CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 10/1/2019

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) Con riferimento ad una partita di calcio (regolare) fra le squadre A e B:

(a) determinare la partizione generata dagli eventi

10

E_1 = 'A vince l'incontro'
E_2 = 'L'incontro termina in parità'
E_3 = 'Durante l'incontro si segnano 3 reti';

(b) verificare la coerenza dell'assegnazione di probabilità $P(E_1) = 0{,}4$, $P(E_2) = 0{,}3$, $P(E_3) = 0{,}4$;

(c) stabilire se è coerente prolungare P sull'evento aggiuntivo F = 'A vince segnando al più 3 reti' ponendo $P(F) = 0.05$. Determinare inoltre, se esiste, il massimo valore di $P(F)$ per cui il prolungamento di P su F è coerente.

2) L'urna A contiene 5 palline bianche e 15 rosse, l'urna B contiene 10 palline bianche e 10 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, scelta con un meccanismo aleatorio che assegna probabilità 3/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":

11

(a) Calcolare $P(E_2 \wedge E_6 \mid \bar{E}_2 \vee E_5)$, $P(E_2 \vee E_6 \mid E_2 \wedge E_5)$, $P(\bar{E}_2 \vee \bar{E}_6 \mid \bar{E}_2 \vee E_5)$;

(b) in ogni coppia di estrazioni successive, di cui la prima è dispari, Tizio guadagna 1 € se la pallina dell'estrazione dispari e di quella (pari) successiva hanno lo stesso colore. Determinare la speranza matematica del guadagno di Tizio nelle prime 10 estrazioni.

(c) Stabilire la correlazione fra gli eventi 'Nelle prime 2 estrazioni Tizio guadagna 1 €' e 'Le estrazioni vengono effettuate dall'urna B'.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (0,0), (1,1), (−1,1) con densità proporzionale a $g(x,y) = e^{-y}$. Calcolare:

(a) le densità marginali;

10

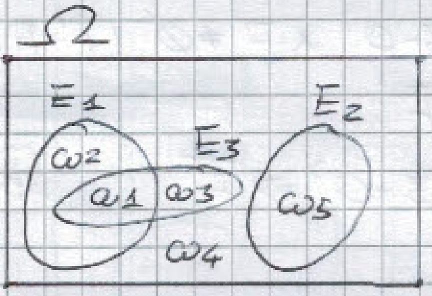
(b) E(X).

Esercizio 1)

a) Succede che: 1) $E_1 \wedge E_2 = \emptyset$, quindi $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3' = \emptyset$ $(E_3' = E_3 \sigma \bar{E}_3)$
ho trovato 2 costituenti impossibili

2) $E_3 \Rightarrow \bar{E}_2$, quindi $E_3 \wedge \bar{E}_2 = E_3 \neq \emptyset$ e $E_2 \wedge \bar{E}_3 = \emptyset$,

quindi $E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3 = \bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E} = \emptyset$, un costituente impossibile l'avevo già trovato sopra, qui scopro che c'è n'è un terzo (cioè $\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3 = \emptyset$).



Nota: dalla partizione risultano 6 atomi. I costituenti di una $\mathbb{P}_G$ sono 2^n, in questo caso $2^3 = 8$.

$8 - 3$ (i cost.ti $= \emptyset$ trovati sopra) $= 5$ (quelli trovati nel disegno

Quindi:

$$\mathbb{P}_G^{\emptyset}(E_1, E_2, E_3) = \{\overset{\omega_2}{\overset{\shortparallel}{E_1 \wedge \bar{E}_3}}, \overset{\omega_1}{\overset{\shortparallel}{E_1 \wedge E_3}}, \overset{\omega_3}{\overset{\shortparallel}{\bar{E}_1 \wedge E_3}}, \overset{\omega_5}{\overset{\shortparallel}{E_2}}, \overset{\omega_4}{\overset{\shortparallel}{\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3}}\}$$

Nota: gli atomi possono venir scritti anche nel modo 'esteso' cioè (per es.) $E_1 \wedge \bar{E}_3 = \omega_2 = E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3$ è indifferente (come si scrivono).

b) Pongo $P(\omega_i) = p_i$

$$(s) = \begin{cases} P(E_1) = p_1 + p_2 = 0,4 & ① \\ P(E_3) = p_1 + p_3 = 0,4 \\ P(E_2) = p_5 = 0,3 \\ \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 \\ p_i \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p_2 = p_3 & ② \\ p_1 = 0,4 - p_3 \\ p_5 = 0,3 \\ \sum_i p_i = 1 \\ p_i \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile perché riesco a trovare almeno una soluzione (c'è ne sono infinite). Per esempio:

1

$p_1 = 0,4$, $p_2 = p_3 = 0$, $p_5 = 0,3$, $p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_5 = 0,3$

La soluzione sopra, rispetta i vincoli $\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$.

$\Rightarrow$ la P assegnata è coerente

c) Dato F = 'A vince segnando al più 3 reti'. Riesce che:

ω_1 = 'A vince, 2-1 o 3-0' $\Rightarrow F$

ω_2 = 'A vince, ma NON 2-1 né 3-0' $\wedge F' \neq \emptyset$ ($F' = F$ o F)

ω_3 = 'B vince, 2-1 o 3-0' $\Rightarrow \overline{F}$

ω_4 = 'B vince, ma non 2-1, né 3-0' $\Rightarrow \overline{F}$

ω_4 = 'si pareggia' $\Rightarrow \overline{F}$

Quindi: $\left.\begin{array}{l} \exists\, \omega_i (= \omega_1) : \omega_i \Rightarrow F \\ \exists\, \omega_i (= \omega_2) : \omega_i \wedge F \neq \emptyset \;\wedge\; \omega_i \wedge \overline{F} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ F è logicam. semidipendente da $\mathbb{P}_G^{\emptyset}$.

- Per il teorema (descritto in teoria): sia P coerente su $\mathbb{P}_G^{\emptyset}$

dati $F_* = \bigvee_{\omega \Rightarrow F} \omega$; $F^* = \bigvee_{\omega \wedge F \neq \emptyset} \omega$

Un prolung. P' di P su $A_L(\mathbb{P}_G^{\emptyset}) \cup \{F\}$ è coerente

sse $P'(F) \in [P(F_*) ; P(F^*)]$.

Succede che: $F_* = \omega_1$; $F^* = \omega_1 + \omega_2$

$P(F_*) = p_1$; $P(F^*) = p_1 + p_2 = 0,4$

Quindi $P'(F) \in [p_1 ; 0,4]$ (*).

Quindi: il valore Max di P'(F) è $\xrightarrow{\text{per (*)}}$ 0,4. P'(F) = 0,05 potrebbe andar bene, MA ATTENZIONE perchè:

se $\omega_1 \Rightarrow F$, allora $p_1 \leq 0,05$, quindi $p_1 = 0,05 + \varepsilon$ con $\varepsilon \in [0 ; 0,05]$.

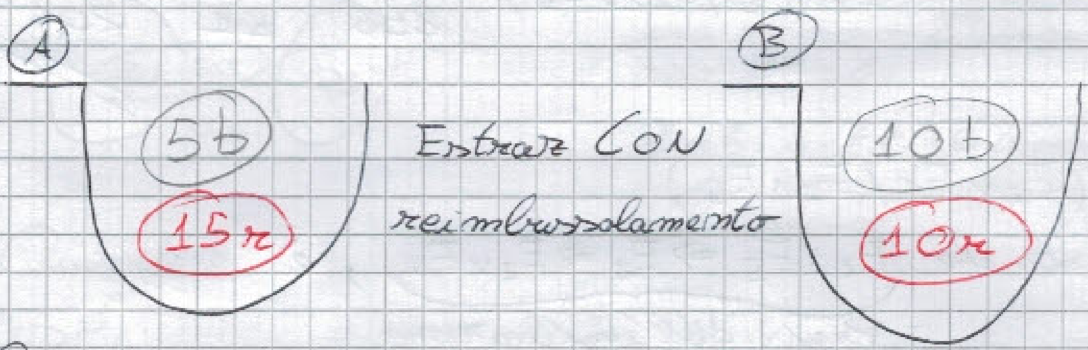
Dopo le osservazioni ottengo dal sistema al punto b) che $p_2 = 0,4 - p_1 = 0,4 - 0,05 + \varepsilon = 0,35 + \varepsilon$ ①

e $p_2 = p_3 = 0,35 + \varepsilon$. Riesce:

$p_1 + p_2 + p_3 + p_5 = 1,05 + 2\varepsilon > 1$, MA per la condizione $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$ ciò non è possibile!

Quindi non è coerente porre $P'(F) = 0,05$

Esercizio 2)



Estraz CON reimbussolamento

Siano:

A = 'Estraggo dall'urna A' ; $P(A) = \frac{3}{4}$

$(\bar{A}=)\,B$ = 'Estraggo dall'urna B' ; $P(B) = \frac{1}{4}$

E_i = 'Esce b all'iesima estrazione'

a)

- $P(E_2 \overset{**}{\wedge} E_6 / \bar{E}_2 \vee E_5) = \dfrac{P(E_2 \wedge E_6 \wedge (\bar{E}_2 \vee E_5))}{P(\bar{E}_2 \vee E_5)}$

$\circledast\, P(E_2 \wedge E_6 \wedge (\bar{E}_2 \vee E_5)) =$

$= P[\underbrace{(E_2 \wedge E_6 \wedge \bar{E}_2)}_{\emptyset} \vee (E_2 \wedge E_6 \wedge E_5)] = P(E_2 \wedge E_5 \wedge E_6)$

Scambilità

$= P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_3 / A)P(A) + P(E_1 \wedge \ldots \wedge E_3 / B)P(B)$

$\perp \left(\frac{5}{20}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{256}$

$$(*)\ P(\overline{E}_2 \vee E_5) = 1 - P(\overline{\overline{E}_2 \vee E_5}) \overset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(E_2 \wedge \overline{E}_5)$$

$$\underbrace{P(E_2 \wedge \overline{E}_5) = P(E_1 \wedge \overline{E}_2) =}$$

Disint.

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{64}$$

$$= 1 - \frac{13}{64} = \frac{51}{64}$$

Quindi

$$P(E_2 \wedge E_6 / \overline{E}_2 \vee E_5) = \frac{11}{256}\cdot\frac{64}{51} = \frac{11}{204}$$

- $P(E_2 \vee E_6 / E_2 \wedge E_5)$

  Visto che $\underbrace{E_2 \wedge E_5 \Rightarrow E_2 \Rightarrow E_2 \vee E_6}_{\text{Propr. dell'implicazione}}$,

  è $P(E_2 \vee E_6 / E_2 \wedge E_5) = P(\Omega/\Omega) = 1$

- $P(\overline{E}_2 \vee \overline{E}_6 / \overline{E}_2 \vee E_5) \overset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(E_2 \wedge E_6 / \overline{E}_2 \vee E_5)$ $= (**)$

  $= 1 - \frac{11}{204} = \frac{193}{204}$

b) Tizio guadagna 1€ se $\left[(E_{2i-1} \wedge E_{2i}) \vee (\overline{E}_{2i-1} \wedge \overline{E}_{2i})\right]$ $(i \neq j)$

10 estrazioni = 5 coppie di estrazioni

Il guadagno ∀ coppia di estrazioni è dato da:

$$G = \sum_{i=1}^{5} \left|(E_{2i-1} \wedge E_{2i}) \vee (\overline{E}_{2i-1} \wedge \overline{E}_{2i})\right|$$

Indicatore generico dell'evento: (Esce coppia bianca o esce coppia rossa).

$$\underset{4}{\underline{E}}(G) \underset{\text{Linearita}}{=} \sum_{i=1}^{5} E\left(\left|(E_{2i-1} \wedge E_{2i}) \vee (\overline{E}_{2i-1} \wedge \overline{E}_{2i})\right|\right) =$$

$$E(G) = \sum_{i=1}^{5} P\left[\overbrace{(E_{2i-1} \wedge E_{2i})}^{A} \vee \overbrace{(\bar{E}_{2i-1} \wedge \bar{E}_{2i})}^{B} \right]$$

Siccome: $E(|F|) = P(F)$

$$= \sum_{i=1}^{5} \left[P(E_1 \wedge E_2) + P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) \right]$$

Scambiabilità $P(E_{2i-1} \wedge E_{2i}) = P(E_1 \wedge E_2)$ perchè il PS è scambiabile dato che è mistura di P.S. condizionati scambiabili

$$= 5 \left[P(E_1 \wedge E_2) + P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) \right]$$

→ stò sommando 5 volte il medesimo addendo

$$P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1 \wedge E_2 / A) P(A) + P(E_1 \wedge E_2 / B) P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{64}$$

$$P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{31}{64}$$

$$= 5 \left(\frac{7}{64} + \frac{31}{64} \right) = \frac{95}{32}$$

c) 'Nelle prime 2 estraz. Tizio guadagna 1€' = $(G=1)$

'Le estraz. vengono effettuate da urna B' = B

$P(G=1) = P(E_1 \wedge E_2) + P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) = \frac{38}{64}$ (Vedi punto b. Sopra)

$$P(G=1/B) = P\left[(E_1 \wedge E_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2) / B \right]$$

Propr. delle operazioni tra eventi condizionati

$$= P\left[(E_1 \wedge E_2 / B) \vee (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 / B) \right]$$

$$= P(E_1 \wedge E_2 / B) + P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 / B)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

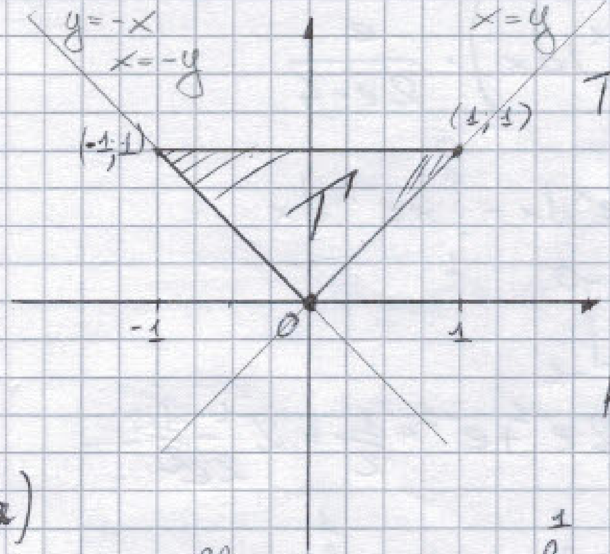
Studio quindi la correlazione:

$$P(G=1/B)=\frac{1}{2}<\frac{38}{64}=P(G=1)$$

$\Longrightarrow$ $(G=1)$ e B sono correlati negativamente

Esercizio 3) al foglio seguente

Esercizio ③



$$T = \{(x;y) : 0 \le y \le 1 ; -y \le x \le y\}$$

$$f(x;y) = \frac{e}{2e-4} e^{-y}$$

$$k \iint_T g(x;y)\,dx\,dy = 1$$

a)

$$J = \iint_T e^{-y}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{-y}dy \int_{-y}^{y} dx = \int_0^1 e^{-y}[x]_{-y}^{y}\,dy$$

$$= \int_0^1 e^{-y}(y-(-y))\,dy = \int_0^1 e^{-y}2y\,dy = 2\int_0^1 y e^{-y}\,dy$$

$$J_1 = \int \underset{f(x)}{y}\,\overset{g'(x)}{e^{-y}}\,dy = y(-e^{-y}) - \int -e^{-y}\,dy$$

Nota: si integra per parti

$$= -ye^{-y} + \int e^{-y}\,dy = -ye^{-y} - e^{-y} \ (+c)$$

$$= -e^{-y}(y+1)\ (+c)$$

$$= 2\left[-e^{-y}(y+1)\right]_0^1 = 2\left[\left(-e^{-1}\ 2\right) - \left(-e^{0}(0+1)\right)\right]$$

$$= 2\left[-2e^{-1}+1\right] = -\frac{4}{e}+2 = \left(\frac{-4+2e}{e}\right) = \left(\frac{2(e-2)}{e}\right)$$

$$= \frac{2e-4}{e}$$

$$f_x(x) = \frac{e}{2e-4}\begin{cases} \int_{-x}^{1} e^{-y}\,dy = -\left[e^{-y}\right]_{-x}^{+1} = -\left(e^{-1}-e^{x}\right) = \underline{e^{x}-e^{-1} \text{ se } -1 \le x \le 0} \\ \int_{x}^{1} e^{-y}\,dg = -\left[e^{-y}\right]_{x}^{1} = -\left(e^{-1}-e^{-x}\right) = \underline{e^{-x}-e^{-1} \text{ se } 0 \le x \le 1} \end{cases}$$

$$f_x(y) = \frac{e}{2e-4}\int_{-y}^{y} e^{-y}\,dx = \frac{e}{2e-4} e^{-y}[x]_{-y}^{y} = \underline{\frac{e}{2e-4} 2ye^{-y} \text{ se } 0 \le y \le 1}$$

b)

$$E(X) = \left(\int_{-1}^{0} x(e^{x} - e^{-1})\,dx + \int_{0}^{1} x(e^{-x} - e^{-1})\,dx\right) \cdot \frac{e}{2e-4}$$

$$J_3 = \int_{-1}^{0} (xe^{x} - xe^{-1})\,dx = \int_{-1}^{0} xe^{x}\,dx - \int_{-1}^{0} xe^{-1}\,dx$$

$$= \left[\, e^{x}(x-1)\right]_{-1}^{0} - e^{-1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \cancel{1 - \left(e^{-1} + \frac{1}{2}\right)} = -1 + 2e^{-1} + e^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5-2e}{2e}$$

$$J_4 = \int_{0}^{1} (xe^{-x} - xe^{-1})\,dx = \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx - \int_{0}^{1} xe^{-1}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}(x+1)\right]_{0}^{1} - e^{-1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= (-2e^{-1}) - (-1) - e^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2e^{-1} - \frac{1}{2e} = \frac{2e-5}{2e}$$

$$= \left[-\frac{2e+5}{2e} + \frac{2e-5}{2e}\right] \cdot \frac{e}{2e-4} = 0$$

$$= \cancel{\left[e^{-1} - \frac{1}{2}(1 - e^{-1})\right] \cdot \frac{e}{2e-4}}$$