CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 31/5/2017

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

1) Siano X il punto realizzato lanciando un dado regolare a 6 facce, Y il primo estratto sulla ruota del lotto di Venezia nella prossima estrazione. Posto E = '$X + Y$ è dispari', E_X = 'X è pari', E_Y = 'Y è pari',

(a) determinare la partizione generata da E, E_X, E_Y;

(b) studiare la correlazione fra le coppie (E, E_X), (E, E_Y), (E_X, E_Y);

(c) i tre eventi E, E_X, E_Y sono stocasticamente indipendenti?

2) L'urna A contiene 3 palline bianche e 3 rosse, l'urna B contiene 2 palline bianche e 4 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con contagio unitario da una delle due urne, scelta con meccanismo aleatorio che assegna probabilità 2/5 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":

(a) calcolare $P(E_1 \wedge E_3)$, $P(E_5|E_6)$, $P(E_3|E_1 \vee E_3)$, $P(\overline{E}_3 \wedge E_4|E_4)$;

(b) Tizio partecipa ad un gioco in cui paga 5 unità monetarie in ogni estrazione pari se esce pallina bianca e riceve x unità monetarie in ogni estrazione dispari, ancora se esce pallina bianca. Il gioco termina dopo 15 estrazioni.

(b1) calcolare la media e la varianza del guadagno di Tizio;

(b2) determinare x in modo che il gioco sia equo.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ con densità congiunta proporzionale a $(x + 1)(y + 1)$. Determinare:

(a) la funzione di densità di X;

(b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel punto $(1, 1/2)$;

(c) $P(X + Y > 0)$; $P(X + Y \leq 0 \mid Y \leq 1/2)$.

Esercizio 1)

X = punto realizzato al lancio del dado

Y = I estratto sulla ruota di VE (lotto)

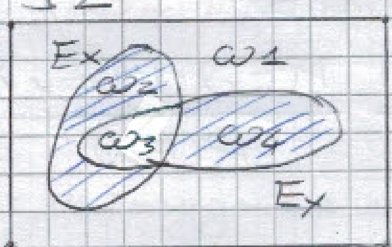
Dati gli eventi:

E = 'X + Y è dispari'

E_X = 'X è pari'

E_Y = 'Y è pari'

a) Ω



= E

E, è logicamente dipendente dalla $\mathbb{P}_6(E_X; E_Y)$

$\omega_1 = \overline{E}_X \wedge \overline{E}_Y$ = 'X ed Y sono dispari' $\Rightarrow \overline{E}$

$\omega_2 = E_X \wedge \overline{E}_Y$ = 'X pari, Y dispari' $\Rightarrow E$

$\omega_3 = E_X \wedge E_Y$ = 'X ed Y entrambi pari' $\Rightarrow \overline{E}$

$\omega_4 = \overline{E}_X \wedge E_Y$ = 'X dispari, Y pari' $\Rightarrow E$

b) Siano:

$P(E_X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(E_Y) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$

$P(E) = P(E_X \wedge \overline{E}_Y) + P(\overline{E}_X \wedge E_Y)$ $\left[(E_X \wedge \overline{E}_Y) \wedge (\overline{E}_X \wedge E_Y) = \emptyset \right]$

$\vdash$ E_X, E_Y sono stoc. indipendenti

$= P(E_X)P(E_Y) + P(E_X)P(E_Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{2}$

$$\text{stoc. indip.}$$

- $P(E/E_x) = P(\overline{E}_y / E_x) \overset{|}{=} P(\overline{E}_y) = \frac{1}{2} = P(E) \Longrightarrow (*)$

↳ Nota: è possibile che $X+Y$ sia dispari, 'sapendo che' X è pari (è equivalente a dire E/E_x) solo se Y è dispari. Quindi calcolo

$P($'Y è dispari' sapendo che: 'X è pari'$)$ è come dire:

$$P(\overline{E}_x / E_x)$$

Si sarebbe potuto agire anche così:

$$P(E/E_x) = \frac{P(E \wedge E_x)}{P(E_x)} = \frac{P(\text{'}X+Y \text{ è disp.' ed anche '}X \text{ è pari'})}{P(X \text{ è pari})}$$

$$= \frac{P(E_x \wedge \overline{E}_y)}{P(E_x)} \overset{\text{S. indip.}}{=} \frac{P(E_x)\cdot P(\overline{E}_y)}{P(E_x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

$(*) \Longrightarrow$ E ed E_x sono incorrelati

- $P(E/E_y) = P(\overline{E}_x / E_y) \overset{S.i}{=} P(\overline{E}_x) = \frac{1}{2} = P(E) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ E ed E_y sono incorrelati.

- $P(E_x/E_y) \overset{S.i}{=} P(E_x) = 1/2 \Rightarrow E_x, E_y$ incorrelati

Nota: stocastica indipendenza $\Rightarrow$ incorrelazione

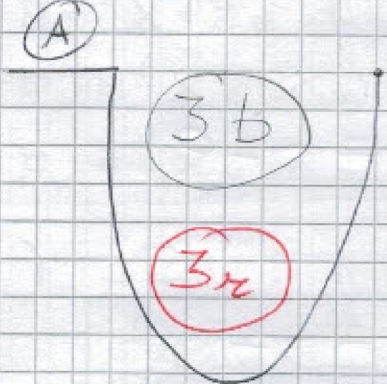
c) $P(E/E_x \wedge E_y) = P(\emptyset / E_x \wedge E_y) = 0 \neq \frac{1}{2} = P(E)$

<u>Nota</u>: non è possibile che '$X+Y$ è dispari' sapendo che 'X è pari' ed anche 'Y è pari'.

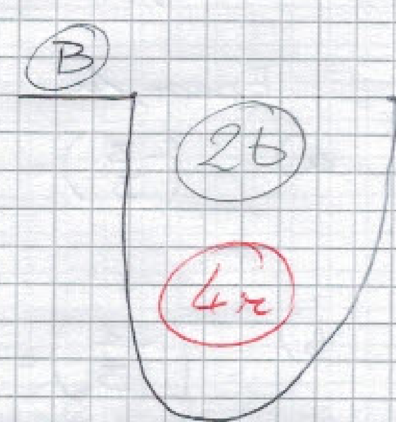
Nota: essendo $0 < P(E)P(E_x)P(E_y) = \frac{1}{8} < 1$ mi basta verificare l'uguaglianza alla pag. precedente, NON mi occorre verificarne altre come:

$P(E_x / E \wedge E_y)$.

Esercizio 2)



Estrazioni CON contagio unitario ($a=1$)



$A =$ 'estraggo da urna (A)' ; $P(A) = \frac{2}{5}$

$(\bar{A} =) B =$ ' " " " (B)' ; $P(B) = \frac{3}{5}$

$E_i =$ 'esce b all'i-esima estrazione'

a) $P(E_i \wedge E_j) = ?$

- Se $i = j$: $P(E_i \wedge E_i) = P(E_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- Se $i \neq j$: (con $i, j = 1, \dots, n$)

$$P(E_i \wedge E_j) = P(E_i \wedge E_j / A)P(A) + P(E_i \wedge E_j / B)P(B)$$

$$= \frac{\binom{-3}{2}\binom{-3}{0}}{\binom{-6}{2}\binom{2}{2}} \cdot \frac{2}{5} + \frac{\binom{-2}{2}\binom{-4}{2}}{\binom{-6}{2}\binom{2}{2}} \cdot \frac{3}{5}$$

Nota: usare questo metodo porta a conti lunghi da svolgere! Diventa conveniente solo quando le estrazioni da effettuare sono tante.

Nota: calcolo dei coefficienti binomiali negativi

i) $\binom{-n}{0} \equiv 1$. Esempio: $\binom{-3}{0} = 1$

ii) $\binom{-n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

Esempi:

a) $\binom{-3}{3} = \dfrac{(-3)(-4)(-5)}{3\cdot 2} = -10$

b) $\binom{-1}{3} = \dfrac{(-1)(-2)(-3)}{3\cdot 2} = -1$

c) $\binom{-3}{1} = \dfrac{-3}{1} = (-3)$

d) $\binom{-4}{2} = \dfrac{(-4)(-5)}{2} = 10$

Ritornando alla $P(E_i \wedge E_j)$ è meglio calcolare:

$$P(E_i \wedge E_j) = P(E_1 \wedge E_2)$$

Scamb $= P(E_1/A)\,P(E_2/A \wedge E_1)\,P(A) + P(E_1/B)\,P(E_2/B \wedge E_1)\,P(B)$

$$= \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5} + \frac{2}{\underset{2}{\cancel{6}}}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5} = \frac{4}{35} + \frac{3}{35} = \frac{1}{5}$$

$$\bullet\ P(E_5/E_6) = \frac{P(E_5 \wedge E_6)}{P(E_6)} \overset{Sc.}{=} \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_1)} = \frac{1}{\cancel{5}_{1}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet\ P(E_3/E_1 \vee E_3) = \frac{P(E_3 \wedge (E_1 \vee E_3))}{P(E_1 \vee E_3)}$$

Proprietà dell'implicazione

$E_3 \Rightarrow E_1 \vee E_3$

Quindi:

$E_3 \wedge (E_1 \vee E_3) = E_3$

$$= \frac{P(E_3)}{P(E_1 \vee E_2)} = \frac{P(E_1)}{2P(E_1) - P(E_1 \wedge E_2)} = \frac{\frac{2}{5}}{2 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\cancel{5}_{1}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet\ P(\bar{E}_3 \wedge E_4/E_4) = \frac{P(\bar{E}_3 \wedge E_4)}{P(E_4)} \overset{Sc.}{=} \frac{P(\bar{E}_1 \wedge E_2)}{P(E_1)}$$

$$P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = P(\bar{E}_1/A)P(E_2/A \wedge \bar{E}_1)P(A) + P(\bar{E}_1/B)P(E_2/\bar{E}_1 \wedge B)P(B)$$

$$= \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{\cancel{2}_{1}}} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{5} + \frac{4}{\cancel{6}_{\cancel{2}_{1}}} \cdot \frac{\cancel{2}^{1}}{7} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{5} = \frac{3}{35} + \frac{4}{35} = \frac{1}{5}$$

Quindi

$$P(\bar{E}_3 \wedge E_4/E_4) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Tizio:

paga 5, se E_{2i} = 'Esce b all'estraz. pari'

riceve x, se E_{2i-1} = 'Esce b all'estraz. dispari'

Quindi $G = \sum_{i=1}^{8} x|E_{2i-1}| - \sum_{i=1}^{7} |E_{2i}| \cdot 5$

$$E(G) = E\left[\sum_{i=1}^{8} x\,|E_{2i-1}| - \sum_{i=1}^{7} 5\,|E_{2i}|\right]$$

$$= \sum_i^{8} x\,E(|E_{2i-1}|) - \sum_i^{7} 5\,E(|E_{2i}|)$$

$E(|E_{2i}|) = P(E_{2i})$

$$= \sum_i^{8} x\,P(E_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{7} 5\,P(E_{2i})$$

Scambiabilità. Essendo gli eventi E_{2i-1} fra loro equiprobabili (stessa cosa per gli E_{2i}), mi ritrovo a sommare 8 volte (7 volte) lo stesso addendo (cioè $P(E_{2i-1})$). Quindi passo da (ossia) $\sum_{i=1}^{8} P(E_{2i-1})$ a: $8P(E_{2i-1})$

$$= 8x\,P(E_1) - 35\,P(E_1)$$

$$= P(E_1)\cdot(8x - 35) = \frac{16}{5}x - 14$$

$$Var(G) = Var\left(\sum_{i=1}^{8} x\,|E_{2i-1}| + \sum_{i=1}^{7} (-5)\,|E_{2i}|\right)$$

$$= Var\left(\sum_i^{8} x\,|E_{2i-1}|\right) + Var\left(\sum_i^{7} (-5)\,|E_{2i}|\right) + 2\,Cov\left(\sum_{i=1}^{8} x\,|E_{2i-1}|; \sum_{i=1}^{7} (-5)\,|E_{2i}|\right)$$

$$= x^2\left[\sum_i^{8} Var(|E_{2i-1}|) + 2\binom{8}{2}^{*} Cov(|E_{2i-1}|; |E_{2j-1}|)\right] +$$

$$+ 25\left[\sum_i^{7} Var(|E_{2i}|) + 2\binom{7}{2} Cov(|E_{2i}|; |E_{2j}|)\right]$$

$$+ 2\sum_i^{8} x \sum_j^{7} (-5)\,Cov(|E_{2i-1}|; |E_{2j}|)$$

Viene trasformato da i a j per praticità

* Nota:

$$\binom{8}{2} = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j>i}$$

Generalizzando

$$\binom{n}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}.$$

$$Var(|E|) = P(E)P(\bar{E})$$

$$Cov(|E|; |F|) = P(E \wedge F) - P(E)P(F)$$

$$= (**)$$

$$(**) = x^2\left[8P(E_1)P(\overline{E}_1) + 2\binom{8}{2}\left(P(E_1 \wedge E_2) - P^2(E_1)\right)\right]$$

$$+25\left[7P(E_1)P(\overline{E}_1) + 2\binom{7}{2}P(E_1 \wedge E_2) - P^2(E_1)\right]$$

$$+2\cdot(-5)\cdot x \cdot 7 \cdot 8\left(P(E_1 \wedge E_2) - P^2(E_1)\right)$$

$\rightarrow$ Siano $p_1 = P(E_1)$, $q_1 = P(\overline{E}_1)$, $p = P(E_1 \wedge E_2)$

$$= x^2\left[8p_1q_1 + 56(p-(p_1)^2)\right] + 25\left[7p_1q_1 + 42(p-(p_1)^2)\right]$$

$$-560x\left(p-(p_1)^2\right)$$

$$= (p_1q_1)(8x^2+175) + (p-(p_1)^2)(56x^2+1050-560x)$$

$$p_1q_1 = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25} \;;\quad p-(p_1)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$= \frac{6}{25}(8x^2+175) + \frac{1}{25}(56x^2+1.050-560x)$$

$$= \frac{48}{25}x^2 + 42 + \frac{56}{25}x^2 + 42 - \frac{112}{5}x$$

$$= \frac{104}{25}x^2 - \frac{112}{5}x + 84 = Var(G) \quad (>0\ \forall x)$$

Nota: NON applicare la scambiabilità in questo modo:

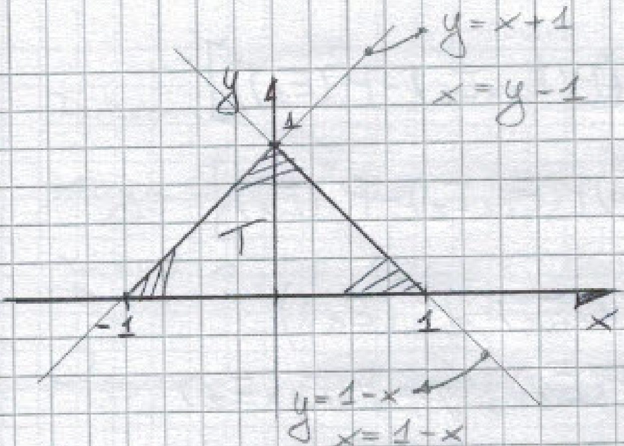
$$Var\left(\sum_{i=1}^{8} x|E_{2i-1}| + \sum_{i=1}^{7}(-5)|E_{2i}|\right) \neq Var\left(\sum_{i=1}^{8}|E_i| + \sum_{J=1}^{7}(-5)|E_J|\right)$$

Qui gli indici NON sono consecutivi

Qui gli indici SONO consecutivi. Dà problemi con $2(-5)x\sum_i^8\sum_J^7 Cov(|E_i|;|E_J|)$

c) Affinché il gioco sia equo dev'essere $E(G) = 0$. Quindi:

$$x\frac{16}{5} - 14 = 0 \iff x = 14\cdot\frac{5}{16} = \frac{35}{8}$$



$$f(x;y) = \frac{3}{4}(x+1)(y+1)$$

$$g(x;y) = (x+1)(y+1)$$

$$K \cdot J = 1 \Leftrightarrow K = \frac{3}{4}$$

$$J = \iint_T g(x;y)\,dx\,dy = \int_0^1 (y+1)\,dy \int_{y-1}^{1-y} (x+1)\,dx$$

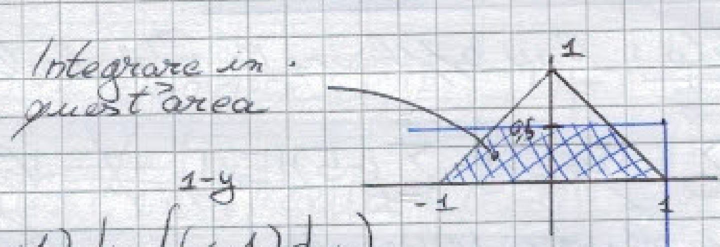
$$= \int_0^1 (y+1)\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{y-1}^{1-y} dy = \int_0^1 (y+1)2(1-y)\,dy$$

$$= 2\int_0^1 (1-y^2)\,dy = 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

a)

$$f_x(x) = \frac{3}{4}\begin{cases} (x+1)\int_0^{x+1}(y+1)\,dy = (x+1)\left[\frac{(x+1)^2}{2} + (x+1)\right] = (x+1)^2\,\frac{x+3}{2} & \text{pe } -1 \le x \le 0 \\ (x+1)\int_0^{1-x}(y+1)\,dy = (1-x^2)\left[\frac{1-x}{2} + 1\right] = (1-x^2)\left(\frac{3-x}{2}\right) & \text{pe } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

b)

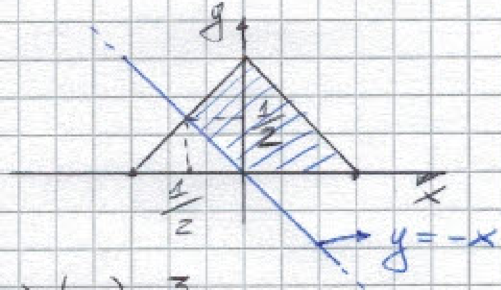


$$F\left(1;\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\int_0^{1/2}(y+1)\,dy \int_{y-1}^{1-y}(x+1)\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{1/2}(1-y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 3}\right] = \frac{11}{16}$$

c) • $P(X+Y>0) = P(Y>-X)$



$= 1 - P(Y \leq -X)$

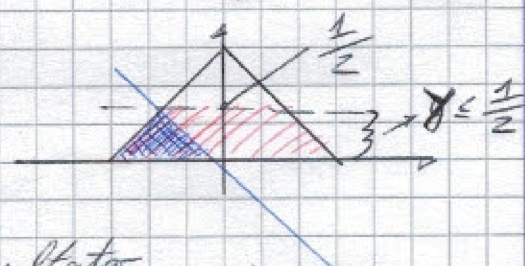
$$P(Y \leq -X) = \left(\int_0^{1/2} (y+1)dy \int_{y-1}^{-y} (x+1)dx \right) \cdot \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{2 \cdot 4} \int_0^{1/2} (y+1)(1-2y)dy = -\frac{3}{8} \left[\frac{4y^3+3y^2-6y}{6} \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{7}{64}$$

$$= 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}$$

• $$P\left(X+Y \leq 0 \,/\, Y \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X+Y \leq 0 \wedge Y \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right)}$$



$P\left(X+Y \leq 0 \wedge Y \leq \frac{1}{2}\right) =$

$= \iint f(x;y)\,dx\,dy = \frac{7}{64}$ (Risultato ottenuto sopra)

$P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) = \iint f(x;y)\,dx\,dy = \frac{11}{16}$ (Risultato ottenuto al punto b))

Quindi

$$P\left(X+Y \leq 0 \,/\, Y \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{64} \cdot \frac{16}{11} = \frac{7}{44}$$