CRITERIO DELLA SPERANZA MATEMATICA P 9-14

Supponendo di essere nell'ambito di scelta tra operazioni finanziarie da parte di un decisore, la scelta tra operazioni finanziarie può essere trasferita alla scelta di un indicatore ricchezza che sintetizza la situazione patrimoniale del decisore al termine dell'operazione finanziaria.

Quindi si introduce un insieme di numeri aleatori D, che rappresentano la situazione patrimoniale del decisore al termine delle operazioni finanziarie.

Al fine di scegliere tra questi numeri aleatori si introduce un ordinamento di preferibilità nell'insieme dei numeri aleatori D.

L'ordinamento di preferibilità nell'insieme D è una relazione binaria in D

- **completa:** per ogni coppia di elementi dell'insieme, o x è in relazione con y o y è in relazione con x.
  cioè $\forall$ x,z $\in$ D, x $\geq$ y o x $\leq$ y
- **riflessiva:** per ogni x appartenente a D x è preferibile rispetto sestesso
  cioè $\forall$ x $\in$ D x $\geq$ x
- **transitiva: $\forall$ x, y, z $\in$ D, x $\geq$ y e y $\geq$ z == > x $\geq$ z**

Il problema di scelta di tra operazioni finanziarie viene ricondotta alla scelta di numeri aleatori.

Siccome i numeri aleatori sono applicazioni dalla partizione dell'evento certo (insieme di eventi a due a due incompatibili ed esaustivi, cioè almeno un evento è vero e solo uno è vero) a valori in R, cioè associa ad ogni evento elementare un valore reale.

Il confronto tra numeri aleatori è semplice se risuta

$\forall$ X,Y $\in$ D X $\geq$ Y se X(w) $\geq$ Y(w) $\forall$ w $\in$ P

Ma siccome può accadere che per alcuni eventi w, X sia preferibile a Y e per altri eventi Y sia preferito ad X, per risolvere il problema è possibile introdurre un funzionale sull'insieme dei numeri aleatori D che associa ai numeri aleatori una valutazione sintetica.

ϕ : D --> R
x $\in$ D --> ϕ(x) $\in$ R

Attraverso il funzionale si introduce un ordinamento di preferibilità nell'ambito dell'insieme dei numeri aleatori con la seguente regola,

$\forall$ X,Y $\in$ D X $\geq$ Y <==> ϕ(X) $\geq$ ϕ(Y)

Dove $\geq$ **è l'ordinamento naturale in R**, quindi associamo ad ogni elemento in D un elemento in R, e diciamo che **un elemento x è preferito ad un elemento y se il funzionale associa ad x un numero reale maggiore o uguale a un valore che associa a y**.

Trasformiamo così il confronto tra numeri aleatori in un confronto tra numeri reali.

Spesso il funzionale ϕ invece che essere definito su x è definito sulla distribuzione di x, cioè accade che**ϕ(.) è ta le che se i due numeri aleatori sono identicamente distribuiti il funzionale associa ai due numeri aleatori lo stesso valore**

$X \overset{d}{=} Y \Longrightarrow \phi(x) = \phi(y)$ **(cioè se equidistribuite l'immagine attraverso ϕ di x e di y sono identiche, spesso si usano funzionali che non distinguono tra numeri aleatori diversi quando hanno la stessa funzione di probabilità)**

Un possibile funzionale che possiamo utilizzare per ottenere una valutazione sintetica dei numeri aletori è la speranza matematica.

La speranza matematica introduce nell'insieme dei numeri aleatori D un ordinamento di preferibilità seconda la seguente regola.

$$\forall X,Y \in D \quad X \geq Y \iff E(X) \geq E(Y)$$

La scelta del funzionale dipende da quanto spiega bene il comportamento dei decisori nel mercato assicurativo, e si dimostra che il criterio della speranza matematica è carente.

Ad esempio ipotizzando che un decisore debbe scelgliere tra numeri aleatori che rappresentano la ricchezza del decisore al termine dell'operazione finanziaria, rispetto ad una ricchezza certa di riferimento X'.

Indicando con X e Y la ricchezza del decisore al termine di due operazioni finanziarie

$X = X' + G1$
$Y = X' + G2$

Dove G è la variazione della situazione patrimoniale dell'individuo derivante dalle operazioni finanziarie.

Si ha che

$$\begin{aligned} E(X) \geq E(Y) &\iff E(X' + G) \geq E(X' + G2) \\ &\iff E(X') + E(G1) \geq E(X') + E(G2) \\ &\iff E(G1) \geq E(G2) \\ &\iff X \geq Y \iff E(G1) \geq E(G2) \end{aligned}$$

Quindi X è preferibile a Y se la speranza matematica di G1 è maggiore uguale alla speranza matematica di G2. **Per decidere quale operazione è conveniente intraprendere possiamo confrontare semplicemente il valore atteso dei guadagni, trasferiamo l'ordinamento di preferibilità sui guadagni.**

Con questo metodo svanisce l'interesse della situazione patrimoniale di riferimento e si considera solo il guadagno delle due operazioni finanziarie, e quest'aspetto non è corretto in quanto il comportamento del decisore dipende dalla ricchezza posseduta da esso.

Dimostriamo che il criterio della speranza matematica non spiega adeguatamento il comportamento dei decisori nell'ambito del mercato assicurativo.

Data la seguente situazione

	Stipula il contratto	Non stipula il contratto	Speranza matematica del guadagno per l'assicuratore
Asicuratore (A)	$G_1^{(A)} = P – X$	$G_2^{(A)} = 0$	$E(G_1^{(A)}) = P – E(X) > 0$
Assicurato (a)	$G_1^{(a)} = – P – X + X$	$G_2^{(a)} = -X$	$E(G_2^{(A)}) = 0$

Siccome il contratto assicurativo non viene stipulato a premio equo (P > E[X]) per l'**assicuratore** è preferibile stipulare il contratto, perchè P > E[X] ==> E(G1) = P – E[X] > 0 ma l'informazione è molto incompleta.

Siccome P > E[X] l'**assicurato** non stipulerà il contratto in quanto P > E[X] allora -P < -E[X].
E(G1) = -P < E(G2) = -E[X]

Quindi da questo risultato è chiaro che **il criterio della speranza matematica non ci spiega come si comportano i decisori nel mercato assicurativo**. La speranza matematica non è corretta per sintetizzare un numero aleatorio deriva dal fatto che la speranza matematica è un indicatore di posizione che non tiene conto di molti altri aspetti.

Esempio, avendo due numeri aleatori con stessa speranza matematica ma con variazione molto diversa, è preferibile quello con la varianza inferiore, ma questo non viene tenuto in considerazione dal criterio della speranza matematica.

CRITERIO DELL'UTILITA' ATTESA P 15 -20

La funzione di utilità è una funzione continua e crescente introdotta per la prima volta da Bernoulli nel 1738. La funzione di utilità trasforma importi in importi soggettivi per i decisori.
La funzione di utilità venne ripresa da Von Neuman e Morgenster nel 1947 introducendola nell'ambito di un insieme di numeri aleatori D.
La funzione di utilità, quindi è una funzione continua e strettamente crescente, definita sull'intervallo I che contiene tutte le determinazioni dei numeri aleatori dell'insieme D, a valori in R.
La funzione quindi introduce un ordimento di preferibilità sull'insieme D dei numeri aleatori in termini di utilità attesa.

Dato (D, **≥)** $\forall$ **X,Y** $\in$ **D   X ≥ Y <==> E[u(X)] ≥ E[u(Y)]**

L'utilità attesa è la speranza matematica dei trasformati dei numeri aleatori tramite la funzione di utilità. (Cioè il numero aleatorio associa ad ogni evento un numero reale, la funzione di utilità associa ad ogni determinazione del numero aleatorio un altro numero reale che rappresenta il valore soggettivo che quell'importo ha per il decisore, e la speranza matematica infine calcola la speranza matematica dei valori soggettivi per il decisore).

L'ordinamento così introdotto è **completo, riflessivo e transitivo**.
Nell'insieme dei numeri aleatori vengono così definite anche la **preferenza stretta e l'indifferenza**.

Preferenza stretta cioè x **≥ y**
<==> E[u(X)] ≥ E[u(Y)]
e non E[u(Y)] ≥ E[u(X)]

<==> $E[u(X)] > E[u(Y)]$ --> maggiore stretto in quanto siamo in R

x ~ y (x indifferente a y) <==> **$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ e**
$E[u(X)] \leq E[u(Y)]$

<==> $E[u(X)] = E[u(Y)]$ --> in quanto siamo in R

Lo stesso ordimento di preferibilità introdotto dalla funzione di utilità u(.) può essere ottenuto da una classe di funzioni di utilità (trasformate di u(.)) che differiscono l'ula dall'altra secondo trasformazioni affini e crescenti.

E' immediato verificare che se noi consideriamo la **funzione di utilità di un individuo u(.)** e due numeri reali a,b ∈ **R con a > 0** e poniamo **v(.) = au(.) + b** quindi **trasformata affine di u, crescente perchè a è positivo**. Se calcoliamo la speranza matematica di v(x)

$E[v(X)] = E[au(X) + b]$
=**$aE[u(X)] + b$** (con a positivo) x linearità della speranza matematica
=**$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$** (sottraendo b al primo e secondo membro e dividiamoli per a)
<==> $E[v(X)] \geq E[v(X)]$

Supponendo che un decisore debba sciegliere tra numeri aleatori che rappresentano la ricchezza dell'individuo a fine dell'operazione finanziaria rispetto alla ricchezza iniziale di riferimento, quindi avendo

$X = X' + G1$
$Y = X' + G2$

x ≥ y <==> $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$
<==> $E[u(X'+G1)] \geq E[u(X'+G2)]$

Supponiamo che **X'= w** è la **situazione patrimoniale di riferimento certa**

<==>$E[u(w+G1)] \geq E[u(w+G2)]$

Se poniamo **$u_w(X) = u(w+x)$ funzione di utilità del guadagno**

Allora quivale a
<==> $E[u_w(G1)] \geq E[u_w(G2)]$

Se un individuo confronta le situazione patrimoniali derivanti dall'attuazione di due operazioni finanziarie con la situazione patrimoniale di riferimento certa possiamo dire che

x ≥ y <==> $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ <==> $E[u_w(G1)] \geq E[u_w(G2)]$

Dati dei numeri aleatori che rappresentano la situazione patrimoniale del decisore al termine dell'operazione finanziaria rispetto ad una ricchezza certa di riferimento può essere conveniente ragionare sull'utilità attesa del guadagno. In questo caso a differenza del criterio della speranza matematica dove il valore atteso del guadagno non teneva conto della ricchezza iniziale del decisore, il decisore interviene sull'importo attraverso la funzione di utilità.

Da notare:

- $E[u(X)] = \int_I u(x)\, d\, F(x)$ Il valore della funzione di utilità attesa è l'integrale steso all'insieme I delle possibili determinazioni di u(x) con F(x) funzione di ripartizione di X.
- L'utilità attesa dipende dalla distrivuzione di probabilità del numero aleatorio. Se abbiamo due numeri aleatori con la stessa distrivuzione essi avranno la stessa utilità attesa

$$X \overset{d}{=} Y \implies E[u(X)] = E[u(Y)]$$

- $X \geq Y$ e $X \overset{d}{=} X'$, $Y \overset{d}{=} Y' \implies X' \geq Y'$ (cioè se X è preferito a Y e X ha la stessa distribuzione di X' e Y la stessa distribuzione di Y', allora X' è preferito a Y')

Come funzioni di utilità vanno utilizzate le funzioni strettamente conceve in quanto spiegano meglio il comportamento dei decisori che sono avversi al rischio.
La concavità della funzione di utilità è spiegata dalla definizione di avversione al rischio.
Siccome un individuo avverso al rischio preferisce strettamente la speranza matematica del numero aleatorio al numero aleatorio $E[X] > X$

Ponendo $x1$ $x2 \in I$ determinazioni del numero aleatorio $X \in D$ e $0 < p < 1$ $q = 1 - p$ le rispettive probabilità.

Indichiamo con $E[X] = x1p + x2q$

Per definizione di avversione al rischio abbiamo che

$$E[X] > X \iff \mathbf{u(E[X]) > E[u(X)]}$$
$$\iff \mathbf{u(x1p + x2q) > u(x1)p + u(x2)q}$$

Queste funzioni di utilità sono dette anche funzioni di utilità marginale decrescente in quanto l'incremento della funzione è descrescente all'aumentare della ricchezza del decisore.

In particolare si ha che

$\geq$ **avverso al rischio** se $\forall$**X** $\in$ **D non praticamente certo ==> E[X] > X (funz. Di utilità Strettamente concava)**
$\geq$ **propenso al rischio** se $\forall$**X** $\in$ **D non praticamente certo ==> X > E[X] (funz. Di utilità Strettamente convessa)**
$\geq$ **indifferente al rischio** se $\forall$**X** $\in$ **D non praticamente certo ==> E[X] ~ X (funzione di utilità lineare). In questo caso il criterio dell'utilità attesa conicide con il criterio della speranza matematica.**

AVVERSIONE AL RISCHIO P 20 -21

Supponendo di essere nell'ambito della scelta tra numeri aleatori che rappresentano la situazione patrimoniale del decisore al termine di operazioni finanziarie, dato l'insieme dei numeri aleatori D e l'ordinamento di preferibilità $(D,\geq)$ per **definizione un individuo viene detto avverso al rischio se**:

Dato $(D, \geq)$ $\forall$**X** $\in$ **D t.c.** $\nexists$ **x certo con Pr(X=x) = 1 ==> E[X] > X**
Con E[X] importo certo preferito strettamente rispetto a X importo aleatorio

Un individuo è avverso al rischio se a fronte di un importo aleatorio preferisce strettamente la speranza matematica rispetto all'importo aleatorio.
In termini di utilità attesa

$$E[X] > X \Longleftrightarrow u[E(X)] > E[u(X)]$$

Per dare consistenza alla definizione di avversione al rischio chiediamo che la condizione E[X] > X sia soddisfatta per i tutti i numeri aleatori compresi in D tranne che per i numeri certi e i numeri praticamente certi

Per i numeri praticamente cert $F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x \\ 1 & \text{se } x \geq x \end{cases}$

In quanto se il valore atteso del numero certo è uguale alla speranza matematica del numero stesso e quindi ogni numero certo o praticamente certo è indifferente rispetto alla propria speranza matematica.

Cioè se $x \overset{d}{=} x$ **comporta che** $E[X] = x$**, allora** $x \sim x$ **e quindi** $x \sim E[X]$

Da notare che il decisore avverso al rischio non preferirà sempre il certo all'incerto ma solo il certo di ugual speranza matematica al numero aleatorio.
Cioè il certo è preferito all'incerto X solo se il certo è preferito ad E[X], cioè è maggiore uguale della sua speranza matematica.

EQUIVALENTE CERTO P 18

Dato un insieme di numeri aleatori e un ordinamento di preferibilità, $(D,\geq)$**, dato X** $\in$ D, il **numero certo M** $\in$ **D (I) è detto EQUIVALENTE CERTO del numero aleatorio X se**

$$M \sim X$$

equivalentemente in termini di utilità attesa

$$u(M) = E[u(M)]$$

L'equivalente certo è un numero certo che per il decisore è indifferente al numero aleatorio.

Mettendolo a confronto con la speranza matematica del numero aleatorio X sotto ipotesi di avversinoe al rischio si ha

$E[X] > M$

L'individuo associa come equivalmente certo di un numero aleatorio un numero più piccolo della speranza matematica di X.

Dimostrazione

Sotto l'ipotesi di avversione al rischio si ha che:

$E[X] > X$ cioè $E[X] \geq X$ e non $X \geq E[X]$

mentre **$M \sim X \Longleftrightarrow M \geq X$ e anche $X \geq M$**

Per proprietà di transitività si ha che

$E[X] \geq M$ e non $M \geq E[X]$

Per **assurdo** supponiamo che $M \geq E[X]$

$M \geq E[X] \Longrightarrow X \geq M$ e $M \geq E[X] \Longrightarrow$ (per transitività) $X \geq E[X]$ Contraddizione

$\Longrightarrow E[X]>M$

Per un individuo avverso al rischio la speranza matematica di un numero aleatorio è maggiore dell'equivalente certo.

PREMIO DI RISCHIO P 24

Il premio di rischio è la quota certa che il decisore avverso al rischio è disposto a pagare per avere un importo certo ad un importo incerto.
Dato un indieme di numeri aleatori D che rappresentano la situazione patrimoniale del decisore al termine dell'operazione finanziaria, definito un ordinamento di preferibilità di un decisore avverso al rischio, su questo insieme $\geq$
Per definizione di avversione al rischio, dato un numero aleatorio appartenente a D, l'individuo preferisce strettamente la speranza matematica del numero aleatorio a numero aleatorio stesso.

$E[X] > X$

Dato **$X \in D$, e definendo $M_u(X)$** equivalente certo di X rispetto all'ordinamento di preferibilità

sappiamo che **$E[X] > M_u(X)$**

$\Longrightarrow E[X] - M_u(X) > 0$

Poniamo **$\Pi(X) = E[X] - M_u(X) > 0$** (numero positivo)

L'importo positivo certo **$\Pi(X)$ è il premio di rischio**, cioè l'importo certo che l'assicurato è disposto a pagare per avere un importo certo anzichè un importo incerto.

$M_u(X) = E[X] - \Pi_u(X)$

Sapendo che **$M_u(X) \sim X$**

$\Longrightarrow X \sim E[X] - \Pi_u(X)$

Un individuo avverso al rischio a fronte di un importo aleatorio X non ha come equivalente certo la speranza matematica ma un numero più piccolo. La speranza matematica meno $\Pi_u(X)$ chiamato anche PREMIO DI RISCHIO.

Π_u(X) Importo positivo che il decisore è disposto a pagare togliendolo ad E[X] per avere un importo certo**.**

COS'E' UN NUMERO ALEATORIO P 11

Un numero aleatorio o variabile aleatoria, è un'applicazione definita in una partizione dell'evento certo che associa ad ogni evento elementare w un numero reale X(w) in R.

Legge di X : X(.) P --> R

Una partizione dell'evento certo è un insieme di eventi a due a due incompativili ed esaustivi (cioè almeno un evento deve essere vero e solamente uno può essere vero)

L'applicazione X fissato un evento elementare w (ad esempio w = "il sinistro si è verificato e l'importo del danno è 1000") gli associa un numero reale X(w) che è una determinazione del numero aleatorio che risulta essere vero.

DESCRIZIONE DEL RISARCIMENTO TOTALE P 49

Il punto di partenza per ogni valutazione attuariale è la valutazione del risarcimento totale aleatorio X che l'assicuratore dovrà pagare a fronte del contratto assicurativo.

X è il risarcimento totale aleatorio che rappresenta la prestazione dell'assicuratore a fronte della stipulazione del contratto assicurativo.

X dipende dai numeri aleatori N e Zi

- **N è numero aleatorio dei sinistri** che colpiscono il contratto nel periodo di copertura.
  N è **un'applicazione definita in una partizione dell'evento certo a valori in R**
  N(.) : -->P_N --> R
  $P_N = \{w_0, w_1, ... w_n\} = \{w_n | n \in N\}$
  L'evento elementare w_n rappresenta l'evento" il contratto è colpito da n sinistri"
  La legge di N associa all'evento elementare w_n un numero reale
  w_n = " il contratto è colpito da n sinistri"
  N(.) : -->w_N --> n

  Il numero aleatorio è descritto definendo la partizione dell'evento certo e definendo la legge che a ciascun evento del dominio associa un numero reale corrispondente.
  w_n = (N = n) evento "il contratto è colpito da n sinistri"
  w_0 = (N = 0) evento "il contratto non è colpito da sinistri"
  Il problema potrebbe essere capire qual'è il numero massimo di sinistri che possono colpire il rischio assicurato. Nei modelli si ipotizza un numero di sinistri possibili più elevato rispetto alla realtà, e si attribuisce a numeri elevati di sinistri considerati improbabili, una probabilità prossima allo zero.

- **Zi è l'entità aleatoria del danno a fronte dell'i-esimo sinistro.**

  Legge del numero aleatorio Zi(.): --> Pi --> R con **Pi** partizione dell'evento certo
  Pi = $\{wi^{(0)}, wi^{(z)}, z \in J\}$ $J \subset]0 , +\infty[$
  con

J insieme degli importi monetari dai danni causati dal sinistro
$wi^{(0)}$ = "l'i-esimo sinistro non si verifica"
$wi^{(z)}$ = "l'i-esimo sinistro si verifica e l'importo del danno è z"
Quindi **la legge associa a $wi^{(0)}$ il valore zero e a $wi^{(z)}$ il valore z del danno**
$wi^{(0)}$ = (zi = 0) il sinistro non si verifica
$wi^{(z)}$ = (zi = z) il sinistro si verifica ed assume importo z

Date le partizioni dell'evento certo dei numeri aleatori N e Zi, (**Pi, P_N**) per trattare questi numeri aleatori congiuntamente è necessario introdurre una partizione dell'evento certo più fine, la partizione prodotto, che ci permette di tener conto delle combinazioni tra N e Zi, che ci permette di definire congiuntamente Zi e N.

IPOTESI PROBABILISTICHE DEL MODELLO COMPOSTO P 59-66

Dato il risarimento totale a fronte della singola polizza $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ descritto dalla somma dei risarcimenti a fronte degli N sinistri che colpiscono la polizza, il numero aleatorio X dipende dal numero di sinistri N che colpiscono il rischio, e dall'importo aleatorio del risarcimento dell'i-esimo sinistro.
X è descritto da una successione di numeri aleatori, cioè un processo stocastico **$\{N; Y_1, Y_2, \ldots\ldots\}$**, al quale sottostanno 2 ipotesi probabilistiche:

1) **Fissato n > 0 consideriamo $Y_1 \mid N = n, \ldots\ldots\ldots\ldots, Y_n \mid N = n$ indenticamente distribuiti e stocasticamente indipendenti**
   - $\forall$ **n > 0 si assume che** $(Y_1 \mid N = n) \overset{d}{=} (Y_n \mid N = n) \quad \forall\, 1 \le i, j \le n$
     Cioè $F_{Y_i} \mid N = n = F_{Y_j} \mid N = n$
   - Cioè $\forall\, 1 \le i, j \le n \quad (Y_i \mid N = n) \overset{d}{=} (Y_i \mid N = n \wedge H)$

     $\forall\, H = \bigwedge_{j=1}^{n} \left(Y_j \in A_j\right)$ **con $A_j \in R$ con $i \neq j$**
2) **La distribuzione di $Y_1 \mid N =$ nnon dipende dal numero di sinistri che colpiscono il contratto.**
   Fy funzione di ripartizione di Yi condizionato a N = n.

Dato $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, il processo stocastico che descrive X e le ipotesi probabilistiche sottostanti al processo stocastico sopraelencati, si dice che X ha distribuzione composto.

Per valutare la distribuzione di X ci basterà assegnare la funzione di probabilità a N e la funzione di ripartizione a Y

- Pr(N = n)
- Fy

Che costituiscono la BASE TECNICA

Si può dimostrare che E[X], Var(X) e Fx sono ottenibili come valutazione scomposta della distribuzione del numero di sinistri e della distribuzione del risarcimento del sinistro (fare dimostrazioni da P 66 a pagina 69).

PROPRIETA' DI DISINTEGRABILITA' DELLA PROBABILITA' E DEL VALORE ATTESO (P. 60)

La proprietà di disintegrabilità ci permette di esprimere la probabilità o la speranza matematica di un evento rispetto alla probabilità associata agli eventi elementari una partizione.
Ad esempio considerando la probabilità dell'evento E, Pr(E), la cui partizione è P= {w1,w2,.....wn}, questa può essere vista come prodotto logico tra l'evento E e la partizione dell'evento certo Ω. Dove Ω è la somma logica degli eventi elementari.

Cioè $Pr(E) = Pr(E \wedge \Omega) = Pr\left(E \wedge \left(\bigvee_n w_n\right)\right)$

Somma logica $= Pr\left(\bigvee_n \left(E \wedge w_n\right)\right)$ L'**evento E** lo vediamo come **somma logica di eventi elementari (w_n)** che **sono a due a due incompatibili**, allora applicando la **proprietà** di **additività** della probabilità possiamo scrivere che **la probabilità della somma logica è uguale alla somma delle probabilità**

$= \sum_n Pr\left(E \wedge w_n\right)$ Per calcolare la probabilità dell'evento è possibile applicare il **teorema delle probabilità composte** e scrivere

$= \Sigma\, Pr(w_n)\, Pr(E \mid w_n)$ **Proprietà di disintegrabilità** della probabilità rispetto ad una partizione dell'evento certo

La probabilità dell'evento E viene espressa come la somma delle probabilità degli n eventi elementari per la probabilità che si verifichi E condizionatamente al fatto che si sia verificato l'evento w_n.

Andando a considerare la probabilità dell'evento E condizionato al verificarsi di un altro evento H, si separa la probabilità associata ai casi elementari che compongono l'evento H dalla probabilità associata all'evento E condizionato al verificarsi del caso elementare che compone l'evento H.

$Pr(E|H) = Pr(E \wedge H \mid H)$ Con $H = \bigvee_n H_n$, $Hi \wedge Hj = 0$

$= Pr(E \wedge (\bigvee_n H_n) \mid H)$

$= Pr(\bigvee_n (E \wedge H_n) \mid H)$ Siccome gli eventi Hn sono a due a due incompatibili possiamo applicare la **proprietà di additività** della probabilità e scriviamo

$= \Sigma_n Pr(E \wedge H_n \mid H)$ Applicando il **teorema delle probabilità composte**

$= \Sigma_n Pr(H_n \mid H)\, Pr(E \mid H_n \wedge H)$ Siccome H_n è uno degli eventi che mi forniscono H come somma logica, H_n implica H e quindi questo prodotto logico è uguale H_n.

$\Rightarrow$ **Pr(E | H) = Σ_n Pr (H_n | H) Pr (E | H_n)**

La proprietà di disintegrabilità può essere applicata anche alla speranza matematica, per speranze matematiche finite.

Se consideriamo la **partizione dell'evento certo**, X può essere scritto come X per l'indicatore di Ω ($|\Omega|$) che vale 1, che è uguale all'indicatore della somma logica degli eventi elementari (w_n), che è uguale alla somma di X per gli indicatori degli eventi elementari.

$$X = X \mid \Omega \mid = X \mid \vee_n w_n \mid = \Sigma_n X \mid w_n \mid$$

$$E[X] = E[\Sigma_n X \mid w_n \mid) = \Sigma_n E(X| w_n)$$ (il passaggio da speranza matematica di una somma di una serie a somma delle speranze matematiche non può sempre esser fatto, ma in questo caso particolare si.)

Dove

$$\Sigma_n E(X| w_n) = Pr(w_n) E(X \mid w_n)$$ Se X ha speranza matematica finita **possiamo disintegrare ai fini di calcolare la speranza matematica rispetto agli eventi di una partizione finita o numerabile**.

$$E[X] = \Sigma_n Pr(w_n) E(X \mid w_n)$$ Ci troviamo in un altro di quei casi dove ci mettiamo in condizioni più specifiche per calcolare la speranza matematica

Queste **proprietà possono essere estese al caso non finito e numerabile**, dove anzichè avere una partizione discreta ho un numero aleatorio, la probabilità di E può essere scritta come

$$Pr(E) = \int Pr(E \mid Y = y) \, d F_y(y)$$

$$E[X] = \int E(X \mid Y = y) \, d F_y(y)$$

In oltre date le ipotesi probabilistiche sottostanti al processo stocastico {N,Z1,Z2,.....} che descrive il numero aleatorio X che sono

1) **Fissato n > 0 consideriamo $Y_1 \mid N = n$,............., $Y_n \mid N = n$ indenticamente distribuiti e stocasticamente indipendenti**
   - $\forall$ **n > 0 si assume che** $(Y_1 \mid N = n) \overset{d}{=} (Y_n \mid N = n) \quad \forall 1 \le i, j \le n$
     Cioè $F_{Y_i} \mid N = n = F_{Y_j} \mid N = n$
   - Cioè $\forall 1 \le i, j \le n \quad (Y_i \mid N = n) \overset{d}{=} (Y_i \mid N = n \wedge H)$
     $$\forall H = \bigwedge_{j=1}^{n} \left(Y_j \in A_j\right)$$ **con Aj $\in$ R con i $\neq$ j**

2) **La distribuzione di $Y_1 \mid N = n$ non dipende dal numero di sinistri che colpiscono il contratto.**

Attraverso la proprietà di disintegrabilità della probabilità possiamo dimostrare che i numeri aleatori Zi | N = n e Zi | N $\ge$ **i** hanno la stessa distribuzione

$F_{Zi|N\geq 1}(z)$ **= Pr (Zi** $\leq z$ | **N ≥ i)** = L'evento **N ≥ i lo possiamo vedere come somma logica degli eventi (N = n) e questi eventi sono a due a due incompatibili.**

$$N \geq i = \bigvee_{n=i}^{+\infty} (N = n)$$

Quindi siamo in una situazione simile a quella vista prima, dove dovevamo calcolare la probabilità di E condizionato all'evento H, con H somma logica di eventi a due a due incompatibili.
Quindi possiamo applicare la **proprietà di disintegrabilità**

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} Pr(N=n \mid N \geq i)\, Pr(Zi \leq z \mid N=n)$$

Osservando che **Pr(Zi** $\leq z$ | **N =n) è il valore in z della funzione di ripartizione di questo numero aleatorio** $F_Z(z)$**.** Ed essendo costante rispetto alla somma possiamo scrivere

$$= F_Z(z) \sum_{n=i}^{+\infty} Pr(N=n \mid N \geq i)$$

siccome gli eventi N sono a due a due incompatibili applicando la proprietà di additività possiamo considerare N come somma logica di eventi

$$= F_Z(z)\, Pr\left(\bigvee_{n=i}^{+\infty} N = n \mid N \geq i\right)$$

(la probabilità di $Pr\left(\bigvee_{n=i}^{+\infty} N = n \mid N \geq i\right)$ uguale a 1 in quanto la probabilità della somma logica di eventi $\left(\bigvee_{n=i}^{+\infty} N = n\right)$ è l'evento **N ≥ i,** e quindi **la probabilità di un evento condizionata al succedere di quell'evento è certa**)

$$= F_Z(z)*1 = F_Z(z) \quad \forall z \in R$$

(in quanto z l'abbiamo fissato in modo arbitrario, quindi valo per ogni z appartenente ad R)

Quindi possiamo concludere che questi due numeri aleatori che sono diversi hanno la stessa distribuzione (la stessa legge)

$$(Z_i \mid N = n) \overset{d}{=} (Z_i \mid N \geq i)$$

Nota:

Somma logica di eventi: Somma logica di eventi l'evento unione che si verifica quando si verifica almeno un evento. Ad esempio avendo gli eventi A e B, l'evento AUB si verifica quando si verifica almeno uno degli eventi A o B.

Prodotto logico di eventi: Si definisce prodotto logico di eventi l'evento intersezione, che si verifica quando si verificano tutti gli aventi $(A \cap B)$

COMPOSIZIONE DEL PREMIO P. 48

Il premio di tariffa è composto da:

- **Premio equo**: è il valore atteso dei risarcimenti per gli n sinistri che colpiscono il contratto
- **caricamento di sicurezza**: motivato dall'ipotesi di avversione al rischio o dalla probabilità di rovina
- **caricamento per spese**: a fronte delle spese sostenute durante l'esercizio
- **margine di profitto**: per remunerare gli investitori o per espandere l'attività

Analizzando il **caricamento per spese**

Le tipologie di spese sono:

- Spese di acquisizione del contratto
- Altre spese iniziali
- Spese di gestione

I caricamenti per spese per le 3 tipologie di spese sono ottenuti applicando un'aliquota al premio di tariffa

- **Spese di acquisizione α' $\alpha' P^T$ con P^T premio di tariffa**
- **Altre spese iniziali α'' $\alpha'' P^T$**
- **Spese di gestione β βP^T**

$P^T = P + P^T(\alpha' + \alpha'' + \beta)$ con P premio puro

I caricamenti per spese, cioè le aliquote, sono determinate in modo che la somma dei caricamenti sul portafoglio siano uguali al valore atteso delle spese

Σ Caricamenti = E[Spese]

Valuto le spese in termini attesi sul portafoglio e calcolo le aliquote in modo che i caricamenti per spese coprano per intero le spese.

Caricamento di sicurezza è una componente che viene aggiunta al premio equo, giustificata dall'avversinoe al rischio dell'assicuratore che può essere calcolata attraverso i seguenti principi:

-Principio della speranza matematica
$\Pi(X) = E[X] + \alpha E[X]$

-Principio della varianza
$\Pi(X) = E[X] + \beta Var[X]$

-Principio dello scarto quadratico
$\Pi(X) = E[X] + \gamma\sigma[X]$

-Principio dell'utilità nulla (si trova il premio che rende per l'assicuratore indifferente stipulare il contratto o meno

$$E[u_{(A)}(\Pi(X)-X)]=u_{(A)}(0)$$

-Principio del percentile (si trova il premio che rende la probabilità che il risarcimento sia superiore al premio inferiore di epsilon)
$\Pi(X) = \inf \{P | F_X(P) \geq 1 - \varepsilon\}$

QUOTA DANNI (P. 101-105)

Quando si parla di stime empiriche si parla del processo con cui dai dati osservati si arriva all'attribuzione di un valore ai parametri di interesse. Supponendo di voler stimare empiricamente media e varianza di X, Y, N, supponendo l'identica distribuzione e l'indibendenza di questi numeri aleatori, si introducono degli stimatori e il valore osservato di questi stimatori sono le stime dei parametri d'interesse.

Supponendo di voler stimare E[X] cioè il valore atteso del risarcimento annuo per un contratto per il calcolo del premio equo, ricorrendo a stime empiriche, e supponendo di:

- Avere una base sufficientemente ampia di dati
- Dati relativi a polizze con marcate caratteristiche di analogia

Dati

$c_1,\dots\dots,c_n$ con **c_j risarcimento per il j-esimo sinistro j = 1, 2, ...n**
$x_1,\dots\dots,x_r$ con x_r risarcimento per la r-esima polizza r = 1, 2, ...r
r numero di polizze in portafoglio

La stima del risarcimento atteso per polizza è dato dalla quota danni Q che può essere ottenuta come rapporto tra la somma dei risarcimenti per i sinistri che hanno colpito il portafoglio e il numero di polizze, o come rapporto tra la somma dei risarcimenti per polizza e il numero di polizze in portafoglio

Q = $\dfrac{C_1+\dots\dots+C_n}{r}$ Q = $\dfrac{X_1+\dots\dots+X_r}{r}$

$$Q=\hat{E}(X)$$

Q è la stima del risarcimento atteso per polizza, stima in quanto valore osservato di uno stimatore.

Infatti supponendo che l'impotesi di analogia tra le polizze sia tale da farci accogliere l'ipotesi di identica distribuzione dei risarcimenti per polizza possiamo introdurre lo stimatore del risarcimento medio per polizza

X1,.....Xr identicamente distribuiti ==> E[Xi] = E[X]

$\dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i$ stimatore non distorto di E[X]

La quota danni è il valore osservato di questo stimatore.

Lo stimatore è non distorto in quanto il valore atteso dello stimatore è uguale al valore atteso del risarcimento

$$E[\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i] \quad = \mathbf{E[X]}$$

Se aggiungiamo l'impotesi di indipendenza stocastica dei risarcimenti per polizza

X1,...........,Xr   i.i.d.

Lo stimatore è consistente in quanto la varianza dello stimatore tende a zero all'aumentare del numero di osservazioni.

- **La varianza dello stimatore**
  $Var(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i)=\frac{1}{r}Var(X)$ **Più grande è r è più piccola è la varianza della stima**
- $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i$ **è stimatore consistente di E[X]** (cioè all'aumentare del numero di osservazioni la varianza dello stimatore tende a zero)

In oltre supponendo l'identica distribuzione e l'indipendenza dei risarcimenti per sinistro

X1,...........,Xr   i.i.d.

Lo stimatore converge in probabilità al valore atteso del risarcimento per polizza, cioè la probabilità che il valore dello stimatore si discosti dal valore atteso del risarcimento per polizza per più di un epsilon arbitrario è uguale a zero, quando il numero delle osservazioni tende a più infinito.

Completare con "quota danni vista come premio ex post, fattorizzazione del permio equo e relativa corrispondente teorica, indice di sinistrosità relativa fattorizzazione e corrispondente teorica"

TASSO DI PREMIO-FUNZIONE GRADO MEDIO DI DANNO (P. 122 – 131)

Il tasso di premio è il risarcimento atteso per unità di esposizione monetaria.

In alcuni ambiti la tariffazione avvieme mediante tassi di premio, supponendo di voler stimare il risarcimento atteso E[X] per polizza, per alcune coperture assicurative l'impotesi di identica distribuzione dei risarcimenti per polizza può non essere attendibile in quanto può succedere che vi siano rischi assicurati per valori diversi.

Ad esempio considerando una copertura incendi, può accadere che vi siano due beni $V1 < V2$ assicurati per valori diversi.

In questo caso le determinazioni per la polizza 1 vanno da 0 a V1 mentre le determinazioni per la polizza 2 vanno da 0 a V2.

Quindi pensando di avere due densità, abbiamo due distribuzioni diverse in quanto il supporto della seconda polizza è maggiore del supporto della prima.

Indicando con X1 e X2 i risarcimenti per le due polizze non possiamo supporre che essi abbiano la stessa distribuzione.

Quindi l'ipotesi di identica distribuzione dei risarcimenti per polizza potrebbe portarci ad avere basi di dati troppo piccole.

Per risolvere questo problema, si può dare una nozione meno forte di analogia.
Supponendo di avere a disposizione
X1,.......,Xr risarcimenti totali per le r polizze in portafoglio, caratterizzate da marcate caratteristiche di analogia
w1,..........,wr esposizione monetaria per le r polizze in portafoglio, cioè la massima determinazione che può assumere il risarcimento per sinistro.

Si richiede l'indentica distribuzione dei risarcimenti per polizza standardizzati con l'esposizione monetaria.

$\frac{X_1}{w_1},\ldots\ldots\ldots,\frac{X_r}{w_r}$ **id**
Dove il valore atteso del risarcimento per polizza standardizzato per l'esposizione monetaria è il tasso teorico di premio. $E[\frac{X_i}{w_i}]$ **= m ==> E[X_i] = m*w_i (w_i certi)**

m: **tasso teorico di premio** che è il **risarcimento atteso per unità di esposizione**, cioè il **premio equo per un rischio di esposizione unitaria**.

Supponendo l'**identica distribuzione** dei risarcimenti per polizza standardizzati con l'esposizione monetaria, introduciamo lo **stimatore del tasso teorico di premio**

Data la relazione $E[\frac{X_i}{w_i}]$ **= m ==> E[X_i] = m*w_i (w_i certi)**

$$E[\sum_{i=1}^{r} X_i] = \sum_{i=1}^{r} E[X_i]$$ per linearità della speranza matematica

$$= \sum_{i=1}^{r} (m*w_i)$$ siccome è costante rispetto alla somma lo portiamo fuori

$$= m\sum_{i=1}^{r} w_i$$

Quindi ricavo che **m =** $E[\frac{\sum_{i=1}^{r} X_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i}]$ **= m** $\forall$ **m**

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} X_i}{\sum_{i=1}^{r} w_i}$$ **stimatore non distorto del tasso teorico di premio, una stima del parametro m è il valore osservato dello stimatore.**

Abbiamo che il tasso teorico di premio può essere espresso come somma dei risarcimenti per i sinistri sull'esposizioni monetarie, o come somma dei risarcimenti per polizza sulle esposizioni monetarie.

τ = $\frac{C_1+......+C_n}{w_1+.....+w_r}=\hat{m}$ **τ =** $\frac{X_1+......+X_r}{w_1+.....+w_r}=\hat{m}$

Considerando il tasso di premio come somma dei risarcimenti per sinistri sulle esposizioni monetarie

τ = $\frac{C_1+......+C_n}{w_1+.....+w_r}$

Questo può essere fattorizzato come indice di sinistrosità, costo medio per sinistri ed esposizione media

τ = $\frac{n}{r} * \frac{\frac{c}{n}}{\frac{(w_1+......+w_r)}{r}}$

Dove il costo medio sull'esposizione media $\frac{\bar{C}}{\bar{w}}$ è il **grado medio di danno**

La corrispondente teorica di questa fattorizzazione è la seguente

dato $E[\frac{X}{w}]$ = essendo **w certo** lo porto fuori dal valore atteso

= $\frac{1}{w}E[X]$ in ipotesi di **distribuzione composta di E[X]**

= $\frac{1}{w}E[N]E[Y]$ siccome **w è certo** possiamo portarlo dentro una speranza matematica

= $E[N]E[\frac{Y}{w}]$

Data la relazione tra **τ =** $\frac{n}{r} * \frac{\bar{C}}{\bar{w}}$ e **τ** = $E[N]E[\frac{Y}{w}]$ osserviamo che

- $\frac{n}{r}$ **frequenza sinistri è il corrispondente empirico di E[N] numero annuo atteso di sinistri**

- $\frac{\bar{C}}{\bar{w}}$ **risarcimento medio per esposizione media è stima empirica di** $E[\frac{Y}{w}]$ **risarcimento totale atteso per sinistro per unità di esposizione**

Andiamo a considerare lo stimatore del tasso di premio nell'impotesi che le polizze non siano osservato per l'intero periodo di copertura ma solo per una frazione di anno.

Dati

X_i risarcimento totale annuo aleatorio per la polizza i-esima

t_i il tempo di esposizione per la polizza i-esima

w_i esposizione monetaria

X'_i il risarcimento totale nel periodo **t_i** in cui la polizza rimane in osservazione

Supponendo che le ipotesi di analogia tra le polizze siano tali da farci accogliere le seguenti ipotesi

- $\frac{X_1}{w_1}, \ldots\ldots, \frac{X_r}{w_r}$ **id (risarcimenti per unità di esposizione identicamente distribuiti**,

  le polizze vengono considerate analoghe anche se con esposizione monetaria diversa, tale però che considerando i risarcimenti totali standardizzati con l'esposizione, possiamo ritenere di accogliere l'ipotesi di ugual distribuzione per i risarcimenti standardizzati.

  tasso di premio $E[\frac{X_i}{wi}] = \text{m}$

- **$E[X'_i] = t_i * E[X_i]$ ipotesi di proporzionalità tra il risarcimento atteso nel periodo t_i in cui la polizza resta in osservazione e il risarcimento totale annuo per la polizza i-esima**

Lo stimatore del tasso teorico di premio è il seguente

$E[\sum_{i=1}^{r} X'_i]$ = per linearità della speranza matematica

$= \sum_{i=1}^{r} E[X'_i]$ che possiamo scrivere come prodotto tra la somma dei periodi **t_i** in cui le polizze restano in osservazinoe per il risarcimento totale su base annua **$E[X_i]$**

$= \sum_{i=1}^{r} t_i E[X_i]$ sfruttando il fatto che la speranza matematica di **X_i** la possiamo scrivere come m*$\mathbf{w_i}$ **$E[X_i]$ =** m*$\mathbf{w_i}$ valore d'esposizione per tasso di premio

$= \sum_{i=1}^{r} (t_i \; m \; w_i)$ siccome m (tasso di premio) è costante rispetto alla somma

$$= m \sum_{i=1}^{r} (t_i w_i)$$

Quindi data la relazione $E[\sum_{i=1}^{r} X'_i] = m \sum_{i=1}^{r} (t_i w_i)$ lo stimatore del tasso teorico di premio $\tau = \hat{m}$, è

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{r} X'_i}{\sum_{i=1}^{r} (t_i w_i)}$$

stimatore non distorto del tasso teorico di premio (non distorto in quanto il valore atteso dello stimatore è uguale al valore atteso del risarcimento per polizza

(pesiamo le esposizioni monetarie w_i con i tempi di esposizione t_i)

Discorso analogo vale se abbiamo la somma dei risarcimenti per sinistro

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{C_1 + ... + C_n}{\sum_{i=1}^{r} (t_i w_i)}$$

Risposte che mancano:
Indicatori tecnici
Quota danni
Indice di sinistrosità
Indice di ripetibilità
Tasso di premio
funzione grado medio di danno.