CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 28/5/2018

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

1) Dato l'insieme di eventi $D = \{E_1, E_1 \vee E_2, E_2 \wedge E_3\}$:
   (a) determinare la partizione generata da D;
   (b) provare che l'applicazione P: $P(E_1) = 0{,}4$, $P(E_1 \vee E_2) = 0{,}6$, $P(E_2 \wedge E_3) = 0{,}2$ è una probabilità coerente su D;
   (c) determinare i prolungamenti coerenti di P su $E_1 \vee E_3$.

2) Da un'urna contenente 3 palline bianche e 6 rosse si effettuano estrazioni di una pallina alla volta con modalità non certa: con probabilità 3/4 le estrazioni sono tutte con reimbussolamento, con probabilità 1/4 tutte senza reimbussolamento. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione" e detta S_n la frequenza assoluta di successo in *n* estrazioni (successo: uscita di pallina bianca), calcolare:
   (a) $P(E_i)$ $(i \leq 9)$, $P(\overline{E}_1 \wedge E_3)$;
   (b) la probabilità che le estrazioni avvengano senza reimbussolamento sapendo che nelle prime due estrazioni è uscita pallina bianca;
   (c) $Cov(S_3, |E_1| + |\overline{E}_2|)$;
   (d) $P(S_n = n - 1 | E_1 \wedge \overline{E}_2)$, $n \leq 3$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio di vertici (0, 0), (3, 0), (2, 1), (1,1) co densità proporzionale alla funzione $x + y$. Calcolare:
   (a) la densità marginale $f_X(x)$;
   (b) $E(X)$;
   (c) posto $Z = X^2 - Y$, $P(Z \geq 0)$.

Esercizio 1)

a) Dato $D = \{ E_1 ; E_1 \vee E_2 ; E_2 \wedge E_3 \}$,

per le proprietà dell'implicazione risce:

- $E_1 \Rightarrow E_1 \vee E_2$ sse $E_1 \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) = \emptyset$,

  quindi $E_1 \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) \wedge (E_2 \wedge E_3)' = \emptyset$

  Oss: trovo 2 costituenti banali.

- $E_2 \wedge E_3 (\Rightarrow E_2) \Rightarrow E_1 \vee E_2$ sse $E_2 \wedge E_3 \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) = \emptyset$

  quindi: $E_1' \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) \wedge (E_2 \wedge E_3) = \emptyset$

  Oss: trovo altri 2 cost. banali, MA attenzione perché 1 è già stato trovato sopra.

I 3 costituenti banali sono quindi:

1) $E_1 \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) \wedge (E_2 \wedge E_3) = \emptyset$
2) $E_1 \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) \wedge (\overline{E_2 \wedge E_3}) = \emptyset$
3) $\overline{E}_1 \wedge (\overline{E_1 \vee E_2}) \wedge (E_2 \wedge E_3) = \emptyset$

Oss: ottengo $2^3 - 3 = 5$ eventi elementari.

Quindi $\mathbb{P}_G^{\emptyset}(D) = \{$

$\omega_1 = \overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3$

$\omega_2 = E_1 \wedge E_2 \wedge E_3$

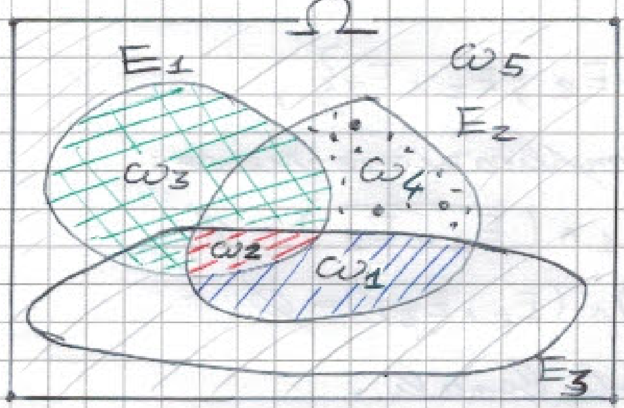
$\omega_3 = E_1 \wedge (\overline{E_2 \wedge E_3}) = E_1 \wedge (\overline{E}_2 \vee \overline{E}_3) = (E_1 \wedge \overline{E}_2) \vee (E_1 \wedge \overline{E}_3)$

$\omega_4 = \overline{E}_1 \wedge (\overline{E_2 \wedge E_3}) \wedge (E_1 \vee E_2) = (\overline{E}_2 \vee \overline{E}_3) \wedge [\underbrace{(\overline{E}_1 \wedge E_1)}_{\emptyset} \vee (\overline{E}_1 \wedge E_2)]$

$= \underbrace{(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_2)}_{\emptyset} \vee (\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3) = \overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3$

$\omega_5 = \overline{E_1 \vee E_2} = \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \}$

implica sia $\overline{E}_1$, che $\overline{E}_2 \vee \overline{E}_3$



b) Siano $P(\omega_i) = p_i$

$$
D = \begin{cases} P(E_1) = p_2 + p_3 = 0{,}4 \quad ① \\ P(E_1 \vee E_2) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}6 \\ P(E_2 \wedge E_3) = p_1 + p_2 = 0{,}2 \\ p_i \geq 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} p_5 = 1 - (p_1 + \ldots + p_4) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \\ p_3 + p_4 = 0{,}6 - (p_1 + p_2) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 \\ p_1 + \ldots + p_4 = 0{,}6 \\ p_1 + p_2 = 0{,}2 \\ p_i \geq 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} p_1 = 0{,}2 - p_2 \\ p_3 = 0{,}4 - p_4 \\ p_5 = 0{,}4 \\ p_2 \in [0 \, ; \, 0{,}2] \\ p_4 \in [0 \, ; \, 0{,}4] \end{cases}
$$

$\Longrightarrow$ L'applicazione P è una probabilità coerente in quanto D ha (infinite) soluzioni. Una di queste è:

$p_1 = 0{,}2 \; ; \; p_2 = p_4 = 0$

$p_3 = 0{,}4 \; ; \; p_5 = 0{,}4$

Vale anche $p_1 \in [0 \, ; \, 0{,}2]$ utile per punto c)

c) $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \Rightarrow E_1 \vee E_3$

$\omega_4 \Rightarrow \overline{E_1 \vee E_3}$

$\omega_5 \not\Rightarrow E_1 \vee E_3$

$\Longrightarrow$ $E_1 \vee E_3$ è logicamente semidipendente da $\mathbb{P}_6^{\phi}(D)$

Devo quindi trovare la P di:

- $(E_1 \vee E_3)_* = \bigvee_{\omega \in \mathbb{P}_6^{\phi} : \omega \Rightarrow (E_1 \vee E_3)} \omega = \omega_1 \vee \omega_2 \vee \omega_3$

Quindi:

Sono incompatibili essendo eventi elem.

$$P\left[(E_1 \vee E_3)_*\right] = P(\omega_1 \vee \omega_2 \vee \omega_3) = p_1 + p_2 + p_3 \overset{1}{=} 0{,}4 + p_1$$

- $(E_1 \vee E_3)^* = \bigvee_{\omega \in \mathbb{P}_6^{\phi} : \omega \wedge (E_1 \vee E_3) \neq \phi} \omega = \omega_1 \vee \omega_2 \vee \omega_3 \vee \omega_5$

Quindi:

$$P\left[(E_1 \vee E_3)^*\right] = P(\omega_1 \vee \ldots \vee \omega_5) = p_1 + p_2 + p_3 + p_5 \overset{!}{=} 0{,}8 + p_1$$

$\Longrightarrow P(E_1 \vee E_3) \in \left[0{,}4 + p_1 \,;\, 0{,}8 + p_1\right]$

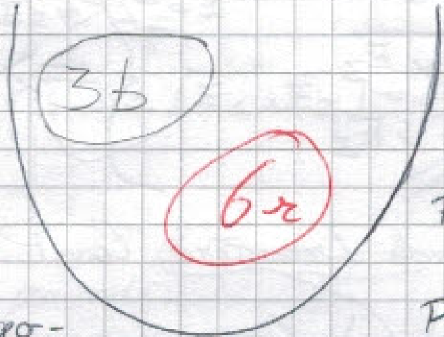
MA devo ancora provare che TUTTI i valori della P siano coerenti, quindi:

$\min\left[P(E_1 \vee E_3)\right] = 0{,}4$ (ponendo $p_1 = 0$) è coerente, essendo > 0!

$\mathrm{Max}\left[P(E_1 \vee E_3)\right] = 1$ (ponendo $p_1 = 0{,}2$) è coerente, essendo ≤ 1.

■

Esercizio 2)



Siano gli eventi:

$P(R) = \frac{3}{4}$

$R =$ 'Le estrazioni avvengono CON RIMESSA'

$P(\overline{R}) = \frac{1}{4}$

$\overline{R} =$ 'Le estrazioni avvengono SENZA RIMESSA'

$E_i =$ 'Esce b all'estrazione i-esima'

Oss: il processo stoc. è scambiabile siccome è una mistura di p.s. scambiabili

a) • $P(E_i) \overset{\text{Scamb.tà}}{=} P(E_1) = P(E_1/R)P(R) + P(E_1/\overline{R})P(R)$

$$= \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{Per } i \leq 9$$

• $P(E_1 \wedge E_3) \overset{\text{Sc.}}{=} P(E_1 \wedge E_2)$

$$= P(E_1 \wedge E_2 / R)P(R) + P(E_1 \wedge E_2 / \overline{R})P(\overline{R})$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{16} = \frac{11}{48}$$

b) $P(\overline{R} / E_1 \wedge E_2) \overset{\text{Th Bayes}}{=} \dfrac{P(E_1 \wedge E_2 / \overline{R})\, P(\overline{R})}{P(E_1 \wedge E_2)}$

$$P(E_1 \wedge E_2) \overset{\text{Dis.ne + Fatt.ne}}{=} \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \overset{= P(E_1 \wedge E_2 / \overline{R})}{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{48}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{48}{5} = \frac{1}{5}$$

c) <u>Oss:</u> $Cov(S_3; |E_1| + |E_2|) = Cov\left(\sum_{i=1}^{3} |E_i| ; |E_1| + |E_2|\right) =$

Bilinearità

$$= Cov(|E_1|; |E_1|) + Cov(|E_1|; |E_2|) + Cov(|E_2|; |E_1|) +$$

$$+ Cov(|E_2|; |E_2|) + Cov(|E_3|; |E_1|) + Cov(|E_3|; |\overline{E}_2|)$$

<u>Oss:</u> $Cov(|E_i|; |\overline{E}_J|) = Cov(|E_i|; 1 - |E_J|) \overset{\text{Bilinearità}}{=}$

$$= Cov(|E_i|; 1) + Cov(|E_i|; -|E_J|) =$$

$Cov(X; c) = 0$ se $c \in \mathbb{R}$.

$$= 0 - Cov(|E_i|; |E_J|)$$

$$= Var(|E_1|) - \cancel{Cov(|E_1|; |E_2|)} + \cancel{Cov(|E_1|; |E_2|)} -$$

$$- Var(|E_2|) + Cov(|E_1|; |E_3|) - Cov(|E_2|; |E_3|)$$

<u>Oss</u>: essendo gli eventi scambiabili (e quindi equiprobabili) le Cov fra indicatori di eventi diversi sono uguali. Per lo stesso motivo anche le Var (di ind. di eventi diversi) sono uguali. Quindi:

$$= 0$$

d) $P(S_n = n-1 / E_1 \wedge \overline{E}_2)$ con $n \leq 3$

• <u>Se $n = 1$:</u>

$E_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow E_1 = (\overline{\overline{E_1}})$

$$P(S_1 = 0 / E_1 \wedge \overline{E}_2) \underset{(S_1 = 0) = \overline{E}_1}{=} P(\overline{E}_1 / E_1 \wedge \overline{E}_2) = P(\emptyset / E_1 \wedge \overline{E}_2) = 0$$

• Se $n=2$:

$$P(S_2=1/E_1\wedge\bar{E}_2) \overset{E_1\wedge\bar{E}_2 \Rightarrow S_2=1}{=} P(\Omega/E_1\wedge\bar{E}_2)=1$$

• Se $n=3$:

"So che" la I estr. è b, la II è rossa quindi:

$$P(S_3=2/E_1\wedge\bar{E}_2) = P(E_1\wedge\bar{E}_2\wedge E_3/E_1\wedge\bar{E}_2)$$

$$= \frac{P(E_1\wedge\bar{E}_2\wedge E_3)}{P(E_1\wedge\bar{E}_2)} = \frac{37}{504}\cdot\frac{48}{11} = \frac{74}{231}$$

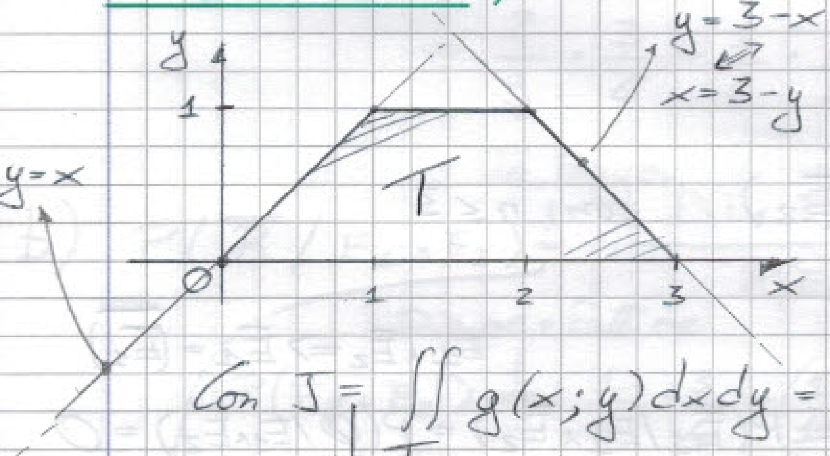
Con:

$$P(\bar{E}_1\wedge E_2\wedge E_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{18}+\frac{1}{56} = \frac{37}{504}$$

$$P(E_1\wedge\bar{E}_2) = \frac{11}{48}$$ → Trovato prima.

Esercizio 3)



$$f(x;y) = \frac{6}{23}\underbrace{(x+y)}_{=g(x;y)}$$

$$k\cdot J = 1 \iff K = \frac{1}{J} = \frac{6}{23}$$

$$\text{Con } J = \iint_T g(x;y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{3-y}(x+y)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_y^{3-y} dy = \int_0^1 \left[\frac{(3-y)^2}{2}+y(3-y)-\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)\right] dy$$

$$= \odot$$

$$\odot = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(9 \cancel{-6y} \cancel{+y^2} \cancel{+6y} - 2y^2 \cancel{-y^2} - 2y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (9-4y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left[9y - 4\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{23}{3} = \frac{23}{6}$$

a)

$$f_X(x) = \frac{6}{23}\begin{cases} \int_0^x (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{3}{2}x^2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ \int_0^{3-x} (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{3-x} = \frac{1}{2}(9-x^2) & \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

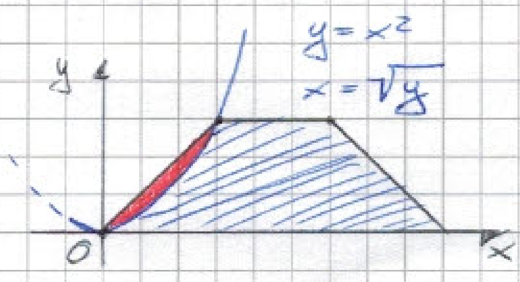
b)

$$E(X) = \frac{6}{23}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 3x^3\,dx + \int_1^2 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx + \int_2^3 \frac{1}{2}x(9-x^2)\,dx\right]$$

$$= \frac{6}{23}\left(\frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[9\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_2^3\right)$$

$$= \frac{6}{23}\left(\frac{3}{8} + \frac{37}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}\right) = \frac{79}{46}$$

c)



Sia $Z = X^2 - Y$

$$P(Z > 0) = P(X^2 - Y > 0) = P(Y < X^2) = 1 - P(Y \ge X^2)$$

Con $P(Y \ge X^2) = \iint f(x;y)\,dx\,dy = \odot\odot$

$$(\cdot\cdot) = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{6}{23}(x+y)dx = \frac{6}{23}\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_y^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{6}{23}\int_0^1 \frac{1}{2}(-3y^2+2\sqrt{y^3}+y)dy$$

$$= \frac{6}{23}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{230}.$$ Quindi:

$$P(Z>0) = 1-\frac{9}{230} = \frac{221}{230}$$