SCADENZARIO DISCRETO

NB. I TAX SONO TUTTI ANNUALIZZATI

$$T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$$

$B(t,s)$ — PREZZI TCN A PRONTI

(fattore di sconto per importi certi)

$$hp \begin{cases} B(t,s) > 0 \\ B(s,s) = 1 \end{cases}$$

sono equivalenti $\sim$
1) $B(t,s) > B(t,u)$ — $t \le s < u$
2) $f(t,s,u) > 0$ — $t \le s < u$
3) $B(t,u) < 1$ — $t < u$
4) $r(t,u) > 0$ — $t < u$

$B(t,s,u)$ — PREZZI TCN FORWARD

$$B(t,s,u) = \frac{B(t,u)}{B(t,s)} \doteq e^{-(u-s)f(t,s,u)}$$

(da def di $f(t,s,u)$)

$r(t,s)$ — 'TASSO' A PRONTI o SPOT

(tasso di rendimento o intensità di interesse) in RIC

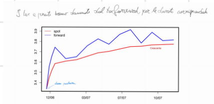
$$r(t,s) \doteq -\frac{1}{s-t} \log B(t,s)$$

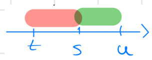
da cui $B(t,s) \doteq e^{-(s-t)\,r(t,s)}$

sono equivalenti $\sim$
1) $B(t,s) > B(t,u)$ — $t \le s < u$
2) $f(t,s,u) > 0$ — $t \le s < u$
3) $B(t,u) < 1$ — $t < u$
4) $r(t,u) > 0$ — $t < u$

Oss $r(t,u) = f(t,t,u)$

Oss $r(t,u) = \frac{(s-t)}{(u-t)} r(t,s) + \frac{(u-s)}{(u-t)} f(t,s,u)$





$f(t,s,u)$ — 'TASSO' A TERMINE o FORWARD

(tasso di rendimento o intensità di interesse) in RIC e RIS (dimezi)

$$f(t,s,u) \doteq -\frac{1}{u-s} \ln\left(\frac{B(t,u)}{B(t,s)}\right)$$

da cui $B(t,s,u) = \frac{B(t,u)}{B(t,s)} \doteq e^{-(u-s)f(t,s,u)}$

sono equivalenti $\sim$
1) $B(t,s) > B(t,u)$ — $t \le s < u$
2) $f(t,s,u) > 0$ — $t \le s < u$
3) $B(t,u) < 1$ — $t < u$
4) $r(t,u) > 0$ — $t < u$

Oss $s = t$: $f(t,t,u) = r(t,u)$

$$\rightarrow B(t,u) = e^{-(u-t)f(t,t,u)}$$

Oss $f(t,s,u) = \frac{1}{u-s}\left[(u-t)\,r(t,u) - (s-t)\,r(t,s)\right]$

$i(t,s)$ **TASSO (VERO) A PRONTI (RIC)**

$$1+i(t,s) \doteq e^{r(t,s)}$$

$(1+tax)^{periodo} = e^{periodo \cdot intensità}$

Oss $\left(1+i(t,u)\right)^{u-t} = \left(1+i(t,s)\right)^{s-t} \cdot \left(1+i_g(t,s,u)\right)^{u-s}$

$i_g(t,s,u)$ **TASSO (VERO) A TERMINE (RIC)**

$$1+i_g(t,s,u) \doteq e^{f(t,s,u)}$$

Oss $\underbrace{\left(1+i(t,u)\right)^{u-t}}_{\text{fattore di capitalizzazione}} = \left(1+i(t,s)\right)^{s-t} \cdot \left(1+i_g(t,s,u)\right)^{u-s}$ RELAZIONE IMPLICITA media geometrica

$L(t,s)$ **TASSO (VERO) SEMPLICI A PRONTI (RIS)**

$$B(t,s) \doteq \frac{1}{1+L(t,s)(s-t)}$$

// $i = \frac{1}{v} - 1$

da cui $L(t,s) = \frac{1}{s-t}\left[\frac{1}{B(t,s)} - 1\right]$ $t < s$

$L_g(t,s,u)$ **TASSO (VERO) SEMPLICI FORWARD (RIS)**

$$\left(1+L(t,u)(u-t)\right) = \left(1+L(t,s)(s-t)\right) \cdot \left(1+L_g(t,s,u)(u-s)\right)$$

RELAZIONE IMPLICITA non è interpretabile

da cui $L_g(t,s,u) = \frac{1}{u-s}\left[\frac{B(t,s)}{B(t,u)} - 1\right] = \frac{e^{(u-s)f(t,s,u)} - 1}{u-s}$ $t < s < u$

$f(t_i,t_j)$ **'TASSO' A TERMINE UNIPERIODALI**

(tasso di rendimento o intensità di interesse)

$$f(t_i,t_j) \doteq f(t_i,t_j,t_{j+1}) = -\frac{1}{\Delta_j} \ln\left(\frac{B(t_i,t_{j+1})}{B(t_i,t_j)}\right) \quad t_i < t_j$$

ecco

$$\Delta_j \doteq t_{j+1} - t_j$$

Oss. da loro posso ricavare tutte le altre quantità

dim $B(t_i,t_j) = e^{-\sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l \cdot f(t_i,t_l)}$ credo $\Delta_l = t_{l+1} - t_l$

dim $\pi(t_i,t_j) = \frac{1}{t_j - t_i} \sum_{l=i}^{j-1} \Delta_l f(t_i,t_l)$ media ponderata di tax uniperiodali su corrispondenti periodi di investimento

dim $f(t_i,t_j,t_k) = \frac{1}{t_k - t_j} \sum_{l=j}^{K-1} \Delta_l f(t_k,t_l)$ media ponderata di tax uniperiodali su corrispondenti periodi di investimento

$r(t_i)$ **'TASSO' A PRONTI UNIPERIODALI**

(tasso di rendimento o intensità di interesse)

sottointeso

$$r(t_i) \triangleq f(t_i, t_i) \triangleq r(t_i, t_{i+1}) = -\frac{1}{\Delta_i} \log B(t_i, t_{i+1})$$

prox data apertura mercati

da cui $B(t_i, t_{i+1}) = e^{-\Delta_i r(t_i)}$ fattore di attualizzazione $\quad \Delta_i \triangleq t_{i+1} - t_i$

$L_f(t_i, t_j)$ **TASSO (VERO) SEMPLICI A TERMINE UNIPERIODALI (RIS)**

$$L_f(t_i, t_j) \triangleq L_f(t_i, t_j, t_{j+1}) = \frac{1}{\Delta_j} \cdot \left[\frac{B(t_i, t_j)}{B(t_i, t_{j+1})} - 1 \right] = \frac{e^{\Delta_j f(t_i, t_j)} - 1}{\Delta_j}$$

$\Delta_j = t_{j+1} - t_j$

$L(t_i)$ **TASSO (VERO) SEMPLICI A PRONTI UNIPERIODALI**

$$L(t_i) \triangleq L_f(t_i, t_i) = L(t_i, t_{i+1}) = \frac{1}{\Delta_i} \left[\frac{1}{B(t_i, t_{i+1})} - 1 \right] = \frac{e^{\Delta_i r(t_i)} - 1}{\Delta_i}$$

ϕcommenti

$\Delta_i \triangleq t_{i+1} - t_i$

$B(t_i)$ **MONEY MARKET INSTRUMENT (discreto)**

$$B(t_i) = e^{\sum_{l=0}^{i-1} \Delta_l r(t_l)} = \prod_{l=0}^{i-1} \frac{1}{B(t_l, t_{l+1})} = \prod_{l=0}^{i-1} \left(1 + \Delta_l \underset{RIS}{L(t_l)}\right)$$

visto come fattore di capitalizzazione con tasso uniperiodale corrispondente

SCADENZARIO CONTINUO

$\mathcal{T} = [0,T]$ o $= [0,+\infty]$

$f(t,s)$ — 'TASSO' A TERMINE o FORWARD ISTANTANEO (tasso di rendimento o intensità di interesse) in RIC

stesso simbolo dei tax uniperiodali forward nel discreto'

$$f(t,s) \triangleq \lim_{u \downarrow s} f(t,s,u) = -\frac{d}{ds}\log\left(B(\overset{sx}{t},s)\right) \overset{\text{derivata sx}}{=} -\frac{\frac{d}{ds}B(t,s)}{B(t,s)}$$

$t \leq s < \sup \mathcal{T}$

Oss. interpretazione '$f(t,s) = f(t,s,s^+)$'

dim da cui $\cdot\; B(t,s) = e^{-\int_t^s f(t,v)\,dv}$

dim $\cdot\; r(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,v)\,dv$ media integrale

$\cdot\; f(t,s,u) = \frac{1}{u-s}\int_s^u f(t,v)\,dv$ media integrale

$r(t)$ — 'TASSO' A PRONTI ISTANTANEO (RIC) (tasso di rendimento o intensità di interesse)

$$r(t) = f(t,t) \triangleq \lim_{s \downarrow t} r(t,s) = -\left[\frac{d}{ds}B(t,s)\right]_{s=t} \qquad t < \sup \mathcal{T}$$

$L_f(t,s)$ — 'TASSO' SEMPLICE A TERMINE ISTANTANEO (RIS) (tasso di rendimento o intensità di interesse)

$$L_f(t,s) \triangleq \lim_{u \downarrow s} L_f(t,s,u)$$

Oss $L_f(t,s) = f(t,s)$ scoperta ovvia

$L(t)$ — 'TASSO' SEMPLICI A PRONTI ISTANTANEO (RIS) (tasso di rendimento o intensità di interesse)

$$L(t) \triangleq L_f(t,t)$$

Oss $L(t) = r(t)$ scoperta ovvia

$B(t)$ — MONEY MARKET INSTRUMENT (CONTINUO)

$r(t)$ è noto, siamo in t

$$B(t) = e^{\int_0^t r(v)\,dv}$$ fattore di capitalizzazione

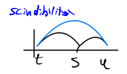
$B(0) = 1$

$dB(t) = B(t)\,r(t)\,dt$

STRUTTURA PER SCADENZA DETERMINISTICA

hp: le $B(s,u)$ sono deterministiche (non più aleatorie). Allora la AOA implica che:

dim 1) $B(t,u) = B(t,s) \cdot B(s,u) \quad \forall t \leq s < u$



dim 2) $\delta(t,s,u) = r(s,u) \quad \forall t \leq s < u$ ovvia, è tutto a pronti

dim 3) $\delta(t,s) = r(s) \quad \forall t < s$ caso particolare di 2)

dim 4) $B(t,s) = \dfrac{B(t)}{B(s)}$

Inoltre: $\delta(t,s) = r(s)$ 3) $\Rightarrow B(t,s) = e^{-\sum_{t \leq t_j < s} \Delta_j r(t_j)}$ nel discreto

$\Rightarrow B(t,s) = e^{-\int_t^s r(v)dv}$ nel continuo

MODELLO PARAMETRICO DI NELSON-SIEGEL 1987

(hp) TCN tutti noti e hanno gli scadenze vogliamo

$T=[0,+\infty[$

- DETERMINISTICO
- DESCRIVE LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI FORWARD ISTANTANEI $f(t,s)$ PER OGNI SCADENZA SUCCESSIVA

  stesso simbolo dei tax uniperiodali forward nel discreto

- MOLTO USATO PER DESCRIVERE/STIMARE LA CURVA DEI TASSI

$$f(t,s)=\beta_0+\beta_1 e^{-\frac{(s-t)}{a}}+\beta_2\cdot\frac{s-t}{a}\cdot e^{-\frac{(s-t)}{a}}$$

$a>0$

$\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$

$$f(0,t)=\underbrace{\beta_0}_{\substack{\text{componente di}\\ \text{lungo termine}}}+\underbrace{\beta_1\cdot e^{-\frac{t}{a}}}_{\substack{\text{componente}\\ \text{di breve termine}}}+\underbrace{\beta_2\cdot\frac{t}{a}\cdot e^{-\frac{t}{a}}}_{\substack{\text{componente di}\\ \text{medio periodo}}}$$

$C_1(t)$ componente di lungo termine — cost

$\lim_{t\to 0}\boxtimes=\beta_0$

$\lim_{t\to+\infty}\boxtimes=\beta_0$

$C_2(t)$ componente di breve termine — mon. cresc.

$\lim_{t\to 0}\boxtimes=\beta_1$

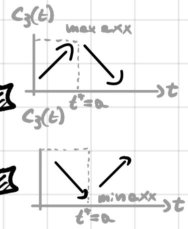
$\lim_{t\to+\infty}\boxtimes=0$

$C_3(t)$ componente di medio periodo

- $\lim_{t\to 0}\boxtimes=0$
- $\lim_{t\to+\infty}\boxtimes=0$

se $\beta_2>0$, allora $\boxtimes$

se $\beta_2<0$, allora $\boxtimes$



Con N-S posso ricavare tutte le quantità (dopo aver fatto i conti)

OCIO

DIM non veduto

- $r(0,t)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\dfrac{1-e^{-t/a}}{t/a}-\beta_2 e^{-t/a}$ tassi a pronti istantanei

  $\to r(0,0)=\lim_{t\to 0}f(0,t)=\beta_0+\beta_1$

  $\to r(0,\infty)=\beta_0$

  β_1: interpretabile come uno spread ($\neq$ fra tax a lungo e a breve)

- $f(0,s,u)=\dfrac{1}{u-s}\displaystyle\int_s^u f(0,v)\,dv=\beta_0+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{(u-s)a}\left(e^{-s/a}-e^{-u/a}\right)+\dfrac{\beta_2}{u-s}\left(s e^{-s/a}-u e^{-u/a}\right)$

- $B(0,t)=e^{-t\,r(0,t)}=e^{-t\beta_0-(\beta_1+\beta_2)a(1-e^{-t/a})+\beta_2 t e^{-t/a}}$

- $f(0,0)=\lim_{t\to 0}f(0,t)=\beta_0+\beta_1$

  $f(0,\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(0,t)=\beta_0$ tax forward con scadenza ∞

  β_1: interpretabile come uno spread ($\neq$ fra tax a lungo e a breve)

- $r(0)=f(0,0)=r(0,0)=\lim_{t\to 0}f(0,t)=\beta_0+\beta_1$