

Inferenza Statistica

Esame del 19 gennaio 2016

Tempo a disposizione 2 ore.

Tra parentesi quadre i punteggi massimi attribuibili per ciascun quesito (Totale: 36).

1. Si immagini di disporre di n determinazioni i.i.d. da una variabile X che è nella popolazione distribuita come una gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$. Per σ^2 lo stimatore di massima verosimiglianza è $\hat{\sigma}^2$ pari alla devianza campionaria $D = \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2$ divisa per n . E' noto che spesso si preferisce utilizzare invece S^2 che è pari a $D/(n-1)$. E' noto infatti che S^2 è stimatore non distorto di σ^2 ed inoltre nel caso gaussiano $Var(S^2) = 2\sigma^4/(n-1)$.
 - a. [3] Determinare la distorsione dello stimatore di massima verosimiglianza e verificare che lo stesso è asintoticamente non distorto.
 - b. [4] Verificare quale tra i due stimatori $\hat{\sigma}^2$ e S^2 è più efficiente in termini di errore quadratico medio.
 - c. [2] Quanto vale la probabilità $P(\hat{\sigma}^2 > S^2)$?
2. Immaginate di comprare 10 biglietti gratta e vinci che costano 1 euro l'uno. La probabilità di vittoria per ogni biglietto è pari a 0.1. Se il biglietto è vincente la cifra vinta è pari a X euro dove X è una variabile aleatoria geometrica di media 5. Sia Y la variabile aleatoria che descrive il numero di biglietti vincenti e sia Z quella che descrive il totale degli ammontari vinti. Si ricordi che la funzione di ripartizione di una variabile $X \sim Ge(p)$ è $F(x) = 1 - (1-p)^x$.
 - a. [3] Si calcoli la probabilità che il giocatore guadagni più di 10 euro se c'è solo un biglietto vincente, ovvero $P(Z > 20 | Y = 1)$.
 - b. [4] Qual è la distribuzione di Z nel caso in cui $Y = 2$?
 - c. [3] Come trovereste $P(Z > 10)$?
3. Si osserva un campione di 8 valori x_1, x_2, \dots, x_8 da una esponenziale $X \sim esp(\lambda)$. Si vuole verificare l'ipotesi H_0 che $\lambda = 0.5$ contro l'alternativa che sia maggiore. Si rifiuta l'ipotesi nulla se la media è maggiore di 4.
 - a. [4] Calcolare la probabilità dell'errore di I tipo.
 - b. [4] Se la media campionaria risulta 1.9175, quanto vale il p-value?
4. In una sperimentazione clinica si vuole stimare il tasso di guarigione, p , connesso con l'uso di un nuovo farmaco. Su 650 pazienti ai quali il farmaco è stato somministrato, in 200 soggetti è stata riscontrata la guarigione.
 - a. [3] Si costruisca l'intervallo di confidenza per p al livello del 97%.
 - b. [3] Quale deve essere il numero minimo delle unità da includere nell'esperimento affinché, con probabilità del 99%, l'errore della stima di p sia inferiore a 0.01?
 - c. [3] Un farmaco già sul mercato è noto che garantisce una proporzioni di guarigioni pari a 0.25. Si adotti una procedura statistica appropriata e si verifichi sulla base dei dati raccolti se il nuovo farmaco è più efficace di quello in commercio.