CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 12/1/2018

Nome: ____________________ COGNOME: ____________________

---

1) Del numero aleatorio X è noto che $E(X) = 6$, $P(X < 4) = 0{,}25$, $P(X \geq 9) =$ 0,35

   (a) Determinare una limitazione inferiore significativa per la varianza di X

   (b) Sia $Y = -2X$. Determinare una limitazione superiore per $Cov(X, Y)$.

2) L'urna A contiene 2 palline bianche e 3 rosse, l'urna B contiene 5 palline bianche e 3 rosse. Si effettui una sequenza di estrazioni con contagio unitario, tutte dall'urna A con probabilità 1/4, tutte dall'urna B con probabilità 3/4. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":

   (a) calcolare $P(E_3 | E_1 \wedge \overline{E}_2)$, $P(\overline{E}_1 \vee \overline{E}_2 \vee E_3)$;

   (b) calcolare la probabilità che le estrazioni avvengano dall'urna A sapendo che nelle prime due estrazioni sono uscite palline di colore diverso;

   (c) detto successo l'estrazione di pallina bianca, sia X_n il numero che conta la differenza fra il numero di successi e il numero di insuccessi nelle prime n estrazioni. Calcolare $E(X_n)$, $E[(X_2)^2]$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (−1,0), (2,0), (0,2) con densità $f_{X,Y}(x, y) = ky^2$. Calcolare:

   (a) la densità marginale $f_X(x)$;

   (b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel generico punto $(x_0, 1)$, con $0 \leq x_0 \leq 1$;

   (c) $P(Y > 1 | X \leq 1)$.

Esercizio 1) $\qquad E(X) = 6$

a) $P(4 \leq X < 9) = 1 - P(\overline{4 \leq X < 9}) = 1 - P(X < 4 \vee X \geq 9)$

$= 1 - [P(X<4) + P(X \geq 9)] = 1 - (0,25 + 0,35)$

$= 0,4$

Gli eventi $(X<4)$ ed $(X \geq 9)$ sono incompatibili.

Quindi: $\quad$ ✱ $\quad$ in quanto $1 \Leftarrow 2$

$P(4 \leq X < 9) = P(4-6 \leq X-6 < X-9) =$

$= P(\underbrace{-2 \leq X - E(X) < 3}_{1}) \underset{\text{monotonia ✱}}{\geq} P(\underbrace{-2 \leq X - E(X) \leq 2}_{2}) =$

$= P(|X - E(X)| \leq 2) \underset{\text{Disuguaglianza di B. Chebyschev}}{\geq} 1 - \dfrac{Var(X)}{2^2}$

Riesce quindi:

$$0,4 = \frac{2}{5} \geq 1 - \frac{Var(X)}{2^2} \iff \left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot 2^2 \geq -Var(X)$$

$$\iff Var(X) \geq \frac{12}{5}$$

b)

$$Cov(X;Y) = Cov(X;-2X) \overset{\text{Bilinearità}}{=} (-2)\,Cov(X;X)$$

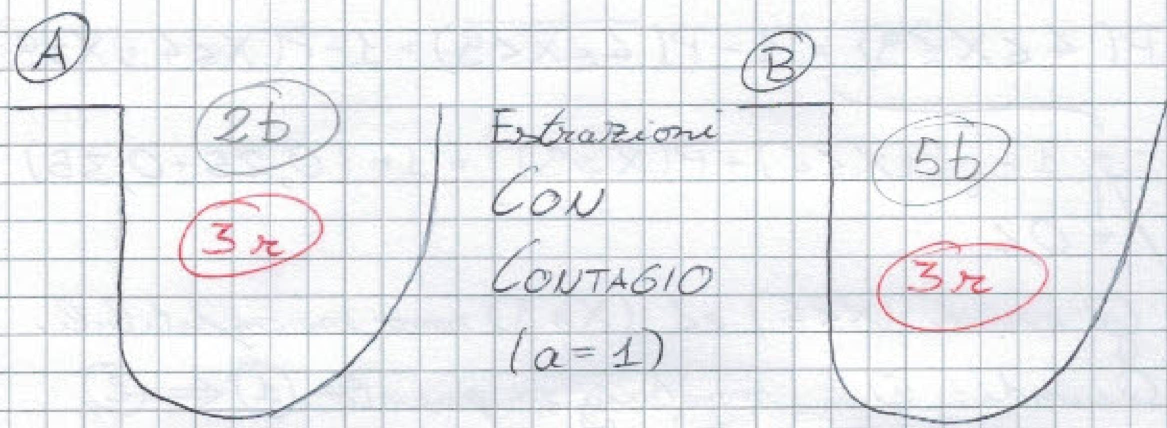
$$= (-2)\,Var(X)$$

So che:

$$Var(X) \geq \frac{12}{5} \iff (-2)\,Var(X) \leq (-2)\frac{12}{5} \iff$$

$$\iff Cov(X;Y) \leq -\frac{24}{5} \quad ■$$

Esercizio 2)



A = 'Effettuo le estrazioni dall'urna (A)'; $P(A) = \frac{1}{4}$

B = ' " " " " " (B)'; $P(B) = \frac{3}{4}$

E_i = 'Esce pall. b all'iesima estrazione'

a) $P(E_i / E_1 \wedge \overline{E}_2)$

- Se $i = 1$:

$$P(E_1 / E_1 \wedge \overline{E}_2) = P(\Omega / E_1 \wedge \overline{E}_2) = 1$$

$E_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow E_1$ per proprietà dell'implicazione.

- Se $i = 2$:

$$P(E_2 / E_1 \wedge \overline{E}_2) = P(\emptyset / E_1 \wedge \overline{E}_2) = 0$$

$E_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow \overline{E}_2$, non E_2.

- Se $i > 2$:

$$P(E_i / E_1 \wedge \overline{E}_2) = \frac{P(E_i \wedge E_1 \wedge \overline{E}_2)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_2)} = \frac{P(E_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3)}{P(E_1 \wedge \overline{E}_2)}$$

$$P(E_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3) = P(E_1 \wedge .. \wedge E_3 / A) P(A) + P(E_1 \wedge .. \wedge E_3 / B) P(B)$$

$= \%$

$$\%=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{140}+\frac{3}{32}$$

$$=\frac{129}{1.120}$$

$$P(E_1\wedge\overline{E}_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{20}+\frac{5}{32}$$

$$=\frac{33}{160}$$

Quindi:

$$P(E_i/E_1\wedge\overline{E}_2)=\frac{129}{1.120}\cdot\frac{160}{33}=\frac{43}{77}$$

$$\circledast\ P(\overline{E}_1\vee\overline{E}_2\vee E_3)=1-P(\overline{\overline{E}_1\vee\overline{E}_2\vee E_3})\overset{\text{De Morgan}}{=}1-P(E_1\wedge E_2\wedge\overline{E}_2)$$

$$=1-\frac{129}{1.120}=\frac{991}{1.120}$$

b)

$$P(A/H)\overset{\text{Bayes}}{=}\frac{P(H/A)}{P(H)}\cdot P(A)$$

Con:

$H=(E_1\wedge\overline{E}_2)\vee(\overline{E}_1\wedge E_2)$ = "Nelle prime 2 estrazioni sono uscite palline di colore diverso" $=P(S_2=1)$

$$P(H)=P[(\overline{E}_1\wedge E_2)\vee(E_1\wedge\overline{E}_2)]$$

Incompatibilità $=P(\overline{E}_1\wedge E_2)+P(E_1\wedge\overline{E}_2)$

Scambiabilità $=2\,P(\overline{E}_1\wedge E_2)$

$$=2\cdot\frac{33}{160}=\frac{33}{80}$$

$$P(H/A)=P[(\overline{E}_1\wedge E_2)\vee(E_1\wedge\overline{E}_2)/A]$$

Propr. delle operazioni tra ev. condiz. $=P[(\overline{E}_1\wedge E_2/A)\vee(E_1\wedge\overline{E}_2/A)]$ Scambiabilità + incompatibilità fra eventi $=2\,P(\overline{E}_1\wedge E_2/A)=\odot$

$\odot = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Quindi:

$$P(A/H) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{33} = \frac{8}{33}$$

c) Successo = esce pall. b; S_n = n° di successi; I_n = n° di insuccessi.

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} |E_i| - \sum_{i=1}^{n} |\overline{E}_i| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| - \sum_{i=1}^{n} 1 - |E_i|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |E_i| - n + \sum_{i=1}^{n} |E_i| = 2\sum_{i=1}^{n} |E_i| - n$$

Quindi

$$\bullet\ E(X_n) = E\left(2\sum_{i=1}^{n} |E_i| - n\right) \overset{\text{Linearità di } E(X)}{=} 2\sum_{i=1}^{n} E(|E_i|) - E(n)$$

$E(|E_i|) = P(E_i)$

$$= 2 \cdot n \cdot P(E_i) - n = n\left(2P(E_i) - 1\right)$$
$$= n\left(2 \cdot \frac{91}{160} - 1\right) = n \cdot \frac{11}{80}$$

Con $P(E_i) \overset{Sc.}{=} P(E_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10} + \frac{15}{32} = \frac{91}{160}$

$\bullet\ E\left[(X_2)^2\right] = ?$ $\quad I_{X_2}$ (= immagine di X_2) $= \{-2, 0, 2\}$

	S_2	I_2	$S_2 - I_2$
$E_1 \wedge E_2 \Rightarrow X_2 =$	2	0	$= 2$
$E_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow X_2 =$	1	1	$= 0$
$\overline{E}_1 \wedge E_2 \Rightarrow X_2 =$	1	1	$= 0$
$\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow X_2 =$	0	2	$= -2$

Quindi:

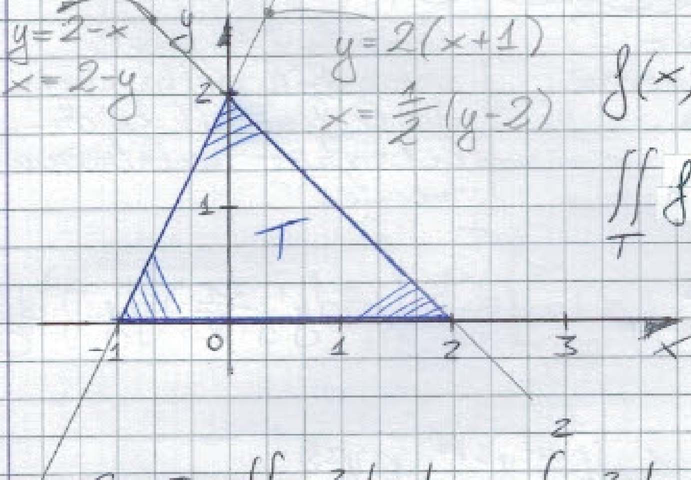
$$E\left[(X_2)^2\right] = 4P(E_1 \wedge E_2) + 0 \cdot P(S_2 = 1) + 4P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2)$$
$$= 4\left[P(E_1 \wedge E_2) + P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2)\right]$$
$$= 4\left(1 - P(S_2 = 1)\right) = \otimes$$

Siccome: $P(E_1 \wedge E_2) + P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2) + P(S_2 = 1) = 1$

$$\otimes = 4\left(1 - \frac{33}{80}\right) = \frac{47}{20} = E\left[(X_2)^2\right]$$

■

Esercizio 3)



$$f(x;y) = k y^2 = \frac{1}{2} y^2$$

$$\iint_T f(x;y)\,dx\,dy = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$k \iint_T y^2\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow k \cdot 2 = 1$$

Con $J = \iint_T y^2\,dx\,dy = \int_0^2 y^2\,dy \int_{1/2(y-2)}^{2-y} dx$

$$= \int_0^2 y^2\left[(2-y) - \frac{1}{2}(y-2)\right]dy = \int_0^2 y^2\left[(2-y)\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]dy$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 y^2(2-y)\,dy = \frac{3}{2}\left[2\cdot\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{2}\left(2\cdot\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = \underline{2}$$

a)

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2(x+1)} y^2\,dy = \frac{1}{3}\left[y^3\right]_0^{2(x+1)} = \frac{8}{3}\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) & \text{se } -1 \le x \le 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2-x} y^2\,dy = \frac{1}{3}\left[y^3\right]_0^{2-x} = \frac{1}{3}\left(8 - 12x + 6x^2 - x^3\right) & \text{se } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

b) $\underline{F(x_0;1) \text{ con } 0 \leq x_0 \leq 1}$: (1)

$$F(x_0;1) = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 dy \left[\underbrace{\int_{1/2(y-2)}^{0} dx} + \underbrace{\int_0^{x_0} dx} \right]$$

Siccome è dato il vincolo (1) questa parte della dx dovrà sempre essere inclusa.

Questa è la parte variabile della dx: da 0 fino all x_0 che sarà scelto arbitrariamente.

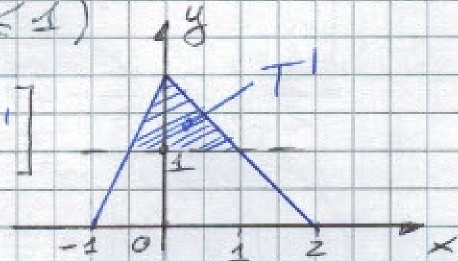
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 dy \left[[x]_{1/2(y-2)}^{0} + [x]_0^{x_0} \right] = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 \left(x_0 - \frac{1}{2}(y-2) \right) dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (2y^2 - y^3 + 2x_0 y^2) dy = \frac{1}{4}\left[2\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + 2x_0\frac{y^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{5+8x_0}{12} \right) = \frac{1}{48}(5+8x_0)$$

c)

$$P(Y>1 / X\leq 1) = \frac{P(Y>1 \wedge X \leq 1)}{P(X\leq 1)}$$



$$P(Y>1 \wedge X\leq 1) = P[(X;Y) \in T']$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 y^2 dy \int_{1/2(y-2)}^{2-y} dx$$

Risultati già trovati in precedenza quando calcolavo K.

$$= \frac{3}{4}\left[2\cdot\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_1^2 = \frac{3}{4}\left[\frac{16}{3} - 4 - \frac{5}{12} \right] = \frac{11}{16}$$

Nota: Vi sono diversi modi di calcolare $P(X \leq 1)$, ma è importante trovare il più semplice!

$$P(X \leq 1) = F_x(1) - F_x(-1) = F_x(1) \text{, siccome } \inf X = -1$$

$$= \int_{-1}^{1} f_x(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+3x+1)\,dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{3}(8-12x+6x^2-x^3)\,dx\right)$$

MA è un conto lungo e laborioso...

MEGLIO considerare:

$$P(X \leq 1) = \underline{1 - P(X > 1)} \text{, riesce}$$

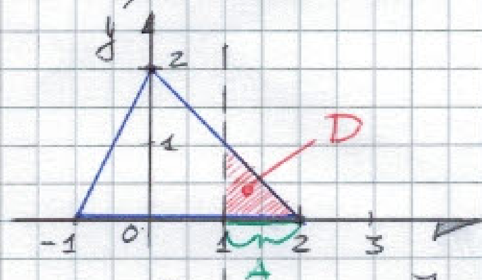
$$= 1 - \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{1}{3}(8-12x+6x^2-x^3)\,dx$$

Così facendo ho già un integrale in meno da calcolare!

MA, posso considerare la questione anche in questo modo:

$D \in \mathbb{R}^2$

$A \in \mathbb{R}$



Sono entrambi eventi

$(X \in A) =$

$= [(X;Y) \in D]$

Quindi $P(X \in A) = P[(X;Y) \in D]$

$\Rightarrow$ Posso procedere con un calcolo ancor meno laborioso:

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} y^2\,dy \int^{2-y} dx\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{1} \overbrace{y^2(1-y)}^{y^2 - y^3}\,dy\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Quindi:

$$P(Y>1/X\leq 1)=\frac{11}{16}\cdot\frac{12}{11}=\frac{3}{4}$$