19/2

IPOTESI DI MERCATO PERFETTO

1) • agenti razionali e non saziati
   preferiscono di più al di meno
   funzione di utilità crescente
   non sono pigri/inattivi
   agiscono per raggiungere il massimo profitto

2) • agenti pricetaker
   agenti prendono per dati i prezzi di mercato; non possono con il loro comportamento influenzare il prezzo
   qui i singoli agenti economici non contano nulla

3) • mercati aperti in tempo continuo
   es. un mercato globale è sempre aperto nella realtà
   a volte la rimuoveremo (esplicato)

4) • perfetta divisibilità dei beni
   possono comprare e vendere qualsiasi quantità di beni (π, e)

5) • assenza di tasse, costi di transazione
   transazione = operazione di compravendita
   sono le commissioni

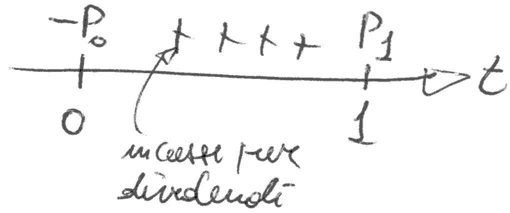
6) • vendite allo scoperto sono ammesse senza limitazioni (unlimit short selling)

operazione di finanziamento perchè si ricava subito denaro; è l'opposto dell'azione di investimento

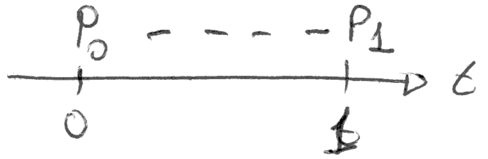
vendere allo scoperto = vendere un bene che non si possiede; si può vendere e ricavare al momento della vendita l'intero valore, senza costi aggiunti

↳ c'è l'obbligo di restituire il bene: lo comprerò e i dividendi eventuali incassati vanno restituiti

dividendi = redditi generati dal possesso del bene es. operaz. investimento:



operaz finanziamento:



Oss <u>Comprare una quantità negativa di un titolo significa venderlo allo scoperto</u> (merci, denaro, titoli)

IP: tasso investimento = tasso indebitamento

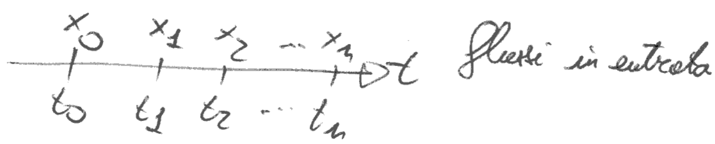
è conseguenza dell'unicità del prezzo del titolo

- assenza di opportunità arbitraggio (AOA)

  OA = possibilità attraverso operazioni di compravendita su beni del mercato di realizzare guadagni senza rischio

se sul mercato si aprissero delle "finestre di arbitraggio" esse si chiuderebbero subito: ci sarebbero dei beni sottoprezzati e sovraprezzati, allora si potrebbe vendere i beni sovrap= prezzati e comprare quelli sottoprezzati. Siccome gli agenti economici sono affamati di guadagno, a livello macroeconomico il prezzo tornerebbe in equilibrio, lo stesso per tutti.

OA: i prezzi di mercato la consentono, se è possibile, attraverso operazioni di compravendita di beni oggetto di scambio, ottenere una sequenza di flussi di cassa, tutti ≥ 0 con pr=1. (q. c.) ed uno di essi >0 con probabilità >0.



$$\begin{cases} Pr(x_i \geq 0) = 1 \quad \forall i \in \{0,1,\dots,n\} \\ \exists\, i \in \{0,1,\dots,n\} \mid Pr(x_i > 0) > 0 \end{cases}$$

Io mi colloco in t_0 perciò conosco l'importo x_0

L'arbitraggio è di 2 tipi:

I° tipo: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ Pr(x_i \geq 0) = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \exists\, i \in \{1, \dots, n\} : Pr(x_i > 0) > 0 \end{cases}$

II° tipo: $\begin{cases} x_0 > 0 \\ Pr(x_i \geq 0) = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$

! Oss Solo arbitraggio II° tipo mi fa guadagnare con certezza qlc.

La possibilità arbitraggio I° tipo $\Leftrightarrow$ biglietto lotteria a prezzo 0€

(NB) OAO: dice che i prezzi dei beni sul mercato sono unici

Spesso userò solo t_1, t_2 : $\begin{array}{cc} -c_0 & x_1 \\ \hline t_0 & t_1 \end{array}$

Considerando l'acquisto in t_0: $-c_0 = x_0$; se $c_0 < 0 \rightarrow$ ho arbitraggio

c_0 = costo operazione

I° tipo: $\begin{cases} c_0 = 0 \\ Pr(x_1 \geq 0) = 1 \\ Pr(x_1 > 0) > 0 \end{cases}$

II° tipo: $\begin{cases} c_0 < 0 \\ Pr(x_1 \geq 0) = 1 \end{cases}$

Il valore dei derivati dipende dalle variabili a cui essi si riferiscono, loro oggetto.

PREZZI

Sul mercato ci sono: almeno un'attività rischiosa (= variabile sottostante dei derivati con componente aleatoria) e ci sono attività "prive di rischio" (default-free: conosco il loro prezzo a scadenza; è un n° certo → rischio di insolvenza ∄)

Esempio attività prive di rischio: ZCB
(obbligazioni senza cedola
titoli a cedola nulla)

- sono prive di rischio in tutto, anche nell'insolvenza

$$\underset{t}{|}\longrightarrow\underset{T}{|}\quad \text{valore nominale (certo)}$$

- sono trattati ZCB con qualunque scadenza

$b(t,T)$ prezzo in t di uno ZCB unitario con scadenza $T(\geq t)$

$$\underset{t}{\overset{-b(t,T)}{|}}\longrightarrow\underset{T}{\overset{1}{|}}$$

$$AOA \Rightarrow \begin{cases} b(t,T)>0 & \forall t\leq T \\ b(T,T)=1 \end{cases}$$

dim (x ASSURDO)

TH: $b(t,T)>0 \quad \forall t\leq T$

$b(\bar{t},T)<0 \quad \bar{t}\leq T$ avrei $\underset{\bar{t}}{\overset{>0}{|}}\longrightarrow\underset{T}{\overset{1}{|}}$ 2 flussi cassa non negativi con probabilità 1 → OA

TH: $b(T,T)=1$

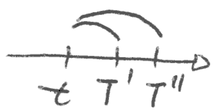
se non fosse sempre e solo 1 potrei venderlo allo scoperto/e ricomprarlo senza rischio → OA.

NB La positività dei tassi di interesse non è implicata da AOA

↳ IP: tassi di interesse siano >0 ⇝ $b(t,T)<1$

Se non lo assumessi i prezzi prima della scadenza T potrebbero essere $\geq, =, < 1$ (non accettabile)

Vale POSTULATO DI RENDIMENTO DEL DENARO: fix t, il prezzo dei titoli decresce all'allontanarsi della scadenza.

"più la scadenza è lontana e meno pago":  $b(t,T') > b(t,T'')$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI A PRONTI DEGLI ZCB

t fix

$T \xrightarrow{f} b(t,T)$ $\quad$ f definisce i prezzi

mentre

T fix

$\{b(t,T) : t \le T\}$ processo stocastico al variare di t

non è poss affermare alcun tipo di monotonia per t

Oss

Se $i > 0$, noto, fix T $\to$ i $b(t,T)$ sono monotoni

Se i ignoto $\to$ $b(t,T)$ aleatorio

TASSI

Cambiano a seconda del regime dove si opera. (esponenziale, ...)

Sono desunti dai prezzi dei titoli a cedola nulla

$r(t,T)$ 'tasso' a pronti / tasso risk free

sarebbe 'intensità': intensità di rendimento, di una operazione iniziata in t, di 1 ZCB tenuto fino a scadenza T.

yeld to maturity (= rendimento a scadenza)

$$b(t,T)\, e^{r(t,T)(T-t)} = 1$$

$$e^{r(t,T)(T-t)} = \frac{1}{b(t,T)} \to -r(t,T) = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{1}{b(t,T)}\right)$$

$$r(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln\left[b(t,T)\right]$$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI A PRONTI

fix t

$T \xrightarrow{f} r(t,T)$ f definisce i tassi

mentre

fix T

$\{ r(t,T) : t \leq T \}$ processo stocastico al variare di t

20/2

$r(t)$ tasso istantaneo

è tasso di rendimento di un operazione che inizia in t
e finisce un secondo dopo

$$r(t) = \lim_{T \to t^+} r(t,T)$$

$$r(t) = \boxed{-\frac{1}{T-t}} \boxed{\lim_{T \to t^+}} \boxed{\ln b(t,T)}$$

$$= -\lim_{T \to t^+} \frac{\ln(b(t,T)) - \ln(\overset{0}{b(t,t)})}{T-t} \overset{\text{se } \exists \lim}{=} -\left[\frac{d \ln b(t,T)}{dT} \right]_{T=t}$$

$$= -\left[\frac{\frac{d\, b(t,T)}{dT}}{b(t,T)} \right]_{T=t} = -\left[\frac{d\, b(t,T)}{dT} \right]_{T=t}.$$

$$\hookrightarrow r(t) = -\left[\frac{d\, b(t,T)}{dT} \right]_{T=t}$$

$\{ r(t) \,;\, t \geq 0 \}$ processo stocastico del tasso istantaneo a pronti

è un' [illegible] in realtà

• $i(t,T)$ tasso annuo di rendimento

$$i(t,T) = e^{r(t,T)} - 1$$ legge exp con $r(t,T)$ intensità

$$b(t,T)\left[1 + i(t,T)\right]^{T-t} = 1$$

ZCB capitalizzato fino T ho come montante 1

$$i(t,T) = \left[\frac{1}{b(t,T)}\right]^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

$$i(t,T) = b(t,T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$$

se fix t → struttura per scadenze al variare di T

$\{ i(t,T) \; ; \; t \leq T \}$ processo stocastico del tax annuo di rendim.

• $L(t,T)$ 'tasso' interesse in regime interesse semplice

durata < 1 anno

$$b(t,T)\left[1 + L(t,T)(T-t)\right] = 1$$

$$L(t,T) = \left[\frac{1}{b(t,T)} - 1\right]\frac{1}{T-t}$$

$\{ L(t,T) ; \; t \leq T \}$ processo stocastico

se fix t al variare di T ho una struttura a pronti dei tassi.

MONEY MARKET ACCOUNT (DEPOSIT ACCOUNT / MONEY MARKET ACCOUNT)

è un conto di deposito bancario

$B(t)$ valore conto in t

$$\begin{cases} B(0) = 1 \text{ €} \\ dB(t) = r(t)B(t)\,dt \end{cases}$$

reinvesto istantaneamente il montante che scade immediatamente $\to r(t)$
(STRATEGIA DI ROLL OVER)
REINVESTIMENTO

relazione del Bank - Account in t
la Δ istantanea di $B(t)$ è $\propto$ a $B(t)$ e all'ampiezza del periodo

$$\frac{\frac{dB(t)}{dt}}{B(t)} = r(t)$$

$$\frac{d \ln B(t)}{dt} = r(t)$$

$$\ln B(t) = \int_0^t r(u)\,du + c$$

$$B(t) = e^{\int_0^t r(u)\,du + c}$$

Oss $B(0) = e^{\int_0^0 r(u)\,du + c} \triangleq 1$

$\to c = 0$

(ipotesi deterministica)

$$B(t) = e^{\int_0^t r(u)\,du} .$$

L'investimento in questo tipo di conto ha un rendimento che è crescente

FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE

$b(t,T)$ cioè il prezzo dei titoli a cedola nulla, funge da fattore di attualizzazione per valutare importi certi esigibili in T

È deterministico perché lo osservo in t

"qual devo pagare per avere K in t?"

- AOA → Non so qual, ma posso replicare il prezzo
(UNICITÀ PREZZI →) di un'entità che in T vale K

R: $K \cdot b(t,T)$ è quanto pagherò

dim Il valore del pay-off in t può essere diverso da $K \cdot b(t,T)$ in t? No, per legge del prezzo unico. Se per K in T potessi pagare qlc di meno di $K \cdot b(t,T)$ allora in T venderei allo scoperto i K ZCB e comprerei K in T, incassando subito qlc. → OA.

idem se pagassi qlc di più → OA. / cvd

FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE STOCASTICO

$$\frac{B(t)}{B(T)} = \frac{e^{\int_0^t r(u)du}}{e^{\int_0^T r(u)du}} = e^{\int_0^t r(u)du - \int_0^T r(u)du} = e^{-\int_t^T r(u)du}.$$

$t \leq T$

stocastico perché $r(T)$ ignoto, $B(T)$ ignoto e $r(t)$ ignoto all'avvicinarsi a T

FATTORE DI ATTUALIZZAZIONE SOTTO TASSI COSTANTI E DETERMINISTICI

Spesso i tassi di rendimento, desunti da ZCB, sono deterministici e costanti

$r(t,T) = r$ (noto)

→ i tassi istantanei sono noti

→ $b(t,T) = e^{-r(T-t)}$ cost. → $B(t) = e^{rt}$

→ $b(t,T) = \dfrac{B(t)}{B(T)}$ fattore attualizzazione (rapporto 2 B.A. in t e T)

Fine descrizione attività presenti sul mercato.

CONTRATTI / STRUMENTI DERIVATI

CONTRATTI FORWARD (A TERMINE)

Sono accordi fra due parti per scambiarsi in una data futura (data consegna/delivery date) un bene definito nell'accordo (attività sottostante) ad un prezzo che è fissato al momento dell'accordo (prezzo consegna/delivery price)

Fanno riferimento a qlc che si perfezionerà in futuro

Al momento della stipula non si paga nulla

SHORT → posizione contrattuale di chi vende

LONG → posizione contrattuale di chi compra

Le parti hanno una posizione simmetrica:

entrambe hanno degli obblighi (≠ opzioni)

entrambe hanno dei diritti (obbligo a ricevere qlc)

Questi contratti ∄ nei mercati regolamentati, ma esistono nei mercati Over The Counter (OTC)

Nascono dal bisogno di tutelarsi dalle fluttuazioni dei prezzi

Nella realtà: anche se teoricamente non si paga nulla alla stipula, praticamente succede che si verifichino depositi convenzionali a titolo di garanzia che verranno poi restituiti (non li consideriamo)

IP: le parti contrattuali sono sempre solventi

IP: unico rischio è l'andamento del prezzo del titolo sul mercato

0 data stipula contratto

T data di consegna

K prezzo di consegna

S(t) prezzo a pronti del bene sottostante

$\{S(t) : t > 0\}$ processo stocastico del prezzo a pronti del bene sottostante

$V^L(t)$ valore posizione long contratto forward

$\{V^L(t) ; 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico del valore posizione long.

$V^S(t)$ valore posizione corta di un contr. forward

$\{V^S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico del valore posizione corta

In T:

- pos. long $\quad S(T) - K \quad$ riceve bene e paga prezzo

  ↓

  vale $S(T)$ sul mercato

- pos. short $\quad K - S(T) \quad$ riceve prezzo e dà merce

  ↓

  vale $S(T)$

AOA $\rightarrow V^L(T) = S(T) - K$

$\rightarrow V^S(T) = K - S(T)$

dice che il valore di una pos. long in T coincide col payoff

Se il contratto prevede 2 soli istanti di tempo $0, T$:

in 0: $V^L(0) = V^S(0) = 0$ si paga 0€ per una merce che vale 0€

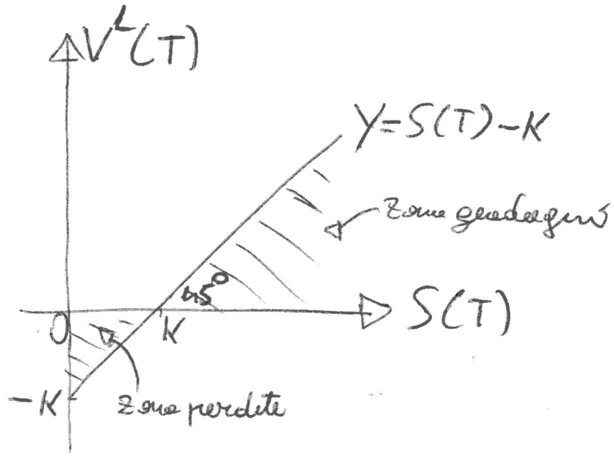
in T: $V^L(T) + V^S(T) = 0$

Per un t intermedio (se è previsto):

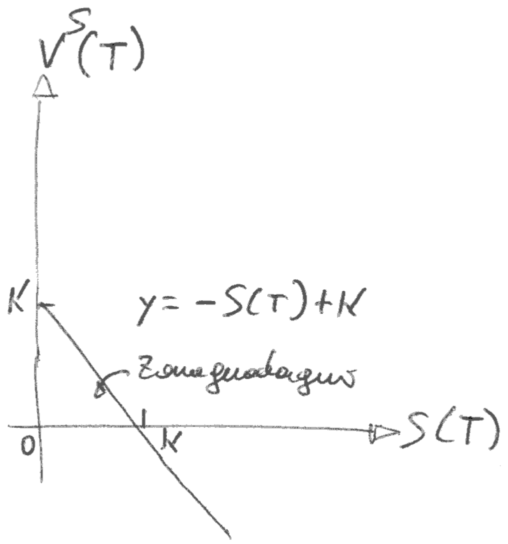
$\forall t \mid 0 \leq t \leq T : V^L(t) + V^S(t) = 0$

INDIPENDENZA DEL PREZZO DALLA ATTIVITÀ SOTTOSTANTE

fix T



- Sono richieste delle garanzie per le zone di perdita/guadagno
- il bene (materie/azioni) non può avere valori negativi



26/2

PREZZO FORWARD ($\neq$ PREZZO ESERCIZIO)

$F(t,T)$ particolare prezzo di consegna (K) che rende nullo il valore del contratto forward in $t \in [0,T]$

$F(t,T)$ prezzo forward in t, $0 \leq t \leq T$

$\{F(t,T) : t \in [0,T]\}$ processo stocastico del prezzo forward

AOA $\rightarrow K = F(0,T)$

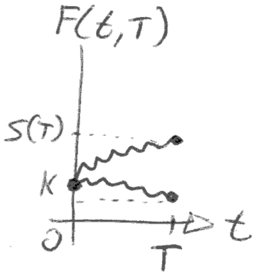
- il K scelto in 0 deve coincidere con il prezzo forward in 0.
- è valore | contratto ha valore nullo all'epoca di stipulazione 0.

nei contratti futures il prezzo di consegna viene modificato giorno per giorno.

$F(T,T) = S(T)$

poichè $S(T) - K \triangleq 0$ in T, allora $K = S(T) \Rightarrow F(T,T) = S(T)$

se io facessi in T un nuovo contratto forward per la consegna del bene nello stesso istante T, allora qst sarebbe un prezzo a pronti | contratto ha valore nullo



MOTIVAZIONI CHE PORTANO ALLA STIPULAZIONE DEL CONTR FORWARD

1) Copertura dai rischi :

le parti (HEDGERS) eliminano / attenuano il rischio che grava sulla attività sottostante.

es. Un produttore di grano può vendere il proprio prodotto a pronti, alla fine del raccolto. Oppure può venderlo prima in posizione short: il vantaggio è che avrà già fissato il prezzo, quindi sarà tutelato dal rischio di aleatorietà dei prezzi di mercato; tuttavia rinuncerà ad eventuali guadagni se il prezzo della merce sarà maggiore del K fissato.

es. Se so di avere bisogno di \$ e sono in europa: o aspetto il prezzo dei \$ al momento del bisogno o concludo un forward e li acquisto al prezzo fissato K, in posiz. long.

2) Motivi speculativi

gli speculatori entrano nei contratti per guadagnare; finanziamento aspettativa di guadagno:

$$-S(0) \quad\quad S(T)$$
$$0 \quad\quad T$$

contr a pronti: in 0 si paga tutto e in T si riceve

$$0 \quad\quad S(T)-K$$
$$0 \quad\quad T$$

contr forward: non servono finanziamenti in 0 (+ comodo)

questo tipo di contratti permettono di 'amplificare' i guadagni (LEVA FINANZIARIA), cioè beneficiano del costo nullo in 0.
Nella pratica è richiesto un deposito cauzionale, molto < rispetto al valore del contratto 5/10%
Gli speculatori sono in antitesi a coloro che vogliono tutelarsi dal rischio

3) Motivi speculativi

gli arbitraggisti sono quelli che entrano nel mercato per realizzare guadagni sfruttando opportunità di arbitraggio.
È una categoria di persone benefica perché porta i prezzi di mercato ad una situazione di equilibrio

Oss Per le ipotesi fatte tutti gli operatori economici lo sono razionali e non saziati

Nei contratti forward può avvenire:

a) consegna fisica del bene in T
o
b) regolamento della differenza fra $S(T)$ e K

in T:

- pdv speculatore: long $S(T)-K$ $\nearrow >0$ il short paga ≠ ; $\searrow <0$ il long paga ≠

[short $K - S(T)$]

• pdv produttore grano:

· short $\underbrace{\overset{\text{patto}}{K} - \overset{\text{merce uscente}}{S(T)}}_{\text{pos. short}} + \underbrace{\overset{\text{vendita}}{S(T)}}_{\text{a pronti}} = K$

l'effetto della copertura c'è, anche senza la consegna fisica.

· long $\underbrace{\overset{\text{entra merce}}{S(T)} - \overset{\text{patto}}{K}}_{\text{pos. long}} \underbrace{- S(T)}_{\text{a pronti}} = -K$

→ è irrilevante per la valutazione e per la motivazione che nel contratto ci sia o non ci sia la consegna fisica del bene.

DETERMINAZIONE DEI PREZZI DEI CONTRATTI FORWARD

1) Il bene sottostante non genera redditi né richiede costi, fino a T
es. ZCB, tenere oro

$0 \leq t < T$

portafoglio A: $\begin{cases} \text{posizione lunga sul contratto forward} \\ \text{ci sono } K \text{ ZCB con scadenza } T \end{cases}$ (disinteresse del costo)

portafoglio B: bene sottostante
(una unità)

$\forall t < T$ sia A sia B non generano flussi di cassa

in T:

A e B hanno lo stesso valore $V_A(T) = V^L(T) + K\,b(t,T)$

$= S(T) - K + K$

$= S(T)$

$V_B(T) = S(T)$

AOA → $V_A(t) = V_B(t)$ perché hanno lo stesso valore alla scadenza $\forall t < T$

Se non fossero uguali avrei OA : comprerei portaf + economico e venderei l'altro $\Rightarrow$ OA II° tipo.

$$\left.\begin{array}{l} V_A(t) = V^L(t) + K\, b(t,T) \\ V_B(t) = S(t) \end{array}\right\} V^L(t) = S(t) - K\, \underbrace{b(t,T)}_{\text{fatt. attual.}}$$

dim (x ASSURDO)

TH: $V^L(t) + K\, b(t,T) = S(t)$

A) suppongo $\exists t \mid V^L(t) + K\, b(t,T) > S(t)$

in t:
- vendo pos long $\quad V^L(t)$
- vendo allo scoperto K ZCB con scad T $\quad K \cdot b(t,T)$
- compro a pronti il bene sottostante $\quad -S(t)$

$\quad > 0$

in T:
- (vendo) consegno il bene $\quad +K$
- rimborso gli ZCB $\quad -K$

$\quad = 0$ OA II° tipo

B) suppongo $\exists t \mid V^L(t) + K\, b(t,T) < S(t)$

in t:
- assumo posizione long sul forward $\quad -V^L(t)$
- compro a pronti K ZCB $\quad -K\, b(t,T)$
- vendo a pronti allo scoperto il bene sottost. $\quad S(t)$

$\quad > 0$

$V^L(T) = S(T) - K$

in T:
- incasso il valore dei bond $\quad +K$
- ricevo il bene, pago K $\quad -K + S(T)$
- restituisco il bene $\quad -S(T)$

$\quad = 0$ OA II° tipo

Cvd

Poiché $V^L(t) = S(t) - K\, b(t,T)$, per definizione di contratto forward

ho $S(t) - F(t,T)\, b(t,T) \triangleq 0 \overset{①}{\Rightarrow} F(t,T) = \dfrac{S(t)}{b(t,T)}$

prezzo forward per un contratto che non genera flussi di cassa fino alla data di consegna

$b(t,T)$ fattore attualizzazione $\Rightarrow \dfrac{1}{b(t,T)}$ fattore montante

$$\overset{②}{\Rightarrow} F(t,T) = e^{r(t,T)(T-t)} \cdot S(t)$$

In particolare, se $t=0$:

$$V^L(0) = S(0) - K\, b(0,T)$$

$$\overset{①}{\Rightarrow} K = F(0,T) = \frac{S(0)}{b(0,T)}$$

$$\overset{②}{\Rightarrow} F(0,T) = e^{r(0,T)T} \cdot S(0)$$

il prezzo da pagare in futuro è il prezzo in $t=0$ capitalizzato per T al tasso $r(0,T)$

dim (X ASSURDO)

TH: $K = \dfrac{S(0)}{b(0,T)}$

Suppongo di stipulare un contratto a termine con prezzo di consegna K e prezzo teorico $\dfrac{S(0)}{b(0,T)}$

A) suppongo che $K > \dfrac{S(0)}{b(0,T)}$

in 0:

$K - \frac{S(0)}{b(0,T)} > 0$

- vendo allo scoperto $\frac{S(0)}{b(0,T)}$ ZCB con scadenza T $\quad \cancel{b(0,T)}\frac{S(0)}{\cancel{b(0,T)}}$

Oss. Il loro numero è dato da S(0) diviso il loro pr. unitario

- compro a pronti il bene sottostante $\quad -S(0)$
- vendo a termine il bene $\quad 0$

$$= 0$$

in T:

(il lungo scoperto)

- consegno il bene e incasso K $\quad K$
- rimborso i bond $\quad \frac{S(0)}{b(0,T)}$

$$> 0$$

OA I° tipo

B) suppongo $K - \frac{S(0)}{b(0,T)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{S(0)}{b(0,T)} - K > 0$

in 0:

- compro a termine il bene $\quad 0$
- compro $\frac{S(0)}{b(0,T)}$ ZCB con scad T $\quad -\frac{S(0)}{\cancel{b(0,T)}}\cancel{b(0,T)}$
- vendo allo scoperto il bene sottostante $\quad S(0)$

$$= 0$$

in T:

- incasso valore bond $\quad \frac{S(0)}{b(0,T)}$

$V^L(T)$: arrivo, vendo

- ricevo il bene, lo restituisco e pago K $\quad S(T) - K$

$$> 0$$

OA I° tipo

Cvd//

Oss Mie – sulle dimostrazioni

- se compro/vendo a termine il bene $\rightarrow 0$ in t
- assumere una posizione su un contratto $\rightarrow -V^0(t)$
- vendere una posizione su un contratto $\rightarrow +V^0(t)$

27/2

Oss La $F(t,T)=\dfrac{S(t)}{b(t,T)}$ deriva da $V^L(t)=S(t)-K\,b(t,T)$ $0\leq t\leq T$

(e dalla definizione di prezzo forward)

dim

TH: $V^L(t)=S(t)-K\,b(t,T)$

considero in $t<T$ i 2 portafogli:

A': posizione long sul forward stipulato in 0, data consegna T, prezzo K

B': bene sottostante

K ZCB con scadenza T venduti allo scoperto

posizione corta sui titoli

I portafogli non generano flussi di cassa prima di T

In T hanno lo stesso valore: $S(T)-K$

$$V_{A'}(T)=V^L(T)=S(T)-K=V_{B'}(T)$$

AOA $\rightarrow$ A' e B' devono avere lo stesso valore anche prima di T

$V_{A'}(t)=V_{B'}(t)$ $\forall t\in[0,T]$, cioè $V^L(t)=S(t)-K\,b(t,T)$

$\forall t\in[0,T]$

/ cvd

(NB) Un contratto forward è un'attività RIDONDANTE, perché può essere replicato tramite un portafoglio costituito dalle attività di base (portafoglio replicante) che sono i titoli risk-free o la attività sottostante.

Il portafoglio ricopiabile è detto RIDONDANTE.

Vediamo degli esempi di quanto appena detto:

CASI PARTICOLARI (attività sottostante del forward).

1) L'attività sottostante è un ZCB con scadenza S $t<T<S$

$$S(t) = \begin{cases} b(t,S) & t \leq S \\ 0 & t > S \end{cases}$$

$$V^L(t) = S(t) - K\, b(t,T) = b(t,S) - K\, b(t,T) \qquad 0 \leq t \leq T\ (<S)$$

$$F(t,T) = \frac{S(t)}{b(t,T)} = \frac{b(t,S)}{b(t,T)} \triangleq b(t,T,S)$$

$b(t,T,S)$ è prezzo forward di ZCB
è prezzo concordato in t di un titolo a cedola nulla che è scambiato in T e scade in S.

2) Forward rate agreement (FRA)

LIBOR/EURIBOR (= tax pagati per periodo)

L'attività sottostante è il tasso di interesse $L(T,S)$

0 T S

In 0 al momento dell'accordo, si pattuisce il tasso fisso.
In S si scambiano gli interessi formatisi nel periodo $[T,S]$ calcolati sul un capitale di riferimento (CAPITALE NOMINALE/NOZIONALE) N, che non viene scambiato, in regime interesse semplice contro gli interessi a tasso variabile (aleatorio).

pos long → riceve interessi a tax variabile $L(t,S)$
pos short → riceve interessi a tax fisso K

Il tasso di interesse variabile, in T è noto. per periodo $[T,S]$

Anche se la data di consegna è S, poiché $L(T,S)$ è desunto dal prezzo del titolo a cedola nulla $b(T,S)$ in RIS, il payoff finale è già noto in T.

payoff finale di un long FRA in S:

$$FRA^L(S,T,S) = N(S-T)\cdot L(T,S) - K\cdot N(S-T)$$

$$L(T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{b(T,S)} - 1\right)$$

$$FRA^L(S,T,S) = N\left[\frac{1}{b(T,S)} - 1 - K(S-T)\right]$$

poiché $FRA^L(S,T,S)$ è già noto in T, il suo valore al tempo T è:

$$FRA^L(T,T,S) = FRA^L(S,T,S)\cdot b(T,S)$$

$$= N\left[\frac{1}{b(T,S)} - (1+K(S-T))\right] b(T,S)$$

$$= N(1+K(S-T))\left[\frac{1}{b(T,S)(1+K(S-T))} - 1\right] b(T,S)$$

$$= N(1+K(S-T))\left[\frac{1}{1+K(S-T)} - b(T,S)\right]$$

payoff finale di $N(1+K(S-T))$ posizioni corte in contratti forward tutti con data di consegna T, prezzo di consegna $K = \frac{1}{1+K(S-T)}$ e variabile sottostante un titolo a cedola nulla unitario di scadenza S

Per $t < T$ ho quindi:

$$FRA^L(t,T,S) = N(1+K(S-T))\, V^S(T) =$$

$$= N(1+K(S-T))\left[\frac{1}{1+K(S-T)} - b(T,S)\right] b(t,T)$$

$$= N(1+K(S-T))\left[\frac{b(t,T)}{1+K(S-T)} - b(t,S)\right]$$

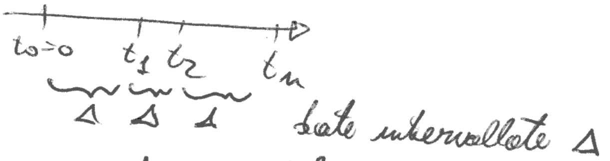
da cui ottengo il tasso forward K che rende $FRA^L(t,T,S)=0$

$$K \triangleq L(t,T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{b(t,T)}{b(t,S)} - 1\right) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{1}{b(t,T,S)} - 1\right)$$

Oss $b(t,T,S) = \dfrac{b(t,S)}{b(t,T)}$

3) Swap su tassi di interesse

È un portafoglio di F.R.A



pos long : PAYER SWAP – riceve interessi a tax variabile
pos short : RECEIVER SWAP – riceve interessi a tax fisso

Ci sono le date di pagamento di interesse (SETTLEMENT DATES) $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ con $0=t_0<t_1<\_<t_n$ e $t_i-t_{i-1}=\Delta$ $\forall i=1,..,n$ e le date in cui il tasso variabile diventa noto (RESET DATES) $\{t_{i-1}\}_{i=1}^{n}$

Valore al tempo $t_0=0$ di un payer-swap:

$$SWAP^P(t_0) = \sum_{i=1}^{n} FRA^L(t_0,t_{i-1},t_i) = N(1+K\Delta)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+K\Delta}\,b(t_0,t_{i-1})-b(t_0,t_i)\right]$$

$$= N\left[1-b(t_0,t_n)-K\Delta\sum_{i=1}^{n} b(t_0,t_i)\right]$$

NB Il tasso fisso K è lo stesso per tutti i FRA, quindi non può coincidere con tutti i tassi forward $L(t_0,t_{i-1},t_i)$. Di conseguenza ciascun FRA può avere valore $\neq 0$ (>0 o <0) ma lo swap è strutturato in maniera tale da avere un valore iniziale complessivo nullo.

TASSO SWAP: tax fisso K che in t_0 rende nullo il valore swap

$K \mid SWAP^P(t_0)=0$ (è imposs che K = tax variabile del periodo) complessivamente $\to K \mid \Sigma(\cdot)=0$

$$K \triangleq \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1-b(t_0,t_n)}{\sum_{i=1}^{n} b(t_0,t_i)}$$ da cui, con qlc passaggio

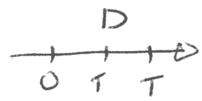
$$\|$$

$$L^{SWAP}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i L(t_0,t_{i-1},t_i)$$

cioè il tasso swap è una media pesata dei tassi forward

$L(t_0, t_{i-1}, t_i)$ con pesi $w_i = \dfrac{b(t_0,t_i)}{\sum_{j=1}^{n} b(t_0,t_j)}$ $\quad i=1,\dots,n$

4) Bene sottostante che paga 1 dividendo di importo certo D in τ: $0<\tau<T$



portafoglio A: $\begin{cases} \text{pos long sul forward} \\ K \text{ titoli di ZCB con scadenza } T \text{ (long)} \end{cases}$

portafoglio B: $\begin{cases} \text{bene sottostante che paga } D \text{ in } \tau \\ D \text{ ZCB di scadenza } \tau \text{ venduti allo scoperto} \end{cases}$

$t<\tau$: no movimenti per A e B

In τ:

A: non genera flussi di cassa fra τ e T

B: incassa D (dividendo)

paga D (estinguono i bond)

$= 0$€ flusso netto

$\tau<t<T$: no movimenti per A e B

In T: $V_A(T) = V^L(T) + K = S(T) - K + K = S(T)$

$V_B(T) = S(T)$

AOA $\to V_A(t) = V_B(t) \quad \forall t<T$

$V_A(t) = V^L(t) + K\cdot b(t,T)$

$$V_B(t) = \begin{cases} S(t) - D\,b(t,\tau) & t \leq \tau^{-} \to \text{prima dei pagamenti} \\ S(t) & t > \tau \end{cases}$$

$$\hookrightarrow V^L(t) = \begin{cases} [S(t) - D\,b(t,\tau)] - K\,b(t,T) & t \leq \tau^{-} \\ S(t) - K\,b(t,T) & t > \tau \end{cases}$$

$$F(t,T) = \begin{cases} \dfrac{S(t) - D\,b(t,T)}{b(t,T)} & t \leq T^- \\[2ex] \dfrac{S(t)}{b(t,T)} & t > T \end{cases}$$

$$\overset{K}{F}(0,T) = \frac{S(0) - D\,b(0,T)}{b(0,T)}$$

montante del pr. a pronti del dividendo = prezzo a termine del dividendo

Pagando il dividendo o ottenendolo, questo altera il prezzo forward perché $S(t)$ cambia valore a seconda che $t<T$ o $t>T$:
↳ comprando il bene dopo T non otterrei il dividendo, dunque sopravvaluterei il prezzo del contratto, perciò devo depurare il valore $-D\,b(0,T)$ del dividendo.

Oss Non è più indifferente possedere il bene in 0 o T per dividendo.

4/3

5) Bene sottostante paga dividendi, tra t e T, certi sia come importi che come date di pagamento

$D(t,T)$ valore in t dei dividendi pagati tra t e T

portafoglio A: $\begin{cases} \text{pos. lunga sul contr. forward} \\ K \text{ ZCB in pos. lung con scadenza } T \end{cases}$

portafoglio B:
- bene sottostante
- tante posizioni corte (debiti) su titoli a cedola nulla quante sono le date di pagamento dei dividendi ciascuno con scadenze e valore nominale coincidente con data di distribuzione del dividendo e relativo importo

$\{d_i\}_{i=1}^{n}$ sono pagati ai tempi $\{t_i\}_{i=1}^{n}$, $0<t_1<t_2<\ldots<t_n<T$

$$D(t,T) = \begin{cases} \sum_{t_i > t} d_i\, b(t,t_i) & \text{se } t \leq t_n \\ 0 & \text{se } t > t_n \end{cases}$$

In $t<T$:

A: nulla

B: uso i dividendi per estinguere i bond corrispondenti
$\rightarrow$ flussi netti nulli

In T:

$$V_A(T) = V_B(T) = S(T)$$

AOA $\rightarrow$ $V_A(t) = V_B(t) \quad , t<T$ e $V_A(t) = V^L(t) + Kb(t,T)$

$= S(t) - D(t,T)$

$$V^L(t) = [S(t) - D(t,T)] - Kb(t,T)$$

$$F(t,T) = \frac{S(t) - D(t,T)}{b(t,T)}$$

$$F(0,T) = \frac{S(t) - D(0,T)}{b(0,T)}$$

Al posto del prezzo a pronti sostituisco il prezzo a pronti depurato del valore dei dividendi pagati fino alla data di consegna perché chi compra a termine il bene non li percepisce.

6) Bene sottostante che produce dividendi nel continuo

Ipotesi:

1) bene sottostante paga dividendi nel continuo, istante per istante

2) i dividendi pagati da una unità del bene sottostante in un certo intervallo di tempo, sono proporzionali al valore del bene e alla ampiezza dell'intervallo, a meno di errori trascurabili.

3) tali dividendi sono via via utilizzati per acquistare quantità addizionali del bene stesso. (reinvestimento)

2) $d(t, t+\Delta t)$: dividendi pagati da 1 unità di bene nell'intervallo $[t, t+\Delta t]$

q intensità di dividendo (fattore di proporzionalità)

$$d(t, t+\Delta t) = q\,S(t)\,\Delta t + \underbrace{o(\Delta t)}_{\text{errore}} \quad , \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

l'errore sta nel fatto che il prezzo del bene $S(t)$ può variare nell'intervallo Δt; è un infinitesimo di ordine superiore al primo cioè è trascurabile

3)

$n(t)$ quantità di bene disponibile al tempo t

Come evolve nel tempo $n(t)$?

Evolve come il montante nel regime esponenziale con intensità q:

$n(t+\Delta t) - n(t)$ incremento del bene dovuto ai dividendi del bene che si sono potuti comprare

$\underbrace{n(t)}_{n°}\, d(t, t+\Delta t)$ rendita di $n(t)$ dividendi su $[t, t+\Delta t]$

$$n(t+\Delta t) - n(t) = \underbrace{\frac{n(t)\, d(t, t+\Delta t)}{S(t)}}_{\text{n° unità del nuovo bene che potrò acquistare fra } t \text{ e } t+\Delta t} + o_1(\Delta t) \quad , \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

infinitesimo ordine >1

$$= \frac{n(t)\, q\, \cancel{S(t)}\, \Delta t}{\cancel{S(t)}} + o_2(\Delta t) \quad , \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

rapp. incrementale di n

$$\frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = n(t)\, q + \frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t} \quad \Big/ \lim_{\Delta t \to 0}$$

se $\exists$ lim e se è derivabile a sinistra ho una derivata

Oss Non conosco la $n(\cdot)$ come funzione, $\nexists$ ipotesi su di lei, ma conosco la parte di destra.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = \underbrace{n(t)\, q}_{\text{cost} \to \exists n'(\cdot)}$$

$$n'(t) = q\, n(t)$$

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = q$$

$$\left[\ln[n(t)]\right]' = q$$

$$\ln[n(t)] = qt + c$$

$$n(t) = e^{qt+c}$$

Oss. Dato $n(0)$, la c è determinata $n(0) = e^{c}$

$$\rightarrow n(t) = e^{qt} \cdot e^{c} = e^{qt} \cdot n(0)$$

$$n(t) = n(0)\, e^{qt}$$

Allora

$$n(T) = n(0)\, e^{qT}$$

$$n(t) = n(0)\, e^{qt}$$

$$\frac{n(T)}{n(t)} = \frac{e^{qT}}{e^{qt}} = e^{q(T-t)}$$

$$n(T) = n(t)\, e^{q(T-t)}$$

partendo in t con $n(t)$ quantità di bene, in T ho $n(T)$ quant di bene

portafoglio A: $\begin{cases} \text{posizione long sul forward} \\ K \text{ ZCB con scadenza } T\text{, pos corta} \end{cases}$

portafoglio B: $e^{-q(T-t)}$ unità del bene sottostante in t (<1)

voglio creare un B che replichi A

Oss Voglio che $n(T) = 1$ unità; allora $n(t) < 1$ e pongo $n(t) = e^{-q(T-t)}$

perché $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{n(T)} = n(t)\, e^{q(T-t)}$ $\quad 1 = n(t) \cdot e^{-q(T-t)}$ se $n(t) = e^{q(T-t)}$

In $t < T$ non ci sono flussi cassa netti

In T:

A: $V^{L}(T) + K = S(T) = n(T)$

B: $S(T) = n(T)$

AOA $\Rightarrow$ $V_A(t) = V_B(t)$

$$V^L(t) + K b(t,T) = e^{-q(T-t)} S(t)$$

$$V^L(t) = e^{-q(T-t)} \cdot S(t) - K b(t,T)$$

$$F(t,T) = \frac{S(t) e^{-q(T-t)}}{b(t,T)}$$

$$F(0,T) = \frac{S(0) e^{-qT}}{b(0,T)} = S(0) e^{(r-q)T}$$

$r = r(0,T)$
tasso a pronti desunto da prezzo ZCB

al posto di $S(t)$ c'è il valore del prezzo sottostante per la qnt bene depurata dal valore dei dividendi $(e^{-q(T-t)})$ perchè <1.

$$\frac{1}{b(0,T)} = e^{r(0,T) \cdot T}$$ yeld to maturity

Oss Confrontando r con q posso dire se è maggiore il prezzo che devo pagare in 0 per comprare a pronti il bene o il prezzo che pago a termine K:

a) $K = S(0) \Leftrightarrow r = q$

avere il bene a pronti pagandolo $S(0)$ deve essere lo stesso che averlo a termine pagandolo K
Perchè:

- se compro a pronti il bene e pago K subito sono ripagato in maniera equivalente dai dividendi dei prodotti dal bene stesso
- se compro a termine, perdo dividendi, ma pago K che equivale al valore del bene in 0.

b) $K > S(0) \Leftrightarrow r > q$

rende più il denaro che non il possesso del bene. Il fatto di pagare dopo consente di guadagnare interessi. se si è investito il prezzo di consegna ciò che guadagno con qsti investimenti recupera i dividendi persi dall'acquisto a termine. Allora affinchè ci sia equità (non c'è un vantaggio) ad acquistare a termine/a pronti K (a termine) deve $> S(0)$ 28

c) $N < S(0) \Leftrightarrow r < q$

rende di più il bene avendolo subito, che vengli interessi sul prezzo di consegna: allora affinchè non ci sia un vantaggio $N \leq S(0)$

Esempio delle attività sottostanti:

- indice Borsa
- fondo di investimento

nel fondo i dividendi sono reinvestiti (FONDO A CAPITALIZZAZIONE) in azioni o altro.

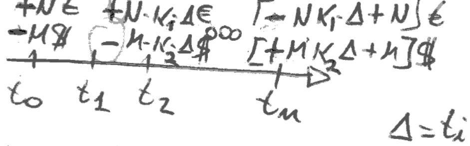
Quando l'attività sottostante è la valuta estera, gli interessi sul \$ sono espressi in dollari e contribuiscono ad incrementare la quantità di valuta disponibile. Come se fossero reinvestiti via via che si producono dividendi.

- $S(t)$ sarà valore di 1 \$ in € : tasso di cambio a pronti
- q intensità di rendimento di un conto di valuta estera se interessi sono calcolati RIC esponenziale
- N tasso a termine per 1 unità di valuta

7) Swap su valute (plain vanilla)

contrario?

Sono un portafoglio di contratti Forward con sottostante una valuta estera



$\Delta = t_i - t_{i-1}$

Avviene scambio

- in t_0: di 2 capitali su valuta estera e domestica tali che i capitali abbiano lo stesso valore ↳ importo fix dei forw.
- in t_n: i capitali si riscambiano (movimento opposto a prima)
- negli istanti intermedi: si scambiano interessi con valuta del capitale cui si riferiscono.

Oss Comprando N€ riceverò interessi in € e pagherò \$

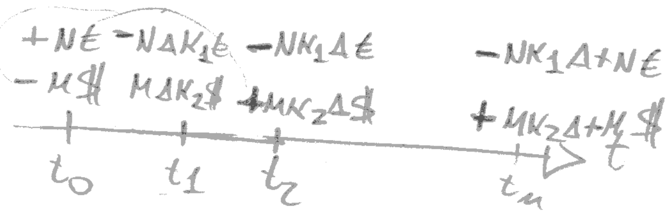
$S(t)$ tasso cambio ; prezzo in € di 1 \$

K_1 tax interesse € } noti e fissati, RIS (per questo PLAIN VANILLA)
K_2 tax interesse \$
nei $t_{i-1} - t_i$

N € } noti e fissati
M \$

Oss In t_0 Σ valori contratti $= 0$.

?



E' un caso particolare di portafoglio con contratti forward con attività sottostante il \$: (pdv long)

Oss Pongo valore swap $\triangleq 0$ vedendo K_1 e K_2 come variabili ne fisso una e risolvo per l'altra.

?

8) Forward su una merce che richiede costi di magazzino certi. (importi, date pagamento)

La merce ha un costo di deposito (dividendo negativo)

$A(t,T)$ costi di magazzino noti, del periodo $[t,T]$ in t

es. c costo in T $\rightarrow A(t,T) = c \cdot b(t,T)$

Valuto un forward con bene sottostante $A(t,T)$

portafoglio A { pos long forward
K ZCB pos long con scadenza T

portafoglio B { bene sottostante (long)
tanti ZCB pos long quanti sono i costi da sostenere corrispondenti come importi e date di pagamento

$t < T$:

A: non generano movimenti

B: ogni volta che il bond scade, uso il suo valore nominale per pagare il costo di magazzino corrispondente (fino a T incluso)

$\rightarrow$ flusso netto nullo

In T:

A e B hanno lo stesso valore in T

$$\underbrace{S(T)-K + K\cdot b(T,T)}_{V_A} = \underbrace{S(T)}_{V_B}$$

AOA $\rightarrow$ $V_A(t) = V_B(t) \quad \forall t < T$

$$V^L(t) + K b(t,T) = S(t) + A(t,T)$$

$$V^L(t) = [S(t) + A(t,T)] - K b(t,T)$$

$$F(t,T) = \frac{S(t) + A(t,T)}{b(t,T)}$$

$$\overset{K}{F}(0,T) = \frac{S(0) + A(0,T)}{b(0,T)}$$

ho il prezzo a pronti sommato a tutti i costi che devo sostenere fino alla data di consegna.

Interpretazione: avere il bene a pronti invece che a termine, costa e non rende. Se l'avrò a termine risparmierò i costi di deposito. Allora affinché sia indifferente comprare a termine e a pronti il bene, per evitare OA, quando calcolo il montante del prezzo a pronti $1/b(0,T)$ il prezzo di riferimento non sarà $S(0)$ ma $S(0) + A(0,T)$.

È l'opposto di quanto succedeva per i dividendi, che andavano tolti perché non percepiti

9) Forward su un bene (merce) che richiede costi nel continuo

5/3 I costi sono:
- sostenuti nel continuo
- proporzionali al valore del bene e alla ampiezza dell'intervallo (durata deposito) a meno di errori trascurabili
- costi pagati in natura cedendo il bene

a intensità di costo (>0) da sostenere

$c(t, t+\Delta t)$ costo per unità di bene in magazzino su $t - t+\Delta t$

$$c(t,t+\Delta t) = a\, S(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

$$n(t+\Delta t) - n(t) = \frac{-c(t,t+\Delta t)\cdot n(t)}{S(t)} + o_1(\Delta t)$$ la quant. $\downarrow$ per sostenere spese

$$\frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{\Delta t} = -a\,n(t) + \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} \qquad / \lim_{\Delta t \to 0}$$

se $\exists$ e se derivabile

$$n'(t) = -a\,n(t)$$

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = -a$$

$$\left\{\ln[n(t)]\right\}' = -a$$

$$\ln(n(t)) = -at + C$$

$$n(t) = e^{-at+c}$$

Oss Data $n(0)$, la c è determinata $n(0) = e^c$

$$\Rightarrow n(t) = e^{-at}\cdot e^{c} = e^{-at}\cdot n(0)$$

$$n(t) = n(0)\,e^{-at}$$

allora

$$n(T) = n(0)\,e^{-aT}$$

$$\underline{n(t) = n(0)\,e^{-at}}$$

$$\hookrightarrow \frac{u(T)}{u(t)} = e^{-aT+at} = e^{-a(T-t)}$$

$$u(T) = e^{-a(T-t)} u(t)$$

la qut di bene evolve nel tempo come il fattore di attualizzazione in regime esponenziale con intensità a

Valuto il forward con qst attività sottostante

portafoglio A $\begin{cases} \text{pos long su forward} \\ K \text{ ZCB con scadenza } T \text{ (long)} \end{cases}$

portafoglio B $\underset{(>1)}{e^{a(T-t)}}$ quantità bene sottostante

In $t<T$:

non ci sono flussi netti perché il bene non genera flussi in quanto i costi non li pago in moneta ma cedendo bene

In T:

hanno lo stesso valore

$$\underbrace{\overset{S(T)-K}{\overset{\|}{V^L(T)}}+K}_{V_A(T)} = \underbrace{S(T)}_{V_B(T)}$$

$$AOA \to V_A(t) = V_B(t)$$

$$V^L(t) + Kb(t,T) = S(t)e^{a(T-t)}$$

$$V^L(t) = S(t)e^{a(T-t)} - Kb(t,T)$$

$$F(t,T) = \frac{S(t)e^{a(T-t)}}{b(t,T)}$$

$$F(\overset{K}{0},T) = \frac{S(0)\, e^{a}}{b(0,T)}$$

è il prezzo a pronti incrementato dei costi fino T per tenere il bene così che non risulti più conveniente comprare a pronti piuttosto che a termine

Oss Conclusione simmetrica a quella dei dividendi

OSSERVAZIONE SULLE MERCI

Si distinguono le merci di consumo dalle merci speculative

- merci di consumo : (commodity) sono beni utilizzati anche nei prod. , hanno una loro funzione e una utilità. Non possono essere vendute allo scoperto (petrolio)
- merci speculative: tenute come una forma di investimento, anche se hanno una loro funzione sono detenute come un investimento

Le due relazioni viste per le merci sono

$$K = \frac{S(0) + A(0,T)}{b(0,T)} \qquad K = \frac{S(0)\, e^{aT}}{b(0,T)} = S(0)\, e^{(r+a)T}, \; r = r(0,T)$$

- Se le merci sono speculative le 2 relazioni valgono sia in pratica che in teoria → relazioni sono soddisfatte
- Se le merci sono di consumo potrebbe non valere la relazione fra K e il valore della merce

es. x ass $K > S(0)\,e^{(r+a)T}$ → dovrei incamerare K, vendere a termine il bene e ricomprarlo a pronti per guadagnare attraverso OA I°.
La relazione non può ess violata perché le finestre di arbitraggio si chiuderebbero subito → prezzi in equilibrio si muov-

x ass $K < S(0)\,e^{(r+a)T}$ → vendo allo scoperto a pronti il bene al tax e vendo a K. Il problema potrebbe non riuscire a vendere allo scoperto

→ possibile disallineamento fra K e il prezzo di equilibrio.

CONVENIENCE YELD (y) : (tasso convenienza), misura beneficio che si trae dal consumo/possesso del bene.

Si quantifica sulla base del prezzo di consegna K
y si deduce e si ricava dal K che vede la relazione di equilibrio.

y è quel tasso che riporta la relazione vista in allineamento

Il beneficio che deriva dal possesso del bene è noto a posteriori, a $\neq$ dei dividendi

CONSIDERAZIONI FINALI SUI CONTRATTI FORWARD

Non ho fatto alcuna ipotesi sulla distribuzione stocastica dei prezzi a termine al variare di t

Vedo che succede se rimuovo alcune ipotesi:
- la risposta è che anziché un valore preciso, ottengo un intervallo di valori

a) Suppongo che il tasso debitore $\neq$ tasso creditore (realistica)

$$b^c(0,T) > b^d(0,T)$$

pr. ZCB creditore   pr ZCB debitore

r^c lo desumo da $b^c(0,T)\, e^{r^c T} = 1$
r^d lo desumo da $b^d(0,T)\, e^{r^d T} = 1$

Lo sia r^c che r^d li ricavo così:

$$e^{r^d T} = \frac{1}{b^d(0,T)}$$

$$\ln e^{r^d T} = \ln\left(\frac{1}{b^d(0,T)}\right)$$

$$r^d T = -\ln(b^d(0,T))$$

$$r^d = -\frac{\ln(b^d(0,T))}{T}$$

- Il bene non dà né costi né dividendi fino a T

TH: $S(0)e^{r^c T} \leq K \leq S(0)e^{r^d T}$

Il K deve essere compreso in quell'intervallo per evitare le OA

(NB) Il valore di K sul mercato è unico per tutti i contratti e sta lì dentro.

dim x ASS.

IP: $S(0)e^{r^c T} > K$ $\quad S(0)e^{r^c T} - K > 0$

In $t=0$:

a) vendo allo scoperto il bene $\quad S(0)$

b) investo $S(0)$ in ZCB con scad T $\quad -S(0)$

c) acquisto pos. lunga sul forward $\quad 0$ ← costo nullo alla stipula

$= 0$

In T:

b) incasso valore bond a scadenza $\quad S(0)e^{r^c T}$

c)+a) ricevo il bene, pago K e restituisco bene $\quad -K$

$S(0)e^{r^c T} - K > 0$

OA I° tipo.

IP: $K - S(0)e^{r^d T} > 0$

In $t=0$:

a) assumo pos. short sul forward $\quad 0$

b) vendo allo scoperto $S(0)$ ZCB al prezzo $b^d(0,T)$ $\quad +S(0)$

c) compro a pronti il bene $\quad -S(0)$

$= 0$

In $T=0$:

a)+c) incasso prezzo consegna K e restituisco il bene $\quad K$

b) rimborso i bond $\quad S(0)b^d(0,T)$

> 0

Cvd OA I° tipo

b) Suppongo che si abbiano dei costi di transazione

C^{SF} (COSTO SHORT FORWARD) costo da sostenere per assumere tale posizione su un forward

C^{LF} (COSTO LONG FORWARD) costo da sostenere per assumere tale posizione su un forward

C^{SS} (COSTO SHORT SELLING) costo da sostenere per vendere allo scoperto il bene sottostante

C^{SSP} (COSTO SHORT SPOT) costo da sostenere per comprare a pronti il bene sottostante

Oss I costi di transazione creano la $\neq$ fra quello che pago se compro e quello che incasso se vendo

$b^d(0,T) < b(0,T) < b^c(0,T)$

per. titolo a cedola nulla

$\rightarrow$ vendo $b(0,T) + q/c$ commissione (indebito)
$\rightarrow$ compro $b(0,T) - q/c$ commissione (accredito)

TH: $\left(S(0) - C^{LF} - C^{SS}\right) e^{r(0,T)T} \leq K \leq \left(S(0) + C^{SF} + C^{SSP}\right) e^{rT}$

dim (x ASS)

IP: $\left(S(0) - C^{LF} - C^{SS}\right) e^{rT} > K$ $\quad \left(S(0) - C^{LF} - C^{SS}\right) e^{rT} - K > 0$

In $t=0$:

a) vendo allo scoperto $\quad S(0) - C^{SS}$

b) compro a termine il bene $\quad - C^{LF}$

c) investo il rimanente in ZCB con scad T $\quad - \left(S(0) - C^{SS} - C^{LF}\right)$

$= 0$

In T:

c) ritiro valore ZCB $\quad \left(S(0) - C^{LF} - C^{SS}\right) e^{rT}$

a)+b) pago K, ricevo bene che cedo $\quad - K$

> 0

IP: $K > (S(0) + c^{SF} + c^{SSP})\, e^{rT}$ $\qquad K - [S(0) + c^{SF} + c^{SSP}]\, e^{rT} > 0$

In $t=0$:

a) vendo allo scoperto ZCB con scadenza T e incasso subito $\qquad S(0) + c^{SP} + c^{SF}$

b) compro il bene a pronti $\qquad -(S(0) + c^{SP})$

c) vendo il bene a termine (short forward) $\qquad -c^{SF}$

$\qquad = 0$

In T:

b)+c) consegno il bene e incasso K $\qquad K$

a) estinguo il debito $\qquad -(S(0) + c^{SP} + c^{SF})\, e^{rT}$

$\qquad > 0$

OA I° tipo

/Cvd

Se rimuovessi entrambe le ipotesi, l'intervallo in cui K dovrà stare si delineerebbe:

$$(S(0) - c^{LF} - c^{SS})\, e^{r^c T} \leq K \leq (S(0) + c^{SF} + c^{SSP})\, e^{r^d T}$$

CONTRATTI FUTURES

- stessa definizione dei forward: "accordo fra 2 parti per scambiarsi un bene sottostante in una data futura (di consegna) ad un prezzo (di consegna)"

Al momento dell'accordo teoricamente non si paga nulla (vedremo i margini)

- stesse motivazioni che portano alla stipula dei forward: motivi di copertura e speculativi

• stesso prezzo: PREZZO FUTURE $f(t,T)$ "è il prezzo di consegna particolare in t, che rende nullo il valore del contratto (future) con scadenza T".

In T: $f(T,T) = S(T)$
In 0: $K = f(0,T)$

Oss "non prezzo ~~del~~ future, ma prezzo future/forward"

DIFFERENZE RISPETTO AI FORWARD

- futures sono trattati solo in Borsa (CONTRATTI STANDARDIZZATI)
  fix: tipo di bene sottostante, data di consegna, quantità di bene
- ↳ conseguenza: presenza del BASIS RISK, cioè della mancanza di copertura perfetta. Non sempre quindi si troverà una controparte, o la quantità che occorre o una data utile.

  es. $S(t)$ prezzo unitario grano
  $\bar{S}(t)$ prezzo unitario grano (sottostante al future)

$$\text{in } T: \underbrace{\left[K - \bar{S}(T)\right]}_{\text{short}} + S(T) = K + \underbrace{\left(\bar{S}(T) - S(T)\right)}$$

- non elimina del tutto le oscillazioni del prezzo
- $\neq 0$ in generale
- $\exists$ comq una copertura

6/3

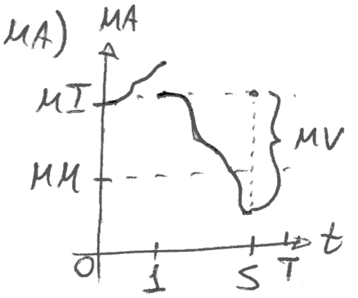
- STANZA DI COMPENSAZIONE (Clearing House): è un organismo di controllo che sovraintende alla corretta esecuzione del contratto, alla fissazione del prezzo future fissato giorno per giorno
- assenza del rischio di insolvenza tra le parti, per la presenza dei margini. Il meccanismo di deposito dei margini di garanzia (→ poi vengono restituiti)

MARGINI NEI FUTURES

Ci si rivolge alla CH tramite un intermediario, o Z, sia per assumere posizioni long che short sul future

$$\text{long} \rightleftarrows \underset{\text{CH}}{\text{membro}} \rightleftarrows \boxed{\text{CH}} \rightleftarrows \underset{\text{CH}}{\text{membro}} \rightleftarrows \text{short}$$

Le parti istituzionali chiedono un deposito di garanzia. Colui che vuole assumere una long/short è tenuto a depositare 5-10% del pr. future iniziale (varia da Borsa a Borsa e da intermediario a intermediario) detto MARGINE INIZIALE (MI). Esso è depositato in un conto corrente che è fruttifero, detto <u>MARGIN ACCOUNT</u> (MA)



- Se il valore del conto sale sopra MI è possibile prelevare la ≠ fra valore del conto ed MI. Esso dipende dalle ≠ giornaliere
- stabilito MARGINE MINIMO (MM) es. 75% MI

Se valore del conto è MM ≤ MA ≤ MI non succede nulla, ma se MA < MM, allora il cliente è tenuto a versare tanto denaro quanto occorre affinché MA ≥ MI. L'importo da versare è detto <u>MARGINE DI VARIAZIONE (MV)</u>.

In T viene restituito il denaro al cliente

IP: tralasciate la fruttiferità delle posizioni future → solo le ≠ algebriche ∀t

- i casi che prevedono la consegna del bene sottostante sono rari, infatti di solito non viene stabilita una precisa data di consegna, bensì un intero mese di consegna (DELIVERY MONTH) ed è la parte venditrice a scegliere, in tale mese, la data precisa in cui effettuare la consegna (DELIVERY OPTION). Tuttavia nella maggior parte dei casi è consentito stabilire a seconda del bene sottostante quando è ottimale la consegna; ciò diventa irrilevante in quanto si considera come data di consegna quella ottimale.

es. se bene ha costi di magazzino / non produce redditi
↳ prima possibile
se bene supera gli interessi dati dal tenere investito
il prezzo di consegna
↳ più tardi possibile

- è il venditore che può scegliere l'oggetto specifico descritto dal contratto, così come la quantità! È l'opzione qualità (QUALITY OPTION)
  1^p ↳ non ne terrò conto io.

- sono rare volte in cui c'è consegna del bene sottostante
  ↓
  normalmente c'è la differenza in contanti fra $f(T)$ e $f(0)$

- il contratto viene chiuso assumendo una posizione opposta (a costo nullo)

- (importante)

MECCANISMO DEL MARKING TO MARKET

La differenza $f(0,T) - f(T,T)$ a chi è in posizione lunga, anziché venire regolata in blocco, alla scadenza T, è regolata giorno per giorno.

Supponendo di misurare il tempo in giorni, e che T sia un intero, alla fine di ogni giornata ($t = 1, 2, \dots, T$) vengono regolate le seguenti differenze:

1° $f(1,T) - f(0,T)$ — fra prezzo a fine giornata e prezzo iniziale

2° $f(2,T) - f(1,T)$ — pdv long (per short ↳ (-1))

$\vdots$ $\qquad \vdots$

T° $f(T,T) - f(T-1,T)$ — ↳ x chiuderlo: assumo posizione $f(T-1,T) - f(T,T)$

Anche se la somma algebrica di tali differenze coincide con $f(T,T) - f(0,T)$ per il long futures, in realtà esse sono investite in attività prive di rischio, per cui il loro montante in T è in generale diverso dalla relativa somma algebrica.

Se c'è consegna fisica in T piuttosto che regolamento in contanti la parte in posizione lunga paga $f(T-1,T)$ [invece che $f(0,T)$] e riceve il bene sottostante.

Oss $f(0,T) \neq F(0,T)$ perché il secondo rimane immutato fino a T, mentre il primo cambia ogni giorno per via delle $\neq$

Questo meccanismo realizza un aggiornamento giornaliero del "prezzo di consegna", in modo che il contratto abbia valore nullo al termine di ogni giornata di contrattazione.

Oss Se si entra in t nel futures, il prezzo di consegna con cui si entra è $f(t,T)$, non $f(0,T)$.

È proprio grazie ad esso che si può entrare in un contratto già in essere (al prezzo futures corrente) in ogni momento senza pagare nulla

UGUAGLIANZA TRA PREZZI FORWARD E FUTURES ✱

Sotto tutte le ipotesi di mercato viste all'inizio e con l'ipotesi di determinatezza dei ZCB di scadenza T. (no processo stocastico), allora nonostante il meccanismo del marking to market il prezzo del forward e futures a parità di t coincidono

$f(t,T) = F(t,T)$, $t = 0,1,\ldots,T-1$ alla fine di ogni giornata.
su stesso bene

dim

fix t

prima di dimostrare che tale relazione vale $\forall t = 0,1,\ldots,T-1$ descrivo una strategia dinamica su futures, che inizia in un fissato istante t $(=0,1,\ldots,T-1)$ e termina in T.

Dinamica perché in $t+1, t+2, \ldots$ assumerò delle nuove posizioni, perché entrerò al prezzo del future corrente. Se anche ci fossero degli importi suppongo di investirli in ZCB con scad T, se negativi posso pagarli vendendo allo scoperto, cioè indebitandomi. Dunque non ci sono flussi intermedi, tutto è rimandato a T

Oss Se le $\neq$ hanno segno meno, invece di comprare nuove posizioni ne cedo.

tempo pdv long	flussi di cassa	valore in T dei flussi di cassa	n° nuove posizioni	posizione totale
t			n° $b(t+1,T)$	$b(t+1,T)$
$t+1$	$[f(t+1,T)-f(t,T)]b(t+1,T)$	$f(t+1,T)-f(t,T)$	$b(t+2,T)-b(t+1,T)$	$b(t+2,T)$
$t+2$	$[f(t+2,T)-f(t+1,T)]b(t+2,T)$	$f(t+2,T)-f(t+1,T)$	$b(t+3,T)-b(t+2,T)$	$b(t+3,T)$
...	...	...	...	...
$T-1$	$[f(T-1,T)-f(T-2,T)]b(T-1,T)$	$f(T-1,T)-f(T-2,T)$	$1-b(T-1,T)$	$b(T,T)=1$
T	$f(T,T)-f(T-1,T)\cdot 1$	$f(T,T)-f(T-1,T)$	/	/
		$=f(T,T)-f(t,T)$		

In t non ho nulla. Compro n° contratti pari a $b(t+1,T)$ (prezzo ZCB fra un giorno). Sfrutto ip perf divisibilità beni e determina ZCB

In $t+1$: $\neq$ fra futures in $t+1$ e t: reinvesto tutto in ZCB, poi cambio n° posizioni su futures / in totale ottengo $b(t+2,T)$

[per avere $b(t+2,T)$ posizioni totali, sottraggo le nuove alle vecchie]

Oss Se $b(t+2,T) < b(t+1,T) \to$ cedo contratti

In T ho l'unico flusso di cassa: $f(T,T)-f(t,T)$

- Portafoglio A:
  - strategia descritta
  - posiz. long $f(t,T)$ zcb scadenza T

- Portafoglio B:
  - posiz long in un <u>nuovo</u> contratto forward sullo stesso sottostante e data di consegna T (in t: $F(t,T)=K$)
  - $F(t,T)$ zcb con scadenza T, long

In $t<T$ non ci sono flussi di cassa netti

In T:

$$V^A(T) = \left[f(T,T) - \cancel{f(t,T)}\right]\cdot 1 + \cancel{f(t,T)}\cdot \cancel{1} = S(T).$$

$$V^B(T) = \left[S(T) - K\right] + F(t,T)$$

$$= S(T) - F(t,T) + F(t,T)$$

$$= S(T).$$

AOA $\Rightarrow$ $V^A(t) = V^B(t)$ devono stesso valore in t

$$V^A(t) = \underset{\substack{\text{valore}\\ \text{iniziale}\\ \text{strategia}}}{0} + \underset{n^\circ zcb}{f(t,T)}\, b(t,T)$$

$$\|$$

$$V^B(t) = \underset{n^\circ zcb}{F(t,T)}\, b(t,T) + \underset{\substack{\text{contr. fwd}\\ \text{appena stipulato}}}{0}$$

$$\Rightarrow f(t,T)\,\cancel{b(t,T)} = F(t,T)\,\cancel{b(t,T)} \qquad \text{perché } b(t,T) > 0 \ (\neq 0)\ \forall t$$

$$\forall t \quad f(t,T) = F(t,T) \quad // \text{ Cvd}$$

N.B. In tutto ciò è cruciale l'ipotesi che i titoli a cedola nulla siano deterministici (non solo per la dimostrazione), perché è possibile trovare degli esempi con prezzi stocastici in cui $f(t,T) \neq F(t,T)$.

11/3

Vedo intuitivamente che se i tassi non fossero deterministici i prezzi forward e futures si discosterebbero.

$b(0,T) \leftrightarrow r(0,T)$

- Nel caso forward mi disinteresso dei loro valori in $t \in \,]0,T[$
- Nel caso future tengo conto delle differenze aleatorie.

$b(t,T) \leftrightarrow r(t,T)$ $\quad \{r(t,T) : 0 \leq t < T\}$ proc. stoc.

Come sono fatti questi tassi?

- Se sono correlati ⊕ coi prezzi futures $\{f(t,T); 0 \leq t < T\}$ pr. stoc.

  se i pr. fut ↑, anche $r(t,T)$ ↑

  dal pdv long su futures:

  - se $f(t+1,T) > f(t,T)$ allora investo la differenza in $t+1$, ma vale $r(t+1,T) > r(t,T)$ dunque incremento l'investimento e ho un effetto leva, cioè le ≠ sono amplificate

  - se $f(t+1,T) < f(t,T)$ allora $r(t+1,T) < r(t,T)$, cioè ho un debito e su di lui pago degli interessi, ad un tasso minore. Qui le ≠ sono smorzate, le pago di meno.

  ↳ C'è OA: conviene acquistare un future rispetto al forward

  Per evitare OA si avrà ↑ del prezzo future

- Se sono correlati ⊖ coi prezzi futures

  qui se i prezzi salgono i tassi scendono

  dal pdv long su futures

  - se $f(t+1,T) < f(t,T)$ allora la differenza è <0, inoltre $r(t+1,T) > r(t,T)$, quindi le ≠ sono addebitate ad un tasso maggiore via via nel tempo. → amplificate

  - se $f(t+1,T) > f(t,T)$ allora la ≠ è > 0, inoltre $r(t+1,T) < r(t,T)$ e quindi le ≠ positive sono smorzate

  ↳ C'è OA: a parità di pr. fut e forward si sarebbe sfavoriti ad avere future

  Per evitare OA il prezzo future dovrà < prezzo forward

CONTRATTI DI OPZIONE

È un titolo che conferisce al suo possessore il diritto di comprare (opzione CALL) o di vendere (opzione PUT) l'attività sottostante ad un prezzo prefissato, detto PREZZO DI ESERCIZIO o PREZZO BASE (STRIKE PRICE).

(NB) Chi possiede l'opzione (cioè è in posizione lunga) ha soltanto il diritto, non l'obbligo, di comprare/vendere l'attività sottostante al prezzo di esercizio, e può anche decidere di non esercitare questo diritto (a ≠ dei contratti forward). Invece il sottoscrittore (o emittente) dell'opzione (in posizione corta) ha l'obbligo di adeguarsi alla volontà della controparte

L'opzione ha una scadenza ("maturity"). Essa viene detta Europea se il diritto può essere esercitato soltanto alla scadenza, Americana se il diritto può essere esercitato anche prima della scadenza. In caso di esercizio anticipato (cioè prima della scadenza) di un'opzione Americana, l'opzione si estingue

(NB) Questa terminologia non ha niente a che vedere con i mercati nei quali le opzioni sono trattate (che possono essere sia le borse ufficiali che mercati OTC)

Le opzioni Americane ed Europee sono quelle standard (plain vanilla)
L'opzione si esercita una sola volta, se non la si esercita, dopo la data di scadenza essa si estingue.

L'attività sottostante può essere un'azione, un indice di Borsa, ZCB una valuta estera, tasso d'interesse, merce, un derivato: swap su tassi di interesse, future, un'altra opzione, ...

- Nel caso di opzioni con sottostante uno swap su tassi di interesse (SWOPTION): entrando nello swap su tasso interesse, senza opzioni, il tasso fisso che uno dei due deve pagare è | al momento dell'accordo lo swap ha valore nullo (tasso swap). Con l'opzione, scad T, Europea ad esempio, il tasso fisso non sarà quello di mercato in T, ma il tasso strike prefissato (K), se si decide di esercitare l'opzione

- Nel caso di opzioni con sottostante un *futures*: qui la scadenza di futures deve avvenire dopo la data di scadenza dell'opzione, altrimenti sarebbe un'opzione sul bene, poiché $f(T,T) = S(T)$. Se si entra in T senza opzione si dovrebbe pagare $f(T,T')$, $T'>T$, mentre con l'opzione si paga il prezzo future di esercizio (strike) e da qui ci saranno le varie differenze (es. long $f(T+1,T') - K$)

- Nel caso di opzione con sottostante un'*altra opzione*, si parla di OPZIONE COMPOSTA: (es. una call su put: diritto a comperare una put a 1 prezzo fissato); chi emette l'opzione (sottoscrive) è in short, chi ha l'opzione è in long (es long su call → dir a comperare bene → avrò una long su bene
long su put → dir a vendere bene → avrò una short su bene)

⚠ Non confondere la posizione long/short dell'opzione con quella sul bene.

NOTAZIONE

O data di emissione

T data di scadenza

K prezzo di esercizio

$\{S(t); t \geq 0\}$ processo stocastico del prezzo del bene sottostante

$\{c(t); 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico del prezzo di un'opzione Call Europea

$\{C(t); 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico del prezzo di un'opzione Call Americana

$\{p(t); 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico del prezzo di una Put Europea

$\{P(t); 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico del prezzo di una Put Americana

Le Europee sono le più facili da analizzare.

Le Americane sono le più diffuse

PAYOFF A SCADENZA DI UN'OPZIONE EUROPEA

Esso è anche quello delle americane se non esercitate prima dell'istante della scadenza

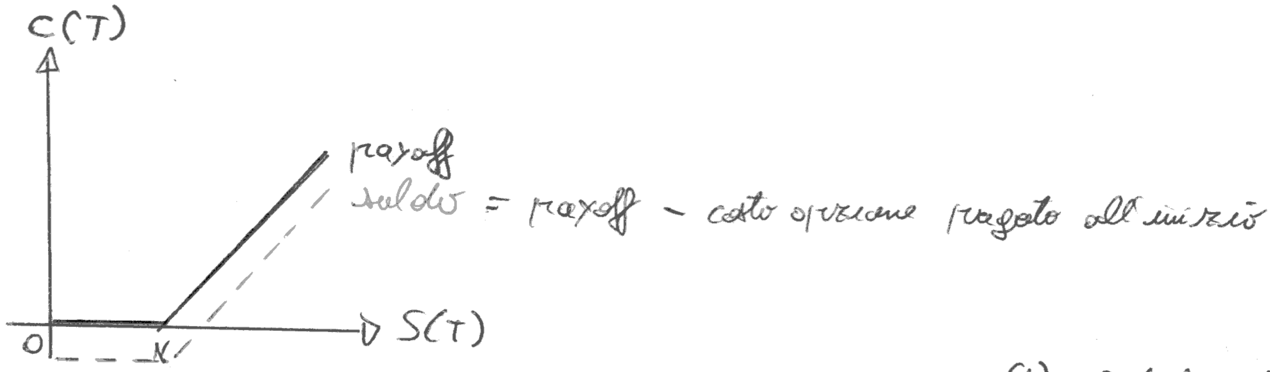
• PAYOFF A SCADENZA DI UN'OPZIONE <u>CALL</u> EUROPEA LONG.

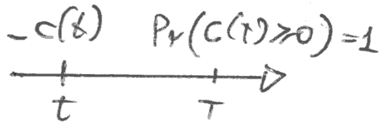
Le ipotesi di lavoro precedentemente enunciate, e in particolare quella di agenti razionali e non saziati, ci consentono di dire che l'opzione verrà esercitata se $S(T) > K$, non verrà esercitata se $S(T) < K$, sarà indifferente esercitarla o meno se $S(T) = K$. Quindi dal pdv di chi ha l'opzione, si ha:

$$c(T) = \begin{cases} S(T) - K & \text{se } S(T) \geq K \\ 0 & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} = \max\{S(T) - K, 0\}$$

[Il payoff di chi ha emesso l'opzione, è invece l'opposto

$$-c(T) = -\max\{S(T) - K, 0\} = \min\{K - S(T), 0\}$$]





• Visto che il payoff dell'opzione è (quasi) certamente ≥ 0, onde evitare OA II° tipo, anche il suo prezzo $c(t)$ deve essere ≥ 0 $\forall t \in [0, T]$.

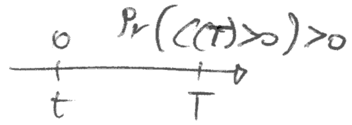
AOA $\Rightarrow c(t) \geq 0$ [cioè il costo di Call Europea $c \geq$]

Se inoltre subordinatamente allo stato di informazione disponibile al tempo $t < T$, si ha $Pr(S(T) > K) > 0$ per evitare OA I° tipo anche $c(t)$ deve essere > 0:

- Se $Pr(S(T)=K)=1 \Rightarrow Pr(S(T)>K)=0$, non pagherò nulla in t perché so che in T ∄ guadagni

- Se $Pr(S(T)>K)>0$, allora $c(t)>0$

□ Se $c(t)=0 \Rightarrow$ OA II° tipo



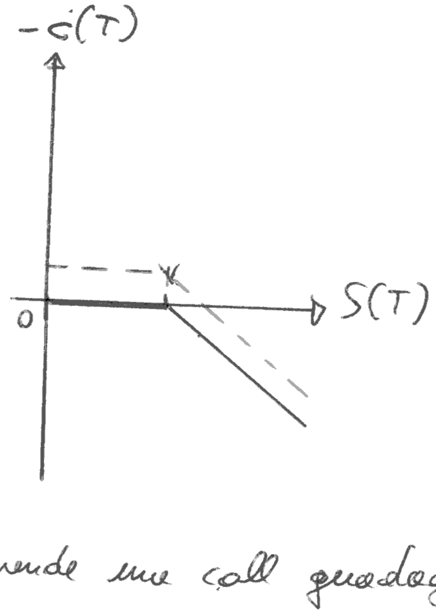
(non ammessa da noi)

Oss Opzioni e forward:

mentre con i forward è possibile che in futuro ci rimetta, perché rinuncio al beneficio di comprare sul mercato a prezzo corrente, qui le opzioni sono vere e proprie assicurazioni, se stipulate da Hedgers, infatti si paga qlc all'inizio (// premio assicurativo). Non ci sono margini di deposito: chi compra l'opzione paga il suo prezzo nel momento dell'acquisto

- PAYOFF A SCADENZA DI UN'OPZIONE SHORT CALL EUROPEA

$$-c(T) = -\max\{S(T)-K, 0\} = \min\{K-S(T), 0\}$$

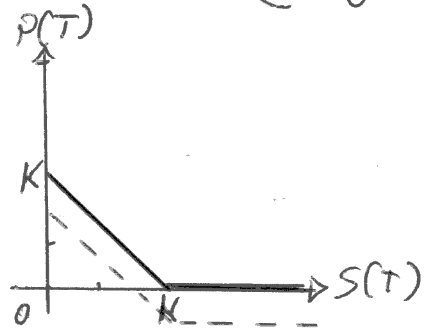


Chi vende una call guadagna qlc all'inizio

- PAYOFF DI UN'OPZIONE LONG PUT EUROPEA

Simmetricamente al 1° caso, la put verrà esercitata se $S(T)<K$, e non verrà esercitata se $S(T)>K$, sarà indifferente esercitarla o meno se $S(T)=K$. Quindi dal punto di chi possiede la opzione, si ha:

$$p(T) = \begin{cases} K - S(T) & \text{se } S(T) < K \\ 0 & \text{se } S(T) > K \end{cases} = \max\{K - S(T), 0\}$$

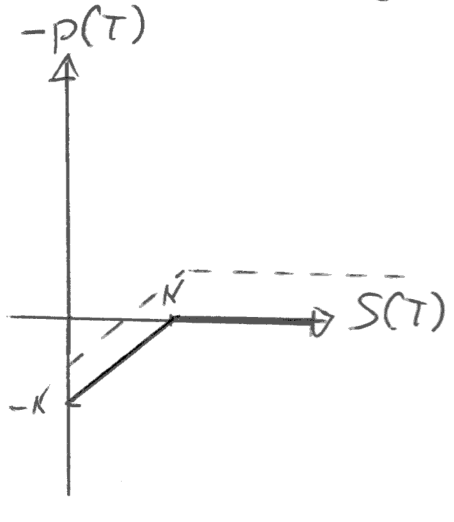


$AOA \rightarrow p(t) \geq 0 \,, \; t < T$

- Se $Pr(S(T) < K) > 0 \rightarrow p(t) > 0$. Così chi compra la opzione deve pagare qlc all'inizio: tale costo deve essere t.c. il saldo dell'operazione abbia sia valori possibili >0 che <0.

- PAYOFF DI UNA SHORT PUT EUROPEA

$$-p(T) = -\max\{K - S(T), 0\} = \min\{S(T) - K, 0\}$$



Chi vende la put spera che il prezzo del sottostante sia alto, che superi K almeno.

12/3/12

FINALITÀ CHE POSSONO INDURRE A STIPULARE CONTRATTI DI OPZIONE

• Posizioni "scoperte"

• copertura da un rischio (come nel caso dei contratti forward e futures). Assumendo posizioni lunghe su opzioni, dietro pagamento del premio ci si copre soltanto dall'eventualità di variazioni sfavorevoli nel prezzo sottostante, approfittando invece delle variazioni favorevoli.

• "speculazione": si assumono posizioni sia lunghe che corte

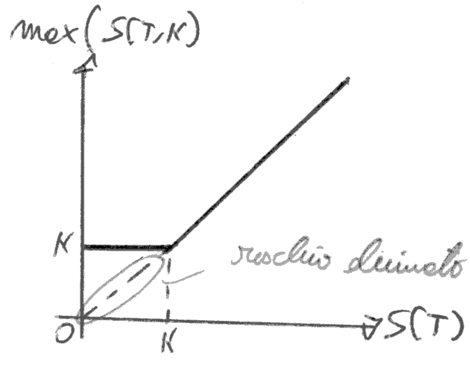
• Garanzie di minimo (assicurazione di portafoglio) ho 2 modi per raggiungerla

1) Immaginiamo di aver acquisito un investimento (portafoglio) rischioso di valore "finale" in T (aleatorio) $S(T)$. Se ad esso affianchiamo un'opzione put sullo stesso con scadenza T e prezzo di esercizio K, il portafoglio risulta "assicurato a livello K", nel senso che il suo valore finale non può essere $< K$ ($\Rightarrow$ garanzia di minimo)

Infatti: nuro + long put Europea

$$S(T) + \max\{K - S(T), 0\} = \max\{K, S(T)\}$$

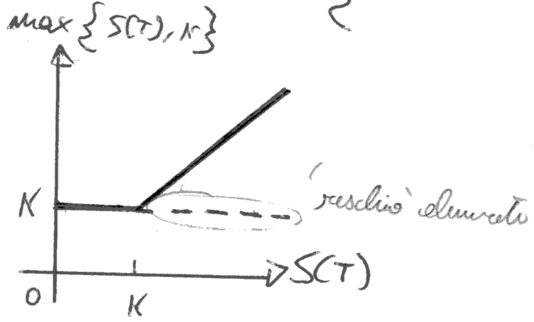
e l'obiettivo è avere: $\begin{cases} S(T) & \text{se } S(T) > K \\ K & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} = \max(S(T), K)$



2) Se invece si immagina di partire da un investimento a rendimento certo, di valore finale (in T) pari a K, e si desidera trarre beneficio dall'eventuale andamento positivo del mercato azionario, basta acquistare un'opzione call con scadenza T, prezzo di esercizio K e attività sottostante un indice di borsa di valore "finale" $S(T)$. Il risultato è lo stesso di prima, in quanto:

INVEST IN ZCB CALL

$$K + \max\{S(T)-K, 0\} = \max\{S(T), K\}$$



Una call mi permette un 'rischio' di guadagno.

PUT-CALL PARITY PER OPZIONI EUROPEE

Perché

$\max\{0, S(T)-K\} + K$ ha in T lo stesso valore di

$S(T) + \max\{0, K-S(T)\}$, purché $S(T)$ non produce né redditi né costi, allora vale $\Rightarrow c(T)+K = S(T)+p(T)$:

in t: AOA $\Rightarrow K\cdot \overset{zcb}{b(t,T)} + c(t) = S(t) + p(t)$

RELAZIONE DI PUT-CALL PARITY

a parole: se sul mercato oltre alle attività di base c'è già un'opzione call con prezzo noto, a parità di scadenza, attività sottostante e prezzo di esercizio, il prezzo di una put non è libero, ma deve rispettare la relazione (vale viceversa, per la call con una put sul mercato)

OPZIONE OMOLOGA: è l'opzione opposta (Call $\Rightarrow$ Put) con stesso T, stesso $S(t)$, stesso K, stessa posizione

↳ Se sul mercato c'è un'opzione omologa a quella di interesse, allora assieme alle attività di base, l'opzione di interesse è replicabile.

Oss sulle garanzie di minimo (collegamenti)

$\max\{S(T), K\}$:

$K + \max\{S(T)-K, 0\} = S(T) + \max\{K - S(T), 0\}$ 2 casi di prima

li rielaboro:

$$\underbrace{S(T)-K}_{\text{payoff long forward}} = \underbrace{\max\{S(T)-K, 0\}}_{\text{payoff call long}} - \underbrace{\max\{K-S(T), 0\}}_{\text{payoff put long}}$$

Sto replicando attraverso una long call e una long put, con stesso T e prezzo alla scadenza, stessa attività sottostante, il payoff di un long forward.

$\Rightarrow V^L(t) = c(t) - p(t)$.

Posso vedere il pr. forward in t come il particolare prezzo di esercizio che eguaglia il valore della call a quello della put analoga

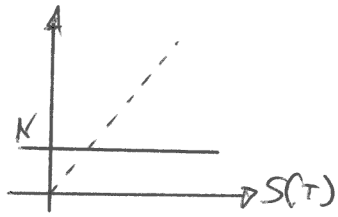
· COLLAR ("coppia di collo")

es. un produttore di grano vuole tutelarsi in T:

a) stipula fwd in a costo 0€

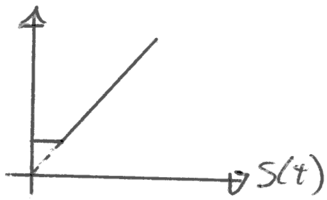
b) può anche affiancarci un'opzione

caso a):



- rinunzia la copertura rinunciando a € più di K
- $S(T) + (K - S(T)) = K$

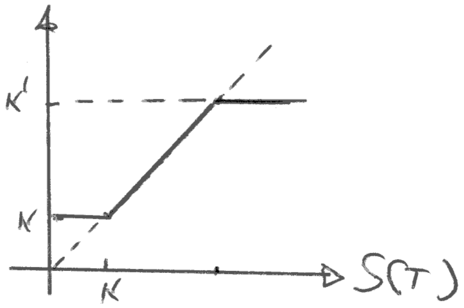
caso a)+b)



- $S(T) + \max\{K - S(T)\} = \max\{K, S(T)\}$

prezzo opzione ↑ al ↑ di K + K ?

Se il prezzo K è troppo elevato e non si vuole far scendere K per risparmiare su p(t), si deve rinunciare a qlc → metterò un tetto superiore K'. Così rinunciando ai guadagni superiori di K', si abbatte notevolmente il costo della copertura.



Val.

$$\begin{cases} K & \text{se } S(T) < K \\ S(T) & \text{se } K \leq S(T) \leq K' \\ K' & \text{se } S(T) > K' \end{cases}$$

Ho messo un 'cappio al collo' a $S(T) \to$ COLLAR

Posso ricavarlo in 3 modi, con 3 combinazioni diverse:

I) $S(T) + \underbrace{\max\{K - S(T), 0\}}_{\text{long-put }(K)} \underbrace{- \max\{S(T) - K', 0\}}_{\text{short-call }(K')}$

II) $K + \underbrace{\max\{S(T) - K, 0\}}_{\text{long call }(K)} - \underbrace{\max\{S(T) - K', 0\}}_{\text{short call }(K')}$

- la seconda opzione vale di meno se il prezzo di esercizio aumenta perché diminuisce l'opportunità di esercizio
- la call qui è ceduta non per speculare, ma per abbassare il costo complessivo

III) $K' + \underbrace{\max\{K - S(T), 0\}}_{\text{long-put}} - \underbrace{\max\{K' - S(T), 0\}}_{\text{short put}}$

la put vale di più tanto più alto è il prezzo di esercizio perché dà diritto di vendere, incassando il prezzo di esercizio

Perché la put vale tanto di più quanto + alto è il prezzo di esercizio

CAPS, FLOORS, COLLARS

Si supponga di dover pagare degli interessi, al tempo $T > t (\geq 0)$ e relativi al periodo $[T, T]$, su un capitale nominale di riferimento N, calcolati in regime di interesse semplice applicando un tasso variabile $L(T, T)$. Se si acquista un'opzione call europea ($\Rightarrow$ CAPLET) con scadenza T, variabile sottostante il tasso L e strike fisso K (applicato allo stesso capitale nominale e per lo ~~stesso~~

periodo), si ottiene:

$$-N(T-t)L(T,T)+N(T-T)\max\{L(T,T)-K,0\}=$$

$$=-N(T-T)\min\{L(T,T),K\}$$ payoff di caplet; era l'obiettivo del debitore, minimizzare i costi.

(NB) Il payoff dell'opzione è già noto al tempo T se, come di solito accade, $L(T,T)$ viene desunto dal prezzo del titolo a cedola nulla $b(T,T)$. Quindi, in questo caso, talvolta viene stabilito che la scadenza dell'opzione sia T (anziché T) e il suo payoff sia pari a $N(T-T)\max\{L(T,T)-K,0\}\,b(T,T)$.

CAPLET = è una particolare opzione call che ha come variabile tasso LIBOR
$L(T,T)-\max\{L(T,T)-K,0\}$

FLOORLET = è una particolare opzione put che ha come variabile tasso LIBOR
$K-\max\{K-L(T,T),0\}$

Un CAP è un portafoglio di caplets, ciascuno con scadenza $i\Delta$ e variabile sottostante il tasso $L((i-1)\Delta,i\Delta)$, per $i=1,2,\dots,n$. Il tasso strike è di solito lo stesso per tutti i caplets.

⇒ Un cap, combinato con un debito a tasso variabile consente di porre un limite massimo (⇒ cap) al tasso di interesse pagato

Simmetricamente, se invece si devono pagare degli interessi a tasso fisso K e si acquista un'opzione put europea (⇒ floorlet) con scadenza T, variabile sottostante il tasso $L(T,T)$ e strike K, si perviene allo stesso risultato:

$$-N(T-T)K+N(T-T)\max\{K-L(T,T),0\}=$$

$$=-N(T-T)\min\{L(T,T),K\}$$

Un FLOOR è un portafoglio di floorlets, ciascuno di essi con strike K, scadenza $i\Delta$ e variabile sottostante il tasso $L((i-1)\Delta,i\Delta)$, per $i=1,2,\dots,n$.

⇒ Un floor, combinato con un debito a tasso fisso, consente di pagare di meno se il tasso variabile è minore del tasso fisso

(NB) Il termine floor ("pavimento") deriva dal fatto che, se combinato invece con un investimento a tasso variabile, consente di porre una limitazione inferiore ($\Rightarrow$ floor) al tasso d'interesse, essendo $L(T,T) + \max\{K - L(T,T), 0\} = \max\{L(T,T), K\}$ (come nel caso dell'assicurazione di portafoglio).

Un <u>COLLAR</u> è un portafoglio composto da una posizione lunga (corta) in un floor con strike K_1, e una posizione corta (lunga) in un cap con strike $K_2 > K_1$. Se combinato con una posizione lunga (corta) in una obbligazione a tasso variabile consente di mantenere il tasso di interesse compreso tra K_1 e K_2. Infatti:

$$L(T,T) + \max\{K_1 - L(T,T), 0\} - \max\{L(T,T) - K_2, 0\} =$$

$$= \begin{cases} K_1 & \text{se } L < K_1 \\ L & \text{se } K_1 \leq L \leq K_2 \\ K_2 & \text{se } L > K_2 \end{cases}$$

13/3/13

TERMINOLOGIA RELATIVA ALLE OPZIONI

In $t \in [0,T]$ un'opzione si dice:

- <u>IN THE MONEY</u> se il suo esercizio (eventuale) genererebbe un flusso di cassa strettamente positivo. (DEEP IN THE MONEY se molto positivo)
- <u>AT THE MONEY</u> se il suo esercizio (eventuale) genererebbe un flusso di cassa nullo
- <u>OUT OF THE MONEY</u> quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa strettamente negativo. (DEEP OUT THE MONEY se molto grande l'esborso) $\Rightarrow$ non va esercitata!

	call	put
in the money	$S(t) > K$	$S(t) < K$
at the money	$S(t) = K$	$S(t) = K$
out the money	$S(t) < K$	$S(t) > K$

NB La terminologia è valida anche per le opzioni europee, pur essendo esercitabili solo alla scadenza T. Se un'opzione americana è in the money, prima della scadenza, non è detto che convenga esercitarla subito; se non è in the money, sicuramente non va esercitata.

Oss Se un'opzione americana è in the money prima della scadenza, conviene esercitarla? Non è detto, perché si perdono così facendo opportunità future. Dipende dai casi.

Si chiama <u>valore intrinseco</u> di un'opzione, in $t \in [0,T]$ la seguente quantità:

$$\max\{S(t) - K, 0\} \quad \text{call}$$

è il payoff in t

$$\max\{K - S(t), 0\} \quad \text{put}$$

Alla scadenza T il prezzo (payoff) di un'opzione, europea o americana, coincide con il suo valore intrinseco. Prima della scadenza, come vedremo, il prezzo di un'opzione americana è sempre $\geq$ del suo valore intrinseco (mentre per le opzioni europee può essere anche $<$).

Se in particolare il prezzo di un'opzione americana è $>$ del suo valore intrinseco, si dice che l'opzione ha <u>valore temporale</u>, dato da

$$C(t) - \max\{S(t) - K, 0\} \quad \text{call}$$

$$P(t) - \max\{K - S(t), 0\} \quad \text{put}$$

<u>Un'opzione americana dotata di valore temporale non va assolutamente esercitata</u>, anche se fortemente in the money (piuttosto che esercitarla conviene venderla!)

Se un'opzione è europea **non** sempre vale che valore opzione $c(t), p(t)$ $\geq$ valore intrinseco in $t<T$.

Se un'opzione è americana, sempre, vale che valore opzione $C(t), P(t)$ $\geq$ valore intrinseco in $t<T$.

es. Call americana, $t<T$: ha valore temporale

$S(t) = 200€$

$K = 50€$

→ pago 50€ qlc che ne vale 200 → sembra l'affare

ma se l'opzione vale $C(t) = 170€$

↳ più che usare l'opzione → 150€

conviene venderla → 170€

$$\left(\underset{170€}{C(t)} \ \substack{>\\<} \ \underbrace{\max\{200-50, 0\}}_{150} \right) \qquad 170€ > 150€$$

Se un'opzione non ha valore temporale non si può dire nulla. Ci vuole un modello.

- **tipo** di opzione = si intende opzioni che siano tutte call o put
- **classe** di opzioni: sono opzioni dello stesso tipo e con stessa attività sottostante
  (→ ≠ prezzo esercizio
  ≠ scadenza)
- **serie** di opzioni: sono opzioni della stessa classe, con stessa scadenza
- **stile** di opzioni: sono opzioni o europee o americane
  Pg 47

PACCHETTI DI OPZIONI

distinzione:

- posizioni scoperte: (naked, uncovered) fanno riferimento ad una unica posizione che sia long o short non importa, o se call o put.
- posizioni coperte: (hedges) ci sono delle opzioni con una attività sottostante; hanno lo scopo di copertura.

da saltare 2015