Inferenza Statistica

Esame del 2 luglio 2015

Tempo a disposizione 2 ore.

1. Sia p la probabilità che un pezzo prodotto sia difettoso. Al fine di verificare l'ipotesi $H_0 : p = .01$ contro $H_1 : p = 0.005$ si controllano 1000 pezzi e si calcola la statistica T=numero di pezzi difettosi. Si decide di rifiutare H_0 se T è minore o uguale a 6.

a. Qual è il livello di significatività del test proposto?

b. Quanto vale la potenza?

c. Quanto vale il p-value se si sono ottenuti 4 pezzi difettosi?

Soluzione

a. Si vuole verificare l'ipotesi $H_0 : p = p_0 = 0.01$ contro $H_1 : p = 0.005$, con $n = 1000$ e regione di rifiuto $R = \{T : T \leq 6\}$. Il livello di significatività del test è dato da

$$\alpha = P(T \in R \,|\, H_0) = P(T \leq 6) \quad \text{dove} \quad T \sim Bin(1000, 0.01)$$

Utilizzando l'approssimazione normale si ha

$$\begin{aligned} P(T \leq 6) \approx & P\left(Z \leq \frac{6 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \\ = & P\left(Z \leq \frac{6 - 1000 \cdot 0.01}{\sqrt{1000 \cdot 0.01 \cdot (1 - 0.01)}}\right) \\ = & \Phi(-1.27) = 1 - \Phi(1.27) = 0.102. \end{aligned}$$

dove Z è una variabile aleatoria normale standardizzata e $\Phi(\cdot)$ è la sua funzione di ripartizione.

b. La potenza del test vale

$$\begin{aligned} \pi = & P(T \in R \,|\, H_1) \\ = & P(T \leq 6 \,|\, p = 0.005) \approx P\left(Z \leq \frac{6-5}{\sqrt{4.975}}\right) = \Phi(0.45) = 0.674. \end{aligned}$$

c. Il p-value si calcola come $\gamma = P(T \leq t_{oss} \,|\, H_0)$, dove t_{oss} denota il valore osservato della statistica, nel nostro caso quindi $t_{oss} = 4$. Possiamo scrivere

$$P(T \leq 4 \,|\, p = 0.01) \approx P\left(Z \leq \frac{4-10}{\sqrt{9.9}}\right) = \Phi(-1.91) = 1 - \Phi(1.91) = 0.028.$$

2. Sia X una grandezza che nella popolazione è distribuita secondo la legge di densità

$$f(x) = e^{\alpha - x}, \quad x \geq \alpha$$

a. Si derivi lo stimatore di massima verosimiglianza per α se si dispone di un campione i.i.d. di n elementi tratti dalla popolazione.

b. Si dica se valgono le condizioni di regolarità per cui il reciproco dell'informazione attesa di Fisher rappresenta il limite inferiore della varianza per stimatori non distorti di α.

Soluzione

a. La funzione di verosimiglianza del campione è

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n;\alpha) = L(\alpha) &= \prod_{i=1}^{n} e^{\alpha - x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\ &= e^{(n\alpha - \sum x_i)} \mathbb{I}_{(-\infty, x_{(1)}]}(\alpha), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x_i)$ è uguale a 1 se e solo se tutti gli $x_1,\ldots,x_n$ sono nell'intervallo $[\alpha,\infty)$, che è vero se e solo se $\alpha \leq x_{(1)} := \min(x_1,\ldots,x_n)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza non si può trovare ponendo la funzione score pari a zero. In questo caso, il valore che massimizza la funzione di verosimiglianza è $\hat{\alpha} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$.

b. Il limite fornito dalla disuguaglianza di Rao-Cramér alla varianza degli stimatori corretti di α dovrebbe essere $1/I(\alpha)$, con $I(\alpha) = nE\left[\left(\frac{d}{d\alpha}\log f(y;\alpha)\right)^2\right]$. Tuttavia, poiché il campo di variabilità di X dipende da α, le condizioni di regolarità per cui vale il limite individuato non sono rispettate.

3. Una concessionaria di vendite d'auto è aperta 365 giorni all'anno. Si assuma che le auto vendute ogni giorno siano determinazioni indipendenti di Poisson di varianza 2. Si denoti con Y il numero di auto vendute in un anno.

a. Si valuti la probabilità che si vendano più di 800 auto in anno.

b. La probabilità che le auto vendute siano fra 700 e 800.

c. Si assuma ora che nei giorni dei 52 weekend si vendano in media il doppio di auto. Si ricalcoli la probabilità di cui al punto **a.**

a. Si ha che $Y \sim Po(365 \cdot 2 = 730)$. La distribuzione di Poisson di parametro ν per ν elevato può essere approssimata da una distribuzione normale di media e varianza ν, quindi, approssimativamente, se Z è distribuita secondo una normale standard, si ha

$$P(Y > 800) \approx 1 - P\left(Z \leq \frac{800-730}{\sqrt{730}}\right) = 1 - \Phi(2.59) = 0.0048.$$

b. Approssimiamo $P(700 < Y < 800)$ con

$$P\left(\frac{700-730}{\sqrt{730}} \leq Z \leq \frac{800-730}{\sqrt{730}}\right) = \Phi(2.59) - \Phi(-1.11) = 0.86$$

c. Il numero di auto vendute in un anno è la v.a. $Y = Y_1 + Y_2$, dove $Y_1 \sim Po(2 \cdot 61)$ e $Y_2 \sim Po(4 \cdot 104)$, essendo 104 il numero di giorni in 52 weekend. Supponendo Y_1 e Y_2 indipendenti, la v.a. Y ha ancora distribuzione di Poisson di media $\lambda = 2 \cdot 261 + 4 \cdot 104 = 938$, quindi

$$P(Y > 800) \approx 1 - \Phi\left(\frac{800-938}{\sqrt{938}}\right) = 0.999997$$

4. Si vuole verificare se il consumo di un nuovo motore A è inferiore a quello del vecchio motore B. A tal fine si raccolgono dati sui km percorsi con un litro da entrambi i motori. Per il motore A si ottengono le seguenti 7 osservazioni

22.8 26.0 25.6 24.0 25.3 23.8 24.5

per il motore B si osservano le 11 percorrenze

19.7 40.9 17.2 25.7 40.0 18.1 24.5 16.9 26.8 26.8 42.8

a. Accettereste l'ipotesi, al livello $\alpha = 0.02$, che la media dei km per litro del motore A sia maggiore o uguale di quella del motore B contro l'alternativa che sia inferiore? (si ipotizzi la normalità delle popolazioni dei km percorsi con i due motori e l'uguaglianza delle varianze delle popolazioni dalle quali si estraggono i campioni).

b. Si verifichi l'ipotesi di uguaglianza delle varianze per le popolazioni di km percorsi al livello $\alpha = 0.02$.

c. Qual è la potenza del test di cui al punto **b.** se l'alternativa è $10\sigma_A^2 = \sigma_B^2$?

Soluzione

a. Interessa verificare l'ipotesi $H_0 : \mu_B \leq \mu_A$ contro l'alternativa $H_1 : \mu_B > \mu_A$ (o equivalentemente $H_1 : \mu_B - \mu_A > 0$) che il motore B consumi di meno. Dai dati campionari si ricava

$$\bar{x}_A = 24.57, \;\; s_A^2 = 9.21$$
$$\bar{x}_B = 27.22, \;\; s_B^2 = 94.98$$

Se è vera l'ipotesi nulla, il rapporto

$$T = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

con

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

ha distribuzione t di Student con $(n_A + n_B - 2)$ gradi di libertà. Si rifiuterà H_0 se il valore osservato di T appartiene alla regione

$$R = \{t : t \geq t_{1-\alpha}\}$$

dove $t_{1-\alpha}$ denota il quantile della distribuzione t di Student di ordine $(1 - \alpha)$. Posto $n_A = 7$ ed $n_B = 11$, si calcola la quantità

$$t_{oss} = \frac{27.22 - 24.57}{7.93\sqrt{1/7 + 1/11}} = 0.69$$

ed essendo $0.69 < t_{1-0.02} = 2.24$ (per 16 gradi di libertà), l'ipotesi nulla va accettata al livello del 2%.

b. Denotate con σ_A^2e σ_B^2 le varianze delle popolazioni di km percorsi con il motore A e B, rispettivamente, occorre verificare $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ contro $H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ al livello $\alpha = 0.02$. Si calcola quindi il rappoto delle varianze dei due campioni

$$f = \frac{s_B^2}{s_A^2} = \frac{94.98}{9.21} = 10.31$$

e si determinano i quantili $f_{\frac{\alpha}{2}}$, $f_{1-\frac{\alpha}{2}}$ di ordine $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ della distribuzione $F(r_1, r_2)$ di Fisher con $r_1 = 10$ e $r_2 = 6$ gradi di libertà:

$$f_{0.01}(10, 6) = \frac{1}{f_{1-0.01}(6, 10)} = \frac{1}{7.87} = 0.13 \quad \text{e} \quad f_{0.99}(10, 6) = 5.39$$

La regione di rifiuto del test è così definita

$$R = \{(s_1^2, s_2^2) : s_1^2/s_2^2 \notin [f_{\frac{\alpha}{2}}(10,6), f_{1-\frac{\alpha}{2}}(10,6)]\}$$

e poichè il valore osservato della statistica $f = 10.31$ non è nell'intervallo $(0.13, 5.39)$, si rifiuta l'ipotesi nulla di uguaglianza delle varianze.

c. La potenza del test con ipotesi alternativa $10\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, è data da

$$P(F \in R \mid H_1) = 1 - P(F \in A \mid H_1) = 1 - P\left(0.13 < \frac{S_B^2}{S_A^2} < 5.39 \,\middle|\, \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} = 10\right)$$

con

$$F = \frac{S_B^2}{S_A^2} \sim \frac{\chi^2_{(10)}/10}{\chi^2_{(6)}/6} \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2}$$

che presenta al numeratore e al denominatore una variabile aleatoria chi-quadrato divisa per i propri gradi di libertà. Allora, se $Y \sim F(10,6)$ risulta

$$\begin{aligned} 1 - P\left(0.13 < \frac{S_B^2}{S_A^2} < 5.39 \,\middle|\, \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} = 10\right) =& 1 - P(0.13 < 10Y < 5.39) \\ =& 1 - P(0.013 < Y < 0.539) \\ =& 1 - F_Y(0.539) + F_Y(0.013) \end{aligned}$$

Le tavole della distribuzione F di Fisher forniscono la f.d.r. solo in corrispondenza di alcuni quantili e in questo caso non è possibile determinare il risultato esatto dell'ultima espressione. Tuttavia, si osservi che dalle tavole si ricava il quantile di livello 0.01 di Y come $1/f_{0.99,6,10} = 1/5.386 \approx 0.2$, per cui $P(Y \leq 0.013) \approx 0$; inoltre, essendo $V = 1/Y \sim F(6,10)$, $P(Y \geq 0.539) = P(V \leq 1.855)$ (utilizzando `R` si trova che tale valore è circa 0.815).