CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 30/6/2017

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

---

1) In un gioco vengono effettuati sequenzialmente 8 lanci di un dado, 4 con un dado regolare a 6 facce, 4 con un dado regolare a 12 facce. Non è noto quali lanci nella sequenza siano effettuati con l'uno o l'altro dado.
   (a) Calcolare la probabilità che in almeno 2 lanci esca un punto maggiore di 4;
   (b) se al primo lancio è uscito 5, qual è la probabilità che il primo lancio sia stato effettuato con il dado a 6 facce?
   (c) Agli 8 lanci è associato un meccanismo di scommesse, solo parzialmente noto: il relativo guadagno complessivo G non è comunque minore di –75 €, e E(G) = –25 €. Determinare una limitazione significativa per la probabilità dell'evento $(G \geq 0)$.

2) L'urna A contiene 4 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene 5 palline bianche e 1 rossa. Si effettui una sequenza di estrazioni senza reimbussolamento, tutte dall'urna A se lanciando un dado esce 6, dall'urna B altrimenti. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione", calcolare:
   (a) $P(E_3|\overline{E}_6)$, $P(E_2|\overline{E}_2 \vee E_4)$, $P(\overline{E}_i|\overline{E}_2 \wedge E_4)$ $(i \leq 6)$;
   (b) la covarianza fra $(|E_1| + |E_2|)$ e $(|E_2| + |\overline{E}_6|)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul quadrato $Q = [0, a] \times [0, a]$ $(a > 0)$ con densità congiunta (uniforme in Q) $f_{X,Y}(x, y) = 1/a^2$. Posto $Z = X + Y$, determinare:
   (a) la funzione di ripartizione e la funzione di densità di Z, tracciando anche il grafico di quest'ultima;
   (b) la varianza di Z;
   (c) $P(X + Y \geq a \mid X \leq 1/2)$.

Esercizio 1) Siano:

E_i = 'Esce $n>4$ all'i-esimo lancio'

6F = 'Viene lanciato il dado a 6 facce'; $P(6F) = \frac{1}{2}$ } I dadi sono 2

12F = ' " " " " " 12 facce'; $P(12F) = \frac{1}{2}$

a) $P(E_i) = P(E_1/6F)P(6F) + P(E_1/12F)P(12F)$

Nota: Gli eventi sono scambiabili in quanto indipendenti

$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{8}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Sia ora: A = 'esce almeno 2 volte $n>4$'; $P(E_i) = p$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \overset{(a)}{=} 1 - \left[\binom{8}{0}p^0(1-p)^8 + \binom{8}{1}p^1(1-p)^7\right]$$

Esce 0 volte $n>4$ — Esce 1 volta $n>4$

Meglio fare così, se no gli addendi della (a) diventerebbero 6

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\right] = \frac{247}{256}$$

b) $$P(6F/X=5) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(X=5/6F)}{P(X=5)}\cdot P(6F)$$

X = n° uscito al primo lancio del dado

$$P(X=5) = P(X=5/6F)P(6F) + P(X=5/12F)P(12F)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8 = \frac{2}{3}$$

c) $G \geq 0 \Longleftrightarrow G + 75 (= G') \geq 0 + 75 \Longleftrightarrow G' \geq 75$

Nota: per poter utilizzare la disuguaglianza di Markov dev'essere che il numero aleatorio considerato sia ≥ 0, ma in questo caso G potrebbe assumere il valore -75. Perciò sommo 75 ad entrambi i membri.

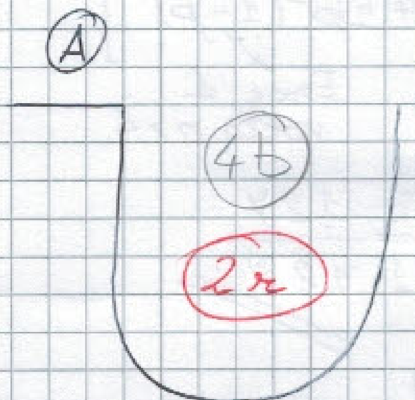
$$\underbrace{P(G \geq 0)}_{=} = \underbrace{P(G' \geq 75)} \leq \frac{E(G')}{75} = \frac{E(G+75)}{75}$$

$E(75) = 75$
+ Additività

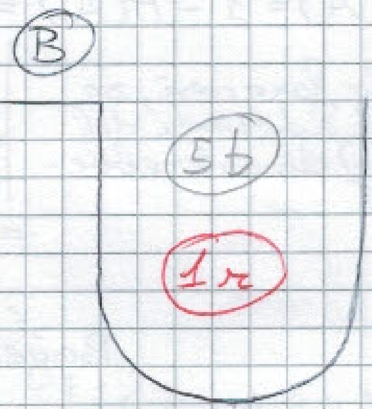
$$= \frac{E(G)+75}{75} = \frac{-25+75}{75} = \frac{2}{3}$$

■

Esercizio 2)



Estrazioni
SENZA
reimbuss.to



$A =$ 'Effettuo le estraz. dall'urna (A)'; $P(A) = \frac{1}{6}$

$B =$ ' " " " " urna (B)'; $P(B) = \frac{5}{6}$

$E_i =$ 'Esce b all'i-esima estrazione'

Nota: il processo stocastico in esame ("su 2 urne") è una mistura di processi stocastici condizionati (agli eventi A e B) scambiabili. È quindi anch'esso scambiabile.

a) $\cdot\ P(E_3 / \bar{E}_6) \overset{TPC}{=} \frac{P(E_3 \wedge \bar{E}_6)}{P(\bar{E}_6)} \overset{Scamb.}{=} \frac{P(\bar{E}_1 \wedge E_2)}{P(\bar{E}_1)}$

2

Nota: per calcolare la probabilità dell'evento $(\bar{E}_1 \wedge E_2)$ applico la disintegrabilità e la fattorizzazione. Le medesime tecniche verranno poi applicate anche per il calcolo delle prob. di altri eventi.

$$P(\bar{E}_1 \wedge E_2) \overset{\text{Disintegrabilità}}{=} P(\bar{E}_1 \wedge E_2 / A)\,P(A) + P(\bar{E}_1 \wedge E_2 / B)\,P(B)$$

Fattorizzazione

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{45} + \frac{5}{36} = \frac{11}{60}$$

$$P(E_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2+5}{36} = \frac{7}{36}$$

Quindi:

$$P(E_3 / \bar{E}_6) = \frac{11}{60} \cdot \frac{36}{7} = \frac{33}{35}$$

- $$P(E_2 / \bar{E}_2 \vee E_4) = \frac{P(E_2 \wedge (\bar{E}_2 \vee E_4))}{P(\bar{E}_2 \vee E_4)}$$

$$= \frac{P[\underbrace{(E_2 \wedge \bar{E}_2)}_{\emptyset} \vee (E_2 \wedge E_4)]}{1 - P(E_2 \wedge \bar{E}_4)} \overset{\text{Scamb.}}{=} \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{1 - P(\bar{E}_1 \wedge E_2)}$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{15} + \frac{5}{9} = \frac{28}{45}$$

$$P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = \frac{11}{60}$$

Quindi:

$$P(E_2 / \bar{E}_2 \vee E_4) = \frac{\frac{28}{45}}{1 - \frac{11}{60}} = \frac{28}{45 \cdot \frac{49}{60}} = \frac{16}{21}$$

• $P(\overline{E}_i / \overline{E}_2 \wedge E_4)$

Se $i=2$:

$E_2 \wedge E_4 \Rightarrow \overline{E}_2$

$P(\overline{E}_2 / \overline{E}_2 \wedge E_4) = P(\Omega / \overline{E}_2 \wedge E_4) = 1$

Se $i=4$:

$P(\overline{E}_4 / \overline{E}_2 \wedge E_4) = P(\emptyset / \overline{E}_2 \wedge E_4) = 0$

Se $i \neq 2 \wedge i \neq 4$:

$$P(\overline{E}_i / \overline{E}_2 \wedge E_4) = \frac{P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 \wedge E_4)}{P(\overline{E}_2 \wedge E_4)} \overset{Sc.}{=} \frac{P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3)}{P(\overline{E}_1 \wedge E_2)}$$

$$P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{6} + \underbrace{0 \cdot \frac{5}{6}}_{\text{È impossibile estrarre 2 palline rosse dall'urna B.}} = \frac{1}{90}$$

Quindi:

$$P(\overline{E}_i / \overline{E}_2 \wedge E_4) = \frac{1}{90} \cdot \frac{60}{11} = \frac{2}{33}$$

con $i \neq 2, i \neq 4$.

b) $? = Cov\left[(|E_1| + |E_2|) ; (|E_2| + |\overline{E}_6|)\right]$

Nota: non applicare la scambiabilità in questo modo:

$$Cov\left[(|E_1| + |E_2|) ; (|E_1| + |\overline{E}_2|)\right]$$

è sbagliato!

Bilinearità

$$= Cov(|E_1| ; |E_2|) + Cov(|E_1| ; |\overline{E}_6|) + \overbrace{Cov(|E_2| ; |E_2|)}^{Var(|E_2|)} + Cov(|E_2| ; |\overline{E}_6|) =$$

$$Var(|E|) = P(E)P(\bar{E})$$

$$= P(E_1 \wedge E_2) - P(E_1)P(E_2) + P(E_1 \wedge \bar{E}_6) - P(E_1)P(\bar{E}_6) + P(E_2)P(\bar{E}_2) + P(E_2 \wedge \bar{E}_6) - P(E_2)P(\bar{E}_6)$$

Scambiabilità

$$= P(E_1 \wedge E_2) - P^2(E_1) + \left[P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - P(E_1)P(\bar{E}_1)\right] \cdot 2 + P(E_1)P(\bar{E}_1)$$

$$= P(E_1 \wedge E_2) + 2P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - 2P(E_1)P(\bar{E}_1) + P(E_1)P(\bar{E}_1) - P^2(E_1)$$

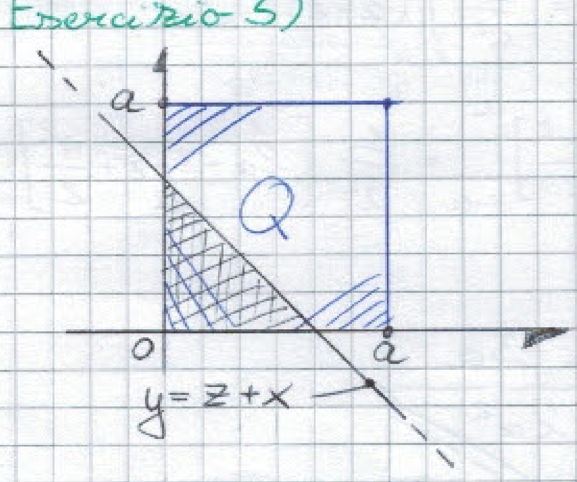
$$= P(E_1 \wedge E_2) + 2P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - P(E_1)P(\bar{E}_1) - P(E_1)P(E_1)$$

$$= P(E_1 \wedge E_2) + 2P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - P(E_1)\left[\overbrace{P(\bar{E}_1) + P(E_1)}^{=1}\right]$$

$$= P(E_1 \wedge E_2) + 2P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - P(E_1)$$

$$= \frac{28}{45} + 2\frac{11}{60} - \frac{29}{36} = \frac{11}{60} \quad \blacksquare$$

Esercizio 3)



$$f(x;y) = \frac{1}{a^2} \; ; \; Z = X + Y$$

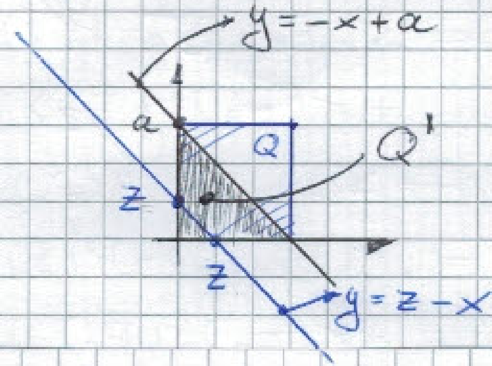
$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = P(Y \leq z + X)$$

$F_Z(z)$:

a) • Se $z = 0$, $F_Z(z) = 0$

• Se $0 \leq z \leq a$:

Caso in cui: $z=a$

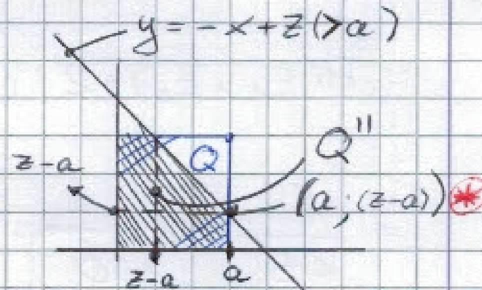


$$F_Z(z) = \iint_{Q'} f(x;y)\,dx\,dy$$

Nota: non occorre calcolare l'integrale in quanto la $f(x;y)$ è uniforme in Q

$$= (z \cdot z) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{z^2}{2a^2}$$

• Se $a \leq z \leq 2a$:



$$F_Z(z) = \iint_{Q'} f(x;y)\,dx\,dy$$

$$= 1 - P(Y \geq z - X)$$

$$= 1 - \int_{z-a}^{a} dx \int_{z-x}^{a} \frac{1}{a^2}\,dy \qquad // \; Ja$$

(*) $\begin{cases} x = z - y \\ x = a \end{cases} \iff \begin{cases} y = z - a \\ x = a \end{cases}$

Nota: nemmeno in questo caso occorre calcolare l'integrale (stesso motivo di sopra).

Lunghezza del lato del triangolo Q $= a - (z-a) = 2a - z$

$$= 1 - \left(\frac{(2a-z)(2a-z)}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \right) = 1 - \frac{4a^2 - 4az - z^2}{2a^2}$$

$$= - \frac{2a^2 - 4az + z^2}{2a^2}$$

• Se $z \geq 2a$: $F_Z(z) = 1$

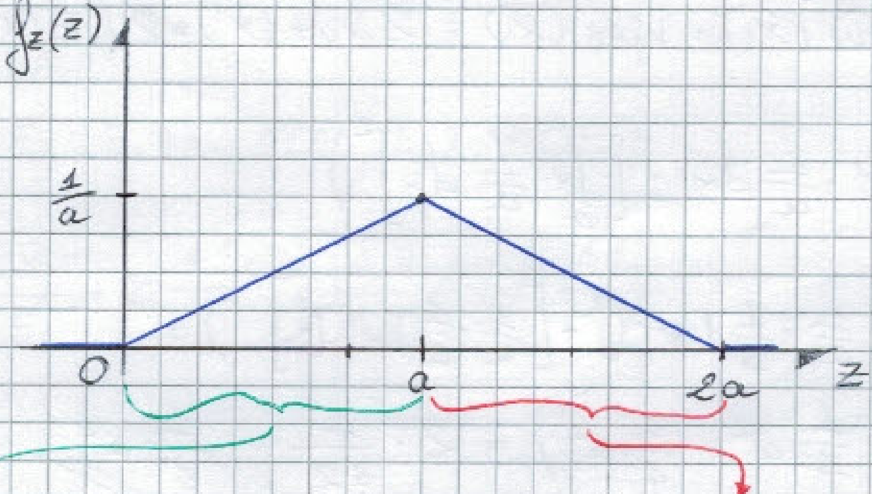
• $f_Z(z)$ Se $z < 0 \vee z \geq 2a$, $f_Z(z) = 0$

Se $0 \leq z \leq a$:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2} \cdot 2z = \frac{z}{a^2}$$

Se $a \leq z \leq 2a$:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[-\frac{2a^2-4az+z^2}{2a^2}\right] = -\frac{1}{2a^2}(-4a+2z) = \frac{2a-z}{a^2}$$



Se $z = 0$, riesce

$$f_Z(z) = \frac{0}{a^2} = 0$$

Se $z = a$, riesce:

$$f_Z(z) = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Se $z = a$, riesce

$$f_Z(z) = \frac{2a-a}{a^2} = \frac{1}{a}$$

Se $z = 2a$, riesce

$$f_Z(z) = \frac{2a-2a}{a^2} = 0$$

b) Oss 1) X e Y sono stocasticamente indipendenti in quanto:

$$f_X(x) = \int_0^a \frac{1}{a^2}\,dy = \frac{1}{a} = \int_0^a \frac{1}{a^2}\,dx = f_Y(y) \quad (1)$$

Quindi essendo:

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} = f(x;y) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ stoc. indip.}$$

Oss. 2) X e Y hanno medesima densità (vedi (1)) quindi stessa $E(X)$ e stessa $Var(X)$.

Quindi:

$$Var(Z) = Var(X+Y) \overset{\text{s. indip.}}{=} Var(X) + Var(Y) \overset{\text{Oss. 2)}}{=}$$

$$= Var(X) + Var(X) = 2\,Var(X) = 2\left(E(X^2) - [E(X)]^2\right)$$

$$= 2\left(\int_0^a x^2\cdot\frac{1}{a}\,dx - \left[\int_0^a x\cdot\frac{1}{a}\,dx\right]^2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{3}[x^3]_0^a - \left[\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}[x^2]_0^a\right]^2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^2\right) = 2\cdot\frac{a^2}{12} = \frac{1}{6}a^2$$

c)

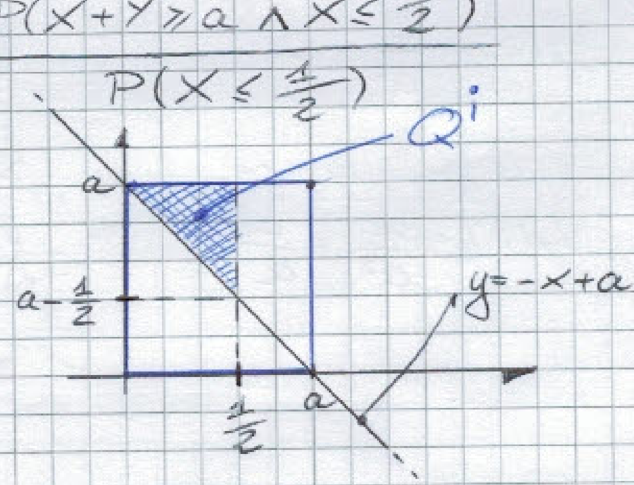
$$P(X+Y \geq a \,/\, X \leq \tfrac{1}{2}) = \frac{P(X+Y \geq a \wedge X \leq \frac{1}{2})}{P(X \leq \frac{1}{2})}$$

• Se $a > \frac{1}{2}$:

$$P(X+Y \geq a \wedge X \leq \tfrac{1}{2}) =$$

$$= \iint_{Q'} f(x;y)\,dx\,dy$$

$= (**)$



8

(**) $= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left[a-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right]}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2^3a^2}$

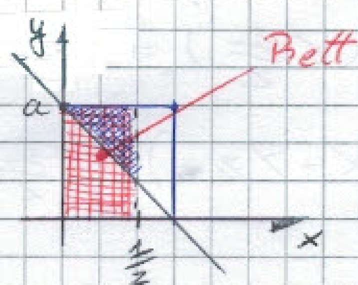
Nota: questo lato (del triangolo Q^i) non varia al variare del parametro a. Anche qui non occorre calcolare l'integrale.

Nota: dovendo calcolare la probabilità di un solo num. aleatorio, disponendo però della sola funz. di densità congiunta della coppia aleatoria, posso ragionare così:

propr: $E = E \wedge \Omega$ Nell'esercizio $\Omega = 0 \leq Y \leq a$

$$P\left(X\leq\frac{1}{2}\right) \overset{!}{=} P\left(X\leq\frac{1}{2}\wedge\Omega\right) \overset{!}{=} P\left(X\leq\frac{1}{2}\wedge 0\leq Y\leq a\right)$$

e calcolare direttamente:



$$\iint_{Rett} f(x;y)\,dx\,dy$$

Invece di calcolare la densità marginale di X.

In questo esercizio la marginale è già stata calcolata al punto b, MA in altri esercizi, quanto spiegato sopra è un trucco che potrebbe semplificare la vita.

Quindi:

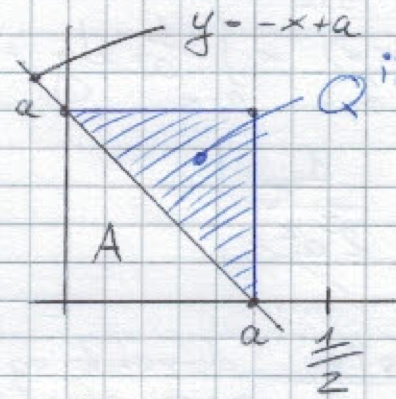
$$P\left(X\leq\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} dx \int_0^a \frac{1}{a^2}\,dy = \frac{1}{a^2}\int_0^{1/2} a\,dx = \frac{1}{2a}$$

Infine:

$$P\left(X+Y\geq a / X\leq\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^3a^2}\cdot 2a = \frac{1}{4a}$$

• se $a \le \frac{1}{2}$:

$$P\left(X+Y \ge a \,/\, X \le \tfrac{1}{2}\right) =$$



$$= \iint_{Q^{ii}} f(x;y)\,dx\,dy$$

Oss: in questo caso NON occorre calcolare l'integrale, in quanto l'area A è uguale alla $F_Z(a)$, quindi:

$$= 1 - F_Z(a) = 1 - P(Z \le a) = 1 - \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

per ipotesi

$$P\left(X \le \tfrac{1}{2}\right) \overset{!}{=} P(\Omega) = 1.$$ Quindi:

$$P\left(X+Y \ge a \,/\, X \le \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$