CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 16/6/2017

Nome: ____________________ COGNOME: ________________________

1) Siano E_1, E_2, E_3 eventi, i primi due incompatibili. Un soggetto valuta $P(E_1) = P(E_3) = 1/2$, $P(E_1 \wedge E_3) = 1/8$, $P(E_2 \wedge E_3) = 3/8$.
   (a) Verificare la coerenza dell'assegnazione di cui sopra;
   (b) studiare la correlazione fra E_1 e $E_2 \vee E_3$;
   (c) determinare le limitazioni di probabilità per, separatamente, $P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)$ e $P(\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 | \overline{E}_3)$.

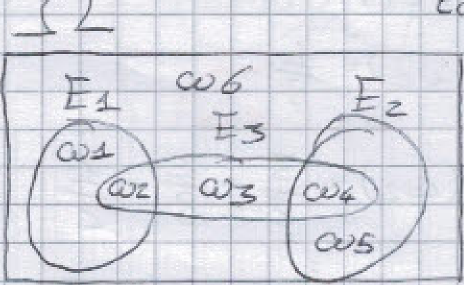
2) L'urna A contiene 3 palline bianche e 2 rosse, l'urna B contiene solo palline rosse. Si effettua una sequenza di estrazioni con reimbussolamento da una delle due urne, scelta con meccanismo aleatorio che assegna probabilità 3/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione":
   (a) calcolare $P(E_3 | \overline{E}_4)$, $P(\overline{E}_3 | E_4)$;
   (b) posto $X = |E_1| - |\overline{E}_2|$, calcolare $Var(X)$, $P(X > 0)$;
   (c) dopo quante estrazioni di sole palline rosse la probabilità che le estrazioni vengano effettuate dall'urna B supera i 9/10?

3) La coppia aleatoria (X,Y) è distribuita sul trapezio di vertici (0,0), (2,0), (1,1), (0,1) con densità congiunta proporzionale a y. Determinare:
   (a) la funzione di densità di X e E(X);
   (b) la funzione di ripartizione della coppia (X, Y) nel generico punto $(x_0; 1/2)$;
   (c) $P(X \geq Y^2)$.

Esercizio 1)

Siano: $E_1 \wedge E_2 = \emptyset \Rightarrow E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 = E_1 \wedge E_2 \wedge \overline{E} = \emptyset$

a) Essendo il prod. log. impossibile qualsiasi evento aggiungo a tale prodotto, il prodotto che otterrò sarà impossibile.



$$\mathbb{P}_6 = \{ \underset{\omega_1}{E_1 \wedge \overline{E}_3};\ \underset{\omega_2}{E_1 \wedge E_3};\ \underset{\omega_3}{\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3};\ \underset{\omega_4}{E_2 \wedge E_3};\ \underset{\omega_5}{E_2 \wedge \overline{E}_3};\ \underset{\omega_6}{\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_3} \}$$

Sia $P(\omega_i) = p_i$

$$\begin{cases} P(E_1) = p_1 + p_3 = \frac{1}{2} \\ P(E_3) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{2} \\ P(E_1 \wedge E_3) = p_2 = \frac{1}{8} \\ P(E_2 \wedge E_3) = p_4 = \frac{3}{8} \\ \sum_{i=1}^{6} p_i = 1 \\ p_i \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = \frac{3}{8} \\ p_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = 0 \\ p_2 = \frac{1}{8} \\ p_4 = \frac{3}{8} \\ p_5 + p_6 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} p_1 = \frac{3}{8} \\ p_3 = 0 \\ p_2 = \frac{1}{8} \\ p_4 = \frac{3}{8} \\ p_5 = \frac{1}{8} - p_6 \\ p_6 \in \left[0; \frac{1}{8}\right] \end{cases}$$

Il sistema ha infinite soluzioni

$\Rightarrow$ P è coerente.

<u>Nota</u>: è indifferente che p_5 o $p_6 \in \left[0; \frac{1}{8}\right]$, (potrei scrivere nel sistema $p_6 = \frac{1}{8} - p_5$, $p_5 \in \ldots$), mi basta dare a p_6 (o p_5) un valore compreso fra 0 e $\frac{1}{8}$ che la P è coerente

b) <u>Nota</u>: posso studiare la correlazione in entrambi i modi:

$P(E_1 / E_2 \vee E_3) \gtreqless P(E_2 \vee E_3)$, oppure:

$P(E_2 \vee E_3 / E_1) \gtreqless P(E_1)$

in quanto la correlazione è simmetrica, dato che (ad esempio) $P(E_2 \vee E_3) \cdot P(E_1) > 0$.

Scelgo il caso più semplice:

$$P(E_2 \vee E_3 / E_1) = \frac{P(E_1 \wedge (E_2 \vee E_3))}{P(E_1)} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} + p_5 = P(E_2 \vee E_3)$$

$$P(E_1 \wedge (E_2 \vee E_3)) = P\left[\overset{=\emptyset}{(E_1 \wedge E_2)} \vee (E_1 \wedge E_3)\right] = P(E_1 \wedge E_3) = P(\omega_2) = \frac{1}{8}$$

$$P(E_2 \vee E_3) = P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 \wedge E_3) = \frac{3}{8} + p_5 + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2} + p_5$$

Nota: p_5 è ≥ 0 $\Rightarrow P(E_2 \vee E_3) > \frac{1}{2}$

$P(E_2 \vee E_3 / E_1) < P(E_2 \vee E_3) \Rightarrow$ Vi è correlazione negativa fra i 2 eventi

c)

- $P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) = 1 - P(\omega_6) = 1 - p_6$

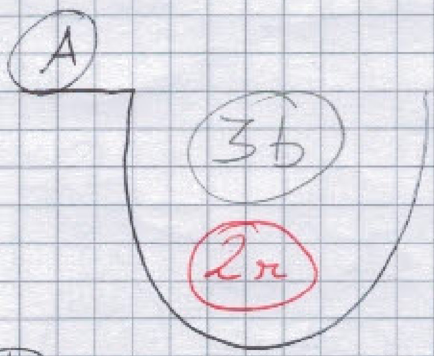
  Essendo $p_6 \in \left[0; \frac{1}{8}\right] \Rightarrow P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) \in \left[\frac{7}{8}; 1\right]$

- $P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 / \bar{E}_3) = \dfrac{P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)}{P(\bar{E}_3)} = \dfrac{P(\omega_6)}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow$

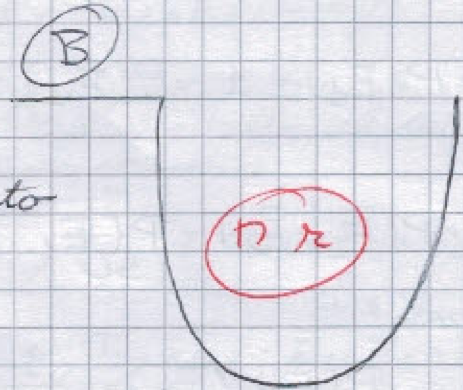
  $P(\bar{E}_3) = P(\omega_1 \vee \omega_5 \vee \omega_6) = p_1 + p_5 + p_6 = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

  $\Longrightarrow P(\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 / \bar{E}_3) \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ (Essendo $P(\omega_6) \in \left[0; \frac{1}{8}\right]$)

Esercizio 2)



Estraz. CON reimbussolamento



Pongo:

E_i = 'Esce b alla i-esima estrazione'

A = 'Estraggo dall'urna A' $\longrightarrow P(A) = \frac{3}{4}$

$(\bar{A} =)\ B$ = 'Estraggo dall'urna B' $\longrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$

<u>Nota:</u>

$$\left.\begin{array}{l} E_1/A,\ E_2/A,\ \dots,\ E_n/A \\ E_1/B,\ E_2/B,\ \dots,\ E_n/B \end{array}\right\}$$ Sono entrambi proc. stocastici condizionati scambiabili

$\Longrightarrow E_1, E_2, \dots, E_n$ (è il P.S. di estrazione da urna che analizziamo nell'esercizio) è scambiabile.

Per teorema che afferma: una mistura di P.S. condizionati scambiabili è un P.S. scambiabile.

a)

$$P(E_3/\bar{E}_4) \overset{\text{Nota}}{=} P(E_2/\bar{E}_1) = \frac{P(\bar{E}_1 \wedge E_2)}{P(\bar{E}_1)}$$

$$\bullet\ P(\bar{E}_1) = P(\bar{E}_1/A)P(A) + P(\bar{E}_1/B)P(B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$$

$$\bullet\ P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = P(\bar{E}_1 \wedge E_2/A)P(A) + P(\bar{E}_1 \wedge E_2/B)P(B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{50}$$

Quindi

$$P(E_3/\bar{E}_4) = \frac{9}{50}\cdot\frac{20}{11} = \frac{18}{55}$$

$$P(\bar{E}_3/E_4) = \frac{P(\bar{E}_3 \wedge E_4)}{P(E_4)} \overset{1}{=} \frac{P(\bar{E}_1 \wedge E_2)}{P(\bar{E}_1)}$$

- $P(\bar{E}_1) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$

- $P(\bar{E}_1 \wedge E_2) = \frac{9}{50}$

Quindi:

$$P(\bar{E}_3/E_4) = \frac{9}{50} \cdot \frac{20}{9} = \frac{2}{5}$$

b)

Propr. degli indicatori

- $X = |E_1| - |\bar{E}_2| \overset{!}{=} |E_1| - (1 - |E_2|) = |E_1| + |E_2| - 1$
$\perp S_2 - 1 \quad \left(\text{con } S_2 = \sum_{i=1}^{2} |E_i| \right)$

Quindi:

$$Var(X) = Var(S_2 - 1) = (-1)^2 Var(S_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} Var(|E_i|) + 2 \sum_{i=1}^{(n-1=)1} \sum_{j>i} Cov(|E_i|; |E_j|)$$

$$= 2p(1-p) + 2\binom{2}{2}\left[P(E_1 \wedge E_2) - p^2\right]$$

$$P(E_1 \wedge E_2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{100}$$

$$= 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{11}{20} + 2\left[\frac{27}{100} - \frac{81}{400}\right]$$

$$= \frac{99}{200} + \cancel{2} \cdot \frac{27}{\cancel{400}_{200}} = \frac{99+27}{200} = \frac{63}{100} = 0{,}63$$

Nota: il proc. stocastico ha alla base degli eventi (E_i) NON indipendenti fra di loro (siccome è articolato su 2 urne). Anche se in ogni urna le estrazioni sono effettuate CON rimessa la variabile X NON è Binomiale! Quindi $Var(X) \neq npq$.

(*) Vedi anche alla fine dell'es.

- $P(X > 0) = ?$

$\lvert E_1 \rvert$	$\lvert \bar{E}_2 \rvert$	
V	V	$\Rightarrow X = 1 - 1 = 0$
V	F	$\Rightarrow X = 1 - 0 = 1 \Rightarrow E_1 \wedge E_2$ è l'unico evento equivalente a $X > 0$.
F	V	$\Rightarrow X = 0 - 1 = -1$
F	F	$\Rightarrow X = 0 - 0 = 0$

Quindi:

$$\underbrace{P(E_1 \wedge E_2) = P(X > 0)}_{=} = \frac{27}{100}$$

$$C)\ P(B/\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) > \frac{9}{10} \overset{\text{Th Bayes}}{\Longleftrightarrow}$$

$= \Omega / B$, in quanto l'urna B contiene solo palline rosse

$$\Longleftrightarrow \frac{\overbrace{P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n / B)}^{1} P(B)}{P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n)} > \frac{9}{10}$$

Quindi:

$$1 = \frac{P(B)}{P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n)}$$

$$P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n) = P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n / A) P(A) + P(\bar{E}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{E}_n / B) P(B)$$

$$\overset{!}{=} \left(\frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right)$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{4}}}{3 \cdot \cancel{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = \frac{1}{3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} > \frac{9}{10} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 < \frac{10}{9} \Longleftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n < \frac{1}{27}$$

$$\Longleftrightarrow -n \ln\left(\frac{5}{2}\right) < (-1) \ln(27) \Longleftrightarrow n > \frac{\ln(27)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\Longleftrightarrow n > \frac{3\ln(3)}{\ln(5) - \ln(2)} \Longleftrightarrow n > 3{,}5969$$

$\Longrightarrow$ Dopo 4 estrazioni di sole palline rosse la probabilità di estrarre dall'urna B è $> 9/10$

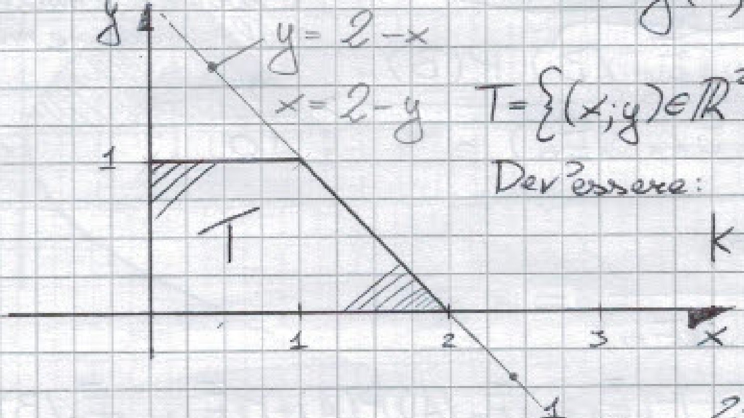
(*) Nota aggiuntiva al p.to b):

$$P(E_2 / E_1) = \frac{2}{5} \neq \frac{9}{20} = P(E_2) \Longrightarrow E_1 \text{ ed } E_2 \text{ NON stocasticamente indipendenti.}$$

↳ è certo che io stia estraendo da A. Condizionando a E_1 escludo B, perchè in B non ci sono palline rosse. Mentre $P(E_2) = P(E_1)$ è un risultato ottenuto da entrambe le urne cioè:

$$P(E_1) = 1 - P(\bar{E}_1) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

Esercizio 3)



$$g(x;y) = \frac{3}{2}y$$

$T = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1;\ 0 \leq x \leq 2-y\}$

Dev'essere:

$$k \iint_T g(x;y)\,dx\,dy = 1$$

$$J = \iint_T g(x;y)\,dx\,dy = \int_0^1 y\,dy \int_0^{2-y} dx = \int_0^1 y\,[x]_0^{2-y}\,dy$$

$$= \int_0^1 y(2-y)\,dy = \int_0^1 (2y - y^2)\,dy = \left[\cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Longrightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$f_x(x) = \frac{3}{2} \cdot \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}[y^2]_0^1 = \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \displaystyle\int_0^{2-x} y\,dy = \frac{1}{2}[y^2]_0^{2-x} = \frac{1}{2}(2-x)^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{3}{2}\left(\int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2}(2-x)^2 \cdot x\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}[x^2]_0^1 + \right.$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_1^2 x(2-x)^2\,dx\right)$$

$$J_1 = \int_1^2 x(2-x)^2\,dx = \int_1^2 (4x - 4x^2 + x^3)\,dx = \left[2x^2 - 4\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

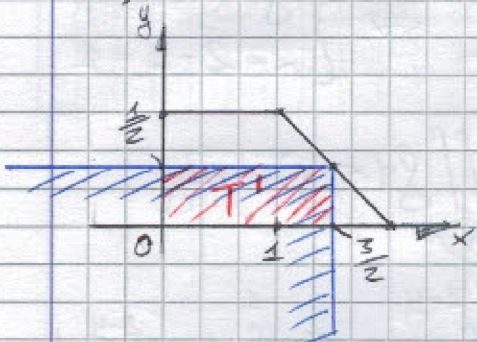
$$= \left(8 - \frac{32}{3} + 4\right) - \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} - \frac{11}{12} = \frac{5}{12}$$

6

$=$ •

$$\odot = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}\right) = \frac{\cancel{3}^{1}}{2}\cdot\frac{11}{\cancel{24}_{8}} = \frac{11}{16}$$

b)



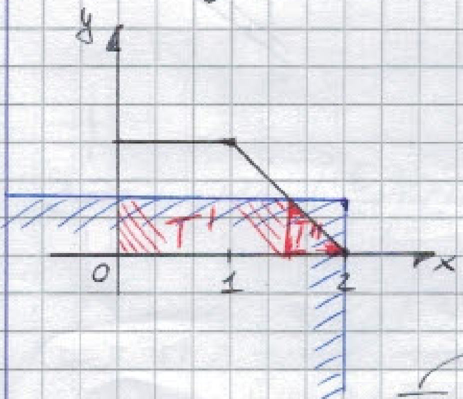
<u>Nota</u>: $\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}=2-x \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \end{cases}$

• <u>Se: $y_0=\frac{1}{2}$, $0\le x_0\le\frac{3}{2}$</u>:

$$F\left(x_0;\frac{1}{2}\right) = \iint_{T'} f(x;y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{x_0} dx \int_0^{1/2} \frac{3}{2}y\,dy = \int_0^{x_0} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^{1/2} dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{x_0}\frac{1}{4}dx = \frac{3}{16}\left[x\right]_0^{x_0} = \frac{3}{16}x_0$$



• <u>Se $y_0=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\le x_0\le 2$</u>:

$$F\left(x_0;\frac{1}{2}\right) = \iint_{T'} f(x;y)\,dx\,dy + \iint_{T''} f(x;y)\,dx\,dy$$

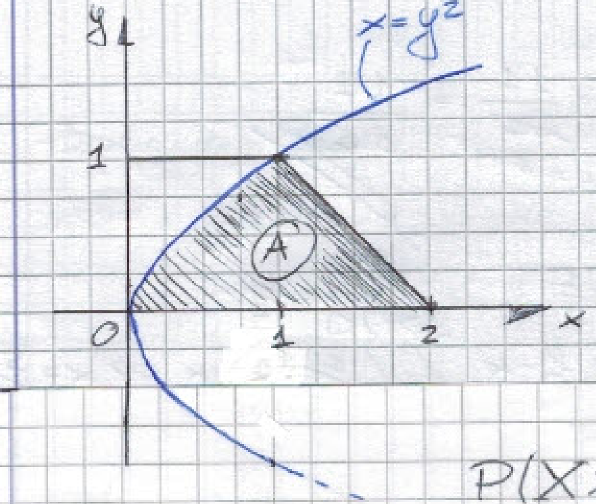
$$= F\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right) + \int_{3/2}^{x_0} dx \int_0^{2-x}\frac{3}{2}y\,dy$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{3}{2} + \int_{3/2}^{x_0}\frac{3}{4}\left[y^2\right]_0^{2-x}dx = \frac{9}{32}+\frac{3}{4}\int_{3/2}^{x_0}(2-x)^2dx$$

$$J_2 = \int_{3/2}^{x_0}(2-x)^2dx = \int_{3/2}^{x_0}(4-4x+x^2)dx = \left[4x-2x^2+\frac{x^3}{3}\right]_{3/2}^{x_0}$$

$$= \frac{(x_0)^3}{3}-2(x_0)^2+4x_0-\frac{21}{8}$$

$$= \frac{9}{32}+\frac{(x_0)^3-6(x_0)^2+12x_0}{3}-\frac{21}{8} = \frac{9}{32}+\frac{8\left[(x_0)^3-6(x_0)^2+12x_0\right]-63}{24}$$



$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y = y^2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y = 2 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$$P(X \geq Y^2) = 1 - P(\sqrt{X} < Y)$$

$$= 1 - \left(\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{3}{2} y \, dy \right) = 1 - \frac{3}{4} \int_0^1 \left[y^2 \right]_{\sqrt{x}}^1$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$