GIOVEDÌ
VEN. ORALI
17.45

CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello dell' 11/6/2019

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

===

1) Tizio partecipa ad un gioco in cui paga 0,5€ prima di ogni lancio simultaneo di due dadi regolari, uno rosso e uno verde, per ricevere 1€ se $|X - Y| \leq 1$, 0€ altrimenti, essendo X (Y) il punto realizzato dal dado rosso (verde).

10

(a) Quanti lanci occorrono affinché la speranza matematica del guadagno complessivo di Tizio sia –10€?

(b) Calcolare la probabilità che in una sequenza di 10 lanci Tizio vinca 6 volte.

(c) Determinare una limitazione inferiore significativa per $P(-40€ < G_{360} < 0€)$, essendo G_{360} il guadagno complessivo di Tizio in 360 lanci.

2) L'urna A contiene 3 palline bianche e 6 rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con contagio, con probabilità 1/3 unitario, con probabilità 2/3 immettendo dopo ogni lancio 2 palline dello stesso colore di quella estratta. Posto E_h = "esce bianca all'h-esima estrazione", calcolare:

10

(a) $P(E_2 \vee E_3 \mid \overline{E}_4)$, $P(\overline{E}_4 \mid E_2 \vee E_3)$, $P(E_h \mid E_2 \vee E_h)$;

(b) la probabilità che dopo la terza estrazione e prima della quarta nell'urna ci siano più palline bianche che rosse.

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio unione del triangolo T di vertici (0,–1), (1,0), (0,0) e del quadrato Q di vertici opposti (0,0), (1,1) con densità proporzionale a: $y/(x + 1)$ su Q, 1 su T. Calcolare:

11

(a) la densità marginale di Y;

(b) la funzione di ripartizione congiunta $F_{X,Y}(x_0, -1/2)$;

(c) E(Z), essendo $Z = 1/(Y + 2)$.

$x_i \left(|E| - E(|E|)\right)$ Es 1) a)

Tizio guadagna $\begin{cases} 1-0{,}5=0{,}5 & \text{se } |X-Y|\le 1 \\ 0-0{,}5=-0{,}5 & \text{se } |X-Y|>1 \end{cases}$

Pongo $(|X-Y|\le 1)_i = E_i$

$|E|-1+|E|=$

$$G_n=\sum_{i=1}^{n}\left(0{,}5\,|E_i|-0{,}5\,|E_i|\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(|E_i|-(1-|E_i|)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum^{n}(2|E_i|-1)=\frac{1}{2}\left(2\sum^{n}|E_i|-n\right)=\sum^{n}|E_i|-\frac{n}{2}$$

$$=S_n-\frac{n}{2}$$

$$E(G_n)=E\left(S_n-\frac{n}{2}\right)=E\left(\sum^{n}|E_i|\right)-\frac{n}{2}$$

$$=\sum^{n}E(|E_i|)-\frac{n}{2}=\sum^{n}P(E_i)-\frac{n}{2}$$

$$=\sum^{n}P(|X-Y|\le 1)-\frac{n}{2}=n\left(P(|X-Y|\le 1)-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{n}{18}$$

$$n\left(P(|X-Y|\le 1)-\frac{1}{2}\right)=-10$$

$$P(|X-Y|\le -1)=\frac{4}{9}$$

Quindi

$$n\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{2}\right)=-10 \iff n\left(-\frac{1}{18}\right)=-10 \iff n=180$$

1

$|X-Y|$ $\qquad P(|X-Y| \leq 1) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

F = Tizio vince 6 volte)

b) $P(S_{10}=6) = \binom{10}{6} P(E_i) P(\bar{E_i}) =$

I ris. che si ottengono dal lancio dei dadi al I lancio dadi, II lancio dadi sono v. indip. Quindi E_i = "$|X-Y|\leq 1$ al lancio i-esimo" sono v. indip.

$= P(E_i) = \frac{4}{9} \Rightarrow P(\bar{E_i}) = \frac{5}{9}$

$= \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{\cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \cdot 4 \cdot 5$

$= 210 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^6 \left(\frac{5}{9}\right)^4 \simeq 0,1542 \; (15,42\%)$

c) $P(-40 < G_{360} < 0) = P(-20 < G_{360} - 20 < 20) \geq$

$E(G_{360}) = -\frac{360}{18} = -20$

$\geq P(-20 < G_{360} - E(G_{360}) < 20) = P(|G_{360} - E(G_{360})| < 20)$

$\geq 1 - \frac{Var(G_{360})}{20^2} = 1 - \frac{\cancel{800}^{\,2}}{9 \cdot \cancel{400}_{\,1}} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

B.C

$= Var\left(\sum_{i=1}^{360} |E_i|\right) = \sum_{i=1}^{360} Var(|E_i|)$ s.i

$Var(G_{360}) = 360 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{800}{9}$

E_i, E_j v. indip. $\forall i \neq j \Rightarrow Var\left(\sum^n X_i\right) = \sum^n Var(X_i)$

$E_j = (|X-Y| \leq 1)_j$

Esercizio 2)

3b

6r

$C_1 =$ 'Estraz. con contagio $(a=1)$'

? $\to C_2 =$ ' " " " $(a \overset{?}{=} 2)$'

Sì corretto

$P(C_1) = \frac{1}{3}$; $P(C_2) = \frac{2}{3}$

a) $\cdot P(E_2 \vee E_3 / \bar{E}_4) \overset{TPC}{=\!=} \frac{P[\overbrace{(E_2 \vee E_3) \wedge \bar{E}_4}^{= A}]}{P(\bar{E}_4)} = \frac{\cancel{218}^{109}}{715} \cdot \frac{3}{\cancel{2}_1} = \frac{327}{715}$ ✓ Ric

$P(A) = P[(E_2 \wedge \bar{E}_4) \vee (E_3 \wedge \bar{E}_4)]$

$= P(E_2 \wedge \bar{E}_4) + P(E_3 \wedge \bar{E}_4) - P(E_2 \wedge E_3 \wedge \bar{E}_4)$

Scamb.

$= 2\,P(E_1 \wedge \bar{E}_2) - P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) = \frac{218}{715}$

$P(E_1 \wedge \bar{E}_2) = \frac{3 \cdot 6}{9 \cdot 10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot 6}{9 \cdot 11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{31}{165}$

Giusti i denominatori? OK

$P(E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) = \frac{\cancel{3}^1 \cdot 4 \cdot \cancel{6}^{2\,1}}{\cancel{9}_{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{10}_5 \cdot 11} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\cancel{3}^1 \cdot 5 \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{9}_3 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \frac{2}{\cancel{3}_1} = \frac{152}{2145}$

$P(\bar{E}_4) = \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Calcolato prima

$$\circ\ P(E_4/E_2\vee E_3)=\frac{P[\overbrace{E_4\wedge(E_2\vee E_3)}]}{P(E_2\vee E_3)}=\frac{218}{715}\cdot\frac{165}{86}=\frac{327}{559}$$

✓Ric

$$P(E_2\vee E_3)=1-P(\overbrace{\bar{E}_2\wedge\bar{E}_3}^{=B})=\frac{86}{165}$$

$$P(B)=P(\bar{E}_2\wedge\bar{E}_3)=\frac{6\cdot 7}{9\cdot 10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6\cdot 8}{9\cdot 11}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{45}+\frac{32}{99}=\frac{79}{165}$$

Continuazione del punto a) alla pag. successiva.

b) $F=$ (+ bianche che rosse)

$$P(F)=P(F/C_1)P(C_1)+P(F/C_2)P(C_2)$$

$F/C_1=\emptyset/C_1$ perché al Max all IV estraz mi ritrovo se $E_1\wedge E_2\wedge E_3$ (6b) (6r)

$$=P(F/C_2)P(C_2)$$

Modi affinché b>r

$$=P(S_3=3\vee S_3=2/C_2)\,P(C_2)$$

Sbagliato, le rosse sarebbero 8 le bianche 8

$$=\Big[\underbrace{P(S_3=3/C_2)}_{E_1\wedge E_2\wedge E_3}+\underbrace{\cancel{P(S_3=2/C_2)}}_{\binom{3}{2}E_1\wedge E_2\wedge E_3}\Big]P(C_2)$$

$$=\left[\binom{3}{3}\left(\frac{3\cdot 5\cdot 7}{9\cdot 11\cdot 13}\right)+\cancel{\binom{3}{2}\left(\frac{6\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 11\cdot 13}\right)}\right]\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\left(\frac{35}{429}+\cancel{\frac{10}{143}}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{70}{1.287}$$

✓RIC.

a)

$\cdot\ P(E_h / E_2 \vee E_h)$

Idempot.

$E_2 \vee E_2 \overset{!}{=} E_2 +$
$E_2 \Rightarrow E_2$

Se $h = 2$: $P(E_2 / E_2 \vee E_2) \overset{!}{=} P(\Omega / E_2) = 1$

Se $h \neq 2$:

$$P(E_h / E_2 \vee E_h) \overset{TPC}{=} \frac{P(\overbrace{E_h \wedge (E_2 \vee E_h)}^{=C})}{P(E_2 \vee E_h)} = \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{165}^{55}}{86} = \frac{55}{86}$$ ✓

Sc.

$$P(C) = P[(E_h \wedge E_2) \vee E_h] = P(E_h \wedge E_2) \overset{!}{=} P(E_1 \wedge E_2)$$

$E_h \wedge E_2 \Rightarrow E_h$

$$= 1 - \frac{79}{165} - 2\frac{31}{165} = \frac{8}{55}$$

Sc

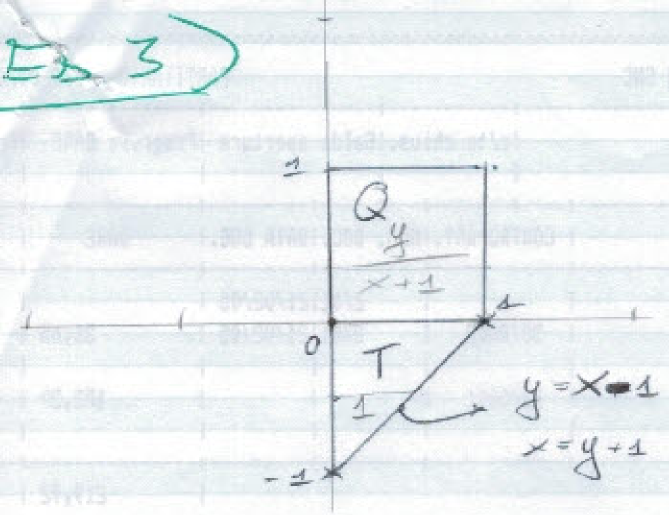
$$P(E_2 \vee E_h) = 1 - P(\overline{E}_2 \wedge \overline{E}_h) \overset{!}{=} 1 - P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2) = \frac{86}{165}$$

Propr. di assorbimento

$$P(C) = P(E_h \vee (E_h \wedge E_2)) \overset{!}{=} P(E_h) = P(E_1) = \frac{1}{3}$$

Es 3)

$$f(x;y) = \frac{2}{1+\ln 2}\begin{cases} \frac{y}{x+1} & se\ (x;y)\in Q \\ 1 & se\ (x;y)\in T\end{cases}$$



$$J = \frac{1}{2} + \int_0^1 dy \underbrace{\int_0^1 \frac{y}{x+1}\, dx}_{=J_1} \qquad \ln 2 - \cancelto{0}{\ln 1}$$

$$J_1 = y\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = y\left[\ln|x+1|\right]_0^1 = y\ln 2$$

$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\int_0^1 y\ln 2\, dy}_{=J_2}$$

$$J_2 = \ln 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

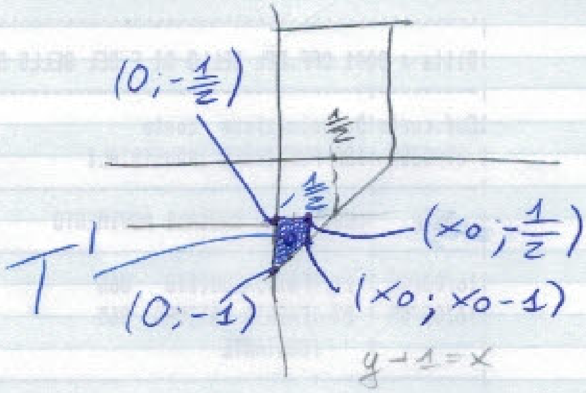
$$= \frac{1+\ln 2}{2}$$

a)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{1+\ln 2}\int_0^{y+1} dx = \frac{2(y+1)}{1+\ln(2)} & se\ -1\le y\le 0 \\ \frac{2}{1+\ln 2}\int_0^1 \frac{y}{x+1}\,dx = \frac{\ln 4\, y}{1+\ln 2} & se\ 0\le y\le 1\end{cases}$$

OK Calc

b)



Se $x_0 \le 0$

$$F(x_0;-\tfrac{1}{2}) = 0$$

Se $0 \le x_0 \le \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2} = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(x_0;-\tfrac{1}{2}) = \left(\int_0^{x_0} dx \int_{x-1}^{-1/2} dy\right) \underbrace{\frac{2}{1+\ln 2}}_{=K}$$

$$-\frac{1}{2}-(x-1) = -\frac{1}{2}-x+1 = \frac{1}{2}-x$$

$$= k\int_0^{x_0} [y]_{x-1}^{-1/2}\, dx = k\int_0^{x_0}\left(\frac{1}{2}-x\right) dx = k\left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0}$$

$$= k\left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{(x_0)^2}{2}\right) = \frac{k}{2}\left(x_0-(x_0)^2\right) = \frac{(x_0-x_0^2)}{1+\ln 2} = (*)$$

Quindi (strada alternativa) calcolo l'area del trapezio T' $\frac{(B+b)h}{2}$

$$\frac{2}{1+\ln 2}\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}-(-1)\right)+\left(-\frac{1}{2}-x_0+1\right)\right]\cdot\frac{x_0}{2} = (*)$$

Se $x_0 \ge \frac{1}{2}$

$$F(x_0;-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1+\ln 2} = \frac{1}{4(1+\ln 2)}$$

c)

$$F(z) = \frac{2}{1+\ln(2)}\left(\ln 2\int_{-1}^{0}\frac{y+1}{y+2}\, dy + \int_0^1 \frac{y}{y+2}\, dy\right)$$

La f. non è dispari, occorre calcolare.

$$E(Z) = \underbrace{\frac{2}{1+\ln(2)}}_{=k} \left(\int_{-1}^{0} \frac{y+1}{y+2}\, dy + \int_{0}^{1} \frac{\ln(2)\, y}{y+2}\, dy \right)$$

$$= k \left(\int_{-1}^{0} \frac{y}{y+2}\, dy + \int_{-1}^{0} \frac{dy}{y+2} + \ln(2) \int_{0}^{1} \frac{y}{y+2}\, dy \right)$$

$$\int \frac{y}{y+2}\, dy = \int dy + \int \frac{-2}{y+2}\, dy = y - 2\ln(y+2) + c$$

$$= k \left(1 - 2\ln(2) + \ln(2) + \ln(2) \left(1 - 2\ln(3) + 2\ln(2) \right) \right)$$

$$= k \left[1 + \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + \ln(2) \left(1 + \ln\left(\tfrac{4}{9}\right) \right) \right]$$

$$= \cancel{k \left[\ln(2e) + \ln(2) \ln\left(\tfrac{4e}{9}\right) \right]}$$

$$= k \left[1 - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(2)} + \left(\ln(2) \ln\left(\tfrac{4}{9}\right) \right) \right]$$

$$= k \left[1 + \left(\ln(2) \ln\left(\tfrac{4}{9}\right) \right) \right]$$

$$= \frac{2}{1+\ln(2)} \left(1 + \ln(2) \ln\left(\tfrac{4}{9}\right) \right) \simeq 0,5173$$

Accettabile siccome $\frac{1}{3} = \min(Z) \le \overset{E(Z)}{\overset{\parallel}{0,51}} \le \mathrm{Max}(Z) = 1$

Propr. internalità.

8