CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 30/6/2017

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

===

1) In un gioco vengono effettuati sequenzialmente 8 lanci di un dado, 4 con un dado regolare a 6 facce, 4 con un dado regolare a 12 facce. Non è noto quali lanci nella sequenza siano effettuati con l'uno o l'altro dado.
   (a) omesso
   (b) omesso
   (c) Agli 8 lanci è associato un meccanismo di scommesse, solo parzialmente noto: il relativo guadagno complessivo G non è comunque minore di –75 €, e E(G) = –25 €. Determinare una limitazione significativa per la probabilità dell'evento $(G \geq 0)$.

2) L'urna A contiene 4 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene 5 palline bianche e 1 rossa. Si effettui una sequenza di estrazioni senza reimbussolamento, tutte dall'urna A se lanciando un dado esce 6, dall'urna B altrimenti. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione", calcolare:
   (a) $P(E_3 | \overline{E}_6)$, $P(E_2 | \overline{E}_2 \vee E_4)$, $P(\overline{E}_i | \overline{E}_2 \wedge E_4)$ $(i \leq 6)$;
   (b) la covarianza fra $(|E_1| + |E_2|)$ e $(|E_2| + |\overline{E}_6|)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul quadrato $Q = [0, a] \times [0, a]$ $(a > 0)$ con densità congiunta (uniforme in Q) $f_{X,Y}(x, y) = 1/a^2$. Posto $Z = X + Y$, determinare:
   (a) la funzione di ripartizione e la funzione di densità di Z, tracciando anche il grafico di quest'ultima;
   (b) la varianza di Z;
   (c) $P(X + Y \geq a \mid X \leq a/2)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 15/9/2017

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) Con riferimento ad una partita di calcio (regolare) fra le squadre A e B:.
   (a) determinare la partizione generata dagli eventi
   E_1 = 'A vince 1-0'
   E_2 = 'A vince, ma non 1-0'
   E_3 = 'A non perde';
   (b) supposto che sia 1/2 la probabilità dell'evento 'A non vince', per quali valori $P(E_1)$, $P(E_2)$ è massima $Cov(|E_1|, |E_1 \vee E_2|)$?

2) Un'urna contiene 2 palline bianche e 5 rosse; si lancia due volte una moneta e si imbussolano nell'urna 3 palline, bianche se esce testa in entrambi i lanci, rosse altrimenti. Si effettuano poi estrazioni senza reimbussolamento dall'urna, fino a vuotarla. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":
   (a) calcolare $P(E_i|E_j)$, $P(E_i|\overline{E}_j)$, $P(\overline{E}_5|E_2)$;
   (b) calcolare la probabilità di E_5 sapendo che la pallina uscita nella prima estrazione è di colore diverso da quella uscita nell'ultima;
   (c) detto successo l'uscita di pallina bianca, si eseguano *n* estrazioni. Indicato con X_n il numero che conta le coppie di successi consecutivi, calcolare $E(X_n)$, $Var(X_3)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio unione del triangolo T di vertici (0,0), (1,0), (1,1) e del quadrato Q di vertici opposti (1,0), (2,1) con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,x^3 & (x,y) \in T \\ k & (x,y) \in Q \end{cases}$$

   Calcolare:
   (a) le densità marginali;
   (b) la funzione di ripartizione di X, tracciandone il grafico;
   (c) $P(Y \geq |X-1|)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 12/1/2018

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) Del numero aleatorio X è noto che $E(X) = 6$, $P(X < 4) = 0{,}25$, $P(X \geq 9) = 0{,}35$.
   (a) Determinare una limitazione inferiore significativa per la varianza di X.
   (b) Sia $Y = -2X$. Determinare una limitazione superiore per $Cov(X, Y)$.

2) L'urna A contiene 2 palline bianche e 3 rosse, l'urna B contiene 5 palline bianche e 3 rosse. Si effettui una sequenza di estrazioni con contagio unitario, tutte dall'urna A con probabilità 1/4, tutte dall'urna B con probabilità 3/4. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":
   (a) calcolare $P(E_i | E_1 \wedge \overline{E}_2)$, $P(\overline{E}_1 \vee \overline{E}_2 \vee E_3)$;
   (b) calcolare la probabilità che le estrazioni avvengano dall'urna A sapendo che nelle prime due estrazioni sono uscite palline di colore diverso;
   (c) detto successo l'estrazione di pallina bianca, sia X_n il numero che conta la differenza fra il numero di successi e il numero di insuccessi nelle prime *n* estrazioni. Calcolare $E(X_n)$, $E[(X_2)^2]$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (–1,0), (2,0), (0,2) con densità $f_{X,Y}(x, y) = ky^2$. Calcolare:
   (a) la densità marginale $f_X(x)$;
   (b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel generico punto $(x_0, 1)$, con $0 \leq x_0 \leq 1$;
   (c) $P(Y > 1 | X \leq 1)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 28/5/2018

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) Dato l'insieme di eventi $D = \{E_1, E_1 \vee E_2, E_2 \wedge E_3\}$:
   (a) determinare la partizione generata da D;
   (b) provare che l'applicazione P: $P(E_1) = 0{,}4$, $P(E_1 \vee E_2) = 0{,}6$, $P(E_2 \wedge E_3) = 0{,}2$ è una probabilità coerente su D;
   (c) determinare i prolungamenti coerenti di P su $E_1 \vee E_3$.

2) Da un'urna contenente 3 palline bianche e 6 rosse si effettuano estrazioni di una pallina alla volta con modalità non certa: con probabilità 3/4 le estrazioni sono tutte con reimbussolamento, con probabilità 1/4 tutte senza reimbussolamento. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione" e detta S_n la frequenza assoluta di successo in n estrazioni (successo: uscita di pallina bianca), calcolare:
   (a) $P(E_i)$ $(i \leq 9)$, $P(\overline{E}_1 \wedge E_3)$;
   (b) la probabilità che le estrazioni avvengano senza reimbussolamento sapendo che nelle prime due estrazioni è uscita pallina bianca;
   (c) $\mathrm{Cov}(S_3, |E_1| + |\overline{E}_2|)$;
   (d) $P(S_n = n - 1 | E_1 \wedge \overline{E}_2)$, $n \leq 3$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio di vertici (0, 0), (3, 0), (2, 1), (1,1) con densità proporzionale alla funzione $x + y$. Calcolare:
   (a) la densità marginale $f_X(x)$;
   (b) $E(X)$;
   (c) posto $Z = X^2 - Y$, $P(Z > 0)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 29/6/2018

Nome: ____________________ COGNOME: ________________________

1) Siano E_1, E_2 due eventi stocasticamente indipendenti, $S_2 = |E_1| + |E_2|$.
   (a) Calcolare la distribuzione di probabilità P sulla partizione generata da $\{E_1, E_2\}$ sapendo che: $E(S_2) = 1$, $Var(S_2) = 3/8$, E_1 è ritenuto più probabile di E_2.
   (b) Sia E_3 tale che $E_1 \wedge E_2 \Rightarrow E_3$, $\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \Rightarrow \overline{E}_3$. Individuare i prolungamenti coerenti di P su E_3.
   (c) Per quali valori ammissibili di $P(E_3)$ la disuguaglianza di Cebicev - Bienaymè determina la limitazione più stretta per $P(\,||E_3| - P(E_3)| \geq 1/2)$?

2) Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 rosse si effettuano estrazioni di una pallina alla volta, le prime 5 con reimbussolamento, le successive con contagio unitario. Sia E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione".
   (a) Calcolare $P(\overline{E}_4 \vee \overline{E}_5 \vee \overline{E}_6)$, $P(E_i \wedge E_j)$.
   (b) Ad ogni estrazione, Tizio vince 3 € se esce pallina bianca, perde 2 € se esce pallina rossa. Detto G_n il guadagno complessivo di Tizio fino all'n-esima estrazione (inclusa), calcolare $E(G_n)$, $Var(G_n)$.
   (c) Calcolare la probabilità che alla decima estrazione esca pallina bianca, sapendo che nelle prime 4 estrazioni con contagio unitario sono uscite palline di entrambi i colori.

3) La coppia aleatoria (X,Y) ha determinazioni nella regione $T \cup S$, con T triangolo di vertici (-1,0), (0,0), (0,1) e S regione definita dalle condizioni $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y + x^2 \leq 1$ ed è ivi distribuita con densità congiunta f(x, y) proporzionale a

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad (x,y) \in T \\ x & se \quad (x,y) \in S \end{cases}$$

   (a) E' più probabile che X assuma valori positivi o valori negativi? Stabilire inoltre per quale numero reale r riesce $P(X \leq r) = P(X \geq r)$.
   (b) Calcolare il valore della funzione di ripartizione congiunta in (1, 0) e in (1, 1/2).
   (c) Trovare la densità marginale di Y.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 10/1/2019

Nome: ______________________ COGNOME: ___________________________

==

1) Con riferimento ad una partita di calcio (regolare) fra le squadre A e B:

(a) determinare la partizione generata dagli eventi
E_1 = 'A vince l'incontro'
E_2 = 'L'incontro termina in parità'
E_3 = 'Durante l'incontro si segnano 3 reti';

(b) verificare la coerenza dell'assegnazione di probabilità $P(E_1) = 0{,}4$, $P(E_2) = 0{,}3$, $P(E_3) = 0{,}4$;

(c) stabilire se è coerente prolungare P sull'evento aggiuntivo F = 'A vince segnando al più 3 reti' ponendo $P(F) = 0.05$. Determinare inoltre, se esiste, il massimo valore di $P(F)$ per cui il prolungamento di P su F è coerente.

2) L'urna A contiene 5 palline bianche e 15 rosse, l'urna B contiene 10 palline bianche e 10 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, scelta con un meccanismo aleatorio che assegna probabilità 3/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":

(a) Calcolare $P(E_2 \wedge E_6 \mid \bar{E}_2 \vee E_5)$, $P(E_2 \vee E_6 \mid E_2 \wedge E_5)$, $P(\bar{E}_2 \vee \bar{E}_6 \mid \bar{E}_2 \vee E_5)$;

(b) in ogni coppia di estrazioni successive, di cui la prima è dispari, Tizio guadagna 1 € se la pallina dell'estrazione dispari e di quella (pari) successiva hanno lo stesso colore. Determinare la speranza matematica del guadagno di Tizio nelle prime 10 estrazioni.

(c) Stabilire la correlazione fra gli eventi 'Nelle prime 2 estrazioni Tizio guadagna 1 €' e 'Le estrazioni vengono effettuate dall'urna B'.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (0,0), (1,1), (−1,1) con densità proporzionale a $g(x,y) = e^{-y}$. Calcolare:

(a) le densità marginali;

(b) E(X).

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello dell' 8/2/2019

Nome: ______________________ COGNOME: ___________________________

1) La fabbrica A produce laminati di peso medio 50 kg ciascuno e deviazione standard 0,5 kg.

(a) Calcolare una limitazione significativa per la probabilità che un laminato differisca meno del 5% dal peso medio.

Un magazzino ha acquistato un lotto di 300 laminati indistinguibili, 100 da A per cui stima che la probabilità che un laminato sia da scartare è $p_A = 0,03$, 200 da B, con analoga probabilità $p_B = 0,06$.

(b) Determinare una limitazione significativa per la probabilità che nel lotto ci siano meno di 4 pezzi da scartare.

(c) Se, scelto a caso un laminato, questo risulta da scartare, qual è la probabilità che provenga da B?

2) L'urna A contiene 8 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene 4 palline bianche e 6 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, scelta con un meccanismo aleatorio che assegna probabilità 1/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione", calcolare:

(a) $P(E_h \wedge \bar{E}_k)$, $P(E_4 \mid E_2 \vee \bar{E}_3)$;

(b) speranza matematica e varianza della differenza D_n fra numero di successi (estrazioni di pallina bianca) e numero di insuccessi in n estrazioni;

(c) la funzione di ripartizione del numero aleatorio $D_3 \cdot | E_1 \wedge \bar{E}_2|$, tracciandone il grafico.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul quadrilatero di vertici (–1,0), (0,0), (2,1), (0,1) con densità proporzionale a $g(x,y) = 1/(y + 1)^2$. Calcolare:

(a) $P(X \geq 0)$;

(b) $P(X < Y \mid X \geq 0)$;

(c) il valore della funzione di ripartizione congiunta in (0,2) e in (2,0).

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello dell' 11/6/2019

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) Tizio partecipa ad un gioco in cui paga 0,5€ prima di ogni lancio simultaneo di due dadi regolari, uno rosso e uno verde, per ricevere 1€ se $|X - Y| \leq 1$, 0€ altrimenti, essendo X (Y) il punto realizzato dal dado rosso (verde).

(a) Quanti lanci occorrono affinché la speranza matematica del guadagno complessivo di Tizio sia –10€?

(b) Calcolare la probabilità che in una sequenza di 10 lanci Tizio vinca 6 volte.

(c) Determinare una limitazione inferiore significativa per $P(-40€ < G_{360} < 0€)$, essendo G_{360} il guadagno complessivo di Tizio in 360 lanci.

2) L'urna A contiene 3 palline bianche e 6 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con contagio, con probabilità 1/3 unitario, con probabilità 2/3 immettendo dopo ogni lancio 2 palline dello stesso colore di quella estratta. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione", calcolare:

(a) $P(E_2 \vee E_3 \mid \bar{E}_4)$, $P(\bar{E}_4 \mid E_2 \vee E_3)$, $P(E_h \mid E_2 \vee E_h)$;

(b) la probabilità che dopo la terza estrazione e prima della quarta nell'urna ci siano più palline bianche che rosse.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio unione del triangolo T di vertici (0,–1), (1,0), (0,0) e del quadrato Q di vertici opposti (0,0), (1,1) con densità proporzionale a: $y/(x + 1)$ su Q, 1 su T. Calcolare:

(a) la densità marginale di Y;

(b) la funzione di ripartizione congiunta $F_{X,Y}(x_0,-1/2)$;

(c) E(Z), essendo $Z = 1/(Y + 2)$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 27/6/2019

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

==

1) Dato l'insieme di eventi $D = \{E_1, E_1 \vee E_2, E_3\}$, in cui $E_3 \Rightarrow \bar{E}_2$:

(a) determinare la partizione generata dagli eventi di D;

(b) verificare la coerenza dell'assegnazione di probabilità $P(E_1) = 0{,}2$, $P(E_1 \vee E_2) = 0{,}7$, $P(E_3) = 0{,}4$;

(c) determinare il valore numerico minimo che può assumere un prolungamento coerente di P su E_2.

2) Una sequenza di 24 estrazioni di una pallina da un'urna è effettuata con le seguenti modalità: le estrazioni pari avvengono con reimbussolamento dall'urna A contenente 6 palline bianche e 3 rosse, le estrazioni dispari senza reimbussolamento dall'urna B contenente all'inizio 6 palline bianche e 6 rosse. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione", calcolare:

(a) $P(E_i \wedge E_j)$ $(1 \leq i, j \leq 24)$, $P(E_5 | \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)$;

(b) la speranza matematica e la varianza di G_{24}, il guadagno complessivo di Tizio nelle 24 estrazioni, sapendo che ad ogni estrazione Tizio vince 3 € se esce bianca, ne perde 4 se esce rossa;

(c) $P(G_{24} = \min\{G_{24}\})$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (0,0), (2,–2), (2,2) con densità proporzionale a $g(x, y) = y^2 \cdot e^x$. Calcolare:

(a) la densità marginale di Y;

(b) la funzione di ripartizione congiunta $F_{X,Y}(0, y_0)$

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 10/1/2020

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) Sono dati gli eventi E_1, E_2, logicamente indipendenti, e l'insieme $D = \{E_1, \bar{E}_1 \vee E_2\}$.

(a) Verificare la coerenza dell'assegnazione di probabilità P_0 su D: $P_0(E_1) = 0{,}6$, $P_0(\bar{E}_1 \vee E_2) = 0{,}5$;

(b) calcolare le limitazioni di probabilità per i prolungamenti coerenti di P_0 su $E_1| E_1 \vee E_2$;

(c) considerata, più in generale, P_c su D: $P_c(E_1) = 0{,}6 + c$, $P_c(\bar{E}_1 \vee E_2) = 0{,}5$, determinare il valore minimo del numero reale c per cui P_c è coerente su D.

2) L'urna A contiene 4 palline bianche e 6 rosse, l'urna B contiene 4 palline bianche e 2 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, stabilita con un meccanismo aleatorio che assegna probabilità 1/3 alla scelta dell'urna A. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione", S_n: frequenza assoluta di successo (estrazione di pallina bianca) nelle prime n estrazioni, calcolare:

(a) $P(E_2| E_4)$, $P(E_3| E_i \vee E_j)$;

(b) $\mathrm{Cov}(|E_2|\cdot|E_4|, S_2)$;

(c) la probabilità che esca pallina bianca alla terza estrazione, sapendo che nelle prime due sono uscite palline di colore diverso.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (0,0), (–2,1), (1,1) con densità proporzionale a $g(x, y) = y$. Calcolare:

(a) la densità marginale di X;

(b) la funzione di ripartizione congiunta $F_{X,Y}(0, y_0)$;

(c) per quali numeri reali m riesce $P(Y \leq mX) = 1/6$.

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 7/2/2020

Nome: ______________________ COGNOME: ________________________

1) Con riferimento a lanci successivi di una moneta regolare, si considerino i numeri aleatori X: numero di teste nei primi 3 lanci, Y: numero di croci nel 2° e 3° lancio, Z: numero di teste nel 2° e 3° lancio. Calcolare:

(a) Cov(X, Y), Cov(X, 2Y + Z);

(b) l'indice di correlazione lineare fra Y e Z.

2) Da un'urna contenente 6 palline bianche e 4 rosse si estrae una pallina a caso senza reimbussolarla e successivamente un'altra pallina a caso con contagio unitario. Dopo questa fase preliminare, iniziano le estrazioni con reimbussolamento dall'urna così ottenuta. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione con reimbussolamento", calcolare:

(a) $P(E_h)$, $P(\bar{E}_h \mid \bar{E}_1 \wedge E_5)$, $P(E_1 \vee \bar{E}_2 \mid \bar{E}_3)$;

(b) il valore x che rende equo il guadagno di Tizio, il quale per $h = 1, 2, \dots, 30$ all'estrazione h-esima riceve $2h$ Euro se esce pallina bianca, x Euro se esce rossa;

(c) la probabilità che all'inizio delle estrazioni (dopo la fase preliminare) nell'urna ci siano più palline bianche che rosse, sapendo che nelle prime 3 estrazioni sono uscite 3 palline rosse.

3) La coppia aleatoria (X,Y) ha determinazioni nella regione $T \cup R$, con T triangolo di vertici (−1,0), (0,1), (1,0) e R rettangolo di vertici (−1,0), (−1,−1), (1, −1), (1,0) ed è ivi distribuita con densità congiunta f(x, y) proporzionale a

$$g(x,y) = \begin{cases} y & se\ (x,y) \in T \\ 1 & se\ (x,y) \in R \end{cases}$$

Calcolare:

(a) le densità marginali;

(b) E(Y);

(c) $P(Y \geq \max\{0, X\})$.