CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 15/9/2017

Nome: ____________________ COGNOME: ____________________

1) Con riferimento ad una partita di calcio (regolare) fra le squadre A e B:.

   (a) determinare la partizione generata dagli eventi

   E_1 = 'A vince 1-0'

   E_2 = 'A vince, ma non 1-0'

   E_3 = 'A non perde';

   (b) supposto che sia 1/2 la probabilità dell'evento 'A non vince', per quali valori $P(E_1)$, $P(E_2)$ è massima $Cov(|E_1|, |E_1 \vee E_2|)$?

2) Un'urna contiene 2 palline bianche e 5 rosse; si lancia due volte una moneta e si imbussolano nell'urna 3 palline, bianche se esce testa in entrambi i lanci, rosse altrimenti. Si effettuano poi estrazioni senza reimbussolamento dall'urna, fino a vuotarla. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":

   (a) calcolare $P(E_i|E_j)$, $P(E_i|\overline{E}_j)$, $P(\overline{E}_5|E_2)$;

   (b) calcolare la probabilità di E_5 sapendo che la pallina uscita nella prima estrazione è di colore diverso da quella uscita nell'ultima;

   (c) detto successo l'uscita di pallina bianca, si eseguano n estrazioni. Indicato con X_n il numero che conta le coppie di successi consecutivi, calcolare $E(X_n)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio unione del triangolo T di vertici (0,0), (1,0), (1,1) e del quadrato Q di vertici opposti (1,0), (2,1) con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} k\,x^3 & (x,y) \in T \\ k & (x,y) \in Q \end{cases}$$

   Calcolare:

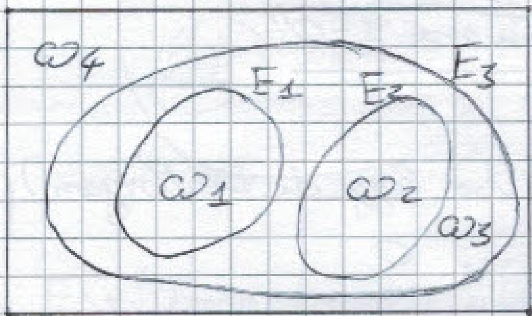
   (a) le densità marginali;

   (b) la funzione di ripartizione di X, tracciandone il grafico;

   (c) $P(Y \geq |X-1|)$.

Esercizio 1)

a) Sia $E_i' = E_i$ o $\overline{E}_i$



Osservazioni: dal testo possiamo dedurre che:

1) $E_1 \wedge E_2 = \emptyset$, quindi:
$E_1 \wedge E_2 \wedge E_3' = \emptyset$
(Ho trovato due costituenti banali)

2) $E_1 \Rightarrow E_3$, quindi $E_1 \wedge E_3 = E_1$; $E_1 \wedge \overline{E}_3 = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow E_1 \wedge E_2' \wedge \overline{E}_3 = \emptyset$ (Ho trovato un altro costituente banale: $E_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_3$, il cost. te $E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3$, anch'esso banale, è già stato trovato al punto precedente)

3) $E_2 \Rightarrow E_3$, quindi $E_2 \wedge \overline{E}_3 = \emptyset \Rightarrow E_1' \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3 = \emptyset$
(Trovato un IV costituente banale: $\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3$)

4) $\mathbb{P}_G(E_1, E_2, E_3)$ ha $2^3 = 8$ costituenti, ma 4 di essi sono banali (essendo essi $= \emptyset$). Restano quindi 4 costituenti che (in questo caso) sono gli eventi elementari della $\mathbb{P}_G(E_1, .., E_3)$. Sono ev. elementari in quanto sono tutti possibili

Quindi:

$$\mathbb{P}_G(E_1, E_2, E_3) = \{ E_1 ; E_2 ; \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3 ; \overline{E}_3 \}$$

Posso scrivere anche in questo modo:

$$= \{ \underbrace{E_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3}_{E_1} ; \underbrace{\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3}_{E_2} ; \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3 ; \underbrace{\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_3}_{\overline{E}_3} \}$$

Nota: per verificare se un evento è possibile (impossibile) posso "leggere" la proposizione che sta alla base di tale evento pe: $\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3$ riesce:

Posso non considerarla siccome è in contraddizione con la I

I A non vince 1-0 $\wedge$ A non vince o vince 1-0 $\wedge$ A non perde

Posso scegliere 1 delle 2 alternative affinché questa congiunz. multipla sia compatibile che è una proposizione non impossibile!

Per capire meglio:

$E_2 = $ '$\overbrace{A \text{ vince}}^{C} \wedge \overbrace{A \text{ vince, ma non } 1-0}^{D}$'

$\overline{E_2} = \overline{C \wedge D}$

$= \overline{C} \vee \overline{D}$ (Uso leggi di De Morgan)

$=$ A non vince $\vee$ A vince 1-0

b) 'A non vince' $= \omega_3 \vee \omega_4 = F$

$\overline{E_1} \wedge \overline{E_2} \wedge E_3 =$ 'A pareggia'

$\overline{E_1} \wedge E_2 \wedge E_3 =$ 'A perde'

$P(F) = P(\omega_3 \vee \omega_4) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{2} = p_3 + p_4$ (*)

Quindi $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{2} - p_2$

Riesce che:

$Cov(|E_1|; |E_1 \vee E_2|) \overset{\text{Propr. Cov.}}{=} P(E_1 \wedge (E_1 \vee E_2)) - P(E_1)P(E_1 \vee E_2)$

$= P(E_1 \vee (E_1 \wedge E_2)) - P(E_1)\left[P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \wedge E_2)\right]$

$E_1 \wedge E_2 = \emptyset$ per OSS. 1) punto a)

siano $P(E_1) = p_1$; $P(E_2) = p_2$

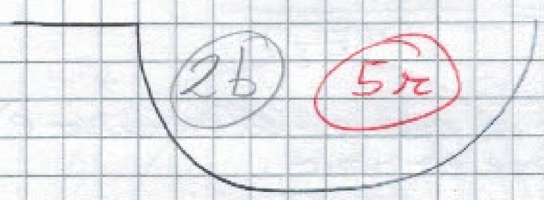
$= p_1 - p_1(p_1 + p_2) = p_1(1 - (p_1 + p_2))$

$= p_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{p_1}{2}$

Quindi essendo: $p_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ per (*)

Riesce che la $Cov(|E_1|; |E_1 \vee E_2|)$ è massima scegliendo $p_1 = \frac{1}{2}$ ∎

Esercizio 2)



Prima: lancio 2 volte una moneta e imbussolo:

3b se esce 2 volte testa

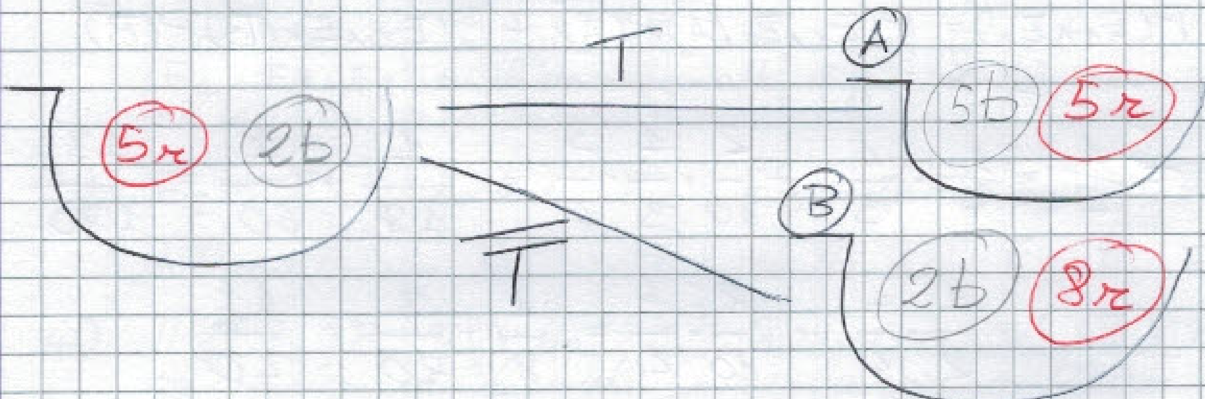
3r altrimenti

Poi: estrazioni SENZA rimessa fino a vuotare l'urna

E_i = 'Esce bianca all'i-esima estrazione'

Pongo T = 'Esce testa in entrambi i lanci'

Succede che:



T = 'Effettuo le estrazioni dall'urna A'

$\overline{T}$ = ' " " " " urna B'

$P(T) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $P(\overline{T}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

a) • $P(E_i / E_j)$

Se $i = j$) $P(E_i / E_i) = P(\Omega / E_i) = 1$

Se $i \neq j$)

Se $j > 10$, $P(E_i / E_j) = P(E_i / \emptyset)$ Assurdo se $J \leq 10 \wedge i \leq 10$

$$P(E_i/E_J) = \frac{P(E_i \wedge E_J)}{P(E_J)} \overset{Sc.}{=} \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_1)}$$

Nota: il processo stocastico in esame nell'esercizio è scambiabile siccome lo sono:

$E_1/T, \dots, E_{10}/T$

$E_1/\overline{T}, \dots, E_{10}/\overline{T}$

Esso è una mistura di proc. stoc. condizionati scambiabili.

$$P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1 \wedge E_2/T)P(T) + P(E_1 \wedge E_2/\overline{T})P(\overline{T})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{18} + \frac{1}{60} = \frac{13}{180}$$

$$P(E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{20} = \frac{11}{40}$$

Quindi:

$$P(E_i/E_J) = \frac{13}{180} \cdot \frac{40}{11} = \frac{26}{99}$$

se $J \leq 10 \wedge i > 10$

$$P(E_i/E_J) = P(\emptyset/E_J) = 0$$

• $P(E_i/\overline{E}_J)$

Se $i = J$) $P(E_i/\overline{E}_i) = P(\emptyset/\overline{E}_i) = 0$

Se $i \neq J$)

Se $J > 10$, $P(E_i / \overline{E}_J) \overset{!}{=} P(E_i / \emptyset) = P(E_i / \Omega)$
$\overset{!}{=} P(E_i) = \frac{11}{40}$

Se $J \leq 10 \wedge i \leq 10$:

$$P(E_i / \overline{E}_J) = \frac{P(E_i \wedge \overline{E}_J)}{P(\overline{E}_J)} = \frac{73}{360} \cdot \frac{40}{29} = \frac{73}{261}$$

$$P(E_i \wedge \overline{E}_J) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{72} + \frac{2}{15} = \frac{73}{360}$$

$$P(\overline{E}_J) \overset{Sc.}{=} P(\overline{E}_1) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{11}{40} = \frac{29}{40}$$

La parte finale dell'esercizio 1 a) è dopo il punto c)

Se $J \leq 10 \wedge i > 10$:

$$P(E_i / \overline{E}_J) = P(\emptyset / \Omega) = P(\emptyset) = 0$$

b)

$$P(E_5 / (E_1 \wedge \overline{E}_{10}) \vee (\overline{E}_1 \wedge E_{10})) =$$

$$= \frac{P[(E_1 \wedge E_5 \wedge \overline{E}_{10}) \vee (\overline{E}_1 \wedge E_5 \wedge E_{10})]}{P[(E_1 \wedge \overline{E}_{10}) \vee (\overline{E}_1 \wedge E_{10})]}$$

$$= \frac{P(E_1 \wedge E_5 \wedge \overline{E}_{10}) + P(\overline{E}_1 \wedge E_5 \wedge E_{10})}{P(E_1 \wedge \overline{E}_{10}) + P(\overline{E}_1 \wedge E_{10})} = \%$$

Vedi anche nota in fondo.

Scamb.

$$\overset{\text{Scamb.}}{\underset{\%}{=}} \frac{\cancel{2}P(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3)}{\cancel{2}P(\overline{E}_1 \wedge E_2)} = \frac{37}{720} \cdot \frac{360}{73} = \frac{37}{146}$$

$$P(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{5}{144} + \frac{1}{60} = \frac{37}{720}$$

c)

Posto: successo = esce pallina b all'i-esima estrazione

X_n = numero aleatorio che conta le coppie di successi consecutivi.

Oss: $n \geq 2$, siccome non posso avere una coppia di successi nella 1^a estrazione

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} |E_i \wedge E_{i+1}| \text{ , Quindi:}$$

$$E(X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n-1} |E_i \wedge E_{i+1}|\right) \overset{\text{linearità di } E(X_n)}{=} \sum_{i=1}^{n-1} E(|E_i \wedge E_{i+1}|)$$

$P(|E|) = P(E)$

Previsione

Probabilità

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i \wedge E_{i+1}) \underset{\text{Scambiab.} \Rightarrow \text{Equiprobabilità}}{=} (n-1) P(E_1 \wedge E_2)$$

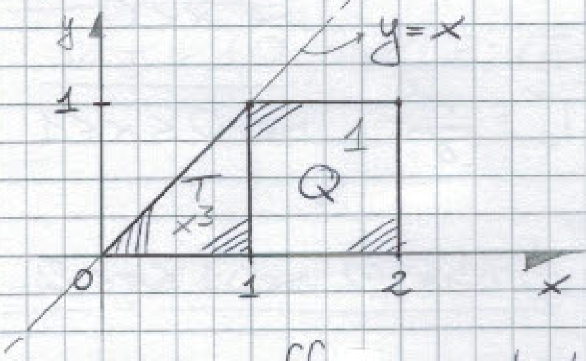
$$= (n-1) \frac{13}{180}$$

- Di nuovo punto a)

$$P(\overline{E}_5 / E_2) = 1 - P(E_5 / E_2) = 1 - \frac{26}{99} = \frac{73}{99}$$

$P(E_i / E_j)$ con $j \leq 10 \wedge i \leq 10$.

Esercizio 3)



$$f(x;y)=\frac{5}{6}\begin{cases} x^3 \text{ se } (x;y)\in T \\ 1 \text{ se } (x;y)\in Q \end{cases}$$

$$K\cdot J = 1 \iff K=\frac{5}{6}$$

$$\text{Con } J = \iint_{T\cup Q} g(x;y)\,dx\,dy = \underbrace{\iint_T g(x;y)\,dx\,dy}_{J_1} + \iint_Q g(x;y)\,dx\,dy$$

$g(x;y) \propto f(x;y)$

$$J_1 = \int_0^1 x^3 dx \int_0^x dy = \int_0^1 x^3 [y]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + (2-1)\cdot 1 \cdot \overbrace{1}^{g(x;y) \text{ se } (x;y)\in Q} = \frac{6}{5}$$

a)

$$f_X(x)=\frac{5}{6}\begin{cases} \int_0^x x^3 dy = x^4 & \text{se } 0\le x\le 1 \\ \int_0^1 dy = 1 & \text{se } 1\le x\le 2 \end{cases}$$

$$f_X(y) = \frac{5}{6}\left(\int_y^1 x^3 dx + \int_1^2 dx\right) = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}[x^4]_y^1 + 1\right)$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\left((1-y^4)+4\right) = \frac{5}{24}(5-y^4) \text{ se } 0\le y\le 1$$

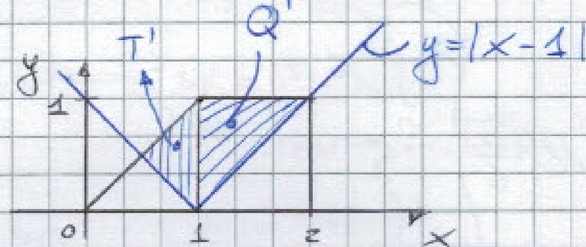
b)

$$F_x(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \frac{5}{6}\int_0^x t^4\,dt = \frac{1}{6}[t^5]_0^x = \frac{x^5}{6} & \text{se } 0\le x\le 1 \\ \frac{5}{6}\left(\int_0^1 x^4\,dx+\int_1^x dt\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{6}(5x-4) & \text{se } 1\le x\le 2 \\ 1 & \text{se } x\ge 2 \end{cases}$$

$(*)$: $\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}[x^5]_0^1+[t]_1^x\right)=\frac{5}{6}\left(x-\frac{4}{5}\right)=\ldots$

c)

$P(Y\geq |X-1|)$



$$P(Y\geq|X-1|)=\iint_{T'\cup Q'} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\underbrace{\frac{5}{6}\left(\int_{1/2}^{1}x^3dx\int_{1-x}^{x}dy\right)}_{J_1}+\frac{5}{6}\left(\int_1^2 dx\int_{x-1}^{1}dy\right)$$

$$J_1=\frac{5}{6}\int_{1/2}^{1}x^3[y]_{1-x}^{x}\,dy=\frac{5}{6}\int_{1/2}^{1}x^3(2x+1)\,dy=\ldots$$

$$\cdot\cdot = \frac{5}{6}\int_{1/2}^{1}(2x^4-x^3)\,dy = \frac{5}{6}\left[2\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{2}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{80}+\frac{1}{64}\right] = \frac{49}{384}$$

Quindi:

$$P(Y \geq |X-1|) = \frac{49}{384} + \frac{5}{6}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}_{\text{Area del triangolo } Q} = \frac{209}{384}$$

$\blacksquare$

Nota sull'esercizio 2) punto b)

Attenzione a non scambiare gli eventi in questo modo:

$$P(E_5 | (E_1 \wedge \overline{E}_{10}) \vee (\overline{E}_1 \wedge E_{10})) \neq P(E_5 | (E_1 \wedge \overline{E}_2) \vee (\overline{E}_1 \wedge E_2))$$

È un errore. Meglio applicare la scambiabilità ai soli prodotti logici, ad esempio:

$$P(E_1 \wedge E_5 \wedge \overline{E}_{10}) = P(\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3) .$$