CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello dell' 8/2/2019

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) La fabbrica *A* produce laminati di peso medio 50 kg ciascuno e deviazione standard 0,5 kg.

(a) Calcolare una limitazione significativa per la probabilità che un laminato differisca meno del 5% dal peso medio.

Un magazzino ha acquistato un lotto di 300 laminati indistinguibili, 100 da *A* per cui stima che la probabilità che un laminato sia da scartare è $p_A = 0{,}03$, 200 da *B*, con analoga probabilità $p_B = 0{,}06$.

(b) Determinare una limitazione significativa per la probabilità che nel lotto ci siano meno di 4 pezzi da scartare.

(c) Se, scelto a caso un laminato, questo risulta da scartare, qual è la probabilità che provenga da *B*?

2) L'urna A contiene 8 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene 4 palline bianche e 6 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, scelta con un meccanismo aleatorio che assegna probabilità 1/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione", calcolare:

(a) $P(E_h \wedge \bar{E}_k)$, $P(E_4 \mid E_2 \vee \bar{E}_3)$;

(b) speranza matematica e varianza della differenza D_n fra numero di successi (estrazioni di pallina bianca) e numero di insuccessi in *n* estrazioni;

(c) la funzione di ripartizione del numero aleatorio $D_3 \cdot | E_1 \wedge \bar{E}_2 |$, tracciandone il grafico.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul quadrilatero di vertici (−1,0), (0,0), (2,1), (0,1) con densità proporzionale a $g(x,y) = 1/(y+1)^2$. Calcolare:

(a) $P(X \geq 0)$;

(b) $P(X < Y \mid X \geq 0)$;

(c) il valore della funzione di ripartizione congiunta in (0,2) e in (2,0).

Esercizio 1)

a) X = peso del laminato ; $E(X) = 50\,Kg$; $\sigma_x = 0{,}5\,Kg$

Uso la disuguaglianza di B. Chebyshev:

5% del peso medio

$$P(|X - E(x)| < 50 \cdot 0{,}05) = \qquad (\sigma_x)^2 = Var(X)$$

$$= 1 - P(|X - 50| \geq \underbrace{2{,}5}_{\text{Lo uso come } \varepsilon}) \geq 1 - \frac{\overbrace{0{,}25}}{(2{,}5)^2} = \frac{24}{25}$$

b) Magazzino acquista 300 laminati:

100 da $A \longrightarrow P(E_i / A) = 0{,}03$

200 da $B \longrightarrow P(E_i / B) = 0{,}06$

con E_i 'Il laminato i-esimo è Errato'

sia F = 'Nel lotto ci sono meno di 4 laminati errati'

$$P(E_i) = P(E_i/A)P(A) + P(E_i/B)P(B)$$

$$= 0{,}03 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}06 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$P(\bar{E}_i) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

Definito il num. aleat. S_{300}: n° aleatorio che conta i laminati NON da scartare.

$$E(S_{300}) = E\left(\sum_{i=1}^{300} |\bar{E}_i|\right) = \sum_i^{300} E(|\bar{E}_i|) = 300\,P(\bar{E}_i)$$

equiprob. degli E_i + $E(|E_i|) = P(E_i)$

$$= 300 \cdot 0{,}95 = 285$$

Quindi, usando la disug. di Markov (Sapendo che S_{300} è sempre ≥ 0. Ipotesi necessaria all'uso della disug. di Markov)

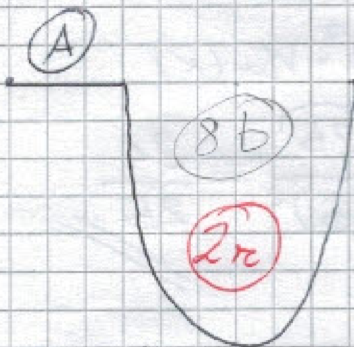
$$P(S_{300} \geq 297) \leq \frac{285}{297} = \frac{95}{99}$$

N° dei laminati giusti, se vi sono meno di 4 pezzi da scartare. Lo uso come a.

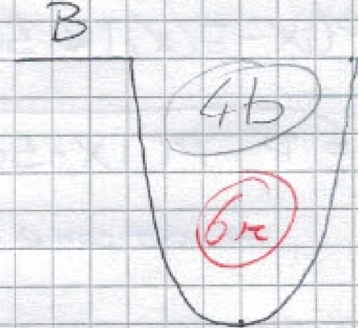
c) $P(B/E_i) \overset{\text{Th Bayes}}{=} \dfrac{P(E_i/B)\,P(B)}{P(E_i)} = \dfrac{0{,}06\cdot\frac{2}{3}}{0{,}05} = \dfrac{4}{5}$

Vedi nota all'ultima pagina.

Esercizio 2)



Estrazioni CON Reimbussolamento



Posto:

$A =$ 'Estraggo da urna (A)' ; $P(A) = \frac{1}{4}$

$(\bar{A} =)$ $B =$ ' " " " (B)' ; $P(B) = \frac{3}{4}$

$E_i =$ 'Esce b all'estr. i-esima'

a) $\cdot\ \underline{P(E_h \wedge \bar{E}_k)}$

$\cdot\cdot$ Se $h = k$, $P(E_h \wedge \bar{E}_h) = P(\emptyset) = 0$

$\cdot\cdot$ Se $h \neq k$:

$$P(E_h \wedge \bar{E}_k) \overset{\text{Scamb.}}{=} P(E_1 \wedge \bar{E}_2)$$

$$= P(E_1 \wedge \bar{E}_2 / A)P(A) + P(E_1 \wedge \bar{E}_2 / B)P(B)$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{25} + \frac{9}{50} = \frac{11}{50}$$

$\cdot\ \underline{P(E_4 / E_2 \vee \bar{E}_3)} = \dfrac{P[(E_4 \wedge E_2) \vee (E_4 \wedge \bar{E}_3)]}{P(E_2 \vee \bar{E}_3)}$

$P(E_4 \wedge E_2 \wedge E_4 \wedge \bar{E}_3)$

$$\overset{\text{Scamb.tà}}{=} \frac{P(E_1 \wedge E_2) + P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3)}{P(E_1 \vee \bar{E}_2)}$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{25}$$

$P(E_1 \wedge \bar{E}_2) = \frac{11}{50}$ (Ottenuto in precedenza)

$$P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{4}{125} + \frac{9}{125} = \frac{13}{125}$$

$$P(E_1 \vee \bar{E}_2) \overset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = 1 - \frac{11}{50} = \frac{39}{50}$$

Quindi:

$$P(E_4 / E_2 \vee \bar{E}_3) = \left(\frac{7}{25} + \frac{11}{50} - \frac{13}{125}\right) \cdot \frac{50}{39} = \frac{33}{65}$$

b)

$$D_n (\text{è un num. aleatorio}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |E_i|}_{\text{N° di successi}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\bar{E}_i|}_{\text{N° di insuccessi}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (|E_i| - |\bar{E}_i|) = \sum_{i=1}^{n} (|E_i| - (1 - E_i)) = \sum_i (2|E_i| - 1)$$

$$\bullet\ E(D_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} (2|E_i| - 1)\right) = 2\sum_{i=1}^{n} E(|E_i|) - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\overset{E(|E_i|) = P(E_i)}{=} 2nP(E_i) - n = 2n \cdot \frac{1}{2} - n = 0$$

Essendo $P(E_i) = P(E_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$$Var(D_n) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} (2|E_i|) - n\right) \overset{Var(aX+b) = Var(aX)}{=} Var\left(\sum_{i=1}^{n} (2|E_i|)\right)$$

$$= 4\, Var\left(\sum_i |E_i|\right) = 4\left[\sum_i Var(|E_i|) + 2\binom{n}{2} Cov(|E_i|; |E_j|)\right)$$

$$Var(|E_i|) = P(E_i)P(\bar{E}_i) = p(1-p)$$

$$= \cancel{4}^{1} \cdot n \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} + 4 \cdot \cancel{2}_1 \frac{n(n-1)}{\cancel{2}_1} \left[P(E_1 \wedge E_2) - P(E_1)P(E_2)\right]$$

$$Var(D_n) = n + n(n-1)\cdot 4\cdot\left(\frac{7}{25}-\frac{1}{4}\right) = n + \cancel{4}^{1} n(n-1)\cdot\frac{3}{\cancel{100}_{25}}$$

$$= \frac{25n+3n^2-3n}{25} = \frac{3n^2}{25}+\frac{22}{25}n$$

c) $D_3\cdot|E_1\wedge \bar{E}_2| \stackrel{\Delta}{=} X \quad \mathbb{P}_{canonica}(X) = \left\{ \overline{E_1\wedge\bar{E}_2};\ E_1\wedge\bar{E}_2\wedge E_3;\ E_1\wedge\bar{E}_2\wedge\bar{E}_3 \right\}$

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } E_1\wedge\bar{E}_2 \text{ è falso, siccome } |E_1\wedge\bar{E}_2| = 0 \text{ se } E_1\wedge\bar{E}_2 \text{ è Falso} \\ & \text{ed i costituenti: } (E_3' = \bar{E}_3 \text{ o } E_3) \\ & \bar{E}_1\wedge E_2\wedge E_3' = E_1\wedge E_2\wedge E_3' = \bar{E}_1\wedge\bar{E}_2\wedge E_3' = \emptyset \\ & \text{(tot. 6 costituenti)} \\ 1 & \text{se } E_1\wedge\bar{E}_2\wedge E_3 \\ -1 & \text{se } E_1\wedge\bar{E}_2\wedge\bar{E}_3 \end{cases}$$

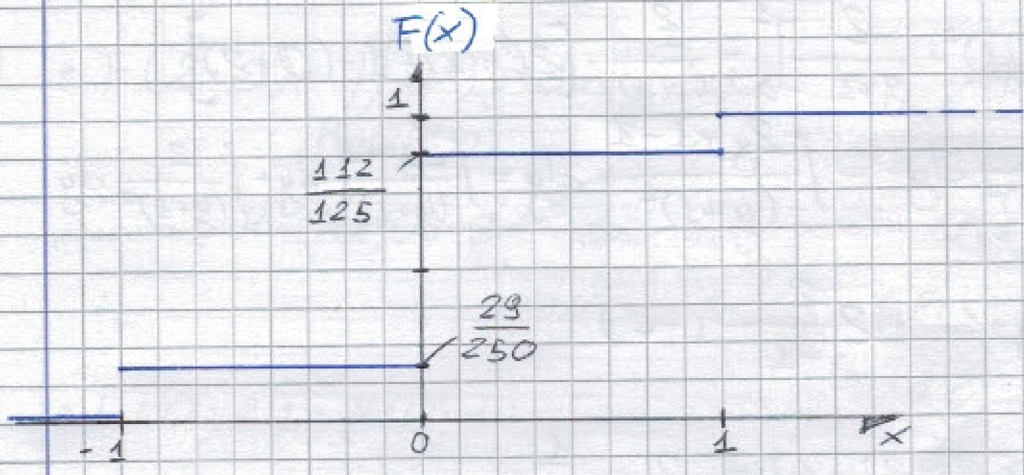
$$P(X=1) = P(E_1\wedge\bar{E}_2\wedge E_3) = \frac{13}{125}$$

$$P(X=-1) = P(E_1\wedge\bar{E}_2\wedge\bar{E}_3) = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$$

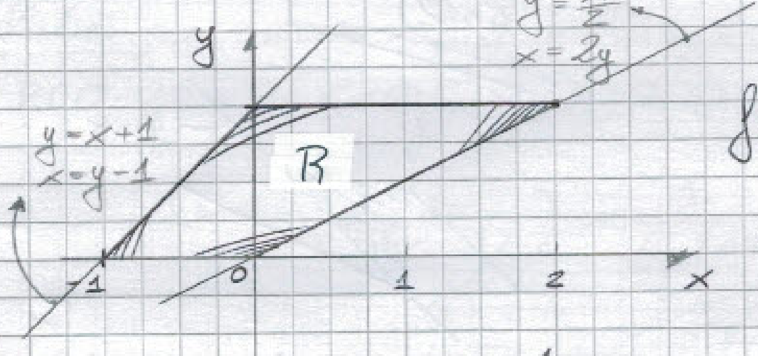
$$= \frac{1}{125}+\frac{27}{250} = \frac{29}{250}$$

$$P(X=0) = 1-\left(\frac{13}{125}+\frac{29}{250}\right) = \frac{195}{250}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<-1 \\ \frac{29}{250} & \text{se } -1\le x<0 \\ \frac{112}{125} & \text{se } 0\le x<1 \\ 1 & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$$



Esercizio 3)



$$f(x;y) = \frac{1}{\ln(2)(y+1)^2}$$

Con:

$$K \cdot J = 1 \iff K = \frac{1}{\ln(2)}$$

$$J = \iint_R g(x;y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\,dy \int_{y-1}^{2y} dx$$

$f(x;y) \propto g(x;y) = (y+1)^{-2}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\,[x]_{y-1}^{2y}\,dy = \int_0^1 \frac{y+1}{(y+1)^2}\,dy = \left[\ln|y+1|\right]_0^1 = \ln(2)$$

a) $$P(X \geq 0) = \int_0^2 \underbrace{\left(\int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{1}{\ln 2\,(y+1)^2}\,dy\right)}_{=f_X(x)} dx$$

Prima calcolo la funz. di densità marginale di X

$$F_X(2) - F_X(0) = \int_0^2 f_X(x)\,dx$$

Poi effettuo il conto $F_X(2) - F_X(0)$ per trovare la $P(X \geq 0)$

Però il conto fatto così è piuttosto lungo
Quindi posso calcolare l'integrale (doppio) sopra rendendolo normale rispetto a y:

$$= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\,dy \int_0^{2y} dx = \frac{2}{\ln 2}\int_0^1 \frac{y}{(y+1)^2}\,dy = \odot$$

Sì è uguale al precedente!

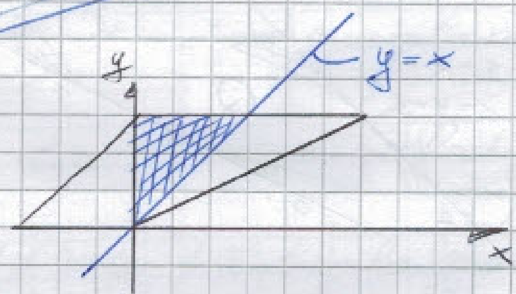
$$\odot = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left[\ln(y+1)^2 + \frac{2}{y+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left[2\ln(2) + 1 - (0+2) \right]$$

$$J_I = \int \frac{2y}{(y+1)^2} dy = \int \frac{2y+2-2}{(y+1)^2} dy = \int \frac{2y+2}{(y+1)^2} dy - \int \frac{2}{(y+1)^2} dy$$

$$= \ln(y+1)^2 + \frac{2}{y+1} \ (+c)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \cdot (2\ln(2) - 1) = 2 - \frac{1}{\ln(2)}$$

b)



$$P(X<Y / X \geq 0) = \frac{P(X<Y \wedge X \geq 0)}{P(X \geq 0)}$$

$$P(X<Y \wedge X \geq 0) = \iint f(x;y)\,dx\,dy$$

Nota: NoN occorre calcolare l'integrale...

basta notare che:

$$= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 \frac{y}{(y+1)^2} dy$$

È la metà del precedente

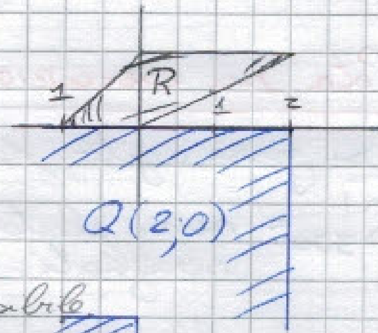
$$\Longrightarrow P(X<Y \wedge X \geq 0) = \frac{1}{2} P(X \geq 0) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{\ln(2)}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2\ln(2)}$$

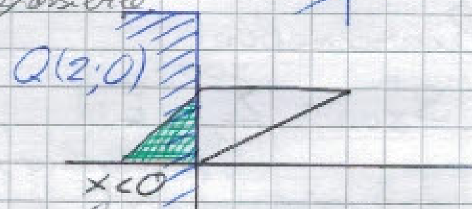
Quindi

$$P(X<Y / X \geq 0) = \frac{\frac{1}{2} \cancel{P(X \geq 0)}}{\cancel{P(X \geq 0)}} = \frac{1}{2}$$

c) • $F(2;0) = \iint\limits_{R\cap Q(2;0)} f(x;y)\,dx\,dy = 0$



Siccome $R\cap Q(2;0)=\emptyset$ inteso come:
↳ insieme vuoto
NON evento impossibile



• $F(0;2) = F(0;1)$

Nota: non occorre calcolare l'integrale, in quanto:

$$F(0;2) = P(X\le 0 \wedge Y\le 2) \overset{(*)}{=} P(X<0) = 1-P(X\geq 0)$$

$$= 1-\left(2-\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}-1$$

(*) in quanto

$$P(X<0)=\int_{-1}^{0}\Big(\underbrace{\int_{0}^{x+1}\frac{dy}{\ln(2)(y+1)^2}}_{f_X(x) \text{ se } -1\le x\le 0}\Big)\,dx = \iint f(x;y)\,dx\,dy$$

$$= F(0;2)$$

Nota su esercizio 1)

Se si fosse agito ponendo:

S'_{300} = num. aleatorio che conta il numero di laminati sbagliati.

Riuscirebbe:

$$S'_{300} = \sum_{i=1}^{300} |E_i| \quad ; E(S'_{300}) = 300 \cdot \frac{1}{20} = 15$$

Moltiplico per (-1) e sommo 1 ad entrambi i membri

$$P(S'_{300} < 4) = 1 - P(S'_{300} \geq 4) > 1 - \frac{15}{4} \quad (1')$$

La (1) è vera, ma non significativa in quanto nella disuguaglianza di Markov:

se $E(X) \geq a$, la disug. stessa è non significativa.

$$\left.\begin{array}{ll} P(X \geq a) \leq 1 & \text{se } E(X) = a \\ P(X \geq a) \leq 1 + \varepsilon & \text{se } E(X) > a \end{array}\right\} \text{Entrambe vere ma banali.}$$

■