LIMITAZIONI DI PURO ARBITRAGGIO PER IL PREZZO DELLE OPZIONI CALL pag 86

p. 48

Come si è già anticipato, le ipotesi di lavoro introdotte all'inizio non sono purtroppo sufficienti per determinare in maniera precisa il prezzo di un'opzione, ma consentono di individuare un intervallo di valori in cui esso deve cadere. Anche qui, rimuovendo qualche ipotesi, l'intervallo si "allarga" ulteriormente.

D'ora innanzi, per fissare le idee, ci concentreremo esclusivamente sulle opzioni su azioni, o, più in generale, su opzioni la cui attività sottostante non richiede costi di detenzione. Tuttavia i risultati che seguono possono essere facilmente adattati anche al caso di opzioni su merci.

Come per i contratti forward, indichiamo con

$D(t,T)$ il valore al tempo t di tutti i dividendi (noti) pagati dal bene sottostante tra t e T.

q l'intensità di dividendo pagato nel continuo dal bene sottostante

pongo $\bar{S}(t) = \begin{cases} S(t) & \text{se non ci sono dividendi tra } t \text{ e } T \\ S(t) - D(t,T) & \text{se i dividendi sono certi (t, date)} \\ S(t)e^{-q(T-t)} & \text{se i dividendi sono pagati nel continuo e reinvestiti nel bene stesso} \end{cases}$

per $t \in [0,T]$ e non ci saranno costi

1) $C(t) \geq c(t)$

perché $C(t)$ dà un diritto in più, che ha valore >0

dim se $\exists\, t \,/\, C(t) < c(t)$ allora: in t vendo call europea $+c(t)$

compro call americana $-C(t)$

> 0

in T ricevo $\max\{S(T)-K,0\}$

pago $\max\{S(T)-K,0\}$

$= 0$

OA II° tipo

Cvd

Oss Se $C(t)=c(t)$ il diritto in più della americana vale $0 €$

Oss. Per quanto appena dimostrato, tutte le limitazioni inferiori per le europee, valgono anche per le americane

2) $c(t) \geq 0$

se avesse valore negativo potrei comprarla incassando qlc e poi il payoff sarebbe nullo.

3) $C(t) \leq S(t)$ $\forall t, \forall K, \forall \ldots$ essendo limitazione per short Americana, vale anche short Europee

dim

x assurdo $\exists t \mid C(t) > S(t)$ IP: $C(t) - S(t) > 0$

in t

vendo la call $+C(t)$

acquisto bene sottostante $-S(t)$

> 0

poiché ho venduto la call, non ho potere:

I^a situazione

La call viene esercitata in $\tau \geq t$, $\tau \leq T$:

- consegno il bene e incasso K ≥ 0 ✓
- incasso eventuali dividendi fino a τ ≥ 0

So forse che $K > S(\tau)$?

II^a situazione

La call non viene mai esercitata, neanche in T, istante in cui me ne accorgo

- mi rimane il bene che vale $S(T) \geq 0$
- incasso eventuali dividendi fino a T ≥ 0

OA II° tipo / c.v.d.

3') $c(t) \leq S(t)$

se $K=0$, allora $c(t)=S(t)$, solo nel caso non ci siano dividendi

Se ci sono, invece, cambia e dipende dal loro flusso

4) $C(t) \geq S(t) - K$ (non vale per le europee, non si riesce a dimostrare)

dim

se $\exists t \mid C(t) < S(t) - K$ $\quad 0 < S(t) - K - C(t)$

compro la call e la esercito subito

$$\begin{array}{r} -C(t) \\ S(t)-K \\ \hline >0 \end{array}$$ introito immediato

ci sono costi futuri nulli con $Pr = 1$. OA II° tipo

// cvd

5) $c(t) \geq \bar{S}(t) - K b(t,T)$

5') $C(t) \geq \bar{S}(t) - K b(t,T)$

dim

vale per OSA

$\exists t \mid c(t) < \bar{S}(t) - K b(t,T)$ $\quad 0 < \bar{S}(t) - K b(t,T) - c(t)$

distinguo le 3 situazioni

A) $\bar{S}(t) = S(t)$

in t

vendo a pronti il bene	$S(t)$
compro K ZCB unit. scad T	$-K b(t,T)$
compro la call	$-c(t)$
	>0

in T

incasso valore dei bond a scadenza $\quad K$

- se $S(T) > K$ esercito l'opzione: pago K e ricevo il bene, che restituisco $\quad -K / 0$
- se $S(T) \leq K$, non esercito l'opzione e quindi compro il bene sul mercato che restituisco $\quad -S(T)$

≥ 0

OA II° tipo / cvd

B) $\bar{S}(t) = S(t) - D(t,T)$

$\exists t \mid c(t) < S(t) - D(t,T) - K b(t,T)$

in t $\qquad 0 < S(t) - D(t,T) - Kb(t,T) - c(t)$

vendo allo scoperto il bene	$S(t)$
compro la call	$-c(t)$
compro K zcb con scad. T	$-Kb(t,T)$
compro zcb 'corrispondenti' ai dividendi (come scadenze e importi)	$-D(t,T)$
	>0

in t e T: uso i bond in scadenza (loro valore di rimborso) per pagare i dividendi corrispondenti $\to$ flussi di cassa $=0$

in T:

- Se $S(T)>K$ esercito l'opzione, pago K e ricevo il bene che restituisco $\qquad 0$
- Se $S(T)\leq K$ non esercito e compro il bene sul mercato che restituisco $\qquad K-S(T)$

$$\geq 0$$

c) $\bar{S}(t) = S(t)e^{-q(T-t)}$ $\qquad 0 < S(t)e^{-q(T-t)} - Kb(t,T) - c(t)$

$\exists t \mid c(t) < S(t)e^{-q(T-t)} - Kb(t,T)$

incasso $S(t)$ $\forall$ unità

in t vendo allo scoperto $e^{-q(T-t)}$ unità bene	$S(t)e^{-q(T-t)}$
compro la call	$-c(t)$
compro K zcb con scad T	$-Kb(t,T)$
	>0

fra t e T: flussi netti nulli, perchè i dividendi sono reinvestiti, poichè capitalizzati nelle quantità di bene stesso

in T: incasso il valore dei bond a scadenza $\qquad K$

- Se $S(T)>K$ esercito l'opzione: pago K e ricevo il bene, che restituisco $\qquad -K$

$\qquad \to 0$

• Se $S(T) \leq K$ non esercito e compro il bene sul mercato, che restituisco

$$\frac{-S(T)}{>0_{(K-S(T))}}$$

OA II° tipo

c.v.d.//

• Cerco di trovare un intervallo di valori il più fine possibile per il prezzo delle opzioni

• $\max\{\bar{S}(t) - K b(t,T), 0\} \leq c(t) \leq S(t)$

- se $S(t)=0 \Rightarrow \bar{S}(t) = S(t) \Rightarrow c(t)=0$ * l'attività sott. vale 0, la opzione vale 0 t.

- se $K=0 \Rightarrow ?$ (non so nulla di certo)

.. se $K=0 \wedge \bar{S}(t)=S(t) \Rightarrow c(t)=S(t)$

• $\max\{S(t)-K, \bar{S}(t) - K b(t,T), 0\} \leq C(t) \leq S(t)$

Se $S(t)=0 \Rightarrow C(t)=0$ v.d. sopra

Se $K=0 \Rightarrow C(t)=S(t)$ x N $\max\{S(t), \bar{S}(t), 0\}$ ma $\bar{S}(t) \leq S(t)$ x def

PROPRIETÀ ANALITICHE DEL PREZZO DELLE OPZIONI

Il prezzo della Call, europea e americana, visto come funzione del prezzo di esercizio è decrescente in senso debole, convesso e continuo, almeno nei pti interni all'intervallo (K fermo)

• decrescente

$K_1 < K_2 \Rightarrow c(t;K_1) \geq c(t,K_2)$

$\Rightarrow C(t;K_1) \geq C(t,K_2)$

dim empir.

$\exists t \mid c(t,K_1) < c(t,K_2)$ $\quad 0 < c(t,K_2) - c(t,K_1)$

in t vendo la call K_2 $\quad c(t,K_2)$

compro la call K_1 $\quad -c(t,K_1)$

$\quad > 0$ (vd payoff di call bullish vertical spread)

dim averic.

$\exists t \mid C(t,K_1) < C(t,K_2)$

in t

vendo la call (K_2) $\quad c(t,K_2)$

compro la call (K_1) $\quad -c(t,K_1)$

$\quad > 0$

sono short, quindi ipotesi:

- la call (K_2) viene esercitata in $t \leq \tau \leq T$:

$S(\tau) > K_2 \Rightarrow S(\tau) > K_1$ $\quad$ xhp $K_1 < K_2$

allora, esercito pure io, la call (K_1)

$S(\tau) - K_1 - (S(\tau) - K_2) = K_2 - K_1 > 0$

- la call (K_2) non viene mai esercitata:

in T:

se $S(T) \leq K_2$, rimane a me $\max(S(T) - K_1, 0) \geq 0$

Ho payoff finale ≥ 0 con prob 1 //

- Convessità

$\forall K_1 < K_3 \quad \forall \alpha \in [0,1]$

Sia $K_2 = \alpha K_1 + (1-\alpha) K_3$

1) $c(t;K_2) \leq \alpha\, c(t;K_1) + (1-\alpha)\, c(t;K_3)$

Vd tab eg

2) $C(t,K_2) \leq \alpha C(t,K_1) + (1-\alpha) C(t,K_3)$

dim. *ex absurdo*

$0 < c(t,K_2) - \alpha c(t,K_1) - (1-\alpha) c(t,K_3)$

$\exists t \mid c(t,K_2) > \alpha c(t,K_1) + (1-\alpha) c(t,K_3)$

in t:

vendo call K_2	$c(t,K_2)$
compro $\alpha \cdot$ call(K_1)	$-\alpha c(t,K_1)$
compro $(1-\alpha)$ call(K_3)	$-(1-\alpha) c(t,K_3)$

in T: payoff $\geq 0 \ \forall S(T)$

→ CASA

noi abbiamo visto un Butterfly-spread standard
↓
qui c'è quello generalizzato 1)

CONVESSITÀ:
Non capisco perchè e quando devo esercitare la mia opzione

dim. 2)

$\exists t \mid C(t,K_2) > \alpha C(t,K_1) + (1-\alpha) C(t,K_3)$

$C(t,K_2) - \alpha C(t,K_1) - (1-\alpha) C(t,K_3) > 0$

in t:

vendo call (K_2)	$C(t,K_2)$
compro α call (K_1)	$-\alpha C(t,K_1)$
compro $(1-\alpha)$ call (K_3)	$-(1-\alpha) C(t,K_3)$
	> 0

in T:

Vd tab 49

- la call (K_2) viene esercitata in $t \leq \tau \leq T$, allora esercito anche le mie e chiudo tutto $\alpha(S(\tau)-K_1)+(1-\alpha)(S(\tau)-K_3)+(K_2-S(\tau))$

$$\cancel{\alpha S(\tau)}-\alpha K_1+\cancel{S(\tau)}-K_3-\cancel{\alpha S(\tau)}+\alpha K_3+K_2-\cancel{S(\tau)}$$

$$-\alpha(K_1+K_3)+K_2-K_3$$

$$\rightarrow \alpha K_1+(1-\alpha)K_3$$

$$\cancel{-\alpha K_1}+\cancel{\alpha K_3}+\cancel{\alpha K_1}+\cancel{K_3}-\cancel{\alpha K_3}-\cancel{K_3}=0$$

- la call (K_2) non viene mai esercitata in $t \leq \tau \leq T$, non esercito anche le mie:

finchè $S(\tau)<K$ non si esercita la call (per shot)

$S(T) \leq K_2 \rightarrow S(T) \leq K_3$ non esercito la call (K_3) e mi rimane $\alpha \max\{S(T)-K_1, 0\} \geq 0$.

OA II° $\frac{14}{10}/05$ / Cvd

- <u>Monotonia rispetto alla scadenza</u>, per le americane.

$T_1<T_2 \rightarrow C(t,T_1) \leq C(t,T_2)$

valore in t con scad. T_1

sono due posizioni identiche in tutto tranne che per la scadenza

<u>dim</u>

se $C(t,T_1)>C(t,T_2)$ $\qquad C(t,T_1)-C(t,T_2)>0$

in t:

vendo la call (T_1) $\qquad C(t,T_1)$

compro la call (T_2) $\qquad -C(t,T_2)$

$\qquad >0$

- Se la call (T_1) viene esercitata in $t \leq \tau \leq T_1$ $\qquad -S(\tau)+K$

allora esercito anche la mia call (T_2) $\qquad S(\tau)-K$ $\qquad$ hanno stesso payoff

$\qquad =0$

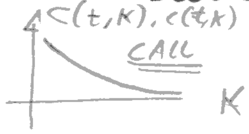
- Se la call (T_1) non viene mai esercitata in T_1:

$C(T_1,T_2) \geq 0$ rimane la mia call, non scaduta, con valore >0

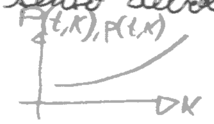
OA II° tipo

Sintesi

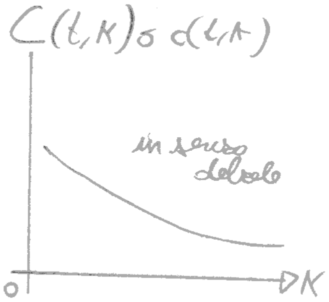
- Il prezzo di un'opzione call, sia europea che americana, è una funzione decrescente e convessa (in senso debole) nonché continua rispetto al prezzo di esercizio.

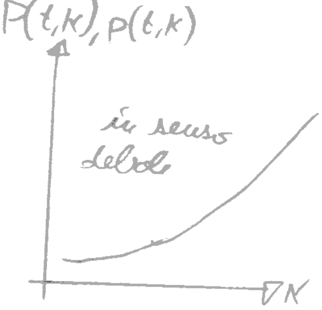


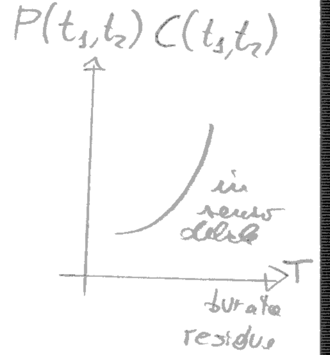
- Il prezzo di un'opzione put, sia europea che americana, è una funzione crescente e convessa (in senso debole), nonché continua rispetto al prezzo di esercizio



- Il prezzo di un'opzione americana, sia call che put, è una funzione crescente (in senso debole) rispetto alla durata residua







def convesso

$f: I \to \mathbb{R}$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

- se essa vale per: $x_1 = x_2 \wedge (\alpha = 0 \vee \alpha = 1) \to$ strettamente convessa

salto a pg 81

LIMITAZIONI DI PURO ARBITRAGGIO PER IL PREZZO DELLE OPZIONI PUT

1) $P(t) \geq p(t)$

dim

$\exists t \mid P(t) < p(t)$ $\quad p(t) - P(t) > 0$

in t

vendo l'europea $\quad p(t)$

compro l'americana $\quad -P(t)$

$$\frac{\begin{array}{r} p(t) \\ -P(t) \end{array}}{>0}$$

in T ho un payoff nullo $\quad 0$

OA II° tipo ⇝ Vd

2) $p(t) \geq 0$

l'opzione non può avere costo negativo

2') $P(t) \geq 0$

dalla 2)

3) $P(t) \leq K$

se sottostante vale $0 \rightarrow P(t) = K$ perché posso avere K subito, dando in cambio qlc che non vale niente

3') $p(t) \leq K$

dim 3)

$\exists t \,/\, P(t) > K \qquad P(t) - K > 0$

suppongo che i tassi sia >0 q.c. ↳ il prezzo ↑ nel tempo perché stocastico

in t

vendo la put $\quad P(t)$

investo K in M.M.A. $\quad -K$

$$\frac{\begin{array}{r} P(t) \\ -K \end{array}}{>0}$$

x K M.M.A.?

perché se investissi in bond in scadenza T potrei incassare meno di K a causa dell'aleatorietà dei prezzi dei ZCB: acquistando ZCB con scadenza T potrebbe essere necessario disinvestirli prima di T, allora non è detto che quello che ricavo disinvestendo sia più grande di K (può ess <). Per queste ragioni devo usare il m.m.a. che viaggia a tasso istantaneo $r(t) \rightarrow$ il valore di qst strumento monetario non diminuisce nel tempo

- Se in $\tau \in [t,T]$ la put viene esercitata → obbligato a comprare

allora vendo il MMA $\underbrace{\frac{K}{B(t)}}_{\text{unità MMA}} \cdot \underbrace{B(\tau)}_{\text{per unità}} = K \cdot \frac{e^{\int_0^\tau r(u)du}}{e^{\int_0^t r(u)du}} = K \cdot e^{\int_t^\tau r(u)du} \quad (\geq K)$ q.c.

put esercitata
pago K e ricevo il bene $\qquad K\left[\underbrace{e^{\int_t^\tau r(u)du}-1}_{\geq 0}\right]+\underbrace{S(\tau)}_{\geq 0}\geq 0$

- Se la put non viene esercitata

in T: rimane il valore dell'investimento $\qquad K e^{\int_t^T r(u)du} \geq 0$ q.c.

in entrambi i casi
OA II° tipo / Lvd

3") $p(t) \leq K\cdot \overset{<1}{b(t,T)}$ + stretta

dim
$\exists t \,|\, p(t) > K\cdot b(t,T) \qquad p(t)-K\,b(t,T)$

in t:
vendo la put $\qquad p(t)$
compro K zcb con scad T $\qquad -K\cdot b(t,T)$
$\qquad > 0$

in T:
ritiro il valore dei bond a scadenza $\qquad K$

- se $S(T)<K$ la put viene esercitata, sono obbligato a comprare
pago K e ricevo il bene $\qquad -K+S(T)$
- se $S(T)\geq K$ la put non viene esercitata $\qquad K$

payoff long put
$\max\{K-S(T),0\}$

OA II° tipo

Oss La limitazione non vale per le americane.
Perché se l'opzione venisse esercitata prima di T e io vendessi i bond prima di T, otterrei qlc in meno di K e quindi non posso assicurarlo
/ Lvd

4) $P(t)\geq K-S(t)$

il prezzo delle put americane è > del payoff immediato, altrimenti avrei un introito positivo

5) $p(t)\geq K\cdot b(t,T)-\overline{S}(t)$

5') $P(t)\geq K\cdot b(t,T)-\overline{S}(t)$

dim 5)
$\exists t \quad p(t)<K\cdot b(t,T)-\overline{S}(t) \qquad K\,b(t,T)-\overline{S}(t)-p(t)>0$

a) non ci sono dividendi $S(t) = \bar{S}(t)$

in t:

vendo allo scoperto K zcb con scad T	$K \cdot b(t,T)$
compro attività sottostante	$-S(t)$
compro put	$-p(t)$
	>0

in T:

- se $S(T) < K$, allora esercito la put quindi consegno il bene e incasso K rimborso K (valore rimborso dei bond)

K

$-K$

$=0$

- se $S(T) \geq K$, allora non esercito e vendo il bene sul mercato
- estinguo i bond

$S(T)$

$-K$

≥ 0

O.A.

b) $\bar{S}(t) = S(t) - D(t,T)$ $\qquad - p(t) - \bar{S}(t) + K b(t,T) > 0$

in t:

vendo allo scoperto K zcb con scad T	$K \cdot b(t,T)$
compro attività sottostante	$-S(t)$
compro la put	$p(t)$
vendo allo scoperto zcb "corrispondenti" ai dividendi	$D(t,T)$
	>0

tra t e T: uso i dividendi per estinguere i bond corrispondenti $\to$ flussi netti nulli

in T:

- se $S(T) \geq K \to$ payoff ≥ 0
- se $S(T) < K \to$ payoff $= 0$

c) $\bar{S}(t) = S(t) e^{-q(T-t)}$

in t:

vendo allo scoperto K zcb con scad T	$K \cdot b(t,T)$
compro $e^{-q(T-t)}$ unità del bene	$-S(t)e^{-q(T-t)}$

compro la put $\qquad -p(t)$

$\overline{\qquad >0}$

tra t e T: i cash flow sono nulli → uso dividendi per comprare nuovo bene

in T:

- se $S(T)<K$ → payoff >0
- se $S(T)\geq K$ → payoff $=0$.

OA II° tipo // Cvd

3/4

Ho tratto delle conclusioni per le opzioni put e call, nel senso di un intervallo di valori, espressi in termini di portafogli di attività di base in cui deve cadere il prezzo delle opzioni per evitare OA.

PROPRIETÀ DELLE PUT

- il prezzo delle opzioni put europee e americane è crescente (in senso debole), convesso e continuo rispetto al prezzo di esercizio
- il prezzo delle put americane è crescente in senso debole rispetto alla scadenza.

dim × Agg

RELAZIONI FRA OPZIONI EUROPEE E AMERICANE CON IDENTICHE CARATTERISTICHE

$$C(t) \geq c(t) \qquad P(t) \geq p(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

- Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni call europee

$$\max\{\bar{S}(t) - K\,b(t,T), 0\} \leq c(t) \leq S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

in particolare $S(t)=0 \to c(t)=0$

$K=0$, $\bar{S}(t)=S(t) \to c(t)=S(t)$

- Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni call americane

$$\max\{S(t) - K, \bar{S}(t) - K\,b(t,T), 0\} \leq C(t) \leq S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$$

in particolare $S(t)=0 \to C(t)=0$

$K=0 \to C(t)=S(t)$

- Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni put europee

$$\max\{K\,b(t,T) - \bar{S}(t), 0\} \leq p(t) \leq K \cdot b(t,T)\} \qquad \forall t \in [0,T]$$

in particolare $S(t)=0 \to p(t)=K\,b(t,T)$

$K=0 \to p(t)=0$

- Limitazioni di puro arbitraggio per opzioni put americane

$$\max\{K - S(t), K\,b(t,T) - \bar{S}(t), 0\} \leq P(t) \leq K \qquad \forall t \in [0,T]$$

in particolare: $S(t)=0 \to P(t)=K$

$K=0 \to P(t)=0$

ESERCIZIO ANTICIPATO DELLE CALL AMERICANE

27/3

Proposizione 1: se l'attività sottostante non paga dividendi (almeno fino a T), $b(t,T) < 1$ q.c., allora non è mai ottimale esercitare una opzione call americana prima della scadenza
$\Rightarrow C(t) = c(t) \quad \forall t \in [0,T]$

dim

Se $K=0$, poiché non ci sono dividendi $\rightarrow C(t) = c(t) = S(t)$

Se $K>0$, poiché il bene non paga dividendi tra $[t,T]$, allora non pagherà neanche tra τ e T, $\forall \tau \in [t,T[$, dunque:
$\bar{S}(\tau) = S(\tau) \quad \forall \tau \in [t,T[$. Sfruttando la limitazione inferiore:

$$\underline{c(\tau)} \geq \bar{S}(\tau) - K\,b(\tau,T) = S(\tau) - K \cdot b(\tau,T) \underline{> S(\tau) - K}$$

↳ in τ non conviene l'esercizio anticipato dell'opzione; conviene venderla.

↳ Il diritto all'esercizio anticipato non vale nulla.

Nota: era intuitivo; se esercito prima pago K prima della scadenza, ma posso guadagnare eventuali dividendi, che però qui non ci sono

Proposizione 2: se al tempo $t<T$ investire lo strike K in titoli a cedola nulla con scadenza T rende di più, in termini di interessi, dei dividendi pagati da una unità di sottostante, allora non è ottimale esercitare un'opzione call americana anche se fortemente in the money, cioè:

$\frac{K}{b(t,T)}$ n° ZCB acquistati

$K\left[\frac{1}{b(t,T)} - 1\right]$ = interessi $\rightarrow \cdot b(t,T)$ in t

$$K[1 - b(t,T)] > D(t,T) \qquad \text{in caso di dividendi certi}$$

$$\left[K[1 - b(t,T)] > S(t)\left[1 - e^{-q(T-t)}\right] \qquad \text{in caso di dividendi nel continuo}\right]$$

$\Rightarrow c(t) > S(t) - K$

Oss Gli interessi al tempo T sono dati da $\frac{K}{b(t,T)} - K = K\left[\frac{1}{b(t,T)} - 1\right]$

quindi il loro valore in t si ottiene moltiplicandoli per il prezzo del titolo a cedola nulla $b(t,T)$

- Se la proposizione 2 è soddisfatta per un fissato $t<T$, non è detto che lo sia per ogni $\tau \in]t,T[$ e quindi non si può concludere che $C(t)=c(t)$

dim Si ricordi che $C(t) \geq \bar{S}(t) - K b(t,T)$. Quindi se i dividendi sono noti, $C(t) \geq [S(t) - D(t,T)] - K b(t,T)$

$$= S(t) - K + K - K b(t,T) - D(t,T) > S(t) - K$$

perché $K - K b(t,T) - D(t,T) > 0$ per ipotesi

questa relazione vale in t ma non è detto valga poi.

- Se i dividendi sono pagati nel continuo:

con intensità q, prodotti da una unità di bene, essi sono pagati in termini di quantità del bene stesso.

I dividendi totali in T prodotti da una quantità iniziale unitaria di sottostante al tempo t, espressi in unità del bene stesso, sono pari a $e^{q(T-t)}-1$. Quindi $e^{q(T-t)}-1$ unità di sottostante al tempo T sono equivalenti a $[e^{q(T-t)}-1] e^{-q(T-t)} = 1 - e^{-q(T-t)}$ unità dello stesso al tempo t.

dim $C(t) \geq S(t) e^{-q(T-t)} - K b(t,T) = S(t) - K + K b(t,T) - S(t) + S(t) e^{-q(T-t)} >$
$> S(t) - K$

perché $K - K b(t,T) - S(t) + S(t) e^{-q(T-t)} >$ per ipotesi.

- Suppongo siano note le date di pagamento dei dividendi. Suppongo di sapere che se ci sono dividendi, questi sono pagati esclusivamente in queste date di pagamento

IP: - bene sottostante paga dividendi (anche aleatori) esclusivamente alle date note $t_1, \dots, t_n$ con $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

CALL AMERICANO

1) Bene → no dividendi
↳ NO ESERCIZIO

2) Bene / discreto dividendi
\ continuo dividendi
∧
Interessi zcb
↳ non esercizio

3) Se $0 < t_0 < \dots < t_m$ pagamento dividendi
$\forall t \in [0, T] - \{t_1, \dots, t_n\}$
↳ non esercizio

qui NON so

PUT AMERICANO

1) non so dire nulla

2) dividendi > Interessi zcb
↳ no zcb

3) $0 < t_1 < \dots < t_m$
$\{t_1, \dots, t_n\}$
no esercizio

• $K > 0$

• $b(t,T) < 1$ quasi certamente $\forall t, \tau : 0 \leq t < \tau \leq T$

ciò perché voglio che gli interessi siano strettamente positivi

allora

$\forall t \in [0,T[\; - \{t_1^-, t_2^-, \dots, t_n^-\} \Rightarrow C(t) > S(t) - K$: non conviene

nel senso che NON SO se vale

seppure troviamo $\{t_i\}_{i=1}^n$ non conviene esercitare ⇒ in quegli istanti non so,

mai l'esercizio anticipato, escluse al più (non sono in grado di dire nulla) le date di pagamento dei dividendi, intese come prima dello stacco del dividendo.

Oss gli unici momenti in cui potrebbe convenire l'esercizio anticipato sono quelli coincidenti con il pagamento dei dividendi, prima del pagamento dello stesso (t_i^-), $i = 1, \dots, n$.

• Se $t_n^+ \leq t < T$, qui non ci sono dividendi tra t e $T \Rightarrow C(t) > S(t) - K$ già visto

• Se $t < t_n$. Sia t_i la prossima data (possibile) di pagamento dei dividendi dopo t, cioè $t_{i-1}^+ \leq t \leq t_i$, con $t_0 = 0$.

dim

supponiamo $C(t) = S(t) - K$ (Oss no < per q))

in t

vendo allo scoperto il bene	$S(t)$
investo K in zcb con scad t_i	$-K$
compro la call	$-C(t)$
	$= 0$

in t_i^-:

vendo call	$C(t_i^-)$
incasso valore dei bond	$\dfrac{K}{b(t,t_i)}$
compro il bene sul mercato a pronti e lo restituisco	$-S(t_i^-)$
	> 0

$C(t_i^-) + \dfrac{K}{b(t,t_i^-)} - S(t_i^-) \geq S(t_i^-) - K + \underbrace{\dfrac{K}{b(t,t_i)}}_{>K} - S(t_i^-)$ $_{>0}$

ω in t so che con $P_r = 1$ avrò introito a costo nullo
OA I° tipo
↯ vd

Oss: t_i^-; se fosse in t_i^+ dovrei pagare il dividendo di cui non conosco il valore: siccome ho venduto allo scoperto il bene devo pagare io il dividendo → togliere un dividendo dal payoff → non so se >0, perciò devo effettuare le operazioni di chiusura.

3/4

ESERCIZIO ANTICIPATO DELLE PUT AMERICANE pg 83

Proposizione 1: Se, al tempo $t<T$, investire lo strike K in titoli a cedola nulla di scadenza T rende meno, in termini di interessi, dei dividendi prodotti da un'unità di bene sottostante, allora non è ottimale esercitare un'opzione put americana, anche se fortemente in the money, cioè:

1) Caso dei dividendi certi:

- anche se vale in t, non è detto valga in $t'>t$ o $t'<T$
- Se $D(t,T)=0$ → vale cmq

$D(t,T)$ dividendi certi.

$K[1-b(t,T)]$ interesse percepiti investendo K, valutati in t

qui perdo i dividendi e guadagno gli interessi

- se $\underbrace{D(t,T)}_{\text{qui perdo}} > K\underbrace{[1-b(t,T)]}_{\text{qui guadagno}}$ → $P(t) > K - S(t)$

il valore della put è + alto di quel che potrei prendere esercitandola subito

dim

$$P(t) \geq K b(t,T) - \bar{S}(t)$$

$$K b(t,T) - \bar{S}(t) = K b(t,T) - S(t) + D(t,T) >$$

$$> K \cancel{b(t,T)} - S(t) + K - K\cancel{b(t,T)}$$

$$P(t) > K - S(t)$$

cvd

2) Dividendi pagati nel continuo con intensità q

- anche se vale in t, non è detto valga in $t'>t$
- Se $q=0$ → vale cmq

$S(t)\left[1-e^{-q(T-t)}\right]$ valore dei dividendi per una unità di bene sottostante

se $S(t)(1-e^{-q(T-t)}) > K(1-b(t,T)) \Rightarrow P(t) > K - S(t)$

dim

$$P(t) \geq K \cdot b(t,T) - \bar{S}(t)$$

$$= K \cdot b(t,T) \underbrace{- S(t)e^{-q(T-t)} + S(t)} - S(t) >$$

$$> \underbrace{K(1-b(t,T))} + K \cdot b(t,T) - S(t)$$

$\Rightarrow P(t) > K - S(t)$ / Cvd

• caso intermedio prima del terzo (Pg 55 dispe)

Proposizione 2: si supponga che i dividendi siano noti. Siano $t < T$ e $\tau \in (t,T)$ la prossima data di pagamento dei dividendi. Se il dividendo che deve essere pagato in τ, diciamo D, supera gli interessi conseguibili tramite un investimento dello strike K in titoli a cedola nulla di scadenza τ allora non è ottimale esercitare l'opzione put americana in t, cioè $D > \frac{K}{b(t,\tau)} - K \Rightarrow P(t) > K - S(t)$

dim (x ass) $P(t) = K - S(t)$. Allora si vendono allo scoperto $\frac{K}{b(t,\tau)}$ titoli a cedola nulla di scadenza τ, si compra la put e il sottostante (con un cash flow iniziale pari a 0). In τ si incassa il prossimo dividendo, e poi si chiude tutto vendendo la put e il sottostante e rimborsando i titoli a cedola nulla, con un cash-flow strettamente positivo:

$$D + P(\tau) + S(\tau) - \frac{K}{b(t,\tau)} > \frac{K}{b(t,\tau)} - K + P(\tau) + S(\tau) - \frac{K}{b(t,\tau)} = P(\tau) - [K - S(\tau)] \geq 0$$

OA I° tipo / Cvd

(NB) Se i prezzi dei ZCB di scadenza T sono deterministici e crescenti nel tempo, allora $D > \frac{K}{b(t,T)} - K \Rightarrow D > \frac{K}{b(z,T)} - K \quad \forall z \in [t,T]$. Ciò implica

che l'esercizio anticipato non è ottimale soltanto in t, ma (almeno) fino a quando D non sia stato pagato.

3) Dividendi pagati in $t_1, t_2, \ldots, t_n$ con $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$, con importi dei dividendi noti: $d_1, d_2, \ldots, d_n$
Sia t_i la prossima data di pagamento dei dividendi ($t_{i-1}^+ < t < t_i$) con $t_0 = 0$. Mi colloco in $t < t_i$

se $d_i > \frac{K}{b(t,t_i)} - K \Rightarrow P(t) > K - S(t)$

se il prossimo dividendo è > degli interessi che io potrei conseguire investendo K € in zcb con scad t_i → non conviene l'esercizio anticipato

<u>dim</u> (x ass)

$$P(t) = K - S(t)$$

in t:

· vendo allo scoperto $\frac{K}{b(t,t_i)}$ zcb di scadenza t_i	K
· compro la put	$-P(t)$
· compro bene sottostante	$-S(t)$
	$= 0$

in t_i:

1) incasso il dividendo	d_i
2) vendo la put	$P(t_i^+)$
3) vendo il bene sottostante	$S(t_i^+)$
4) rimborso i bond	$-\frac{K}{b(t,t_i)}$
	> 0

$$d_i + P(t_i^+) + S(t_i^+) - \frac{K}{b(t,t_i^+)} \geq$$

$$\geq d_i + K - \cancel{S(t_i^+)} + \cancel{S(t_i^+)} - \frac{K}{b(t,t_i)} =$$

$$= d_i - \left(\frac{K}{b(t,t_i)} - K \right) > 0$$

OA

(cvd)

Oss Quando i prez degli ZCB sono stocastici, anche se $i>0$, non è detto che siano crescenti nel tempo $\Rightarrow$ il risultato per t * valga risultato per $t_i > t$.

- Se prezzi ZCB fossero deterministici (noti in anticipo) e i tassi ≥ 0 allora fix t_i: $b(t,t_i)$ è crescente in senso debole rispetto alla scadenza

Se $d_i > \frac{K}{b(t,t_i)} - K$, in $\tau < t_i$, $\tau \geq t$ vale?

$$b(\tau,t_i) \geq b(t,t_i) \Rightarrow \frac{1}{b(\tau,t_i)} \leq \frac{1}{b(t,t_i)} \Rightarrow \frac{1}{b(\tau,t_i)} - K \leq \frac{1}{b(t,t_i)} - K < d_i.$$

allora

$$d_i > \frac{1}{b(\tau,t_i)} - K.$$

Allora sulla base della progressione di prima affermo che non conviene l'esercizio anticipato nemmeno in τ: $P(\tau) > K - S(\tau)$ $\forall \tau \in [t,t_i]$

L'esercizio non conviene almeno fino alla data di pagamento t_i del dividendo.

Conclusioni:

- ho attento dei risultati opposti rispetto a quelli delle call
- gli unici momenti in cui potrebbe convenire l'esercizio delle call sono le date che precedono il pagamento del dividendo, se esse sono note. Riguardo le put so dire che non conviene esercitare le put in quelle date, immediatamente prima del pagamento del dividendo perché se le esercito perdo il dividendo ed il prezzo di esercizio rimane lo stesso

stessa scadenza, att. sott, pr. esercizio

Vedo adesso delle relazioni fra opzioni omologhe con riferimento ai loro prezzi:

- Non sono cose nuove, (vd assicurare un portafoglio), sono modi alternativi per conseguire uno stesso risultato, assicurando un portf a livello K.

PUT-CALL PARITY - PER OPZIONI EUROPEE

1) $p(t) = c(t) - \bar{S}(t) + K\,b(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$, call analoga

$c(t) - p(t) = \bar{S}(t) - K b(t,T)$

Se sul mercato, oltre alle attività di base, è già presente una call, allora introducendo una put analoga sono obbligato a fissare il prezzo della put soddisfacendo l'equazione qui sopra.

↳ la call (put) può essere replicata con un portafoglio fatto da put (call), bene sottostante, ZCB corrisp. ai dividendi e altri K ZCB venduti allo scoperto.

dim. (controstrategia dimostrativa: non ragioniamo più per assurdo)

+call − put (vendo, compro): payoff: $\max\{S(T)-K,0\} - \max\{K-S(T),0\} = S(T)-K$ sempre

che è payoff di $+V^L(T)$ con stesso bene sottost nelle due opzioni, scadenza T e prezzo di scadenza = prezzo di esercizio

→ replicato un forward con una long call e short put.

↳ Siccome il portafoglio della call e put ha uguale payoff di quello formato dal long-forward, devono avere lo stesso valore in t: (AOA)

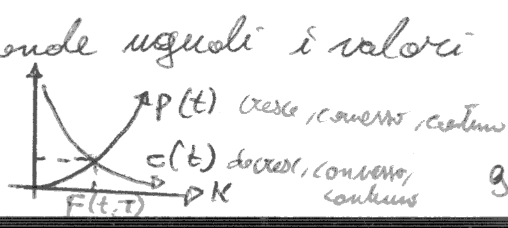
$$c(t) - p(t) = V^L(t) = \bar{S}(t) - Kb(t,T)$$

c.v.d.

Oss Le dimostrazioni fatte per determinare il prezzo del forward usavano delle attività di base. Ora esse posso riferirle a qst differenza, per qls bene sottostante (anche merci)

Nuova interpretazione di $F(t,T)$:

$F(t,T)$ è prezzo forward in t, è quel particolare prezzo di consegna K che in t rende nullo il valore di un frw ⟹ ora è "quel particolare prezzo di esercizio che rende uguali i valori di call e put analoghe con scadenza T.



DISUGUAGLIANZE - PER OPZIONI AMERICANE

(pdv Put)

$$C(t) - S(t) + K\,b(t,T) \overset{I^a}{\leq} P(t) \overset{II^a}{\leq} C(t) - \bar{S}(t) + K \qquad \forall t \in [0,T]$$

(pdv Call)

$$P(t) - \bar{S}(t) - K \leq C(t) \leq P(t) + S(t) - K\,b(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$$

- anche senza dividendi la disequazione resta tale
- qui il prezzo della put è vincolato (non calcolato)

dim

(I^a diseguaglianza)

TH: $C(t) - S(t) + K\,b(t,T) \leq P(t)$

IP: $\exists t \mid P(t) < C(t) - S(t) + K\,b(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$

$0 < C(t) - S(t) + K\,b(t,T) - P(t)$

in t:

vendo call	$C(t)$
vendo allo scoperto K zcb	$K\,b(t,T)$
compro bene sottostante	$-S(t)$
compro put	$-P(t)$
	>0

- la put è americana ed è mia → prima di esercitarla aspetto di vedere cosa fa colui a cui ho venduto la call
- fra t e T: incasso eventuali dividendi

2 casi

1) call esercitata in τ:

incasso K e consegno il bene	K
vendo la put	$P(\tau)$
estinguo i bond	$-K\,b(t,T)$
	≥ 0 (inclusi eventuali dividendi incassati)

2) call mai esercitata

→ non è in the money → lo sarà la put ✓

in T:

esercito la put: consegno bene e incasso K $\qquad K$

estinguo i bond $\qquad -K$

+) eventuali dividendi $\qquad \geq 0$

$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$\geq 0$$

OA II° tipo / Cvd

(II^a disuguaglianza)

TH: $P(t) \leq C(t) - \bar{S}(t) + K$

IPO: $\exists t \mid P(t) > C(t) - \bar{S}(t) + K \qquad \forall t \in [0,T]$

$$P(t) - C(t) + \bar{S}(t) - K > 0$$

3 casi
- (A) senza dividendi
- (B) dividendi certi
- (C) dividendi continuo

8/4/13

(A) bene senza dividendi $\Rightarrow \bar{S}(t) = S(t)$

in t:

vendo la put	$P(t)$
vendo allo scoperto il bene	$\bar{S}(t)$
compro la call	$-C(t)$
investo K nel M.M.A.	$-K$
	> 0

Oss: non posso investire K in ZCB scad T perché l'opzione è americana e quindi τ è incognito. C'è bisogno di vendere i bond prima della scadenza $\Rightarrow$ per essere sicuri di incassare + di K utilizzo B.A. che è $\forall$ risk

fra t e T: aspetto di vedere cosa fa la parte a cui ho venduto la put.

2 casi

1) la put viene esercitata in $\tau \in [t,T]$

. ritiro montante bank-account	$\frac{K}{B(t)} B(\tau)$
. pago K e ricevo il bene, che restituisco (perché allo scoperto)	$-K$
. vendo la call	$C(\tau)$
	≥ 0

$$\frac{K}{B(t)} B(\tau) = K e^{\int_t^\tau r(u)du} \geq K$$

2) la put non viene mai esercitata

in T:

ritiro il montante del m.m.a $\qquad Ke^{\int_t^T r(u)du}$

esercito la call: pago K e ricevo il bene che restituisco $\qquad -K$

$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$>0$$

DA II° tipo

B) bene con dividendi certi sia come importi che come date

$$\bar{S}(t) = S(t) + D(t,T)$$

$$\exists t \mid P(t) > C(t) - S(t) - D(t,T) + K$$

$$P(t) - C(t) + S(t) + D(t,T) - K > 0$$

in t:

vendo la put	$P(t)$
vendo allo scoperto il bene	$S(t)$
compro ZCB corrisp. ai dividendi	$-D(t,T)$
compro call	$-C(t)$
investo K nel MMA	$-K$
	>0

∀ dividendo c'è un bond con stessa scadenza e n° di ZCB è = € che verrà pagato

fra t e T: potrebbe accadere che qlc bond scada, per cui incasso il valore nominale per pagare il corrispondente dividendo → cash flow netti nulli

2 cose

in T:

1) la put viene esercitata in $\tau \in [t,T]$

· ritiro montante del B.A.	$\frac{K}{B(t)} \cdot B(T)$
· pago K e ricevo il bene, che restituisco	$-K$
· rimangono bond non scaduti, che vendo	$D(t,T)$
· vendo la call	$C(T)$
	≥ 0

$$\underbrace{Ke^{\int_t^T r(u)du} - K}_{\geq 0} + C(T) + D(t,T) \geq 0$$

2) la put mai esercitata

→ non è in the money → lo sarà la put

in T:

· esercito la call : pago K e ricevo il bene che restituisco — K

rileva il montante del m.m.a. — $-K\,\frac{B(T)}{B(t)}$

+) eventuali dividendi — ≥ 0

$$\geq 0$$

OA II° M/w

ⓒ bene con dividendi pagati nel continuo

$$\bar{S}(t) = S(t)\,e^{-q(T-t)}$$

$$\exists t \mid P(t) > C(t) - S(t)\,e^{-q(T-t)} + K \qquad P(t) - C(t) + S(t)\,e^{-q(T-t)} - K > 0$$

in t:

	vendo la put	$P(t)$
f dato in quant di bene	vendo allo scoperto $e^{-q(T-t)}$ unità	$S(t)\,e^{-q(T-t)}$
	compro la call	$-C(t)$
	investo K nel M.A.	$-K$
		> 0

2 casi

1) la put viene esercitata in $\tau \in [t, T]$

· rileva montante B.A. — $\frac{K}{B(t)} \cdot B(\tau)$

· pago K e ricevo il bene, che restituisco [in quantità pari a $e^{-q(T-\tau)}$] — $-K$

· vendo la call — $C(\tau)$

[Oss: $e^{-q(T-t)} \cdot e^{q(\tau-t)} = e^{-q(T-\cancel{t}-\tau+\cancel{t})} = e^{-q(T-\tau)}$

· se $\tau = T$ → 1 (da restituire)

· se $\tau < T$ → < 1 (" ")]

· vendo la qnt di bene rimanente — $(1 - e^{-q(T-\tau)})\,S(\tau)$

$$\underbrace{K e^{\int_t^\tau r(u)du} - K}_{\geq 0} + \underbrace{C(\tau)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - e^{-q(T-\tau)})\,S(\tau)}_{\geq 0} \rightsquigarrow > 0$$

2) la put non viene mai esercitata

in T:

- rubero il montante del m.m.a $Ke^{\int^T r(u)du}$
- esercito la call: pago K e ricevo il bene che restituisco scoperto $-K$

$$\overline{\qquad -K \qquad}$$
$$>0$$

uguale a prima - K il debito in termini di qnt di bene è pari a 1 unità che è quello che ricevo dall'eserc. della call.

OA / LVd

Conclusione:

- il valore delle opzioni in generale cade in un intervallo di valori perché in generale esse non sono replicabili da portafogli costituiti dalle attività di base.
- se si vuole essere più precisi si ha bisogno di un "modello" che descriva l'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività sottostante

I più usati sono i modelli markoviani: l'ipotesi di markovianità afferma che è importante solo il valore, che ha la variabile, in t istante corrente.

Sub-ipotesi-markov: le variabili sono dette variabili di stato e i processi sono processi markoviani

PROCESSO DI MARKOV (o MARKOVIANO)

def Un processo stocastico è un processo markoviano quando la distribuzione relativa a variabili future del processo (distr. congiunta o marginale) dipende esclusivamente dall'ultima informazione disponibile sul processo stesso e non dalla storia passata.

In generale non è così: per modellare un processo stocastico, cioè assegnare una legge temporale del processo, devo assegnare una distribuzione congiunta per i valori futuri del processo; tale distribuzione è subordinata all'informazione disponibile, che è la storia passata delle variabile/i

Io vedrò 2 modelli, markoviani
Il primo modello è discreto sullo spazio temporale e sulle var. aleat.

MODELLO BINOMIALE (Cox, Ross, Rubinstein 1979)

- fa capire le idee che ci sono sotto la teoria della valutazione dei derivati in AOA.
- Come si è visto, le ipotesi di lavoro introdotte all'inizio non sono sufficienti per individuare in maniera precisa il prezzo di un'opzione. Se si vuol raggiungere questo risultato, perlomeno con riferimento alle opzioni europee, bisogna "modellare" anche l'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività sottostante. In tal senso, un modello molto semplice ed allo stesso tempo molto efficace per capire la logica sottostante è quello binomiale. Esso inoltre gode di importanti proprietà asintotiche

MODODELLO BINOMIALE MONOPERIODALE
suppongo che:

- il mercato sia aperto in due sole date, indicate x convenzione 0 e 1
- su di esso siano trattate due attività di base: un'attività non rischiosa, cioè il money market account e un'attività rischiosa
- il tasso istantaneo $r(t)=r$ sia deterministico e costante nel tempo, cosicché $B(0)=1$ e $B(1)=e^{r}$
- (*) il prezzo iniziale dell'attività rischiosa sia $S(0)=S>0$; il suo prezzo in 1, $S(1)$, possa assumere soltanto due possibili valori, indicati convenzionalmente con Su ("up") e Sd ("down"), dove u e d sono due numeri reali strettamente positivi | $u>d$

att. non rischiosa

att. \ t	0	1
mma	1€	e^{r}€ $= B(T)$
zcb	e^{-r}€	1€ $B(T,T)$

→ rig. la attività non rischiosa so tutto

es. $\{B(t); t=0,1\}$

$B(0)=1$, $B(1)=e^{r}$

att. rischiosa

(*)

stato del mondo \ t	0	1
I° stato	$S=S(0)$	$Su=S(1)$
II° stato	$S=S(0)$	$Sd=S(1)$

att. non rischiosa

\ t	0	1
prezzo att. non rischiosa	1	↗ e^{r} ↘ e^{r}

poiché

- prezzo $S(1)$ dell'attività rischiosa può assumere 2 soli valori (Binomiale)

$$S(1) = \begin{cases} S' \\ S'' \end{cases} \quad \text{con } S' > S'' > 0$$

- $S \neq 0$ → $u \triangleq \dfrac{S'}{S}$ u rappresenta il fattore di crescita del prezzo fra 0 e 1.

  → $d \triangleq \dfrac{S''}{S}$ d (anche) rappresenta il fattore di crescita del prezzo fra 0 e 1.

↳ u e d sono due determinazioni del fattore di crescita inteso come numero aleatorio con 2 possibili determinazioni

↳ $u > d > 0$

Riguardo alla tabella dell'attività rischiosa:

- in 1 ci sono gli stati del mondo che essendo incompatibili ed esaustivi costituiscono una $\mathbb{P}$ dell'evento certo. (descrivo l'incertezza all'epoca finale)
- l'evento $\{S(1)=Su\}$ è detto <u>STATO UP</u> (prezzo ↑)

  l'evento $\{S(2)=Sd\}$ è detto <u>STATO DOWN</u> (prezzo ↓)

NB prezzo down è riferito al prezzo up, come base.

Se accade Su significa che il pr. della variabile è salito, se accade Sd <u>non</u> significa che il prezzo è sceso rispetto 0.

OSSERVAZIONI

1. Il prezzo in 1 dell'attività rischiosa congloba eventuali dividendi

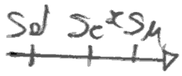
2. È importante che <u>tutti gli operatori</u> del mercato concordino sulla descrizione dell'incertezza riguardante $S(1)$, attribuendo <u>probabilità strettamente positiva ad entrambe le determinazioni</u> Su e Sd, mentre è del tutto irrilevante tale probabilità, che potrebbe anche differire da operatore a operatore.

(NB) Non ha alcuna importanza la probabilità assegnata ai due eventi da uno specifico individuo, perché non è influente sui prezzi.)

DEDUZIONE DALLE IPOTESI:

• → l'ipotesi di AOA (I° tipo) implica $d < e^r < u$

dice che se al tempo 0 investo S nell'attività rischiosa avrò Su o Sd mentre se investo nell'attività non rischiosa ho Se^r.



Ossia: la relazione dice che se si verifica lo stato up il valore del vostro investimento nell'attività rischiosa cresce di più di un investimento nell'attività priva di rischio, se si verifica lo stato down l'investimento nell'attività rischiosa cresce di meno di un investimento nell'attività priva di rischio.

dim

TH: $d < e^r < u$

IP: $u \leq e^r$ $\qquad e^r - u \geq 0$

in 0: vendo allo scoperto l'attività rischiosa $\qquad S$

investo S nel m m a $\qquad -S$

$$= 0$$

in 1: ritiro montante del m m a $\qquad S \cdot e^r$

ricompro l'attività rischiosa, che restituisco $\qquad S(1)$

$$Se^r - S(1) \geq 0 \text{ perché:}$$

- si verifica stato up:

$$Se^r - Su = S(e^r - u) \geq 0$$

- si verifica stato down:

$$Se^r - Sd = S(e^r - d) =$$
$$= S(\underbrace{e^r - u}_{\geq 0} + \underbrace{u - d}_{\geq \text{ vd disegno}}) \geq 0$$

IP: $e^r \leq d$ $\qquad d - e^r \geq 0$ $\qquad e^r \; d \; u$ $\qquad$ OA I° tipo

in 0:

vendo allo scoperto S unità in m a
compro l'attività rischiosa

$$S$$
$$-S$$
$$= 0$$

in 1:

vendo l'attività rischiosa
rimborso il m. m. a (estinguo debito)

$$S(1)$$
$$-Se^r$$
$$= S(1) - Se^r \geq 0$$

- se si verifica stato up:

$$S \cdot u - Se^r = S(u - e^r) =$$
$$= S(\underbrace{u - d}_{\geq 0} + \underbrace{d - e^r}_{\geq 0}) \geq 0$$

- se si verifica stato down:

$$S \cdot d - Se^r = S(d - e^r) \geq 0$$

OA I° tipo

/ Cvd

Oss: il prezzo dei derivati dipende da quello dell'attività rischiosa

Introduco ora dei <u>derivati</u> con scadenza 1 e attività sottostante attività rischiosa
- → anche il loro <u>payoff finale</u> potrà assumere (al più) <u>due determinazioni</u> a seconda che il prezzo dell'attività sottostante sia Su e Sd.

posso identificare qualsiasi derivato con il suo payoff finale in 1.

Conveniamo di rappresentare tale payoff tramite un vettore di $\mathbb{R}^2$ in cui la prima componente rappresenta la determinazione nello "stato up" e la seconda quella nello "stato down". Rappresentiamo allo stesso modo anche le due attività di base.

<u>Esempi</u>

rappr. attività rischiosa $\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix}$

- attività non rischiosa (in ma) $\begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix}$

- long forward (scad $t=1$, prz $=K$) $\begin{pmatrix} Su-K \\ Sd-K \end{pmatrix}$

- long put europea (scad $t=1$) $\begin{pmatrix} \max(K-Su,0) \\ \max(K-Sd,0) \end{pmatrix}$

DEFINIZIONI

1. Dato un titolo (derivato), identificabile tramite il suo payoff finale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, esso si dice replicabile se è possibile ottenerlo come valore finale di un portafoglio costituito dalle due attività di base (cioè se tale derivato è un attività ridondante)

2. Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ replicabile tramite un portafoglio costituito da δ attività rischiose e β attività non rischiose. (Il portafoglio lo identifico tramite le 2 quantità di base: δ e $\beta \in \mathbb{R}$). I due numeri reali δ e β definiscono la strategia (o portafoglio) replicante il payoff $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   - → Si tratta necessariamente di una strategia statica, in quanto inizia in 0 e non viene più modificata fino alla chiusura, in 1.

3. Il mercato costituito dalle due attività di base si dice completo se ogni payoff è replicabile. (cioè $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è replicabile)
   - → Il mercato risulta completo. Infatti, essendo $u \neq d$:

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists \ \delta, \beta \in \mathbb{R} \mid \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se il sistema associato $\begin{cases} \delta Su + \beta e^r = x \\ \delta Sd + \beta e^r = y \end{cases}$ ha soluzione per β, δ allora il derivato è replicabile tramite un portafoglio formato da attività di base.

9/4/13

• VERIFICO CHE IL MERCATO È COMPLETO

mercato completo $\Rightarrow \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists \delta, \beta \in \mathbb{R} \mid \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

al variare di δ, β $\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix}$ sono generatori di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ sono base $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sono l.i., infatti $\begin{vmatrix} Su & e^r \\ Sd & e^r \end{vmatrix} \neq Su e^r - e^r Sd = S e^r (u-d) > 0 \xrightarrow[u \neq d]{} \neq 0$.

matrice coeff ha rango pieno

↳ dunque ogni derivato è replicabile in maniera unica.

• RISOLVO SISTEMA:

$$\begin{cases} \delta Su + \beta e^r = x \\ \delta Sd + \beta e^r = y \end{cases}$$

$$\delta (Su - Sd) - 0 = x - y \Rightarrow \delta = \frac{x-y}{Su - Sd}$$

$$\beta = \frac{x - \delta Su}{e^r} = e^{-r}\left(x - \frac{(x-y)}{(\cancel{S}u - \cancel{S}d)} \cancel{S}u\right) = \frac{e^{-r}}{u-d}\left(x(u-d) - (x-y)u\right)$$

$$= \frac{e^{-r}}{u-d}\left(\cancel{xu} - xd - \cancel{xu} + yu\right) = \frac{e^{-r}}{u-d}(yu - xd)$$

$$\begin{cases} \beta = e^{-r} \dfrac{yu - xd}{u-d} \\ \\ \delta = \dfrac{x-y}{S(u-d)} \end{cases}$$

• Supposti noti δ e β, come deve essere il prezzo del derivato in 0, con payoff $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \nexists$ OA?

Il valore iniziale del derivato deve essere uguale al valore iniziale del portafoglio replicante: $V_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \delta \cdot S + \beta \cdot 1$

• A cosa serve una strategia replicante?

È utile per coprirsi dal rischio e performare il prezzo del derivato

• esempio:

Se una banca mi promette che mi darà il valore di un certo indice, garantendomi un rendimento minimo, essa si assume il rischio di reintegrare l'€ che io avevo investito all'inizio, se l'indice scende di valore.

Per pagarmi il valore dell'indice basta che la banca effettui l'investimento nell'indice e per coprirsi dal rischio di reintegrare un rendimento minimo compera una put: se la garanzia di minimo diventa operativa la esercita e gira a me l'importo

Ma la put può ∄ sul mercato, non essendo una attività di base allora la banca potrebbe tentare di replicare la sua obbligazione tramite le attività di base. Potrebbe replicare la put vendendo una quota di indice e comprare attività prive di rischio

Esempi di replica dei derivati

1) replica long-forward: 1 u bene sottostante + vendita scoperto K zcb scad 1.

$$x = Su - K$$
$$y = Sd - K$$

$$\delta = \frac{Su - \cancel{K} - Sd + \cancel{K}}{S(u-d)} = \frac{\cancel{S(u-d)}}{\cancel{S(u-d)}} = 1$$

ciò conferma che basta 1 u bene sottostante

$$\beta = e^{-r}\left[\frac{(Sd-K)u-(Su-K)d}{u-d}\right] = e^{-r}\left[\frac{\cancel{Sdu} - Ku - \cancel{Sud} + Kd}{u-d}\right] =$$

$$= e^{-r}(K)\frac{(d-u)}{u-d} = e^{-r}(-K)\left(\frac{u-d}{u-d}\right) = -Ke^{-r}.$$

2) put - europea lag

$$x = \max\{K - Su, 0\}$$

$$y = \max\{K - Sd, 0\}$$

poiché $d<u$, allora $x \leq y$. perché tanto più grande è il valore del sottostante, tanto minore sarà il payoff della put.

$\hookrightarrow \delta \leq 0$ e $\beta \geq 0$

$\downarrow$ vendere allo scoperto il bene sottostante

$\hookrightarrow$ investire in titolo privi di rischio

3) Call europea

$$X = \max\{Su - K, 0\}$$

$$Y = \max\{Sd - K, 0\}$$

poiché $u > d \rightarrow X \geq Y$

$\hookrightarrow \delta \geq 0$ e $\beta ? 0$

$\downarrow$ comprare δ quote bene sottostante

$\downarrow$ non si sa

$\rightarrow$ L'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il prezzo in 0 del derivato deve coincidere con quello del portafoglio replicante:

$$V_0\binom{X}{Y} = \delta S + \beta 1 \overset{\text{sost } \delta, \beta}{=} \frac{X - Y}{\cancel{S}(u-d)}\cancel{S} + e^{-r}\frac{Yu - Xd}{u-d} \cdot 1 =$$

$$= \frac{X - Y + e^{-r}uY - e^{-r}dX}{u-d} = \frac{X(1 - e^{-r}d) - Y(1 - e^{-r}u)}{u-d} =$$

$$= \frac{Xe^{-r}(e^{r} - d)}{u-d} - \frac{Ye^{-r}(e^{r} - u)}{u-d}$$

$$= Xe^{-r}\underbrace{\left(\frac{e^{r} - d}{u-d}\right)}_{>0} + Ye^{-r}\underbrace{\frac{(-e^{r} + u)}{u-d}}_{>0}$$

$d \quad e^{r} \quad u$

Oss $\dfrac{e^{r} - d}{u-d} = q \qquad 1 - q = \dfrac{u - e^{r}}{u-d}$

Approfondimento su **MISURA DI PROBABILITÀ NEUTRALE AL RISCHIO**

In finanza la misura di probabilità neutrale al rischio è una misura di probabilità sotto la quale il prezzo corretto (cioè di non arbitraggio) di un'attività finanziaria è pari al suo valore atteso futuro scontato al tasso privo di rischio.

È nota anche come **MISURA A MARTINGALA EQUIVALENTE**

Il nome di misura di probabilità neutrale al rischio deriva dal fatto che sotto di essa, tutte le attività finanziarie dell'economia hanno il <u>medesimo tasso di rendimento atteso</u> r (detto PRIVO DI RISCHIO) a prescindere dalla loro rischiosità. Ciò accade in contrasto con la misura cosiddetta fisica, ossia la "vera" distribuzione di probabilità dei rendimenti, in base alla quale in genere titoli caratterizzati da una maggiore rischiosità hanno un rendimento in media più elevato (sono cioè caratterizzati da un premio per il rischio positivo)

le interpreto come 2 probabilità: / probab. dello stato up
q è indipendente da x e y \ probab dello stato down

$$V_0\binom{x}{y} = x e^{-r} q + y e^{-r}(1-q) \quad , q \in \,]0,1[$$

"il prezzo del derivato in zero si ottiene come media, cioè come speranza matematica del payoff, del derivato, attualizzato".

. q è la stessa per tutti i derivati e ovviamente anche per le attività di base

Chiamo Q la misura di probabilità che assegna $q>0$ allo stato up e $(1-q)>0$ allo stato down

$$Q <^{q}_{1-q}$$

Chiamo X la variabile aleatoria che assume determinazioni x e y in up e down rispettivamente

$$X <^{x}_{y}$$

(è payoff esigibile in 1!)

→ Il prezzo in 0 di tutti i titoli si ottiene come speranza matematica calcolata in base ad una distribuzione Q che assegna una probab positiva q allo "stato up" e '1-q' allo "stato down", del loro payoff finale attualizzato al tasso privo di rischio:

$$V\binom{x}{y} = E^{Q}\left[X e^{-r}\right] \quad \text{o} \quad E^{Q}\left[X/B(1)\right]$$

∃! Q distribuzione di probabilità neutrale al rischio, che è equivalente ($\sim$) a quella di partenza assegnata dagli operatori

"probabilità equivalenti": significa che c'è concordanza sugli eventi a probabilità nulla
ossia $p=Pr(E)$, se $p=0 \to q=0$ con $q=Pr(E)$ per tutti. (e viceversa)
→ tutti gli eventi con $p>0$ avremo anche $q>0$ (e viceversa)

Q è detta MISURA DI PROB. NEUTRALE AL RISCHIO perché in base a qst probabilità, quello che io pago per avere il derivato coincide con la speranza matematica del payoff del derivato, attualizzato. (non è soggettiva)

$\hookrightarrow$ non importa se gli agenti sono avversi o neutrali al rischio

meglio $\theta(x)$ a x

Nei modelli a tempo discreto c'è un'equivalenza:

AOA $\Leftrightarrow$ $\exists$ misure neutrali al rischio

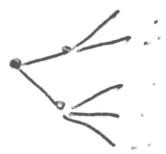
L'esistenza di (almeno) una distrib. neutrale risk $\rightarrow$ AOA

Nei modelli in generale l'unicità dei prezzi è collegata alla completezza: se i mercati non sono completi ci sono ∞ misure neutrali al rischio

- analizzo AOA $\Leftrightarrow$ $\exists$ misure neutrali al rischio, nel discreto

(è equivalente a dire)

(+)



- rappresento gli stati mondo (discreti) $\forall$ epoca
- in t_0 è tutto noto

$t_0\ t_1\ t_2 \dots$

richiamo OA:
$$\begin{cases} (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid Pr[(x_0, \dots, x_n) \geq 0] = 1 \\ \exists i \in \{0, 1, \dots, n\} \mid Pr(x_i > 0) > 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $x_0 = \underbrace{-c_0}_{\text{costo x ottenere tutti flussi futuri}}$

- esistono OA II° tipo? ($\doteq c_0 < 0$?)

$$c_0 \overset{\text{def } E(\cdot)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\, e^{-r_i i}\, \underbrace{Q(w_{ij})}_{\text{perché se si verifica lo stato del mondo } w_{ij} \rightarrow \text{ all'epoca } i \text{ accade } j} \geq 0 \rightarrow \nexists \text{ OA II° tipo}$$

i: tempo; j: stati mondo; x_{ij}: flusso t

- esistono OA I° tipo? ($\doteq$ $\exists$ in un'epoca futura e stato mondo in cui flusso > 0)

$$c_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\, e^{-r_i i}\, Q(w_{ij}) > 0 \rightarrow \text{non è } c_0 = 0 \text{ se fra flussi futuri ce ne almeno uno } > 0$$

con
- tutti ≥ 0
- almeno 1 > 0

Se c'è una misura di prob. | il prezzo in zero si ottiene come E(flussi futuri attualizzati) allora non ci sono OA (e viceversa)

→ Se ci sono misure neutrali al rischio, ma tante

$E^Q[Xe^{-r}]$ al variare di Q (a noi non conta xK conta q)

- per derivati replicabili: essi possono avere 1 solo valore dato dal portafoglio replicante → la speranza matematica non conta!

- per derivati non replicabili: al variare di Q → conta la speranza matematica: ottengo un intervallo (caso continuo) nel quale cade il prezzo del derivato (le calcolo tutte e scelgo min e max)

(L'unicità della distribuzione neutrale al rischio scende dalla completezza del mercato)

Vedo es. di quel detto

MODELLO TRINOMIALE

- due date: 0,1
- stessi titoli sul mercato:
  - attività rischiosa
  - m m a
- novità $S(1)$ — Su, Sm, Sd "STATO INTERMEDIO", $0<d<m<u$ (x ip)

tutti gli operatori del mercato concordano nel dare probabilità >0 ai 3 stati del mondo

AOA $\rightarrow d < e^r < u$ con stessa dim altro caso

$\rightarrow \exists$ misura q | prezzo in 0 di qls payoff in 1 si ottiene come $E(\cdot)$

Ma, questo mercato è incompleto! Perchè, convenendo di rappresentare i payoff dei derivati in 1, tramite una terna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e dunque:

- payoff attività rischiosa $\begin{pmatrix} Su \\ Sm \\ Sd \end{pmatrix}$

- payoff attività non rischiosa $\begin{pmatrix} e^r \\ e^r \\ e^r \end{pmatrix}$

- Esistono 2 numeri reali $\delta, \beta \in \mathbb{R} \mid \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sm \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \\ e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$?

- qui la risposta dipende da (x, y, z), non è detto ci sia una sola soluzione

es. se quello fosse payoff di long-forward
$x = Su - K$
$y = Sm - K$
$z = Sd - K$

$\Rightarrow \delta = 1, \ \beta = -Ke^{r}$ $\rightarrow$ 1! soluzione (già fatto)

- R: $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \exists \ \delta, \beta \in \mathbb{R} \mid \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sm \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \\ e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$? NO, perchè il numero minimo di generatori di $\mathbb{R}^3$ è 3 e non 2.

$\rightarrow$ non potendo replicare qlu payoff il mercato non è completo

10/4/13

Vincoli probabilità: $\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \begin{cases} q_1 > 0 \\ q_2 > 0 \\ q_3 > 0 \end{cases} \end{cases}$ prob — stato up, stato intermedio, stato down

stato up Su
stato medio Sm
stato down Sd

$0 < d < m < u$

AOA $\rightarrow d < e^r < u$

$Q = (q_1, q_2, q_3)$

OSS $q_3 = 1 - (q_1 + q_2) \rightarrow q_1 + q_2 < 1$ basta fix 2 numeri >0 e $\Sigma < 1$

TH: sto cercando una probabilità equivalente a quella di partenza

Per ora ho solo una probabilità equivalente

affinché sia una distribuzione neutrale al rischio:

sia X payoff aleatorio esigibile in 1

$$V_0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E^Q\left[X e^{-r}\right] \quad \forall X$$

speranza matematica fatta con distrib Q

- non dice molto se X è un payoff non ancora presente sul mercato, perché prezzo è ignoto
- se conoscessimo prezzo esso sarebbe un'equazione in q_1 e q_2.
- esso vale anche per le 2 quot di base.

- Applico la formula ad un'attività rischiosa

$x = Su$

$y = Sm$

$z = Sd$

TH: trovare espressione per q_2 e q_3.

$$S = E^Q\left[S(1) e^{-r}\right] = Su e^{-r} q_1 + Sm e^{-r} q_2 + Sd e^{-r} q_3 \qquad /:S$$

noto, prezzo $= S(1)$ (S)

per una q_i con caratt di prima

$$1 = u e^{-r} q_1 + m e^{-r} q_2 + d e^{-r} q_3 \qquad / e^{r}$$

$$e^{r} = u q_1 + m q_2 + d q_3$$

$$= u q_1 + m q_2 + d(1 - q_1 - q_2)$$

$$= q_1(u - d) + q_2(m - d) + d$$

$$e^{r} - d = q_1(u - d) + q_2(m - d) \qquad \text{eq. lineare in } q_1 \text{ e } q_2$$

ci sono ∞ (q_1, q_2) che soddisfano l'equazione

↳ $\exists$ ∞ misure neutrali al rischio

· esplicito q_2

$$\cdot\ q_2 = \underbrace{\frac{e^r - d}{m-d}}_{q} \ \underset{-\,\times}{-}\ q_1 \underbrace{\frac{(u-d)}{m-d}}_{m} \qquad = f(q_1)$$

$$↳\ q_3 = 1 - q_1 - q_2 = 1 - q_1 - \left(\frac{e^r - d}{m-d} - q_1\frac{(u-d)}{m-d}\right)$$

$$= 1 - q_1 - \frac{e^r - d}{m-d} + q_1\frac{(u-d)}{m-d}$$

$$= 1 - q_1 - \left[\frac{e^r - d - uq_1 + dq_1}{m-d}\right]$$

$$q_1\frac{(u - \cancel{d} - (m - \cancel{d}))}{m-d}$$

$$= 1 - q_1 - \frac{e^r - d}{m-d} + \frac{uq_1 - dq_1}{m-d}$$

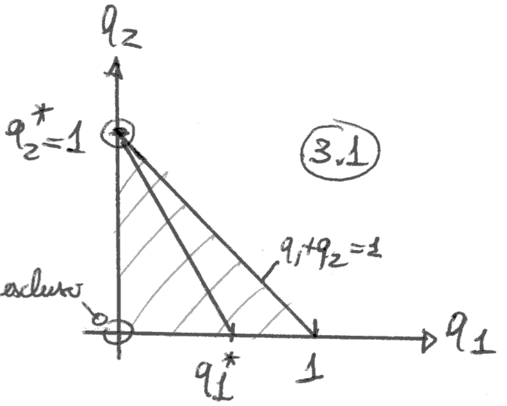
$$= 1 - \frac{e^r - d}{m-d} + q_1\left(\frac{u-m}{m-d}\right)$$

$$= \frac{m - \cancel{d} - e^r + \cancel{d}}{m-d} + q_1\frac{u-m}{m-d}$$

$$= q_1\frac{u-m}{m-d} + \frac{m-e^r}{m-d}$$

$$\cdot\ q_3 = q_1 \underbrace{\frac{u-m}{m-d}}_{m} \ \underset{\times}{} \ \underset{+}{+} \ \underbrace{\frac{m-e^r}{m-d}}_{q} \qquad = f(q_1)$$

$d < e^r < u$



1) · fix q_1

2) · $q_2 = 0 \rightarrow q_1^* = \dfrac{e^r - d}{u-d} < 1 \quad e > 0$

3) · $q_1 = 0 \rightarrow q_2^* = \dfrac{e^r - d}{m-d}\ ?\ 1 \quad e > 0$

↳ distinguo 3 casi

$Q = (q_1, q_2, q_3)$

OSS $q_3 = 1 - (q_1 + q_2) \quad \forall\ q_1 + q_2 < 1$ basta fix 2 numeri >0 e $\Sigma < 1$

TH: sto cercando una probabilità equivalente a quella di partenza

Per ora ho solo una probabilità equivalente
affinché sia una distribuzione neutrale al rischio:
sia X payoff aleatorio esigibile in 1

$$V_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E^Q \left[X e^{-r} \right] \quad \forall X$$

speranza matematica fatta con distrib Q

- non dice molto se X è un payoff non ancora presente sul mercato, perché prezzo è ignoto
- se conoscessimo prezzo essa sarebbe un'equazione in q_1 e q_2.
- essa vale anche per le 2 quot di leve.

- Applico la formula ad un'attività rischiosa

$x = Su$
$y = Sm$
$z = Sd$

TH: trovare espressione per q_2 e q_3.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{noto,} \\ \text{prezzo}}}{S} = E^Q \left[\underset{\substack{S \\ \text{''} \\ =S(1)}}{S(1)} e^{-r} \right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fix una} \\ \text{QN con} \\ \text{caratt di} \\ \text{prima}}}{=} Su e^{-r} q_1 + Sm e^{-r} q_2 + Sd e^{-r} q_3 \qquad /: S$$

$$1 = u e^{-r} q_1 + m e^{-r} q_2 + d e^{-r} q_3 \qquad / e^{r}$$

$$e^{r} = u q_1 + m q_2 + d q_3$$

$$= u q_1 + m q_2 + d(1 - q_1 - q_2)$$

$$= q_1 (u - d) + q_2 (m - d) + d$$

$$e^{r} - d = q_1 (u - d) + q_2 (m - d) \qquad \text{eq. lineare in } q_1 \text{ e } q_2$$

3.1) se $m = e^r \rightarrow q_2^* = 1$

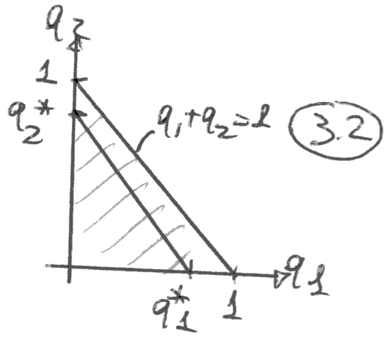
$\rightarrow$ la condizione $q_1 + q_2 < 1$ mi fa scartare altri punti

q certa $\quad Q = \{(q_1, f(q_1)), g(q_1) \mid 0 < q_1 < q_1^*\}$

essendoci ∞ valori nel segmento, ci sono ∞ misure avverse al rischio

$d < e^r < m < u$

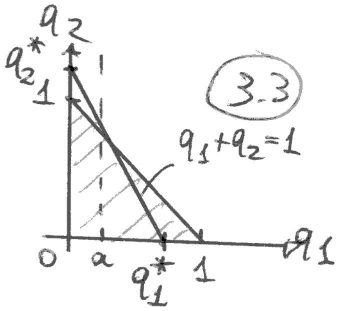
3.2) se $m > e^r \rightarrow q_2^* = \dfrac{e^r - d}{m - d} < 1$



$\rightarrow$ la condizione $q_1 + q_2 < 1$ non mi fa scartare altri punti. $\rightarrow$ l'insieme delle misure neutrali al rischio è lo stesso di prima.

$$Q = \{(q_1, f(q_1), g(q_1)) \mid 0 < q_1 < q_1^*\}$$

3.3) se $m < e^r \rightarrow q_2^* = \dfrac{e^r - d}{m - d} > 1$



$\rightarrow$ la condizione $q_1 + q_2 < 1$ mi fa scartare dei punti: $q_1 / q_1 < a$, con a = pt ascissa dell' $\cap$

$0 < a < q_1^*$

$a = \dfrac{e^{r} - m}{u - m}$ (soluzione sistema)

$$Q = \{(q_1, f(q_1), g(q_1)) : a < q_1 < q_1^*\}$$

i possibili valori di q_1 sono ∞ così come le misure neutrali al rischio

Sintesi

- $m \geq e^r \rightarrow Q = \{(q_1, f(q_1), g(q_1)) \mid 0 < q_1 < q_1^*\}$
- $m < e^r \rightarrow Q = \{(q_1, f(q_1), g(q_1)) \mid a < q_1 < q_1^*\}$

accorpandole

$$Q = \{(q_1, f(q_1), g(q_1)) \mid \alpha < q_1 < \beta\} \quad \text{con } \alpha = \begin{cases} 0 & m \geq e^r \\ \dfrac{e^r - m}{u - m} & m < e^r \end{cases}$$

$$\beta = \frac{e^r - d}{u - d}$$

↳ ho trovato un'infinità di misure neutrali al rischio (soluzioni alla precedente pagina)

Date queste misure vedo cosa succede alla speranza matematica dei payoff attualizzati:

. distinguo fra derivati replicabili e non

• long forward

$$\text{payoff}: X = S(1) - K$$

$$E^Q[(S(1)-K)e^{-r}] = E^Q[\underbrace{S(1)e^{-r}}_{S}] - E^Q[Ke^{-r}] = S - Ke^{-r}$$

$\cdot \forall Q \in \mathcal{Q}_r$

prezzo! $\forall Q$

• opzione call long

$$\text{payoff}: \max\{S(1)-K, 0\}$$

Oss: - replicabile con 2 attività di base

casi irrealistici
- . se $K \geq Su$ ($\to > Sm$ e Sd) il payoff finale è 0 (no esercito)
- . se $K \leq Sd$ ($\to K \leq Sm$ e Su) va sempre esercitato e quindi è come avere un long-forward $\to$ payoff noto $\to S - Ke^{-r}$

di solito $Sd < K < Su$:

TH: prezzo call

$$C_0 = E^Q[\max\{S(1)-K, 0\}e^{-r}]$$

$$= \max\{Su-K, 0\}e^{-r}q_1 + \max\{Sm-K,0\}e^{-r}\underset{=f(q_1)}{q_2} + \max\{Sd-K,0\}e^{-r}\underset{=f(q_1)}{q_3}$$

con $\alpha < q_1 < \beta$

$C_0 = \text{"}A\text{"} q_1 + \text{"}B\text{"}$ raccogliendo termini

Oss: parte positiva di un numero reale è $(x)^+ = \max\{x, 0\}$

$$A = (Su-K)^+e^{-r} - (Sm-K)^+e^{-r}\frac{u-d}{m-d} + (Sd-K)^+e^{-r}\frac{u-m}{m-d}$$

$$B = (Sm-K)^+e^{-r}\frac{e^r-d}{m-d} + (Sd-K)^+e^{-r}\frac{m-e^r}{m-d}$$

- se $A \neq 0$ il valore di c_0 dipende dalla misura scelta, q_1. c_0 cambia con q_1

- se $A = 0$ il prezzo della call è sempre B (cost)

$\boxed{\text{XCASA}}$

se $K \geq S_u$

se $S_u < K < S_d$, allora ho un intervallo in cui cade prezzo call

$$c_0: \begin{cases} \text{se } A > 0, \text{ allora } \quad \alpha A + B < c_0 < \beta A + B \\ \text{se } A < 0, \text{ allora } \quad \beta A + B < c_0 < \alpha A + B \end{cases}$$ da controllarle

Conclusione:

anche con un modello, qlc in più quindi rispetto alle ipotesi di lavoro, l'obiettivo di avere un prezzo unico non è raggiunto per i titoli non ridondanti → Così per titoli ridondanti ho un intervallo di valori per prezzo.

Oss Anche prima con NOA avevo [ ] di valori, ma l'intervallo ora trovato è molto più ristretto di quello di partenza.

Esempi (idea numerica dell'[ ])

$r = 5\%$

$e^r \cong 1{,}05127$

$S = 100$

$u = 1.2 \qquad (d < e^r < u)$

$m = 1.05$

$d = 0.9$

sono parametri del mercato, indipendenti dai derivati.

- Call - europea

prezzo eserc. call $K = 100$ in 0 (→ at the money)

↳ $4{,}87706 < c_0 < 9{,}592893$ limitazioni con modello

$4{,}87706 < c_0 < 100$ senza modello

per esercizio $K=110$ (A per. esercizio il valore call f)

↳ $0{,}0806 < C_0 < 4{,}79645$ limitato al modello

$0 < C_0 < 100$ senza modello

- Se $u = 1{,}2$
$m = 1{,}19$
$d = 1{,}05$ $(d < e^{r} < u)$ //comparare con ≠ alternative

↳ $0 < q_1 < 0{,}008466$

$0{,}022678 < q_2 < 0{,}03175$

$0{,}990928 < q_3 < 0{,}9909$

- Se $K = 100$, siccome $100 - 100e^{-r}$ → valore unico, perché eserciterò sempre la call in 1 perché $S(1) = 120$ o 119 o 105 che è sempre $> K$

- Se $K = 110$ → $0{,}07773 < C_0 < 0{,}08061$
il fatto che sia prossimo a 0 il valore della call proviene dall'AA perde q_3 perché fa sì che sia nullo il payoff finale della call

Torno al caso del modello binomiale:

"La replicabilità del titolo è l'altra faccia della medaglia della neutralizzazione del rischio"

finora mi sono posto il problema della replicabilità del titolo, però posso cambiare pdv (vd BeS):

idea: <u>se metto vicino al derivato una certa quantità di sottostante α riesco ad diminuire il rischio</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}_{\text{payoff derivato}} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix}}_{\text{quant sottost}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}}_{\text{multiplo valore BA}}$$

portafoglio neutralizzato rispetto al rischio

→ + = valore in 1 portafoglio

"∃ un α / portafoglio al variare dello stato del mondo, ottiene lo stesso payoff?" si e lo calcolo: $\underbrace{x+\alpha S u}_{\delta} = \underbrace{y+\alpha S d}_{\delta}$, cerco α che fa valere l'uguaglianza.

$$x+\alpha Su-\alpha Sd=y \quad (\text{vd come sistema}) \to x-y+\alpha(Su-Sd)=0$$

$$\alpha(Su-Sd)=y-x$$

$$\alpha=\frac{y-x}{Su-Sd}$$

$\to$ per fare hedging affianco al derivato qst qnt di sottostante.

$$AOA \to \left(V_0\binom{x}{y}+\alpha S\right)=\delta e^{-r}$$

- impone che il portafoglio renda come una attività priva di rischio
- il valore del portafoglio + valore del sottostante deve essere pari al valore δ in 1 diviso e^{r} unità di B.A.

$\downarrow$

[X CASA]

sostituendo α e riformulando arrivo ad esprimere $V_0\binom{x}{y}$ come $E^{Q}[\ldots]$ ottenendo gli stessi risultati già visti

es. delle 2 facce della stessa medaglia

titolo privo di rischio replicato tramite derivato e sottostante

$$\binom{x}{y}=-\alpha\binom{Su}{Sd}+\beta\binom{e^{r}}{e^{r}}$$

1 passo algebrico

problema replicabilità titolo

$$\binom{x}{y}=-\alpha\binom{Su}{Sd}+\delta e^{-r}\binom{e^{r}}{e^{r}}$$

problema neutralizzazione del rischio

con $\delta=-\alpha \to \underline{\alpha=-\delta}$

$$\delta e^{-r}=\beta \to \underline{\delta=\beta e^{r}}$$

formalmente scono la stessa cosa.

$\to$ La qnt di sottostante α che devo affiancare al derivato per eliminare il rischio è esattamente l'opposto della qnt che occorre per replicare il derivato.

Il valore finale del mio portafoglio neutralizzato è pari alla qnt di B.A. per val. fin. che è e^r.

15/4/13

MODELLO BINOMIALE MULTIPERIODALE (Cox, Rubinstein Ross, '79)

Generalizzando il modello precedente, suppongo che:

- il mercato sia aperto in tempo discreto, alle date equintervallate 0, 1, 2, ...
- sul mercato sono trattate due attività di base: un'attività rischiosa (che non stacca dividendi) con prezzo in 0 pari a $S(0) = S > 0$ e un'attività non rischiosa (money market account) → intensità deterministica "r"
- subordinatamente all'informazione disponibile al tempo t $(\in \mathbb{N})$, il prezzo in $t+1$ dell'attività rischiosa, $S(t+1)$, possa assumere soltanto due possibili determinazioni, pari a $S(t)u$ e $S(t)d$, con $0 < d < e^r < u$ (u e d costanti nel tempo)
- tutti gli operatori concordano sulle possibili determinazioni di $S(t)$ nell'istante successivo e attribuiscono loro probabilità positiva

Oss - digressione

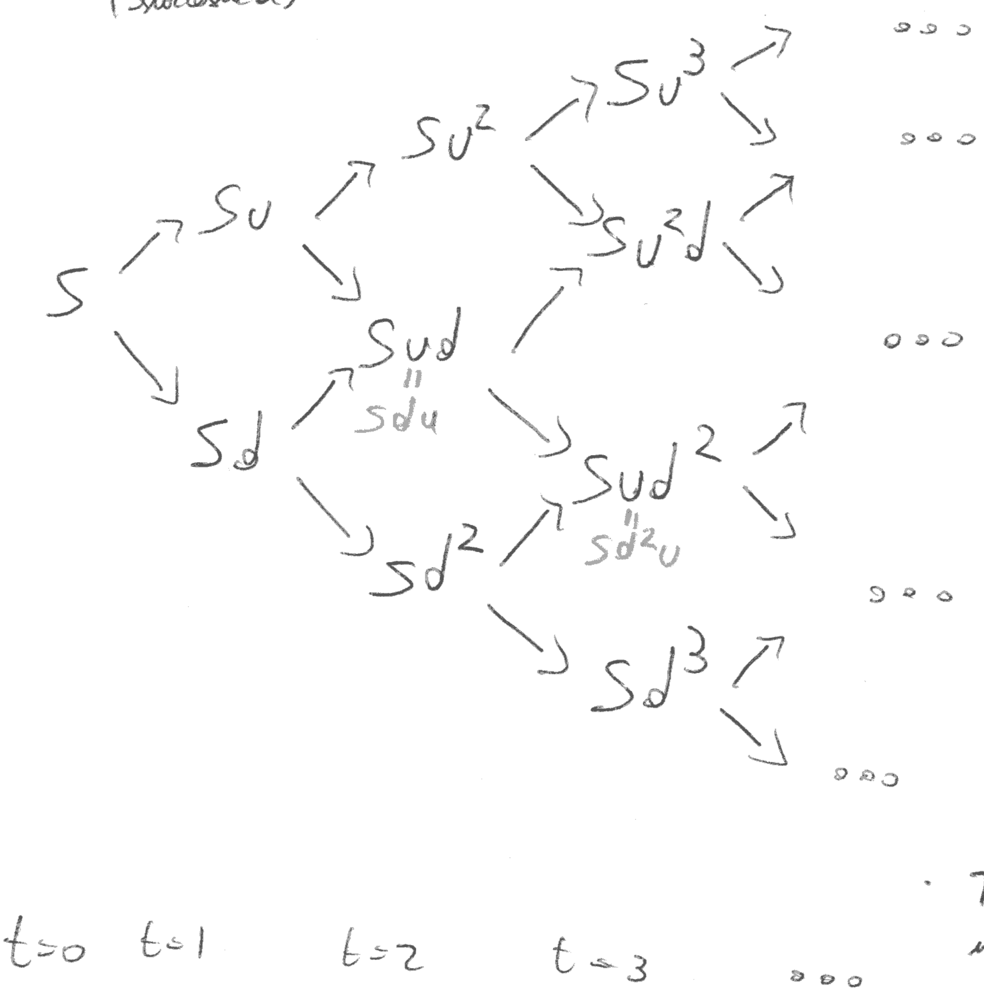
Come generalizzare il discorso (esula dal corso)?

- u ed d → influenzate dal tempo → $u(t)$ e $d(t)$ → ϕ col processo markoviano
  o → influenzate dal tempo e dallo stato del mondo t che include tutta l'informazione disponibile → $u(t, w_t), d(t, w_t)$
- probabilità q → q fissa nel tempo x tutte derivati
  → $q(t)$ cambia nel tempo, stessa per tutti derivati
  o → $q(t; w_t)$ le q dipendono dal tempo e dallo stato del mondo con rif a $[t - t+1]$

→ L'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività rischiosa può essere rappresentata tramite un <u>albero binomiale</u> con nodi "<u>ricombinantisi</u>"

→ Tra il tempo 0 e il tempo T ($\in \mathbb{N}^+$) il prezzo $S(t)$ può percorrere 2^T possibili traiettorie; tuttavia il prezzo finale $S(T)$ può assumere
↳ se non path-dependent
soltanto $T+1$ determinazioni diverse, date da $S_T^{(i)} = S u^{T-i} d^i$, $i=0,1,\dots,T$

Descrivo l'evoluzione (stocastica) di $S(t)$ con un albero binomiale <u>ricombinante</u>
↳ i nodi si ricombinano



· T+1 possibili traiettorie in T

Oss. <u>Se u e d non fossero costanti perderei la ricombinazione</u>, rimarrebbe <u>un albero binomiale e basta</u>

NB Se il derivato è path-dependent, conta la storia per conoscere payoff devo usare binomiale non ricombinante

Oss. L'aumento di informazione fa diminuire i costi e quindi la incertezza.

es. quanti sono i valori di $S(3)$ nell'es? 4 se sono in $t=0$

1 se sono in $t=3$.

scopo: lo scopo è sempre quello di valutare un derivato, essi sono di 4 tipi:

	PATH DEPENDENT	NON PATH DEPENDENT
GENERA FLUSSI		
NON GENERA FLUSSI		X

es.

es Considero derivato con 1 unico payoff in T che dipende solo da $S(T)$

$$\underline{X}(T) = \begin{pmatrix} X^0(T) \\ X^1(T) \\ \vdots \\ X^T(T) \end{pmatrix} \text{ è payoff derivato} \qquad X^0(T) \text{ n° di down} \quad T \text{ anno di riferimento}$$

$X^j(T) \Rightarrow$ payoff qnd $S(T) = S u^{T-j} d^j$

$$S(T) = \begin{pmatrix} S u^T \\ S u^{T-1} d \\ \vdots \\ S d^T \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^{rT} \\ e^{rT} \\ \vdots \\ e^{rT} \end{pmatrix}$$

ora mi chiedo se payoff del derivato è esprimibile con qnt una a e attività risk-free:

$$\forall\, \underline{x}(T)\ (\in \mathbb{R}^{T+1})\ \ \exists\ \ \delta, \beta \in \mathbb{R} \,|\, \delta \begin{pmatrix} S u^T \\ \vdots \\ S d^T \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^{rT} \\ \vdots \\ e^{rT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0(T) \\ \vdots \\ x^T(T) \end{pmatrix} ?$$

se $T > 1 \Rightarrow \forall$ non vale.

Per rispondere abbandono la strategia statica per la "dinamica".

Possiamo allora riformulare il problema della replicabilità e quello della completezza del mercato, come nel modello monoperiodale, salvo che ora le strategie (o portafogli) replicanti non devono essere necessariamente statiche, ma possono essere modificate negli istanti di apertura del mercato

DEFINIZIONI

1. Strategia dinamica (inizia in 0 e termina in $T \in \mathbb{N}^+$):
la coppia di processi stocastici $(\delta(t), \beta(t))$, $t = 0,1,\dots,T-1$, dove $\delta(t)$ (rispettivamente $\beta(t)$) rappresenta la quantità di attività rischiosa (rispettivamente non rischiosa) presente in portafoglio, che viene decisa in t, in base allo stato del mondo in cui ci si trova, e mantenuta fissa fino all'epoca $t+1$;

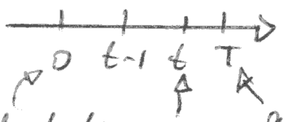
2. strategia dinamica autofinanziantesi: (che inizia in 0 e termina in $T \in \mathbb{N}^+$)
(*) negli (eventuali) istanti intermedi la ricalibratura del portafoglio deve essere a costo nullo, cioè $[\delta(t+1)-\delta(t)]\,S(t+1) + [\beta(t+1)-\beta(t)]\,e^{x(t+1)} = 0$
$t = 0,1,\dots,T-2$

⇒ procedendo a ritroso, si prova che nel modello binomiale multiperiodale ogni payoff finale esigibile in una fissata epoca T è replicabile in maniera univoca tramite una strategia dinamica autofinanziantesi;

⇒ il mercato costituito dalle due attività di base è completo

Vediamo nel dettaglio:
- $\delta(t)$ e $\beta(t)$ sono 2 numeri aleatori in t. Al variare di t formano un processo stocastico. Esse sono tenute ferme fino a $t+1$ (2 quantità) data di riapertura dei mercati. L'aleatorietà che riguarda il prezzo si trasferisce anche sulla quantità di attività.

(*) la strategia dinamica "autofinanziantesi": negli istanti intermedi $t = 1,2,\dots,T-1$ la ricalibratura del portafoglio è a costo nullo: vuol dire che devo comprare un po' di attività rischiosa e vendere un po' di B.A. (o viceversa)



istante di ricalibratura

vecchio portafoglio $\delta(t-1)$ $\beta(t-1)$ qui scelte in t-1
nuovo portafoglio $\delta(t)$ $\beta(t)$

qui voglio valore strategia = payoff derivato

$$\Rightarrow \underbrace{\delta(t-1)\,S(t)+\beta(t-1)\,e^{rt}}_{\text{valore t vecchio portaf}} = \underbrace{\delta(t)\cdot S(t)+\beta(t)\,e^{rt}}_{\text{valore in t nuovo portaf}}$$

$$\Rightarrow \big(\delta(t)-\delta(t-1)\big)S(t)+\big(\beta(t)-\beta(t-1)\big)e^{rt}=0$$

Sono 2 formule equivalenti in linea teorica, nella pratica non lo sono per via dei costi di transazione

* $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^{T+1}$ $\exists!$ strategia dinamica autofinanziantesi che lo replica.

scopo: prezzare derivati che non riuscivo a prezzare senza modello

AOA $\Rightarrow V_0(\underline{X}) = \delta(0)S+\beta(0)\cdot 1$ il valore in 0 del derivato deve ess = al valore iniziale della strategia

$\Rightarrow$ visto che una strategia dinamica autofinanziantesi replicante un payoff finale comporta esclusivamente un cash-flow iniziale, l'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il valore in 0 del payoff deve coincidere con il costo iniziale della strategia; con ovvio significato dei simboli, nel caso in cui il payoff dipende esclusivamente dal prezzo finale del sottostante $S(T)$ e non anche dai suoi valori precedenti, si ha

$$V_0\begin{pmatrix} X_T^{(0)} \\ X_T^{(1)} \\ \vdots \\ X_T^{(T)} \end{pmatrix} = \delta(0)S+\beta(0) \qquad \begin{matrix} X^0(T) \\ X^1(T) \\ \vdots \\ X^T(T) \end{matrix}$$

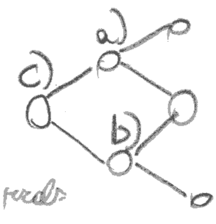
(anticipato di una situazione generale → caso multiperiodale)

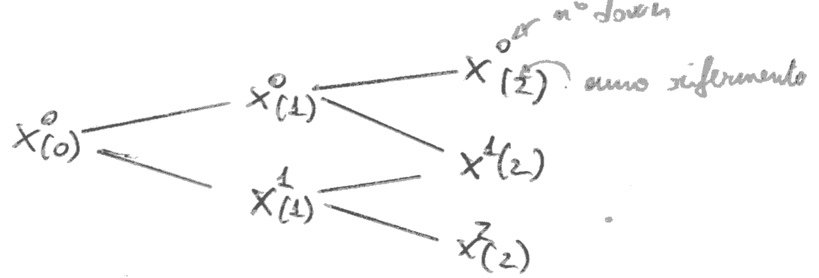
Costruisco la strategia (a ritroso, considerando 3 istanti)

- ho 1 solo istante intermedio

(MONOPERIODO)

voglio il v.a. del derivato & ottenuto i valori di ott. ist e mon..K con sola prob





"x 2 0"

a) $S(1) = Su$ $\quad t=0 \leftarrow t=1 \leftarrow t=2$

cerco $\delta^0(1), B^0(1)$ | riproducono payoff

$$\delta^0_{(1)} \begin{pmatrix} Su^2 \\ Sud \end{pmatrix} + B^0(1) \begin{pmatrix} e^{2r} \\ e^{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^0_{(2)} \\ X^1_{(2)} \end{pmatrix}$$

invece che e^r

- le quantità che mi servono in 1 sono:

$$\delta^0_{(1)} = \frac{X^0_{(2)} - X^1_{(2)}}{Su(u-d)} \checkmark \qquad B^0_{(1)} = e^{-2r} \frac{u X^1_{(2)} - d X^0_{(2)}}{u-d} \checkmark$$

- valore portafoglio in 1

$$X^0_{(1)} = \delta^0_{(1)} \cdot Su + B^0(1) e^r = \_ = (X^0_{(2)} e^{-r}) q + (X^1_{(2)} e^{-r})(1-q)$$

con $q = \frac{e^r - d}{u-d}$

b) $S(1) = Sd$

cerco $\delta^1(1)$ e $B^1(1)$

$$\delta^1(1) \cdot \begin{pmatrix} Sud \\ Sd^2 \end{pmatrix} + B^1(1) \begin{pmatrix} e^{2r} \\ e^{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^1_{(2)} \\ X^2_{(2)} \end{pmatrix}$$

- le quantità che mi servono in 1 sono

$$\delta^1(1) = \frac{X^1_{(2)} - X^2_{(2)}}{Sd(u-d)} \qquad B^1(1) = \frac{e^{-2r}\, u X^2_{(2)} - d X^1_{(2)}}{u-d}$$

- valore portafoglio in 1

$$X^1_{(1)} = \delta^1(1) Sd + B^1(1) e^r = \_ = (X^1_{(2)} e^{-r}) q + (X^2_{(2)} e^{-r})(1-q) \quad \text{con } q = \frac{e^{-r} - d}{u-d}$$

16/4/13

c) $S(0) = S$ (ultimo)

- cerco di replicare in 0 i 2 valori possibili in 1 ($x^0_{(1)}$, $x^1_{(1)}$)
- penso a $x_{(1)}$ come a un numero aleatorio e non come a un vettore:

$$X(1) = \delta(1)S(1) + \beta(1)e^{r}$$

uso la condizione di autofinanziamento per la strategia

$$\delta(0)S(1) + \beta(0)e^{r} = X(1) \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(0)Su + \beta(0)e^{r} = x^0(1) \\ \delta(0)Sd + \beta(0)e^{r} = x^1(1) \end{cases}$$

- le quantità che mi servono in 0 sono:

$$\delta(0) = \frac{x^0_{(1)} - x^1_{(1)}}{S(u-d)} \qquad \beta(0) = \frac{u\, x^1_{(1)} - d\, x^0_{(1)}\, e^{-r}}{u-d}$$

- valore derivato in 0 è = il costo delle strategie
- in 1 ricalcolo il costo per la strategia e in 2 ho il payoff del derivato

- valore portafoglio in 0

$$\text{AoA} \Rightarrow X(0) = \delta(0)S + \beta(0) = (x^0_{(1)} e^{-r})q + (x^1_{(1)} e^{-r})(1-q), \quad q = \frac{e^{r} - d}{u-d}$$

$E(\cdot) =$ $(x_1 \cdot \Pi)q_1 + (x_2 \Pi)q_2$

$\hookrightarrow X(0)$ è la speranza matematica attualizzata al tasso risk-free, con probabilità della misura neutrale al rischio, del valore del derivato all'epoca 1

Sostituisco $x^0_{(1)}$ e $x^1_{(1)}$:

$$x(0) = \left[(x^0_{(2)} e^{-r})q + (x^1_{(2)} e^{-r})(1-q)\right] e^{-r} q + \left[x^1_{(2)} e^{-r} q + x^2_{(2)} e^{-r}(1-q)\right] e^{-r}(1-q)$$

$$= (x^0_{(2)} e^{-2r})q^2 + (x^1_{(2)} e^{-2r})2q(1-q) + (x^2_{(2)} e^{-2r})(1-q)^2$$

Conclusione:

Qualunque sia la terna $\begin{pmatrix} x^0(2) \\ x^1(2) \\ x^2(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\exists!$ distribuzione neutrale al rischio

Q : prima x_0 $X(0) = E^Q\left[X(2)e^{-2r}\right]$ $\qquad X(2) =$ payoff finale; è v.a.

Oss Q è una distribuzione che assegna le seguenti probabilità:

q^2 all'evento $\{S(2) = Su^2\}$, $q^2 = \binom{2}{0} q^{2-0}(1-q)^0$

$2q(1-q)$ all'evento $\{S(2) = Sud\}$, $2q(1-q) = \binom{2}{1} q^{2-1}(1-q)^1$

$(1-q)^2$ all'evento $\{S(2) = Sd^2\}$, $(1-q)^2 = \binom{2}{2} q^0 (1-q)^2$

↳ Q è una distribuzione binomiale con parametri '2' e '1-q' che in generale è: $\binom{2}{j}(1-q)^j q^{2-j}$, $j = 0,1,2,-$

- ESTENDO I DATI AL CASO MULTIPERIODALE

- dato un payoff aleatorio $X(T)$ esigibile in T non path-dependent $\exists!$ Q distribuzione neutrale al rischio, di forma binomiale, di parametri T e $(1-q)$ | il valore in $t=0$ di $X(t)$ è: $X(0) = [X(T)e^{-rT}]$

In particolare, se indico con $\underline{X}(T) = \begin{pmatrix} x^0(T) \\ x^1(T) \\ \vdots \\ x^T(T) \end{pmatrix}$ il vettore delle possibili determinazioni di $X(T)$ posso tradurle in:

$$X(0) = \sum_{j=0}^{T} (x^j(T) e^{-rT}) \underbrace{\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}}_{\text{prob. trovarsi in quella situazione}} \quad , \quad q = \frac{e^r - d}{u - d}$$

- essa la ottengo sostituendo $\delta(0)$ e $\beta(0)$ individuati mediante il procedimento a ritroso, sostituendolo in:

$V_0(x_T^{(0)}, -, x_T^{(T)}) = \delta(0)S + \beta(0)$.

⇒ Esiste un unica distribuzione neutrale al rischio Q | $V_0 \begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ \vdots \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix} = E^Q[Xe^{-rT}]$ $(*)_2$
dove X indica il payoff finale finale aleatorio

→ Si tratta di una distribuzione binomiale di parametri T e $1-q$ (la v.a. sottostante è il numero di "downs" che il prezzo dell'attività rischiosa subisce tra 0 e T).

in cui mi trovo, diciamo t → limitazione ai valori del payoff in T

→ $E_t(\ldots)$

$T<T'$ es. • $X(T')$ esigibile in T', payoff non path-dependent

AOA → ∃! misura di probabilità Q (neutrale al rischio):

→ non distribuzione perché qui mi riferisco a tutto il processo, non al v.a. aleatorio

$$\forall t,T \in IN \mid t<T \leq T' \Rightarrow E_t^Q\left[X(T)e^{-r(T-t)}\right]$$

→ uso speranza matematica condizionata per riportare il discorso ad un t generico $<T$ procedendo a ritroso.

rielaborazione della formula:

$$X(t)=E_t^Q\left[X(T)e^{-r(T-t)}\right] \text{ diventa } \nearrow X(t)e^{-rt}=E_t^Q\left[X(T)e^{-rT}\right] \quad (1)$$

o

$$\searrow \frac{X(t)}{B(t)} = E_t^Q\left[\frac{X(T)}{B(T)}\right] \quad \text{col B.A.} \quad (2)$$

$$\forall t,T \in IN \mid t<T(\leq T')$$

idea → ? V DI PROBABILITÀ!?

VALORE DEL PROCESSO = SP. MAT. PROCESSO IN T

Chiamo $\frac{X(t)}{B(t)} = Y(t) \quad \forall t,T \mid t<T(\leq T')$ "processo" stocastico. Dunque il valore corrente del processo in t è pari alla speranza matematica condizionata sotto Q del valore dello stesso processo in un istante futuro:

$$Y(t)=E_t^Q\left[Y(T)\right]$$

def MARTINGALA

Un processo stocastico $\{Y(j) : j \in \tau\}$ si dice martingala se (TAU → insieme di date (discr. cont.))

$$\forall t,T \in \tau \rightarrow E_t\left[Y(T)\right]=Y(t).$$

(non serve Q, xké è + generale la formula)

• idea martingala:

è quello del gioco equo: suddivizzo tutto in T, senza l'aspetto temporale in t

$$E_t\left[Y(T)-Y(t)\right]=\underbrace{E_t\left[Y(T)\right]}_{\text{xK martingala}}-\underbrace{E_t\left[Y(t)\right]}_{\text{noto}} = Y(t)-Y(t)=0$$ essendo

il valore atteso nullo → gioco equo.

Il processo $Y(t)$: 2 pdv

• è il valore del derivato attualizzato in t (1)

• è il valore del derivato espresso in unità B.A. (2)

② ↳ per questo il B.A. è detto NUMERARIO

"numerario" = u d m del valore di un processo stocastico
(*)3

Ho quindi scoperto che ∃ una Q che rende martingala il processo espresso in B.A. → Q viene chiamata misura martingala equivalente

- equivalente: attribuisce probabilità > 0 a tutti i nodi dell'albero; è equivalente alla misura degli operatori.
- martingala: perché rende martingala tutti i processi dei prezzi scontati dei derivati (con certe caratt.), espressi in unità di B.A. (vale per X, S, ..)

[Come nel caso monoperiodale, se ∃ una siffatta misura, allora ∄ OA:]
(*)2 infatti se io considero un qls payoff finale che è ≥ 0 in tutti gli stati del mondo e > 0 almeno in uno di essi, poiché il pr. iniziale deve essere la $E(\cdot)$ sotto Q questo prezzo deve essere ≥ 0 → no poss OA I° tipo. Se invece il payoff finale è sempre e solo ≥ 0 vale lo stesso discorso e → no poss arbitraggio II° tipo.

NUMERARI
Oss (*)3 Posso assumere come numerario un processo stocastico (prezzo reale) purché esso sia > 0 ∀ stato del mondo.

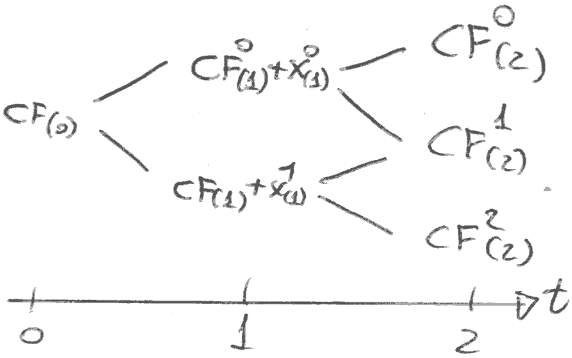
Ad ogni numerario (B.A.) è associata una misura di probabilità equivalente che rende martingala i prezzi dei processi espressi in unità di quel numerario

Come valuto gli altri tipi di derivati?

• Caso di un derivato che genera cash-flow intermedi

Un derivato produce cash-flow $CF(1), CF(2), .., CF(T)$ in $1, 2, .., T$. Gli importi sono aleatori e dipendono solo dalle epoche sottostante (no path-depend)

$X(t)$, $t = 0, .., T-1$ valore derivato in t



- per replicare questo derivato uso strategie dinamiche, ma non necessariamente autofinanzianti perché devo replicare i CF
- devo replicare il valore del portafoglio + il cash flow del derivato o scompongo il derivato in tanti derivati

- nelle date di ricalibratura resterà qlc in tasca o si dovrà pagare qlc.
- se scompongo il derivato in più derivati:

cashflow

$$V_0 = \sum_{j=1}^{T} E^Q\Big[\underbrace{CF(j)}_{\text{payoff aleatorio epoca } j} e^{-rj}\Big] = E^Q\Big[\sum_{j=1}^{T} CF(j) e^{-rj}\Big]$$

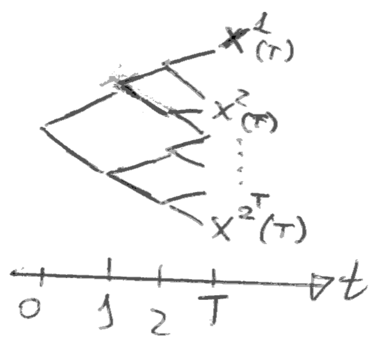
val. cash flow in $t=0$

AOA → linearità prezzi

non è condiz. x è tempo in 0.

- Caso di un derivato path-dependent con un unico cash-flow finale

(NB) Qui gli alberi non sono ricombinanti → considero tutte le traiettorie



1, 2, 4, 8, 16, ... (no ricomb.)

vs

1, 2, 3, 4, 5 (si ricomb.)

- sono 2^T i possibili valori del derivato
- ecc

(NB) Qui conta l'ordine dei 'movimenti' up e down perché il payoff cambia a seconda della strada!

Non raggruppo tutti gli ω che mi portano allo stesso valore (es 5d)

La probabilità neutrale al rischio di ciascuno dei valori finali è $q^j (1-q)^{T-j}$

con j = n° down (x noi)

17/4/13

Nonostante il modello binomiale sia il più semplice di tutti rappresentabile su un albero ricombinante, cmq i derivati non è detto che restino rappresentabili su un albero che si ricombina.

Esempio di un fondo pensione (path dependent e l'ordine fluttuante)

verso ogni anno P $\quad \forall k=0,1,\dots,T$

In T ho un montante che trasformo in rendita (= pensione)

TH: cerco di capire come è fatto il montante
rappresento il valore del proc. stocastico

Immagino che il premio P sia investito in un fondo di investimento. Si paga il valore delle quote del fondo per entrarvi. Essi non producono rendimenti perché incrementano le quote di fondo possedute

$S(j)$ valore della quota al tempo j

• montante in T: $$\underline{X}(T) = \underbrace{\left(\frac{P}{S(0)} + \frac{P}{S(1)} + \dots + \frac{P}{S(T-1)}\right)}_{\text{n° di quote di fondo comprate}} S(T)$$

$\frac{P\,€}{S(0)\,€/\text{quota}} \to \frac{\text{mol}}{\text{mole/Kg}}$

pr. unitario quote

$$= \sum_{j=0}^{T-1} \frac{P}{S(j)} S(T) = P\,S(T) \sum_{j=0}^{T-1} \frac{1}{S(j)}$$

payoff dipende da una media del valore dell'attività sottostante
$P \cdot S(T) \cdot T \sum_{j=1}^{T} \frac{1}{S(j)} / T \to$ derivato asiatico.

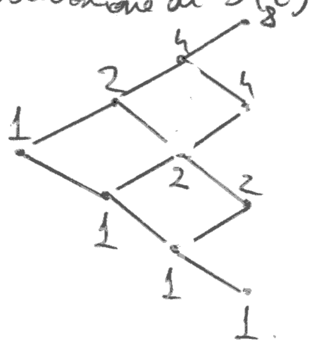
• rappresento il valore del processo stocastico

$$\underline{X}(t) = P \cdot S(t) \sum_{j=0}^{T-1} \frac{1}{S(j)}$$

valore del fondo via via accumulato, prima di T

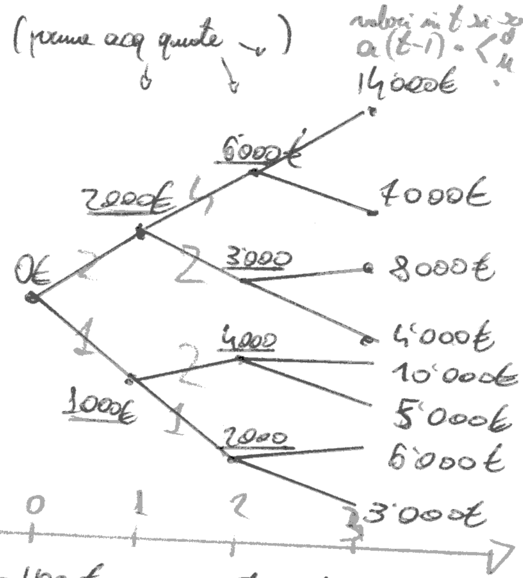
• $S(0) = 1$
$u = 2$
$d = 1$
$T = 3$

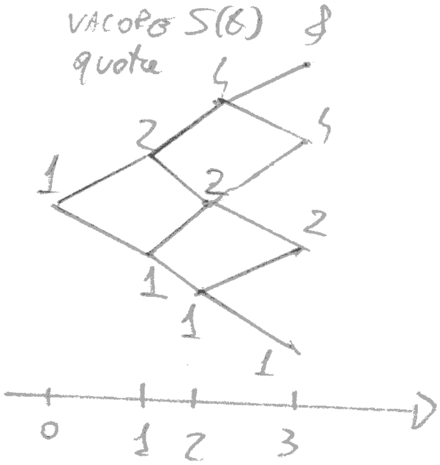
evoluzione di $S(t)$



sono i valori del fondo nei vari t

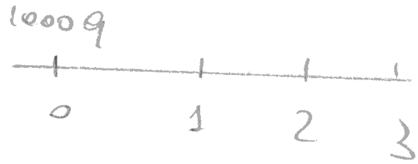
evoluzione di $X(t)$ (fondo pensione) $\quad X(T) = P \cdot S(T) \cdot \sum_{j=0}^{T} \frac{1}{S(j)}$





P=1000€, investimento ogni anno

mis: quote



$\cdot\ t=0 \quad 1000€ \rightarrow \frac{1000€}{1€/q} = 1000\,q$. (sul grafico sono 0^- prima acquisto delle quote)

$\cdot\ t=1 \quad 1000€$ (in più) $\rightarrow \frac{1000€}{2€/q} = 500q \Rightarrow 1500q$ TOT $\leftrightarrow 3000€$; sul grafico: $3000€ - 1000€ = 2000€$ (1^-)

$\rightarrow \frac{1000}{1€/q} = 1000q \Rightarrow 2000q$ TOT $\leftrightarrow 2000€$; sul grafico $2000€ - 1000€ = 1000€$ (1^-)

$t=2 \quad 1000€$ (in più) $\rightarrow \frac{1000€}{4€/u} = 250q \Rightarrow 1750q$ TOT $\leftrightarrow 7000€$; sul grafico $7000€ - 1000€ = 6000€$ (2^-)

$\rightarrow \frac{1000€}{2€/u} = 500q \Rightarrow 2000q$ TOT $\leftrightarrow 4000€$; sul grafico $4000€ - 1000€ = 3000€$ (2^-)

$\rightarrow \frac{1000€}{2€/u} = 500q \Rightarrow 1500q$ TOT $\leftrightarrow 3000€$; sul grafico $3000€ - 1000€ = 2000€$ (2^-)

$\rightarrow \frac{1000€}{1€/u} = 1000q \Rightarrow 2000q$ TOT $\leftrightarrow 2000€$; sul grafico $2000€ - 1000€ = 1000€$ (2^-)

Anche se sono partito da un albero ricombinante, l'$X(t)$ non si ricombina

- Anziché versare P ogni anno, meglio costruirmi il fondo pagando tutto in 0. Voglio quindi valutare in 0 $X(t)$:

$$P + \underbrace{P\,b(0,1)}_{\text{in } t=1} + \dots + P\,b(0,T-1)$$, sono suff le ipotesi sul mercato

- Caso di una call - europea (log) in 0:

$$c_0 = E^Q\left[\max\{S(T)-K,0\}\right]e^{-rT}$$

$$= \sum_{j=0}^{T} \boxed{\max\{S u^{T-j} d^j - K, 0\}}\, e^{-rT}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}$$

$X_T^{(1)}$

in un t generico di valutazione:

$$= E_t^Q\left[\max\{S(T)-K,0\}\, e^{-r(T-t)}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{T-t} \max\{S u^{T-j} d^j - K, 0\}\, e^{-r(T-t)}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}$$ //

Casi estremi (senza 2)

1) $K \geq S u^T$ (+ grande di tutti)

$$\Rightarrow K \geq S u^{T-j} d^j \;\forall j \Rightarrow \max\{S u^{T-j} d^j - K, 0\} = 0 \;\forall j \Rightarrow c_0 = 0$$ call mai esercitata

2) $K \leq S d^T$

$$\Rightarrow K \leq S u^{T-j} d^j \;\forall j \Rightarrow \max\{S u^{T-j} d^j - K, 0\} = S u^{T-j} d^j - K \;\forall j$$

(so già che verrà fuori $S - Ke^{-rt}$, ma x esercizio lo rifaccio)

$$c_0 = \sum_{j=0}^{T}\left(S u^{T-j} d^j - K\right)e^{-rT}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}$$

$$= S\sum_{j=0}^{T}\left[u^{T-j} d^j e^{-rT}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j} - Ke^{-rT}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}\right]$$

$$= S\sum_{j=0}^{T}\left[u^{T-j} d^j \underbrace{e^{-r(j+T-j)}}_{\substack{=e^{-rj}\cdot e^{-r(T-j)} \\ =(e^{-r})^j\cdot(e^{-r})^{T-j}}}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}\right] - Ke^{-rT}\underbrace{\sum_{j=0}^{T}\binom{T}{j}(1-q)^j q^{T-j}}_{1}$$ Σ prob

$$= S\sum_{j=0}^{T}\binom{T}{j}(uqe^{-r})^{T-j}(d(1-q)e^{-r})^j - Ke^{-rT}$$

$$= S \underbrace{\sum_{j=0}^{T} \binom{T}{j} (uqe^{-r})^{T-j} \cdot (d(1-q)e^{-r})^{j}} - Ke^{-rT}$$

è BINOMIO NEWTON

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

$$\left[(uqe^{-r}) + (d(1-q)e^{-r})\right]^T$$

$$= S \underbrace{\left[(uqe^{-r}) + d(1-q)e^{-r}\right]}_{1}^{T} - Ke^{-rT}$$

perché

- o sostituisco $q = \frac{e^{-r} - d}{u-d}$
- $E^{Q}\left[S(1)e^{-r}\right] = 1$ (x def)

$$= S - Ke^{-rT}.$$

3) $Sd^T < K < Su^T$

c'è una soglia al di sotto di K | max ( ) = 0

c'è una soglia al di sopra di K | max ( ) = $K - Sd^T$

$$m \triangleq \max_{j \,|\, \in [0,m]} \left\{ Su^{T-j} d^{j} \geq K \right\}$$

diciamo m la soglia, è il max dei j | ...

$$\begin{cases} \text{se } j \leq m \quad Su^{T-j}d^j \geq K \Rightarrow \max\{Su^{T-j}d^j - K, 0\} = Su^{T-j}d^j - K \\ \text{se } j > m \Rightarrow Su^{T-j}d^j < K \Rightarrow \max\{Su^{T-j}d^j - K, 0\} = 0 \end{cases}$$

per qst j il max è 0

fatto prima; da m - pi addendi nulli

$$C_0 = \dots = \sum_{j=0}^{m} (Su^{T-j}d^j - K) e^{-rT} \binom{T}{j} q^{T-j} (1-q)^j$$

$$= S \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \binom{T}{j} (uqe^{-r})^{T-j} (d(1-q)e^{-r})^j} - Ke^{-rT} \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \binom{T}{j} (1-q)^j q^{T-j}}$$

è $Bin(m; T; 1-q^*)$, è <u>FdR</u>

- binomiale in m con T e 1-q come parametro
- perché è la somma cumulata delle prob.

$\neq 1$ x k $m < T$

- è la probab. che il n° dei down sia $\leq m$
- è $Bin(m; T; 1-q)$, è <u>FdR</u>

$$= S \; Bin(m, T, 1-q^*) - Ke^{-r} \; Bin(m, T, 1-q) \;//$$

si può applicare ai 2 casi estremi (unica)

con $q^* = uqe^{-r} \Rightarrow 1 - q^* = d(1-q)e^{-r}$

$0 < q^* < 1$

perché: $uqe^{-r} + d(1-q)e^{-r} = 1$

Calcolo n

per quali j vale la seguente $Su^{T-j}d^j \geq K$? (all del caso 3)

$K>0$
$j \in \mathbb{N}$

- $n \triangleq j^{max}$ | valé disuguaglianza

$$Su^{T-j}d^j \geq K$$

$$Su^T\left(\frac{d}{u}\right)^j \geq K$$

$$\frac{Su^T}{K} \geq \left(\frac{u}{d}\right)^j \quad /\ln$$

$$j\underbrace{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}_{>0} \leq \ln\left(\frac{Su^T}{K}\right) \quad , \ u>d \to \frac{u}{d}>1$$

$$j \leq \frac{\ln(Su^T/K)}{\ln(u/d)} \quad , \text{ per qst j qui vale.}$$

$$\to n = \text{max intero} \leq \frac{\ln(Su^T/K)}{\ln(u/d)} = \left\lfloor \frac{\ln(Su^T/K)}{\ln(u/d)} \right\rfloor \ \text{parte intera}$$

Oss posso usare la formula del 3) anche per 1) e 2) → non occorre, così, che n sia un intero, perché f d.r. nel discreto è costante a tratti → stesso valore

Vedo che vale anche per 1) e 2)

j = n° down

1) $K \geq Su^T$

$$\to \frac{Su^T}{K} \leq 1 \to \ln\left(\frac{Su^T}{K}\right) \leq 0 \ ; \quad 2 \text{ casi}$$

A) $\frac{Su^T}{K} < 1 \to \ln(\cdot) < 0 \to \text{FdR}(n<0) = 0$

B) $\frac{Su^T}{K} = 1$:

sostituisco nella formula $n=0 \to j=0 \to S \cdot 1\, q^{*(T-0)}(1-q^*)^0 - Ke^{-rT}q^T$ (n° max di j; x K mai esercitata)

$Su^Tq^Te^{-rT} - Ke^{-rT}q^T \overset{*}{=} 0 \ \to C_0 = 0$ prezzo nullo

2) $(0<)K \leq S d^T$

$$\to \frac{1}{K} \geq \frac{1}{S d^T} \to \frac{S u^T}{K} \geq \frac{\cancel{S} u^T}{\cancel{S} d^T} \to \frac{S u^T}{K} \geq \left(\frac{u}{d}\right)^T \to$$

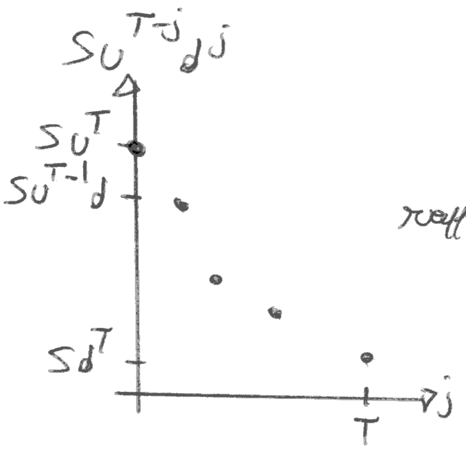
$$\to \ln\left(\frac{S u^T}{K}\right) \geq T \underbrace{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}_{>0} \to T \leq \frac{\ln(S u^T / K)}{\ln(u/d)}$$

allora $n = \dfrac{\ln(S u^T/K)}{\ln(u/d)} \geq T$ $\to$ se calcolo FdR in un $n \geq T$ essa vale 1//

(l'ho fatto con R pbinom(x,n,p) se $x \geq n$ ↳ $F(x)=1$ $\quad$ Bin(x,n,p) $\downarrow$ Bin(n,T,1-q*))

↳ sostituisco nella formula FdR=1

$$c_0 = S \cdot 1 - K e^{-r} \cdot 1 = S - K e^{-r}, \checkmark$$



rappresenta prezzo sottostante al variare di j, n° di down.

Sintesi

$c_0 = S\,Bin(n,T,1-q^*) - K e^{-rT} Bin(n,T,1-q)$

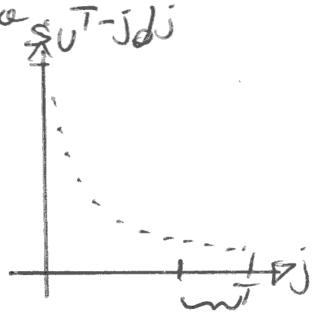
$q = \dfrac{e^{r}-d}{u-d}$, $q^* = u q e^{-r}$, $n = \dfrac{\ln(S u^T/K)}{\ln(u/d)}$

22/4/13

Caso di una put europea in 0:

potrei rifare lo stesso discorso fatto per le put; attualizzo il payoff, calcolo la speranza matematica

$\max\{K - S(T), 0\}$



- il payoff è positivo per gli ultimi valori di j
- $\exists\, n \mid j < n$ hanno payoff negativo

Cambio strada per il calcolo:
(Put-Call-Parity)

$$P(t)=C(t)-\bar{S}(t)+K\underbrace{b(t,T)}_{\to e^{-r(T-t)}} \quad \text{box cost}$$

$\bar{S}(t) = S(t)$ no dividendi

$$P(0)=C(0)-S+Ke^{-rT}$$ in $t=0$, sostituisco risultato altra pagina

$$\Rightarrow P(0) = S\,Bin(n;T;1-q^*) - Ke^{-rT}Bin(n;T;1-q) - S + Ke^{-rT}$$

$$= Ke^{-rT}\Big[\underbrace{1-Bin(n;T;1-q)}_{\text{idem.}}\Big] - S\Big[\underbrace{1-Bin(n;T;1-q^*)}_{P \text{ che } Bin \text{ sia} > n \text{ FdR}}\Big] \quad //$$

Oss: Se volessi valutarla in t qls, basta: $S(t) \to S$
$T \to T-t$

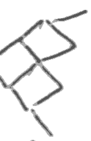
- Caso di call americana in t

siccome il sottostante non paga dividendi so che non conviene mai esercitarla anticipatamente $\to$ ha il valore della call europea
$C(t)=c(t)$

- Caso di una put americana

Procedo a ritroso col modello binomiale: solo logica algoritmo

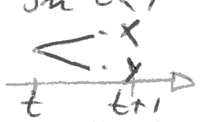
A) In T: $\max\{K-S(T),0\}$



Nel modello ad albero c'è un algoritmo che permette il calcolo in maniera esatta nel discreto e approssimata nel continuo (propr. asintotica)

B) Binomiale - multiperiodale, a ritroso:

In $t<T$, immagino di avere in t già valutato i nodi $t+1$ del valore della put



Il valore in t è $xe^{-r}q+ye^{-r}(1-q)$, questo valore comprende quel può succedere dopo t. È detto <u>valore dell'attesa</u> o valore di continuazione, se l'opzione è <u>europea</u>

Mentre, se <u>americana</u>, $K-S(t)$ è il <u>valore di esercizio</u>

Un sogg razionale può scegliere se esercitarla in t o continuare a tenerla:

$$\max\{K-S(t),\ xe^{-r}q+ye^{-r}(1-q)\}\quad \text{in } t$$

- se suppongo di avere stimato x e y dal passo precedente: da qst espressione procedo a ritroso: noto che x e y tengono conto della possibilità di esercitare prima della scadenza dopo t. In T x e y son = all'opz europea, ma in t sono ≠.

Oss Se ho un processo stocastico del prezzo che evolve nel continuo, avendo dei modelli continui, anche semplici quali B e S, si ricorre alla approssimazione numerica perchè ∄ formule chiuse. Per qst ∃ 3 approcci:

1) approx processo continuo col discreto, facendo uso di alberi binomiali
2) fa ricorso alle derivate parziali → si risolvono dei problemi ← non lo vedrò (no per coll americane)
3) least squares MonteCarlo: combina la simulazione Montecarlo con la regressione MQ con dati creati artificialmente

<u>Esempio</u>

- dati creati artificialmente

$S(0)=1000$

$K=1000$

$r=0,1$

$e^{r}\simeq 1,10517$

$u=1,2$

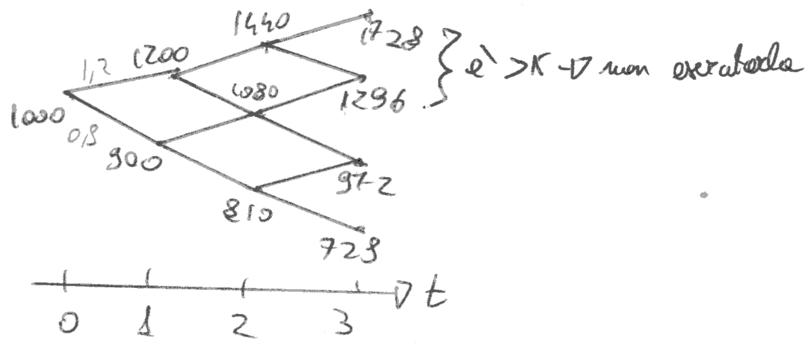
$d=0,8$

$T=3$

$q\simeq 0,6839$ (prob che pr. ↑ con prob neutrale al rischio)

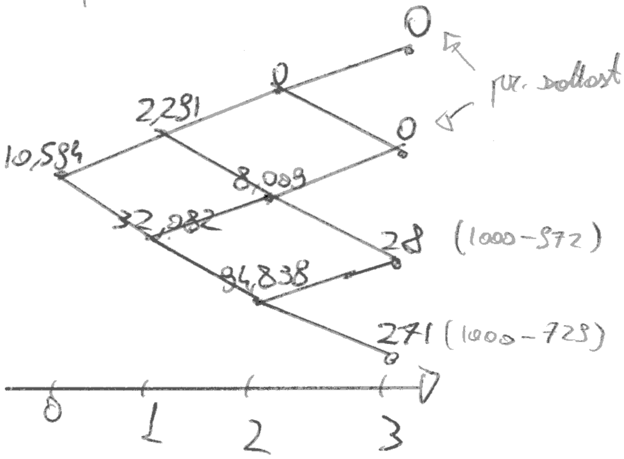
$1-q\simeq 0,3161$

Prezzo sottostante (vs prezzo esercizio = 1000)
S(t)



Valuto in parallelo a ritroso la put europea e la americana

<u>put europea</u>



pr. sottost > pr esercizio → opz non esercitata (1728 vs 1000)
(1296 vs 1000)

In t=2: la E(·) di 0 attualizzata: $0e^{-r}q + 0e^{-r}(1-q) = 0$

$$0e^{-r}q + 28e^{-r}(1-q) \simeq 8,009$$

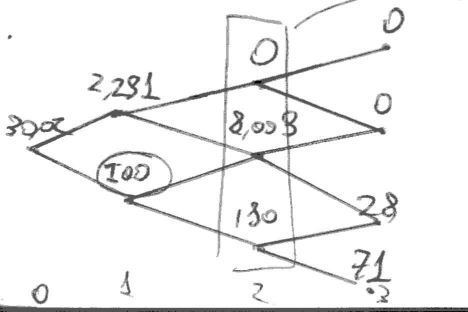
$$28e^{-r}q + 271e^{-r}(1-q) \simeq 94,838$$

In t=1: $0e^{-r}q + 8,009e^{-r}(1-q) \simeq 2,281$ $\max\{2,281;\ \underbrace{K - S(T)?}_{-200}\}$

$$8,009e^{-r}q + 94,838e^{-r}(1-q) \simeq 32,082$$

In t=0: $2,281e^{-r}q + 32,082e^{-r}(1-q) \simeq 10,584$

<u>put americana</u>



Controllare se conviene esercitarla!

In 0 l'americana = europea - 3 in valore.

In $t=2$: $2 \cdot \max\{1000-1080, 0\} < 0$ non esercito $\rightarrow \max\{<0; 8{,}009\}$

$1 \cdot \max\{1000-1440, 0\} < 0 \rightarrow \max\{<0, 0\}$

$3 \cdot \max\{1000-810, 0\} = 190 \rightarrow \max\{190, 34{,}838\}$ cerco max fra prezzo di esercizio e prezzo del sottostante

In $t=1$

$\max\{1000-1200, 0\} < 0 \rightarrow \max\{0; 2{,}281\} = 2{,}281$

$\max\{1000-800, 0\} = 100 \rightarrow \max\{\underset{\uparrow}{59{,}3}; 100\} = 100$ → CONVIENE ESERCITARLA in 1

$8{,}009 e^{-r} q + 190 e^{-r}(1-q) \simeq 59{,}3$

In $t=0$ $\quad 2{,}281 e^{-r} q + 100\, e^{-r}(1-q) \simeq 30{,}02$

$\max\{1000-1000, 0\} \rightarrow 0 \rightarrow \max\{0, 30{,}02\} = 30{,}02$

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DEL MODELLO BINOMIALE

Si supponga
- di suddividere l'intervallo $[0,T]$ in I intervallini di uguale ampiezza $\Delta = \frac{T}{I}$
- che i mercati costituiti dalle 2 attività di base siano aperti alle epoche $i\Delta$, $i = 0,1,\dots,T$
- che subordinatamente all'informazione disponibile al tempo $t = i\Delta$ $(i = 0,1,\dots,I-1)$ il prezzo in $t+\Delta$ dell'attività rischiosa $S(t+\Delta)$ possa assumere soltanto 2 possibili determinazioni pari a $S(t)u(\Delta)$ e $S(t)d(\Delta)$, dove u e d sono ora due funzioni a valori reali $\mid 0 < d(\Delta) < e^{r\Delta} < u(\Delta)$

qui $\Delta \neq 1$
r è rif. a Δ
non a 1 anno

$\left.\begin{matrix} u(\Delta) \\ d(\Delta) \end{matrix}\right\}$ tot Δ

- u e d danno la misura della distanza del prezzo in un intervallo di ampiezza Δ, tale distanza misura la variabilità del prezzo: più sono distanti più ampio è l'intervallo di valori del prezzo.

$$q(\Delta) = \frac{e^{r\Delta} - d(\Delta)}{u(\Delta) - d(\Delta)} \qquad q^*(\Delta) = u(\Delta)q(\Delta)e^{-r\Delta}$$

$$m(\Delta) = \frac{\ln\left(S(u(\Delta))^{\frac{T}{\Delta}} / K \right)}{\ln\left(u(\Delta)/d(\Delta) \right)}$$

es. prezzo call europea

$$C_0(\Delta) = S \cdot Bin\left(m(\Delta); \frac{T}{\Delta}, 1-q^*(\Delta)\right) - Ke^{-rT} \cdot Bin\left(m(\Delta); \frac{T}{\Delta}, 1-q(\Delta)\right)$$

$\Rightarrow$ procedendo esattamente come prima, si determina il prezzo delle opzioni europee con scadenza T in funzione di Δ o equivalentemente di $\frac{T}{\Delta}$)

$\rightarrow$ il modello discreto tende ad essere continuo

$\Rightarrow$ fissato un numero reale $\sigma > 0$ (indica la variabilità: $\uparrow\sigma \Rightarrow \uparrow$ distanza fra u ed d) $\sigma > r\sqrt{\Delta}$ (è vincolo asintotico da rispettare) e posto $u(\Delta) \triangleq e^{\sigma\sqrt{\Delta}}$ $d(\Delta) = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$ perché $d(\Delta) = \frac{1}{u(\Delta)}$; si prova che per $\Delta \to 0$ o equivalentemente $\frac{T}{\Delta} \to +\infty$, il prezzo delle opzioni tende a quello ottenuto nel modello di Black e Scholes.

es. $\lim_{\Delta \to 0} C_0(\Delta) =$ prezzo call europea in B&S

$$S\,Bin\left(m(\Delta), \frac{T}{\Delta}, 1-q^*(\Delta)\right) \to S \cdot \Phi(d_1)$$, con d_1 da calcolare come parametro

$$-Ke^{-rT}\left(Bin\left(m(\Delta), \frac{T}{\Delta}, 1-q(\Delta)\right)\right) \to -Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$, con d_2 come d_1

$\Rightarrow$ in particolare quando $\Delta \to 0$ la binomiale tende a $N(0,1)$

MODELLO DI BLACK E SCHOLES

Esistono 2 modi alternativi di vedere il processo:

- originale - storico: (1973) B.S e MERTON che fa ricorso ai processi di diffusione e sfrutta risultati del calcolo stocastico

2° modo più vicino a quel visto nel caso Binomiale: (Cox, Ross, Rubinstein) 1979

2) Illustro quest'ultimo: successivamente fu modificato da Kreps, Harrison e Pliska (1979-80). ? 152 altro originale

Questi lavori basano la valutazione dei derivati sulle misure neutrali al rischio.
Gli autori trovarono dei collegamenti fra AOA e esistenza di misure neutrali al rischio.

IPOTESI

- mercati aperti in tempo continuo
- presenti 2 tipi di beni:
  - attività rischiosa (prezzo $S(t)$) senza dividendi (ma lo si può ricondurre)
  - bank account (intensità rendimento r deterministica e costante)
- sul processo:

$$\forall t,T \mid t<T \quad \ln(S(T)) \underset{t}{\sim} N\left(\ln S(t)+\left(\mu-\sigma^2/2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right), \quad \sigma,\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma>0$$

"condizionatamente alla informazione disponibile in t, $S(t)$ ha distribuzione log-normale"

- il processo log-normale è markoviano: la distribuzione condizionata del prezzo futuro dipende solo dal prezzo corrente $S(t)$

*. Tutti gli operatori sul mercato concordano sul parametro σ (non serve che lo facciano su μ)

23/4/13 I momento?

- $E_t[S(T)] = ?$

posto $z=\ln S(T) \Rightarrow S(T)=e^z$

$$= E_t[e^z] \quad , \text{essendo } m_z(u)=E[e^{uz}]$$
$$= m_z(1)$$

- $\mathrm{Var}_t[S(T)] = E_t[\underbrace{S(T)^2}_{e^{2z}}] - \left(E_t[S(T)]\right)^2$

$= m_Z(2) - (m_Z(1))^2$

$e^{x \cdot m + \frac{x^2\sigma^2}{2}}$

- $m_Z(1) = ?$

se $Z \sim N(m, \sigma^2)$, $m_Z(u) = e^{mu + \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$ xk Fgm $N(\ ,\ )$

$= e^{m + \sigma^2/2}$, sostituisco la media e varianza di $\ln S(T)$

$= e^{\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}$

$= e^{\ln S(t) + \mu T - \mu t - \cancel{T\frac{\sigma^2}{2}} + \cancel{t\frac{\sigma^2}{2}} + \cancel{\frac{\sigma^2 T}{2}} - \cancel{\frac{\sigma^2 t}{2}}}$

$= S(t)\, e^{\mu(T-t)}$

↳ $E_t[S(T)] = S(t)\, e^{\mu(T-t)}$ //

"la speranza matematica dei prezzi futuri evolve come nel regime esponenziale con intensità μ; μ può essere interpretata come intensità di crescita del valore medio"

- $m_Z(2) = e^{2m + 2\sigma^2}$

$= e^{2(\overset{\text{media}}{m} + \boxed{\sigma^2})}$

Var distr $N(-,-)$ di $\ln S(t)$

$= e^{2(\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \boxed{\sigma^2(T-t)})}$

$= e^{2[\ln S(t) + \mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}T + \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma^2 T - \sigma^2 t]}$

$= e^{2[\ln S(t) + \mu(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)]}$

$= e^{2(\ln[S(t)] + (T-t)(\mu + \sigma^2/2))}$.

↳ $Var_t[S(T)] = e^{2(\ln S(t) + (T-t)(\mu + \sigma^2/2))} - [S(t)e^{\mu(T-t)}]^2$

$= e^{2\ln S(t)} \cdot \underbrace{e^{2(T-t)(\mu + \sigma^2/2)}}_{e^{2(T-t)\mu}\, e^{2(T-t)\sigma^2/2}} - [S(t)e^{\mu(T-t)}]^2$

$= S(t)^2 \cdot e^{2(T-t)\mu} \cdot e^{2(T-t)\sigma^2/2} - [S(t)e^{\mu(T-t)}]^2$

$= S(t)^2 \cdot e^{2\mu(T-t)}\left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right)$ //

Si prova che esiste unica $\exists !$ Q distribuzione neutrale al rischio o misura martingala equivalente. Perchè i prezzi scontati in 0 espressi in unità di B.A. sono martingale.

$$\ln S(T) \underset{t}{\overset{Q}{\sim}} N\left(\ln S(t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2 (T-t)\right)$$

In particolare questo discorso vale per l'attività rischiosa:

$$E_t^Q\left[\frac{S(T)}{B(T)}\right] = E_t^Q\left[S(T)e^{-rT}\right] = \dots = \frac{S(t)}{B(t)} = S(t)e^{-rt}$$

allora

$$E_t^Q\left[S(T)e^{-rT}\right] = S(t)e^{-rt} \quad / e^{rt}$$

$$E_t^Q\left[e^{rt}S(T)e^{-rT}\right] = S(t)$$

$$E_t^Q\left[S(T)e^{-r(T-t)}\right] = S(t)$$

"la speranza matematica del prezzo futuro attualizzato all'epoca attuale, al tasso r mi dà il prezzo corrente"

Suppongo di sapere:

incognita

$$\ln S(t) \underset{t}{\overset{Q}{\sim}} N\left(\ln S(T) + \left(\mu^* - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$$

μ si chiama DRIFT → determina il valore atteso

σ è detto VOLATILITÀ → determina la volatilità

Cerco il drift (anche se so già che è r):

poichè Q neutrale al rischio $e^{-r(T-t)}E_t^Q(S(T)) = S(t)$, per quale valore di μ^* vale l'uguaglianza? $e^{-r(T-t)}e^{\mu^*(T-t)}S(t) = S(t)e^{(\mu^*-r)(T-t)} \stackrel{\Delta}{=} S(t)$

allora $(\mu^*-r)(T-t)=0$: affinchè ci sia martingalità per il processo del prezzo dell'attività soltanto rischiosa espressa in unità di B.A → $\mu^*=r$. La nuova distribuzione è dello stesso tipo, ma con parametro diverso.

Questo discorso della martingalità sotto Q vale, non solo per S ma per tutti i payoff finali che dipendono dal prezzo che in quel momento ha l'attività rischiosa. Per cui immaginando di introdurre un derivato qls, tipo call europea, il payoff dipende solo da T per cui posso valutarlo tramite la speranza matematica:

Calcolo valore in t di una call-europea (con pr. esercizio $K>0$)

$$c(t) = E_t^Q\left[\max\{S(T)-K,0\}\, e^{-r(T-t)}\right]$$

$z = \ln S(T) \to S(T) = e^z$

$$= E_t^Q\left[\max\{e^{\overset{\ln S(T)}{z}}-K,0\}\, e^{-r(T-t)}\right]$$

def distrib normale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{e^z-K,0\}\, e^{-r(T-t)} \cdot \frac{1\, dx}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[x-\underbrace{\ln S(T)-(r-\frac{\sigma^2}{2})\cdot(T-t)}_{\text{media}}\right]^2}$$

$\dfrac{e^{-\frac{1}{T-t}}}{\sqrt{T-t}}$? da dove viene?

$e^x - K \geq 0 \leftrightarrow e^x \geq K \leftrightarrow x \geq \ln K$

1) se $x \geq \ln K \to \max\{e^x-K,0\} = e^x-K$

2) se $x < \ln K \to \max\{e^x-K,0\} = 0$

scindo l'integrale nei 2 casi

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\ln K}}_{=0\ \text{x(2)}} + \underbrace{\int_{\ln K}^{+\infty}}_{\text{sost } e^x-K}$$

$$= \int_{\ln K}^{+\infty} e^x e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[x-\ln S(t)-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]^2} dx \; -$$

$$- K e^{-r(T-t)} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(T-t)}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[x-\ln S(t)-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]^2} dx$$

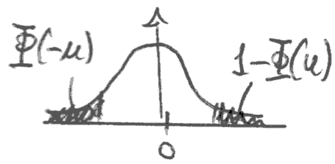
forma del tipo "A" $- K e^{-r(T-t)}$ "B"

standardizzo sostituendo $u = \dfrac{x-\ln S(t)-(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$du = \frac{dx}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$B = \int_{\frac{\ln K - \ln S(t) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$ complem a 1 FdR $N(0,1)$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln K - \ln S(t) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$, per simmetria



$1-\Phi(K) = \Phi(-K)$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(S(t)/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \triangleq \Phi(d_2)$$

divido e moltiplico

$$A = e^{\ln S(t)} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\, dx\; e^{-\ln S(t) + x - r(T-t) - \frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[x - \ln S(t) - (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]^2}$$

$= \dots$

$$= S(t) \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{T-t}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left[x - \ln S(t) - (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]^2} dx$$

standardizzo $u = \dfrac{x - \ln S(t) - (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$du = \dfrac{dx}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$= S(t)\,\Phi\left(\frac{\ln(S(t)/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \triangleq \Phi(d_1)$$

$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ + dim: $\underbrace{r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}_{d_1} + \sigma^2(T-t) = r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) = \underbrace{(T-t)(r+\frac{\sigma^2}{2})}_{d_2}$

$$= S(t)\,\Phi(d_1) - K\, e^{-r(T-t)}\, \Phi(d_2)$$

- è lo stesso risultato ottenuto attraverso il limite della binomiale
- siccome non ci sono dividendi, questo è anche il prezzo di una call-americana

Calcolo il valore in t di una put europea

(put-call parity)

$$P(t) = C(t) - S(t) + Ke^{-r(T-t)}$$

$$= S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S(t) + Ke^{-r(T-t)}$$

$$= Ke^{-r(T-t)}\left(1 - \Phi(d_2)\right) - S(t)\left(-\Phi(d_1) + 1\right) \qquad \text{per simmetria}$$

$$= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_1) \, //$$

Limiti del modello di Black e Scholes

- σ detto "volatilità" determina la variabilità. È costante nel modello, ma nella realtà evolve in maniera aleatoria. Esso amplifica le variazioni del prezzo. Modelli più evoluti prevedono una volatilità stocastica.
  ↳ il limite qui è che σ è costante

- r detto 'intensità istantanea di rendimento'. Il problema è analogo: è supposta costante e deterministica, nella pratica non lo è
  ↳ il limite qui è che r è costante e deterministica

- il processo log-normale si rivela a traiettorie continue. Nella realtà i prezzi delle attività finanziarie fanno dei salti per le turbolenze del mercato.

Nella pratica, quali sono i parametri da stimare per applicare la formula?

risp: $\boxed{\sigma}$ e r.

μ è scomparso, K è dato dall'accordo come T, S(T) si osserva.

- r: l'opzione scade in T, io sono in t: se sul mercato $\exists$ zcb che scadono in T allora prendo come stima di r l'intensità di rendimento $r(t,T)$ di un investimento di zcb con scadenza T

- σ: 1) σ lo stimo sulla base della 'volatilità storica', sulla base delle serie

storiche del prezzo osservato.
σ è lo SQM dei rendimenti logaritmici per unità di tempo

es. $\frac{\ln S(t+1) - \ln S(t)}{1 \text{ u tempo}}$, $(t+1)-t=1$

2) σ lo stimo attraverso la 'volatilità implicita': essendo il prezzo delle call e put funzione crescente rispetto σ (logico: se cresce ↑σ ⇒ ↑ vende prezzo ⇒ se prezzo mi muove tanto in maniera avversa ⇒ perdita limitata altrimenti tanto meglio). Osservando il prezzo $C=f(\sigma)$ posso invertirla numericamente ottenendo σ. La volatilità è implicita nel senso delle opzioni che sono già trattate, e questo σ lo uso come parametro nel modello per fornire il prezzo delle opzioni che voglio immettere nel mercato.

Aggiustamento delle formule in caso di dividendi

- aggiustamento approssimato per i dividendi certi, esatto per dividendi nel continuo
- es per contr. forward

  - se ci sono dividendi certi sostituisco $S(t)-D(t,T) \xrightarrow{a} S(t)$

  - se ci sono dividendi pagati nel continuo $S(t)-e^{-q(T-t)} \xrightarrow{a} S(t)$

23/4/14

$\boxed{1)}$ Vedo ora il modello così come fu proposto da Black, Scholes e Merton, 1973:

È un modello standard utilizzato tutt'ora dagli operatori per 'prezzare' le opzioni, nonostante i suoi limiti. Gli autori hanno avuto la geniale intuizione di combinare un risultato riguardante i processi stocastici (Lemma di Ito) con un ragionamento economico.

RICHIAMI SU RISULTATI PROCESSI STOCASTICI

df Processo di Wiener (o moto browniano standard)

Un processo stocastico a parametro continuo $\{W(t), t \geq 0\}$ e a traiettorie continue (quasi certamente) è un processo di Wiener (o m.b.g) se

1) $W(0) = 0$

2) $\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t)$ $\quad \forall t \geq 0$, $\forall \Delta t > 0$

è la variazione del processo in un intervallo temporale

- In particolare $W(t) \left(= \underset{t=0 \;\; \Delta t = t}{W(t) - W(0)}\right)$ posso vederlo come variazione allora per la 2) $W(t) \sim N(0, t)$ $\quad \forall t > 0$
- $dW(t)$ è la variazione istantanea del processo
  è il differenziale stocastico: $dW(t) \sim N(0, dt)$ ← differenziale usuale
- $\Delta W(t)$ è una variazione piccola, ma non istantanea

3) il processo è a <u>incrementi indipendenti</u>:
cioè se $\forall n$ intero > 1 $\quad \forall t_1, \dots, t_n \mid 0 < t_1 < \dots < t_n$
$\rightarrow W(t_1) - W(0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ queste variabili sono stocasticamente indipendenti.

Oss I processi di Wiener sono processi Markoviani
$t > 0$
$T > 0$
$W(T) - \underbrace{W(t)}_{\text{noto in } t}$, $W(T)$ indipendente $W(t)$ (in senso concettuale non algebrico)

$\hookrightarrow W(T) = W(t) + \underbrace{[W(T) - W(t)]}_{\text{incremento}}$

$W(t)$ riassume la storia fino a t, ma la storia non serve per modellare il futuro

def Un processo stocastico $\{S(t) : t \geq 0\}$ a traiettorie continue (quasi certamente) si dice processo di diffusione se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

dato $S(0)$ (> 0)

diff solito $\quad$ diff nel proc. Wiener

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{variazione istantanea del prezzo da } t \\ \text{all'istante successivo} \\ \text{(aleatorio)}}}{dS(t)} = \underbrace{\alpha(S(t), t)\, dt}_{\text{componente deterministica}} + \underbrace{\beta(S(t), t)\, dW(t)}_{\text{componente stocastica}}$$

- α, β funzioni continue in $A \subset \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}$
(applicate in t al processo stocastico)

- $W(t)$ processo di Wiener
- $dW(t)$ è aleatorio, perciò devo osservare la Δ

$\beta(S(t),t)$ amplifica la s del processo di Wiener.

- $S(t)$ non eroga dividendi [+ e che mma produce interessi al tasso r costante]

Immagino di trovarmi in t e di descrivere l'evoluzione del processo condizionatamente all'informazione disponibile, e cercare di prevedere cosa può succedere nell'istante futuro.

A livello di interpretazione non cambia se lavoriamo con differenziali stocastici o deterministici

Modello in modo analogo $S(t)$:

$$\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t) \simeq \alpha(S(t),t)\Delta t + \beta(S(t),t)\Delta W(t)$$

le qnt evolvono nel continuo

$\alpha(S(t),t)$ funzione di drift (può <0)

$|\beta(S(t),t)|$ funzione di volatilità (non può <0)

- nel caso discreto

$$E_t[\Delta S(t)] \simeq \alpha(S(t),t)\Delta t + \underbrace{\beta(S(t),t)\cdot \overset{E(\Delta W(t))}{0}}_{0}$$

$$Var_t[\Delta S(t)] \simeq \beta^2(S(t),t)\Delta t$$

$$E_t[S(t+\Delta t)] \simeq S(t) + \alpha(S(t),t)\Delta t$$

$$Var_t[S(t+\Delta t)] \simeq \beta^2(S(t),t)\Delta t$$

$S(t+\Delta t) = S(t) + \Delta S(t)$

- nel caso continuo:

$$E_t[dS(t)] = \alpha(S(t),t)dt$$

$$Var_t[dS(t)] = \beta^2(S(t),t)dt$$

Caso particolare di processo di diffusione (particolarizzo le 2 funzioni)

Processo di moto Browniano geometrico (specifico)

In della quot segue un moto Browniano

processo di Wiener

$$\alpha(x,y) = \mu x \quad (x = S(t))$$

$$\beta(x,y) = \sigma x$$

con μ, σ costanti in $\mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t)$$

μ parametro di drift

σ parametro di volatilità

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu\,dt + \sigma\,dW(t)$$

- $E_t[dS(t)] = \mu S(t)\,dt$ // evoluzione del montante nel regime esponenziale

$$\frac{E_t\left[\frac{dS(t)}{S(t)}\right]}{dt} = \mu$$

intensità di variazione della speranza matematica

$$\frac{Var_t\left[\frac{dS(t)}{S(t)}\right]}{dt} = \sigma^2$$

varianza del rendimento del prezzo per unità di tempo

Lemma di Ito

vale per tutti i processi di diffusione, usato da B e S nel m. b g

$$dS(t) = \alpha(S(t),t)\,dt + \beta(S(t),t)\,dW(t)$$

I° proc. stocastico di diffusione

$$z(t) = f(S(t),t)$$

II° proc. stocast. (lo è x R diff di diffusione pure lui dal I° pr. stoc.)

- f è funzione a 2 variabili in $\mathbb{R}$, "sufficientemente regolare", diff al 2° ordine
- interpreto il $z(t)$ come prezzo di un derivato non path-dependent e posso farlo purché $S(t)$ sia il prezzo di un'attività rischiosa.

il lemma afferma

$$dz(t) = \boxed{\frac{df(S(t),t)}{dS(t)}}\,dS(t) + \boxed{\frac{df(S(t),t)}{dt}}\,dt + \frac{1}{2}\boxed{\frac{d^2 f(S(t),t)}{dS(t)^2}}\,\beta^2(S(t),t)\,dt$$

VARIAZIONE DI Z x_1 x_2 x_1^2 formula Taylor al 2° ordine dove x_1 e x_2 indicano la 1ª e 2ª variabile della funzione f

sost $dS(t)$

$$\overset{\downarrow}{=} \left[\frac{df}{dx_1}(S(t),t)\,\alpha(S(t),t) + \frac{df}{dx_2}(S(t),t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx_1^2}(S(t),t)\,\beta^2(S(t),t) \right] dt +$$

$$+ \left[\frac{df}{dx_1}(S(t),t)\,\beta(S(t),t) \right] dW(t)$$

la dinamica del prezzo del derivato è molto simile a quella di S: 2 componenti una drift e una $dW(t)$

anche $z(t)$ segue processo di Wiener con la f che qui applico le funzioni α e β a $S(t)$, non a $z(t)$

Esempio del lemma di Ito

$f(x,y) = \ln x$ con $\alpha(x,y) = \mu x$, $\beta(x,y) = \sigma x$ $\quad x \to x(t)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{df}{dy} = 0 \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t) \qquad \text{m. b. g}$$

$$\to z(t) = f(S(t),t) = \ln S(t)$$

$\beta^2 = (\sigma x)^2$

(v. 4 retro)

$$\to dz(t) = d\ln S(t) = \frac{1}{S(t)}\boxed{dS(t)} + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\cancel{[S(t)]^2}}\sigma^2 \cancel{[S(t)]^2} \right) dt$$

sost $dS(t)$

$$= \frac{\mu \cancel{S(t)}\,dt}{\cancel{S(t)}} + \frac{\sigma \cancel{S(t)}\,dW(t)}{\cancel{S(t)}} - \frac{\sigma^2}{2}dt$$

$$= (\mu - \sigma^2)dt + \sigma\,dW(t). \checkmark$$

è la dinamica del $\ln S(t)$.

Calcolo la variazione $[t,T]$:

$0 < t < T$

$$\ln S(T) - \ln S(t) = \int_t^T d\ln S(u) = \int_t^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)du + \int_t^T \sigma\,dW(u) =$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left[W(T) - W(t)\right]$$

$$\underbrace{\ln S(T) = \ln S(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\underbrace{\left(W(T) - W(t)\right)}_{\sim N(0,T-t)}}_{\text{COST} + K \cdot N(0,T-t) \to \text{trasf Normale}}$$

io sono in t

$$\ln S(T) \underset{t}{\sim} N\left(\ln S(t)+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t);\sigma^2(T-t)\right)$$

risolvo l'equazione del I° processo stocastico

$$S(T)=S(t)\,e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\underbrace{\left[W(T)-W(t)\right]}_{\text{igneto}}}$$

<u>Altro esempio del lemma di Ito</u>

$$f(x,y)=x e^{-ry} \qquad \text{m b g per } S(t)$$

$$\frac{df}{dx}=e^{-ry} \quad , \quad \frac{df}{dy}=x e^{-ry}(-r) \quad , \quad \frac{d^2f}{dx^2}=0$$

$$z(t)=f(S(t),t)=S(t)e^{-rt}=\frac{S(t)}{B(t)} \qquad \text{prezzo } S(t) \text{ espresso in } f(B.A)$$

$$dz(t)=e^{-rt}dS(t)+S(t)e^{-rt}(-r)dt+0$$

$$=\mu \underbrace{S(t)e^{-rt}}_{Z(t)}dt+S(t)e^{-rt}(-r)dt+\sigma S(t)e^{-rt}dW(t)$$

$$=(\mu-r)Z(t)dt+\sigma Z(t)dW(t)$$

anche $Z(t)$ segue m b g

Se Z è un processo martingala deve essere
sotto Q la E( ) del valore futuro del processo deve coincidere col valore corrente

$$E^Q[Z(T)]=Z(t) \quad \text{da cui} \quad E_t^Q\Big[\underbrace{Z(T)-Z(t)}_{\text{incremento}}\Big]=0$$

→ deve essere nulla la sp. matematica dell'incremento/decremento su un intervallino di ampiezza qls e anche per un intervallo infinitesimo, così per $dZ(t)$ affinchè Z sia martingala, μ deve essere pari a r sotto Q

La dinamica del processo di S, sotto Q, è la stessa che avevo in partenza, con lo stesso σ, ma il μ è sostituito da r (cambio drift)

<u>Conseguenze</u>.

Un portafoglio costituito, all'istante t, dal derivato di prezzo $Z(t)$ e dalla quantità $-\frac{df}{dx_1}(S(t),t)$ di attività sottostante è in tale istante non rischioso.

Infatti, indicando con $H(t) = z(t) - \frac{df}{dx_1}(S(t),t)S(t)$ il valore di tale portafoglio, si ha:

Lemma Itô con a sx 1 membro in più

$$dH(t) \triangleq \underbrace{dz(t) - \frac{df}{dx_1}(S(t),t)\,dS(t)}_{I^\circ \text{ membro}} =$$

$$= \underbrace{\frac{df}{dx_2}(S(t),t)\,dt}_{II^\circ \text{ membro}} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx_1^2}(S(t),t)\,\beta^2(S(t),t)\,dt,$$

(a dx è tutto noto)

che non dipende dal fattore stocastico "$dS(t)$"

$dz(t)$ valore in t di un derivato

$dS(t)$ variaz. di valore prezzo derivato

$-\frac{df}{dx}(S(t),t)$ qnt di sottostante

$H(t) = z(t) - \frac{df}{dx}(S(t),t)$ è valore in t del portafoglio

$dH(t)$ è la variazione istantanea di valore del portafoglio
è deterministica, e non rischiosa

Allora per AOA in t il portafoglio $H(t)$ deve rendere come titolo privo di rischio e quindi evolvere come il m.m.a.

AOA $\Rightarrow$ $dH(t) \triangleq r\,H(t)\,dt = r\cdot\cancel{dt}\cdot z(t) - \frac{df}{dx_1}S(t)\,r\cdot\cancel{dt}$ $\quad f(\cdot)$ è forma funzionale

sostituisco $H(t)$ e $dH(t)$: (diviso per dt)

$$\underbrace{\frac{df}{dx_2}(S(t),t)}_{II^\circ \text{ membro}} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx_1^2}(S(t),t)\,\beta^2(S(t),t) = r\cdot\overbrace{f(S(t),t)}^{z(t)} - r\,\frac{df}{dx}(S(t),t)S(t)$$

$\forall S(t), \forall t$

poiché tale equazione deve essere soddisfatta per tutta la durata di vita del derivato, qualunque sia il prezzo corrente del sottostante, ciò si traduce in un'equazione alle derivate parziali cui deve soddisfare la funzione f. Si ha quindi portando tutto a I° membro e ricordando che $z(t)=f(S(t),t)$

$$\frac{d f(S(t),t)}{d x_2}+\frac{1}{2}\frac{d^2 f(S(t),t)}{d x_1^2}\beta^2(S(t),t)-r f(S(t),t)+r\frac{d f(S(t),t)}{dx}x=0$$

se f rappresenta la funzione descrivente il prezzo del derivato, per sapere che forma ha devo risolvere l'equazione. A 2° del derivato cambia la soluzione; dovrò specificare il suo payoff
(es. per calc. pr. call europea, pongo $f(x,T_\Delta)=\max\{x-K,0\}$)
scadenza opz.

(NB) Si noti che la funzione $\alpha(\cdot)$ è sparita, e quindi il prezzo f del derivato risulterà da esso indipendente. ($a=\mu\cdot S \rightarrow$ prezzo indipendente da α)

In particolare Black e Scholes assumono che $S(t)$ segue un processo di moto browniano geometrico:

$$dS(t)=\mu S(t)\,dt+\sigma S(t)\,dW(t)$$

dove μ (parametro di drift) e σ (>0) (parametro di volatilità) sono due numeri reali

L'equazione precedente, sostituendo $\beta=\sigma x$, si particolarizza come segue:

$$\frac{d f(S(t),t)}{d x_2}+\frac{1}{2}\frac{d^2 f(S(t),t)}{d x_1^2}\sigma^2 x_1^2-r f(S(t),t)+\frac{r f(S(t),t)}{dx}x_1=0$$

Questa equazione è soddisfatta dal prezzo di tutti i derivati che verificano le ipotesi precedenti. Quindi non ci si può aspettare che essa ammetta un'unica soluzione. Per risolverla si devono pertanto imporre alcune condizioni di contorno, fra cui quella che definisce il valore (payoff) finale del derivato.
In particolare, nel caso delle opzioni call europee con scadenza T e prezzo di esercizio K tale condizione si traduce come segue:

$$f(x_1,T)=\max\{x_1-K,0\}$$

$x_2=y$
$x_1=x$

La soluzione del problema differenziale (con questa specifica condizione al contorno) porta infine alla relazione

$$c(t) = f(S(t),t) = S(t)\,\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \qquad 0 \leq t < T$$

con $d_1 = \dfrac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\Phi = \text{FdR } N(0,1)$$

(NB) Siccome l'attività sottostante non eroga dividendi la formula precedente vale anche per le opzioni call americane.

In maniera analoga si potrebbe ricavare il valore di un forward (già visto) o quello di un'opzione put europea. Però il prezzo di una put anche essere ricavato da quello della call con put-call parity.

$$p(t) = c(t) + Ke^{-r(T-t)} - S(t)$$

$$= S(t)\left[\Phi(d_1) - 1\right] - Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi(d_2) - 1\right]$$

$$= Ke^{-r(T-t)}\,\Phi(-d_2) - S(t)\,\Phi(-d_1), \quad 0 \leq t < T \qquad \text{F} \times \text{PUT!}$$

In pratica per applicare la formula di B&S bisogna stimare soltanto il parametro di volatilità σ (ad esempio facendo ricorso alle serie storiche dei prezzi del sottostante), mentre non occorre stimare il parametro drift μ (sparito). Gli altri parametri sono invece direttamente osservabili: r è desunto dai titoli privi di rischio (BOT) con scadenza coincidente con quella dell'opzione.

DELTA HEDGING

Le derivate parziali del prezzo di un derivato rispetto alle variabili da cui esso dipende hanno un'enorme importanza nella tecniche di hedging. Esse sono solitamente indicate con delle lettere greche. In particolare, la derivata parziale rispetto al prezzo dell'attività sottostante viene indicata con la lettera Delta. Nel modello di Black e Scholes è pari a $\Phi(d_1)$ per la call e $-\Phi(-d_1)$ per la put.

*Come abbiamo visto precedentemente se accanto al derivato, si detiene una quantità (con segno) di sottostante pari all'opposto del Delta, il portafoglio così costruito risulta neutralizzato rispetto al rischio di variazioni nel prezzo del sottostante. Tuttavia tale neutralizzazione è (in generale) soltanto istantanea, perché lo stesso Delta (in generale) varia al variare del prezzo del sottostante e al passare del tempo.

Quindi per mantenere il portafoglio continuamente non rischioso, bisognerebbe ricalibrarlo istante per istante modificando opportunamente la quantità di sottostante.

Questa tecnica di hedging, che va sotto il nome di Delta-hedging si scontra naturalmente con la realtà, sia perché nel mondo reale le transazioni non avvengono in tempo continuo sia, e soprattutto perché il mondo reale è affetto dalla presenza di costi di transazione che rendono proibitivi aggiustamenti troppo frequenti.

L'altra faccia della medaglia della neutralizzazione del rischio è la replicabilità:

partendo da un portafoglio che ha lo stesso valore del derivato cerco di replicare le sue variazioni di valore affinché coincidano con quelle del derivato

$$dZ(t) = \frac{df}{dx}(S(t),t)\,dS(t) + \left[\frac{df}{dx}(\dots)\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(\ )\,\beta^2(\ )\,dt \right]$$

Portaf = Att RSK + BA

$$\text{variaz. valore derivato} = -\Delta + \Delta \text{ valore sottostante} + B(t)\,dt$$

Se voglio replicare il derivato tramite un portafoglio dinamico, allora la ricalibratura avviene momento per momento: tengo qnt sottostante pari a $\frac{df}{dx}(S(t),t)$ e poi la qnt BA $\frac{dB(t)}{r}$

DRIFT

(parametro di deriva)

Coefficiente che compare in alcune equazioni differenziali stocastiche che descrivono l'andamento aleatorio nel tempo di una variabile finanziaria.

Tra le equazioni più note nelle applicazioni, $\frac{dS}{S} = m\,dt + s\,dW$, il suo significato è quello di valore atteso dell'intensità istantanea di rendimento del titolo, il cui prezzo S cambia nel tempo seguendo tale equazione differenziale.

Moltiplicando tale coefficiente per il differenziale del tempo, si ha il valore atteso, $m\,dt$, ovvero la componente deterministica del tasso istantaneo di rendimento del titolo. A questa si aggiunge una componente stocastica $s\,dW$ di valore atteso nullo. In questa applicazione il coefficiente di deriva è costante rispetto al tempo e al prezzo del titolo; in alternativa potrebbe essere $m(t,S)$, ma il significato permane.

Oss Nel caso in cui il coeff. di deriva sia la costante 0, si parla di processi a <u>drift nullo</u> che si dicono anche STAZIONARI.

Nella versione discreta, un processo descritto dalla regola $Y(t) = Y(t-1) + C + e(t)$ v.a. $\sim N(0,-)$ <u>non</u> è stazionario se $C \neq 0$.

è invece stazionario $y(t) - y(t-1) \to$ il processo delle differenze prime