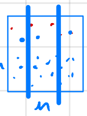
E.V.T (a blocchi) 

TH: Calcolare $P_r[\underbrace{\max(X_1,\dots,X_n)}>x]$

IDEA: per n abbastanza grande il massimo lo posso approssimare in un certo modo

VANTAGGI:
- considera solo valori estremi
- $\nexists$ hp distribuzione sottostante ai dati
- fornisce chiare informazioni sulla natura della coda della distribuzione dei dati

DIFETTI:
- essendo teoria asintotica $\to$ ↑↑ n per approssimare bene
- spesso in pratica IID non vale

ESTENSIONI:
- osservazioni stazionarie cioè ~~IID~~ anche se $\exists$ trend stagonali
- studio 20+ fenomeni congiunti

$$M_n \triangleq \max(X_1,\dots,X_n)$$

Teorema dei 3 tipi
(// TLC. Per approssimare la distribuzione del massimo!)

$X_1,\dots,X_n,\dots$ IID e M_n

se $\exists$ $a_n>0$ (parametro scala), $b_n\in\mathbb{R}$ (parametro di locazione)

se $\exists$ L v.a non degenere, con FdR H | $F_{M_n}(x)$: $a_n M_n + b_n \xrightarrow{d} L$

ricetta per trovare a_n, b_n purché L v.a. CONTINUA

$\Rightarrow$

a meno di un cambio di locazione e scala, H deve essere una fra le 3 distribuzioni di valori estremi seguenti:

TIPO I GUMBEL $\qquad \overset{\text{FdR}}{H^{\mathrm{I}}} = e^{-e^{-x}}$ $\qquad \xi\to 0$ coda leggera

✱ TIPO II FRECHET $\qquad H_\alpha^{\mathrm{II}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x\le 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{se } x>0 \end{cases}$ $\qquad \xi = 1/\alpha > 0$ coda pesante

TIPO III WEIBULL NEGATIVA $\qquad H_\alpha^{\mathrm{III}} = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}$ $\qquad \xi = -1/\alpha < 0$ $\nexists$ code

sostituendo a x $\frac{x-\mu}{\sigma}$ ottengo un cambio di locazione e scala

($\neq$ TLC: non dice se so trovare a_n, b_n | max converga)

(// TLC: "il limite massimo normalizzato è uno dei 3")

$\Rightarrow$

i 3 tipi di distribuzione si riassumono, con l'aggiunta del parametro $\overset{\text{csi}}{\xi}$ nella distribuzione generalizzata dei valori estremi (GEV) che è

$$\boxed{G_\xi(x) = e^{-[1+\xi x]^{-1/\xi}}}, \quad 1+\xi x>0$$

- ci interessa la approssimazione, per n grande e qualche $\xi\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{P(M_n\le x) \approx G_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$ ha 3 parametri da stimare

- da qui calcolo VaR e ES
- studio il segno di ξ (param + importante) facendo test statistico

$\xi=0$ <
- se accetto $\xi=0 \to$ Gumbel
- rifiuto e $\xi>0 \to$ Frechet
- rifiuto e $\xi<0 \to$ Weibull Negativa

OPERATIVAMENTE

- divido osservazioni in blocchi consecutivi della stessa grandezza

$$\overbrace{x_1,\dots x_n}^{\text{blocco 1}},\ \overbrace{x_{n+1},\dots x_{2n}}^{\text{blocco 2}},\ \dots,\ \overbrace{x_{(j-1)n+1},\dots x_{jn}}^{\text{blocco } j},\ \dots$$
$$\text{max: } z_1 \qquad \text{max: } z_2 \qquad \text{max: } z_j$$

- estraiamo il massimo da ogni blocco ($\to$ ho sequenze di M_n)

$$z_1, z_2, \dots, z_m$$

- trade-off

n. di blocchi	n. di oss. in ogni blocco	approssimazione nel T. dei 3 Tipi	n. di oss. nel campione finale
↑	↓	peggiora (Xk faccio max di un numero minore di osservazioni)	↑ (Però cala la varianza)
↓	↑	migliora	↓

Si modellizzano i massimi z_j con una GEV con cambio di locazione e scala, poi si stimano μ, σ, ξ

- ottengo e fitto la distribuzione $G_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ normalizzata con l'insieme di dati attraverso un metodo statistico (momenti / max verosimiglianza)

---

la condizione $a_n M_n + b_n \xrightarrow{d} L$ si può riscrivere come

$$\boxed{[F(c_n x + d_n)]^n \xrightarrow{d} \underset{\text{FdR}}{H(x)} \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

- se trovo c_n e d_n, allora il teo mi dice che è H FdR di v.a. non degenere
- solo per le v.a. continue
- $\lim_{n\to+\infty}[F(c_n x + d_n)]^n = \overset{\text{FdR}}{H(x)}$

posso trovare le sequenze normalizzanti c_n, d_n quando la FdR $F(\cdot)$ è dotata di densità f attraverso:

$$c_n = \frac{1}{\lambda(d_n)} \qquad d_n = F^{-1}(1-1/n)$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} \quad \text{FUNZIONE DI RISCHIO}$$

es$_1$ X_n IID, $X_n \sim \exp(\lambda) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F(c_n x + d_n)^n = e^{-e^{-x}}$ Gumbel

es$_2$ X_n IID, $X_n \sim U(0,1) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F(c_n x + d_n)^n = e^{x-1}$ Weibull Negativa

es$_3$ X_n IID, $X_n \sim$ Pareto $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F(c_n x + d_n)^n =$ Frechet

DEF Sapere da quale dei 3 tipi è attratta la mia distribuzione del massimo $\to$ conseguenze qualitative

- chiamiamo **dominio di attrazione** di una distribuzione di valori estremi H

il $\mathcal{D}_H = \{F(\cdot) \text{ FdR}: \exists\, c_n, d_n \text{ per cui } F(c_n x + d_n) \xrightarrow{d} H(x)\ \forall x\in\mathbb{R}\}$ — categorie di FdR rif. a 1! tipo distribuzione

↳ questo dominio di una distribuzione caratterizza le proprietà comuni di questa 'categoria' di distribuzioni in termini della coda dx $(1-F(x))$ con $x\to\bar{x}$ (conta la velocità con cui $\underset{x\to\bar{x}}{1-F(x)}$ va a $\emptyset$ < piccola se è veloce, grande se è lenta)

$\mathcal{D}_H^{\mathrm{I}}$: dominio di attrazione della Gumbel (coda legg): $1-F(x) \xrightarrow{x\to\bar{x}} 0$ VELOCE; tutti i momenti sono finiti

es Normale, Esponenz., Gamma, Weibull

$\mathcal{D}_H^{\mathrm{II}}$: dominio di attrazione della Frechet (coda pes): $1-F(x) \xrightarrow{x\to\bar{x}\ \cancel{+\infty}} 0$ VELOCITÀ DI UNA POTENZA

Non tutti i momenti sono finiti

es Pareto, Cauchy, t di student

Oss più piccolo è α (+ grande è $\xi = 1/\alpha$) più pesante è la coda

$$1-F(x) = \frac{h(x)}{x^\alpha}$$ (h: variazione lenta)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(t\cdot x)}{h(x)} = 1 \quad \forall t$$ cioè non varia tanto, somiglia ad una funzione costante

$\mathcal{D}_H^{\mathrm{III}}$: dominio di attrazione della $\nexists$ coda: $1-F(x) \xrightarrow{x\to\bar{x}<+\infty} 0$

es Uniforme, Beta

TEORIE ASINTOTICHE

TRADE OFF

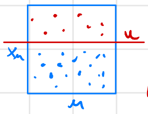
BIAS — DISTORSIONE DEL MODELLO (usare più estremi, che non lo sono!)

e

VARIANZA — PRECISIONE DEGLI STIMATORI (poche osservazioni)

RISULTATI CONSISTENTI

c'è corrispondenza fra la distribuzione che trovo come limite del massimo, e quella come limite degli eccessi condizionati



P.O.T (soglia)

TH: calcolare $P\left[X_n > \overset{\text{soglia}}{u} + y \mid X_n > u\right]$ $\quad y \geq 0$

n fix, u grande

idea: la variabile condizionata è approssimabile quando u tende all'estremo superiore

· date $X_1, \dots, X_n, \dots$ IID; $X \sim F$ comune agli X_i

$$Y \triangleq (X - u \mid X > u)$$

tipo SL in Riass.

· eccesso della perdita sopra la soglia, sapendo che eccede la soglia

dim $F_u(y) \triangleq \dfrac{F(u) - F(u+y)}{1 - F(u)}$ NO

conoscendo FdR di X, posso conoscere $F_u(y)$ distribuzione degli eccessi condizionati

non va bene, non sono valori estremi

· $M_n \triangleq \max(X_1, \dots, X_n)$

Teorema di Balkema & de Haan

risultato che dice come approssimare gli eccessi sopra la soglia elevata u

se $\exists\, a_n > 0, b_n : a_n M_n + b_n \xrightarrow{d} L$ con $\boxed{L \sim G_\xi((\cdot - \mu)/\sigma)}$

· stessa (hp) GEV

· è lo stesso ξ della G.E.V.

allora $\boxed{\underset{\text{distr. degli eccessi}}{F_u(y)} \xrightarrow{u \to \bar{x}\ \text{estr. sup}} W_\xi(y/\sigma_u)}$ $\quad \forall\, 0 < y < \bar{x} - \mu$

solo param. di scala

con $\sigma_u = \sigma + \xi(u - \mu)$ $\quad$ 2 da stimare!!

se riesco a far convergere il massimo dopo normalizzazione verso una v.a. non degenere $\Rightarrow$ la v.a. limite è una dei 3 tipi visti

e con W_ξ distribuzione di Pareto Generalizzata G.P.D.

$\boxed{G_\xi(x) = e^{-[1+\xi x]^{-1/\xi}}}$ vs $\boxed{W_\xi(y) = 1 - [1 + \xi y]^{-1/\xi}}$, $y > 0$ $\quad 1 + \xi y > 0$

La GDP approssima la distribuzione solo sulla coda dx

le 3 distribuzioni contenute in questa espressione sono:

dim se $\xi \to 0$ trovo esponenziale

dim se $\xi > 0$ trovo pareto

se $\xi < 0$ trovo beta

· quindi eccessi oltre una soglia elevata si distribuiscono come una Pareto generalizzata

· in ambito assicurativo è preferito perché fornisce la coda della singola distribuzione

OPERATIVAMENTE

· dato campione proveniente da IID $\quad x_1, \dots, x_n$

· scegliere una soglia u

· trade off fra DISTORSIONE e VARIANZA: al ↑ soglia meno # eccessi avrò, al ↓ soglia più osservazioni però buone avrò

si estraggono le K osservazioni oltre u $\quad x_{(1)}, \dots, x_{(K)}$ con $x_{(j)} > u$

· si costruiscono gli eccessi $\quad y_1 = x_{(1)} - u, \dots, y_K = x_{(K)} - u \quad j = 1, \dots, K$

dati $y_1, \dots, y_K$ si usa il modello $Y_j \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ e si stimano ξ, σ

Calcolo VaR e ES:

so che $(X - u \mid X > u) \approx W_\xi(\cdot/\sigma)$

TH: $P(X > x)$ per $x > u$

$$F(x) = 1 - \left[1 - W_\xi\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)\right] \cdot \frac{K}{n}$$

$$x = VaR_\alpha(X) = u + \frac{\sigma}{\xi}\left[\left(\frac{K}{n}\right)^{\xi} (1-\alpha)^{-\xi} - 1\right]$$

$$ES_\alpha(X) = \hat{e}(VaR - u) + VaR_\alpha(X) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi} + VaR_\alpha(X)$$

2 Proprietà di GPD

1) se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$, $E(Y) = \dfrac{\sigma}{1 - \xi}$ con $\xi < 1$

(dim) * 2) se $Y \sim W_\xi(\cdot/\sigma)$ $\forall u > 0$, $Y - u \mid Y > u \sim W_\xi(\cdot/(\sigma + \xi u))$ $\quad$ caratterizzazione GDP

→ come scegliere la soglia u?

la mean excess function $e(u) = E[Y - u \mid Y > u] = \dfrac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$ con $\xi < 1$ $\quad$ funzione lineare della soglia

· Si stima $e(u)$ con $\hat{e}(u) = \dfrac{1}{K_u} \sum_{j=1}^{K_u} y_i = \dfrac{1}{K_u} \sum_{j=1}^{K_u} (x_{(j)} - u)$

· se prendo eccessi calcolati su una soglia superiore la loro distribuzione sarà ancora GDP

stimo la GDP facendo la media dei dati $x_j - u$, e K è il loro numero e dipende dalla scelta della soglia, e ripeto il calcolo per i vari valori di u,

→ R. creando così il grafico della mean excess function, con u sulle x

Se l'andamento della funzione è lineare allora la approssimazione con una Pareto è operativa e sceglierò il più piccolo valore di u | mi fa capire che da lì in poi la funzione si comporta linearmente. (metodo visivo, non facile)