1740

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 24/5/2019

Nome: ____________________ COGNOME: ________________________

1) Da un'urna contenente 4 palline numerate da 1 a 4 vengono estratte a caso e simultaneamente 2 palline. Considerati i numeri aleatori: X = massimo numero estratto, Y = minimo numero estratto, calcolare:

10

(a) $E(X)$, $Cov(X, Y)$;

(b) $P(X \leq 3 \mid |X - 2Y| = 2)$, $P(Y \geq 2 \mid X \geq 3)$;

(c) la funzione di ripartizione di $Z = X + Y$, tracciandone il grafico.

2) L'urna A contiene 2 palline bianche e, con uguale probabilità, 3 o 4 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni senza reimbussolamento dall'urna. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione", calcolare:

11

(a) $P(E_h)$, $P(E_1 \wedge E_2 \mid E_2 \vee \bar{E}_3)$, $P(E_1 \mid E_2 \vee \bar{E}_3)$;

(b) stabilire se sono logicamente indipendenti: gli eventi dell'insieme $\{E_1, E_1 \vee \bar{E}_2, \bar{E}_3\}$, e quelli di ciascuno dei suoi sottoinsiemi di 2 eventi;

(c) determinare la probabilità che inizialmente l'urna A contenesse 3 palline rosse, sapendo che è stata estratta (esattamente) una rossa nelle prime 3 estrazioni.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio di vertici (0,0), (3,0), (2,1), (1,1) con densità proporzionale a $g(x,y) = x + y$. Calcolare:

10

(a) le densità marginali;

(b) $P(X + Y \geq 3/2)$.

Esercizio 1)

Oss: posso assumere equiprobabilità sulla $\mathbb{P}_{n\_o}$, partizione delle coppie non ordinate di palline. Creo per comodità la seguente tabella:

Tab. 1)

Coppie NON ordinate di palline	ω_1 $\{1,2\}$	ω_2 $\{1,3\}$	ω_3 $\{1,4\}$	ω_4 $\{2,3\}$	ω_5 $\{2,4\}$	ω_6 $\{3,4\}$
X	2	3	4	3	4	4
Y	1	1	1	2	2	3
$X \cdot Y$	2	3	4	6	8	12
$\lvert X-2Y \rvert$	0	1	2	1	0	2
$X+Y$	3	4	5	5	6	7

a) $I_X = \{2,3,4\}$ (Immagine di X)

- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X=x_i) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{10}{3}$

- $Cov(X;Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{35}{6} - \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{18}$

Sia $I_Y = \{1,2,3\}$, riesce:

$E(Y) = 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

$E(X \cdot Y) = \frac{1}{6}(2+3+4+6+8+12) = \frac{35}{6}$

b)

- $P(X \leq 3 / |X-2Y|=2) = 0$

in quanto (vedi Tab.1)

$(X \leq 3 / |X-2Y|=2) = (\emptyset / |X-2Y|=2)$

- $P(Y \geq 2 / X \geq 3) \overset{TPC}{=}$

$$\overset{1}{=} \frac{P(Y \geq 2 \wedge X \geq 3)}{P(X \geq 3)}$$

$P(\overbrace{Y \geq 2 \wedge X \geq 3}^{F}) = \frac{3}{6}$. in quanto (vedi Tab.1)

$$\left.\begin{array}{l} \omega_4 \Rightarrow F \\ \omega_5 \Rightarrow F \\ \omega_6 \Rightarrow F \\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \Rightarrow \overline{F} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

F è logicamente dipendente da Π_{n-o}. Quindi:

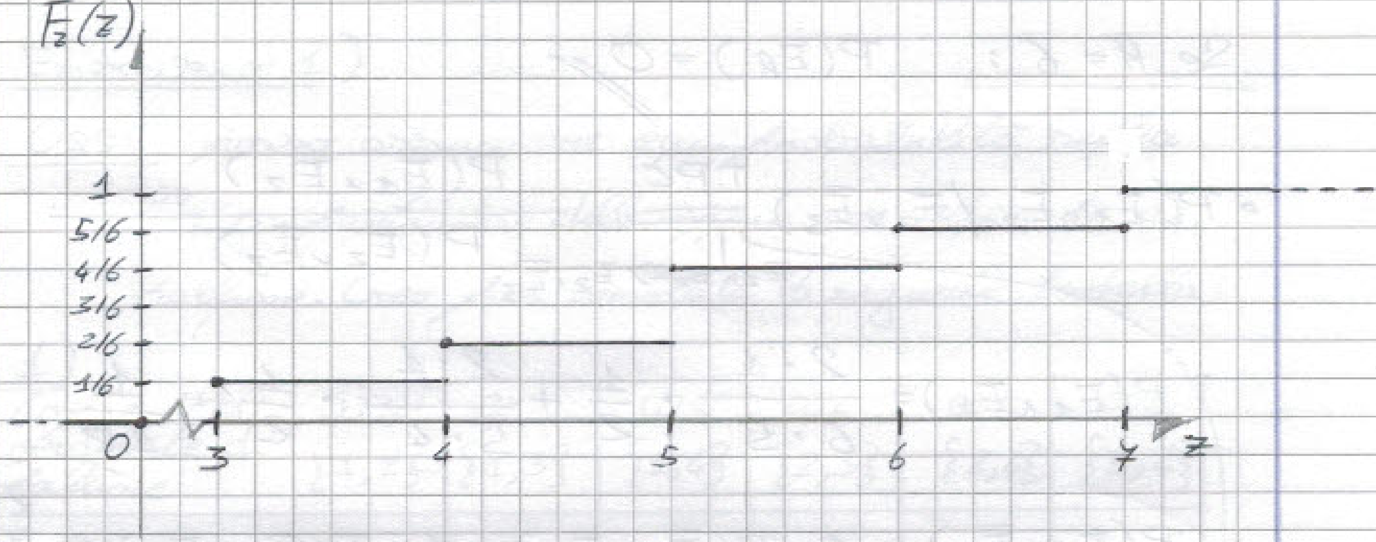
$$P(F) = \sum_{\omega \Rightarrow F} P(\omega) = P(\omega_4) + P(\omega_5) + P(\omega_6) \overset{1}{=} 3/6$$

$P(X \geq 3) = \frac{5}{6}$ (Vedi Tab.1)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$$

c) Guardando (sempre Tab 1) si comprende che:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 3 \\ 1/6 & \text{se } 3 \leq z < 4 \\ 1/3 & \text{se } 4 \leq z < 5 \\ 2/3 & \text{se } 5 \leq z < 6 \\ 5/6 & \text{se } 6 \leq z < 7 \\ 1 & \text{se } z \geq 7 \end{cases}$$



b) Esercizio 2)

Siano:

R = 'L'urna ha 4 palline rosse'

$\overline{R}$ = ' " " " 3 " rosse'

E_k = 'Esce b all'k-esima estrazione'

Risulta che: $P(R) = P(\overline{R}) = \frac{1}{2}$

Si effettuano estr. SENZA RIMESSA.

a) • $P(E_k)$

Se $k \leq 5$:

$$P(E_k) \underset{\text{scamb}}{=} P(E_1) = P(E_1/R)P(R) + P(E_1/\overline{R})P(\overline{R})$$

$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{30}$$

Se $k = 6$:

$$P(E_k) = P(E_1/R)P(R) = \frac{1}{6}$$

Siccome $E_6/\overline{R} = \emptyset/\overline{R}$

Se $k > 6$: $P(E_k) = 0$

$$\bullet\ P(E_1 \wedge E_2 / E_2 \vee \bar{E}_3) \overset{T.P.C.}{=} \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2 \vee \bar{E}_3)}$$

$E_1 \wedge E_2 \Rightarrow E_2 \wedge \bar{E}_3$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$P(E_2 \vee \bar{E}_3) = 1 - P(\bar{E}_2 \wedge E_3) = 1 - P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = \frac{43}{60}$$

$$P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{60}$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{60}{43} = \frac{5}{43}$$

$$\bullet\ P(E_1 / E_2 \vee \bar{E}_3) \overset{TPC}{=} \frac{P[\overbrace{E_1 \wedge (E_2 \vee \bar{E}_3)}^{=A}]}{P(E_2 \vee \bar{E}_3)} = \frac{17}{60} \cdot \frac{60}{43} = \frac{17}{43}$$

$$P(A) = P[(E_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_3)]$$

$$= P(E_1 \wedge E_2) + P(E_1 \wedge \bar{E}_3) - P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3)$$

$$E_1 \wedge E_2 = (E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3)$$

$$= P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) + \cancel{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3)} + P(E_1 \wedge \bar{E}_3) - \cancel{P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3)}$$

$P(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3) = 0$ [non posso estrarre 3 pall. b]

$$P(E_1 \wedge \bar{E}_3) = P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = \frac{17}{60}$$

$$= \frac{17}{60}$$

b) • $\underline{E_1}$, $\underline{E_1 \vee \overline{E}_2}$, $\underline{\overline{E}_3}$; non sono logicamente indipendenti.
in quanto:
$E_1 \Rightarrow E_1 \vee \overline{E}_2$, quindi $\exists$ un costituente della
$\mathbb{P}_G(\{E_1, E_1 \vee \overline{E}_2, \overline{E}_3\})$ impossibile, cioè
$E_1 \wedge (\overline{E_1 \vee \overline{E}_2}) = \emptyset$. Mentre affinché i 3 eventi siano log. indip., NESSUN costituente deve essere $= \emptyset$.

• $\underline{E_1}$, $\underline{E_1 \wedge \overline{E}_2}$; non sono log. indipendenti per lo stesso motivo descritto sopra.

• $\underline{E_1}$, $\underline{\overline{E}_3}$; sono log. dipendenti, in quanto:

$E_1 \wedge E_3 \neq \emptyset$; $E_1 \wedge \overline{E}_3 \neq \emptyset$; $\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_3 \neq \emptyset$; $E_1 \wedge E_3 \neq \emptyset$

• $\underline{E_1 \vee \overline{E}_2}$, $\underline{E_3}$; sono log. dipendenti, dato che:

$(E_1 \vee E_2) \wedge E_3 = (E_1 \wedge E_3) \vee (\overline{E}_2 \wedge E_3) \neq \emptyset$
$(E_1 \vee \overline{E}_2) \wedge \overline{E}_3 = (E_1 \wedge \overline{E}_3) \vee (\overline{E}_2 \wedge \overline{E}_3) \neq \emptyset$
$\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_3 \neq \emptyset$
$\overline{E}_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \neq \emptyset$

c) $$P(\overline{R} / S_3 = 2) \overset{\text{Tr. Bayes}}{=} \frac{P(S_3 = 2 / \overline{R})\, P(\overline{R})}{P(S_3 = 2)}$$

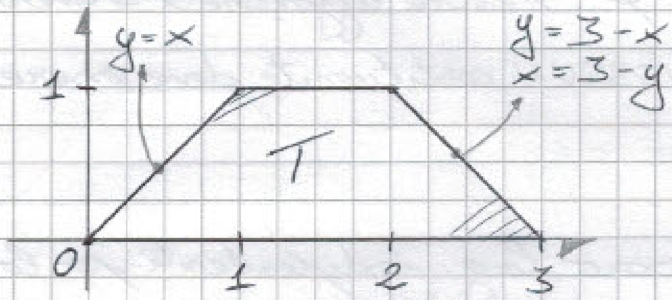
$$P(S_3 = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$P(\overline{R}/S_3=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{80}$$

Esercizio 3)



$$f(x;y)=\frac{6}{23}(x+y)$$

$$kJ=1 \iff k=\frac{1}{J}=\frac{6}{23}$$

$$\text{Con } J=\int_0^1 dy\int_y^{3-y}(x+y)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(9-4y^2)\,dy=\frac{23}{6}$$

a)

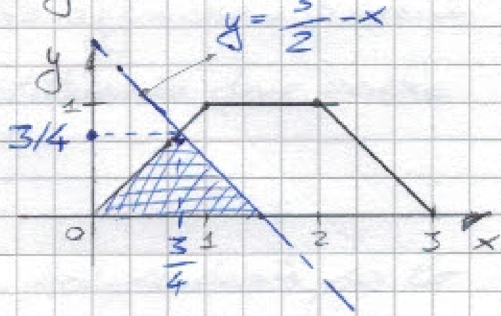
$$f_x(x)=\frac{6}{23}\cdot\begin{cases}\displaystyle\int_0^x(x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^x=x^2+\frac{x^2}{2} & \text{se } 0\le x\le 1\\ \displaystyle\int_0^1(x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1=x+\frac{1}{2} & \text{se } 1\le x\le 2\\ \displaystyle\int_0^{3-x}(x+y)\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{3-x}=\frac{1}{2}(9-x^2) & \text{se } 2\le x\le 3\end{cases}$$

$$f_x(y)=\frac{6}{23}\int_y^{3-y}(x+y)\,dx=\frac{3}{23}(9-4y^2)\quad \text{se } 0\le y\le 1$$

b) $P\left(X+Y \geq \frac{3}{2}\right) = 1 - P\left(X+Y < \frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{27}{184} = \frac{157}{184}$

Con:

$$P\left(X+Y < \frac{3}{2}\right) = \frac{6}{23}\int_0^{3/4} dy \int_y^{(3/2-y)} (x+y)\,dx$$



$$= \frac{6}{23}\left(\frac{1}{8}\int_0^{3/4} (9-16y^2)\,dy\right)$$

$$= \frac{6}{23} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{184}$$