

Inferenza Statistica

Esame del 11 settembre 2012

Tempo a disposizione 2 ore.

Tra parentesi quadre i punteggi massimi attribuibili per ciascun quesito (Totale: 37).

1. La variabile di interesse X misurata su un campione casuale di n assicurati RCA è costituita dal numero di sinistri che un cliente di una compagnia assicurativa subisce in un anno. I valori del campione x_1, x_2, \dots, x_n vengono assunti come determinazioni indipendenti di una variabile casuale Poisson.

- a. [2] Discutere se si ritiene che l'assunzione fatta sopra sia ragionevole.
- c. [4] Si ponga ora che sia ragionevole e si verifichi per quale valore di a il seguente stimatore T risulta non distorto per il parametro della Poisson

$$T = a(X_1(X_1 - X_2) + X_2(X_2 - X_3) + \dots + X_{n-1}(X_{n-1} - X_n))$$

- b. [4] La probabilità di non avere incidenti è 10 volte superiore a quella di averne solo 1. Un'agenzia che ha 1200 assicurati decide che assumerà un nuovo impiegato se la probabilità di dover trattare 100 pratiche per i sinistri dei propri assicurati è superiore a 0.7. Cosa dovrebbe decidere l'agenzia?
2. Si dispone di un campione casuale semplice di n unità dalla variabile casuale X che ha la seguente distribuzione: $f(x) = \theta^{|x|}(1 - \theta^{2-|x|})$ ove $x = -1, 0, 1, 2$.
- a. [3] Fornire uno stimatore di θ attraverso il metodo dei momenti.
- b. [4] Ottenere lo stimatore di massima verosimiglianza di θ .

3. Un'azienda acquista uno strumento di misura (una bilancia) da usare in un processo industriale. La pubblicità afferma che la bilancia è molto precisa e che la probabilità che il peso misurato si discosti più di 0.003 grammi dal vero peso quando è correttamente tarata è non superiore a 0.1. Per verificare quanto affermato si pesa più volte uno stesso oggetto che pesa 0.001 grammi e si ottengono i seguenti valori: 0.00102, 0.00099, 0.00132, 0.00114, 0.00096. Si assuma che le misure fornite dalla bilancia possano considerarsi gaussiane e che la bilancia sia tarata correttamente (ovvero fornisca misure che con uguale probabilità sono superiori o inferiori alla vera misura):

- a. [2] Si formuli il sistema di ipotesi statistiche adatto a valutare se quanto dice la pubblicità è vero;
- b. [3] Si verifichi tale ipotesi con i dati forniti e si fornisca un limite inferiore per il p-value.
- c. [4] Si voglia ora verificare se la bilancia è tarata correttamente usando gli stessi dati. Che procedura utilizzereste? E cosa concludereste nel caso in cui il livello di significatività fosse posto pari a 0.05?
- d. [3] Per la procedura di cui al punto [c.] uno statistico propone la seguente regola per decidere se lo strumento è tarato: si conclude che non è tarato se si osservano almeno 4 misure superiori o inferiori al peso reale. Sapreste dire quanto vale la probabilità di errore di I tipo per tale procedura? E tale procedura è migliore o peggiore di quella proposta al punto c.?
4. Vi viene proposto di scommettere 1 euro sul lancio di una moneta con la prospettiva di vincere 1 euro (cioè di raddoppiare la puntata) se indovinate la faccia che esce e di perdere la puntata altrimenti.

- a. [4] Immaginate di sapere che negli ultimi 100 lanci del dado sia uscita 63 volte testa. Siete disposti a scommettere alle condizioni esposte?
- b. [4] Supponete ora di adottare il criterio per cui si scommette se, essendo noto il risultato di N lanci, l'intervallo di confidenza al 95% costruito in base a tale informazione contiene $p = 0.5$. Quanti lanci occorre osservare affinché tale intervallo abbia ampiezza inferiore a $1/25$?