CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Appello del 7/9/2018

Nome: ______________________ COGNOME: __________________________

1) In un gioco si fa terna quando, effettuando un lancio di 5 dadi (regolari, a 6 facce) simultaneamente, escono esattamente 3 numeri uguali.

9

   (a) Qual è la probabilità di fare terna?
   (b) Trovare una limitazione significativa alla probabilità dell'evento: in 144 lanci si realizzano almeno 40 terne.

2) L'urna A contiene 4 palline bianche e 6 rosse, l'urna B contiene 3 palline bianche e 1 rossa. Si effettua una sequenza di estrazioni senza reimbussolamento da una delle due urne, scelta con un meccanismo aleatorio che assegna probabilità 3/4 alla scelta dell'urna A. Posto E_i = "esce bianca all'i-esima estrazione", calcolare:

11

   (a) $P(E_i)$, $P(E_i \mid E_j)$, $P(E_i \vee E_2 \mid E_3)$;
   (b) la probabilità che le estrazioni avvengano dall'urna A, sapendo che le palline estratte alle estrazioni seconda e quarta sono di colore diverso;
   (c) la covarianza tra il numero di successi nelle prime 5 estrazioni e il numero di successi nelle 10 estrazioni successive alla seconda.

3) La coppia aleatoria (X,Y) ha determinazioni nel parallelogramma di vertici (-1,0), (0,1), (1,0), (2,1) ed è ivi distribuita con densità congiunta $f(x, y)$ proporzionale a $g(x,y) = |x|\cdot y$. Calcolare:

   (a) le densità marginali;

11

   (b) $P(X < 1)$.

Esercizio 1)

a)

T = 'Esce terna al lancio simultaneo dei 5 dadi'

Nota: suppongo equiprobabilità sulla partizione (finita) delle cinquine costituite dai numeri evenzonati sulle facce dei cinque dadi lanciati. L'evento elementare è una cinquina. Uso il simbolo $\omega(n_1, \dots, n_5)$ per quello.

$$E_i = \omega(n_1, n_2, \dots, n_5) = \text{"Esce la cinquina } n_1, n_2, \dots, n_5 \text{ al lancio } i\text{-esimo"}$$

n° uscito dal I dado; n° uscito dal II dado; n° uscito dal V dado

$$P(\omega) = \frac{1}{6^5} \quad \forall \omega \in \mathbb{P}$$

6^5 → 6 faccie di ogni singolo dado per cinque dadi

$$\underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{5 \text{ volte}}$$

Uso quindi (data l'equiprobabilità su $\mathbb{P}$) lo schema

$$P(T) = \frac{\#\text{casi favorevoli}}{\#\text{casi possibili}} \quad (\#\text{ significa: numero di...})$$

$$= \frac{6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 5^2}{6^5} = \frac{125}{648}$$

6 diversi tipi di terna:
1 1 1
2 2 2
⋮ ⋮ ⋮
6 6 6

$\binom{5}{3}$: Modi diversi in cui i dadi possono combinarsi nella stessa cinquina. p.e.:
1 1 3 5 1
1 3 4 1 1
⋮

5^2: Rimangono 5 numeri ancora disponibili su 6. 1 serve a costituire la terna
→ 2 2 2 i j con i, j = 1, 3, 4, 5, 6
→ 3 3 3 i j
⋮ ⋮ ⋮

b)

Posso risolvere in 2 modi:

1) Tramite disuguaglianza di Markov:

Se $X \geq 0$, $a (\in \mathbb{R}) > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

In versione: $P(S_{144} \geq 40) \leq \frac{E(X)}{40}$

Con $S_{144} = \sum_{i=1}^{144} |E_i|$

$$E(X) = np = 144 \cdot \frac{125}{648} \stackrel{!}{=} nP(E_i) = \frac{250}{9}$$ In quanto gli eventi elementari E_i sono equiprobabili.

Quindi riesce:

$$P(S_{144} \geq 40) \leq \frac{\frac{250}{9}}{40} = \frac{25}{36} = 0{,}69\overline{4}$$

<u>Nota</u>: La stima ottenuta con Markov è però grossolana, quindi:

2) Disuguaglianza di Bienaymé / Chebyshev:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad \text{con } \varepsilon > 0.$$

L'evento dato è $S_{144} \geq 40 \iff S_{144} - E(S_{144}) \geq 40 - E(S_{144})$

Quindi:

$$P(S_{144} \geq 40) = P(\overbrace{S_{144} - E(S_{144}) \geq \frac{110}{9}}^{1}) \leq$$

Monotonia, in quanto ① ⇒ ②

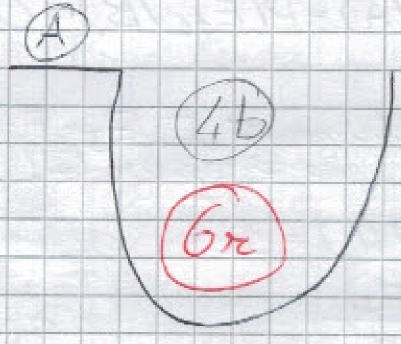
$$\leq P(\overbrace{|S_{144} - E(S_{144})| \geq \frac{110}{9}}^{2}) \leq \frac{22{,}42}{\left(\frac{110}{9}\right)^2} \simeq 0{,}15$$

Con $Var(S_{144}) = nP(E_i)P(\overline{E_i}) = np(1-p) \stackrel{!}{=} 40 \cdot \frac{125}{648} \cdot \frac{523}{648} \simeq 22{,}42$

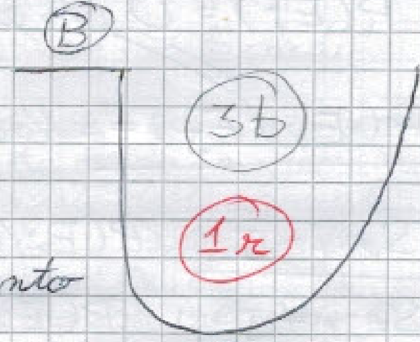
In quanto gli E_i sono stocasticamente indipendenti

<u>Nota</u>: La stima ottenuta con B.C. è più precisa.

Esercizio 2)



Estrazioni SENZA reimbussolamento



Siano:

$A =$ 'Estraggo dall'urna A'; $P(A) = \frac{3}{4}$

$(\bar{A} =) B =$ 'Estraggo dall'urna B; $P(B) = \frac{1}{4}$

$E_i =$ 'Esce bianca all'i-esima estrazione.

Nota: $E_1/A \wedge \ldots \wedge E_{10}/A$ è P. Stoc. di eventi condizionati scambiabili

$E_1/B \wedge \ldots \wedge E_4/B$ è anche P.S. di eventi cond. scamb.

$\Rightarrow$ $E_1 \wedge \ldots \wedge E_{10}$ è mistura di Proc. Stoc. cond. scamb. ed è quindi a sua volta scambiabile.

a)

• $P(E_i) \overset{\underset{!}{\text{Nota}}}{=} P(E_1)$

Se $i \leq 4$:

$$P(E_i) = P(E_1) = P(E_1/A)P(A) + P(E_1/B)P(B)$$
$$\overset{!}{=} \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{16} = \frac{39}{80}$$

Se $4 < i \leq 10$:

$$P(E_i) = P(E_1/A)P(A) \quad \text{. In quanto } P(E_5/B) = P(\emptyset/B) \overset{!}{=} 0$$
$$\overset{!}{=} \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

Se $i > 10$:

$$P(E_i) = 0 \text{. In quanto } P(\underbrace{E_{11}/A}_{\emptyset/A}) = P(\underbrace{E_{11}/B}_{\emptyset/B}) = 0$$

- $P(E_i/E_J)$. Nota: $J \leq 10$, altrimenti $E_i/E_J = E_i/\emptyset$ che è assurdo!

Se $i = J$: $P(E_i/E_i) = P(\Omega/H) = 1$

Se $i \neq J$: $P(E_i/E_J) = \dfrac{P(E_i \wedge E_J)}{P(E_i)}$

⊛ $i, J \leq 4$:

$$P(E_i \wedge E_J) = P(E_i \wedge E_J \wedge A) + P(E_i \wedge E_J \wedge B)$$

$$P(E_i \wedge E_J \wedge A) = P(A)P(E_i/A)P(E_J/E_i \wedge A) = P(A)P(E_1/A)P(E_2/E_1 \wedge A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{10}$$

Scambiabilità

$$P(E_i \wedge E_J \wedge B) = P(B)P(E_i/B)P(E_J/E_i \wedge B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{9}{40} \quad (*)$$

$P(E_1) = \dfrac{39}{80}$ (risultato ottenuto in precedenza)

Quindi:

$$P(E_i/E_J) = \frac{9}{\cancel{40}_{1}} \cdot \frac{\cancel{80}^{2}}{39} = \frac{6}{13}$$

Diversi modi di risolvere il problema

⊛ $4 < i, J \leq 10$:

$$P(E_i \wedge E_J) = P(E_i \wedge E_J / A)P(A) = P(E_i/A)P(E_J/E_i \wedge A)P(A)$$

$$= P(E_i \wedge E_J \wedge A)$$

In quanto $P(E_5 \wedge E_6 / B) = P(\emptyset/B) = 0$

$$= \frac{1}{10}$$

$$P(E_i) = \frac{3}{10} \quad (4 < i \leq 10)$$

Quindi

$$P(E_i/E_J) = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$$

⊛ Se $i > 10$, $5 \leq J \leq 10$

$P(E_i/E_J) = 0$; in quanto $E_{11}/A = \emptyset/A$.

• $P(E_i \vee E_2 / E_3) = 1 - P(\overline{E_i \vee E_2} / E_3) \overset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 / E_3)$

⊛ Se $i = 2$:

$$P(E_2 \vee E_2 / E_3) = P(E_2 / E_3) = \frac{9}{40}$$

Risultato ottenuto prima ⊛, essendo $2; 3 < 4$.

⊛ Se $i = 3$:

$$P(E_3 \vee E_2 / E_3) = P(\Omega / \Omega) = 1$$

In quanto, per le proprietà dell'implicazione $\left(\bigwedge_{i \in I} E_i \Rightarrow E_i \Rightarrow \bigvee_{i \in I} E_i\right)$:

$E_3 \Rightarrow E_2 \vee E_3$. Supposto Vero E_3 (dato che $E_2 \vee E_3$ è condizionato a E_3) l'implicazione, per essere vera, deve avere il conseguente (cioè $E_2 \vee E_3$) Vero per forza.

⊛ Se $i \neq 2$, $i \neq 3$:

$$P(E_i \vee E_2 / E_3) \overset{\text{De Morgan}}{=} 1 - P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 / E_3) = 1 - \left(\frac{P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3)}{P(E_3)} \right)$$

$$P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3) = P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3 / A) P(A) + \cancel{P(\overline{E}_i \wedge \overline{E}_2 \wedge E_3 / B)} P(B)$$

$\emptyset / B$ Non è possibile estrarre 2 palline rosse da B.

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}\binom{3}{1}} \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{\binom{b}{h}\binom{r}{n-h}}{\binom{n}{n}\binom{n}{h}}$$

Formula per estrazioni SENZA rimessa

$$= \frac{1}{8}$$

$$P(E_3) = \frac{39}{80} \quad (\text{ottenuto in precedenza con } i = 3 < 4)$$

Quindi:

$$P(E_1 \vee E_2 / E_3) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{39}{80}}\right) = 1 - \frac{10}{39} = \frac{29}{39}$$

b) $(S_2 = 1) = [(E_2 \wedge \bar{E}_4) \vee (\bar{E}_2 \wedge E_4)]$

$$P(A / S_2 = 1) = P[(E_2 \wedge \bar{E}_4) \vee (\bar{E}_2 \wedge E_4)] \overset{Sc.}{=} P[(\bar{E}_1 \wedge E_2) \vee (\bar{E}_1 \wedge E_2)] = 2P(\bar{E}_1 \wedge E_2).$$

$$P(A / S_2 = 1) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(S_2 = 1/A)\,P(A)}{P(S_2 = 1)}$$

$$P(S_2 = 1/A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$$

$$P(S_2 = 1) = P(S_2 = 1/A)P(A) + P(S_2 = 1/B)P(B) = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} + \underbrace{\frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}}_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{40}$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{40}{21} = \frac{16}{21}$$

c) Tab. 1

$i \backslash J$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Cov	Cov I					II	
2	Cov	Cov		TUTTE				
3	Var	Cov		COVARIANZE				
4	Cov	Var						
5	Cov	Cov III	Var	COVARIANZE			IV	

$Cov(|E_i|; |E_J|)$

Con i numeri romani si distinguono i quadranti della tabella.

Per capire meglio vedi nota all'ultima pagina.

$\to$ dopo 10 le palline finiscono.

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{5}|E_i|;\sum_{J=3}^{10}|E_J|\right)\underset{\text{Bilinearità}}{=}\sum_{i=1}^{5}\sum_{J=3}^{10}Cov(|E_i|;|E_J|)$$

Esviluppo i conti:

I Quadrante: (eventi scambiabili $\forall i, J$)

$$2\,Cov(|E_3|;|E_3|)=2\cdot Var(|E_3|)\overset{Sc.}{=}2P(E_1)P(\bar{E}_1)=\frac{1.521}{3.200}$$

N°

$$6\cdot Cov(|E_1|;|E_3|)=6\,P(E_1\wedge E_2)-[P(E_1)]^2\simeq 0,321$$

di

II Quadrante (eventi non scambiabili $\forall i, J$, con: $1\leq i\leq 4$; $5\leq J\leq 10$)

quadra

$$24\cdot Cov(|E_i|;|E_J|)=P(E_i\wedge E_J/A)P(A)-P(E_i)P(E_J)=-\frac{111}{100}$$

tini

III Quadrante (eventi non scambiabili $\forall i, J$; con $i=5$; $3\leq J\leq 4$)

di

$$2\,Cov(|E_i|;|E_J|)=P(E_i\wedge E_J/A)P(A)-P(E_i)P(E_J)=-\frac{37}{400}$$

Tab ①

IV Quadrante (eventi scambiabili; con $i=5$, $5\leq J\leq 10$)

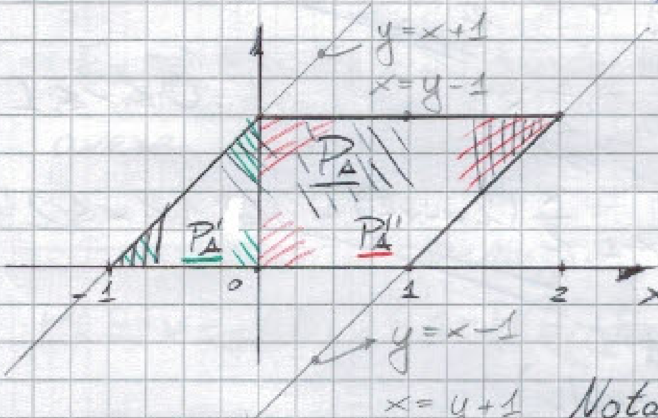
$$1\cdot Var(|E_5|)=P(E_5)P(\bar{E}_5)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$$

$$5\cdot Cov(|E_5|;|E_J|)=5P(E_5\wedge E_J)-[P(E_J)]^2=\frac{1}{20}.$$

Quindi

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{5}|E_i|;\sum_{J=3}^{10}|E_J|\right)=\frac{1521}{3200}+0,321-\frac{111}{100}-\frac{37}{400}+\frac{21}{100}+\frac{1}{20}=-\frac{2.359}{16.000}$$

Esercizio 3)



significa: "È proporzionale a..."

$$f(x;y)\propto g(x;y)=|x|y$$

Riesce che (vedi calcoli sotto)

$$f(x;y)=\frac{4}{3}|x|y$$

Nota: assumo normalità risp. a y

$$P_A=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq y\leq 1;\ y-1\leq x\leq y+1\}$$

Dev'essere che

$$k\underbrace{\iint_{P_A}g(x;y)\,dx\,dy}_{=J}=1\iff k\frac{3}{4}=1\iff k=\frac{4}{3}$$

$$J=\iint_{P_A}|x|y\,dx\,dy=\iint_{P_A'}-xy\,dx\,dy+\iint_{P_A''}xy\,dx\,dy=\ \cdot$$

siccome in P_A' $x<0$; P_A'' $x\geq 0$

$|x|\overset{\Delta}{=}\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

$$\odot = -\int_0^1 y\,dy \int_{y-1}^{0} x\,dx + \int_0^1 y\,dy \int_0^{y+1} x\,dx$$

$$= -\int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y-1}^{0} dy + \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{y+1} dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-y^3+2y^2-y)\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 (y^3+2y^2+y)\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{y^4}{4}+2\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+2\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+2\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cancel{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cancel{+\frac{1}{3}}+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Quindi: $f(x;y) = \frac{4}{3}|x|y$

a)

$$f_x(x) = \frac{4}{3}\begin{cases} \int_0^{x+1} -xy\,dy = -x\cdot\frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^{x+1} = -\frac{1}{2}x(x+1)^2 & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \int_0^1 xy\,dy = \frac{x}{2}\left[y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}x & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ \int_{x-1}^1 xy\,dy = \frac{x}{2}\left[y^2\right]_{x-1}^1 = \frac{x}{2}(2x-x^2) & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f_x(y) = \frac{4}{3}\Big(\underbrace{\int_{y-1}^{0} -xy\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int_0^{y+1} xy\,dx}_{J_2}\Big)$$

$$J_1 = \int_{y-1}^{0} -xy\,dx = -y\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{y-1}^{0} = -y\cdot\frac{1}{2}\left[-(y-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}y(y-1)^2$$

$$J_2 = \int_0^{y+1} xy\,dx = y\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^{y+1} = \frac{1}{2}y(y+1)^2$$

$= \circledast$

$$(*) = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}y\left((y-1)^2+(y+1)^2\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}y\left(2y^2+2\right) = \frac{2}{3}y\,2\left(y^2+1\right) = \frac{4}{3}y\left(y^2+1\right) = f_X(y)$$

b) $$P(X<1) = \left(\underbrace{\int_{-1}^{0} -\frac{1}{2}x(x+1)^2\,dx}_{J_3} + \underbrace{\int_{0}^{1}\frac{1}{2}x\,dx}_{J_4}\right)\cdot\frac{4}{3}$$

$$J_3 = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x(x^2+2x+1)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{24}$$

$$J_4 = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}x\,dx = \frac{1}{4}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1+6}{6\cdot 4}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{24} = \frac{7}{18}$$

Nota sull'esercizio 2) Data la formula (generale): $Cov(|E_i|;|E_J|) = P(E_i \wedge E_J) - P(E_i)P(E_J)$

II Quadrante (ev. non scambiabili $\forall i, J$, con: $i \leq 4$; $5 \leq J \leq 10$)

$$24\, Cov(|E_i|;|E_J|) = 24\Big[P(E_i \wedge E_J/A)P(A) + \cancel{P(E_i \wedge E_J/B)P(B)} - \big(P(E_i/A)P(A) + P(E_i/B)P(B)\big) \cdot \cancel{P(E_J/B)P(B)} + P(E_J/A)P(A)\Big]$$

$E_i \wedge E_J / B = \emptyset / B$, in quanto, dati gli indici sopra riesce ad esempio:

$$P(E_1 \wedge E_5 / B) = P(\emptyset / B) = 0$$

siccome nell'urna B la 5^a estrazione non può essere effettuata.

Dato J come in nota tra parentesi sopra l'evento E_J / B è $\emptyset / B$.

$$= 24\Big[P(E_i \wedge E_J/A)P(A) - \big(P(E_i/A)P(A) + P(E_i/B)P(B)\big) \cdot P(E_J/A)P(A)\Big]$$

$$= 24 \cdot \left[\frac{1}{10} - \left(\frac{39}{80} \cdot \frac{3}{10}\right)\right] = 24\left(-\frac{37}{800}\right) = -\frac{111}{100}$$

III Quadrante (ev. non scambiabili $\forall i, J$; con $i = 5$; $3 \leq J \leq 4$)

$$2\, Cov(|E_5|;|E_J|) = 2\Big[P(E_i \wedge E_J/A)P(A) - P(E_5/A)P(A) \cdot \big(P(E_J/A)P(A) \cdot P(E_J/B)P(B)\big)\Big]$$

IV Quadrante (ev. scambiabili, con $i = 5$; $5 \leq J \leq 10$

$$5\, Cov(|E_5|;|E_J|) = 5\Big[P(E_5 \wedge E_J/A)P(A) - P(E_5/A)P(A) \cdot P(E_J/A)P(A)\Big]$$