PROCESSI

$\perp\!\!\!\perp$ = indip., $\perp$ = incorrelato

Markoviani

$\varphi_x(n) = at$, $\psi(s,t) = Var(X_{(s \wedge t)})$

disc	t	cont
R.W		Proc Poisson (catene)
ARMA, W.N.		Lévy: Poisson, Pois-comp, Pseudo-Pois, Browniano/Wiener, Diffusione

Martingala

$E(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1}) = X_{n-1}$ (regress)

$\varphi_x(n) = cost$, $\psi_x(m,n) = VaR(X_{m \wedge n})$

discr	t	continuo
v.a. IID equi (dim)		Poisson (modific)
Σ v.a. IID equi (dim)		Poi-comp (modificato)
Marting. di Lévy (dim)		R.W (pag 46 etc)
Urne Polya (dim)		Moto Browniano / Pr. Wiener (dim)
(# bianche urna$_n$)		

Stazionario

$\varphi_x(n) = cost$, $\psi_x(m,n) = f(|n-m|)$

in senso lato:

- W.N, ~~R.W~~
- AR(1,0), AR(2,0) thp Norm, AR(0,1) thp Norm
- ARMA
- Funzione Spettrale

in senso ~~stretto~~: $F_{t_1,\ldots,t_n}(x) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x)$ $\forall n, \forall t, \forall h$

---

1) Catene Markov (X_n) t discreto

- omogeneità
- C-K: $P^n = P^m \cdot P^{n-m}$, $m<n$
- regolarità
- th Markov (discret)

2) Catene Markov $X(t)$ t continuo

th Markov (continuo)

th $\exists$ $G_{n\times n}$

2 proprietà su G

th $P'(t) = P(t)G$ forward equat (dim)

$P'(t) = G \cdot P(t)$ backward equat

proprietà

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[P(h) - I(h)\right] = G \quad \text{(dim)}$$

$P'(0)$

Martingala Lévy: $X_n = E(Z | Y_1, \ldots, Y_n)$ regress.

$\Rightarrow X_n$ è martingala risp. $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ cioè

$X_{n-1} = E[X_n | Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$

assoluta equità

$AE \Rightarrow E$, $A\bar{E} \Rightarrow$ INCORR. (dim) viceversa

S.I. $\wedge E \Rightarrow A.E$ (dim)

th rapp. Martingala: discr / continua

$E(X_n | X_{n-1}) = X_{n-1} \Leftrightarrow$ (dim)

$\Leftrightarrow E[X_{n+1} | X_{n-1}] = E(X_{n-1})$ $\forall n$

- sequenze v.a. IID (non sono ergodiche) $\forall \varphi(X_n)$ se non
- sequenze v.a. con media $E(\cdot)$ cost, $\psi_x(m,n) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } m=n \\ \xi \geq 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$ dip. solo da $|n-m|$

$\hookrightarrow$ SCAMBIABILITÀ

Scambiabilità

$F_{1,2,\ldots,n}(x) = F_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(x)$ $\forall n, \forall (i_1,\ldots,i_n), \forall x$

ordine ininfluente, medesima informatività

Teor Wald

Scambiabilità di alternative

- ω^n_m
- 3 condizioni su $\omega_j^{(n)}$
- ω_n
- COMPLETA MONOTONIA $(-1)^r \Delta^r(\omega_n) \geq 0$ $\forall r, n$ (2 forme)

$$\underbrace{(-1)^r \Delta^r(\omega_n)}_{\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \omega_{n+j}}$$

3) Proc. Markov (X_t) t discreto

$K(x, B)$ nucleo stocastico.

Lo è se:

$\forall B$ $K(\cdot, B)$ misur. rispetto $(\Omega, P, \mathcal{F})$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $K(x, \cdot)$ è misura prob su B

C-K: $K^{(n)}(x,B) = \int_{\mathbb{R}} K^{(m)}(x,dy) K^{(n-m)}(y,B)$

AR(1): $X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n$, $X_0 = 0$

W.N. $\varepsilon_n \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$

- $\varphi_\varepsilon(n) = 0$
- $\psi_\varepsilon(m,n) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

$\varphi(n) = a^n K$ (dim)

$\psi(m,n) = a^{n-m} \sigma_\varepsilon \frac{1-a^{2n}}{1-a^2}$ (dim)

4) Proc Markov t continuo

$Q_t(x, B)$ nucleo stocastico

$Q_t(x, \mathbb{R}) = 1$, $Q_t(x, B) \geq 0$

C-K: $Q_{t+s}(x, B) = \int_{\mathbb{R}} Q_t(x, dy) Q_s(y, B)$

- Pseudo Pois: $X(t) = \sum^{N(t)} X_n$ (arrivi)
- Poiss-comp $Y(t) = \sum^{N(t)} Y_j$ (effetti), $E(Y(t)) = E(N(t)) \cdot E(Y_1)$, $VaR(Y(t)) = VaR(N(t)) E(Y_i^2)$
- R.W. $S_n = \sum^n X_k$, X_k IID e $S_0 = 0$
  - $\varphi(n) = n\mu$ (dim)
  - $\psi(m,n) = \min(n,m)\sigma^2$ (dim)

Proc. Lévy

a) $X(0) = 0$, b) $X(t)$ increm. indip. su [ ] disgiunti

c) $X(t)$ increm. omogenei/stazion. su [ ] stessa lunghezza

d) continuità stocastica $\lim_{s \to t} P_r(|X(s) - X(t)| > \varepsilon) = 0$

Teor Hausdorf (dim)

$\exists$ momenti di una distribuzione concentrata su intervallo [0,1] soddisfano completa monotonia e la normalizzazione

Teor De Finetti (dim) (+ replica)

Tutti e soli i processi scambiabili illimitati sono combinazioni lineari convesse di processi stocastici i cui v.a. sono Be, quindi i.i.d. - Sia E logica di n° finito di indicatori scambiabili, allora: $P(E) = \int_0^1 P_\theta(E) F(d\theta)$

prob. evento

gli indicatori scambiabili non ... elementi di proc Be con ...

prop: le distribuzioni che costituiscono la legge di probabilità dei processi sono ∞ divisibili (dim)

$\varphi(t)=at$, $\psi(s,t)=Var(X_{s\wedge t})$

- $\phi_{X(t)}(u) = e^{t\,\eta(u)}$ espon. di Lévy
- $\phi_{X(t)}(u) = e^{t\cdot \text{esponente di Lévy}}$

th De Finetti

1) X n.a. ∞ div se $\forall n\ \exists X_{nj}$ IID: $\sum_{j=1}^{n} X_{nj} \overset{d}{=} X$

↳ X ∞ divisib. se posso scomporla come somma di n.a. IID

2) X è ∞ divisibile se $\forall n$ $\phi_X(\xi) = [\phi_N(\xi)]^n$, dove $E(e^{i\xi X})$ se $\exists$

cioè X è ∞ div se la funz caratteristica posso esprimerla in termini di funz caratt di altre "n" n.a. IID

3) $F_X(\cdot)$ di n.a. è ∞ divisibile se $\forall n$, $\exists F_N(x): F_N^{n*}(x) = F_X(x)$

(1 processo VS)
(analogia infondata fra var osservabili VS)

$(X_i = |E_i| \Rightarrow \omega_n = \int_0^1 x^n F(dx)$ VS)

$(P(E) = \int_0^1 P_x(E)\, F(dx)$ VS)

marginali tutte =

$F_{1,\dots,n}(\underline{x}) = \int_{\{\omega\}} \left[\prod_{i=1}^{n} F^{(\omega)}(x_i)\right] G(d\omega)$ VS)

formula funzionale fattorata

(parametro scalare/vettoriale da cui dip. le distribuzioni

INDICATORI

$Pr(S_n = n) = \omega_n = \int_0^1 x^n F(dx) = \lim_{x\to+\infty} F_{S_n/n}(x)$

$Pr(S_n = m) = \omega_m^{(n)} = \int_0^1 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} F(dx)$

Teor De Finetti (caso + generale)

Sia E log. dip. da n° finito di n.a. scambiabili non di alternativa, illimitati, allora:

$$P(E) = \int_{\mathcal{F}} P_F(E)\, \mu(dF)$$

spazio funzionale (FdR univar)

$P(E) \vdash$ n.a. X sono IID, con FdR =

misura di prob su $\mathcal{F}$

↳ $\forall$ processo scambiabile illimitato è rappresentabile come mistura di processi i cui n.a. sono IID

Scambiabilità parziale

- intervengono 2 processi (vs 1 solo)
- analogia fra sottoinsiemi di var osservabili (VS analogia fra tutte var) IID condiz
- $f_H(\theta_1,\theta_2) \neq f_H(\theta_1)\cdot f_H(\theta_2)$ (vs $f_H(\theta_1,\theta_2) = f_H(\theta_1)\cdot f_H(\theta_2)$)
- invarianza per permutazioni finite ... all'interno di ciascun sottoinsieme di v.a.

$F_{1,\dots,n;1,\dots,m}(\underline{x},\underline{y}) = F_{i_1,\dots,i_n;j_1,\dots,j_m}(\underline{x},\underline{y}) = F_{n,m}(\underline{x},\underline{y})$

(vs $F_{1,\dots,n}(\underline{x}) = F_{i_1,\dots,i_n}(\underline{x}) = F_n(\underline{x})$)

Teor rappres De Finetti

n° afferenti del I tipo

- indicatori: $X_i = |E_i|$, $Y_j = |F_j|$ $\Rightarrow \omega_{n_1,n_2} = \int_0^1\int_0^1 x^{n_1} y^{n_2} F(dx,dy)$

$P(E) = \int_0^1\int_0^1 P_{x,y}(E)\, F(dx,dy)$ $P(E) \vdash$ le X, Y sono 2e indipend.

indipendenza stocast generalizzata (fra eventi I° tipo, II° tipo e fra I e II tipo)

- n.a. qls $F_{1,\dots,n;1,\dots,m}(\underline{x},\underline{y}) = \int_{\{\omega\}}\int_{\{\psi\}} \left[\prod_{i=1}^{n} F^{(\omega)}(x_i)\right]\left[\prod_{j=1}^{m} F^{(\psi)}(y_j)\right] G(d\omega, d\psi)$

comune distrib. condiz

- se G fosse prodotto fra $G(d\omega)$ e $G(d\psi)$ il proc. sarebbe composto da 2 proc scambiabili indipend. (condiz suff) ma qui sono correlati
- le variabili sono condizionatamente indipendenti

De Finetti

1) ∞ divisibili

2) scambiabili ~~[illegible]~~

3) Scambiabili ~~[illegible]~~ parzialmente

1) ∞ divisibili

- $\bar{X}$ n.a. ∞ divisibile se $\forall n \; \exists \, |\bar{X}_{n_j} \overset{IID}{\sim} \boxed{\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_{n_j}} \overset{d}{=} \bar{X}$

$\bar{X}$ è ∞-DIV se posso scomporlo come somma di n.a. IID

- $\bar{X}$ n.a. ∞ divisibile se $\forall n \; \phi_X(\xi) = [\phi_N(\xi)]^n$

$\phi_X(\xi) = E[e^{ix\xi}]$

cioè $\bar{X}$ è ∞-div se la funz caratteristica è esprimibile attr. n funzioni caratteristiche di n.a. IID

- $\bar{X}$ n.a. ∞ se $\exists F_N(x) \,|\, F_N^{n*}(x) = F_X(x)$ di $\bar{X}$

---

2) SCAMBIABILI

(+ semplice)

- tutti e soli i $\boxed{\text{processi scambiabili illimitati}}$ sono C.L.C di processi stocastici i cui n.a. sono Be (IID)

E leg dir che n $|E_i|$ scambiabili

$\hookrightarrow P(E) = \int_0^1 P_x(E)\, F(dx)$

$S_n = n \; ~~w_n~~ = \int_0^1 x^n F(dx) = \lim_{x \to +\infty} \frac{E_{S_n}(x)}{n}$

$S_m = m \; = W_m^{(n)} = \int_0^1 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} F(dx)$

- (+ generale)

E leg dir che n° finito di n.a. scambiabili ~~non~~ ~~dicotomica~~ illimitato

$P(E) = \int_{\mathcal{F}} P_F(E)\, \mu(dF)$

ogni proc. ~~[illegible]~~ scambiabile illimitato è rappresentabile attraverso miscela di processi formati da n.a. IID

3 [· 2 processi
· analogia all'interno delle variabili osservabili]

- $\left.\begin{array}{l} X_i = |B_i| \\ Y_j = |F_j| \end{array}\right\} \omega_{n_1,n_2} = \int_0^1\int_0^1 x^{n_1} y^{n_2} F(dx, dy)$

$\left(\cancel{\text{vs}}\ 1D:\quad \omega_n = \int_0^1 x^n F(dx) \right)$

- n.a. qls $F_{1,\dots,n;1,\dots,m}(\underline{x}, \underline{y}) = \int_{\{w\}}\int_{\{u\}} \left[\prod_{i=1}^{n} F^{(w)}(x_i) \right] \left[\prod_{j=1}^{m} F^{(u)}(y_j) \right] G(dw, du)$

$\left(// \ F_{1,\dots,n}(\underline{x}) = \int_{\{w\}} \left[\prod_{i=1}^{n} F(x_i) \right] G(dw) \right)$

INFERENZA SUI PROCESSI DI POISSON

$N(t)$ # di su $[0,t]$
T_j intertempi
$S_n = \sum T_j$

INFERENZA SU TEMPI D'ATTESA T_j exp-Ga

1) $T_j \mid \mathcal{H}=\theta$ iid $\forall\theta$
2) $T_j \mid \mathcal{H}=\theta \sim \exp neg(\theta)$
3) $\boxed{g_H(\theta)} \sim Gamma(\alpha,\beta)$

$$\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$$

De Finetti non classico

$$f_{T_1}^{(H)}(t) = \int_0^{+\infty} f^{(H)}(t\mid\theta)\,g_H(\theta)\,d\theta$$

$$= \text{nucleo } Ga(\alpha+1, \beta+t)$$

$$= \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}$$

De Finetti — dalla scambiabilità ⇒ essi sono IID

$$f_{T_1,\dots,T_n}^{(H)}(\underline{t}) = \int_0^{+\infty} f^{(H)}(\underline{t}\mid\theta)\,g_H(\theta)\,d\theta$$

$$= \text{nucleo } Ga\left(\alpha+n, \beta+\sum^{n} t_j\right)$$

$$\Gamma(\alpha+n) = \underbrace{(\alpha)_n}_{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}\Gamma(\alpha)$$

$$= \frac{(\alpha)_n\beta^{\alpha}}{\left(\beta+\sum t_j\right)^{\alpha+n}}$$

$$K_n = \bigwedge_{j=1}^{n}(T_j = t_j)$$

$$\boxed{\ell(\theta\mid K_n)} \overset{f}{=} f(\underline{t}\mid\theta) = \prod_{j=1}^{n}\theta e^{-\theta t_j} = \theta^n e^{-\theta\sum_{j=1}^{n} t_j}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{\sum t_j} \quad \begin{matrix}\}\ \#\text{ arrivi} \\ \}\ \text{tempo ass. totale}\end{matrix}$$

metodo indiretto $\quad g(\lambda\mid H) \xrightarrow{Bayes} g(\lambda\mid H\wedge H)$

$$g_H(\theta\mid K_n) \propto \boxed{g_H(\theta)}\,\boxed{\ell(\theta\mid K_n)} =$$

$$= \text{nucleo } Gamma\left(\alpha+n, \beta+\sum t_i\right)$$

$$f_H(\underline{t}\mid K_n) = \frac{(\alpha')_n\cdot(\beta')^{\alpha'}}{\left(\beta'+\sum t_j\right)^{\alpha'+n}}$$

$$E(\mathcal{H}\mid H\wedge K_n) = \frac{\alpha+n}{\beta+\sum t_j} \quad \left(\text{"}\frac{\alpha}{\beta}\text{"}\right)$$

INFERENZA SU N° ARRIVI N_m Poi-Ga

1) $N_m \mid \mathcal{H}=\theta$ iid $\forall\theta$
2) $N_m \mid \mathcal{H}=\theta \sim Poi(\theta)$
3) $\boxed{g_H(\theta)} \sim Gamma(\alpha,\beta)$

$$\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$$

legge temporale intervalli — lunghezza di un qualsiasi periodo di riferimento

De Finetti non classico

$$\Lambda(H) \ni P\left(\bigwedge_{h=1}^{m}(N_h = n_h)\mid H\right) = \int_0^{+\infty} P_r\left(\bigwedge^{m}(N_h=n_h)\mid\mathcal{H}=\theta\right)\cdot g(\theta\mid H)\,d\theta$$

$$= \text{nucleo } Gamma\left(\alpha+\sum_h n_h, (m+\beta)^{\alpha+\sum n_h}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\sum n_h)}{(m+\beta)^{\alpha+\sum n_h}}\cdot\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{\prod(n_h)!}$$

$$K = \bigwedge_{i=1}^{m}(N_i = n_i)$$

$$\boxed{\ell(\theta\mid K_m)} \overset{f}{=} P_r\left(\bigwedge_{h=1}^{m}(N_h=n_h)\mid\theta\right) = \prod_{h=1}^{m}\frac{e^{-\theta}\theta^{n_h}}{n_h!}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{h=1}^{m} n_h}{m} \quad \begin{matrix}\}\ \#\text{ arrivi su interv} \\ \}\ \text{totale arrivi}\end{matrix}$$

Metodo indiretto

$$g_H(\theta\mid K_m) \propto \boxed{g_H(\theta)}\,\boxed{\ell(\theta\mid K_m)} =$$

$$= \text{nucleo } Gamma\left(\alpha+\sum^{m} n_h, \beta+m\right)$$

$$\left[P_H\left(\bigwedge_{k=1}^{N} N_{m+k}=\nu_k\mid K_m\right) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\theta N}\theta^{\sum\nu_k}}{\prod\nu_k!}\right)\left(k\,\theta^{(\alpha+\sum n_h)-1}\right)d\theta\right]$$

$$E(\mathcal{H}\mid H\wedge K) = \frac{\alpha+\sum^{m} n_h}{\beta+m}$$

$$= \frac{\beta \alpha/\beta}{\beta+\sum t_j} + \frac{\sum^{n} t_j \; n/\sum t_j}{\beta+\sum t_j}$$

$$= \frac{\beta \cdot E(\Theta|H)}{\beta+\sum t_j} + \frac{\hat{\theta}\cdot \sum t_j}{\beta+\sum t_j}$$

$$= \frac{\beta \cdot \alpha/\beta + m \sum n_i/m}{\beta+m}$$

$$= \frac{\beta\cdot E(\Theta|H)}{\beta+m} + \frac{\hat{\theta}_{ML}\cdot m}{\beta+m}$$

CP-converte SMV e stima naturale

Metodo diretto $f(T_1,\dots,T_m|H) \xrightarrow{TPC} f(T_1,\dots,T_n|H\wedge K)$

$1 \;\dots\; m \;\dots\; m+n$

$$\Lambda(H\wedge K_n) = f(T_{m+1},\dots,T_{m+n}\,|\,H\wedge K_n) =$$

$$\overset{TPC}{=} \frac{f(t_1,\dots,t_m,T_{m+1},\dots,T_{m+n})}{f(t_1,\dots,t_m|H)}$$

$$\dots$$

$$= \frac{(\alpha')_n (\beta')^{\alpha'}}{(\beta'+\sum T_j)^{\alpha'+n}}$$

con $\alpha' = \alpha+m$, $\beta' = \beta + \sum_{i=1}^{m} t_i$

$(m, \sum t_i)$ statistica sufficiente di $\underline{K}_n$

Metodo diretto

$$P_H\left(\bigwedge_{k=1}^{N} N_{m+k} = \nu_k \,|\, K_m\right) =$$

$$\overset{TPC}{=} \frac{P_H\left(\bigwedge_{h=1}^{m}(N_h = n_h)\ \bigwedge_{k=1}^{N}(N_{m+k}=\nu_k)\right)}{P_H\left(\bigwedge_{h=1}^{m}(N_h=n_h)\right)}$$

$(m, \sum n_h)$ statistica sufficiente di $\underline{K}_n$

INFERENZA SU PROCESSI BERNOULLI - BETA

estrazione o due 

1) $X_i \triangleq |E_i| \mid \Theta = \theta$ $\quad$ 110 $\forall\theta$ $\qquad P(E|\Theta=\theta)=\theta^{p}(1-\theta)^{1-p}$

2) $X_i|\Theta=\theta \sim Be(\theta)$

3) $\boxed{g_H(\theta)} \sim Bet(\alpha,\beta)$ $\qquad g_H(\theta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{1-\beta}$

Oss PERCI $\vec{m}, n\ ; s, \vec{t}$

De Finetti

$\cdot P(E|H) \triangleq \int_0^{+\infty}\prod^{m} P(E|\theta)\cdot g(\theta|H)\,d\theta = \int_0^{+\infty}\theta^{m}(1-\theta)^{n-m}\cdot\left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\right)d\theta =$

distr. iniziale

$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\underbrace{\int_0^{+\infty}\theta^{(\alpha+m)-1}\cdot(1-\theta)^{(\beta+n-m)-1}d\theta}_{Beta(\alpha+m,\,\beta+n-m)}$

$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+n-m)}{\Gamma(\alpha+\beta+m)} = \frac{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\cancel{\Gamma(\beta)}}\cdot\frac{\cancel{\Gamma(\alpha)}\cdot(\alpha)_m\cdot\cancel{\Gamma(\beta)}(\beta)_{n-m}}{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)_m}$

$= \frac{(\alpha)_m\,\beta_{n-m}}{(\alpha+\beta)_m}$ //

$K_m = \bigwedge_{i=1}^{m} E_i' \quad (\to S_m = s)$

$\cdot\ \ell(\theta|K_n) = \theta^{s}(1-\theta)^{t-s}$

metodo indiretto

$\cdot\ g_H(\theta|K_m) \propto \ell(\theta|K_m)\cdot\boxed{g(\theta|H)} = \theta^{s}(1-\theta)^{t-s}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-2} =$

$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{(s+\alpha)-1}(1-\theta)^{(\beta+t-s)-1} \to$ nucleo $Beta(\alpha+s,\beta+t-s)$

distrib finale

$\cdot\ P(E|H\wedge K_m) = \int_0^{+\infty}P(E|H)\,g(\theta|H\wedge K_m) = \int_0^{1}\left(\frac{(\alpha)_m\beta_{n-m}}{(\alpha+\beta)_m}\right)\cdot\underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{(s+\alpha)-1}(1-\theta)^{(\beta+t-s)-1}d\theta}_{Beta(\alpha+s,\,\beta+t-s)}$

$= \left[\frac{(\alpha)_m(\beta)_{n-m}}{(\alpha+\beta)_m}\right]\cdot\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+t-s)}{\Gamma(\beta+t-s)}$

$= \frac{(\alpha+s)_m\,(\beta+t-s)_{n-m}}{(\alpha+\beta+t)_m}$

Metodo diretto ✓

Oss $P_H(E|K_m) \overset{Bayes}{=} \frac{P(E\wedge K_m)}{P(K_m)} = \frac{P(K_m|E)P_H(E)}{P(K_m)} = \frac{P_H(E)\cdot P(K_m|E)}{P_H(E)P(K_m|E)+P(K_m|\bar{E})P(\bar{E})}$ $\quad P_H(E)=p \quad \frac{1}{\ } \cdot = P(K_m|E)$

l'info iniziale non è mai trascurabile: Equivalenti p.c. $\forall E>0\ |P_H(E|B)-1| < \varepsilon$

$= \frac{P_H(E)}{P_H(E)+[1-P(E)]\cdot P(K_m|\bar{E})/P(K_m|E)} = \frac{p}{p+(1-p)\cdot 1/g}$

INFERENZA SU PROCESSI NORMALE-NORMALE

misurare temperatura liquefazione dell'olio Θ ; X_n = misurazioni

1) $X_n \mid \Theta = \theta$ iid $\forall \theta$
2) $X_n \mid \Theta = \theta \sim N(\theta, \sigma_u^2)$ } (poiché $X_n = \Theta + U_n$ con $U_n \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_u^2)$
3) $g_H(\theta) \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

- $\Theta \perp U_n \; \forall n$
- $\Theta \mid H \sim N(\mu_0, \sigma_u^2)$)

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

$K_n = \bigwedge_{i=1}^{n} (X_i = x_i)$

$$l(\theta \mid K_n) = e^{-n\frac{(\theta-\bar{x})^2}{2\sigma_u^2}}$$

Metodo indiretto

$$g_H(\theta \mid K_n) \propto g_H(\theta)\, l(\theta \mid K_n) \propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{-n\frac{(\theta-\bar{x})^2}{2\sigma_u^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} + -n\frac{(\theta-\bar{x})^2}{2\sigma_u^2}\right\}$$

$$= \text{nucleo Normale}\Bigg(\underbrace{\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{n\bar{x}}{\sigma_u^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma_u^2}}}_{\text{cl. convessa fra media campr. } \bar{x} \text{ e } \mu_0\text{: le pesi è cost al } \uparrow \text{ di } n}, \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{n}{\sigma_u^2}}}_{\text{funz monotona decr con } n}\Bigg)$$

(non conta i valori assunti dalle osservaz, solo #: n)

$(n, \bar{x})$ è statistica sufficiente $(n, \bar{x})$

Metodo diretto

$\nexists$

INFERENZA SU PROCESSO POISSON - COMPOSTO

N_j processo arrivi, Θ_1 = intensità arrivi (non del tutto nota)

Y_j processo effetti/pesi, Θ_2 = intensità effetti (non del tutto nota)
$(Y_0 = 0)$

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \quad \text{con} \quad F_{X(t)}(x) = Pr(X(t) \leq x) = \sum_{n \geq 0} Pr(N_t = n)\, Pr(X(t) \leq x \mid N_t = n)$$
$$= \sum_{n \geq 0} Pr(N_t = n) \cdot F^{*n}(x)$$

1) $N(t) \mid \Theta_1 = \theta_1 \sim Poi(\theta_1)$ i.i.d. $\forall \theta_1$ $\quad \left(Pr(N(t) = n_t \mid \Theta_1 = \theta_1) = \frac{e^{-\theta_1} \cdot \theta_1^{n_t}}{(n_t)!} \right)$ — $\Theta_2 = \theta_2$ anche se non lo uso

2) $Y_j \mid \Theta_2 = \theta_2 \sim esp(\theta_2)$ i.i.d. $\forall \theta_2$ $\quad \left(f_{Y_1}(y_1 \mid \Theta_2 = \theta_2) = \theta_2\, e^{-\theta_2 y} \right)$ — $\Theta_1 = \theta_1$ anche se non lo uso

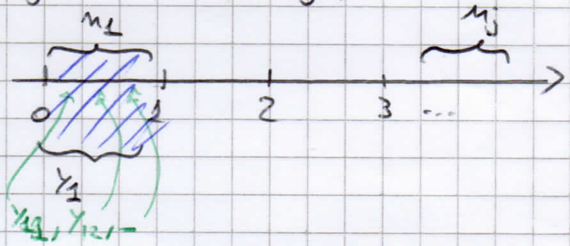
con $N(t) \perp\!\!\!\perp Y_j$ condizionatamente a $\underline{\Theta} = \underline{\theta}$

$g(\Theta_1, \Theta_2 \mid H) =$ a) $g_1(\Theta_1 \mid H) \cdot g_2(\Theta_2 \mid H)$ indip stocastica

c) ~ Beta bivariata $\rightarrow$ scambiabilità parziale

b) ~ misture di prodotti Gamma

$K = (m, \underbrace{n_1, \ldots, n_m}_{\text{n° arrivi su m intervalli}}, \underbrace{y_1, \ldots, y_m}_{\text{somme degli effetti in ciascun intervallo}})$ $\quad$ es $y_1 = \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}, \ldots, y_m = \sum_{j=1}^{n_m} y_{mj}$



fix periodo j

a) $l(\theta_1, \theta_2 \mid K) = \underbrace{l(\theta_1 \mid K)}_{poi}\, \underbrace{l(\theta_2 \mid K)}_{esp}$

$(K = K_j) \wedge \bigwedge_{h=1}^{n_j} (Y_h = y_h)$ $\quad \frac{e^{-\theta_1}\, \theta_1^{n_j}}{n_j!} \quad \theta_2^{n_j}\, e^{-\theta_2 \sum_{h=1}^{n_j} y_h} \quad \propto (\theta_1 \cdot \theta_2)^{n_j}\, e^{-\theta_1 - \theta_2 \sum_h^{n_j} y_h}$ $\quad j$ fix

$\rightarrow$ per tutti un periodo: $\quad l(\theta_1, \theta_2 \mid K_1, \ldots, K_m) = (\theta_1 \theta_2)^{\sum_{j=1}^{m} n_j}\, e^{-m\theta_1 - \theta_2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_j} y_h} = \left[\theta_1^{n}\, e^{-m\theta_1} \right] \cdot \left[\theta_2^{n}\, e^{-m\theta_2} \right]$

$$\hat{\theta}_{1\,ML} = \frac{\overbrace{\sum^m n_j}^{n}}{m} \quad \frac{\#\text{ osservati}}{\#\text{ periodi}}, \quad \hat{\theta}_{2\,ML} = \frac{\overbrace{\sum^m n_j}^{n}}{y} \quad \text{peso globale tutti gli osservati}$$

b) $g(\theta_1, \theta_2 \mid H) = Ga(a, c)\, Ga(b, d)$

$g(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\approx}{H \wedge K}) \propto g(\theta_1, \theta_2 \mid H) \cdot l(\theta_1, \theta_2 \mid K) \propto \left[\theta_1^{a-1} e^{-c\theta_1} \cdot \theta_2^{b-1} e^{-d\theta_2} \right] \cdot \left[\theta_1^{n} e^{-m\theta_1} \right] \cdot \left[\theta_2^{n} \cdot e^{-m\theta_2} \right]$

$= \left(\theta_1^{a+n-1}\, e^{-\theta_1 (c+m)} \right) \left(\theta_2^{b+n-1}\, e^{-\theta_2 (d+y)} \right)$, la densità congiunta finale è ancora prodotto delle marginali

(m, n, y) è stat. sufficiente

c) $f(\theta_1,\theta_2) = \frac{\Gamma(v_1,v_2,v_3)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)\Gamma(v_3)} \theta_1^{v_1-1} \theta_2^{v_2-1} (1-\theta_1-\theta_2)^{v_3-1}$ distr di Dirichelet (Beta Bivariata)

le marginali sono: $f_1(\theta_1) \sim Beta(v_1, v_2+v_3)$

$f_2(\theta_2) \sim Beta(v_2, v_1+v_3)$

- $f(\theta_1,\theta_2|H) \sim$ Beta Bivariata (v_1, v_2, v_3)

$K_1 \wedge K_2$

$l(\theta_1,\theta_2|K_1\wedge K_2) = \theta_1^{s_1}(1-\theta_1)^{n_1-s_1} \cdot \theta_2^{s_2}(1-\theta_2)^{n_2-s_2}$

$\rightarrow \hat{\theta}_{ML1} = \frac{s_1}{n_1}$, $\hat{\theta}_{ML2} = \frac{s_2}{n_2}$

- $f(\theta_1,\theta_2|H\wedge K_1\wedge K_2) \propto f(\theta_1,\theta_2|H)\, l(\theta_1,\theta_2|K_1\wedge K_2) \propto \ldots$

$\propto \theta_1^{v_1+s_1-1}\theta_2^{v_2+s_2-1}(1-\theta_1)^{n_1-s_1}(1-\theta_2)^{n_2-s_2}(1-\theta_3)^{v_3-1}$

... non è nucleo di bivariata

è c. l. di Beta bivariate

↳ la famiglia che rimane invariata nell'applicazione del teorema di Bayes non è la fam delle Beta bivar, ma la famiglia delle c.l. delle Beta-Bivariate (finite) misture

KALMAN

m.o. $\tilde{y}_{n+1} = a\,\tilde{y}_n + v_n \qquad v_n \perp\!\!\!\perp y_n$

o. $\tilde{x}_n = b\,\tilde{x}_{n-1} + w_{n-1} \qquad w_{n-1} \perp\!\!\!\perp \tilde{x}_n \quad \forall n \dots$

$\left.\begin{matrix} v_n \\ w_{n-1} \end{matrix}\right\} N\left(0, \begin{cases} \sigma_v^2 \\ \sigma_w^2 \end{cases}\right)$

$$P_{n|n} = E\left(\tilde{y}_n - \hat{\tilde{y}}_{n|n}\right)^2$$

$$1)\quad \boxed{\hat{\tilde{y}}_{n+1|n} = a\,\hat{\tilde{y}}_{n|n}}$$

$$2)\quad \boxed{P_{n+1|n} = \cancel{E\left(\tilde{y}_{n+1|n} - \hat{\tilde{y}}_{n+1|n}\right)^2} = a^2 P_{n|n} + \sigma_v^2}$$

→ rif $\tilde{y}$

$$\ast\ 3)\quad \boxed{\hat{\tilde{y}}_{n+1|n+1} = \hat{\tilde{y}}_{n+1|n} + \frac{b\,P_{n+1|n}}{b^2 P_{n+1|n} + \sigma_w^2}\cdot\left(x_{n+1} - b\,\hat{\tilde{y}}_{n+1|n}\right)}$$

→ rif $\tilde{x}_n$

$$4)\quad \boxed{P_{n+1|n+1} = \frac{\sigma_w^2\,P_{n+1|n}}{b^2 P_{n+1|n} + \sigma_w^2}}$$

→ rif a $\tilde{x}$

Table of Distributions

Distribution	PMF/PDF and Support	Expected Value	Variance	MGF
Bernoulli Bern(p)	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=q=1-p$	p	pq	$q+pe^t$
Binomial Bin(n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $k\in\{0,1,2,\dots n\}$	np	npq	$(q+pe^t)^n$
Geometric Geom(p)	$P(X=k)=q^k p$ $k\in\{0,1,2,\dots\}$	q/p	q/p^2	$\frac{p}{1-qe^t},\ qe^t<1$
Negative Binomial NBin(r,p)	$P(X=n)=\binom{r+n-1}{r-1}p^r q^n$ $n\in\{0,1,2,\dots\}$	rq/p	rq/p^2	$(\frac{p}{1-qe^t})^r,\ qe^t<1$
Hypergeometric HGeom(w,b,n)	$P(X=k)=\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}/\binom{w+b}{n}$ $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$	$\mu=\frac{nw}{b+w}$	$\left(\frac{w+b-n}{w+b-1}\right)n\frac{\mu}{n}(1-\frac{\mu}{n})$	messy
Poisson Pois(λ)	$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k\in\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Uniform Unif(a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $x\in(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Normal $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ $x\in(-\infty,\infty)$	μ	σ^2	$e^{t\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
Exponential Expo(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $x\in(0,\infty)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t},\ t<\lambda$
Gamma Gamma(a,λ)	$f(x)=\frac{1}{\Gamma(a)}(\lambda x)^a e^{-\lambda x}\cancel{\frac{1}{x}}$ $x\in(0,\infty)$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a,\ t<\lambda$
Beta Beta(a,b)	$f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $x\in(0,1)$	$\mu=\frac{a}{a+b}$	$\frac{\mu(1-\mu)}{(a+b+1)}$	messy
Log-Normal $\mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\log x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ $x\in(0,\infty)$	$\theta=e^{\mu+\sigma^2/2}$	$\theta^2(e^{\sigma^2}-1)$	doesn't exist
Chi-Square χ^2_n	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$ $x\in(0,\infty)$	n	$2n$	$(1-2t)^{-n/2},\ t<1/2$
Student-t t_n	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+x^2/n)^{-(n+1)/2}$ $x\in(-\infty,\infty)$	0 if $n>1$	$\frac{n}{n-2}$ if $n>2$	doesn't exist