-esimo della serie}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_r\Big(\bigvee_{n\geq 1} E_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \Big[P_r(E_n) + \underbrace{\sum_{m\geq n} P_r(\bar{E}_m \wedge E_{m+1})}_{0}\Big]$$

$$P_r\Big(\bigvee_{n\geq 1} E_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P_r(E_n)$$

③ Considero una successione NON CRESCENTE di eventi:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{se} \quad E_1 \leftarrow E_2 \leftarrow E_3 \leftarrow \ldots \leftarrow E_n \leftarrow \ldots \\ \text{allora} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} Pr(E_n) = Pr\left(\bigwedge\limits_{n\geq 1} E_n\right) \end{array}}$$

Per la negazione dei contrari: $\bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \bar{E}_n \rightarrow \ldots$

Per la ② $\lim\limits_{n\to+\infty} Pr(\bar{E}_n) = Pr\left(\bigvee\limits_{n\geq 1} \bar{E}_n\right)$

ma $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - Pr(E_n)\right] = Pr\left(\overline{\bigwedge\limits_{n\geq 1} E_n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - Pr(E_n)\right] = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} Pr(E_n)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} Pr(E_n) = Pr\left(\bigwedge\limits_{n\geq 1} E_n\right)$

$Pr\left(\overline{\bigwedge\limits_{n\geq 1} E_n}\right) = 1 - Pr\left(\bigwedge\limits_{n\geq 1} E_n\right)$

$Pr\left(\bigvee\limits_{n\geq 1} E_n\right)$ quasi $= Pr(E_n)$ se $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \ldots \rightarrow E_n \rightarrow \ldots$

$Pr\left(\bigwedge\limits_{n\geq 1} E_n\right)$ quasi $= Pr(E_n)$ se $E_1 \leftarrow E_2 \leftarrow \ldots \leftarrow E_n \leftarrow \ldots$

SCELTA "A CASO" DI UN NUMERO APPARTENENTE A [0, 1]

Indichiamo con X il numero estratto, che noi non conosciamo e denotiamo l'evento "il numero estratto è compreso tra 0 e 1" con la scrittura: $\{0 \le X \le 1\}$
Per comodità, quando ci riferiamo all'evento appena descritto, nell'indicare la probabilità non usiamo le parentesi graffe:

$$P_r(\{0 \le X \le 1\}) = P_r(0 \le X \le 1)$$

Le seguenti sono tre proprietà necessarie alla formalizzazione della "scelta a caso":

PROPRIETÀ

1) $P_r(0 \le X \le 1) = 1$

2) $P_r(X = x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

infatti: $\{\{X = x\}\ x \in [0,1]\}$ è una partizione dell'evento certo formata da più di un numerabile di costituenti (è continua).

ritenendo che ciascuno di questi costituenti sia equiprobabile, assegno probabilità p ad ogni evento $\{X = x\}$

$$P_r(X = x) = p \quad \forall x$$

Ciascun evento, però, deve avere probabilità $= 0$ perché abbiamo dimostrato che si può assegnare probabilità positiva al più ad un numerabile di eventi, ed essendo la partizione $\{\{X = x\} : x \in [0, 1]\}$ continua, ogni evento non può che avere probabilità $= 0$.

3) $Pr\left(\frac{h}{n} \le X \le \frac{h+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad (h=1,\dots,n-1) \quad \forall n$

Divido l'intervallo $[0;1]$ in n parti uguali.

$\left\{0 \le X \le \frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n} \le X \le \frac{2}{n}\right\}, \dots, \left\{\frac{n-1}{n} \le X \le 1\right\}$ Questi eventi costituiscono la partizione dell'evento certo.

Intuitivamente se il numero è scelto a caso, ciascun intervallo ha la stessa Pr.

$Pr\left(0 \le X \le \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad Pr\left(\frac{h}{n} \le X \le \frac{h+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad (h=1,\dots,n-1) \quad \forall n$

TEOREMA SULLA DISTRIBUZIONE UNIFORME di [0;1]

Sono vere le tre proprietà precedenti se e solo se è vera $P_r(X \le x) = x \quad \forall x \in [0;1]$. 4)
Voglio dimostrare che, prendendo per ipotesi la 1), la 2) e la 3) posso concludere che è vera la 4); e che, prendendo per ipotesi la 4), allora dimostro vere la 1), la 2) e la 3).
Dimostrazione della condizione necessaria:

IPOTESI 1) $P_r(0 \le X \le 1) = 1$

2) $P_r(X = x) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$

3) $P_r\left(\frac{h}{n} \le X \le \frac{h+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad (h = 1, \dots, n-1) \quad \forall n$

TESI $P_r(X \le x) = x \quad \forall x \in [0;1]$

- Cominciamo ad supporre che x sia un numero razionale: lo posso scrivere come frazione di due numeri naturali: $x = \frac{m}{n}$ $(0 \le m \le n)$

Posso esprimere l'evento $\{X \le x\} = \underbrace{\{X < 0\}}_{= \emptyset} \cup \left\{0 \le X \le \frac{1}{n}\right\} \cup \left\{\frac{1}{n} \le X \le \frac{2}{n}\right\} \cup \dots \cup \left\{\frac{m-1}{n} \le X \le \frac{m}{n}\right\}$

essendo eventi incompatibili tra loro, per la proprietà di additività:

$$P_r(X \le x) = P_r\left(0 \le X \le \frac{1}{n}\right) + P_r\left(\frac{1}{n} \le X \le \frac{2}{n}\right) + \dots + P_r\left(\frac{m-1}{n} \le X \le \frac{m}{n}\right)$$

$$\overset{3)}{=} \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ volte}} \implies P_r(X \le x) = \frac{m}{n} = x$$

• Consideriamo ora il caso che x sia arbitrario:

★ se $x=0$ posso scrivere l'evento $\{X\le x\}=\{X\le 0\}=\underbrace{\{X<0\}}_{=\emptyset}\cup\{X=0\}$

$P_r(X\le 0)=P_r(X<0)+P_r(X=0)\overset{2)}{=}0$

★ se $x=1$ osservo che $\{0\le X\le 1\}\to\{X\le 1\}$ quindi $P_r(0\le X\le 1)\le P_r(X\le 1)\overset{1)}{=}1$

dev'essere $P_r(0\le X\le 1)=1=P_r(X\le 1)$

★ se $0<x<1$

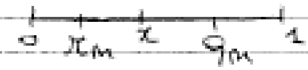
sono successioni di numeri razionali che convergono a x

$\exists\ r_n$ successione di num. razionali di $[0;1]$

$r_n\uparrow x$ ($r_1<r_2<\dots<r_n$: converge in modo monotono cresc. ad x)

$\exists\ q_n$ successione di num. razionali di $[0;1]$

$q_n\downarrow x$ ($x>q_1>q_2>\dots>q_n$: converge in modo monotono decrescente ad x)



osservo che $\{X\le r_n\}\to\{X\le x\}\to\{X\le q_n\}$

per la proprietà di monotonia: $\underset{\substack{\shortparallel\\ r_n}}{P_r(X\le r_n)}\le P_r(X\le x)\le \underset{\substack{\shortparallel\\ q_n}}{P_r(X\le q_n)}$

— per prima parte dimost. —

al $\lim_{n\to+\infty}$ $\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{r_n}\le P_r(X\le x)\le \underset{\substack{\downarrow\\ x}}{q_n}\quad\forall n$ quindi $P_r(X\le x)=x$

Dimostrazione della condizione sufficiente:

IPOTESI: $P_r(X \le x) = x \quad \forall x \in [0;1]$

TESI: 1) $P_r(0 \le X \le 1) = 1$

2) $P_r(X = x) = 0$

3) $P_r\left(\frac{h}{n} \le X \le \frac{h+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad (h=1, \dots, n-1) \quad \forall n$

Per la dimostrazione dobbiamo prima introdurre un risultato:

se $a<b$ (con $a,b \in [0;1]$) allora $P_r(a < X \le b) = b-a$

Osserviamo che $\{X \le b\} = \{X \le a\} \vee \{a < X \le b\}$

Essendo eventi incompatibili, per additività:

$P_r(X \le b) = P_r(X \le a) + P_r(a < X \le b)$

per ipotesi

$b = a + P_r(a < X \le b)$ e quindi $P_r(a < X \le b) = b-a$

Riprendiamo la dimostrazione:

- Osserviamo che $\{0 \le X \le 1\} = \{X = 0\} \cup \{0 < X \le 1\}$, sono eventi incompatibili, quindi per additività $(1 \ge) \Pr(0 \le X \le 1) = \Pr(X=0) + \Pr(0 < X \le 1)$

$$= \Pr(X=0) + (1-0) \quad \text{(prop appena dimostrata)}$$
$$= \Pr(X=0) + 1 \ge 1$$

ottengo che $\Pr(0 \le X \le 1)$ è sia ≤ 1 che ≥ 1: non può essere che $= 1$

Ho dimostrato la 1): $\Pr(0 \le X \le 1) = 1$

- Se $x = 0$ $\quad \{X \le 0\} = \underbrace{\{X < 0\}}_{= \emptyset} \cup \{X = 0\}$

$$\underset{\text{ipotesi}}{0} = \Pr(X \le 0) = \Pr(X = 0) \qquad \text{quindi } \Pr(X=0) = 0$$

Se $x > 0$

la successione $x_n \uparrow x$ (converge ad x da sinistra)

osservo che $\{X = x\} \Rightarrow \{x_n < X \le x\}$ per la proprietà di monotonia:

$$0 \le \Pr(X = x) \le \Pr(x_n < X \le x) = x - x_n \xrightarrow{\text{se } n \to +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \Pr(X = x) = 0 \quad 2)$$

• Osservo che: $\{a \le x \le b\} = \{x = a\} \cup \{a < x \le b\}$

$$Pr(a \le x \le b) = \underbrace{Pr(x=a)}_{=0} + \underbrace{Pr(a < x \le b)}_{=b-a}$$

$Pr(a \le x \le b) = b - a$ che equivale alla proprietà 3).

Rivediamo lo stesso discorso a proposito di un intervallo arbitrario $[a;b]$.
Le proprietà sono:

1') $Pr(a \le x \le b) = 1$

2') $Pr(x = x) = 0 \quad \forall x \in [a;b]$

3') $Pr\left(a \le x \le a + \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{n}$

o in altri termini:

$$Pr\left(a + \frac{k}{n}(b-a) \le x \le a + \frac{k+1}{n}(b-a)\right) = \frac{1}{n}$$

La DISTRIBUZIONE UNIFORME in $[a;b]$ è:

$$P_r(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Questa probabilità, $P_r(X \leq x)$, la possiamo vedere come una funzione di x: $F(x)$

$$F(x) = P_r(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

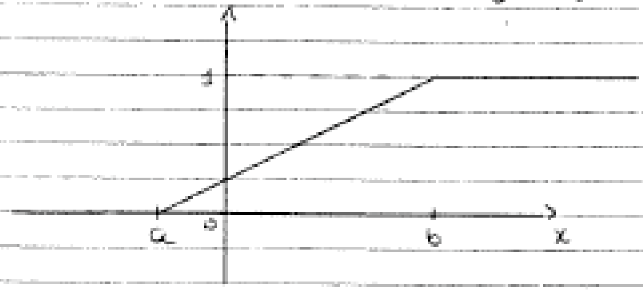
$[a;b]$ generico intervallo dell'asse reale

se $x \leq a$ $\quad P_r(X \leq x) = 0$

$\emptyset$

se $x > b$ $\quad P_r(X \leq x) = 1$

Ω



$F(x)$ è una funzione definita per ogni x

$$F(x) = P_r(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$ per le tre proprietà 1), 2), 3).

APPLICAZIONI

Vedremo ora che l'estrazione di un numero compreso tra 0 e 1 è un metodo di simulazione, utile per i computer, dei principali problemi di probabilità.

Chiamo X un numero estratto a caso in $[0;1]$;
a un numero reale maggiore o uguale a 0 $(a \geq 0)$;
e considero $[a]$, la parte intera del numero a (è il massimo numero $0,1,2,\dots$ minore od uguale ad a).

es: $0 \leq a < 1 \quad [a] = 0$
$1 \leq a < 2 \quad [a] = 1$

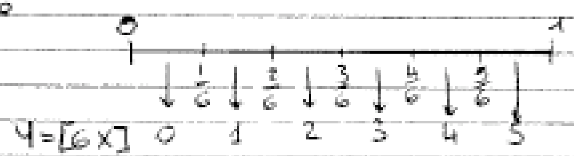
SIMULAZIONE DEL LANCIO DEL DADO

$n \leq a < n+1 \quad [a] = n$

$Y = [6X]$ è un numero che non conosciamo fino all'estrazione di X in $[0;1]$

so che $0 \leq X \leq 1 \quad / \cdot 6$

allora $0 \leq 6X \leq 6$



$$P_r(Y=h) = P_r([6X]=h) = P_r(h \leq 6X < h+1) = P_r\left(\frac{h}{6} \leq X < \frac{h+1}{6}\right) = \frac{h+1}{6} - \frac{h}{6} = \frac{1}{6}$$

$h = 0,\dots,5$ prop.

Ciascun evento ha probabilità $\frac{1}{6}$, come nel lancio del dado (per completezza dovrei considerare $[6X]+1$). Questo risulta utile per la simulazione negli algoritmi informatici (un computer non può lanciare un dado!).

SIMULAZIONE DEL LANCIO DI UNA MONETA EQUILIBRATA.

Mediante lo stesso ragionamento possiamo simulare il lancio di una moneta: uso

$$Y = [2X]$$

In generale, data una partizione di k casi simmetrica $\mathbb{P}$, $w_1, w_2, \dots, w_k$, considero l'evento $\boxed{Y = [kX]}$ e ottengo la probabilità

$$\boxed{Pr(Y = h) = \frac{1}{k} \quad h = 0, \dots, k-1}$$

es: i casi elementari in una roulette sono 37: $Y = [37X]$. La probabilità assegnabile a ciascun numero (da 1 a 37) è $\frac{1}{37}$.

es: Estrazione al lotto su una data ruota

α: PRIMA DELL'ESTRAZIONE, CHE AVVERRÀ SENZA TRUCCHI

Sia $\mathbb{P}$ la partizione delle cinquine ordinate $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$

Sia $\underline{X : (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) \to n_1}$ una funzione che ad ogni cinquina associa n_1
X = primo numero estratto

Sia $\underline{Y : (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) \to \max(n_1, \dots n_5)}$ Y = massimo numero estratto.

Sia $\mathbb{P}'$ la partizione delle cinquine non ordinate $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$

Sia $\mathcal{A}$ l'algebra degli eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}'$

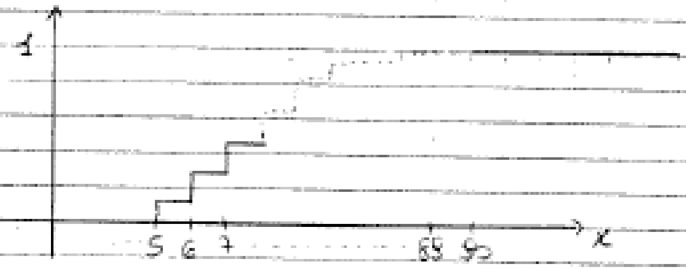
Ci chiediamo: appartengono ad $\mathcal{A}$ i seguenti eventi?

$\{X \le x\} \notin \mathcal{A}$: X è log. semidip. da $\mathcal{P}'$: se $n_1 \dots n_5 > x$ $\{X \le x\}$ V falso, se $n_1 \dots n_5 < x$ $\{X \le x\}$ V vero

altrimenti $\omega \wedge \{X \le x\} \neq \emptyset$

$\{Y \le x\} \in \mathcal{A}$: Y è log. dip da $\mathcal{P}'$ $\quad \omega \wedge \{X > x\} \neq \emptyset$

Allora posso valutare la probabilità $P_r(Y \le x)\ \forall x$



Se $x < 5$ $\quad P_r(Y \le 5) = 0$
la probabilità che il massimo numero estratto sia minore di 5 è 0 (caso limite: 1;2;3;4;5 il massimo è 5)

Se $x > 90$ $\quad P_r(Y \le 90) = 1$
L'evento certo è che venga estratto un numero inferiore a 90.

Qual è la probabilità che il massimo estratto sia minore di 6? Devo sommare i casi in cui il massimo è 5 con i casi in cui il massimo è 6.

$\{Y \le 6\} =$
12345 → max = 5
12346
12356 max = 6
13456
⋮

esiste una sola cinquina con massimo = 5
esistono $\binom{5}{4}$ cinquine con massimo = 6
→ tengo fisso il 6 e vario 1,2,3,4,5

Quindi: $P_r(Y \le 6) = \dfrac{1 + \binom{5}{4}}{\binom{90}{5}} = 1{,}37 \cdot 10^{-7}$

Allo stesso modo possiamo chiederci qual è la probabilità che esca un numero inferiore a 7, poi a 8, a 9 e così via. Il risultato è una FUNZIONE A GRADINI.

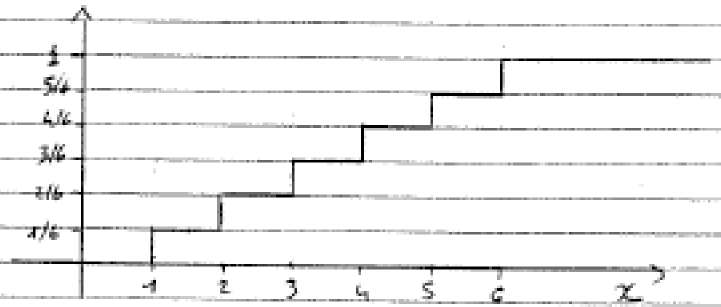
es: lancio di un dado

Considero la partizione $\mathbb{P}$ formata con i casi elementari $X=1$, $X=2$, $X=3$, $X=4$, $X=5$, $X=6$

$$F(x) = P_r(X \le x)$$

se $1 \le x < 2$ $\quad P_r(X \le x) = P_r(X=1) = \frac{1}{6}$

se $2 \le x < 3$ $\quad P_r(X \le x) = P_r(X < 3) = P_r(X=1) + P_r(X=2) = \frac{2}{6}$



Il problema sarebbe stato diverso se consideravo la partizione $\mathbb{P}\{\{X=1 \text{ o } X=2\}, \{X=3\}, \{X=4 \text{ o } X=5 \text{ o } X=6\}\}$

NUMERI ALEATORI E VARIABILI ALEATORIE

Sia $\mathbb{P}$ una partizione dell'evento certo e $\mathcal{A}$ un'algebra di eventi (logicamente dipendenti da $\mathbb{P}$). Sia P_r una probabilità numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$. Allora:

$X: \mathbb{P} \to \mathbb{R}$, applicazione che dalla partizione porta all'insieme dei numeri reali, è un NUMERO ALEATORIO. Esso è, cioè, un numero ben definito il cui valore non è da noi conosciuto per mancanza di informazione. Si tratta di una NOZIONE ASSOLUTA.

se $\forall x \in \mathbb{R}$ $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ (cioè a parole: se per ogni numero reale l'evento "il numero aleatorio X non supera questo numero x" *) allora X si chiama VARIABILE ALEATORIA. Essa dipende dall'algebra considerata, pertanto si tratta di una nozione relativa.

es: lancio del dado

*appartiene all'algebra

$\mathbb{P}$ $(m_1, \dots, m_5)$ $\mathbb{P}'$: $\{m_1, \dots, m_5\}$

$\mathcal{A}$: eventi logicamente dipendenti da $\mathbb{P}'$

X: "Primo numero estratto" $(\notin \mathcal{A}) \Rightarrow$ X è NUMERO ALEATORIO, ma non var. aleatoria perché $\{X \leq x\}$ è semidip. da $\mathbb{P}'$

Y: "Massimo numero estratto" $(\in \mathcal{A}) \Rightarrow$ Y è VARIABILE ALEATORIA perché $\{Y \leq x\}$ è dip da $\mathbb{P}'$.

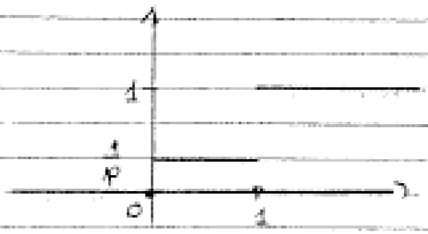
Ma se considerassi come algebra $\mathcal{A}'$: eventi log. dip. da $\mathbb{P}$, allora entrambe, X e Y, sono variabili aleatorie.

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

Considero una variabile aleatoria X (e d'ora in poi considereremo solo variabili aleatorie), chiamo FUNZIONE DI RIPARTIZIONE la funzione così definita:

$$F(x) = P_r(X \leq x) \qquad F: \mathbb{R} \to [0;1]$$

es: sia $X = |E|$ e $p = P_r(E)$



$$\{X \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{X = 0\} & 0 \leq x < 1 \\ \Omega & x \geq 1 \end{cases}$$

se $x \geq 0$ $|E| = 0$ $P_r(X = 0)$

$P_r(|E| = 0)$

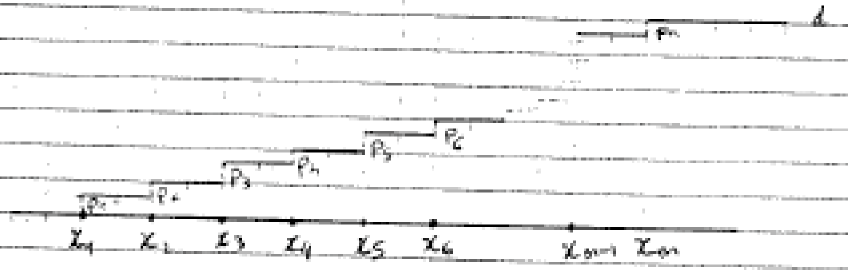
significa che E è falso, valuto la prob. $P_r(\bar{E}) = 1 - p$

es: $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$

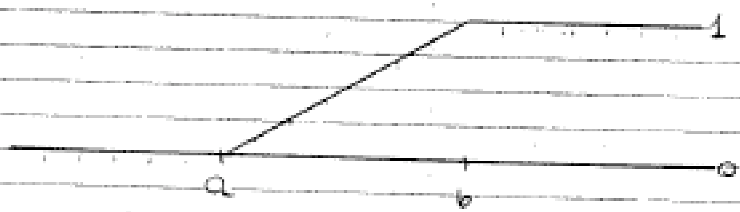
GENERALIZZAZIONE

$$\{X \le x\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x < x_1 \\ \{X = x_1\} & \text{se } x_1 \le x < x_2 \\ \{X = x_1\} \vee \{X = x_2\} & \text{se } x_2 \le x < x_3 \\ \vdots \\ \{X = x_1\} \vee \dots \vee \{X = x_{n-1}\} & \text{se } x_{n-1} \le x < x_n \\ \Omega & \text{se } x_n \le x \end{cases}$$

se indico con $p_i = P_r(X = x_i)$ $(i = 1, \dots, n)$, il grafico della funzione di ripartizione è il seguente:



es: funzione di ripartizione nell'estrazione a caso tra $[a, b]$



TEOREMA SULLE PROPRIETÀ DI $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$
2. se $x < x'$ allora $F(x) \leq F(x')$ è funzione monotona non decrescente
   infatti $\{X \leq x\} \rightarrow \{X \leq x'\}$ e per monotonia $\underbrace{Pr(X \leq x)}_{F(x)} \leq \underbrace{Pr(X \leq x')}_{F(x')}$
3. se $\{X \leq x\} = \emptyset$ allora $F(x) = 0$
4. se $\{X \leq x\} = \Omega$ allora $F(x) = 1$
5. $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

infatti: il limite esiste per il teorema sulle funzioni monotone, allora posso calcolare un suo limite subordinato e sapere che esso coincide col limite di partenza.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(-n)$$

so che $\{X \leq -1\} \supset \{X \leq -2\} \supset \{X \leq -3\} \supset \dots \supset \dots$ è una successione monotona non crescente di eventi. Abbiamo visto che:

se $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ allora $\lim_{n \to +\infty} Pr(E_n) = Pr\left(\bigcap_{n \geq 1} E_n\right)$ [1. continuità]

allora $\lim_{n \to +\infty} F(-n) = \lim_{n \to +\infty} Pr(X \leq -n) = Pr\left(\bigcap_{n \geq 1} \{X \leq -n\}\right) = Pr(\emptyset) = 0$

6. $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

infatti $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(n) = \lim_{n \to +\infty} Pr(X \leq n) = Pr(\bigvee_{n \geq 1} \{X \leq n\}) = Pr(\Omega) = 1$

$\{X \leq 1\} \to \{X \leq 2\} \to \dots$ perché: ed essendo $E_1 \to \dots$ $\exists \lim_{n \to +\infty} Pr(E_n) = Pr(\bigvee_{n \geq 1} E_n)$

7. $F(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} F(x) = Pr(X < x_0)$

Il limite esiste, posso calcolarne uno subordinato: $x_0 - \frac{1}{n} \uparrow x_0$

$\lim_{x \to x_0^-} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(x_0 - \frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} Pr(X \leq x_0 - \frac{1}{n}) \overset{*}{=} Pr(\bigvee_{n \geq 1} \{X \leq x_0 - \frac{1}{n}\}) \overset{⊛}{=} Pr(X < x_0)$

$*$ t. continuità della probabilità: perché $\{X \leq x_0 - 1\} \to \{X \leq x_0 - \frac{1}{2}\} \to \{X \leq x_0 - \frac{1}{3}\} \to \dots$

⊛ $\bigvee_{n \geq 1} \{X \leq x_0 - \frac{1}{n}\} = \{X < x_0\}$ (dev'essere vero almeno un evento del tipo $\{X \leq x_0 - \frac{1}{n}\}$ allora è vero anche $\{X < x_0\}$ che è implicato dal primo).

8. $F(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$: la funzione di ripartizione è CONTINUA A DESTRA

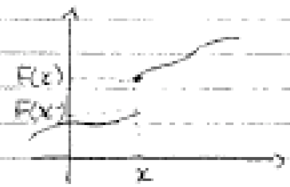
infatti: $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{n \to +\infty} F(x_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \to +\infty} Pr(X \leq x_0 + \frac{1}{n}) \overset{\star}{=} Pr(\bigwedge_{n \geq 1} \{X \leq x + \frac{1}{n}\}) =$

considero la successione $x_0 + \frac{1}{n} \downarrow x_0$ $\quad = Pr(X \leq x_0) = F(x_0)$

$\star$ t. continuità della probabilità: perché $\{X \leq x_0 + 1\} \leftarrow \{X \leq x_0 + \frac{1}{2}\} \leftarrow \{X \leq x_0 + \frac{1}{3}\}$

- La congiunzione è vera se tutti gli eventi sono veri

9. $F(x) - F(x^-) = P_r(X = x)$



osserviamo che:

$$\{X \le x\} = \{X < x\} \cup \{X = x\}$$

$$P_r(X \le x) = P_r(X < x) + P_r(X = x) \quad \text{additività}$$

$$F(x) = F(x^-) + P_r(X = x) \Rightarrow F(x) - F(x^-) = P_r(X = x)$$

- se x è punto di continuità $P_r(X = x) = 0$ perché $F(x) = F(x^-)$
- la funzione di ripartizione $F(x)$ può avere al massimo un numerabile di pti di discontinuità.

dim: i punti di disc. di $F(x)$ sono tali che $P_r(X = x)$ sia positiva. Essendo gli eventi $\{X = x\}$ a due a due incompatibili, solo un numerabile di essi può avere probabilità positiva (per proprietà già dimostrata).

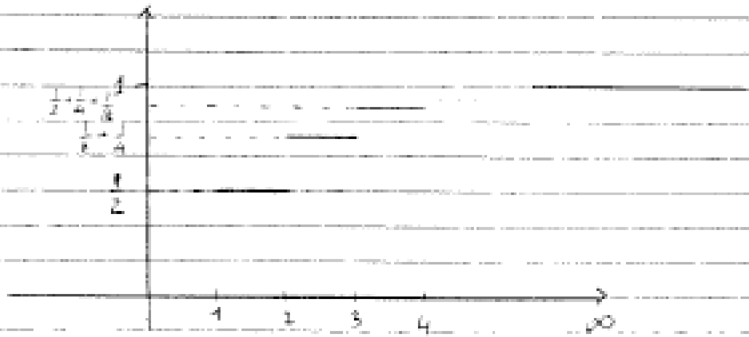
es: tempo di attesa nel lancio di una moneta equilibrata.

$\{T=n\} = T_n$ = esce per la prima volta testa nel lancio ennesimo

$\{T=+\infty\} = T_\infty$ = non esce mai testa

T = "tempo di attesa" è una variabile aleatoria.

$F(x)$:



$P_r(1 \le x < 2) = \frac{1}{2}$

$P_r(2 \le x < 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\{T \le x\}$ $P_r = \frac{1}{2^n}$

Se $X = \frac{1}{T}$ com'è il grafico di $F_X(x)$? $F(x) = P_r(X \le x) = P_r(\frac{1}{T} \le x) = P_r(1 \le xT) =$

$= P_r(T \ge \frac{1}{x})$

per risolvere il problema, dobbiamo introdurre le seguenti proprietà:

10. $Pr(X > x) = 1 - F(x)$

infatti: $\overline{\{X > x\}} = \{X \le x\}$

$Pr(\overline{\{X > x\}}) = Pr(X \le x) = F(x)$

$1 - Pr(X > x) = F(x)$ da cui $Pr(X > x) = 1 - F(x)$

11. $Pr(X \ge x) = 1 - F(x) + Pr(X = x)$

infatti: $\{X \ge x\} = \{X > x\} \cup \{X = x\}$

$Pr(X \ge x) = 1 - F(x) + Pr(X = x)$

se x è punto di continuità:

$Pr(X > x) = Pr(X \ge x)$

Ritornando all'esempio:

$F_X(x) = Pr\left(\frac{1}{T} \le x\right) = Pr\left(T \ge \frac{1}{x}\right) = 1 - F_T(x) + Pr(T = x)$

12. considero $a, b : a < b$

- $P_r(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$

$P_r(X \leq b) = P_r(X \leq a) + P_r(a < X \leq b)$

$F_X(b) - F_X(a) = P_r(a < X \leq b)$

- $P_r(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$

$\{a \leq X \leq b\} = \{a < X \leq b\} \cup \{X = a\}$

$P_r(a \leq X \leq b) = P_r(a < X \leq b) + P_r(X = a)$

$= F(b) - F(a) + F(a) - F(a^-)$

$= F(b) - F(a^-)$

- $P_r(a \leq X < b) = F(b^-) - F(a^-)$

$\{a \leq X \leq b\} = \{a \leq X < b\} \cup \{b = X\}$

$\cancel{F(b)} - F(a^-) = P_r(a \leq X < b) + \cancel{F(b)} - F(b^-)$

$F(b^-) - F(a^-) = P_r(a \leq X < b)$

- $Pr(a < x < b) = F(b^-) - F(a)$

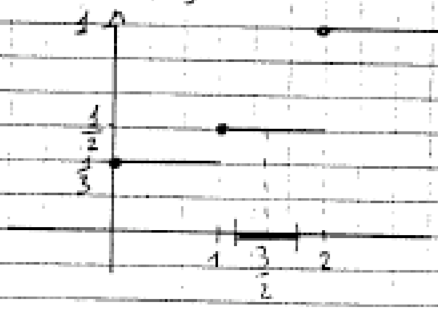
$$\{a \le x \le b\} = \{a < x < b\} \cup \{x = a\} \cup \{x = b\}$$

$$F(\cancel{b}) - F(a^-) = Pr(a < x < b) + F(a) - \cancel{F(a^-)} + \cancel{F(b)} - F(b^-)$$

$$F(b^-) - F(a) = Pr(a < x < b)$$

Se a e b sono pti di continuità della F_x allora tutte le precedenti probabilità sono uguali.

es: Data la seguente funzione di ripartizione, determinare la probabilità $Pr(0 < x < \frac{3}{2})$



$Pr(x=0) = \frac{1}{3}$

$Pr(x=1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$Pr(x=2) = \frac{1}{2}$

$$Pr(a < x < b) = F(b^-) - F(a)$$

$F(0) = \frac{1}{3}$ $\quad F(\frac{3}{2}^-) = \frac{1}{2}$ $\quad Pr(0 < x < \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 6$

$Pr(0 \le x \le \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Ma se scelgo un intervallo come quello segnato in rosso, la probabilità è $= 0$.

13. Sia X una var. aleatoria, sia F_X funzione crescente $(x < x' \Rightarrow F(x) < F(x'))$

Sia $Y = F_X(X) = F_X \circ X$

$F_Y(x) = P_r(Y \leq x) = P_r(F_X(X) \leq x) \underset{*}{=} P_r(X \leq F_X^{-1}(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$

* è crescente $\Rightarrow$ è invertibile
l'inversa di una crescente
è ancora crescente

$F_Y(x) = x \qquad \forall [0;1]$

F_Y è la ripartizione della distribuzione uniforme in $[0;1]$, ovvero della scelta a caso di un numero reale di $[0;1]$.
Spesso per simulare una variabile casuale X, con i dispositivi informatici, si usa, se F_X è crescente, la notazione $X = F_X^{-1}(Y)$.

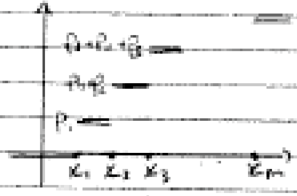
RIASSUNTO

Se una variabile aleatoria X ha possibile numero di valori

- FINITO $x_1, \dots, x_n$, dati n numeri positivi di somma 1 ($p_1, \dots, p_n \geq 0$, $p_1 + \dots + p_n = 1$) ad essi:

$$P_r(X \in A) = \sum_{i \in \{i : x_i \in A\}} p_i \qquad \text{con } A \subset \mathbb{R} \text{ e } p_i = P_r(X = x_i)$$

LEGGE PROBABILISTICA DELLE VARIABILI ALEATORIE



- NUMERABILE $x_1, \dots, x_n, \dots$, data una successione di numeri $p_1, \dots, p_n, \dots \geq 0$, $\sum_{n \geq 1} p_n = 1$ ad essi

$$P_r(X \in A) = \sum_{i \in \{i : x_i \in A\}} p_i \qquad \text{con } p_i = P_r(X = x_i)$$ per la numerabile additività

- PIÙ CHE NUMERABILE: $F(x) = P_r(X \leq x)$

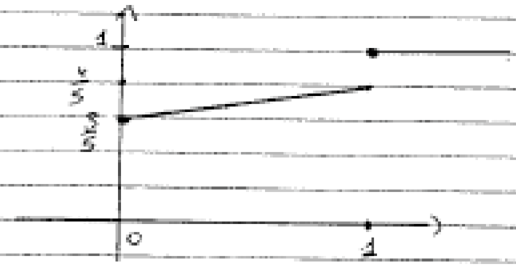
avremo probabilità del tipo $P_r(X = x)$ e $P_r(a < X < b)$

2 maggio 2007

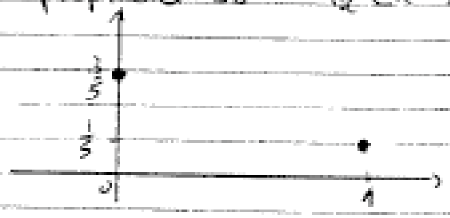
Sia X una variabile aleatoria che ha possibili valori in $[0;1]$.

Posto che $Pr(X \le x) = \frac{1}{5}(3+x^4)$ (se $0 \le x < 1$)

Tracciare il grafico di $F_X(x)$ e di $p(x) = Pr(X=x)$



per la proprietà 8: $Pr(X=x) = F(x) - F(x^-)$ del salto, pertanto p sarà così definita:



Determinare inoltre la $Pr(0<X<1)$ e $Pr(0 \le X \le 1)$. Per la proprietà 12:

$Pr(0<X<1) = F(1^-) - F(0) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

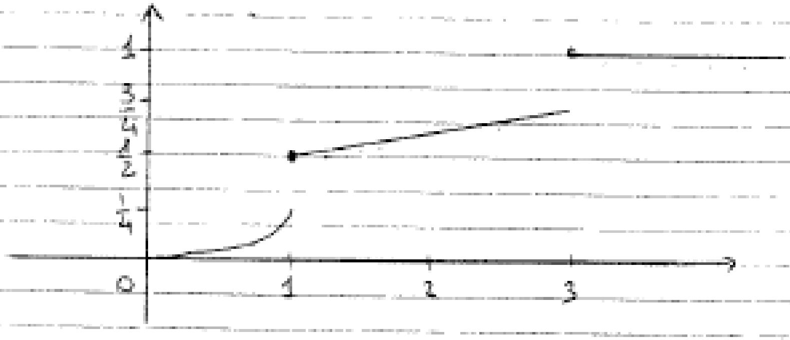
$Pr(0 \le X \le 1) = F(1) - F(0^-) = 1 - 0 = 1$

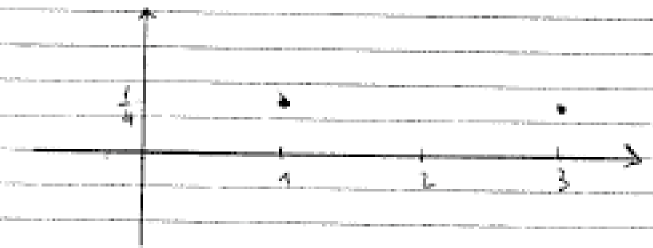
14 Febbraio 2007

Sia X una variabile aleatoria con possibili determinazioni in $[0;3]$

Posto che $Pr(X \le x) = F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{8}(x+3) & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$

Tracciare il grafico di $F(x)$ e di $\varphi(x) = Pr(X=x)$

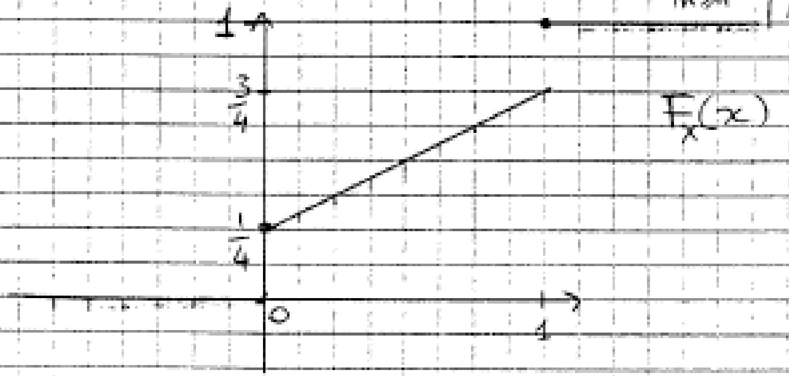




es: Sia X una variabile aleatoria

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{2x+1}{4} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Valutare la probabilità dell'evento $E = \bigcup_{n \ge 1} \left\{ \dfrac{1}{n+1} < X < \dfrac{1}{n} \right\}$



$F\left(\frac{1}{n}\right)$ perché è continua

Possiamo valutare $Pr(E)$ in due modi:

1) $$Pr\left(\bigvee_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{n+1} < X < \frac{1}{n}\right\}\right) = \sum_{n\geq 1} Pr\left(\frac{1}{n+1} < X < \frac{1}{n}\right) = Pr\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) + \sum_{n\geq 2}\left[F\left(\frac{1}{n}^-\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + \sum_{n\geq 2}\left[\frac{\frac{2}{n}+1}{4} - \frac{\frac{2}{n+1}+1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{n\geq 2}\left[\frac{2+n}{4n} - \frac{2+n+1}{4(n+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 2}\left[\frac{n+2}{n} - \frac{2+(n+1)}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 2}\left[1 + \frac{2}{n} - \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

è il limite della ridotta ennesima

$$\sum_{n\geq 2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

2) $\bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \right\} = \{ 0 < x < 1 \}$ $\quad P_r(0 < x < 1) = F(1^-) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

partizione dell'intervallo $[0;1]$

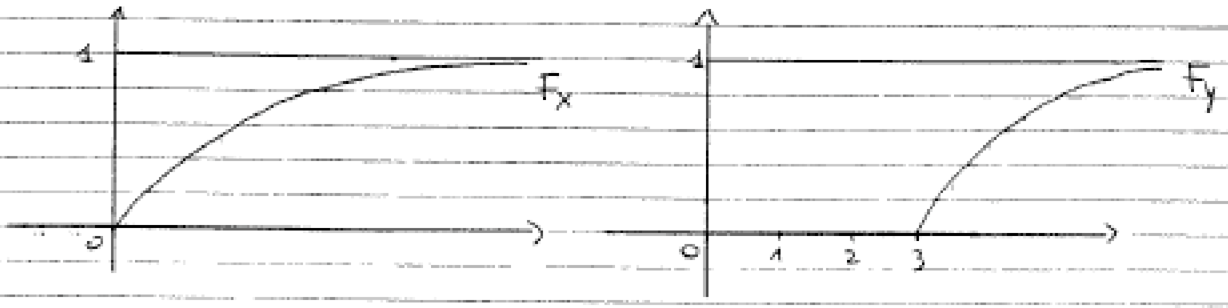
es: sia X una variabile aleatoria e $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

sia $Y = 4X + 3$

- Valutare la probabilità $P_r(1 \leq Y \leq 4)$
- Risolvere l'equazione $P_r(Y \geq x) \leq \frac{1}{e}$
  (trovare gli x per cui è vera)

Osservando la tipologia di probabilità richieste, vedo che mi serve $F_Y(x)$.

$F_Y(x) = P_r(Y \le x) = P_r(4X+3 \le x) = P_r\left(X \le \frac{x-3}{4}\right) = F_X\left(\frac{x-3}{4}\right)$



se $\frac{x-3}{4} < 0$ cioè se $x < 3$ allora $F_Y = 0$

se $x \geq 3$ allora $F_Y = 1 - e^{-2\frac{x-3}{4}}$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 3 \\ 1 - e^{-\frac{x-3}{2}} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$P_r(1 \le Y \le 4) \underset{\text{essendo continua}}{=} F_Y(4) - F_Y(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$

$P_r(Y \geq x) = 1 - F_Y(x)$ perchè $P_r(Y \geq x) = 1 - P_r(Y < x) = 1 - F_Y(x^-) \underset{\text{perchè cont.}}{=} 1 - F_Y(x)$

allora $P_r(Y \geq x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 3 \\ 1 - \left(1 - e^{-\frac{x-3}{2}}\right) & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

$$P_r(Y \geq x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 3 \\ e^{-\frac{x-3}{2}} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Escludo gli $x < 3$ perché $1 \leq \frac{1}{e}$ falso!

Dev'essere $x \geq 3$ $\quad e^{-\frac{x-3}{2}} \leq \frac{1}{e}$

$$e^{-\frac{x-3}{2}} \leq e^{-1}$$ è crescente quindi $\frac{x-3}{2} \geq 1$ $\boxed{x \geq 5}$

Gli $x \geq 5$ rendono vera la disuguaglianza $P_r(Y \geq X) \leq \frac{1}{e}$

es: sia X var. al. con determinazioni possibili tra i numeri naturali

Poniamo $P_r(X = n) = \frac{2}{3^{n+1}}$

$P_r(X=n)$ è una probabilità numerabilmente additiva?

data partizione $\omega_1, \dots, \omega_n, \dots$ / $p_1, \dots, p_n, \dots$ deve avvenire $\sum_{n \geq 1} p_n = 1$

prendo $\omega_n = \{X = n\}$, voglio vedere se $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^{n+1}} = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots + \underset{\downarrow\, 0}{\frac{2}{n}} \right] = 0 \quad \text{serie convergente} \to 0$$

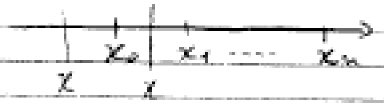
RICHIAMI DI ANALISI

- Sia f funzione continua. $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ ovvero $F'(x) = f(x)$

- Sia X una variabile aleatoria e $F(x) = P_r(X \leq x)$ sua funzione di ripartizione. Se $F(x)$ è derivabile con continuità (ha derivata prima continua), e chiamo f tale derivata, allora
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
è un altro modo di indicare la f di ripartizione

- Sia $f = F'$, derivata prima della f. di ripartizione, una funzione che ammette un numero finito di punti di discontinuità $(x_1, \dots, x_n)$

Se $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ posso individuare degli intervalli in cui f è continua:



$]-\infty; x_0[\, , \,]x_0; x_1[\, , \dots , \,]x_n; +\infty[$

se $x < x_0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

se $x_0 < x < x_1$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{x_0} f(t)dt}_{F(x_0) - F(-\infty)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}_{F(x) - F(x_0)}$ perché continua

$= \cancel{F(x_0)} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{F(-\infty)} + F(x) - \cancel{F(x_0)} = F(x)$

Quindi, nonostante che ci siano dei punti di discontinuità, è ancora possibile calcolare l'integrale della funzione di ripartizione. La condizione è che la derivata f abbia un numero finito di punti di discontinuità.

Essendo F non decrescente, la $f \geq 0$. Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \underset{\text{è dimostrato}}{\underset{\downarrow}{F(+\infty)}} = 1$$

Riassumendo: Sia X variabile aleatoria e $F(x) = Pr(X < x)$ derivabile con continuità a meno di un insieme finito di punti di discontinuità. Posto che $F' = f$, risulta $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ e $f \geq 0$, quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Considero l'incremento Δx della variabile x:

t. media integrale

$$Pr(x < X \le x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt \overset{!}{=} \underset{x<\xi<x+\Delta x}{f(\xi)(x+\Delta x-x)}$$

$$= f(\xi)\Delta x = f(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

$$f(\xi) = f(x) + \underbrace{\varepsilon(\Delta x)}_{\text{infinitesimo}} \qquad \text{se } \Delta x \to 0 \quad \varepsilon(\Delta x) \to 0$$

Se Δx è 'piccolo': $Pr(x < X \le x+\Delta x) \approx f(x)\Delta x$

$$\boxed{\frac{Pr(x < X \le x+\Delta x)}{\Delta x} \approx f(x)} \rightarrow$$ VARIAZIONE PERCENTUALE DELLA PROBABILITÀ RELATIVAMENTE ALL'INCREMENTO

Spesso risulta più facile determinare $f(x)$ piuttosto che $F(x)$: risulta comunque un'informazione importante perché ci dice come varia la probabilità localmente.

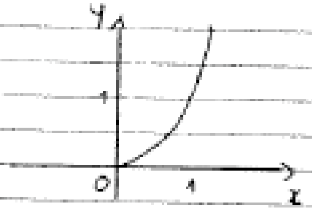
FUNZIONE DI DENSITÀ DI X

Sia X una variabile aleatoria <u>assolutamente continua</u>. Se esiste una funzione $f \geq 0$ tale che la funzione di ripartizione si possa scrivere come:
allora f prende il nome di FUNZIONE DI DENSITÀ DI X.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (F(x) \text{ continua})$$

es: $f(x) = x^2 \quad [0;1]$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^2 dt$$

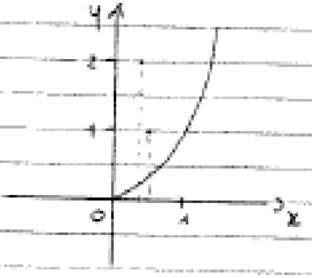


$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

↓

suddivido $g(x)$ in tre intervalli

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \\ 2 & x = \frac{1}{3} \end{cases}$$



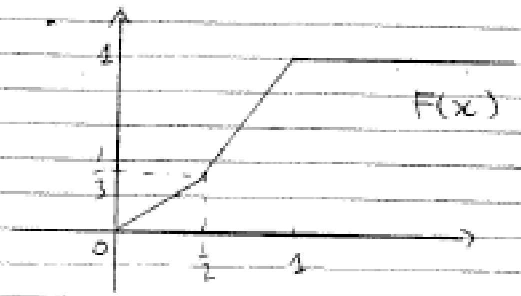
☆ Se altero una funzione in un numero finito di punti il suo integrale non cambia.
Allora data una funzione di ripartizione posso avere più di una funzione di densità.
Scelta una f, la altero in un numero finito di punti, l'equazione seguente è ancora vera.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

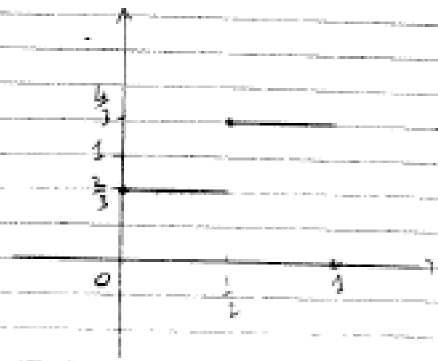
Non si parla DELLA funzione di densità, ma di UNA funzione di densità.

es: sia X v.a.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 1 \\ 2/3\, x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{4x-1}{3} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



disegnare la funzione di densità

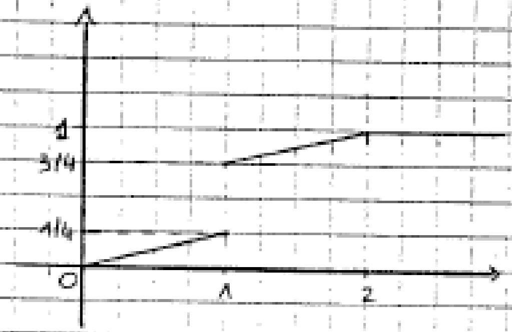


Se la disegnassi continua a sinistra avrei un'altra funzione di densità.

ESERCIZI 19/06/07

- Sia X una v.a. con possibili determinazioni in [0;2].
- $Pr(x=1) = \frac{1}{2}$ (è il salto della funzione nel punto)
- Il resto della probabilità ($\frac{1}{2}$) è distribuito uniformemente nell'intervallo dato.

★ Tracciare il grafico di $F_X(x)$ e stabilire qual è la prob. $Pr(X<1)$ e $Pr(X>1)$



$$\int_0^2 k\,dt = 2k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}x & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & 1 \le x < 2 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

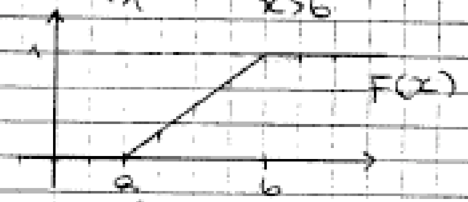
$Pr(x<1) = F(1^-) = \frac{1}{4}$

$Pr(x>1) = 1 - Pr(x<1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

DISTRIBUZIONE UNIFORME DI PROBABILITÀ

X v.a. con determinazioni in [a;b]

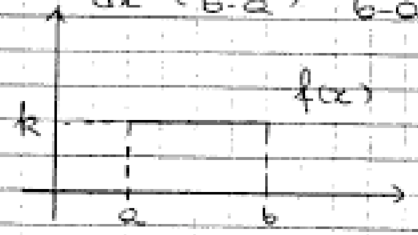
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ k = \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$k = \dfrac{1}{b-a}$ perchè $\dfrac{x-a}{b-a} = \int_a^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) = \dfrac{1}{b-a}$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

$\boxed{29/01/2007}$

• Sia X v.a. con possibili determinazioni in [0,2]

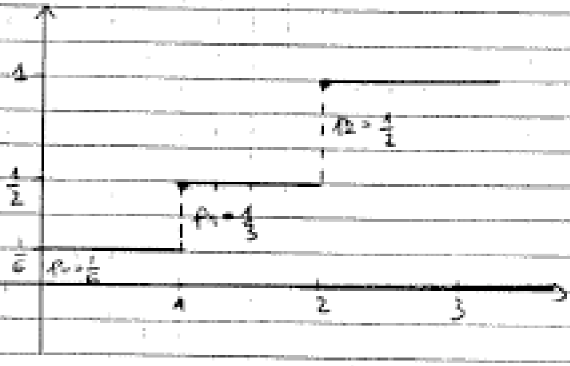
★ Tracciare $F_X(x)$ nei seguenti casi:

a) X ha valori concentrati nei punti 0,1,2 con probabilità proporzionali a 1,2,3

chiamo $p_i = Pr(X=i)$ $i=0,1,2$ $\qquad p_1 = 2p_0$, $p_2 = 3p_0$

$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \qquad p_0 + 2p_0 + 3p_0 = 1 \qquad 6p_0 = 1$

$p_0 = \frac{1}{6} \qquad p_1 = \frac{1}{3} \qquad p_2 = \frac{1}{2}$



6) X è diffuso su $[0;2]$ con densità proporzionale alla funzione $g(x) = x^2$

Quindi X ha funzione di densità f:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x f(t)\,dt & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

per $0 \le x < 2$ $\quad f(x) = k\, g(x) \quad (k>0)$

$$f(x) = k x^2$$

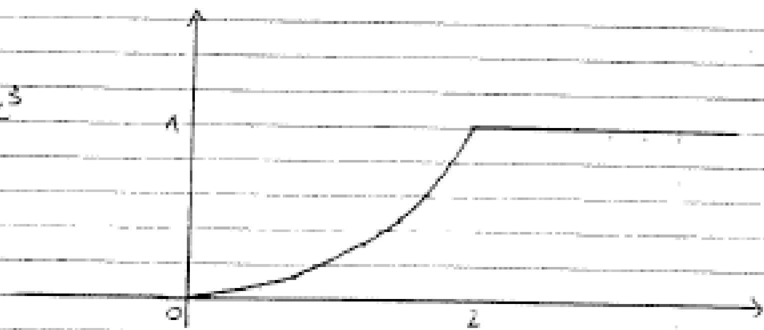
$$F(x) = \int_0^x k t^2\,dt = k \int_0^x t^2\,dt$$

$$1 = F(2) = k\int_0^2 t^2\,dt = k \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8k}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

$f(x) = \frac{3}{8} x^2$ per $0 \le x < 2$

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{8} t^2\,dt = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{3} t^3\right]_0^x = \frac{1}{8} x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{8} x^3 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



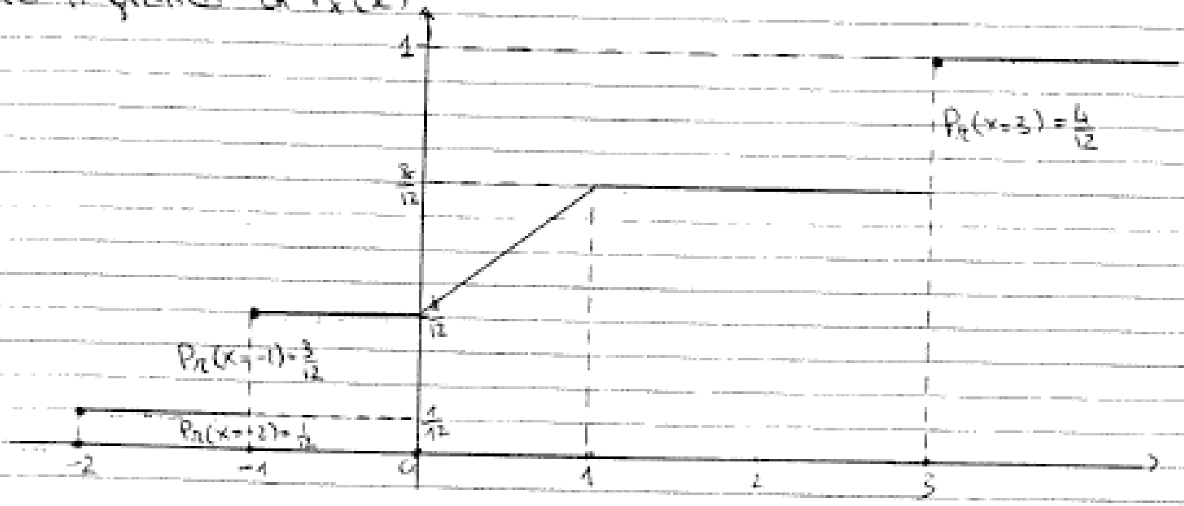
$\boxed{11/08/06}$

X v.a. con possibili determinazioni $-2, -1, [0,1], 3$

$P_r(X=-2) = \frac{1}{12}$ $\quad P_r(X=-1) = \frac{3}{12}$ $\quad P_r(X=3) = \frac{4}{12}$

Il resto della probabilità è distribuito uniformemente in $[0,1]$.

Tracciare il grafico di $F_x(x)$.



Il resto delle probabilità è $1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12}\right) = \frac{1}{3}$

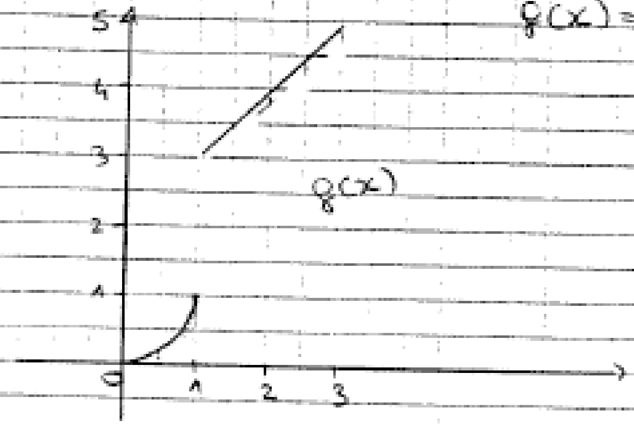
$$\int_0^1 k\,dt = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 1/12 & -2 \le x < -1 \\ 1/3 & -1 \le x < 0 \\ 1/3 + 1/3\,x & 0 \le x < 1 \\ 2/3 & 1 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

06/06/05

Sia X una var. al. con possibili determinazioni in [0;3]. Sia f, sua funzione di densità, proporzionale alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ x+2 & 1 < x < 3 \end{cases}$$



* Tracciare la funzione $F_X(x)$

$f(x) = k\, g(x)$

$$1 = F(3) = \int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^3 k\,g(t)\,dt = k\int_0^3 g(t)\,dt \qquad k = \frac{1}{\int_0^3 g(t)\,dt}$$

$$\int_0^3 g(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^3 (t+2)\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} + 2t\right]_1^3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{2} + 6 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{25}{3}$$

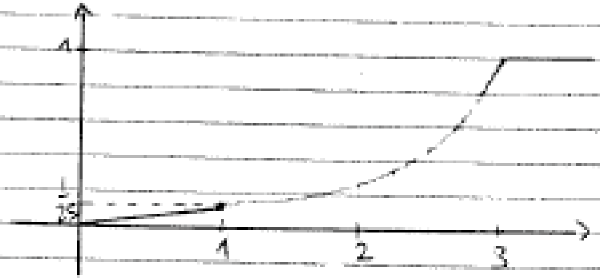
$k = \frac{3}{25}$

$$f(x) = \frac{3}{25}\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ x+2 & 1\le x\le 3 \\ 0 & x>3 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{3}{25}\int_0^x t^2\,dt & 0\le x<1 \\ \frac{3}{25}\left(\int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x (t+2)\,dt\right) & 1\le x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

$0 \le x < 1 \qquad F(x) = \frac{3}{25}\int_0^x t^2\,dt = \frac{3}{25}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{1}{25}x$

$1 \le x < 3 \qquad F(x) = \frac{3}{25}\left(\int_0^1 t^2\,dt + \int_1^x (t+2)\,dt\right) = \frac{3}{25}\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} + 2t\right]_1^x\right) =$

$$= \frac{3}{25}\left(\frac{1}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{3}{50}x^2 + \frac{6}{25}x - \frac{13}{6}$$



☆ Tracciare il grafico di $F_Y(x)$ con Y v.a. $Y = e^{X+1}+1$

$F_Y(x) = P_r(Y \le x) = P_r(e^{X+1}+1 \le x) = P_r(e^{X+1} \le x-1)$

$\{e^{X+1} \le x-1\} = \begin{cases} \emptyset & x \le 1 \\ \{X+1 \le \ln(x-1)\} & x>1 \end{cases}$

$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ P_r(X \le \ln(x-1)-1) & \text{se } x>1 \end{cases}$

$= F_X(\ln(x-1)-1)$

$\ln(x-1)-1<0$

$\ln(x-1)<1$

$0<x-1<e$

$1<x<e+1$

$\overset{\uparrow}{3}$

$\underbrace{0 \le \ln(x-1)-1}<1$

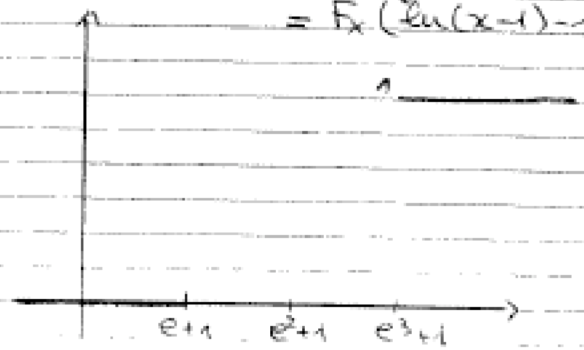
ricado in

$F_X(x)$

in $1<x<3$

$\ln(x-1)<2$

$x-1<e^2$



$\boxed{14/01/05}$

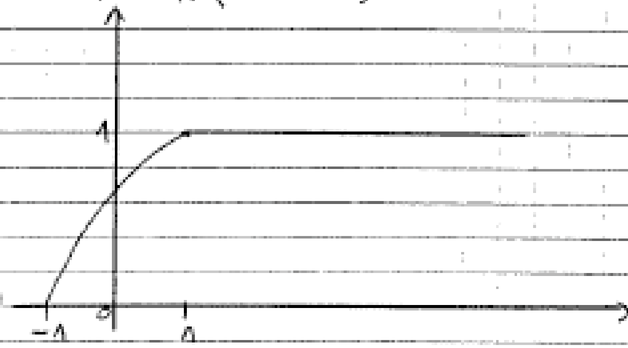
Sia X una v.a. con possibili determinazioni in $[-1;1]$ e con densità proporzionale alla $g(x) = 6 - x$ determinare la $F_Y(x)$ con $Y = X^3+1$

$$f(x) = k\,g(x) \qquad k = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(6-t)\,dt} = \frac{1}{12} \qquad \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 6 - \frac{1}{2} + 6 + \frac{1}{2} = 12$$

$$f(x) = \frac{1}{12} \cdot \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 6 - x & -1 \le x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = P_r(X^3 + 1 \le x) = P_r(X^3 \le x - 1) = P_r(X \le (x-1)^{\frac{1}{3}}) = F_X((x-1)^{\frac{1}{3}})$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{12}\int_{-1}^{x}(6-t)\,dt & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



con $-1 \le x < 1$ $\quad F_X(x) = \frac{1}{12}\left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{13}{24}$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x-1)^{\frac{1}{3}} < -1 \quad \text{cioè se } x < 0 \\ \frac{1}{12}\left(6(x-1)^{\frac{1}{3}} - \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{13}{2}\right) & \text{se } -1 \le (x-1)^{\frac{1}{3}} < 1 \quad \text{cioè se } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{se } (x-1)^{\frac{1}{3}} \ge 1 \quad \text{cioè se } x \ge 2 \end{cases}$$

SCHEMA DELLA SCOMMESSA PER LE VARIABILI ALEATORIE

Abbiamo visto come una probabilità può essere vista come prezzo equo da pagare per l'indicatore dell'evento stesso.

$$Pr(E) \text{ come prezzo equo di } |E| = \begin{cases} 1 & E \text{ vero} \\ 0 & E \text{ falso} \end{cases}$$

Abbiamo chiamato G il guadagno:

$$G = \sum_{i=1}^{n} S_i (|E_i| - p_i)$$

infine, abbiamo introdotto il PRINCIPIO DI EVITARE LA PERDITA (o VINCITA) CERTA:

$$\inf G \leq 0 \leq \sup G$$

★ Ora vogliamo stabilire qual è il prezzo equo per la variabile aleatoria X. ($E(X)$)

se p è il prezzo di X, $G = \begin{cases} X - p & \text{acquisto } p \\ p - X & \text{vendo } p \end{cases}$

$$G = S(X - p) \quad \text{dove } \begin{array}{l} S = 1 \text{ in caso di acquisto} \\ S = -1 \text{ in caso di vendita} \end{array}$$

Considero il seguente SISTEMA DI SCOMMESSE: $X_1, \dots, X_n$; $p_1, \dots, p_n$; $S_1, \dots, S_n$

il guadagno è $G = \sum_{i=1}^{n} S_i (X_i - p_i)$

è ancora valido il principio di evitare la perdita certa: $\inf G \leq 0 \leq \sup G$

Indico con $E(X)$ il prezzo equo di X:

PROPRIETÀ DI $E(X)$

1) Se X è il numero certo α, $E(X)=\alpha$

infatti $G = S\,(X - E(X))$

$G = S\,(\alpha - E(X))$ essendo un numero $\inf G = \sup G = G = 0 \Rightarrow E(X) = 0$

2) $\inf X \leq E(X) \leq \sup X$

$G = S(X - E(X))$ se $E(X) > \sup X$ $G = X - E(X) < 0$ se l'acquisto ho perdita certa

se $E(X) < \inf X$ $G = X - E(X) > 0$ se l'acquisto ho vincita certa

contro il principio di evitare la perdita certa.

3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ PRINCIPIO DI LINEARITÀ DEI PREZZI EQUI

X	Y	$X+Y$
p_1	p_2	p
S_1	S_2	S

$$G = S_1(X - p_1) + S_2(Y - p_2) + S(X+Y-p)$$

$$G = \underbrace{(S_1+S)X + (S_2+S)Y}_{\text{parte aleatoria}} - \underbrace{(p_1S_1 + p_2S_2 + pS)}_{\text{parte certa}}$$

pongo $S=1$ (acquisto $X+Y$) e $S_1 = S_2 = -1$ (vendo X e Y)

$$G = -(-p_1 - p_2 + p) \Rightarrow G = p_1 + p_2 - p$$

per evitare la perdita certa dev'essere $G=0$ quindi $p = p_1 + p_2$

es: $P_r(E \vee F) = E(|E| + |F|) = E(|E|) + E(|F|) = P_r(E) + P_r(F)$ con $E \wedge F = \emptyset$

4) $E(|F|) = P_r(F)$

5) $E(X) = x_1 P_r(X = x_1) + \dots + x_m P_r(X = x_m)$ con $x_1, \dots, x_m$ possibili determ. della v.a. X

indichiamo con $|X = x_i| = |\{X = x_i\}| \begin{cases} 1 & \{X = x_i\}\ V \\ 0 & \{X = x_i\}\ F \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} \{X = x_1\} \\ \{X = x_2\} \\ \vdots \\ \{X = x_m\} \end{matrix}\right) \rightarrow$ è partizione dell'evento certo $\rightarrow$ $X = x_1|X = x_1| + \dots + x_m|X = x_m|$

allora $E(X) \overset{3)}{=} x_1 E(|X = x_1|) + \dots + x_m E(|X = x_m|) \overset{4)}{=} x_1 P_r(X = x_1) + \dots + x_m P_r(X = x_m)$

es: nel lancio di un dado equilibrato, se X = numero che esce

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$ è il prezzo che mi evita la perdita certa.

6) supponiamo X assolutamente continua (= esiste funzione di densità : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ con $f \geq 0$)

si può dimostrare che $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

abbiamo visto che $f(x)dx \sim P_r(x < X < x + dx)$

e se $dx \to 0$ $f(x)dx \sim P_r(X = x)$, quindi la 6) diviene estensione della 5)

SPERANZA MATEMATICA della v.a. X

caso finito: X $x_1, \dots, x_n$

$$E(X) = x_1 \Pr(X = x_1) + \dots + x_n \Pr(X = x_n)$$

caso assolutamente continuo: f funzione di densità di X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

Caso numerabile: $X \geq 0$ (o $X \leq 0$) ⊛, possibili determinazioni di X: $x_1, \dots, x_n, \dots \geq 0$

$$E(X) = \sum_{n \geq 1} x_n \Pr(X = x_n)$$

——— . ———

(*) è la condizione necessaria affinché la serie sia permutabile; altrimenti:

$\sum_{n\geq 1} a_n = a_1 + \ldots + a_n + \ldots = \lim_{n\to+\infty} (a_1 + \ldots + a_n)$ con $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ di segno qualunque

considero la permutazione (scambio di posto) π dei numeri naturali.

$\sum_{n\geq 1} a_{\pi(n)} = a_{\pi(1)} + \ldots + a_{\pi(n)} + \ldots = \lim_{n\to+\infty} (a_{\pi(1)} + \ldots + a_{\pi(n)})$

i due limiti non sono necessariamente uguali: la serie potrebbe non essere permutabile se gli elementi $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ hanno segno qualunque. Ma se la serie dei termini positivi e quella dei termini negativi hanno somma finita, allora la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ è permutabile:

$a_1^+, a_2^+, \ldots, a_n^+, \ldots$ termini positivi della serie

$a_1^-, a_2^-, \ldots, a_n^-, \ldots$ termini negativi della serie

$\left.\begin{array}{l}\sum_{n\geq 1} a_n^+ \\ \sum_{n\geq 1} a_n^-\end{array}\right\}$ se hanno somma finita, allora $\sum_{n\geq 1} a_n$ è permutabile.

——— . ———

TEOREMA SULLE PROPRIETÀ DELLA SPERANZA MATEMATICA

1) Se X è un numero certo di valore α (cioè $X(\omega)=\alpha \ \forall \omega \in P$: assume su ogni costituente lo stesso valore $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$E(X)=\alpha$

2) $\inf X \leq E(X) \leq \sup X$ PROPRIETÀ DI INTERNALITÀ

3) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ PROPRIETÀ DI ADDITIVITÀ

4) $E(\alpha X)=\alpha E(X)$ PROPRIETÀ DI OMOGENEITÀ

5) $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$ PROPRIETÀ DI LINEARITÀ

6) se $X \geq 0$ allora $E(X) \geq 0$ PROPRIETÀ DI POSITIVITÀ (dalla 2))

7) sia g funzione continua e $Y=g(X)$ (trasformata di X)

caso finito $E(Y)=g(x_1)Pr(Y=g(x_1))+\ldots+g(x_m)Pr(Y=g(x_m))=$

$=g(x_1)Pr(X=x_1)+\ldots+g(x_m)Pr(X=x_m)$

caso numerabile: $E(Y)=\sum_{m \geq 1} g(x_m)Pr(X=x_m)$

caso assolutamente continuo: $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$

es: Sia X un numero estratto a caso (= distribuzione uniforme) dall'intervallo $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \left[\frac{1}{\pi} = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \right]$$

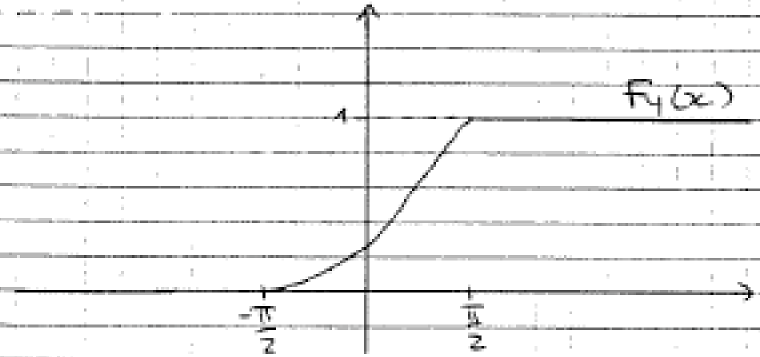
Si consideri la v.a Y, trasformata della precedente, tale che $Y = \operatorname{tg} X$

$$F_Y(x) = Pr(Y \leq x) = Pr(\operatorname{tg} X \leq x) = Pr(X \leq \operatorname{arctg} x) = F_X(\operatorname{arctg} x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{\pi}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f_Y(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}} \longrightarrow \text{DENSITÀ (o distribuzione) DI CAUCHY}$$

$$F_Y(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi} + \frac{1}{2}$$



$+\infty$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_Y(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b \frac{x}{\pi(x^2+1)}\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1}{2\pi}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_a^b=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{1+b^2}{1-a^2}=\lambda \quad \text{ma } \exists\,\lambda?$$

Se λ esiste, dovrebbe essere: $\forall \varepsilon>0,\ \exists\,\bar a,\bar b : \forall a\le\bar a,\ b\ge \bar b \quad \left|\frac{1+b^2}{1+a^2}-\lambda\right|<\varepsilon$

poniamo $b=2a$ poniamo $b=3a$

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{1+4a^2}{1+a^2}=4 \qquad\qquad \lim_{a\to-\infty}\frac{1+9a^2}{1+a^2}=9$$

sono due limiti subordinati diversi $\Rightarrow$ non esiste il limite generale $\Rightarrow \nexists\, E(Y)$!

potevo anche applicare la formula:

$$E(Y)=E(\operatorname{tg}x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\pi}\,dx=\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{a\to-\frac{\pi}{2}\\ b\to\frac{\pi}{2}}}\int_a^b\operatorname{tg}x\,dx\to\nexists$$

ES: LANCIO DI UNA MONETA EQUILIBRATA

$$X = \begin{cases} \text{ricevo } 2^n & \text{se esce testa per la prima volta al lancio ennesimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ci troviamo nel caso numerabile perchè X ha le seguenti determinazioni: $0, 2, 2^2, 2^3, \ldots$

Qual è la speranza matematica $E(x)$?

$$E(x) = \sum_{n \geq 1} 2^n \Pr(\underbrace{\text{esce testa per la prima volta al lancio } n}_{\{T=n\}})$$

$\{T=n\}$ (tempo di attesa)

$$= \sum_{n \geq 1} 2^n \underbrace{\Pr(T=n)}_{\frac{1}{2^n}}$$

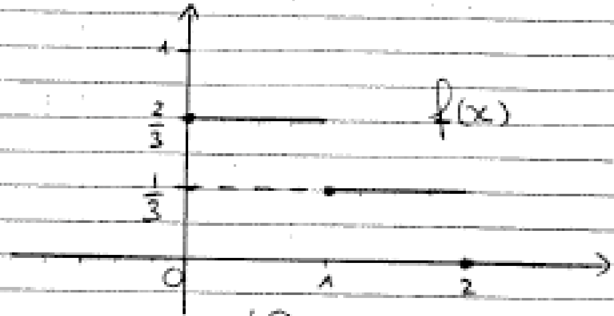
PARADOSSO DI SAN PIETROBURGO (BERNOULLI)

$$E(x) = 1 + 1 + 1 + \ldots + \ldots = +\infty$$

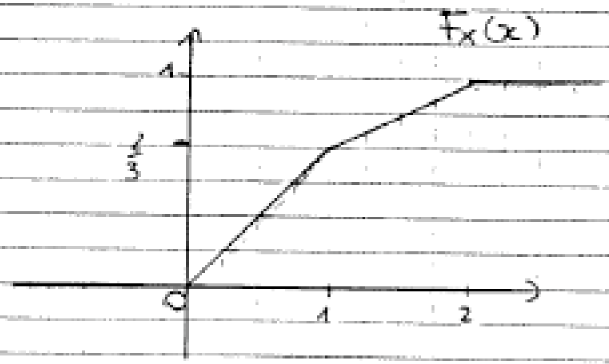
Ciò significa che dovrei pagare un prezzo enorme rispetto al mio capitale per poter partecipare alla scommessa.

es: X v.a. assolutamente continua con densità $f = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \le x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$

Stabilire qual è la $F_X(x)$ e la $E(X)$.



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{2}{3}\,dt = \frac{2}{3}x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \int_0^1 \frac{2}{3}\,dt + \int_1^x \frac{1}{3}\,dt = \frac{x+1}{3} & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^2 x f(x)\,dx = \int_0^1 x \frac{2}{3}\,dx + \int_1^2 x \frac{1}{3}\,dx = \left[\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}$$

a) $X = \begin{cases} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{cases}$ (Prob)

$$E(X) = (-1) P_r(X=-1) + 1 \cdot P_r(X=+1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Se acquisto la v.a. X ho la stessa probabilità di vincere che di perdere: se vinco mi danno 1 €, se perdo devo pagare 1 €. (Potrebbe riferirsi al lancio di una moneta).

b) $Y = \begin{cases} -1 \text{ miliardo} & \frac{1}{2} \\ 1 \text{ miliardo} & \frac{1}{2} \end{cases}$ (Prob) $\quad E(Y) = 0$

È la stessa situazione precedente, ma se vinco porto a casa un miliardo e se perdo devo restituire la stessa cifra.
Intuitivamente, è meglio comprare la v.a. X piuttosto che la Y. La differenza tra le due è che nel primo caso la vincita e la perdita sono molto vicini al valore $E(X)$, mentre nel secondo sono molto lontani.

Considero allora $(X - E(X))^2$ come distanza tra il vero valore di X (quanto riceverò) e la speranza matematica (quanto sono disposto a spendere).

c) $Z = \begin{cases} -1 \text{ miliardo} & \frac{1}{1000} \\ 1 \text{ miliardo} & \frac{999}{1000} \end{cases}$ (Prob.)

$$E(Z) = -1\text{miliardo} \cdot \frac{1}{1000} + 1\text{miliardo} \cdot \frac{999}{1000} = 1\text{miliardo} \cdot \frac{998}{1000}$$

$$(Z - E(Z))^2 = \begin{cases} \left(-1 \text{ miliardo} - 1\text{miliardo} \cdot \frac{998}{1000}\right)^2 & \frac{1}{1000} \\ \left(1 \text{ miliardo} - 1\text{miliardo} \cdot \frac{998}{1000}\right)^2 & \frac{999}{1000} \end{cases} \quad \text{(Prob)}$$

Osserviamo che non basta tener conto della differenza $[Z - E(Z)]^2$, perchè si nota facilmente che il caso b) è diverso dal caso c), allora bisogna inserire anche la probabilità con la quale gli eventi si verificano.

$$\boxed{Var(x) = E[(X - E(x))^2]} \begin{cases} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 P_r(X = x_i) & \text{caso discreto} \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)\,dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

abbiamo visto che $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$

nel nostro caso $g(x) = (x - E(x))^2$

$Var(x)$ è la VARIANZA della v.a. X: è un indice di DISPERSIONE che mostra quanto distano i valori di X dalla speranza matematica.
La speranza matematica è, invece, un INDICE DI POSIZIONE $(\inf x \leq E(x) \leq \sup x)$.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{P_r(X = x_i)}_{p_i}$$

$$E(x) = \frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + \ldots + p_n}$$ è la media aritmetica delle determ. $x_1 \ldots x_n$ ponderata in base alle probabilità.
$E(x)$ prende il nome di VALOR MEDIO.

$$Var(x) = \frac{(x_1 - E(x))^2 p_1 + \ldots + (x_n - E(x))^2 p_n}{p_1 + \ldots + p_n}$$

es:

$$X = \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \\ 1\,\text{miliardo} & 0 \ (\neq \phi) \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{cases}$$

$E(X) = E(Y)$
$Var(X) = Var(Y)$

Ricapitolando:

· X v.a. $E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \Pr(X = x_i) & x_1, \dots, x_n \text{ possibili determinazioni} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & f \text{ funz. di densità} \end{cases}$

- $\inf X \le E(X) \le \sup X$ propr. di internalità

poiché $E(X)$ può assumere valore infinito: $E(X) = \begin{cases} +\infty \\ \text{num. reale} \\ -\infty \end{cases}$, la proprietà di LINEARITÀ vale solo se le speranze mat. delle due v.a. sono finite.

- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$ se $E(X), E(Y)$ finiti
- se $X \le Y \Rightarrow E(X) \le E(Y)$ proprietà di monotonia

X v.a. con $E(X)$ finita: $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$

IPOTESI: $X \geq 0$, $a > 0$, $E(X)$ finita

TESI: $Pr(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$ e' significativa solo se $\dfrac{E(X)}{a} < 1$

DIM: considero l'evento $\{X \geq a\}$ e il suo indicatore $|\{X \geq a\}| \begin{cases} 1 & \text{se } \{X \geq a\} \text{ vero} \\ 0 & \text{se } \{X \geq a\} \text{ falso} \end{cases}$

$X \geq a \cdot |\{X \geq a\}|$ perché se $\{X \geq a\}$ F $X \geq 0$ vero per ipotesi

e se $\{X \geq a\}$ V $X \geq a$ vero per ipotesi

per monotonia di $E(X)$, $E(X) \geq E(a|\{X \geq a\}|) = a E(|\{X \geq a\}|) = a Pr(X \geq a)$

per linearità

essendo a positivo $\dfrac{E(X)}{a} \geq Pr(X \geq a)$

LA DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV

IPOTESI: $\varepsilon > 0$,

TESI: $Pr(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$ è significativa solo se $\frac{Var(X)}{\varepsilon^2} < 1$

DIM: $|X - E(X)| \geq \varepsilon$ è equivalente a $[X - E(X)]^2 \geq \varepsilon^2$

allora $\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} = \{[X - E(X)]^2 \geq \varepsilon^2\}$

$$Pr(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = Pr([X - E(X)]^2 \geq \varepsilon^2) \underset{\text{Borel}}{\leq} \frac{E([X - E(X)]^2)}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

TEOREMA

Se la varianza di una variabile aleatoria è uguale a zero, allora è aspettativa razionale che X sia un numero certo:

$$Var(X) = 0 \Rightarrow Pr(X = E(X)) = 1$$

DIM: $\forall \varepsilon > 0 \quad Pr(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = 0$ per Chebyshev se $Var(X) = 0$

$$Pr(|X - E(X)| < \varepsilon) = 1$$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad Pr(|X - E(X)| < \frac{1}{n}) = 1 \quad \forall n$ *

$E_n = \{|X - E(X)| < \frac{1}{n}\}$ $\quad E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n$ è successione non crescente di eventi

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} Pr(E_n) = Pr(\bigwedge_{n \geq 1} E_n)$ per il t. della continuità della probabilità

* allora $Pr(\bigwedge_{n \geq 1} \{|X - E(X)| < \frac{1}{n}\}) = 1$

ma $\bigwedge_{n \geq 1} \{|X - E(X)| < \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0}\}$ è vera se sono veri tutti gli eventi, cioè se $|X - E(X)| = 0$

$$\bigwedge_{n \geq 1} \{|X - E(X)| < \frac{1}{n}\} = \{|X - E(X)| = 0\}$$

$$\Rightarrow Pr(|X - E(X)| = 0) = 1$$

TEOREMA

Se la variabile aleatoria X è una costante (= numero certo) di valore k, allora $Var(X)=0$

dim: $E(X)=k \quad var(X)=E[(X-E(X))^2]=E[(k-k)^2]=E(0)=0$

PROPRIETA' DELLA VARIANZA $\quad Var(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 Pr(X=x_i)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx\end{cases}$

① $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$ se $E(X^2)$ finito

dim: $Var(X)=E[(X-E(X))^2]$

$=E[X^2-2\underbrace{E(X)}_{numero}X+\underbrace{E(X)^2}_{numero}]$

$=E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2$

$=E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$

② $Var(|F|)=Pr(F)\cdot Pr(\bar{F})$

dim: $Var(|F|)=E(|F|^2)-E(|F|)^2 \qquad |F|^2=|F|$

$=E(|F|)-E(|F|)^2 \qquad E(|F|)=Pr(F)$

$=Pr(F)-Pr(F)^2$

$=Pr(F)(1-Pr(F))$

$=Pr(F)Pr(\bar{F})$

③ $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$

dim $Var(\alpha X+\beta) = E\left\{\left[(\alpha X+\beta) - E(\alpha X+\beta)\right]^2\right\}$

$= E\left[\left(\alpha X + \cancel{\beta} - \alpha E(X) - E(\beta)\right)^2\right]$ $\cancel{\beta}$

$= E\left[\left(\alpha^2(X - E(X)\right)^2\right]$

$= \alpha^2 E\left[(X-E(X))^2\right] = \alpha^2 Var(X)$

④ $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$ se $E(X), E(Y)$ finite

dim: $Var(X+Y) = E\left\{\left[(X+Y) - E(X+Y)\right]^2\right\}$

$= E\left\{\left[X+Y - E(X) - E(Y)\right]^2\right\}$

$= E\left\{\left[(X-E(X)) + (Y-E(Y))\right]^2\right\}$

$= E\left\{\left[(X-E(X))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2\right]\right\}$

$= E\left[(X-E(X))^2\right] + 2E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] + E\left[(Y-E(Y))^2\right]$

$= Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]}_{\text{covarianza } Cov(X,Y)}$

$Var(X_1+X_2+X_3) = Var(X_1)+Var(X_2)+Var(X_3)+2\,cov(X_1,X_2)+2\,cov(X_1,X_3)+2\,cov(X_2;$

dim: $Var(X_1+X_2+X_3) = Var((X_1+X_2)+X_3) = Var(X_1+X_2)+Var(X_3)+2\,cov((X_1+X_2),X_3)$

$= Var(X_1)+Var(X_2)+2\,cov(X_1,X_2)+Var(X_3)+2\,cov((X_1+X_2),X_3)$

$$cov((X_1+X_2),X_3) = E\left[(X_1+X_2-E(X_1+X_2))(X_3-E(X_3))\right]$$

$$= E\left\{\left[(X_1-E(X_1))+(X_2-E(X_2))\right](X_3-E(X_3))\right\}$$

$$= E\left\{(X_1-E(X_1))(X_3-E(X_3))+(X_2-E(X_2))(X_3-E(X_3))\right\}$$

$$= E\left[(X_1-E(X_1))(X_3-E(X_3))\right]+E\left[(X_2-E(X_2))(X_3-E(X_3))\right]$$

$$cov(X_1+X_2,X_3) = cov(X_1,X_3)+cov(X_2,X_3)$$

$$Var(X_1+X_2+X_3) = Var(X_1)+Var(X_2)+Var(X_3)+2\left(cov(X_1,X_2)+cov(X_1,X_3)+cov(X_2,X_3)\right)$$

$$\Rightarrow Var(X_1+\ldots+X_n) = Var(X_1)+\ldots+Var(X_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i} cov(X_i;X_j)$$

COVARIANZA PROPRIETÀ

1• $\text{cov}(X+Y,Z) = \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,Z)$

2• $\text{cov}(\alpha X, Y) = \alpha\,\text{cov}(X,Y)$

dim: $\text{cov}(\alpha X, Y) = E\{[\alpha X - E(\alpha X)][Y - E(Y)]\}$

$= E\{\alpha(X-E(X))(Y-E(Y))\}$

$= \alpha\,\text{cov}(X,Y)$

3• $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$ $\Rightarrow$ 1'• $\text{cov}(X,Y+Z) = \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,Z)$

PROPR. DI BILINEARITÀ $\Rightarrow$ 2'• $\text{cov}(X,\beta Y) = \beta\,\text{cov}(X;Y)$

4• $\text{cov}(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta\,\text{cov}(X;Y)$

5• $\text{cov}(X,Y) = 0$ se X è num. certo di valore k $(X - E(X) = 0 \Rightarrow \text{cov}(X,Y) = 0)$

6• $\text{cov}(X,X) = \text{Var}(X)$

7• $\text{cov}(X;Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ con $E(XY)$ finita

dim: $\text{cov}(X;Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$

$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

X, Y si dicono NON CORRELATE se e solo se $\operatorname{cov}(X,Y)=0$

In questo caso $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$$

perché
$$\begin{aligned} Var(X-Y) &= Var(X+(-Y)) = Var(X) + Var(-Y) + 2\operatorname{cov}(X,-Y) \\ &= Var(X) + (-1)^2 Var(Y) - 2\operatorname{cov}(X,Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) \end{aligned}$$

$Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n)$ se $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0 \ \forall j,i \ (i \neq j)$

cioè se le v.a. sono a due a due non correlate.

es: $\text{cov}(|F|, |G|) = E\left[(|F| - E(|F|)) \cdot (|G| - E(|G|))\right]$

$$= E\left[(|F| - P_r(F)) \cdot (|G| - P_r(G))\right]$$

$$= E\left[|F| \cdot |G| - |F| P_r(G) - |G| P_r(F) + P_r(F) P_r(G)\right]$$

$$= E(|F| \cdot |G|) - P_r(F) P_r(G) - P_r(G) P_r(F) + P_r(F) P_r(G)$$

$$= E(|F| \cdot |G|) - P_r(F) P_r(G)$$

$$= E(|F \wedge G|) - P_r(F) P_r(G) = P_r(F \wedge G) - P_r(F) P_r(G)$$

ma potevo ottenere lo stesso risultato nel modo seguente:

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$\text{cov}(|F|, |G|) = E(|F| \cdot |G|) - P_r(F) P_r(G)$$

$$= P_r(F \wedge G) - P_r(F) P_r(G)$$

Intuitivamente se $\text{cov}(x,y) > 0$, $(x - E(x))(y - E(y)) \geq 0$: o sono entrambi positivi o sono entrambi negativi: le v.a. x e y sono correlate rispetto alle loro speranze matematiche

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

$$\boxed{COV(X,Y)^2 \leq Var(X)Var(Y)}$$

dim: $COV(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$

$Var(X) = E((X-E(X))^2) \qquad Var(Y) = E((Y-E(Y))^2)$

considero le variabili aleatorie $U = X-E(X)$ e $V = Y-E(Y)$

$COV(X,Y) = E(UV)$, $Var(X) = E(U^2)$, $Var(Y) = E(V^2)$

la tesi diventa: $E(UV)^2 \leq E(U^2)E(V^2)$ *

prendo un numero reale t arbitrario e considero la v.a. $(tU+V)^2$, di cui calcolo la speranza matematica $E[(tU+V)^2]$ che so essere ≥ 0: sviluppo:

$$0 \leq E[(tU+V)^2] = E[t^2U^2 + 2tUV + V^2] = t^2 E(U^2) + 2t E(UV) + E(V^2)$$

supponiamo che i termini sottolineati siano numeri reali, significa supporre $E(U^2), E(UV), E(V^2)$ finiti.

$$t^2 \underset{a}{E(U^2)} + 2t \underset{b}{E(UV)} + \underset{c}{E(V^2)} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$0 < at^2 + 2bt + c \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Updownarrow$

$\Delta \leq 0 \qquad b^2 - ac \leq 0 \Rightarrow E(UV)^2 - E(U^2)E(V^2) \leq 0$ è la tesi *

$\boxed{\text{CONSEGUENZA}}$

- se $Var(X)=0 \Rightarrow cov(X,Y)=0$ allora si può dire che, se $Var(X)=0$, X è un numero certo con pratica certezza, e che X non è correlato con nessun'altra variabile al.

  $\Updownarrow$

  $P_r(X=E(X))=1$

- $\dfrac{cov(X,Y)^2}{Var(X)Var(Y)} \leq 1$ $\quad \left[\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}\right]^2 \leq 1$ $\quad -1 \leq \rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \leq 1$

  deviazione standard

IL PROBLEMA DINAMICO DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Il problema dinamico si verifica quando, nel corso dell'analisi di un problema di tipo probabilistico, lo stato di informazione cambia, ovvero quando arrivano nuove informazioni.
Poniamoci nel caso di un lancio di un dado:

α stato di informazione

$\mathcal{L}$ famiglia delle proposizioni prese in considerazione (a, b, c, h)

$\mathbb{P}$: $w_1 = \{$esce 1$\}, \dots, w_6 = \{$esce 6$\}$

Considero gli eventi A, B, C, descritti dalle proposizioni a, b, c, logicamente dipendenti dalla partizione data:

A: "esce un numero divisibile per 3" $w_3 \vee w_6$ $A = [a]_\alpha$ (a)

B: "esce un numero primo" $w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_5$ $B = [b]_\alpha$ (b)

C: "esce un numero > 2" $w_3 \vee w_5 \vee w_4 \vee w_6$ $C = [c]_\alpha$ (c)

e considero poi l'evento H, descritto da h:

H: "esce un numero < 5" $w_1 \vee w_2 \vee w_3 \vee w_4$ $H = [h]_\alpha$ (h)

Supponiamo che arrivi l'informazione, in via ipotetica o reale, che H è vero ($\Leftrightarrow$ h vero)

Lo stato d'informazione passa da α a $\alpha \wedge h$. L'evoluzione dello stato di inform. mentre lascia inalterate le proporzioni, cambia gli eventi della partizione collegati.

$A|H = [a]_{\alpha\wedge h} \quad \vdash_{\alpha\wedge h} a \leftrightarrow$ "esce 3"

$B|H = [b]_{\alpha\wedge h} \quad \vdash_{\alpha\wedge h} b \leftrightarrow$ "esce 1" v "esce 2" v "esce 3"

$C|H = [c]_{\alpha\wedge h} \quad \vdash_{\alpha\wedge h} c \leftrightarrow$ "esce 3" v "esce 4"

$H|H = [h]_{\alpha\wedge h} \quad \vdash_{\alpha\wedge h} h \leftrightarrow (h \vee \bar{h})$ tautologia

$w_5|H = [\text{esce }5]_{\alpha\wedge h} \quad \vdash_{\alpha\wedge h}$ "esce 5" $\leftrightarrow (h \wedge \bar{h})$ contraddizione

$w_6|H = [\text{esce }6]_{\alpha\wedge h} \quad \vdash_{\alpha\wedge h}$ "esce 6" $\leftrightarrow (h \wedge \bar{h})$ contraddizione

Sono EVENTI CONDIZIONATI quelle classi di equivalenza rappresentate dalle proposizioni, che hanno descritto gli stessi eventi nello stato d'informazione precedente, nel nuovo stato di informazione $\alpha \wedge h$. Alcuni eventi possibili diventano certi (vedi H), altri possibili diventano impossibili (w_5, w_6), infine alcuni continuano ad essere possibili

α stato di informazione $\mathcal{L}$ famiglia di proposizioni

$E = [p]_\alpha = \{q \in \mathcal{L} : \vdash_\alpha q \Leftrightarrow p\}$ con $p \in \mathcal{L}$

$H = [h]_\alpha \neq \emptyset$ con $h \in \mathcal{L}$

Sia $\alpha \wedge h$ il nuovo stato d'informazione → dato, visto $P|_H : w_1|H, w_2|H,$

definisco EVENTO CONDIZIONATO E sub H l'evento:

$$E|H = [p]_{\alpha \wedge h} = \{q \in \mathcal{L} : \vdash_{\alpha \wedge h} q \Leftrightarrow p\}$$

OSSERVAZIONE

In α non c'è legame logico tra gli eventi: $A \wedge B = \emptyset$ $\bar{A} \wedge B = \emptyset$ $A \wedge \bar{B} = \emptyset$ $\bar{A} \wedge \bar{B} = \emptyset$

Invece in $\alpha \wedge h$ $A|H \rightarrow B|H$

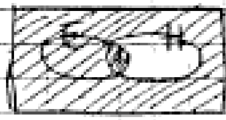
Ci sono legami logici che prima non c'erano: la nuova informazione permette di introdurre nuovi legami tra eventi, oltre che ridurre l'incertezza, diminuendo i costituenti della partizione

TEOREMA SULLE PROPRIETÀ DEGLI EVENTI CONDIZIONATI

1) $E|\Omega = E$

2) $H|H = \Omega|H$

3) $E|H = (E \wedge H)|H$

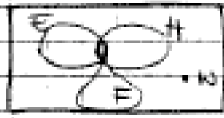


il nuovo evento certo è H, non conta più la parte di E che sta al di fuori di H.

4) $H \to E \Rightarrow E|H = H|H$

5) $H \to \bar{E} \Rightarrow E|H = \emptyset|H$

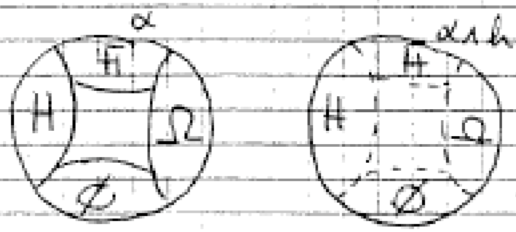
6) $\underbrace{E|H = F|H}_{\text{s di } \alpha \wedge h} \Longleftrightarrow \underbrace{E \wedge H = F \wedge H}_{\text{s di } \alpha}$



se $w|H = \emptyset|H$ $\quad w \not\to H$

7) $\bar{H}|H = \emptyset|H$

2), 7):



H si fonde con Ω
$\bar{H}$ si fonde con $\emptyset$

DIMOSTRAZIONE DELLA 6° PROPRIETÀ:

TESI ① $E|H = F|H \Rightarrow E\wedge H = F\wedge H$ con $E = [p]_\alpha$, $F = [q]_\alpha$, $H = [h]_\alpha$

$\vdash_{\alpha\wedge h} (p \leftrightarrow q) \Rightarrow \vdash_\alpha p\wedge h \leftrightarrow q\wedge h$

DIM α: suppongo $p\wedge h$ vero allora $\begin{cases} p \text{ vero} \\ h \text{ vero} \Rightarrow \alpha\wedge h \text{ VERO} \end{cases}$

se $\alpha\wedge h$ vero allora, per ipotesi, $p \leftrightarrow q$. Abbiamo detto che p vero, allora q vero. Ma anche h vero, quindi $q\wedge h$ vero!

TESI ② $\vdash_\alpha p\wedge h \leftrightarrow q\wedge h \Rightarrow \vdash_{\alpha\wedge h} (p \leftrightarrow q)$

α: suppongo $p\wedge h$ vero $\begin{cases} p \text{ vero} \\ h \text{ vero} \end{cases}$, per ipotesi allora $q\wedge h$ vero $\begin{cases} q \text{ vero} \\ h \text{ vero} \end{cases}$, segue $p \leftrightarrow q$ vero

PROBABILITÀ CONDIZIONATA: SCHEMA DELLA SCOMMESSA

α stato d'informazione

$\mathcal{P}$ partizione dell'evento certo

$\mathcal{A}$ l'algebra di eventi logicamente dipendenti da $\mathcal{P}$

Pr probabilità numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$

Voglio sapere qual è la probabilità condizionata di E sub H $Pr(E|H)$ con

$$E \in \mathcal{A}, \quad H \in \mathcal{A} \quad (H \neq \emptyset)$$

Associamo al concetto di probabilità il concetto di prezzo equo da pagare nell'acquisto dell'evento condizionato $E|H$

E 1 se E è vero

p 0 se E è falso

$$G = |E| - p \qquad G = S(|E| - p) \quad \text{con } S = \pm 1 \begin{cases} 1 & \text{se acquisto} \\ -1 & \text{se vendo} \end{cases}$$

Consideriamo una partita di calcio:

E = "A vince"

H = "alla fine del primo tempo A è in vantaggio"

Lo schema è: scommetto su A (scommetto che A vince) qualora sia in vantaggio alla fine del primo tempo. Se alla fine del primo tempo A sta perdendo, la scommessa viene annullata e mi viene restituita la mia puntata.

	VINCITA	
	1	E, H VERI
	0	E falso H vero
scommessa nulla	}	E vero H falso
	}	E falso H falso

$$G = \begin{cases} 1-p & E \wedge H \text{ vero} \\ -p & \bar{E} \wedge H \text{ vero} \\ 0 & H \text{ falso} \end{cases}$$

Al posto di associare ad S gli unici valori $+1, -1$, posso pensare ad S come un numero reale qualsiasi. Posso decidere di pagare pS anziché p per partecipare alla scommessa e aspettarmi di ricevere S in caso di vincita.

$E|H$

$p \rightarrow$ prezzo unitario

$S \rightarrow$ posta: numero reale qualsiasi

$$G = \begin{cases} S - pS = S(1-p) & \text{se } E \text{ vero } (|E|=1), H \text{ vero} \\ 0 - pS = -pS & \text{se } E \text{ falso } (|E|=0), H \text{ vero} \\ pS - pS = 0 & \text{se } H \text{ falso } (|H|=0) \end{cases}$$

Posso sintetizzare il sistema del guadagno nel modo seguente

$$G = S(|E| - p) \cdot |H|$$

Vediamo che il guadagno di un evento non condizionato non è altro che un caso particolare del precedente, perché possiamo vedere E come evento condizionato da Ω.

$$E = E|\Omega \qquad |\Omega| = 1 \qquad G = S(|E| - p)|\Omega| = S(|E| - p)$$

Ora ci chiediamo qual è il prezzo equo della scommessa relativa all'evento condizionato E|H. Prendiamo in considerazione il seguente sistema di scommesse:

$E \wedge H$	H	$E\|H$
p	p'	p''
S	S'	S''

$$G = S(|E \wedge H| - p) + S'(|H| - p') + S''(|E| - p'')|H|$$

$$= S|E \wedge H| - pS + S'|H| - p'S' + S''|E||H| - p''S''|H| \qquad \text{con } |E| \cdot |H| = |E \wedge H|$$

$$= \underbrace{(S + S'')(|E \wedge H|) + (S' - p''S'')|H|}_{\text{PARTE ALEATORIA}} - \underbrace{(pS + p'S')}_{\text{PARTE CERTA}}$$

Ricordando il principio di evitare la perdita certa ($\inf G < 0 < \sup G$), mandiamo a zero la parte aleatoria del guadagno, ponendo $S = 1$, $S'' = -1$, $S' = -p''$:

$$G = -(p - p'p'') = 0 \qquad p = p'p''$$

$\boxed{P_r(E \wedge H) = P_r(H) \cdot P_r(E|H)}$ è CONDIZIONE NECESSARIA PER EVITARE LA PERDITA CERTA

Se $Pr(H) > 0$ $\quad Pr(E|H) = \frac{Pr(E \wedge H)}{Pr(H)}$

Se $Pr(H) = 0$ anche $Pr(E \wedge H) = 0$, perché $E \wedge H \to H$ e quindi $Pr(E \wedge H) \leq Pr(H)$,

$\Rightarrow$ non posso dire nulla su $Pr(E|H)$

Supponiamo che $Pr(H) > 0$; si chiama PROBABILITÀ CONDIZIONATA di un evento E ($\in \mathcal{A}$) dato H ($\in \mathcal{A}$, $\neq \emptyset$) il numero $\frac{Pr(E \wedge H)}{Pr(H)}$

$$\boxed{Pr(E|H) = \frac{Pr(E \wedge H)}{Pr(H)}}$$

Non interviene solo un fatto oggettivo, ovvero che H sia vero o falso, ma anche un fatto soggettivo, che spinge l'individuo a ritenere che l'evento H abbia probabilità positiva.

TEOREMA (proprietà probabilità condizionata)

1) $\mathcal{A} \to [0;1]$

$E \to P_r(E|H)$ applicazione

allora $P_r(\cdot|H)$ è una probabilità numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$

DIM: voglio provare che a) $P_r(\Omega|H) = 1$

b) $P_r(\bigvee_{m\geq 1} E_m|H) = \sum_{m\geq 1} P_r(E_m|H)$ $\quad E_j \wedge E_i = \emptyset \ (i \neq j)$

a) $P_r(\Omega|H) = \dfrac{P_r(\Omega \wedge H)}{P_r(H)} = \dfrac{P_r(H)}{P_r(H)} = 1$

b) $P_r(\bigvee_{m\geq 1} E_m|H) = \dfrac{P_r((\bigvee_{m\geq 1} E_m) \wedge H)}{P_r(H)} = \dfrac{P_r(\bigvee_{m\geq 1} (E_m \wedge H))}{P_r(H)} \overset{*}{=}$

disgiunzione di eventi a due a due incompatibili

$(E_i \wedge H) \wedge (E_j \wedge H) = (E_i \wedge E_j) \wedge H = \emptyset \quad i \neq j$

$\overset{*}{=} \dfrac{\sum_{m\geq 1} P_r(E_m \wedge H)}{P_r(H)} = \sum_{m\geq 1} \dfrac{P_r(E_m \wedge H)}{P_r(H)} = \sum_{m\geq 1} P_r(E_m|H)$

2) $Pr(H|H) = 1$

$H|H = \Omega|H$ ma $Pr(\Omega|H) = 1$ perché $\frac{Pr(\Omega \wedge H)}{Pr(H)} = 1$ quindi $Pr(H|H) = 1$

Infatti $\frac{Pr(H \wedge H)}{Pr(H)} = \frac{Pr(H)}{Pr(H)} = 1$

3) se $H \to E$ allora $Pr(E|H) = 1$

se $H \to E$, $E|H = \Omega|H$. allora $Pr(E|H) = 1$

Infatti, per la monotonia della probabilità:

$$1 = Pr(H|H) \leq Pr(E|H) \quad \Rightarrow Pr(E|H) = 1$$

4) se $H \to \bar{E}$ allora $Pr(E|H) = 0$

5) $Pr(E|H) = Pr(E \wedge H|H)$

avevamo visto che $E|H = E \wedge H|H$

Partiamo da un esempio: consideriamo due urne contenenti palline bianche e nere nel modo seguente:

A
B	3
N	7

B
B	6
N	24

Supponiamo che ogni pallina abbia la stessa probabilità di uscire.

E = "esce una pallina bianca"

$$Pr(E) = \begin{cases} \frac{3}{10} & \text{in } A \\ \frac{1}{5} & \text{in } B \end{cases}$$

Pensiamo ora di estrarre, per prima cosa, l'urna con un meccanismo di sorteggio che dà probabilità $\frac{2}{3}$ all'urna A. Ci chiediamo quale sia la probabilità di estrarre una pallina bianca: $Pr(E)$.

E_A = "viene estratta l'urna A"
E_B = "viene estratta l'urna B"
} sono una partizione dell'evento certo.

$$Pr(E) = Pr(E \wedge \Omega) = Pr(E \wedge (E_A \vee E_B)) = Pr((E \wedge E_A) \vee (E \wedge E_B))$$ → sono incompatibili: additività

$$= Pr(E \wedge E_A) + Pr(E \wedge E_B)$$

$$= Pr(E|E_A)\,Pr(E_A) + Pr(E|E_B)\,Pr(E_B)$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

Esprimiamo il problema in termini generali:

sia $\mathcal{P}: H_1, \dots, H_m$ partizione dell'evento certo

qualche H_i potrebbe avere prob. $= 0$, non tutti, però, perché la loro disgiunzione deve essere l'evento certo

$$Pr(E) = Pr(E \wedge (H_1 \vee \dots \vee H_m)) = Pr((E \wedge H_1) \vee \dots \vee (E \wedge H_m)) = \sum_{i=1}^{m} Pr(E \wedge H_i)$$

$$= \sum_{i \in \{i : Pr(H_i) > 0\}} Pr(E \wedge H_i) = \sum_{i \in \{i : Pr(H_i) > 0\}} Pr(E|H_i) Pr(H_i)$$

se $Pr(H_i) = 0$ anche $Pr(E \wedge H_i) = 0$

perché $E \wedge H_i \to H_i$

$$Pr(E) = \sum_{i \in \{i : Pr(H_i) > 0\}} Pr(E|H_i) \cdot Pr(H_i)$$

Il nome di questa formula deriva dal fatto che per ottenerla bisogna "disintegrare" la probabilità di un evento su una partizione.

es:

H = "prendo l'aereo e l'aereo cade"

E = "muoio"

$Pr(E|H) \sim 1$ si tratta della probabilità di morire sapendo che l'aereo cade

$Pr(E \wedge H) = \underbrace{Pr(E|H)}_{\sim 1} \cdot \underbrace{Pr(H)}_{\sim 0} \sim 0$ perché al giorno d'oggi, la probabilità che un aereo cadi è molto bassa, quasi pari a zero.

FORMULA DI FATTORIZZAZIONE

Partiamo da un esempio: consideriamo l'urna A e pensiamo di lasciare fuori dall'urna ogni pallina una volta estratta. Ci chiediamo quale sia la probabilità che esca una pallina bianca nelle prime tre estrazioni.

$$A \begin{array}{|c|} B\,3 \\ N\,7 \\ \hline \end{array}$$

E_n = "esce una pallina bianca all'estrazione n-esima"

$$Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = ?$$

$$Pr(E_1) = \frac{3}{10}$$

$$Pr(E_1 \wedge E_2) = Pr(E_2 | E_1)\, Pr(E_1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{10}$$

$$Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = Pr(E_3 \wedge (E_1 \wedge E_2)) = Pr(E_3 | E_1 \wedge E_2) \cdot Pr(E_1 \wedge E_2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15}$$

$$Pr(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = Pr(E_3 | E_1 \wedge E_2)\, Pr(E_2 | E_1)\, Pr(E_1)$$

$$Pr(E_1 \underset{\alpha}{\wedge} \ldots \wedge E_{n+1}) = Pr(E_{n+1} | \underset{\alpha \wedge h_1 \wedge \ldots \wedge h_n}{E_1 \wedge \ldots \wedge E_n}) \cdot Pr(E_n | \underset{\alpha \wedge h_1 \wedge \ldots \wedge h_{n-1}}{E_1 \wedge \ldots \wedge E_{n-1}}) \ldots Pr(E_2 | \underset{\alpha \wedge h_1}{E_1})\, Pr(\underset{\alpha}{E_1})$$

con $Pr(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n) > 0$

$Pr(E_1 \wedge \ldots \wedge E_{n-1}) > 0$

$\vdots$

$Pr(E_1) > 0$

es: ESTRAZIONE AL LOTTO

E_n = esce un numero k all'estrazione n-esima

$$Pr(E_{100} | \bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_{99}) = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = 0{,}05$$

$$Pr(E_{100} \wedge \bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_{99}) = Pr(E_{100} | \bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_{99}) \cdot Pr(\bar{E}_{99} | \bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_{98}) \ldots Pr(\bar{E}_2 | \bar{E}_1) Pr(\bar{E}_1)$$

$$= \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} \cdot \left[\frac{\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}} \right]^{99} = 0{,}00020$$

L'urna non ha memoria! La probabilità che non esca k per 99 lanci, e che esca il centesimo è quasi pari a zero, ma la probabilità che esca sapendo che non è uscita per 100 lanci è la stessa se si trattasse del primo lancio

Così anche nel lancio di una moneta, la probabilità che esca testa per la prima volta al lancio ennesimo è $\frac{1}{2^n}$; mentre la probabilità che esca testa, dopo che per n lanci non è uscita, è $\frac{1}{2}$.

applicando la formula di fattorizzazione:

$$Pr(E_1 \wedge \dots \wedge E_{n+1}) = Pr(E_{n+1} | E_1 \wedge \dots \wedge E_n) Pr(E_n | E_1 \wedge \dots \wedge E_{n-1}) \dots Pr(E_2|E_1) Pr(E_1)$$

Considero un'urna con B palline bianche e N palline nere; ogni pallina ha la stessa probabilità delle altre di essere estratta. Le estrazioni possono avvenire con rimessa o senza rimessa, ovvero la pallina estratta, una volta guardata, può venir reimbussolata, oppure lasciata fuori dall'urna.

E_i = all'estrazione i-esima esce la pallina bianca

successo = esce una pallina bianca.

Introduciamo un modello matematico, connesso con la distribuzione di un carattere su una popolazione, risolvendo i seguenti problemi nel caso dell'estrazione con rimessa e dell'estrazione senza rimessa.

- $Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n)$
- $Pr(E_i)$

★ $S_n = |E_1| + \dots + |E_n|$ S_n è la variabile aleatoria "numero di successi"

- $E(S_n)$, $Var(S_n)$

★ $\frac{S_n}{n} = \frac{|E_1| + \dots + |E_n|}{n}$ $\frac{S_n}{n}$ è la percentuale di successi

- $E\left(\frac{S_n}{n}\right)$, $Var\left(\frac{S_n}{n}\right)$, $Pr(S_n = k)$

ESTRAZIONE CON RIMESSA

- $P_r(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = P_r(E'_n | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{n-1}) P_r(E'_{n-1} | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{n-2}) P_r(E'_{n-2} | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{n-3}) \cdot$

$$\cdot \dots \cdot P_r(E'_3 | E'_1 \wedge E'_2) P_r(E'_2 | E'_1) P_r(E'_1)$$

Supponiamo che tra $E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n$ ci siano h affermazioni cioè, h palline bianche e $n-h$ palline nere.

$$P_r(E'_1) = \begin{cases} \frac{B}{B+N} = p & \text{se } E'_1 = E_1 \\ 1-p = q & \text{se } E'_1 = \bar{E}_1 \end{cases}$$

anche $P_r(E'_2 | E'_1) = \begin{cases} p \\ q \end{cases}$ perchè, nel caso con rimessa, non importa che pallina è stata estratta prima: e così via per ogni termine dell'equazione precedente.

$P_r(E'_3 | E'_1 \wedge E'_2) \begin{cases} p \\ q \end{cases}$

$$P_r(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = p^h (1-p)^{n-h} = p^h q^{n-h}$$

$P_r(E_1 \wedge \dots \wedge E_h \wedge \bar{E}_{h+1} \wedge \dots \wedge \bar{E}_n)$

↳ la probabilità non dipende dall'ordine in cui escono le palline, ma solo dalla quantità di palline bianche e di palline nere. Questo fenomeno si chiama SCAMBIABILITÀ.

Se la probabilità di una congiunzione di eventi generica $P_r(F'_1 \wedge F'_2 \wedge \dots \wedge F'_n)$ dipende solo da n e da h, si dice che $F_1, \dots, F_n$ sono un PROCESSO SCAMBIABILE

• $Pr(E_i) = p$

$E_i = \bigvee E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E_i \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m$ (eventi incompatibili)

$Pr(E_i) = \sum Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E_i \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m) =$

$= \sum Pr(E_i | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m) \, Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m)$

$= p \sum Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m)$

$= p \, Pr(\bigvee (E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m) = p \, Pr(\Omega) = p$

$Pr(E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_k}) = p^{h} \cdot q^{k-h}$ h affermati

$E'_{i_1} \dots E'_{i_2} \dots E'_{i_3} \dots E'_{i_k}$

tutte le possibili disposizioni

• $E(S_m) = E(|E_1| + \dots + |E_m|) = E(|E_1|) + \dots + E(|E_m|) = Pr(E_1) + \dots + Pr(E_m)$

$= p + \dots + p = mp$

• $Var(S_m) = Var(|E_1| + \dots + |E_m|) = Var(|E_1|) + \dots + Var(|E_m|) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j>i} cov(|E_i|, |E_j|)$

$= Pr(E_1) \cdot Pr(\bar{E}_1) + \dots + Pr(E_m) Pr(\bar{E}_m) + 2 [Pr(E_i \wedge E_j) - Pr(E_i) Pr(E_j)]$

$= pq + \dots + pq + 2 [Pr(E_j | E_i) Pr(E_i) - p^2]$

$= pq + \dots + pq + 2 [p^2 - p^2] = mpq$

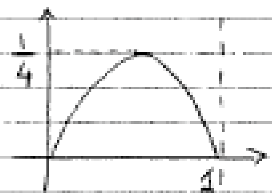
• $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$

• $Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{Var(S_n)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$

Per un numero di estrazioni molto alto la varianza di S_n tende a zero: più estrazioni faccio meno diverge la distribuzione dei successi.

$$\underbrace{Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{pq}{n}}{\varepsilon^2}}_{\text{chebyshev}} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

$f(p) = p(1-p)$



$pq \leq \frac{1}{4}$

La varianza coincide con la probabilità

• $Pr(S_n = h) = \binom{n}{h} p^h q^{n-h}$ $(h = 0, \dots, n)$ DISTRIBUZIONE DI BERNOULLI

$$Pr(\vee E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = \sum_{h \text{ affermati}} Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = p^h q^{n-h} \binom{n}{h}$$

quindi $Pr(S_n = h) = \binom{n}{h} p^h q^{n-h}$

ESTRAZIONE SENZA RIMESSA

- $$Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m) = \frac{\binom{B}{h}\binom{N}{m-h}}{\binom{B+N}{m}\binom{m}{h}} \quad \text{se} \begin{cases} h \le B \\ h \le m \\ m-h \le N \\ m-h \le m \end{cases} \quad \max(0, m-N) \le h \le \max(B, m)$$

altrimenti $Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m) = 0$

dim: $Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m) = Pr(E'_m | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{m-1})\, Pr(E'_{m-1} | E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{m-2}) \dots Pr(E'_2 | E'_1)\, Pr(E'_1)$

$B+N=M$

$$= \frac{?}{M-(m-1)} \cdot \frac{?}{M-(m-2)} \cdot \dots \cdot \frac{?}{M-1} \cdot \frac{?}{M}$$

i numeratori che si riferiscono alle bianche saranno $B, B-1, \dots, B-(h-1)$
quelli relativi alle nere: $N, N-1, \dots, N-(m-h-1)$
Per la proprietà commutativa posso inserire nell'equazione precedente prima tutte le estrazioni di palline bianche e poi tutte quelle di palline nere:

$$\overset{!}{=} \frac{B(B-1) \dots (B-(h-1))\, N(N-1) \dots (N-(m-h-1))}{M(M-1) \cdot \dots \cdot (M-m+1)}$$

$$= \frac{\frac{B(B-1) \dots (B-h+1)}{h!} \cdot \frac{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-(m-h)+1)}{(m-h)!}}{\frac{1}{h!} \frac{M(M-1) \cdot \dots \cdot (M-m+1)}{m!} \cdot \frac{1}{(m-h)!} m!}$$

$$= \frac{\binom{B}{h}\binom{N}{m-h}}{\binom{B+N}{m}\binom{m}{h}}$$

con cui si sono presentati i successi, ma dal loro numero. Si tratta, ancora, di un PROCESSO SCAMBIABILE.

- $Pr(E_i) = Pr(E_1)$
- $Pr(E_i \wedge E_j) = Pr(E_1 \wedge E_2)$
- $Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_n) = Pr(E_1 \wedge \dots \wedge E_h \wedge \overline{E_{h+1}} \wedge \dots \wedge \overline{E_n})$
- $E(S_n) = pn \qquad p = \frac{B}{N+B}$
- $Var(S_n) = npq \cdot \frac{B+N-n}{B+N-1}$

dim: $Var(S_n) = npq + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i} cov(|E_i|,|E_j|)$

$$cov(|E_i|,|E_j|) = Pr(E_i \wedge E_j) - Pr(E_i)Pr(E_j) = Pr(E_1 \wedge E_2) - Pr(E_1)^2 =$$

$$= Pr(E_2|E_1)Pr(E_1) - Pr(E_1)^2 = Pr(E_1)\left[Pr(E_2|E_1) - Pr(E_1)\right] =$$

$$= p\left[\frac{B-1}{M-1} - \frac{B}{M}\right] = p\left[\frac{BM-M-BM+B}{M(M-1)}\right] = p\left[\frac{B-M}{M(M-1)}\right] = p\,\frac{\left(\frac{B}{M}-1\right)}{M-1}$$

$$= -\frac{pq}{N+B-1}$$

allora $Var(S_n) = npq - 2\binom{n}{2}\frac{pq}{N+B-1} = \dots = npq \cdot \frac{B+N-n}{B+N-1}$

(nel caso con rimessa $cov(|E_i|,|E_j|)=0$

OSSERVAZIONE :

$$\mathrm{cov}(|E_i|, |E_j|) = -\frac{pq}{N+B-1} < 0 \quad \text{cosa significa?}$$

$$\mathrm{cov}(|E_i|, |E_j|) = Pr(E_i \wedge E_j) - Pr(E_i)Pr(E_j) < 0$$

$$= Pr(E_j | E_i) \cancel{Pr(E_i)} - Pr\cancel{(E_i)} Pr(E_j) < 0$$

$$\Rightarrow \quad Pr(E_j | E_i) < Pr(E_j)$$

L'informazione che è già uscita una pallina bianca sfavorisce l'uscita di un'altra pallina bianca. Si dice che i due eventi sono CORRELATI NEGATIVAMENTE: il verificarsi di uno sfavorisce il verificarsi dell'altro. Viceversa:

$$Pr(E_j | E_i) < Pr(E_j)$$

In questo caso i due eventi sono CORRELATI POSITIVAMENTE: il verificarsi di uno favorisce il verificarsi dell'altro.

- $$Pr(S_m = h) = Pr\Big(\bigvee_{h \text{ successi}} E'_1 \wedge \ldots \wedge E'_m\Big) = \sum_{h \text{ successi}} Pr(E'_1 \wedge \ldots \wedge E_m) = \frac{\binom{B}{h}\binom{N}{m-h}}{\binom{B+N}{m}\cancel{\binom{m}{h}}} \cancel{\binom{m}{h}}$$

$$= \frac{\binom{B}{h}\binom{N}{m-h}}{\binom{B+N}{m}} \quad \text{DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA}$$

considero gli eventi E_1, E_2,

con $\boxed{P_r(E_1) > 0}$

$P_r(E_1 \wedge E_2) < P_r(E_2) P_r(E_1)$

$P_r(E_2|E_1) < P_r(E_2)$: E_2 correlato negativamente da E_1

$P_r(E_2|E_1) \lesseqgtr P_r(E_2)$ → $P_r(E_2|E_1) = P_r(E_2)$: E_2 indipendente stocasticamente da E_1

$P_r(E_2|E_1) > P_r(E_2)$: E_2 correlato positivamente da E_1

$P_r(E_1 \wedge E_2) > P_r(E_2) P_r(E_1)$

- se $P_r(E_2|E_1) = P_r(E_2)$ $\quad cov(|E_1|, |E_2|) = P_r(E_1 \wedge E_2) - P_r(E_1) P_r(E_2) = 0$

  perchè $P_r(E_2|E_1) = P_r(E_2) \rightarrow P_r(E_1 \wedge E_2) = P_r(E_1) P_r(E_2)$

  quindi $|E_1|, |E_2|$ non sono correlati → gli eventi E_1, E_2 non sono correlati!

  INDIPENDENZA STOCASTICA → NON CORRELAZIONE

- se E_2 è indipendente da E_1 allora anche la sua negazione è indipendente da E_1:

  E_2 ind. da $E_1 \rightarrow \bar{E}_2$ ind. da E_1

  perchè $P_r(\bar{E}_2|E_1) = 1 - P_r(E_2|E_1) \underset{\text{ipotesi}}{=} 1 - P_r(E_2) = P_r(\bar{E}_2)$

- Se E_2 è correlato negativamente da E_1, allora $\bar{E}_2$ è correlato positivamente da E_1.

E_2 correlato neg. da $E_1 \rightarrow \bar{E}_2$ correlato pos. da E_1

perché $Pr(\bar{E}_2 | E_1) = 1 - Pr(E_2 | E_1) > 1 - Pr(E_2) = Pr(\bar{E}_2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\wedge}{Pr(E_2)}$

supponiamo anche $\boxed{Pr(E_2) > 0}$

TEOREMA (o formula) di BAYES

$Pr(E_1 \wedge E_2) = Pr(E_1 | E_2) Pr(E_2)$

$Pr(E_1 \wedge E_2) = Pr(E_2 | E_1) Pr(E_1)$

$\rightarrow Pr(E_1 | E_2) Pr(E_2) = Pr(E_2 | E_1) Pr(E_1)$

$$\boxed{Pr(E_1 | E_2) = \underbrace{\left(\frac{Pr(E_2 | E_1)}{Pr(E_2)}\right)}_{\text{FATTORE DI VEROSIMIGLIANZA}} Pr(E_1)}$$

Possiamo interpretare questo risultato pensando alla diagnosi di una malattia: un paziente si presenta dal proprio medico dicendo di avere il sintomo H. Il dottore vuole sapere se il malato è affetto dalla malattia E. Per farlo dovrà ragionare nel modo seguente: Data la sua esperienza si chiederà qual è la probabilità per un individuo qualsiasi di avere la malattia E (ci sono malattie più o meno diffuse), poi si chiederà se un individuo avente quella malattia presenta il sintomo H e infine dovrà tener conto della probabilità di avere il sintomo H anche per altre malattie.

$$Pr(E|H) = \frac{Pr(H|E)\ Pr(E)}{Pr(H)}$$

- Se E_2 è indipendente da E_1, anche E_1 è indipendente da E_2

Dim: per ipotesi, infatti, $Pr(E_2|E_1) = Pr(E_2)$, quindi per Bayes

$$Pr(E_1|E_2) = \frac{Pr(E_2)}{Pr(E_2)} \cdot Pr(E_1) = Pr(E_1)$$

- Se E_2 è correlato positivamente da E_1, anche E_1 è correlato positivamente da E_2.

Dim: per ipotesi, infatti, $P_r(E_2|E_1) > P_r(E_2)$, quindi per Bayes:

$$P_r(E_1|E_2) = \frac{P_r(E_2|E_1)}{P_r(E_2)} P_r(E_1) > \frac{P_r(E_2)}{P_r(E_2)} P_r(E_1) = P_r(E_1)$$

- Se E_2 è correlato negativamente da E_1, anche E_1 è correlato negativamente da E_2.

Dim: per ipotesi, infatti, $P_r(E_2|E_1) < P_r(E_2)$, quindi per Bayes:

$$P_r(E_1|E_2) = \frac{P_r(E_2|E_1)}{P_r(E_2)} P_r(E_1) < \frac{P_r(E_2)}{P_r(E_2)} P_r(E_1) = P_r(E_1)$$

Fino a questo momento, parlando di urne, e di estrazione con rimessa, abbiamo sempre tenuto conto del caso in cui la numerosità dell'urna $(B+N=M)$ fosse nota.

se $P_r(E_i \wedge E_j) = P_r(E_i) P_r(E_j)$ E_i, E_j sono indipendenti

$$P_r(E_i|E_j) = P_r(E_i) = p$$

L'URNA INCOGNITA

Ci chiediamo se eventi E_i, E_j, nel caso con rimessa, siano ancora indipendenti se la composizione dell'urna è incognita, ovvero se è composta da H palline, bianche o/e nere.

$$P_r(E_i | E_j) = P_r(E_i) \text{ ? NO!}$$

Non sono più eventi indipendenti perché sapere che è uscita una pallina bianca, mi fornisce un'informazione aggiuntiva sulla composizione dell'urna.
Funzionano allo stesso modo i problemi di tipo statistico: quando voglio indagare la distribuzione di un certo carattere su una popolazione, compio dei sondaggi (che sono come le estrazioni dall'urna incognita) per conoscere qualche informazione in più sulla distribuzione.

Chiamo Z la variabile aleatoria riferita alla percentuale di palline bianche contenute nell'urna. Le possibili determinazioni di Z costituiscono una partizione dell'evento certo:

$$Z: \frac{0}{H}, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \dots, \frac{H-1}{H}, \frac{H}{H} \qquad W_h = \left\{ Z = \underbrace{\frac{h}{H}}_{\theta_h} \right\} \quad h \in \{0 \dots H\}$$

$$P_r(E_i) = \sum_{h=0}^{H} \underbrace{P_r(E_i | W_h)}_{\frac{h}{H} = \theta_h} \cdot P_r(W_h) = \sum_{h=0}^{H} \theta_h P_r(W_h) = \sum_{h=0}^{H} \theta_h \cdot P_r(Z = \theta_h) = E(Z)$$

La probabilità dell'evento "esce bianca alla i-esima estrazione" è uguale al valor medio della composizione dell'urna.

$$Pr(E_i \wedge E_j) = \sum_{h=0}^{M} \underbrace{Pr(E_i \wedge E_j \mid w_h)}_{\frac{h}{M}\cdot\frac{h}{M} = \theta_h^2} Pr(w_h) = \sum_{h=0}^{M} \theta_h^2 Pr(w_h) = \sum_{h=0}^{M} \left[(\theta_h - E(\theta_h)) + E(\theta_h)\right]^2 Pr$$

$$= \sum_{h=0}^{M} [\theta_h - E(\theta_h)]^2 \underset{Pr(z=\theta_h)}{Pr(w_h)} + 2\sum_{h=0}^{M} (\theta_h - E(z)) E(z) \cdot Pr(w_h) + \sum_{h=0}^{M} E(z)^2 \underset{1}{Pr(w_h)}$$

$$\sum_{h=0}^{M} \theta_h Pr(w_h) - E(z) \sum_{h=0}^{M} \underset{1}{Pr(w_h)}$$

$$\cancel{E(z)} - \cancel{E(z)}$$

$$= Var(z) + E(z)^2$$

$$\star \quad Pr(E_i \wedge E_j) = Var(z) + E(z)^2$$

Da queste considerazioni possiamo vedere se gli eventi E_i e E_j possono essere indipendenti.

E_i e E_j sono indipendenti se $\underbrace{Pr(E_i) Pr(E_j)}_{E(z)^2} = Pr(E_i \wedge E_j) = Var(z) + E(z)^2$

Quindi, affinché sia vera l'equazione, $Var(Z)$ dev'essere nulla:

E_i, E_j indipendenti $\Leftrightarrow Var(Z) = 0$ ma allora $Pr(Z = E(Z)) = 1$

Possiamo concludere che gli eventi E_i e E_j sono indipendenti solo se la composizione dell'urna è quasi certa!

- $Pr(E_i \wedge E_j) = Var(Z) + E(Z)^2$, $Var(Z) \geq 0$

se $Var(Z) > 0$ allora $Pr(E_i \wedge E_j) > E(Z)^2$

$$\underbrace{Pr(E_i \wedge E_j)}_{= Pr(E_i | E_j) Pr(E_j)} > \underbrace{E(Z)^2}_{= Pr(E_i) Pr(E_j)}$$

$\Rightarrow Pr(E_i | E_j) > Pr(E_i)$

$\Rightarrow E_i$ e E_j sono correlati positivamente! (sapere che è uscita una pallina bianca aumenta la mia aspettativa di veder uscire un'altra pallina bianca!

LA PROBABILITÀ DEI COSTITUENTI w_h

Per calcolare la speranza matematica di z ($E(z)$) e la varianza di z ($Var(z)$) dobbiamo conoscere o perlomeno ipotizzare il valore della probabilità dei costituenti w_h:

$$E(z) = \sum \theta_h \underline{Pr(w_h)}$$

$$Var(z) = \sum (\theta_h - E(z))^2 \underline{Pr(w_h)}$$

Devo conoscere $Pr(w_h)$ prima delle estrazioni, quindi nello stato d'informazione α. In alcuni casi, posso rifarmi alla storia pregressa del carattere che sto analizzando (ad es. se voglio sapere cosa voterà una certa popolazione alle prossime elezioni, mi baserò sulle distribuzioni dei voti delle elezioni precedenti). Se, invece, voglio esprimere la mia totale ignoranza, in quanto non supportata da informazioni pregresse, posso ricadere nel caso simmet dando ad ogni composizione dell'urna la stessa probabilità:

$$Pr(w_h) = \frac{1}{H+1} \qquad h = 0, \dots, H$$

Calcoliamo la probabilità di un costituente generico, data l'informazione di m estrazioni

$$Pr(w_h \mid E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m) = \frac{Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m \mid w_h)}{Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m)} \cdot Pr(w_h) = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{m-k}}{(H+1)\, Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m)}$$

$$Pr(w_h \mid E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m) = \theta_h^k \cdot (1-\theta_h)^{m-k} \frac{1}{(H+1) Pr(E'_1 \wedge \dots \wedge E'_m)} = a\, \theta_h^k (1-\theta_h)^{m-k}$$

Voglio determinare qual è l'ipotesi più probabile sulla composizione dell'urna.
Considero la funzione $f(\theta_h)$ e trovo il suo massimo.

$$f(\theta_h) = \theta_h^k (1-\theta_h)^{m-k} \qquad \max_{h=0,1,\dots,M} f(\theta_h)$$

passo ignorare q che è un numero positivo

$\frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{M}{M}, \frac{M-1}{M}, 1$

$$f(\theta_h) = \theta_h^k (1-\theta_h)^{m-k}$$

$f(x) = x^k (1-x)^{m-k}$ (chiamo $x = \theta_h$)

$$f'(x) = k\,x^{k-1}(1-x)^{m-k} + x^k (m-k)(1-x)^{m-k-1}(-1)$$
$$= x^{k-1}(1-x)^{m-k-1}\left[k(1-x) - x(m-k)\right]$$
$$= \underbrace{x^{k-1}(1-x)^{m-k-1}}_{\text{non si annullano mai}}(k-mx)$$

$f'(x) = 0 \iff x = x^* = \frac{k}{m}$ è punto di massimo

Sono, quindi, favorite le composizioni dell'urna più vicine a $\frac{k}{m}$.

$k \rightarrow$ bianche uscite
$m \rightarrow$ numero estrazioni
} FREQUENZA RELATIVA DEL SUCCESSO!

INDIPENDENZA TRA COPPIE DI EVENTI

Abbiamo visto che se E_2 è indipendente da E_1, e $Pr(E_2), Pr(E_1) > 0$, allora anche

- $\bar{E}_2$ è indipendente da E_1
- E_1 è indipendente da E_2
- $\bar{E}_1$ è indipendente da E_2

Come conseguenza del teorema di Bayes, possiamo dimostrare anche che:
se $\bar{E}_1$ è ind da E_2, anche E_2 è ind da $\bar{E}_1$:

$$Pr(E_2|\bar{E}_1) = \frac{\overbrace{Pr(\bar{E}_1|E_2)}^{= Pr(\bar{E}_1)}}{Pr(\bar{E}_1)} Pr(E_2) = Pr(E_2)$$

A questo punto possiamo concludere che se E_1 e E_2 sono stocasticamente indipendenti e hanno probabilità positiva, allora, come conseguenza del Teorema di Bayes, c'è indipendenza tra coppie del tipo E'_1 e E'_2.

TEOREMA

$1 > P_r(E_1), P_r(E_2) > 0$

1) E_1 stocasticamente indipendente da $E_2 \iff E'_1, E'_2$ stocasticamente indipendenti

2) E_1 stocasticamente indipendente da $E_2 \iff P_r(E'_1 \wedge E'_2) = P_r(E'_1) P_r(E'_2)$: E'_1, E'_2 non correlati

dim 2) : $P_r(E'_1 \wedge E'_2) = P_r(E'_1 | E'_2) P_r(E'_2) = P_r(E'_1) P_r(E'_2)$

Spiegazione dell'ipotesi: sappiamo che $P_r(E_1) > 0$, ma devo supporre che sia anche < 1 per calcolare

$P_r(E_2 | \bar{E}_1) \rightarrow P_r(\bar{E}_1) > 0 \Rightarrow P_r(E_1) < 1$

Per assicurare che $P_r(E_1)$ e $P_r(E_2)$ siano entrambe positive e < 1, basta richiedere che ogni elemento della partizione generata dai due eventi abbiano probabilità positiva:

$\mathbb{P}(E_1, E_2) = \{\emptyset, \Omega, E_1 \wedge E_2, \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2, E_1 \wedge \bar{E}_2, \bar{E}_1 \wedge E_2\}$

infatti $E_1 = (E_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2)$

$P_r(E_1) = P_r(E_1 \wedge E_2) + P_r(E_1 \wedge \bar{E}_2)$

se $P_r(E_1 \wedge E_2), P_r(E_1 \wedge \bar{E}_2) > 0 \Rightarrow 0 < P_r(E_1) < 1$

INDIPENDENZA TRA TRE EVENTI

E_1, E_2, E_3 stocasticamente indipendenti

$\mathbb{P}(E_1, E_2, E_3)$

$Pr(E_1' \wedge E_2' \wedge E_3') > 0 \xrightarrow{\text{assicura che}} \begin{cases} 0 < Pr(E_i') < 1 \\ 0 < Pr(E_i' \wedge E_j') < 1 \end{cases}$

$$Pr(E_1 \mid \underbrace{E_2 \wedge E_3}_{\neq \emptyset \text{ per ipotesi}}) = Pr(E_1 \mid \bar{E}_2 \wedge E_3) = Pr(E_1 \mid E_2 \wedge \bar{E}_3) = Pr(E_1 \mid \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) = Pr(E_1)$$

Tre eventi sono stocasticamente indipendenti se, considerata la probabilità di uno qualsiasi di essi, questa non viene modificata da una qualsiasi informazione sui rimanenti.

INDIPENDENZA TRA n EVENTI

$E_1, \dots, E_m$ stocasticamente indipendenti

$\mathbb{P}(E_1, \dots, E_m)$

$Pr(E_1' \wedge \dots \wedge E_m') > 0 \xrightarrow{\text{assicura che}} \begin{cases} 0 < Pr(E_i') < 1 \\ 0 < Pr(E_i' \wedge E_j') < 1 \\ 0 < Pr(E_i' \wedge E_j' \wedge E_h') < 1 \end{cases}$

$$Pr(E_i \mid E_1' \wedge \dots \wedge E_{i-1}' \wedge E_{i+1}' \wedge \dots \wedge E_m') = Pr(E_i)$$

es: estrazioni con rimessa (urna di composizione nota)

E_i = esce pallina bianca all'estrazione i $\quad E_1, \dots, E_m$

$$Pr(E_i \mid E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m) = Pr(E_i)$$

$E_1, \dots, E_m$: stocasticamente indipendenti

es: lancio di una moneta equilibrata

E_i = esce Testa al lancio i; $\quad E_1, \dots, E_m$

$$Pr(E_i \mid E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i-1} \wedge E'_{i+1} \wedge \dots \wedge E'_m) = Pr(E_i)$$

$E_1, \dots, E_m$: stocasticamente indipendenti

es: estrazioni con rimessa (urna di composizione incognita)

$E_1, \dots, E_m$ <u>NON</u> sono stocasticamente indipendenti

PROPRIETÀ CONGLOMERATIVA

$H_1, \dots, H_m \qquad H_i \wedge H_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

$Pr(H_i) > 0 \quad \forall i \; (i = 1 \dots m)$

$H = H_1 \vee H_2 \vee \dots \vee H_m \qquad (\rightarrow Pr(H) = Pr(H_1) + Pr(H_2) + \dots + Pr(H_m) > 0)$

considero un evento E qualsiasi e suppongo che $Pr(E|H_i) = p \quad (i = 1, \dots, m)$

allora $Pr(E|H) = p$

dim: $$Pr(E|H) = \frac{Pr(E \wedge H)}{Pr(H)} = \frac{Pr(E \wedge (H_1 \vee \dots \vee H_m))}{Pr(H)} = \frac{Pr\left(\bigvee_{i=1,\dots,m} (E \wedge H_i)\right)}{Pr(H)} = \frac{Pr(E \wedge H_1) + \dots + Pr(E \wedge H_m)}{Pr(H)}$$

$$= \frac{Pr(E|H_1)Pr(H_1) + \dots + Pr(E|H_m)Pr(H_m)}{Pr(H)} = \frac{p\,Pr(H_1) + \dots + p\,Pr(H_m)}{Pr(H)} = p\,\frac{\cancel{Pr(H_1) + \dots + Pr(H_m)}}{\cancel{Pr(H)}}$$

$= p$

Se gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono stocasticamente indipendenti, allora:

$$Pr(E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_k}) = Pr(E'_{i_1}) \cdot \ \cdot Pr(E'_{i_k})$$

dim: per fattorizzazione:

$$Pr(E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_k}) = \underbrace{Pr(E'_{i_k} | E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_{k-1}})}_{Pr(E'_{i_k})} \underbrace{Pr(E'_{i_{k-1}} | E'_{i_1} \wedge \dots \wedge E'_{i_{k-2}})}_{Pr(E'_{i_{k-1}})} \dots \underbrace{Pr(E'_2 | E'_{i_1})}_{Pr(E'_{i_2})} Pr(E'_{i_1})$$

?

$$\underset{H}{E'_{i_1}} = \bigvee (E'_1 \wedge \dots \wedge E'_{i_{1}-1} \wedge \underset{H_i}{\boxed{E'_i}} \wedge E'_{i_1+1} \wedge \dots \wedge E'_m)$$

$E = E'_{i_2}$

per la proprietà conglomerativa $Pr(E'_{i_2} | E'_{i_1}) = Pr(E'_{i_2})$

se gli eventi sono 3:

$$Pr(E'_1 \wedge E'_2 \wedge E'_3) = Pr(E'_1) Pr(E'_2) Pr(E'_3)$$

dim: $Pr(E'_1 \wedge E'_2 \wedge E'_3) = Pr(E'_3 | E'_1 \wedge E'_2) Pr(E'_2 | E'_1) Pr(E'_1)$

per ipotesi sono stocasticamente indipendenti: quindi $Pr(E'_2 | E_1) = Pr(E'_2)$

$E'_1 = E_1 \vee \bar{E}_2$, per propr. conglomerativa $Pr(E'_2 | E'_1) = Pr(E'_2)$

COPPIE ALEATORIE

Siano X e Y due variabili aleatorie. (X,Y) si dice COPPIA ALEATORIA.

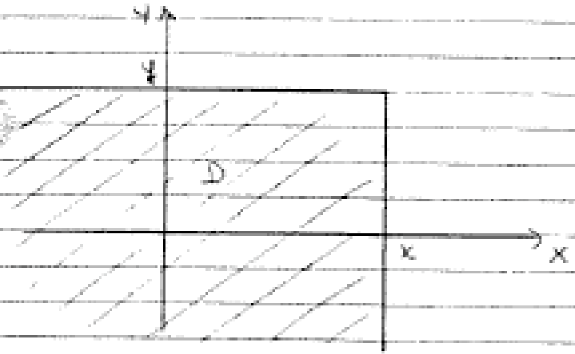
$$F(x,y) = P_r(X \leq x \wedge Y \leq y) \quad \text{FUNZIONE DI RIPARTIZIONE CONGIUNTA}$$

caso finito: $X: x_1, \dots, x_n$

$Y: y_1, \dots, y_m$

$$F(x,y) = P_r(X \leq x \wedge Y \leq y)$$

caso assolutamente continuo: $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$



$$F(x,y) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv \\ \int_{-\infty}^{y} dv \int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du \end{cases}$$

FUNZIONI DI RIPARTIZIONE MARGINALI

f. di ripartizione marginale della X: $F_X(x) = Pr(X \le x)$

f. di ripartizione marginale della Y: $F_Y(y) = Pr(Y \le y)$

Come si può collegare queste f. di ripartizione marginali con quella congiunta? Vediamo come:

caso finito

- $F_X(x) = Pr(X \le x) = Pr(X \le x \wedge \Omega) = Pr(X \le x \wedge (Y = y_1 \vee \dots \vee Y = y_m)) =$

$= Pr((X \le x \wedge Y = y_1) \vee \dots \vee (X \le x \wedge Y = y_m)) = Pr(X \le x \wedge Y = y_1) + \dots + Pr(X \le x \wedge Y = y_m)$

$= \sum_{i=1}^{m} Pr(X \le x \wedge Y = y_i)$

disintegro sui possibili valori di Y

- $F_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} Pr(Y \le y \wedge X = x_i)$

CASO ASSOLUTAMENTE CONTINUO

- sia f_X la funzione di densità di X: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

- sia f_Y la funzione di densità di Y: $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

disintegro sui possibili valori di X

SPERANZA MATEMATICA di $g(X,Y)$

Date le variabili aleatorie X e Y, considero la coppia aleatoria (X,Y) e la funzione $g(x,y)$. Posso considerare la variabile aleatoria $g(X,Y)$: voglio calcolare la sua speranza matematica.

<u>CASO FINITO</u>: in una variabile avevamo: $E(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) P_r(X=x_i)$

in due variabili: $X: x_1, \dots, x_n$

$Y: y_1, \dots, y_m$

$$g(X,Y): \begin{matrix} g(x_1,y_1) & \cdots & g(x_1,y_m) \\ \vdots & & \vdots \\ g(x_n,y_1) & \cdots & g(x_n,y_m) \end{matrix}$$

$$E(g(X,Y)) = g(x_1,y_1) P_r(X=x_1 \wedge Y=y_1) + \dots + g(x_1,y_m) P_r(X=x_1 \wedge Y=y_m) + \dots$$
$$+ g(x_n,y_1) P_r(X=x_n \wedge Y=y_1) + \dots + g(x_n,y_m) P_r(X=x_n \wedge Y=y_m)$$

<u>CASO CONTINUO</u>: in una variabile avevamo. $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$

in due variabili:

$$E(g(X,Y)) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$$

(x,y) coppia aleatoria assolutamente continua con densità congiunta $f(x,y)$ proporzionale alla funzione $g(x,y)$

$$g(x,y)=\begin{cases} xy & \text{se } (x,y)\in T \\ 0 & \text{se } (x,y)\notin T \end{cases}$$

Determinare $F(x,y)$

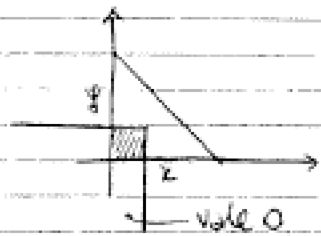
$$f(x,y)=k\,g(x,y) \Rightarrow k=\frac{1}{\iint_T g(x,y)\,dx\,dy}$$

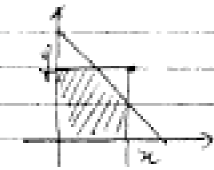
$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y\,dy = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

$k=24$

$$f(x,y)=\begin{cases} 24xy & \text{se } (x,y)\in T \\ 0 & \text{se } (x,y)\notin T \end{cases}$$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \begin{cases} 24\int_0^x u\,du\int_0^y v\,dv & \text{se } (x,y)\in T \\ \int_0^{1-y} du\int_0^y 24uv\,dv + \int_{1-y}^{x} du \int_0^{1-u} 24uv\,dv & \text{se} \end{cases}$$





X, Y variabili aleatorie

(X,Y) coppia aleatoria

- $F(x,y) = P_r(X \le x \wedge Y \le y)$ Funzione di ripartizione CONGIUNTA
- $F_X(x) = P_r(X \le x)$ Funzione di ripartizione MARGINALE della X
- $F_Y(y) = P_r(Y \le y)$ Funzione di ripartizione MARGINALE della Y
- Funzione di densità congiunta $f(x,y) \ge 0$: $F(x,y) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(x,y)\,dx\,dy$

TEOREMA

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$ Funzione di densità MARGINALE della X.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$ Funzione di densità MARGINALE della Y.

2) Se D è un dominio normale: $Pr((X,Y) \in D) = \iint_D \underbrace{f(x,y)}_{\text{f. di densità congiunta}}\,dx\,dy$

3) $E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$ (caso assolutamente continuo)

X, Y sono STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI se:

$\forall\ x, y$ tale che $Pr(Y \le y) > 0$

$Pr(X \le x \mid Y \le y) = Pr(X \le x)$

$\{X \le x\}$ stoc. ind. da $\{Y \le y\}$

TEOREMA

X, Y sono stocasticamente indipendenti $\Longleftrightarrow F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

dim. condizione necessaria:

X, Y indipendenti $\Rightarrow F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

$$Pr(Y \leq y) \begin{cases} = 0 & \text{osservato che } \{X \leq x \wedge Y \leq y\} \rightarrow \{Y \leq y\} \\ & Pr(X \leq x \wedge Y \leq y) \leq Pr(Y \leq y) = 0 \quad \text{ottengo } 0 = 0 \\ > 0 & \end{cases}$$

$$\underbrace{Pr(X \leq x \wedge Y \leq y)}_{F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)} = Pr(X \leq x | Y \leq y) Pr(Y \leq y) = Pr(X \leq x) Pr(Y \leq y)$$

perché indipendenti per ipotesi

condizione sufficiente:

$Pr(X \leq x \wedge Y \leq y) = Pr(X \leq x) Pr(Y \leq y) \Rightarrow X, Y$ stoc. ind.: $Pr(X \leq x | Y \leq y) = Pr(X \leq x)$

pongo $Pr(Y \leq y) > 0$

$$Pr(X \leq x | Y \leq y) \cancel{Pr(Y \leq y)} \underset{\text{ipotesi}}{=} Pr(X \leq x) \cancel{Pr(Y \leq y)} \Rightarrow Pr(X \leq x | Y \leq y) = Pr(X \leq x)$$

TEOREMA

Si può dimostrare che per il caso assolutamente continuo, vale:

X, Y stoc. indip. $\Longleftrightarrow f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$