CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 12/2/2018

Nome: ______________________ COGNOME: ______________________

1) Detti X il risultato del lancio di un dado regolare a sei facce, Y il numero estratto a caso e indipendentemente da $\{1, 2, \dots, 12\}$, $Z = X + Y$, calcolare:

(a) $P(X = i \mid Z = 5)$;

(b) $Cov(X, Z)$;

(c) $E[X(2Y - 5)]$.

2) Da un'urna contenente 3 palline bianche e 3 rosse si effettuano 3 estrazioni con la seguente modalità: si rimette la pallina nell'urna, se esce rossa, non la si rimette altrimenti. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione" e detta S_n la frequenza assoluta di successo in *n* estrazioni (successo: uscita di pallina bianca), calcolare:

(a) $P(E_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, $P(E_1 \mid \overline{E}_2)$;

(b) $P(E_2 \vee E_3 \mid \overline{E}_1)$;

(c) $P(S_2 = 1)$.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul triangolo di vertici (0,−1), (1,0), (0,1) con densità $f_{X,Y}(x, y) = kx|y|$. Calcolare:

(a) le densità marginali $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(b) la funzione di ripartizione del n.a. X.

Esercizio 1)

X = risultato del lancio di un dado a 6 faccie

Y = n° estratto da $\{1, 2, \dots, 12\}$; $Z = X + Y$

Oss: X ed Y sono stocasticamente indipendenti. Lo si può capire intuitivamente, constatando che il risultato ottenuto al lancio di un dado "nulla ha a che vedere" con un numero estratto da (ad esempio) un'urna con 12 palline.

T.P.Comp. + $Z = X+Y = 5 \Leftrightarrow i + Y = 5$

a) $$P(X=i / Z=5) \overset{!}{=} \frac{P(X=i \wedge Y=5-i)}{P(Z=5)}$$

Per $i \leq 4$ siccome Y ha realizzazioni > 0.

X ed Y sono stocasticam.te indipendendi

$$= \frac{P(X=i)\,P(Y=5-i)}{P(Z=5)}$$

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18

Nota: come si può osservare in tabella l'immagine del numero aleatorio Z ha 72 elementi.

Posso assumere equiprobabilità sulla partizione prodotto che ha come eventi elementari $(X=i \wedge Y=j)$, quindi:

$P(Z=5) = \frac{4}{72}$.

Risce quindi:

È 1 valore sui 12 possibili di Y

$$P(X=i/Z=5)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{72}{4}=\frac{1}{4}$$

b)

$$Cov(X;Z)=E(X\cdot Z)-E(X)E(Z)$$

$$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2}=3{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{12} y_i P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{12} i\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\cdot\frac{12\cdot 13}{2}=6{,}5$$

$$E(Z)=E(X+Y)\overset{\text{add.}}{=}E(X)+E(Y)=3{,}5+6{,}5=10$$

Nota: 10 è anche il valore mediano della distribuzione (simmetrica) del num. aleatorio Z. Se la distr. di un n. aleat è simmetrica il suo valore atteso è quello centrale.

$$E(XZ)=E[X(X+Y)]=E[X^2+XY]\overset{\text{add.}}{=}E(X^2)+E(XY)$$

$$E(X^2)=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=3{,}5\cdot 6{,}5=\frac{91}{4}$$

X e Y sono stocast. indip.

$$=\frac{91}{4}+\frac{91}{6}=\frac{455}{12}$$

Quindi:

$$CoV(X;Z)=\frac{455}{12}-\frac{7}{2}\cdot 10=\frac{455}{12}-35=\frac{35}{12}$$

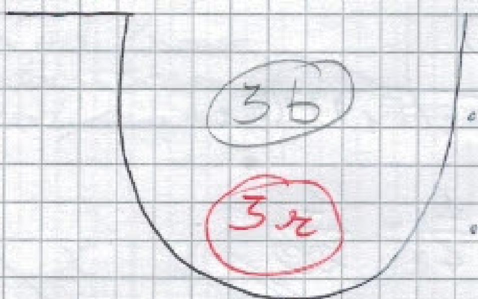
c) $E\left[X\cdot(2Y-5)\right] = E\left[2XY-5X\right] = E(2XY) - E(5X)$

$= 2E(XY) - 5E(X) = 2\cdot\frac{91}{4} - 5\frac{7}{2}$

$= \frac{91-35}{2} = 28$

Vedi anche le note sull'esercizio all'ultima pagina.

Esercizio 2)

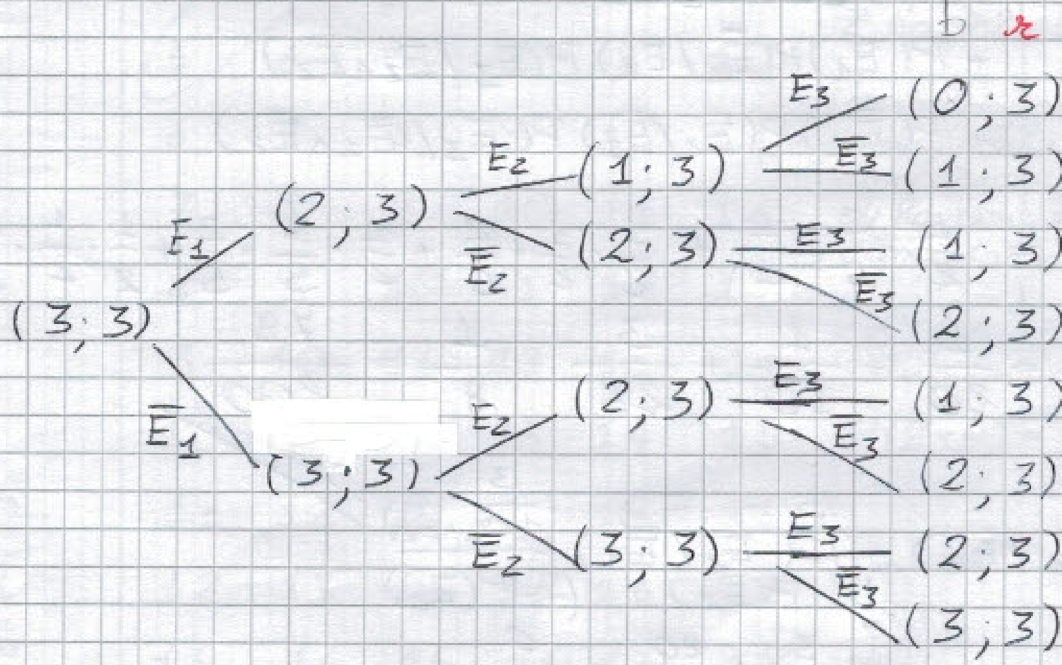


Effettuo estrazioni con la seguente modalità:

- se esce ●, estrazioni CON RIMESSA (stesso colore)
- se esce O, estrazioni SENZA RIMESSA

Oss: il processo stocastico in esame NON è scambiabile, in quanto non lo sono i suoi eventi:

$$P(E_1 \wedge \overline{E}_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(\overline{E}_1 \wedge E_2)$$



a) $P(E_i)$ con $i = 1, 2, 3$ Oss: nel caso del proc. stocastico in esame, non scambiabili non esiste una generica $P(E_i)$, in quanto:

$$P(E_1) \neq P(E_2) \neq \dots \neq P(E_n).$$

Nei processi stocastici scambiabili è:

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_i) = \dots = P(E_n).$$

Calcolo quindi le $P(E_i)$, con $i = 1, .., 3$ separatamente:

$$P(E_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(E_2) = P(E_2 \wedge E_1) + P(E_2 \wedge \bar{E}_1)$$
$$= P(E_2/E_1)P(E_1) + P(E_2/\bar{E}_1)P(\bar{E}_1)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

$$P(E_3) = P(E_3 \wedge E_1 \wedge E_2) + P(E_3 \wedge \bar{E}_1 \wedge E_2) + P(E_3 \wedge E_1 \wedge \bar{E}_2) + P(E_3 \wedge \bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2)$$
$$= P(E_1)P(E_2/E_1)P(E_3/E_1 \wedge E_2) +$$
$$+ P(\bar{E}_1)P(E_2/\bar{E}_1)P(E_3/\bar{E}_1 \wedge E_2)$$
$$+ P(E_1)P(\bar{E}_2/E_1)P(E_3/E_1 \wedge \bar{E}_2)$$
$$+ P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2/\bar{E}_1)P(E_3/\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{3}{25} + \frac{1}{8} = \frac{79}{200}$$

- $$P(E_1/\bar{E}_2) = \frac{P(E_1 \wedge \bar{E}_2)}{P(\bar{E}_2)} = \frac{P(E_1 \wedge \bar{E}_2)}{1 - P(E_2)}$$
$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{20}{11} = \frac{6}{11}$$

b)

$$P(E_2 \vee E_3 / \overline{E}_1) = 1 - P(\overline{E}_2 \wedge \overline{E}_3 / \overline{E}_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(\overline{E}_2 \wedge \overline{E}_3 / \overline{E}_1) = P(\overline{E}_2 / \overline{E}_1) P(\overline{E}_3 / \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$(\overline{E}_1 \wedge E_2)$; $(E_1 \wedge \overline{E}_2)$ sono incompatibili.

c)

$$P(S_2 = 1) = P\left[(\overline{E}_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge \overline{E}_2)\right]$$

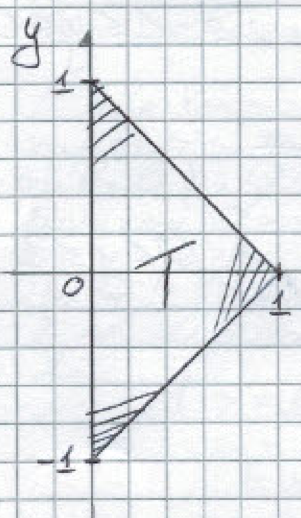
$$= P(\overline{E}_1 \wedge E_2) + P(E_1 \wedge \overline{E}_2)$$

$$P(\overline{E}_1 \wedge E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{11}{20}$$

■

Esercizio 3)



$$f(x;y) = 12\,x|y|$$

Essendo:

$$k \cdot J = 1 \iff \frac{k}{12} = 1 \iff k = 12$$

con $J = \iint_T x|y|\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 x\,dx \left[\underbrace{\int_{x-1}^{0} -y\,dy}_{(2)} + \underbrace{\int_0^{1-x} y\,dy}_{(1)} \right]$$

Nota: si applica la def. di valore assoluto:

$$|y| = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \quad (1) \\ -y & \text{se } y < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$= \int_0^1 x\,dx \left[(-1) \cdot \frac{1}{2} [y^2]_{x-1}^{0} + \frac{1}{2} [y^2]_0^{1-x} \right] = (*)$$

$$(*) = \int_0^1 x\,dx \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(1-x)^2 \right] = \int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

a)

$$f_X(x) = 12 \left(-\int_{x-1}^{0} xy\,dy + \int_0^{x+1} xy\,dy \right)$$

$$= 12 \left(-x \cdot \frac{1}{2} [y^2]_{x-1}^{0} + x\frac{1}{2}[y^2]_0^{1-x} \right)$$

$$= 12 \left(x \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 + x \cdot \frac{1}{2}(1-x)^2 \right)$$

$$= 12 \cdot x\,(x-1)^2 \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = 12 \begin{cases} \displaystyle\int_0^{y+1} -xy\,dx = -y \cdot \frac{1}{2}[x^2]_0^{y+1} = -\frac{y}{2}(y+1)^2 & \text{se } -1 \leq y \leq 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^{1-y} xy\,dx = y \cdot \frac{1}{2}[x^2]_0^{1-y} = \frac{y}{2}(1-y)^2 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

b)

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \displaystyle 12\int_0^x t(t-1)^2\,dt = 24(3x^4 - 8x^3 + 6x^2) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Con: $J_1 = 12\int_0^x t(t^2-2t+1)\,dx = 12\left[\frac{t^4}{4}-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

$$= 12\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right] = (3x^4-8x^3+6x^2)$$

• <u>Nota sull'esercizio 1)</u>

Punto a)

Non si commetta l'errore di calcolare la $P(X=i/Z=5)$ così:

$$\frac{P(X=i)\,\cancel{P(Y=5-i)}}{\cancel{P(Y=5-i)}} = P(X=i) \longrightarrow \text{! Errore}$$

Infatti se $P(X=i/Z=5) = P(X=i)$ gli eventi $(X=i)$ e $(Z=5)$ sarebbero stocasticamente indipendenti, assurdo, siccome $Z=X+Y$!

Posso scrivere $P[(X=i)\wedge(Y=5-i)]$ solo perchè gli eventi che formano il prodotto logico devono valere contemporaneamente (altrimenti il prod logico sarebbe impossibile). Quindi il valore di X è DATO. Posso quindi scrivere Y in funzione di i. Ma quando lo faccio DEVO ricordarmi che Y è un numero aleat. DIVERSO da Z! Y può assumere 12 diversi valori mentre Z ne può assumere 72 (ad esempio). Quindi gli eventi:

$$(Y=5-i) \neq (Z=5).$$

Punto b) È risolvibile anche nel seguente modo (me ne sono accorto dopo non essendo un esperto di calcolo delle probabilità)

$$Cov(X;Z) = Cov(X;X+Y) \overset{\text{Bilinearità}}{=} Cov(X;X) + \underbrace{Cov(X;Y)}_{0}$$

Stoc. indip. ⇒ ⇒ incorrelaz.

$$= Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = \frac{35}{12}$$