Anno 2012-2013

Appunti di Matematica attuariale danni

Esame del 3° anno del Cld di Statistica, Units

BURATTO LUCA [EC2100021]
[Selezionare la data]

Il nome deriva dallo studio dei problemi legati alle assicurazioni tramite modelli matematici.

La matematica attuariale si occupa di:

- Analizzare i costi delle attività assicuratrici
- Gestire i premi
- Riassicurazione

Mi occuperò di :

- determinazione e valutazione del premio assicurativo (logica e calcolo)
- gestione del premio
- ulteriore trasferimento del rischio attraverso la riassicurazione

RISCHIO

La *presenza di un rischio* è la possibilità del verificarsi di una situazione di bisogno.

Un *rischio puro* è un rischio che se si verifica produce solo perdite.

Definizione di rischio nel Codice Civile: ci sono rischi inerenti alle persone (infortuni/malattia) , rischi inerenti alle cose (incendio casa) e rischi inerenti la responsabilità civile (risarcimento terzi per incidente automobilistico).

CLASSIFICAZI

ONI DI COPERTURE

Ci sono 18 rami di coperture assicurative, ma solo 3 tipologie:

a) assicurazioni di responsabilità civile
b) assicurazioni di danni alla persona
c) assicurazioni per danni al patrimonio

Un'altra classificazione per tipologia di rischi:

1) *rischi di massa*: rischi per i quali l'assicuratore dispone di molte polizze omogenee (R.C.A.), molti dati a disposizione, canali di vendita standardizzati.
2) *grandi rischi*: l'assicuratore ha relativamente poche polizze e in genere molto disomogenee. I sinistri sono di entità elevata, ci sono pochi dati; ricorso ad intermediari finanziari

Tutti i tipi di coperture prevedono una prestazione in denaro.

CONTRASTARE IL RISCHIO

L'individuo si cautela attraverso azioni di protezione/ prevenzione attraverso il trasferimento delle conseguenze economiche future e possibili ad un assicuratore; oppure attraverso azioni di risparmio (accantonamenti fondi per una futura situazione di bisogno).

L'*assicuratore* è il soggetto economico che fornisce una copertura attraverso la stipula di un contratto detto *polizza*. Nella polizza è indicato: il contraente, i beneficiari, il rischio assicurato, il periodo di copertura, le modalità di intervento dell'assicuratore, il premio e le condizioni di assicurazione.

SINISTRO

I *sinistri* o eventi dannosi sono gli eventi che provocano situazioni di bisogno.

POLIZZA

Il nome deriva dal fatto che sotto al contratto c'è una promessa: la polizza è un contratto in cui l'assicuratore si impegna a pagare in caso si verifichino gli eventi descritti dal contratto.

PRESTAZIONE

La prestazione di un contratto assicurativo può essere:

- risarcitoria: se la prestazione è commisurata ad un danno che si è verificato
- non risarcitoria: se la prestazione è calcolabile in maniera predeterminata, non direttamente commisurata ad una perdita o danno verificato.

PRINCIPIO DI MUTUALITA'

Il meccanismo assicurativo si basa sul principio di mutualità, cioè sul fatto che l'assicuratore possa raccogliere una collettività di assicurati (molti), e dai loro soldi risarcirà gli eventuali assicurati colpiti da sinistri (pochi).

L'assicurato paga una parte del premio in via anticipata: il contratto assicurativo si apre con una parte del premio pagata anticipatamente (almeno in parte) calcolata dall'assicuratore in maniera predeterminata, prima di sapere quali costi comporterà l'assicurato.

Grazie al principio di mutualità il premio è relativamente basso, in relazione al massimo dell'entità di risarcimento prevista dalla polizza (ciò è dovuto al fatto che molti pagano e pochi sono colpiti dal sinistro).

Questo meccanismo funziona bene se da parte dell'assicuratore sono tenute ben in conto alcune cose, tra cui:

- la stipula del contratto è fatta in modo da poter mantenere l'impegno preso dall'assicuratore
- l'assicuratore deve avere una accorta politica di gestione del premio

L'aspetto della fiducia, cioè il fatto che l'assicuratore cominci ad essere pagato in via anticipata e in futuro effettui la prestazione, fanno si che l'autorità pubblica si interessi. L'autorità pubblica infatti ha emanato leggi a tutela degli assicurati che pongono vincoli all'attività assicurativa (capitali cospicui, accantonamento delle riserve tecniche, disposizione di capitali liberi da impegni,..). Il controllo pubblico è attuato dall'autorità di vigilanza I.V.ASS. (Istituto di Vigilanza nelle Assicurazioni) che dal 1\01\2013 ha sostituito l'IS.V.A.P. (Istituto Vigilanza Assicurazioni Private).

CICLO PRODUTTIVO

Il ciclo produttivo è inverso rispetto a quello di una impresa: prima si hanno i ricavi e poi i costi. Si affianca all'attività assicurativa anche un'attività di gestione finanziaria che va a beneficio sia dell'impresa assicurativa sia ai clienti.

ASSICURAZIONI RAMO VITA E ASSICURAZIONI RAMO DANNI

Le prestazioni copertura vita hanno durata medio-lunga con una forte componente finanziaria legata al differimento. C'è il problema dell'aleatorietà della prestazione e problemi semplici di tipo probabilistico.

Le prestazioni copertura danni hanno breve durata ed è molto meno rilevante l'aspetto del differimento; ma è molto più importante l'aspetto legato all'aleatorietà (aleatorietà del numero di sinistri, della loro entità, dell'entità del risarcimento per sinistro)

CONTRATTO ASSICURATIVO RAMO DANNI

Si fissa un periodo di copertura, di solito un anno. N numero aleatorio di sinistri. $T_1,T_2,..,T_N$ istanti in cui avvengono i sinistri, $Y_1,Y_2,..,Y_N$ i corrispondenti risarcimenti per sinistro e P il premio iniziale deciso alla stipula del contratto e versato in quel momento dall'assicurato all'assicuratore.

COME DETERMINARE IL PREMIO ASSICURATIVO?

Considero un modello semplificato. Dati i 2 istanti di tempo 0 e 1: P premio unico deciso alla stipula del contratto. X risarcimento totale dato all'assicurato. Th: calcolo il premio

Per calcolarlo considero la variazione della situazione dell'assicuratore. Il guadagno è $G=P-X$ Trascuro l'aspetto finanziario del differimento per la breve durata del contratto. $P|E(G)=0$ cioè $P=E(X)$. Questo P è chiamato *premio equo* perché rende equo cioè nullo il valore atteso del guadagno. Si parla di calcolo del premio col *principio di equità*.

Questa visione è giustificata dalla interpretazione della speranza matematica come importo che un individuo è disposto a pagare per avere G. Ma è priva di interesse dal pdv economico perché l'assicuratore lavorerebbe gratis. Infatti il principio di equità non ha valore economico. Pertanto $P>E(X)$ cioè $P=E(X)+m$ con $m>0$ *caricamento di sicurezza*. Ma quanto di più l'assicurato è disposto a pagare? Posso porre il problema in questo modo: al variare del premio ho diverse operazioni finanziarie aleatorie. Quindi posso porre il problema di determinazione di un premio, come problema di scelta tra operazioni finanziarie aleatorie.

Posso vedere il problema più in generale:

Penso ad un individuo che in un fissato orizzonte temporale si trovi a scegliere se attuare una operazione finanziaria 1 con scadenzario $T_1,T_2,..,T_N$ e flusso $A_1,A_2,..,A_N$ oppure attuare una operazione finanziaria 2 con scadenzario $S_1,S_2,..,S_M$ e flusso $B_1,B_2,..,B_M$. L'aleatorietà riguarda il numero di flussi, gli istanti di esigibilità e le somme in gioco.

Per facilitare la scelta fra le operazioni finanziarie indico con X' la situazione patrimoniale (cioè la ricchezza certa o aleatoria) del soggetto in T (tempo certo) che avrebbe l'assicurato a prescindere dalle due scelte. Indico con X quello che l'assicurato avrebbe se scegliesse l' operazione 1 e con Y quello che avrebbe se scegliesse l' operazione 2.

X'	X	Y	ricchezza
T	T	T	tempo
	1)	2)	op. finanziaria

Per scegliere tra le operazioni finanziarie 1) e 2) posso trasformare il problema nella scelta dei risultati: scelgo 1 invece di 2 se la situazione patrimoniale conseguente alla situazione patrimoniale 1 è migliore della conseguenza della situazione patrimoniale 2. L'individuo opterà per l'operazione che porta ad un risultato preferibile. Nel caso in cui X' sia preferibile a X e ad Y l'individuo può optare per nessuna scelta.

Si scelgono i numeri aleatori che rappresentano le diverse ricchezze conseguenti alle possibili scelte. Per semplificare la scelta introduco un ordinamento per confrontare numeri aleatori. Introduco pertanto:

D insieme di numeri aleatori che siano situazioni patrimoniali possibili di un soggetto all'epoca T

Definisco un ordinamento di preferibilità in D una relazione binaria in D che indico con $\succcurlyeq$ tale che:

X R Y → X $\succcurlyeq$ Y "X preferibile ad Y" e soddisfa le proprietà:

- completezza: $\forall\, X, Y \in D\ riesce\ o\ Y \succcurlyeq X\ o\ X \succcurlyeq Y$
- riflessiva: $\forall\, X \in D\ riesce\ \ X \succcurlyeq X$
- transitiva: $\forall\, X, Y, Z \in D\ dall'essere\ X \succcurlyeq Y, Y \succcurlyeq Z\ allora\ X \succcurlyeq Z$

Se in D sono riuscito ad introdurre tale relazione, posso definire, partendo da questa definizione, altre due relazioni.

Da (D, $\succcurlyeq$) ho che:

- $\succ$ preferibilità stretta: $X \succ Y\ se\ e\ solo\ se\ X \succcurlyeq Y ma\ non\ \ X \succcurlyeq Y$
  " X è in relazione con Y ma Y non è in relazione con X"
- $\sim$ indifferenza: $X \sim Y\ se\ e\ solo\ se\ X \succcurlyeq Y e\ Y \succcurlyeq X$

In questo modo, grazie a tale relazione, so qual è l'equazione finanziaria "preferibile". Ma anche se nell'insieme dei risultati introduco tale relazione\ ordinamento di preferibilità, non è facile lavorare con i numeri aleatori. Essi sono applicazioni definite in una partizione dell'evento certo a valori reali. Un numero aleatorio X(): P in R ha un solo omega che si verifica, quindi alla fine assumerà un solo valore. Confrontare due numeri aleatori è facile se e solo se X≥Y , cioè se e solo se ogni determinazione di X è ≥ di ogni determinazione di Y.

INTRODUZIONE DI $\succcurlyeq$ MEDIANTE INDICI DI PREFERIBILITA'

Un modo per introdurre un ordinamento di preferibilità è quello di fare affidamento agli indici di preferibilità, cioè a valutazioni sintetiche dei numeri aleatori in gioco. L'idea è di partire da D ed assegnare un numero reale ad ogni oggetto. Definisco un funzionale Φ: D→R e quindi X→Φ(X) e pongo X$\succcurlyeq$Y se e solo se Φ(X)≥Φ(Y). Trasferisco così il problema nei numeri reali dove c'è un ordinamento naturale.

Oss. Spesso i funzionali sono valutazioni sintetiche della distribuzione di probabilità di un numero aleatorio. Cioè spesso accade che X=Y in distribuzione e → Φ(X)= Φ(Y). Numeri aleatori uguali hanno uguale distribuzione di probabilità.

<u>Esempio di funzionali – matematica finanziaria</u>

Un individuo deve scegliere fra due operazioni finanziarie <u>x</u>/<u>t</u> e <u>y</u>/<u>t</u> in [0,T].

Un criterio di scelta è il V.A.N. Introduco un tasso i di valutazione (legato all'individuo) ed attualizzo il valore dei flussi delle due operazioni e scelgo quella con il V.A.N. >0 più grande. Potrebbe essere che <u>x</u>/<u>t</u> $\succcurlyeq$ <u>y</u>/<u>t</u> se e solo se V.A.N. (X) ≥ V.A.N.(Y)

Un altro criterio di scelta è il T.I.R. cioè il tasso interno di rendimento e scelgo l'operazione che ha un tir maggiore. Ad esempio T.I.R.(X) ≥T.I.R.(Y)

Devo introdurre un ordinamento di preferibilità tra importi aleatori. Come faccio? Un'idea è quella di usare la speranza matematica.

CRITERIO DELLA SPERANZA MATEMATICA

La speranza matematica la interpreto come l'importo che un individuo è disposto a pagare per avere X. Introduco un ordinamento così definito: $X \succcurlyeq Y$ se e solo se $E(X) \geq E(Y)$. È una valutazione sintetica della distribuzione di probabilità.

Ma questo ordinamento non è adatto, vediamo perché:

X' situazione patrimoniale di riferimento

X situazione patrimoniale conseguente all'operazione 1

Y situazione patrimoniale conseguente all'operazione 2

Considero la variazione di situazione patrimoniale = guadagno

$G_1=X-X'$ $\qquad$ $X=X'+G_1$

$G_2=Y-X'$ $\qquad$ $Y=X'+G_2$ $\qquad$ da cui

$X \succcurlyeq Y \leftrightarrow E(X)\geq E(Y) \leftrightarrow E(X'+G_1) \geq E(X'+G_2) \leftrightarrow E(X')+E(G_1)\geq E(X')+E(G_2) \leftrightarrow E(G_1) \geq E(G_2)$ che sono i valori attesi derivante dalle operazioni finanziarie.

<u>Attenzione</u>: perdo di vista l' importanza della situazione patrimoniale iniziale. Perde di rilevanza X'. Il soggetto sceglie guardando solo la speranza matematica dei guadagni. La differenza tra G_1 e G_2 cambia al cambiare della ricchezza dell'individuo!

INADEGUATEZZA DEL CRITERIO DELLA SPERANZA MATEMATICA

Un individuo è soggetto ad un rischio che produce nel corso di un anno la perdita aleatoria (perdita della casa,..) X con $X\geq0$. L'individuo o può tenere il rischio o può stipulare una polizza che gli dia la copertura completa di X; cioè l'assicuratore a fronte di un premio $P>E(X)$, è disposto a pagare X all'assicurato in caso di perdita. Adesso indago sulla convenienza o meno delle 2 operazioni: stipula e non stipula del contratto.

A. Dal pdv dell'assicuratore ecco le due operazioni:
   1. Stipula contratto $\quad G_A^{(1)}=P-X \quad \rightarrow \quad E(G_A^{(1)})=P-E(X)>0$
   2. Non stipula del contratto $\quad G_A^{(2)}=0 \quad \rightarrow \quad E(G_A^{(2)})=0$

   $\rightarrow$operazione 1 $\succcurlyeq$ operazione 2. L'assicuratore giudica vantaggioso stipulare il contratto piuttosto che non stipularlo.
   Oss. Basta che $P>E(X)$ anche di pochissimo.

B. Dal pdv del potenziale assicurato:
   1. Stipula contratto $\quad G_a^{(1)}=P-X+X=-P \quad \rightarrow \quad E(G_a^{(1)})=-P$
   2. Non stipula del contratto $\quad G_a^{(2)}=-X \quad \rightarrow \quad E(G_a^{(2)})=-E(X)$

   $\rightarrow$In questo caso da $P>E(X)$ segue che $-P<-E(X)$
   $\rightarrow$per l'assicurato operazione 2 $\succcurlyeq$ operazione 1.L'assicurato giudica più vantaggioso per lui non stipulare il contratto rispetto alla stipula. Questo è assurdo! Non esisterebbero le assicurazioni secondo questa impostazione.

La non adeguatezza del criterio della speranza matematica si riscontra anche nel fatto che anche se ho due distribuzioni molto diverse con stessa speranza matematica (es 2 Normali con diversa varianza, ma stessa E(X)). Questo criterio giudica le due distribuzioni indifferenti, mentre in realtà quella con varianza più alta è più rischiosa.

INTRODUZIONE NUOVO CRITERIO

Questo fatto della inadeguatezza del criterio legato alla speranza matematica era già stato evidenziato da Bernoulli (1738) il quale sottolineava la carenza di questo criterio decisionale con il Paradosso di San Pietroburgo. Esso descrive un gioco d'azzardo basato su una variabile casuale con valore atteso infinito, cioè una vincita media infinita. Cioè giocare l'importo A per entrare nel gioco è conveniente in quanto da un certo punto in poi la vincita supererà certamente A. Bernoulli ragionava così: non considero l'importo in se ma il valore rappresentativo che quell'importo ha per l'individuo (100€ per me non hanno lo stesso valore per uno ricco). Nel criterio E(X) ≥E(Y) non tengo conto del significato dell'importo.

Quindi ad ogni X assegno una funzione u(): X→u(X) è l'imputazione di valore che dipende dall'individuo e poi scelgo l'E[U(X)] maggiore. Bernoulli introdusse la funzione di utilità fatta in modo che decisori diversi avessero diverse funzioni di utilità. Bernoulli chiamò E[U(X)] "utilità attesa di X" e disse che bisognava confrontare i valore attesi non con gli importi tout court ma con la loro trasformazione tramite la funzione di utilità. La u() è strettamente crescente: si preferisce di più al di meno. Il metodo di Bernoulli ebbe fortuna quando nel 1947 Von Neumann e Morgenstern lo riscoprirono. Essi presero l'insieme D e vi introdussero una ≽ tale che godesse delle completezza, transitività e riflessività e di altre proprietà. Tali assiomi traducono il comportamento di decisori razionali in condizioni di incertezza, per lo meno in determinati ambiti. Con tali assiomi essi dimostrarono che:

la relazione ≽ che gode delle tre proprietà + altre ⟷ ∃ u() strettamente crescente, continua | X≽Y se e solo se E[U(X)]≥E[U(Y)] " l'utilità attesa di x è maggiore dell'utilità attesa di y"

→Se l'ordine di preferibilità soddisfa le proprietà richieste allora ∃ una funzione tale che l'ordinamento può essere definito tramite i valori di utilità attesa.

←Se l'ordinamento può essere definito tramite i valori di utilità attesa, allora è un ordinamento di preferibilità.

Se un decisore introduce un criterio che rispecchi i ragionamenti dei decisori, allora tale criterio lavora in termini di utilità attesa.

CRITERIO DI UTILITA' ATTESA

Dato un decisore , un insieme di numeri aleatori D e una funzione di utilità u() definita in I, un intervallo (involucro convesso) che contiene le determinazioni possibili dei numeri aleatori dell'insieme D, con u() strettamente crescente e continua.

Si introduce un ordinamento di preferibilità così definito:

X ≽ Y ⟷ E[U(X)] ≥ E[U(Y)] "l'utilità attesa di x è ≥ dell'utilità attesa di y"

La <u>preferenza stretta</u> è allora definita così: per definizione $X \succ Y$ *se e solo se* $X \succcurlyeq Y$ *ma non* $X \succcurlyeq Y$ cioè $X \succ Y$⟷E[U(X)]>E[U(Y)].

L' <u>indifferenza</u> è allora definita così: per definizione $X \sim Y$ *se e solo se* $X \succcurlyeq Y$ *e* $Y \succcurlyeq X$ cioè $X \sim Y$ ⟷ E[U(X)]=E[U(Y)]

Oss. Suppongo che u() sia un funzione di utilità e consideriamo la trasformata v()=a*u()+b con a, b Reali e a>0 e suppongo $X \succcurlyeq Y$≥E[U(X)]≥E[U(Y)]. Calcolo E[v(X)]=E[a*u(X)+b]=a*E[u(X)]+b mentre la seconda diventa E[v(Y)]= E[a*u(Y)+b]=a*E[u(Y)]+b. Poiché vale E[u(X)]≥E[u(Y)] allora vale che E[v(X)]≥E[v(Y)].

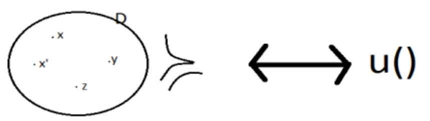
In termini di utilità attesa l'ordinamento è rappresentato da una classe di funzioni, ottenibili mediante trasformazioni del tipo a*[ ]+b. ≽

Un ordinamento di preferibilità $\succcurlyeq$ introdotto tramite l'utilità attesa è rappresentabile mediante una classe di funzioni che sono la trasformata affine (+b) e crescente (a>0) dell'altra.

L'ordinamento introdotto tramite l'utilità attesa rispecchia alcune proprietà.

1. $\succcurlyeq$ è un ordinamento di preferibilità: valgono le proprietà di completezza, riflessività e transitività
   Dim.
   I. Completezza
   II. Riflessività
   III. Transitività
2. Se $X=^d Y$ cioè sono uguali in distribuzione le loro utilità attese sono uguali, cioè $E[u(X)]=E[u(Y)]$. Quindi se $X=^d Y \rightarrow X\sim Y$
3. Da questo segue che se $X'=^d X$ e $Y'=^d Y$ allora $X\succcurlyeq Y \rightarrow X'\succcurlyeq Y'$
4. Dati a, b numeri reali certi:
   I. $a>b$ essendo u() strettamente crescente: $\leftrightarrow u(a)>u(b)$ con u(a), u(b) certi $\leftrightarrow$ $E[u(a)]>E[u(b)] \leftrightarrow a\succ b$.
   II. $a=b$ essendo u() strettamente crescente: $\leftrightarrow u(a)=u(b)$ con u(a), u(b) certi $\leftrightarrow$ $E[u(a)]=E[u(b)] \leftrightarrow a\sim b$.
   III. $a<b$ essendo u() strettamente crescente: $\leftrightarrow u(a)<u(b)$ con u(a), u(b) certi $\leftrightarrow$ $E[u(a)]<E[u(b)] \leftrightarrow b\succ a$.

L'ordinamento di preferibilità estende l'ordinamento naturale presente in R, qualunque sia la funzione di utilità. La proprietà di completezza mi rende possibile, anche se molto lungo, il compito di individuare l'ordinamento. Ma siccome ho una relazione di equivalenza su D, posso semplificare il compito costruendo/conoscendo la u().



<u>Attenzione</u>: d'ora in avanti supporremo che appartengono a D anche i numeri certi e i numeri aleatori semplici (quelli che hanno FdR a gradini cioè con un numero discreto di determinazioni).

Def. Supponendo di avere introdotto (D, $\succcurlyeq$), l'ordinamento di preferibilità, dato $X\in D$ diciamo *equivalente certo* ad X un numero certo M tale che $M\sim X$ (è indifferente ad X), dove $\sim$ deriva dall'ordinamento. Se l'ordinamento è dato in termini di utilità attesa allora: $M\sim X \leftrightarrow E[U(M)]=E[U(X)]$ cioè $U(M)= E[U(X)]$ cioè $M= U^{-1}\{E[U(X)]\}$. La funzione inversa esiste in quanto u() è crescente strettamente.

<u>Notazione</u>. Se $\succcurlyeq$ è l'ordinamento dell'utilità attesa rappresentata dalla funzione di utilità u(), da una qualunque delle funzioni della sua classe, indicheremo con $M_u(X)$ l'equivalente certo di x introdotto dalla funzione u (con questa notazione si mette in evidenza anche u).

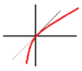
Decisori diversi possono avere funzioni di utilità diverse. Data la situazione X' e X all'istante T: X' ricchezza soggetto, X ricchezza conseguente ad aver intrapreso un'operazione finanziaria aleatoria rispetto a X.

Notazione: Si dice che l'operazione finanziaria è *vantaggiosa* se riesce $X\succcurlyeq X'$. Si dice che l'operazione finanziaria è *svantaggiosa* se riesce $X'\succcurlyeq X$. Si dice che l'operazione finanziaria è *indifferente* se $X'\sim X$

FUNZIONE DI UTILITA' U(X)=X

Oss. Potremmo scegliere come funzione di utilità la funzione identica $u(X)=X$. In questo caso che ordinamento avrei? $E(X)=E[U(X)]$, $E(Y)=E[U(Y)]$ da cui $X\succcurlyeq Y \leftrightarrow E[X]\geq E[Y]$. In questo ambito dell'utilità attesa trovo il criterio della speranza matematica, che però non ci andava bene! Quindi devo introdurre qualche altra condizione sulla funzione di utilità (essa non dovrà essere solo continua e crescente)

FUNZIONE DI UTILITA' NORMALIZZATA

Def se u() è derivabile, u() è detta *normalizzata* se soddisfa le condizioni u(0)=0 e u'()=1; cioè ha una certa regolarità in 0 dove la tangente alla curva è la bisettrice. 

Oss. Se ho una u() normalizzata posso trovare una funzione di utilità normalizzata nella classe delle funzioni di utilità che rappresentano la stessa funzione di utilità? Cioè se ∃ a, b reali con a>0 | V(X)=a*U(X)+b sia normalizzata? Si, esiste.

Vediamo cosa vuol dire normalizzata:

v(0)=a*u(0)+b=0

$$\frac{d\,v(0)}{dx} = a\frac{d\,u(0)}{dx} = 1$$

Cioè le condizioni che rendono possibile la normalizzazione di una trasformata affine sono:

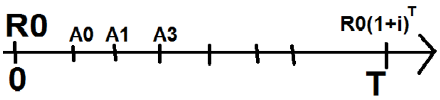
1. se $\frac{d\,u(0)}{dx} \neq 0$, poiché $\frac{d\,u(0)}{dx} \neq 0$ e u () è crescente, allora $\frac{d\,u(0)}{dx}$>0. Allora $a = \frac{1}{\mathrm{u}'(0)}$ con a>0
2. b= $-\frac{\mathrm{u}(0)}{\mathrm{u}'(0)}$

Ho costruito una trasformata di u che soddisfa le proprietà di funzione di utilità normalizzata.

FUNZIONE DI UTILITA' DEL GUADAGNO

Supponiamo che l'individuo consideri che la che la situazione patrimoniale in T sia certa:

ω importo certo in T



e valuto cosa succede se mi metto ad attuare un'operazione finanziaria aleatoria 1 rispetto a ω che mi porti ad X ed un'operazione finanziaria aleatoria 2 che mi porta a Y.

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{T}$ è la mia situazione di riferimento (numero certo)

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{T} \rightarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{X}{T}$ se attuo l'operazione finanziaria 1

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\omega}{T} \rightarrow \genfrac{}{}{0pt}{}{Y}{T}$ se attuo l'operazione finanziaria 2

Posso quindi definire la variazione di situazione patrimoniale (guadagno):

G_1=X-ω → X=G_1+ω   guadagno derivante dall'attuare operazione 1

G_2=Y-ω → Y=G_2+ω   guadagno derivante dall'attuare operazione 2

Diremo che X≻Y ↔ E[u(X)]>E[u(Y)] con U() funzione di utilità del decisore

↔ E[u(G_1+ω)]>E[u(G_2+ω)]

$\leftrightarrow E[u_\omega(G_1)]>E[u_\omega(G_2)]$ con $u_\omega(X)=u(X+\omega)$

Se la situazione patrimoniale dell'individuo è certa per andare a confrontare le situazioni patrimoniale posso considerare i guadagni andando a considerare le speranze matematiche dei trasformati di G attraverso la $u_\omega(X)$ detta *funzione di utilità del guadagno*.

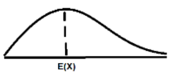
Cosa cambia rispetto al criterio della speranza matematica?

Qui mi rimane la funzione di utilità del decisore quindi le esigenze particolari del decisore, inoltre non sparisce il rilevo della situazione patrimoniale di riferimento. In $u_\omega(X)$ sono racchiuse la preferenza del particolare decisore e la ricchezza iniziale di riferimento. Prima invece non succedeva!

Per estensione scriveremo, anche se non del tutto correttamente ma per avere una notazione più immediata, $G_1 \succcurlyeq G_2$

Siccome tra i casi particolati del criterio di utilità c'è il criterio della speranza matematica, cerco di ricavare altri assiomi\ proprietà che si riscontrano nei decisori razionali (già trovate da Neumann)

PROPRIETA' DI AVVERSIONE AL RISCHIO

Spiegazione intuitiva: supponiamo che un individuo consideri il numero aleatorio $\frac{X}{T}$ valutato con funzione di densità 

. Osservo che vale Pr[X>E(X)]>0 cioè l'evento ha probabilità positiva. Ma noto che anche Pr[X<E(X)]>0 ha probabilità positiva. Quindi per un numero aleatorio di questo tipo c'è probabilità positiva di avere sia valori maggiori di E(X) che valori minori di E(X).

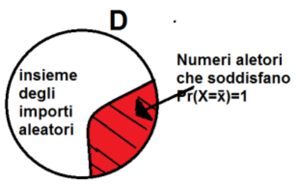
Considero quindi: $\frac{X}{T}$ e $\frac{E(X)}{T}$

Intuitivamente siamo avversi al rischio quando di fronte alla possibilità di vincere o perdere è più forte la paura di perdere. Quindi preferiamo avere per certo E(X)>0 che X che ha sia probabilità positive che negative.

Def In un ordinamento (D,) diremo che l'individuo, che introduce quell'ordinamento, è avverso al rischio se $\forall X \in D \nexists \bar{x}\ con\ Pr(X=\bar{x})=1$, allora l'individuo giudica $E(X) \succ X$.

La parte "$\nexists \bar{x}\ con\ Pr(X=\bar{x})=1$" aggiunge consistenza alla definizione (*)

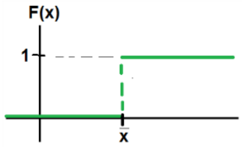
Un individuo è avverso al rischio se di fronte ad un evento aleatorio X preferisce il valore atteso E(X).



Voglio che valga la definizione esclusi i numeri aleatori che soddisfano $Pr(X=\bar{x})=1$: essi sono i numeri certi e i numeri "praticamente certi" cioè i numeri aleatori per i quali è 1 la massa concentrata su una determinazione Pr(X=tot)=1.

(*) È necessario aggiungere questa condizione perché:

- Sia X | $Pr(X=\bar{x})=1$ essendo $\bar{x}\in R$: la sua funzione di ripartizione è $F_X(x)=\begin{matrix} 0\ se\ x<\bar{x} \\ 1\ se\ x\geq\bar{x} \end{matrix}$

  La sua speranza matematica è E(X)= $\bar{x}$

- Sia il numero certo $\bar{x}$; la sua funzione di ripartizione è $F_{\bar{x}}(x)=F_x(x)$ quindi X=^{d} $\bar{x}$ sono cioè uguali in distribuzione, quindi il criterio li giudica indifferenti: $X\sim\bar{x}$ cioè in questo caso : $E(X)\sim\bar{x}$ e quindi non vale : $E(X)\succ\bar{x}$

Quindi mi occorre la condizione (*).

La condizione $E(X)\succ x$ in termini di utilità attesa si traduce in u() ⟷ ≽ che diventa u[E(X)]>E(U(X)]. L'individuo è avverso al rischio se la funzione di utilità della speranza matematica è > della speranz amatematica della funzione di utilità di X.

Dim. $E(X)\succ x\ \leftrightarrow u\big(E(X)\big)\succ u(X) \leftrightarrow E\left(u\big(E(X)\big)\right)\succ E\big(u(X)\big) \leftrightarrow u(E(X))\succ E(u(X))$

FUNZIONE DI UTILITA' DI UN INDIVIDUO AVVERSO AL RISCHIO

Considero il seguente problema.

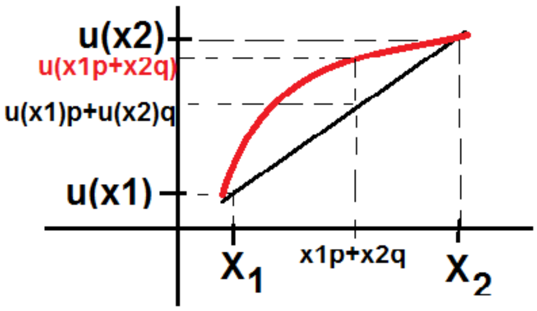
$\forall X\in D$ con X=$\begin{matrix} x_1\ \ p\ dove\ p=\Pr(X=x_1) \\ x_2\ \ q\ dove\ q=\Pr(X=x_2) \end{matrix}$ con 0<p<1 e q=1-p

E(X)=x_1p+x_2q

Dall'ipotesi di avversione al rischio, l'individuo giudica E(X) $\succ X$ ⟷ in termini di utilità u[E(X)]=u(x_1p+x_2q)

Geometricamente:

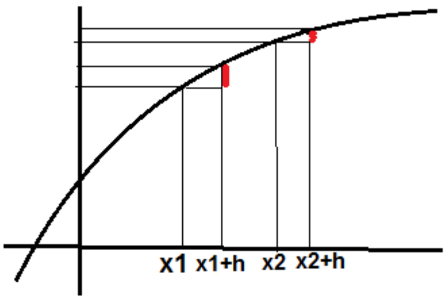
- supponendo $x_1<x_2$
- u() strettamente crescente



Il ragionamento è fatto su x_1 e x_2 e 0<p<1 fissati; in realtà la condizione vale sui valori arbitrari per ogni x_1 e x_2 e 0<p<1. Perciò

l'ipotesi di avversione al rischio ⟷ $\forall x_1,x_2\in I\ e\ \forall\ p\in]0,1[\ u(x_1p+x_2q)>u(x_1)p+u(x_2)q\ \leftrightarrow$ $u()$è $funzione\ strettamente\ concava.$

Sono funzioni di utilità dette *marginali decrescenti*:



Considerati $x_1 < x_2$ h>0 incremento e sia x_1+h e x_2+h , qual è nei due casi l'incremento della funzione? $u(x_1+h)-u(x_1)> u(x_2+h)-u(x_2)$. Lo stesso incremento di ricchezza (h) mi dà un valore della funzione di utilità maggiore partendo da una ricchezza < che da una >.

Def (D, $\succcurlyeq$) *è propenso al rischio* se $\forall X \in D$ autenticamente aleatorio X $\succ$E(X). In questo caso u() è una funzione strettamente convessa

Def (D, $\succcurlyeq$) è *indifferente al rischio* se $\forall X \in D$ autenticamente aleatorio X~E(X). In questo caso u() è una funzione identica o una sua trasformata affine crescente. u(x)=x o u(x)=a*(X)+b con a>0. (è criterio speranza matematica)

Oss. Quindi gli individui che ragionano col criterio della speranza matematica sono indifferenti al rischio.

Oss. La nozione di avversione al rischio sarà quella che prenderemo come ipotesi di comportamento del decisore, in quando consente di giustificare l' esistenza delle assicurazioni.

Ricordo che dati (D, $\succcurlyeq$), $\forall X \in D$ l'equivalente certo di X è un numero certo M tale che X~M (in termini di utilità $M_u(X)$) consideriamo il seguente problema: dato un individuo avverso al rischio che relazione c'è tra il valore atteso E(X) e l'equivalente certo $M_u(X)$?

RELAZIONE TRA E(X) E M_u(X)

Si ha E(X) $\succ$X, perché avverso al rischio, e X~ $M_u(X)$, perché numero certo → E(X) $\succ M_u(X)$

Dim.

Ip_1 E(X) $\succ$X ↔ $\underline{E(X) \succcurlyeq X}$ e non X $\succcurlyeq$ E(X)

Ip_2 X~ $M_u(X)$ ↔ $\underline{X \succcurlyeq M_u(X)}$ e $M_u(X) \succcurlyeq$ X

→ per la transitività dell'ordinamento di preferibilità E(X) $\succcurlyeq M_u(X)$.

Ora per assurdo suppongo che valga anche $M_u(X) \succcurlyeq$ E(X):

osservo che se $\underline{X \succcurlyeq M_u(X)}$ e $M_u(X) \succcurlyeq$ E(X) → X $\succcurlyeq$ E(X) ma ciò contraddice l'ipotesi ("non X $\succcurlyeq$ E(X)").

Quindi E(X)$\succ M_u(X)$.

C.v.d.

Ho concluso che E(X) $\succ M_u(X)$ ma osservo che sono due numeri reali e quindi sono che di fronte a due numeri reali, dunque l'ordinamento di preferibilità si comporta come un relazione d'ordine. Quindi E(X) $\succ M_u(X)$ ↔ E(X)> $M_u(X)$ da cui la definizione seguente:

def In (D, $\succcurlyeq$) un individuo è *avverso al rischio* ↔ E(X)> $M_u(X)$

Oss. Sottolineo il fatto che un individuo avverso al rischio non preferisce sempre l'importo certo ad uno aleatorio ma preferisce E(X) a X! Infatti nella seguente situazione puoi avere 100€ certi o X = 1000€ con probabilità 0.5 oppure 5000€ con probabilità 0.5. Ovviamente l'individuo sceglie la X perché più vantaggiosa, sceglie cioè E(X) non certo!

PREMIO DI RISCHIO

Def. $\Pi_u(X)>0$ | $\Pi_u(X)=E(X)-M_u(X)$ è la differenza tra la speranza matematica e l'equivalente certo per un individuo avverso al rischio. $M_u(X)= E(X)-\Pi_u(X)$ con $\Pi_u(X)>0$ per cui $X\sim E(X)- \Pi_u(X)$. Interpretazione del premio di rischio: il premio di rischio è interpretabile come un importo positivo che l'individuo avverso al rischio è disposto a pagare detraendolo dal valore atteso di X per ricondursi ad un numero certo che sia per lui indifferente ad X.

CONFRONTO DELL'AVVERSIONE AL RISCHIO FRA DUE INDIVIDUI

	Ord. preferibilità	funzione di utilità
Individuo 1:	$\succcurlyeq_1$	$u_1()$
Individuo 2:	$\succcurlyeq_2$	$u_2()$

Dirò che l'individuo 1 è più avverso al rischio dell'individuo 2 se e solo se $\succcurlyeq_1$ evidenzia una maggiore avversione al rischio di $\succcurlyeq_2$. L'idea è misurare l'avversione al rischio tramite $\Pi_u(X)$.

Def Diremo che l'individuo 1 è più avverso al rischio dell'individuo 2 ↔

↔ $\forall X \in D\ \ \Pi_{u1}(X) > \Pi_{u2}(X)$ ↔ in termini di equivalente certo: $\forall X \in D\ \ M_{u1}(X) < M_{u2}(X)$

↔ $u_1(X)$ è "più concava" di $u_2(X)$ → cioè se $\exists\ funzione\ \varphi()$ strettamente concava | $u_2(X) = \varphi(u_1(X))$

↔ $R_{u1}(X)> R_{u2}(X)\ \forall X \in I$ (dopo)

Ai fini di confrontare l'avversione al rischio considereremo anche la derivata seconda (perché è quella che ci dà la concavità).

Def Sia u() definita in I, continua e strettamente concava, vale che:

se $\exists\, u'()$ allora $u'() \geq 0$

se $\exists\, u''()$ allora $u''() \leq 0$

Oss Siccome useremo molto le misure negative, per migliorare puntualmente l'avversione al rischio uso l'opposto della derivata seconda.

In realtà il semplice uso della derivata seconda con segno opposto non va bene per le funzioni di utilità.

Infatti date u() e v()=a*u()+b appartenenti alla stessa classe. Se considero –u''() allora –u''() ≠-a*u''()=-v''() quindi troverei due misure distinte associate allo stesso ordinamento. Perciò userò:

Def $R_u(X) = -\frac{u''(X)}{u'(X)}$ detta *funzione di avversione al rischio* o *Indice di Arrow-Pratt*

(infatti $R_v(X) = -\frac{a*u''(X)}{a*u'(X)} = R_u(X)$

ALCUNI TIPI DI FUNZIONE DI UTILITA'

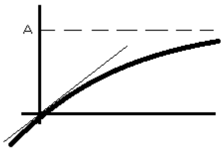
1) Utilità esponenziale: u(X)=A(1-$e^{-x/A}$) con A>0, $\forall x \in R$

   È strettamente crescente: $\mathrm{u}'(\mathrm{X}) = \mathrm{A}\left(-e^{-\frac{x}{A}}\right)\left(-\frac{1}{A}\right) = e^{-x/A}$

   È strettamente concava: $\mathrm{u}''(\mathrm{X}) = e^{-\frac{x}{A}}\left(-\frac{1}{A}\right) = -\frac{e^{-\frac{x}{A}}}{A}$

   →$\mathrm{R}_u(\mathrm{X}) = -\frac{u''(X)}{u'(X)} = -\frac{-\frac{e^{-\frac{x}{A}}}{A}}{e^{-\frac{x}{A}}} = -\frac{1}{A}$ cioè la funzione di avversione al rischio è costante. Il parametro A è legato all'avversione al rischio del decisore (+ grande è A < è l'avversione al rischio)

   Oss. La funzione di utilità è già normalizzata

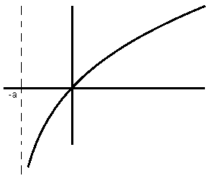


2) Utilità logaritmica: $\mathrm{u}(\mathrm{X}) = a\log(\frac{x+a}{a})$ con a>0

   Questa funzione è definita solo per gli x>-a

   È strettamente crescente: u'(x)=a $\frac{a}{x+a}\frac{1}{a}$ = $\frac{a}{x+a}$

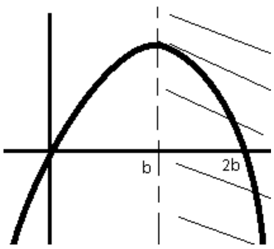
   È concava: u''(x)=a$(-\frac{1}{(x+a)^2}) = -\frac{a}{(x+a)^2}$



   →$\mathrm{R}_u(\mathrm{X}) = -\frac{u''(X)}{u'(X)} = -\frac{-\frac{a}{(x+a)^2}}{\frac{a}{x+a}}$ = $\frac{1}{x+a}$ al crescere di x è decrescente. La funzione di avversione al rischio è decrescente.

3) Utilità quadratica: $u(x) = x - \frac{1}{2b}x^2$ con b>0, x≤ b , b= livello di saturazione

   Il grafico è quello di una parabola con concavità rivolta verso il basso: ma per avere una funzione di utilità (che deve essere strettamente crescente, devo bloccarmi in b)



   Per avere una funzione di utilità strettamente crescente un individuo deve scegliere b in modo tale che tutti gli importi che gli interessa valutare siano ≤b. Per questo b è detto *livello di saturazione*.

   $u'(x) = 1 - \frac{2}{2b}x = 1 - \frac{x}{b}$

   $u''(x) = -\frac{1}{b}$

   $\mathrm{R}_u(\mathrm{X}) = -\frac{-\frac{1}{b}}{1-\frac{x}{b}} = \frac{1}{b-x}$ La funzione di avversione al rischio è crescente. Ma non va bene!

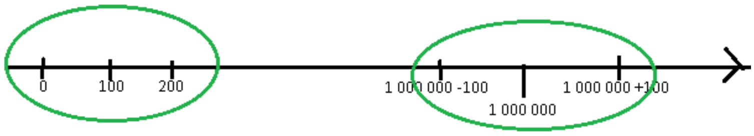
infatti:

Esempio-intuitivo

$$\begin{array}{ll} 0 & prob = 0.5 \\ 200 & prob = 0.5 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 1\,000\,000 - 100 & prob = 0.5 \\ 1\,000\,000 + 100 & prob = 0.5 \end{array}$$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

Rischio di trovarmi a 0 $\qquad$ rischio "solo" 1 000 000 -100



Intuitivamente siamo più avversi al rischio nella prima situazione quindi ci si aspetta che un decisore avverso al rischio abbia funzione di avversione al rischio costante o decrescente più che crescente.

Quindi la funzione di utilità quadratica ha due inconvenienti: scelta di b, e $\mathrm{R}_u(\mathrm{X})$ crescente, al contrario delle aspettative.

Ma allora perché la prendo in considerazione?

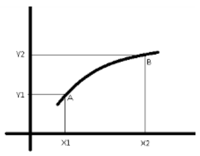
1. Perché è un polinomio di secondo grado ed è comodo per fare i calcoli. Ad es. $\int u(x)dF_x(x) = \int \left(x - \frac{1}{2b}x^2\right) dF_x(x)$
2. Permette di sfruttare l'approssimante di Taylor.
   Suppongo di avere una u() funzione di utilità abbastanza regolare cioè se ∃ u'(), u''() in I_0 e sia il seguente polinomio di Taylor
   u(x)=u(0)+u'(0)x+$\frac{1}{2}u''(0)x^2 + o(x^2) \to \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ cioè in un intorno abbastanza piccolo di 0 posso trascurare l'infinitesimo.
   u(x)≈ u(0)+u'(0)x+$\frac{1}{2}u''(0)x^2$
   Per ipotesi suppongo u() normalizzata: → u(0)=0 e u'(0)=1
   u(x)≈x+$\frac{1}{2}u''(0)x^2$, con $\frac{1}{2}u''(0)$= $-\frac{1}{2}$b >0 (l'ho imposto io)
   Dunque una qualsiasi funzione di utilità per importi non troppo grandi/elevati può essere approssimata dalla funzione di utilità quadratica.

COSTRUZIONE DELLA FUNZIONE DI UTILITA' DI UN INDIVIDUO

Ricordo che è equivalente avere un ordinamento di preferibilità o la funzione di utilità: la prima è più complicata operativamente, mentre la seconda è più semplice da applicare.

Premessa alla costruzione della funzione di utilità di un decisore:

Nella classe delle funzioni di utilità che rappresentano uno stesso ordinamento posso sempre scegliere una il cui grafico passa per due punti fissati. Infatti dati $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ (poiché è crescente) e sia u () ∈ C.



Calcolo $u(x_1)$ e $u(x_2)$ sapendo già che $u(x_1) < u(x_2)$. O accade che tale u() passi già per a e b cioè $u(x_1) = y_1$ e $u(x_2) = y_2$ o devo trovare una sua trasformata affine che la faccia passare per quei due punti. Tale trasformata esiste sempre e la trovo così: sto cercando v(x)=a*u(x)+b a, b ∈ R, a>0 | risolva il sistema: $\begin{matrix} v(x_1) = y_1 \\ v(x_2) = y_2 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} a * u(x_1) = y_1 \\ a * u(x_2) = y_2 \end{matrix}$ che ammette una sola soluzione in a e b perché $u(x_1) < u(x_2)$ e quindi il determinante è ≠0.

Perciò $a = \frac{y_2 - y_1}{u(x_2) - u(x_1)}$>0 la soluzione è tale da avere a>0 poiché il segno del numeratore è uguale a quello del denominatore. Il b lo ricavo di conseguenza. Fine della premessa.

Dato un decisore voglio costruire la sua funzione di utilità: u()=?

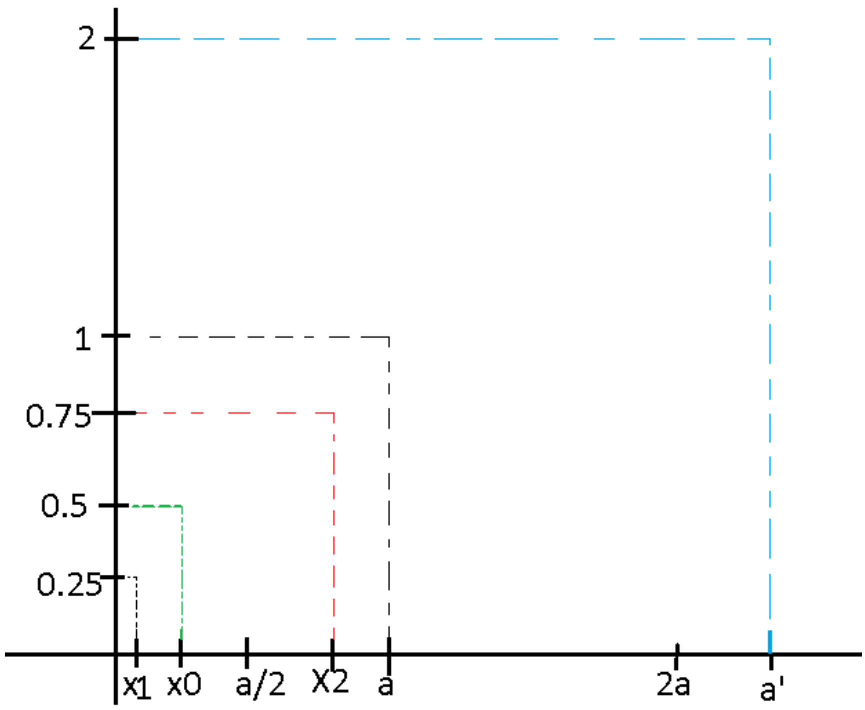
Fisso due punti: cioè scelgo nella classe delle funzioni di utilità del decisore una funzione tale che:

u(0)=0

u(a)=1 con a>0

(so che ne esiste una per la premessa)

- Domanda al decisore: "a fronte dell'importo aleatorio X_0qual è per te l'equivalente certo?
  X_0= $\begin{matrix} 0\ prob = 0.5 \\ a\ prob = 0.5 \end{matrix} \sim {}^{?}x_0$
  Analisi di tipo dicotomico:
  Osservo che se l'individuo è avverso al rischio si ha E(X_0)=$\frac{a}{2}$ → $x_0 < \frac{a}{2}$ cioè l'equivalente certo è minore della speranza matematica, per l'avversione al rischio.
  Una volta trovato l'equivalente certo sfrutto il fatto che se l'ordinamento è rappresentabile mediante u() trovo:
  E[u(X_0)]=u(x_0) per la condizione di indifferenza
  E[u(X_0)]=$\frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}$u(a) =0+$\frac{1}{2}$*1=$\frac{1}{2}$
  Quindi u(x_0)= $\frac{1}{2}$
- Considero poi la situazione:
  X_1= $\begin{matrix} 0\ prob = 0.5 \\ x_0\ prob = 0.5 \end{matrix} \sim {}^{?}x_1$
  Con un ragionamento simile trovo:
  E[u(X_1)]= u(x_1)
  E[u(X_1)]= $\frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}$u($x_0$)= 0 + $\frac{1}{2}$ u(x_0) $= \frac{1}{4}$
  → u(x_0) $= \frac{1}{4}$ la funzione di utilità del decisore è | u(x_1) $= \frac{1}{4}$
- E per i valori tra x_0 e a ?
  X_2= $\begin{matrix} x_0\ prob = 0.5 \\ a\ prob = 0.5 \end{matrix} \sim {}^{?}x_2$
  Analogamente a prima
  E[u(X_2)]=u(x_2)
  E[u(X_2)]=$\frac{1}{2}$u(x_0)+ $\frac{1}{2}u(a)$= $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2}$= $\frac{3}{4}$ → u(x_2) $= \frac{3}{4}$
- E se volessimo andare 'oltre' a? Considero :
  Z= $\begin{matrix} 0\ prob = 0.5 \\ a'\ \ prob = 0.5 \end{matrix} \sim a$ (fix)
  Che a' sceglie il decisore affinché Z~a?
  →E(Z)= $\frac{a'}{2}$→ $a < \frac{a'}{2}$ (perché so che l'equivalente certo di Z è < del valore atteso di Z). Quindi a'>2a
  → E[(u(Z)]=u(a)=1
  E(u(Z)= $\frac{1}{2}$u(0)+ $\frac{1}{2}u(a')$ → $\frac{1}{2}u(a') = 1$ → $u(a')$=2



- Poi andremo a cercare una funzione crescente e concava che vada a perequare i punti trovati. Questo per dire che: avendo la funzione di utilità, è possibile calcolare in questo modo. Perciò posso andare a lavorare con qualsiasi complessità di importi.

APPLICAZIONI IN AMBITO ASSICURATIVO

Sia un individuo esposto ad un rischio che gli comporti di subire una perdita di importo X (aleatorio) nel corso di un anno (es. casa esposta al rischio incendio). Egli può stipulare una polizza con un assicuratore che copra la perdita integralmente X contro il pagamento di un premio P.

→Abbiamo quindi 2 decisori:

(a) potenziale assicurato
(A) potenziale assicuratore

Ciascuno dei due ha un ordinamento di preferibilità:

(a)→ $\succcurlyeq_a$

(A)→ $\succcurlyeq_A$

E come situazioni patrimoniali di riferimento due numeri certi dati da ω_a e ω_A

(a)→ $\succcurlyeq_a$ $\quad$ ω_a $\quad$ u_a

(A)→ $\succcurlyeq_A$ $\quad$ ω_A $\quad$ u_A

↑

funzione di utilità del guadagno dei due decisori, quella che una volta chiamavamo u_ω

Ipotesi: suppongo che entrambi i decisori siano avversi al rischio

Consideriamo le due alternative: stipula/non stipula del contratto:

(posto che è avvenuta la perdita)

A) Per l'assicuratore: Non stipula: -X
Stipula P-X

a) Per il potenziale assicurato: Non stipula: -X
Stipula: -P+X-X=-P

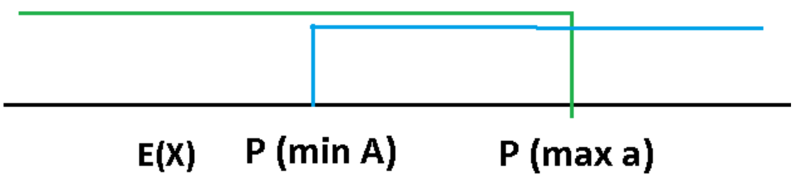
Analizzo:

A) Se $P = P_e$ (premio equo) = E(X)
Indico con G_e il guadagno dell'assicuratore in caso di stipula con P equo. G_e=P_e-X
Per l'ipotesi di avversione al rischio:
$E(G_e) \succ_A G_e$ $\leftrightarrow$E(P_e-X) = $P_e - E(X) = 0 \succ_A G_e$
Posso leggere 0 come il guadagno che l'assicuratore avrebbe se non stipulasse il contratto: per l'assicuratore stipulare il contratto a prezzo equo non è vantaggioso. (Qui a differenza di prima lo svantaggio viene dall'ipotesi di avversione al rischio)
Quali premi invece rendono la stipula vantaggiosa? Cerchiamo cioè i P| P-X$\nsucc_A$0.
Il premio minimo per l'assicuratore (minimo caricamento di sicurezza) è dato da: P_A^{min} è P|P-X$\sim_A$ 0
In termini di utilità attesa è P | E[$u_A(P - X)$]= $u_A(0)$

a) Sia P= P_e (per il momento suppongo che vada bene anche all'assicuratore)
L'assicurato è avverso al rischio quindi il decisore "potenziale assicurato" giudicherà E(-X) $\succ_a$-X cioè -E(X) $\succ_a$-X cioè -$P_e \succ_a$-X
Quindi per assicurato a) è vantaggioso stipulare il contratto a premio equo. Ma non va bene all'assicuratore!
Osservo però che $\succ_a$ è preferibilità stretta quindi ho dei margini per metterli d'accordo.
Che premi a) è disposto a pagare?
Cerco P| -P$\nsucc_a$-X che è P_a^{max}il quale è P| -P$\sim_a$ –X è il premio massimo che l'assicurato è disposto a pagare
Oss. Y$\sim_a$E(Y)- Π_a(Y) cioè ricordo che dato un importo aleatorio Y posso esprimere l'equivalente certo in questo modo e che Π_u(X)>0
Faccio giocare il ruolo di Y a –X (cioè Y= -X)
-X$\sim_a E(-X) - \Pi_a$(-X)=-[E(X)+ Π_a(-X)] equivalente certo
Mettendo assieme i pezzi ottengo:
-[E(X)+ Π_a(-X)] = -P_a^{max} $\leftrightarrow$ E(X)+ Π_a(-X)= P_a^{max}
→ Il potenziale assicurato è disposto a pagare il premio: P_a^{max}= E(X)+ Π_a(-X), con Π_a(-X)>0
In particolare è disposto a pagare più dell'equo! È disposto a pagare un caricamento fino ad un certo limite > del prezzo equo.

Oss. Se pago meno di questo viene un contratto più vantaggioso:
P<P_a^{max}→ -P>-P_a^{max} →-P $\succ_a$-P_a^{max} ma siccome -$P_a^{max}\sim_a$-X *premio di indifferenza*, per la transitività: -P$\nsucc_a$-X

Dopo aver analizzato A) e a) ho come situazione finale:



Se il $P_a^{max} \geq P_A^{min}$ ho un intervallo di valori del premio che rendono non svantaggioso il contratto per entrambi.

Esempio:

Siano $u_A(X) = A\left(1 - e^{-\frac{x}{A}}\right)$ funzione di utilità di A (assicuratore)

$u_a(X) = a\left(1 - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ funzione di utilità di a (assicurato)

a≠ A e poiché i parametri sono collegati all'avversione al rischio ho $R_A(X) = \frac{1}{A}$ e $R_a(X) = \frac{1}{a}$

ed è ragionevole ritenere che l'assicurato sia più avverso al l'assicurato: cioè $R_A(X) < R_a(X)$

- Come sono fatti sotto queste ipotesi P_a^{max} e P_A^{min}?

- P_A^{min} è | E[$u_A(P-X)$]= $u_A(0) \leftrightarrow E\left[A\left(1 - e^{\frac{-P+x}{A}}\right)\right]$=0 $\leftrightarrow A\left(1 - E\left[e^{\frac{-P+x}{A}}\right]\right)$=0 $\leftrightarrow E\left[e^{\frac{-P+x}{A}}\right]$=1 $\leftrightarrow e^{\frac{-P}{A}} E\left[e^{\frac{x}{A}}\right] = 1 \leftrightarrow e^{\frac{P}{A}} = E\left[e^{\frac{x}{A}}\right] \leftrightarrow \mathrm{P} = \mathrm{A} \ln E\left[e^{\frac{x}{A}}\right]$
- P_a^{max} è | E[$u_a(-P)$]=E[$u_a(-X)$] $\leftrightarrow$, ma $u_a(-P)$ è numero certo, quindi:
  $\leftrightarrow a\left(1 - e^{\frac{P}{a}}\right) = E\left[a\left(1 - e^{\frac{x}{a}}\right)\right] \leftrightarrow 1 - e^{\frac{P}{a}} = 1 - E[e^{\frac{x}{a}}] \leftrightarrow e^{\frac{P}{a}} = E[e^{\frac{x}{a}}] \leftrightarrow \frac{P}{a} = \ln E[e^{\frac{x}{a}}] \leftrightarrow$
  P=a $\ln E[e^{\frac{x}{a}}]$
  quindi P_a^{max} = a $\ln E\left(e^{\frac{x}{a}}\right)$

Si può dimostrare analiticamente (dimostrazione esatta) che avendo l'ipotesi $R_A(X) < R_a(X)$ c'è un certo intervallo di valori che rende non svantaggioso per entrambi il contratto.

Oss. Noi non faremo questa dimostrazione ma lavoreremo con "valori approssimati".

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Sia X ≥ 0 numero aleatorio con Fx= funzione di ripartizione di X; dato t $\epsilon\ R$ poniamo

$m_x(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} dF_X(x) = E[e^{tx}]$ integrale generalizzato, con b ≥0 $\lim_{b\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{tx} dF_X(x)$

Ma questo limite esiste?

1. So che fissato b $\int_0^b e^{tx} dF_X(x)$ è un numero reale perché è la funzione di Stjeltes
2. Al cresce di b è una funzione monotona non decrescente perché la funzione integranda è positiva

→per il teorema del limite delle funzioni monotone esiste il limite in [0,+ ∞]

È un numero reale?

Per il teorema delle funzioni monotone il limite tende al sup.

Lim→sup: o la funzione è limitata

o la funzione è illimitata +∞

Quindi: l'integrale che esiste sempre può essere un numero reale o +∞

Se pongo poi:

3. t=0 → $m_x(0) = \int_0^{+\infty} dF_X(x) = 1$ (raccolgo tutta la massa) → è convergente

4. t<0 → $e^{tx} \leq 1$ (x positivo) → la funzione integranda è dominata dalla funzione 1 → $m_x(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} dF_X(x) \in R$
5. t>0 → ho due possibilità:
   - fgm: una distribuzione che mi garantisce che in un intorno di 0 l'integrale è convergente
   - una distribuzione che non mi dà tale garanzia

def. Si dice che la distribuzione di X (o più brevemente X) è dotata di funzione generatrice dei momenti se $\exists I_0$ | $\forall t \in I_0 m_x(t) < +\infty$.

$m_x(t), t \in I_0$ è detta *funzione generatrice dei momenti* della distribuzione di X (o più brevemente di X)

Oss. Esistono distribuzioni (es. la distribuzione di Cauchy) t.c. $\forall t$ non si ha una funzione generatrice.

Es. X numero aleatorio limitato → {determinazioni possibili} limitato

Suppongo X con determinazioni in [0,b]. Dunque la massa di probabilità sta in un intervallo limitato.

In generale un numero aleatorio X limitato (qualsiasi) è dotato di funzione generatrice dei momenti.

Suppongo X dotato di densità di probabilità $f_X(x)$:

$\int_0^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$, per t>0 la funzione esponenziale cresce quindi $f_X(x)$ è quasi nulla da un certo punto in poi affinché $e^{tx}f(x)$ sia limitato

Quindi le funzioni generatrici dei momenti avranno funzione di probabilità con coda destra poco pesante.

I numeri aleatori limitati hanno funzione generatrice dei momenti

Idea: altre distribuzioni dotate di fgm dovranno comportarsi quasi come numeri aleatori limitati

Proprietà: se la distribuzione di X è dotata di fgm allora si può provare che

1. $\forall n \in N$, $E[X^n]$ è finita (tutti i momenti devono essere finiti)
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n E(X^n)}{n!}$ ha raggio di convergenza positivo ed in particolare si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n E(X^n)}{n!} = m_X(t)$
3. $m_X(t)$ (è derivabile) ammette derivata per ogni ordine in un intorno di 0 e la derivata n-esima rispetto a t calcolata in 0 è: $\frac{d^n m_X(t)}{dt^n}|_{t=0} = E(X^n)$ momento n-esimo della distribuzione
4. Sia X dotato di fgm, a,b∈R → aX+b è trasformata affine → anche aX+b è dotata di fgm e precisamente si ha: $m_{aX+b}(t) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = E[e^{taX}e^{tb}] = e^{tb}E[e^{taX}] = e^{tb}m_X(at)$
5. Se X e Y sono dotate di funzioni generatrici dei momenti e sono stocasticamente indipendenti → X+Y è dotato di fgm. Inoltre so che essa sarà $m_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E[e^{tX}e^{tY}] =$, essendo X e Y stocasticamente indipendenti → e^{tX} e e^{tY}sono stocasticamente indipendenti e sono i trasformati rispettivamente solo di X e Y, = $E[e^{tX}]E[e^{tY}] = m_X(t)m_Y(t)$. È una formula importante perché per calcolare $m_{X+Y}(t)$ ho bisogno della distribuzione congiunta di X e Y. Così invece è più semplice ragionare sulle marginali $m_X(t), m_Y(t)$.
6. Se X e Y sono dotate di funzioni generatrici dei momenti e le due funzioni generatrici coincidono in un intorno dell'origine, cioè $m_X(t) = m_Y(t)$ per $t \in I_0$, allora $X =^d Y$ ↔ la funzione generatrice dei momenti individua una (sola) distribuzione

Es. $X_1,\ldots,X_n$ indipendenti e identicamente distribuiti; studiare la distribuzione della somma $X=X_1+\ldots+X_n$ è complicato → tramite la fgm è più semplice

FUNZIONE GENERATRICE DEI CUMULANTI

Supponiamo che la distribuzione di X≥0 sia dotata di fgm cioè $m_X(t) < +\infty$ per $t \in I_0$

Poniamo: $X_X(t) = \log m_X(t), t \in I_0$ e osserviamo che:

1. $X_X(0) = \log m_X(0) = log 1 = 0$
2. $X'_X(t)|_{t=0}, m_X(t)$ è $derivabile\ in\ I_0\ e \log$ è $derivabile \rightarrow$ $la\ funzione\ composta$ è $derivabile$, $\frac{1}{m_X(t)} m'_X(t)|_{t=0} = E(X) * 1 = E(X)$
3. $X''_X(t)|_{t=0} = \frac{m''_X(t)m_X(t) - m'_X(t)m'_X(t)}{m_X(t)^2}|_{t=0} = \frac{E(X^2)*1 - E(X)E(X)}{1} = E(X^2) - E(X)^2 = Var(X)$
4. $X'''_X(t)|_{t=0} =$
$\frac{[m'''_X(t)m_X(t)+m''_X(t)m'_X(t)-2m'_X(t)m''_X(t)]m_X(t)^2-[m''_X(t)m_X(t)-m'_X(t)m'_X(t)]2m_X(t)m'_X(t)}{m_X(t)^4}|_{t=0}$
calcolo in 0:
$\frac{(E[X^3]*1+E[X^2]E[X]-2E[X]E[X^2])*1-2E(X)[E[X^2]-E[X]^2]}{1}$
$= (E[X^3] - E[X^2]E[X] - 2E[X]E[X^2]) + 2E[X]^3 - 2E[X]E[X^2]$
$= (E[X^3] - 3E[X^2]E[X]) + 2E[X]^3$
$= E[(X - E(X))^3] = \mu^3$ momento centrale terzo

Oss. La regolarità termina qui.

Def. $X_X(t) = \log(m_X(t))\ t \in I_0 \rightarrow \frac{d^n X_X(t)}{dt^n}|_{t=0}$ è detto *cumulante di ordine n* della distribuzione di X.

Perché è importante il cumulante? Perché se voglio scrivere X_X come sviluppo di Taylor ho:

$X_X(t) = X_X(0) + X'_X(0)t + \frac{1}{2}X'_X(0)t^2 + o(t^2)$ (*)

Oppure se considero un ordine più grande

$X_X(t) = X_X(0) + X'_X(0)t + \frac{1}{2}X''_X(0)t^2 + \frac{1}{3*2}X'''_X(0)t^3 + o(t^3)$

Questo ci dice che ci accontentiamo di valutare la fgm in modo approssimato, cioè trascurando un infinitesimo, posso approssimare la funzione dei cumulanti e (sostituendo) ottengo:

$X_X(t) \cong E(X)t + \frac{1}{2}Var(X)t^2\ oppure\ \cong X_X(t) \cong E(X)t + \frac{1}{2}Var(X)t^2 + \mu^3 t^3$

Usiamo tali risultati nei nostri problemi con:

$\mu_a(x) = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$ funz di avversione al rischio $r_a(x) = \frac{1}{a}$

$\mu_A(x) = A(1 - e^{-\frac{x}{A}})$ funz di avversione al rischio $r_A(x) = \frac{1}{A}$ con $r_a(x) \leq r_A(x)$

Sotto queste ipotesi so che vale:

$P_a^{max} = a\ logE[e^{xa}] = a\log\left(m_X\left(\frac{1}{a}\right)\right) = a\,X_X\left(\frac{1}{a}\right)$

$P_A^{min} = A\log E\left[e^{\frac{X}{A}}\right] = A\log(\,m_X\left(\frac{1}{A}\right) = AX_X\left(\frac{1}{A}\right)$

con X = perdita coperta dalla polizza assicurativa

Sostituisco X_X con il polinomio approssimante di 2° grado (*)

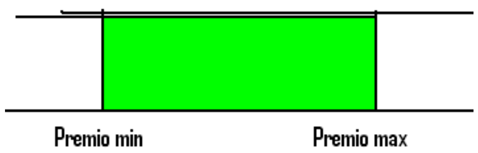
→$P_a^{max} \cong a\left[E[X]\frac{1}{a} + \frac{1}{2}Var(X)\frac{1}{a^2}\right] = E[X] + \frac{1}{2a}Var(X)$

→$P_A^{min} \cong a\left[E[X]\frac{1}{a} + \frac{1}{2}Var(X)\frac{1}{a^2}\right] = E[X] + \frac{1}{2A}Var(X)$

In via approssimata i due premi mettono in evidenza:

1. Componente premio equo
2. Caricamento di sicurezza: massimo per l'assicurato, minimo per l'assicuratore

Inoltre in via approssimata e da $\frac{1}{A} \leq \frac{1}{a}$ si ha $P_A^{min} \leq P_a^{max}$ e ho la situazione sperata



Cioè sotto le ipotesi di avversione al rischio ho fattibilità (di stipulazione) del contratto

Oss. $P_A^{min} = E(X) + \frac{1}{2A}Var(X)$, dove $\frac{1}{2A}Var(X)$ è il minimo caricamento di sicurezza per stipulare il contratto. Esso dipende da: Var(X) cioè dall'indicazione di dispersione della distribuzione e quindi di rischiosità di X e da $\frac{1}{2A}$ cioè dall'avversione al rischio dell'assicuratore ($\frac{1}{A}$). Se tale caricamento è grande per l'assicurato, va da un altro assicuratore.

Oss. Le compagnie di assicurazioni differiscono per le r_a non per Var(X).

Per non perdere il cliente l'assicuratore può proporre di fare/chiedere P=E(X)+m con m<$\frac{1}{2A}Var(X)$ cioè per non perdere il contratto stipula un contratto portandosi in posizione non vantaggiosa (è esposto ad un rischio non gestionale) → cosa può fare? Cerca una copertura assicurativa → riassicurazione

(→ l'utilità + l'avversione al rischio ci consente di spiegare il fenomeno del comportamento delle assicurazioni)

Nb → ha rilevanza descrittiva più che operativa

PREMI ASISCURATIVI NEI RAMI DANNI

Composizione del premio

Il premio si compone di:

Premio equo E(X) + Caricamento di sicurezza + Caricamento per spese + Tasse

Componente che consente in termini attesi di coprire la perdita		Nome che deriva dall'uso del modello di utilità. Ma non è l'unica ragione che spiega il perché del caricamento di sicurezza; ad esempio c'è il modello basato sulla probabilità di andare in rovina (+ antico) →fa derivare dall'esigenza di controllo della rovina, l'esigenza di aver un caricamento di sicurezza		Tramite esso l'assicuratore trasferisce all'assicurato l'onere della copertura di certe spese	Date all'assicuratore che poi le versa agli uffici delle imposte

Premio equo E(X) + Caricamento di sicurezza = *Premio puro* (*premio netto*) P

Premio equo E(X) + Caricamento di sicurezza + Caricamento per spese = *Premio di tariffa* (*commerciale*\ *caricato*) P^T .

C'è poi una componente di profitto, in quanto quella di sicurezza è solo per il rischio → spesso implicita nel caricamento di sicurezza

CARICAMENTO PER SPESE

Quali sono le categorie di spese coperte dal premio?

A) Spese di acquisizione
   I. Provvigioni legate alle acquisizioni dei contratti riconosciute agli intermediari (a chi procaccia l'affare: banche, agenti,..)
   II. Spese di emissione polizza
   III. Altre spese (pubblicità,..)

   ➔ $\alpha' P^T$

B) Spese di gestione:
   Spese ricorrenti, emergono durante la durata del contratto → solitamente non direttamente imputabili
   I. Uffici
   II. Periti
   III. Acqua, luce, gas
   IV. Affitto

   ➔ $\alpha'' P^T$

C) Spese di liquidazione dei sinistri
   I. Sinistri in cui le responsabilità non sono facilmente attribuibili
   II. Accordo del risarcimento tramite perito (a volte si ricorre anche al tribunale)

➔ βP^T

3. Spese di acquisizione + spese di gestione: $\alpha' P^T + \alpha'' P^T = \alpha P^T$

Oss. Il caricamento per spese è il 30-40% del P^T (premio di tariffa) in quanto hanno forte influenza le spese C).

Come viene valutato il caricamento per spese?

Viene valutata un'aliquota α' che viene applicata al P^T per le spese di acquisizione, α'' per le spese di B) e β per quelle di gestione C).

In conclusione:

$$P^T = P + (\alpha + \beta)P^T = \left(\frac{1}{1 - \alpha - \beta}\right)P$$

Come valutato α e β? (tipologia spese in termini attesi)

Li valuto in modo che mi consentano di coprire le spese.

I valori di α e β dipendono da:

1. Ramo assicurativo
2. Dal volume di affari
3. Dalle condizioni di mercato

Oss. P premio puro → non si può "variare" troppo

α e β → gioco di concorrenze

PREMIO PURO P (nelle assicurazioni danni)

X prestazione dell'assicuratore

$F_X(x)$ valutazione probabilistica → valutazione che introduce l'effettiva aspettativa dell'assicurato del rischio

Dato E(X)

Traduco una valutazione prudenziale, che non rappresenta la realistica valutazione: $F_X^*(x) \rightarrow E^*(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X^*(x)$ t.c. $E^*(X) > E(X)$ introduco cioè una valutazione rispetto la quale l'assicuratore calcola $P = E^*(X)$, il premio è solo formalmente equo, cioè equo rispetto a $F_X^*(x)$

→$\mathrm{G = P - X}$ $\qquad \mathrm{E(G) = P - E(X)} = E^*(X) - E(X) > 0$ garantisce un guadagno atteso positivo.

Si deve calcolare il premio P attraverso i principi di calcolo del premio

Dato X → "regola/formula" che mi dice quant'è il premio puro/netto $\pi(X)$

Oss. F_X: molti principi sono tali che $\mathrm{X} =^d \mathrm{Y}$ → $\pi(X) = \pi(Y)$

PRINCIPI DI CALCOLO DEL PREMIO

Sia $\aleph$ un insieme di "rischi" (numeri aleatori che rappresentano le prestazioni dell'assicuratore), i principi sono dei funzionali $\pi(\,): \aleph \rightarrow R$ che associano $X \rightarrow \pi(X)$

1) Principio della speranza matematica
   $\pi(X) = E(X) + \alpha E(X) = E(X)(1+\alpha)\ \alpha > 0$
   Premio associato = premio puro equo + caricamento di sicurezza proporzionale alla speranza matematica
   A fronte di X bisogna valutare E(X) e scegliere il parametro $\alpha > 0$
   Oss. Tale principio è molto usato perché semplice
   Oss. Dal pdv della regola di caricamento di sicurezza il principio ci dice che dati due rischi diversi, con distribuzioni diverse ma con valori attesi uguali → si assegna lo stesso premio perché con questo principio ho α fissato.
   Per α fissato, $(\,): \aleph \rightarrow R,\ che\ in\ questo\ caso$ è $\pi(\,) = E(\quad) + \alpha E(\quad)$ quindi può capitare che ∃ X,Y | E(X) = E(Y) → $\pi(X) = \pi(Y)$
   Non si tiene conto, a parità di valore atteso, della rischiosità.

2) Principio della varianza
   $\pi(X) = E(X) + \beta Var(X), \beta > 0$
   Dal pdv delle valutazioni, devo valutare: E(X), Var(X), fissare il parametro di caricamento β
   Oss. È molto usato anche questo.
   Rispetto al primo la varianza misura la dispersione (→ il rischio) quindi il caricamento di sicurezza tiene conto della rischiosità.

3) Principio dello scarto quadratico medio
   $\pi(X) = E(X) + \gamma\delta(X)$ con $\gamma > 0$ e $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$
   Dal pdv della valutazione: E(X), $\sigma(X) \leftrightarrow Var(X)$, assegnare γ
   Lo scarto è anche indicatore di dispersione ma questo principio è preferito al secondo perché E(X), come dimensione è un importo mentre la varianza è il quadrato di un importo
   →$\sqrt{Var(X)}$ è più facilmente interpretabile perché ha dimensione = importo, cioè $\sigma(X) ed\ E(X)$ sono dimensionalmente omogenei

4) Principio dell'utilità nulla
   Sia u( ) funzione di utilità del guadagno dell'assicuratore A, il premio è quel valore t.c.:
   $E[u(\pi(X) - X)] = u(0)$ utilità attesa del guadagno è nullo. È il premio che rende per l'assicuratore indifferente stipulare o no il contratto, cioè:
   $\pi(X)$ | $\pi(X) - X \sim_A 0$
   Dal pdv della valutazione devo conoscere:
   1. F_X (devo conoscere tutta la distribuzione)
   2. u( )specificare la funzione di utilità dell' assicuratore

   Oss. $\pi(X)$ è definito implicitamente dall'equazione, quindi posso avere: 0,1, o più soluzioni

   →in pratica però c'è un'unica soluzione ammissibile

1. Caso particolare

   Se la funzione di utilità è $u(X) = A(1 - e^{-\frac{x}{A}})$, $\pi(X) = A \log E[e^{\frac{x}{A}}]$ in questo caso si parla di *principio esponenziale*

2. Caso particolare

   $u(X) = X - \frac{1}{2A}X^2 \;\; X \leq A$ funzione di utilità quadratica del decisore.

   Quando ho introdotto l'utilità quadratica ho visto che il valore di A è | gli importi devono essere minori di A (livello di saturazione) quini è ragionevole che: $X, \pi(X), X - \pi(X) << A$, sono cioè importi che si trovano nella zona in cui l'assicuratore ha interesse nella valutazione.

   Ora, per semplicità scrivo $\pi(X) = P$

   $E[u(P - X)] = u(0)$

$$\mathrm{E}\left[(\mathrm{P} - \mathrm{X}) - \frac{1}{2A}(P - X)^2\right]$$

$$\leftrightarrow \mathrm{E}\left[(\mathrm{P} - \mathrm{X}) - \frac{1}{2A}(P^2 + X^2 - 2PX)\right] = 0$$

$$\leftrightarrow \mathrm{P} - \mathrm{E(X)} - \frac{1}{2A}(P^2 + E(X^2) - 2PE(X)) = 0$$

$$\leftrightarrow -2A\mathrm{P} + 2\mathrm{AE(X)} + \mathrm{P}^2 + E(X^2) - 2PE(X) = 0$$

$$\leftrightarrow \mathrm{P}^2 - 2\mathrm{P}[\mathrm{A} + E(X)] + 2\mathrm{AE(X)} + E(X^2) = 0$$

$$P_{1,2} = E(X) + A \mp \sqrt{(E(X) + A)^2 - [2AE(X) + E(X^2)]}$$

$$= E(X) + A \mp \sqrt{E(X)^2 + A^2 + 2AE(X) - E(X^2) - 2AE(X)}$$

$$= E(X) + A \mp \sqrt{E(X)^2 + A^2 + 2AE(X) - E(X^2) - 2AE(X)}$$

$$= E(X) + A \mp \sqrt{A^2 + E(X)^2 - E(X^2)} = E(X) + A \mp \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}}$$

Studio il segno del discriminante ma per l'osservazione al pt 2, ho che $0 \leq X < A$ posso elevare al quadrato perché sono numeri positivi e conservo la disuguaglianza $X<A \rightarrow X^2<A^2$ e per monotonia della speranza matematica: $E(X^2)< A^2 = E(A^2)$ cioè $E(X^2)$ è minore di tutte le determinazioni → anche dei numeri maggiori delle determinazioni. A maggior ragione : $E(X^2) - E(X)^2 < \mathrm{E(X^2)} < A^2$ e quindi $E(X^2) - E(X)^2 < A^2$ con $E(X^2)$ numero positivo, cioè ragionevolmente $Var(X) < A^2$

→ $0 < A^2 - Var(X)$ → è positivo

→ la nostra equazione ha due soluzioni: $P_{1,2} = E(X) + A \mp \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}}$ una negativa e una positiva.

Oss. Ma io ne vorrei un'unica: P_2 mi dà un premio più grande di A e quindi non è ammissibile .

$P_2>A$ →no!

$P_1<A$→ ok! Ammissibile;

il caricamento di sicurezza $\sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}}$ dipende da A e da Var(X)→ tiene conto della funzione rischio dell'assicurazione che della rischiosità.

→ $\pi(X) = E(X) + A - \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}}$ ma questa quantità è < A?

$\pi(X) < A$?

$Rielaboro\ la\ tesi$:

$\leftrightarrow E(X) + A - \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}} < A$

$\leftrightarrow E(X) - \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}} < 0$

$\leftrightarrow E(X) < \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}}$

Lo verifico ripartendo dai calcoli di qualche riga fa: $X < A \leftrightarrow X^2 < A^2 \leftrightarrow E(X^2) < E(A^2)$

$\leftrightarrow E(X)^2 - E(X)^2 + E(X^2) < A^2$ ossia $Var(X) + E(X)^2 < A^2$ ossia

$E(X)^2 < A^2 - Var(X)$, isolando E(X), $\mathrm{E(X)} < \sqrt{A^2 - Var(X)}$.

$$\pi(X) = E(X) + A - \sqrt{A^2 - \mathrm{Var(X)}} = E(X) + A - \sqrt{A^2\left(1 - \frac{\mathrm{Var(X)}}{A^2}\right)} =$$

$$E(X) + A\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{Var(X)}}{A^2}}\right]$$

Oss. Se considero $f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$, se calcolo l'approssimane lineare ho:

$f(x) \cong f(0) + f'(0)x$ con $f(0) = 1$, $f'(0) = -\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}|_{x=0} = -\frac{1}{2}$ → $f(x) \cong 1 - \frac{1}{2}x$

$$\pi(X) = E(X) + A\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\mathrm{Var(X)}}{A^2}}\right]$$

$\pi(X) \cong E(X) + A\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Var(X)}}{A^2}\right] \cong E(X) + A\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Var(X)}}{A^2} + A[1-1] \cong E(X) + \frac{\mathrm{Var(X)}}{2\mathrm{A}}$ con $\frac{\mathrm{Var(X)}}{2\mathrm{A}}$ caricamento di sicurezza. Più il contratto è rischioso è più è avverso al rischio l'assicuratore → più alto è il premio. Giustificazione del calcolo del premio attraverso la varianza

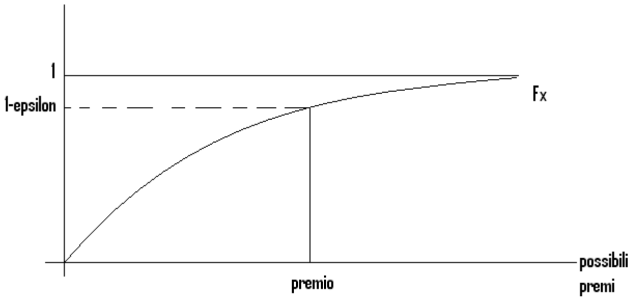
Oss. Si ha $\beta = \frac{1}{2A} = u(0)$

Nell'ambito dell'utilità quadratica, il principio 4 si avvicina al principio della varianza.

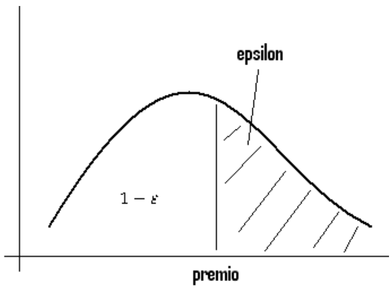
5) Principio del percentile:
Supponiamo che X sia il risarcimento totale:

X, P premio, G=P-X $\gtreqless$ 0, guadagno dell'assicuratore in relazione ad un particolare contratto.

Oss. G è aleatorio perché X lo è
Le possibili determinazioni per il guadagno sono positive, o negative, o uguali a 0
Oss. P-X < 0 (determinazione negativa) non è eliminabile come possibilità logica perché se $\Pr(\mathrm{P}-\mathrm{X}<0)\leq\varepsilon \leftrightarrow 0<\varepsilon<1$ "piccolo": l'assicuratore è in grado in questo caso di gestire il contatto.
$\Pr(\mathrm{P}-\mathrm{X}<0)\leq\varepsilon \leftrightarrow \Pr(\mathrm{P}<\mathrm{X})\leq\varepsilon \leftrightarrow \Pr(\mathrm{X}>\mathrm{P})\leq\varepsilon \leftrightarrow 1-\Pr(\mathrm{X}\leq\mathrm{P})<\varepsilon$
$\leftrightarrow \Pr(\mathrm{X}\leq\mathrm{P})>1-\varepsilon$, valore in P della funzione di ripartizione del numero aleatorio X, $\leftrightarrow \mathrm{F}_X(\mathrm{P})>1-\varepsilon$.
Scopro cioè che la probabilità di andare in perdita con questo premio P è bassa ($<\varepsilon$) $\leftrightarrow \mathrm{F}_X(\mathrm{P})\geq 1-\varepsilon$. Scelgo il più piccolo P in modo da avere la probabilità di andare in perdita.



Oss. I percentili dividono la distribuzione in cento parti uguali. Se p è un numero tra 0 e 100, il percentile di ordine p è il dato che delimita il premio p% dei rimanenti dati
$\pi(X)=\inf\{P: F_X(P)\geq 1-\varepsilon\}$→si determina il premio
Oss. È detto percentile perché $\pi(X)$ è il percentile di ordine $1-\varepsilon$ di $F_X(x)$.
In termini di densità:



$\pi(X)$ è il valore che lascia a sinistra un'area pari a$1-\varepsilon$ e a destra ε

SCELTA DEL PRINCIPIO

Come sceglie l'assicuratore il principio da utilizzare? Sulla base di che cosa?

Dipende da più fattori:

1. Guarda cosa gli chiedono di valutare i vari principi:
   a. E(X), Var(X), $F_X(x)$: valutazioni ottenute con processo statistico a partire dai dati
2. Dipende dai parametri che entrano in gioco e che devo scegliere
   a. α,β,γ coeff di caricamento; $0<\varepsilon<1$; solo per il principio dell'utilità nulla devo calcolarmi anche u( )
3. Proprietà soddisfatte

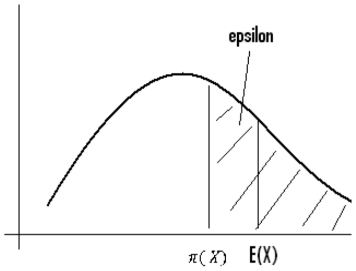
Oss. Valutare $F_X(x)$ richiede più sforzi dei 2 momenti. Inoltre valutare $F_X(x)$ sulla base dei dati è difficile specialmente se voglio valutare la coda di $F_X(x)$. In particolare il principio del percentile richiede una buona stima della coda → dipende da quanti dati ha l'assicuratore, dalle caratteristiche dei rischi, dal tipo di portafoglio, ecc

PROPRIETA' AUSPICABILI PER UN PRINCIPIO DI CALCOLO DEL PREMIO

Oss. Non è detto che lo stesso principio le soddisfi tutte

Dato il funzionale $\pi(\ ): \aleph \rightarrow R$ ho le seguenti proprietà:

1) $\pi(X) > E(X)\ \forall X \in \aleph$.
   Cioè voglio che il principio mi introduca un caricamento di sicurezza
   Oss. Per il principio dell'utilità nulla devo scegliere una funzione di utilità concava
   E per il principio dei percentili?
   X, ε potrebbe essere che si abbia scelto ε |funzione sia

   Di solito succede per un ε non piccolo, il principio del percentile di per sé non garantisce un caricamento di sicurezza , ma se ε è piccolo di solito funziona.

2) Se X ≤ M con M certo → $\pi(X) \leq M$ **NO-RIPOFF**
   Ma se il risarcimento è minore di M chi paga un premio più grande di M?

3) $\pi(X + C) = \pi(X) + C$ se C è certo **TRASLATIVITA'**
   Se per capire X io chiedo $\pi(X)$. Se X diventa X+C → $\pi(\ X) \rightarrow \ \pi(\ X) + C$
   X→X+C $\pi(X)$→ $\pi(X) + C$

4) $\pi(aX) = a\pi(X)$ a certo e a>0 **OMOGENENITA' POSITIVA**
   Questa proprietà è stata introdotta per legarsi a problemi di cambio dell'unità monetaria. Se X è misurato in €, a fronte di X chiedo $\pi(X)$€ se poi → cambio l'importo in centesimi di € cioè €/100
   ho: 100€/100 → $\pi(X)$ allora 100 $\pi(X)$€/100
   Analogamente se ho un tasso di cambio in $
   aX $ → a $\pi(X)$ $
   Oss. Proprietà pericolosa in certi casi: es. X → $\pi(X)$ e ad aX→a $\pi(X)$ sempre? No! Potrebbe cambiare la natura del rischio, cioè la rischiosità, quindi potremmo non essere più disponibili a dare "a $\pi(X)$"

5) $\pi(X_1 + X_2) \leq \pi(X_1) + \pi(X_2)$ **PROPRIETA' DI SUBADDITIVITA'**
   Il premio associato a $X_1 + X_2$ è minore della somma dei premi di $X_1 e\ X_2$
   Logica che sta dietro: vediamo il rischio X come somma di due rischi X= $X_1 + X_2$ →
   $\pi(X_1 + X_2) \leq \pi(X_1) + \pi(X_2)$ ciò nasce dal fatto che la diversificazione riduce il rischio in $\pi(X)$ infatti potrebbero esserci degli effetti di compensazione.

6) $\pi(X_1+X_2)=\pi(X_1)+\pi(X_2)$ **PROPRIETA' DI ADDITIVITA'**
$\forall\, X_1, X_2$ stocasticamente indipendenti
Cioè se i rischi sono indipendenti non c'è diversificazione

Vediamo come lavorano le proprietà 1) e 2) nei primi 3 principi:

1) Principio della speranza matematica
$\pi(X)=E(X)+\alpha E(X)=E(X)(1+\alpha)\ \alpha>0$
Si ha $\pi(X_1+X_2)=(1+\alpha)E(X_1+X_2)=(1+\alpha)[E(X_1)+E(X_2)]=$
$(1+\alpha)E(X_1)+(1+\alpha)E(X_2)=\ \pi(X_1)+\pi(X_2)\ \forall\, X_1,X_2$
→soddisfa la 5 e la 6

2) Principio della varianza
$\pi(X)=E(X)+\beta Var(X), \beta$ >0
Si ha: $\pi(\,X_1+X_2)=E(X_1+X_2)+\beta Var(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)+\beta(Var(X_1)+Var(X_1))+$
$2Cov(X_1,X_2)$ distinguo più casi: se i rischi sono correlati negativamente non correlati =0 o <0; se i rischi sono correlati positivamente >0
La proprietà 5) è vera solo quando i rischi sono correlati negativamente→non la soddisfa in generale
Soddisfa anche la proprietà 6) perché $Cov(X_1,X_2)=0$ se X_1,X_2 sono stocasticamente indipendenti

3) Principio dello scarto quadratico medio
$\pi(X)=E(X)+\gamma\delta(X)$ con $\gamma>0$ e $\delta(X)=\sqrt{Var(X)}$
Si ha $\pi(X_1+X_2)=E(X_1+X_2)+\gamma\delta(\,X_1+X_2)=\ E(X_1)+E(X_2)+\gamma\delta(X_1+X_2)$

Confrontiamo $\delta(X_1+X_2)$ con $\delta(X_1)$ e $\delta(X_2)$: per facilitarmi i conti confronto i rispettivi quadrati
$\delta^2(X_1+X_2)=Var(X_1)+Var(X_2)+2Cov(X_1,X_2))=Var(X_1)+Var(X_2)+$
$2\rho(X_1,X_2)\ \delta(X_1)\ \delta(X_2)$, con $\rho(X_1,X_2)$ il coefficiente di correlazione lineare $\rho(X_1,X_2)$ =
$\frac{Cov(X_1,X_2)}{\delta(X_1)\ \delta(X_2)}\in[0,1]$
$[\delta(X_1)+\delta(X_2)]^2=\delta^2(X_1)+\delta^2(X_2)+2\ \delta(X_1)\ \delta(X_2)$→ $\delta^2(X_1+X_2)\le[\delta(X_1)+\delta(X_2)]^2$ →
$\delta(X_1+X_2)\le\delta(X_1)+\delta(X_2)$. Impossibile!
La 5) sub-additività è verificata → $\pi(X_1+X_2)\le\ \pi(X_1)+\pi(X_2)$
L'additività 6) non è verificata, in quanto se sono indipendenti $\rho=0$ e non 1 come vorrei! → è solo < e non =

Oss. Nella normativa Solvency se vado a ragionare con le marginali, cioè se calcolo il capitale di rischio basandomi sullo scarto quadratico medio tenendo conto della distribuzione congiunta, questa è $\le$ della somma dei capitali di rischio calcolati sui due portafogli.

DESCRIZIONE DELLA PRESTAZIONE DELL'ASSICURATORE IN UN FISSATO CONTRATTO DEL RAMO DANNI

Si fissi un contratto, cioè una polizza ed un periodo di copertura, ad esempio un anno (in realtà però nella pratica per periodi minori si calcolano comunque il premio annuo e poi lo si fraziona, se serve)

Sia X il *risarcimento* (o *indennizzo*) totale aleatorio che l'assicurato dovrà pagare per i sinistri che colpiscono il contratto nel periodo di copertura (cioè in relazione al contratto).

X dipende da N numero di sinistri e dall'entità dei risarcimenti a fronte di ciascun sinistro.

Oss. Per descrivere un numero aleatorio devo introdurre sempre una funzione aleatoria. Un numero aleatorio formalmente è un'applicazione definita su una partizione P dell'evento certo a valori in R:
X:P→R

- **N**: numero aleatorio di sinistri che colpiscono il contratto nel periodo di copertura. Le determinazioni possibili sono 0,1,2,3,.. (molteplicità del sinistro). A meno che non sia stato scritto è difficile stimare una determinazione massima.
  Oss. Dal pdv realistico N è limitato, ma spesso nei modelli sono ipotizzate come possibili tutte le sue determinazioni appartenenti ad N (compreso lo 0)
  Considero dunque in modo naturale la partizione $P_n = \{\omega_n, \text{con n} \in \text{N}\}$ partizione dell'evento certo:
  $\begin{cases} \omega_i \wedge \omega_j = \emptyset \\ \vee_{i=0}^{\infty} \omega_i = \Omega \end{cases}$ $\forall i, j \; con \; i \neq j$, con ω_n={"il contratto è colpito da n sinistri}
  N(): P_N →N C R
  ω_n → n
- $\boldsymbol{Z_i}$: importo aleatorio del danno arrecato dall'i-esimo sinistro. Andiamo ora a descrivere bene il problema: io ho un contratto che inizia in 0 e non so se l'i-esimo sinistro si verifica o no!
  In questo caso la partizione dell'evento certo è P_i.
  $Z_i : P_i \to R$ In questa particolare partizione devo considerare l'eventualità che il contratto sia colpito da un numero di sinistri minore di i !
  $P_i = \left\{\omega_i^{(0)}, \omega_i^{(z)} con \; z \epsilon J\right\}$ dove $\omega_i^{(0)}$= "l'i-esimo sinistro non si verifica" mentre $\omega_i^{(z)}$= "l'i-esimo sinistro si verifica e l'importo dovuto è z" dove zϵJCR. J riporta le possibili entità dell'importo di danno per un sinistro che si verifica.
  Oss. P_i è davvero partizione dell'evento certo, infatti: $\Omega_i^{(0)} \wedge \Omega_i^{(500)}$=∅ e sono esaustivi
  L'applicazione sarà definita da:
  $Z_i(\,)$=$\begin{cases} \omega_i^{(0)} \to 0 \\ \omega_i^{(z)} \to z \end{cases}$ $\forall z \; \epsilon \; J$
  Per nostra convenzione: J=[0,+∞], ma realisticamente gli importi di danno che si possono verificare costituiscono un insieme limitato e discreto. Nei modelli però, per semplicità, lo prendiamo come continuo nel modo detto pocanzi.
  Oss. Ricordando (P, A(P), p) di solito introduco un ambiente che considera tutto. Qui invece intanto prendo un ambiente che mi descriva un solo numero aleatorio. Costruisco in maniera dinamica, amplio la valutazione man mano che mi serve. In teoria dovrei introdurre un ambiente che mi descriva tutto quello che può effettivamente occorrere, in pratica invece il discorso è di tipo dinamico.
  N( ): P_N →N
  $Z_i : P_i \to R$

Se le voglio considerare congiuntamente devo considerare un ambiente che le descriva congiuntamente e quindi devo introdurre una partizione P più fine di entrambe. Ad esempio la *partizione prodotto*, oppure una più fine ancora. Dovrò perciò prendere in esame:

$P_N, P_1, P_2, \ldots$ → P che ha come evento elementare quello legato al prodotto logico delle cose in

$N, z_1, z_2, \ldots$ gioco. Es. "il contratto è colpito ad un sx e l'importo del danno è 100"

$Oss.\ l'\text{evento}\ (Z_i = 0)$ = $\omega_i^{(0)}$= (N<i): essi sono eventi descritti mediante diverse frasi logiche che però risultato equivalenti nello stato di informazione in cui mi ritrovo!

- $\boldsymbol{Y_i}$: importo aleatorio del *risarcimento* (o *indennizzo*) per l'i-esimo sinistro. Introduco un nuovo simbolo perché in alcuni contratti il risarcimento è funzione del danno e non "integralmente".
  $Y_i = \varphi(Z_i)$ con $\varphi()$ *funzione di risarcimento*
  Oss. In realtà ho introdotto un'altra ipotesi: $\varphi()$ non dipende da i, cioè $\varphi()$ non è definito a seconda del tipo di risarcimento: la regola di risarcimento è la stessa per ogni tipo di sinistro. $\varphi()$ definisce le diverse forme assicurative ed esprime le condizioni contrattuali di risarcimento.

Il risarcimento X = $\begin{cases} 0 & se\ N = 0 \\ Y_1 + \ldots + Y_N & se\ N > 0 \end{cases}$

Oppure in maniera più compatta $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, con la convenzione che X=0 se N=0 e $Y_i = \varphi(Z_i)$

X si presenta come una funzione di una successione di numeri aleatori. X è funzione di $\{X, Z_1, Z_2, \ldots\}$ ossia, è lo stesso, funzione di $\{X, Y_1, Y_2, \ldots\}$ cioè di un *processo stocastico*.

La valutazione di X passa attraverso la valutazione di un processo stocastico. Dobbiamo quindi dare le ipotesi probabilistiche:

Determinazioni/storie possibili	valore associato al processo
{0;0,0,0,…} successione nulla	X=0
{1;1500,0,0,…}	X=1500
{2;700,1000,0,…}	X=1700

Oss. Se $\varphi(Z) = Z$ è la funzione identica, il danno coincide col risarcimento.

FORME ASSICURATIVE (funzione di risarcimento)

Per evitare di portarci dietro l'indice i, fissiamo un solo contratto ed un solo sinistro.

Siano:

Z= importo aleatorio del danno

Y= importo aleatorio del risarcimento Y= φ (Z)

Oss. L'assicurazione che stipuliamo non ha mai l'obiettivo di ottenere dei guadagni, ma è solo una copertura → vale sempre il principio di non arricchimento: $X \leq Y$.

ASSICURAZIONE A COPERTURA INTEGRALE

Tale tipo di assicurazione viene stipulata in presenza di beni; devo stabilire il valore del bene.

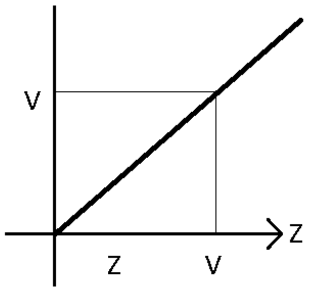
Usata nelle assicurazioni di beni dove è oggettivamente (nel senso che assicurato e assicuratore possono mettersi d'accordo) individuabile a priori il valore del bene assicurato.

Esempio: questo tipo di assicurazioni non avviene nelle assicurazioni RC, di responsabilità civile, poiché non è possibile oggi stimare il valore del bene (animale, persona, ecc)

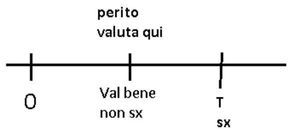
Sia V il valore del bene, esso viene indicato in polizza ed è detto *valore assicurato* o *somma assicurata* e rappresenta la massima determinazione possibile del danno arrecato da un sinistro.

Oss. V è diverso dalla massima determinazione del risarcimento totale (es R risarcimento incendio piccolo, T risarcimento incendio totale → V>T+R)

In questa forma Y=Z cioè abbiamo la funzione identica come funzione risarcitoria.



Esempio: io e l'assicuratore concordiamo un valore del bene (l'assicuratore si fida, non va a verificare perché è un dispendio farlo). Al verificarsi del sinistro si fa la denuncia. Il perito verifica l'entità del danno e verifica se il valore dichiarato in polizza è corretto sulla base di una valutazione del bene a sinistro non avvenuto, all'epoca del verificarsi del sinistro.

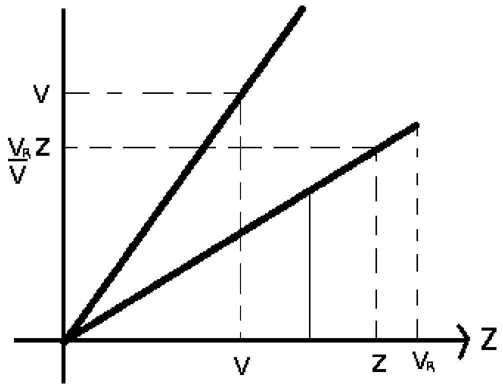


V_r= valore realistico del bene non sinistrato in T, istante in cui si verifica il sinistro.

Ho quindi diversi casi:

$$se\ V_r \leq V\ allora \quad Y = Z$$
$$se\ V_r > V\ allora \quad Y = \frac{V}{V_r} Z$$

La seconda formula non risarcisce integralmente → è detta *regola proporzionale*. Si parla *di sottoassicurazione*: il perito verifica che il valore delle cose non sinistrate è > a quello dichiarato al momento della stipula.



La regola della **sottoassicurazione** è ragionevole perché il premio è legato al valore V:

V→P_V

V_r→P_{V_r}

$se\ V_r > V$→P_{V_r}>P_V (P_{V_r} in questo caso il costo medio del sinistro è più elevato)

L'assicurato ha quindi pagato un premio più piccolo di quello che doveva pagare.

Ma perché proprio $\frac{V}{V_r}$?

- Per semplicità
- P_V= τ V per il modo di calcolo del premio chi basa su "tasso di prezzo"
- $P_V = \tau V$
- $P_{V_r} = \tau V_r$ → stesso rapporto fra diminuzione di premio e di risarcimento

$$\frac{P_V}{P_{V_r}} = \frac{V}{V_r} = \frac{V}{Z}$$

Oss.

$V_r < V$ es. polizza contro il furto dell'auto dove il prezzo dell'auto cade nel giro di poco tempo.

$V_r > V$ sottoassicurazione

- Può derivare da:
  - Comportamento/modo doloso
  - Comportamento/ modo non doloso: eventualmente l'assicurato deve aggiornare il valore del bene → per evitare questo in alcune assicurazioni sono presenti: deroghe e indicizzazioni del valore

MASSIMO PROBABILE (MPL, maximum probable loss)

In alcuni tipi di copertura si assegna probabilità nulla a valori possibili del danno.

Es. comprensorio industriale con più edifici

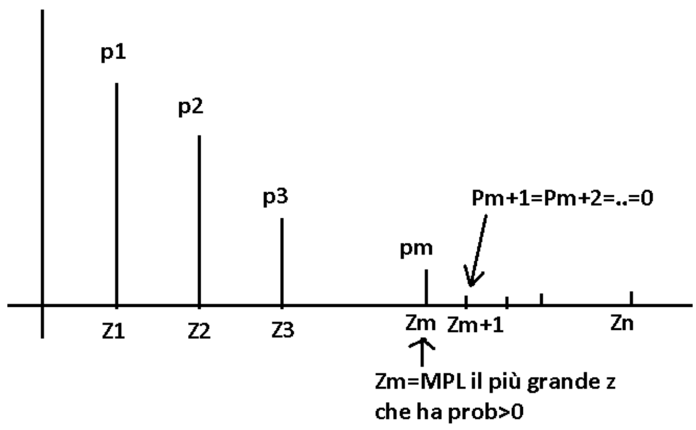
Valore bene= valore complessivo edifici → assicurazione contro gli incendi

Se ci sono buone norme, tempestivi interventi, ecc. a fronte della possibilità logica che vada in fumo tutto, assegno probabilità nulla → logicamente Pr=0 ad alcuni casi

Es. Z $z_1, \dots, z_n$

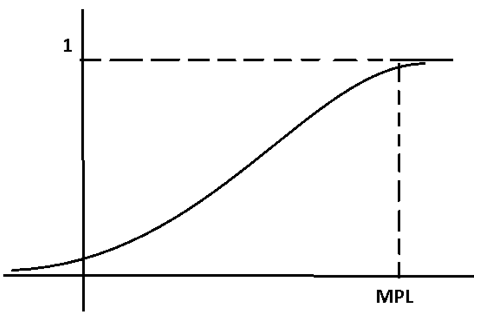
$p_1, \dots, p_n$

È definito MPL = $\max_{Z_i}\{Z_i | \Pr(Z = z_i) > 0\}$



Tale definizione però va bene quando ho un numero aleatorio discreto se invece è continuo ho $\Pr(Z=z_i)=0$ → non va bene.

Sia $F_z(z)$ la funzione di ripartizione del danno si definisce MPL=inf { z|$F_z(z)$=1}. Se è impossibile non c'è MPL, cioè è infinito quindi suppongo inf { z|$F_z(z)$=1}≠ ∅. Quindi MPL= sup { z|$F_z(z)$<1}. Tale uguaglianza vale perché queste classi sono separate e contigue, ed $F_Z(z)$ è monotòna crescente a valori tra 0 e 1.

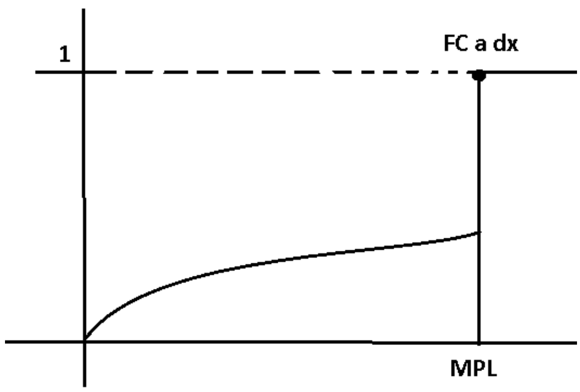


Oss. Inf lo posso sostituire con min perché: $\lim_{z \to MPL^+} F_Z(z) = F_Z(MPL)$ cioè è uguale al valore della funzione in quel punto. FdR è continua a destra. Si osserva che è equivalente a fare il limite destro sulla restrizione $F_Z(z)|_{z>MPL}$ ma se z>MPL si ha $F_Z(z)|_{z>MPL} \to 1$ → è = a 1. Allora per il teorema di unicità del limite $F_Z(MPL) = 1$. Infine MPL = min{z|$F_Z(z)$=1}.

→ MPL= min{ z|$F_z(z)$=1}

C.v.d.

Oss. Non posso sostituire invece il sup con il max!



MPL è una nozione associata alla valutazione probabilistica → non è "oggettiva" ma è insita in chi fa la valutazione

Oss. Se z>MPL allora Pr(Z>0) = 0

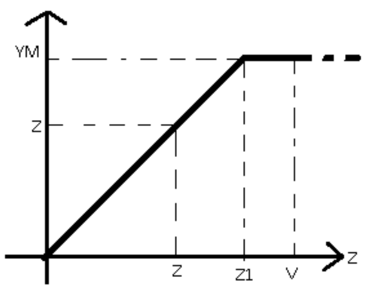
ASSICURAZIONE A PRIMO RISCHIO RELATIVO

Usata in assicurazioni di beni quando è individuabile a priori oggettivamente un valore del bene

Sia V il valore (valore assicurato), indicato in polizza che rappresenta la massima determinazione possibile del danno per un sinistro.

Viene però fissato un valore M<V che mi dà una limitazione di copertura Y=$\begin{cases} Z & Z \leq M \\ M & Z > M \end{cases} = \min(M, Z)$

vale quindi M se il valore del danno supera M.



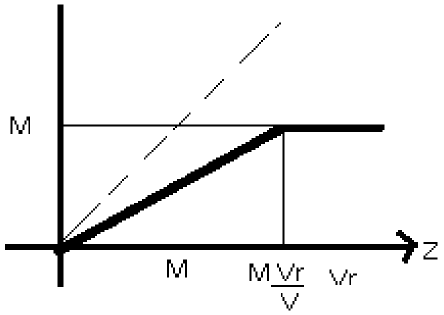
Def. M è anche chiamato *massimale* (di copertura). Esso potrebbe essere anche l'MPL in modo che si abbia copertura integrale fino a MPL)

Anche in questo caso viene fatto l'accertamento dopo il momento del sinistro tramite un perito:

$$Y = \begin{cases} V_R \leq V & Y = \min(Z, M) \\ V_R > V & Y = \begin{cases} \frac{V}{V_R} Z & se \ \frac{V}{V_R} Z \leq M \\ M & se \ \frac{V}{V_R} > M \end{cases} \end{cases}$$

↑

È di tipo proporzionale ma con soglia assicurativa pari a M.



ASSICURAZIONE A PRIMO RISCHIO ASSOLUTO

Non si fa riferimento in polizza ad un valore del bene assicurato, quindi è un tipo di copertura sia nei casi in cui è individuabile il valore sia in quelli dove questo non è possibile.

È una tipica copertura RC

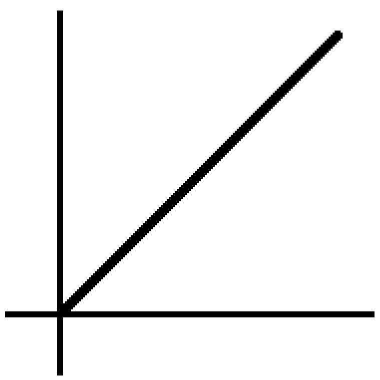
In questo caso viene fissato un valore M (con significato di limitazione di copertura, M è il massimale) e il risarcimento è:

$$Y = \begin{cases} Z & se\ Z \leq M \\ M & se\ Z > M \end{cases} = \min(Z, M)$$

→ non applico la regola proporzionale. L'assicurazione a primo rischio assoluta è più cara, a parità di assicurazione.

ASSICURAZIONE A GARANZIA ILLIMITATA

RC Y=Z è indipendente dal danno



ASSICURAZIONI CON FRANCHIGIA (gruppo)

Fissato l'importo d detto *franchigia*. A fronte di danni di importi $\begin{cases} Z \leq d & assicuratore\ non\ interviene \\ Z > d & assicuratore\ interviene \end{cases}$

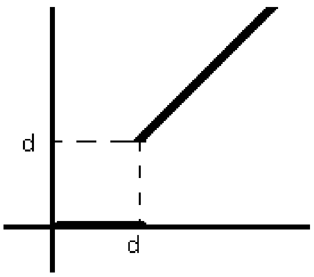
Ma come interviene? Si hanno diverse possibilità:

La 1 e la 2 sono le più diffuse.

1 FRANCHIGIA RELATIVA

$Y = \begin{cases} 0 & se\ Z \leq d \\ Z & se\ Z > d \end{cases}$ (risarcimento in forma integrale)

Rappresentazione geometrica in funzione del danno

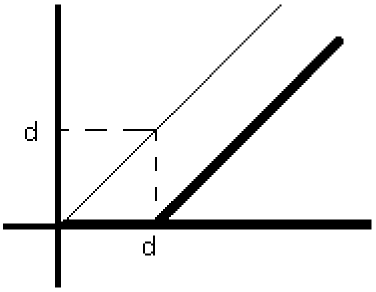


È anche possibile che vi sia un massimale: FRANCHIGIA RELATIVA CON MASSIMALE

$$Y = \begin{cases} 0 & Z \leq d \\ Z & d < Z \leq M \\ M & Z > M \end{cases}$$

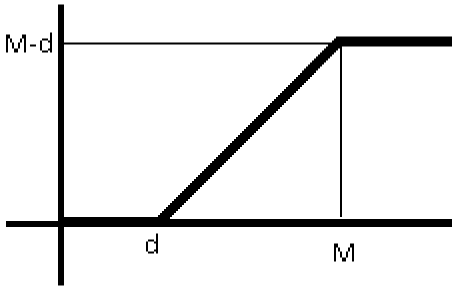
2 FRANCHIGIA ASSOLUTA

Risarcimento in funzione del danno $Y = \begin{cases} 0 & se\ Z \leq d \\ Z - d & se\ Z > d \end{cases} = \max(0, z - d)$



Anche qui ci può essere un massimale

$Y = \begin{cases} 0 & Z \leq d \\ Z - d & d < Z \leq M \\ M - d & Z > M \end{cases} = \min(M - d, \max(0, z - d))$ FRANCHIGIA ASSOLUTA CON MASSIMALE



Oss. In 1. Ho un salto di discontinuità → è più usata la 2.

Sono clausole di franchigia molto spesso presenti e mirano ai seguenti obiettivi:

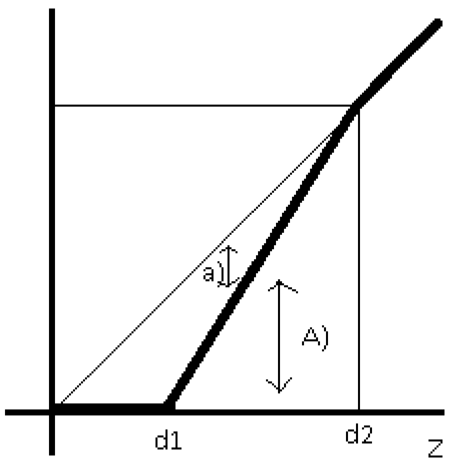
- che intervenga anche l'assicurato il quale, sperabilmente, attuerà operazioni di prevenzione (che implicitamente vanno anche a favore dell'assicuratore).
- L'assicuratore non interviene su piccoli danni/interventi

  → risparmia costi di gestione e amministrativi

  → vi è anche un risparmio per contraente tramite riduzione del premio

DISAPPEARING DEDUCTIBLE

Vengono fissati due importi $d_1<d_2$



È utile: l'assicuratore interviene integralmente solo per danni che possono minare la stabilità economica dell'assicurato.

$$Y = \begin{cases} 0 & Z \leq d_2 \\ \dfrac{d_2}{d_2 - d_1}(Z - d_2) & d_1 < Z \leq d_2 \\ Z & Z > d_2 \end{cases}$$

Questa funzione passa per $(d_1,0)$ e ha come coefficiente angolare $\frac{d_2}{d_2-d_1}$

Inoltre esistono franchigie di diverso tipo:

FRANCHIGIE DI TEMPO

Esempio: nel ramo malattia. Copertura diaria nel ricovero ospedaliero. Può esserci una franchigia d=3 giorni/7 giorni, cioè per i primi 3 giorni la diaria non viene pagata, poi riceve la diaria per i giorni che eccedono la franchigia

Oppure

FRANCHIGIE DEL GRADO DI INVALIDITA'

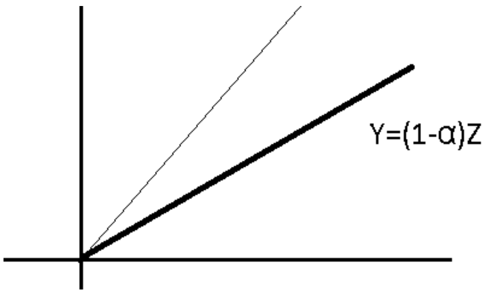
Esempio: nel ramo infortuni. Pagamento di un capitale in caso di invalidità permanente. Le invalidità fisiche sono misurate in gradi di invalidità, la franchigia d=3% ad esempio, significa che se l'infortunio provoca invalidità permanente con grado di invalidità <3% non viene pagato nulla!

ASSICURAZIONE CON SCOPERTO

$0<\alpha<1$ $\alpha * z \rightarrow$ (a) a carico dell'assicurato

$(1-\alpha)\, z \rightarrow$ (A) a carico dell'assicuratore

$\rightarrow Y=(1-\alpha)\, Z$



Esistono diverse polizze in particolare nelle coperture dove è importante coinvolgere l'assicurato.

Esempio:

- rimborso spese mediche (ciò invita la gente a non esagerare a ricorrere a controlli)

- casco

FRANCHIGIA IN PERCENTUALE DEL DANNO

Anche in questo caso viene fissata un'aliquota $0<\alpha<1$ $Y=(1-\alpha)Z$

Oss. Differisce dalla precedente dal pdv giuridico

NB le assicurazione con franchigia non sono uniche. Possono essere combinate fra loro dando origine ad altre.

VALUTAZIONE PROBABILISTICA DI X

Consideriamo i processi stocastici che "descrivono" X

$\{N,Y_1,Y_2,..\}$, $\{X,Z_1,Z_2,..\}$ e introduciamo delle ipotesi probabilistiche: ma su quale processo stocastico? Su $\{X,Z_1,Z_2,..\}$.

Ipotesi:

1) $\forall n > 0 \qquad Z_1|N = n,\ Z_2|N = n, \dots, Z_n|N = n$ i.i.d. indipendenti identicamente distribuiti
- Vediamo cosa vuol dire identici:
  In termini di funzione di ripartizione: $F_{Z_i|N=n}(z) = F_{Z_j|N=n}(z)\ \forall z,\ \ \forall 0 < i, j \leq n$
  In termini di probabilità: $\Pr(Z_i \leq z|N = n) = \Pr(Z_j \leq z|N = n)$
- Vediamo cosa vuol dire indipendenti:
  $(Z_i \leq z|N = n) =^d (Z_i \leq z|N = n \wedge H)$, H ci porta informazioni sugli altri importi di danno:
  $H = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z_j \in I_j)$
  cioè la valutazione probabilistica non cambia conoscendo una qualunque informazione sui danni diversi da Z_i.
2) la legge di ripartizione di $Z_{i_{i\leq n}}|N = n$ non dipende da n
- ha una legge di probabilità che non dipende da n
- Indico con $F_z(z)$ la funzione di ripartizione indipendente da i, n. La z a pedice indica che mi sto riferendo ad un importo di danno, nell'ipotesi che sia colpito da sinistri. È un simbolo compatto per dire funzione di ripartizione di un numero aleatorio $Z_i|N = n$ mettendo in evidenza che non dipende da i ed n.
- Altre notazioni sono: E(Z) speranza matematica di uno dei numeri aleatori $Z_i|N = n$ secondo la funzione di ripartizione $F_z(z)$. Simbolo per ricordarmi che stiamo parlando del danno. Var(Z) varianza. E(Z^k) momento k-esimo
- Oss. Quando fisso n perché considero Z_i fino a Z_n e non vado oltre? Perché se considerassi $Z_{n+1}|N = n$ per come ho definito gli eventi avrei che tali eventi sono certi e nulli
- Oss. Consideriamo
  a) $Z_{i_{i\leq n}}|N = n$ importo di danno dell'i-esimo sinistro nell' ipotesi che il contratto sia colpito da n sinistri
  b) $Z_i|N \geq i$ importo di danno nell'ipotesi che l'i-esimo danno si verifichi

  Che relazione c'è fra a) e b)? Sono eventi diversi, quindi numeri aleatori diversi.

RICHIAMO: PROPRIETA' DI DISINTEGRABILITA' DI PROBABILITA'E SPERANZA MATEMATICA (no dim)

Se devo calcolare la probabilità di un evento a volte è comodo "disintegrare" sulla partizione:

- $\Pr(\mathrm{E}) = \sum_n \Pr(\omega_n) \Pr(E|\omega_n)$ utile perché assegno la probabilità sulla partizione e la probabilità dell'evento E in ipotesi più specifiche, e poi ricompongo per Pr(E) tramite la mistura
- Pr(E|H)e una partizione di H, {H_1,H_2,..} con $H_i \wedge H_j = \emptyset$ e $\bigvee_n H_n = H$ (esaustivi)
  $\Pr(\mathrm{E|H}) = \sum_n \Pr(H_n|H) \Pr(E|H_n)$ ricorro a valutazioni di probabilità in più specifici stati di informazioni
- $\mathrm{E(X)} = \sum_n \Pr(\omega_n) \mathrm{E}(X|\omega_n)$ con P={$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$,..}
- $\mathrm{E(X|H)} = \sum_n \Pr(H_n|H) \mathrm{E}(X|H_n)$ con $H_i \wedge H_j = \emptyset$ e $\bigvee_n H_n = H$

Posso generalizzare ancora: a) e b)

Dato l'evento aleatorio Y e {Y=y, y}, con y finito-dimensionale

$\Pr(E)= \sum_y \Pr(Y=y)\Pr(E|Y=y)$

$E(X)= \sum_y \Pr(Y=y)\,E(X|Y=y)$

Da cui potrò scrivere:

$\Pr(E)= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr(E|Y=y)\, dFy(y)$

$E(X)= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y)\, dFy(y)$

Cioè si può valutare la probabilità di un evento o una speranza matematica in ipotesi più specifiche e poi raccoglierle.

Ritornando al discorso di prima:

$Z_i|N \geq i$, $Z_{i_{i\leq n}}|N=n$ fisso z (piccolo)

$F_{Z_i|N\geq i}(z) = \Pr(Z_i < z|N \geq i)$= l' evento $N \geq i$ lo posso esprimere con la seguente somma logica: $N \geq i$= $\bigvee_{n=i}^{\infty}(N=n)$ di eventi a due a due incompatibili, quindi uso la proprietà di disintegrabilità

$= \sum_{n=i}^{+\infty} \Pr(N=n|N\geq i)\Pr(Z_i<z|N=n)$ ma il secondo fattore è: $F_{Z_i|N\geq i}(z) = F_z(z)$, termine costante

$= F_z(z) \sum_{n=i}^{+\infty} \Pr(N=n|N\geq i)$ a 2 a 2 incompatibili

$=F_z(z)\, Pr(\bigvee_{n=i}^{\infty}(N=n|N\geq i))$ somma degli eventi $N=n$ condizionati $N \geq i$ dunque evento certo→ $\Pr(\Omega)=1$

$=F_z(z)$

Quindi $(Z_i|N \geq i)$ e $(Z_{i_{i\leq n}}|N=n)$ sono numeri aleatori diversi, ma con stessa funzione di ripartizione, cioè $(Z_{i_{i\leq n}}|N=n) =^d (Z_i|N\geq i)$ pari a $F_z(z)$

Allora posso interpretare $F_Z(z)$ come la funzione di ripartizione di un danno provocato dall'i-esimo sinistro nelle ipotesi che il sinistro si verifichi

Oss. Nella descrizione di X=$\sum Y$, Y=φ(Z) esso è un numero aletorio visto ex-ante! Senza condizionamenti! Mentre in $F_z(z)$ è visto nelle ipotesi che il sinistro si verifichi!

Oss. Le ipotesi su{N, Z_i,..} implicano delle ipotesi su {N,Y_i,..} poiché Y_i è funzione di Z_i perché Y_i= φ (Z_i)

Posso definire sul processo stocastico {N, Z_i,..} altre ipotesi

- (I') $\forall n > 0$ fissato $(Y_1|N=n),\dots,(Y_n|N=n)$

  Siccome ciascuno degli y_i è $\varphi(Z_i)$ allora $(Y_i|N=n)$ è $(\varphi(Z_i)\ |N=n)$ che è un trasformato mediante stessa funzione.

  → anche essi sono identicamente distribuiti e stocasticamente indipendenti → i.i.d.

  Oss. X_1,..,X_n ed E ; $(f(X_1,\dots,X_n)|E) = f(x_1|E,\dots, X_n|E)$

- (II') Cosa posso dire della legge $Y_{i_{i\leq n}}|N = n$?
  Se la legge di Z_i non dipende da n allora neanche quella di Y_i dipenderà da n.
  Le ipotesi sul processo stocastico dei danni comportano analoghe ipotesi per il processo su {n, y_1,..} (risarcimento)
  Inoltre
  $(Y_{i_{i\leq n}}|N = n) \ =^d \ (Z_i|N \geq i)$ indicano la FdR di risarcimento $F_Y(y)$
  Altre notazioni sono:
  E(Y) speranza matematica
  Var(Y) varianza
  $E(Y^k)$ momento k-esimo

def. Nelle ipotesi (I') e (II') per il processo {N, Y_1,Y_2,…} la distribuzione di probabilità del numero aleatorio X=$\sum_{i=1}^{N} Y_i$, somma aleatoria di numeri aleatori, è detta *distribuzione composta* e dipende dalla *base tecnica*.

$\begin{cases} \Pr(N = n) \quad\quad n = 0,1,2,..(valutazioni) \\ F_y(y) che\ a\ sua\ volta\ dipende\ da\ F_z(z) \end{cases}$ base tecnica

Calcoliamo quindi il dato risarcimento totale X=$\sum_{i=1}^{N} Y_i$:

Oss. N è numero aleatorio di addendi, quindi non posso usare la additività della speranza matematica:

E(X)=$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n)\, E(X|N = n)$ ho usato la proprietà di disintegrazione con {N=n, n∈N}, le ipotesi probabilistiche sono state espresse ∀n∈N, eventi della partizione che descrivono il numero aleatorio N.

Ora, per n fissato, E(X|N=n)=

$$\begin{cases} n = 0 \quad\quad E(X|N = 0)\ il\ risarcimento\ X\ \text{è}\ nullo\ e\ certo \rightarrow E(X|N = 0) = 0E(Y) = 0 \\ n > 0 \quad E(X|N = n) = E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i|N = n\right)\ ora\ ho\ condizionato\ N, N\ non\ \text{è}\ pi\text{ù}\ un\ n.a., = \end{cases}$$

$= E(\sum_{i=1}^{n} Y_i|N = n)$, ora la somma di n.a. con un un numero certo di addendi, quindi sfrutto l'additività

= $\sum_{i=1}^{n} E(Y_i|N = n) \triangleq \sum_{i=1}^{n} E(Y) = nE(Y)$.

=$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n)\, nE(Y)$

= $E(Y)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n \Pr(N = n)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n)$ è una serie convergente, supponendo di avere speranza matematica finita

= $E(Y)E(N)$

Quindi:

$\boldsymbol{E(X) = \ E(Y)E(N)}$ con

$E(X)$ risarcimento totale atteso = prezzo equo

E(N) numero atteso di sinistri

E(Y) risarcimento atteso per sinistro nelle ipotesi che il sinistro di verifichi

Oss. Per la speranza matematica ho sfrutta la (I' indipendenza da n di Y e (II') ugual distribuzione $Y_i|N=n$. Ma non ho sfruttato l'indipendenza stocastica! (I' seconda)

Riprendo X=$\sum_{i=1}^{N} Y_i$ con $Y_i = \varphi\ (Z_i)$, X=0 se N=0

+ (I'), (II') = ipotesi di distribuzione composta

Var(X)=E(X_2)-E(X)^2

E(X)^2=$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})\mathrm{E}(X^2|\mathrm{N=n})$ conviene cioè disintegrare sulla partizione che definisce il numero aleatorio N

Caso per caso

$$\begin{cases} \mathrm{n}=0 & \mathrm{E}(\mathrm{X}^2|\mathrm{N}=0)=0 \text{ in questa ipotesi il risarcimento è nullo poiché è certo} \\ \mathrm{n}>0 & \mathrm{E}(\mathrm{X}^2|\mathrm{N}=\mathrm{n})=\mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2\middle|\mathrm{N}=\mathrm{n}\right] \textit{il numero di rischi è condizionato a } N=n \end{cases}$$

=E($\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)^2$|N=n) = E(($\sum_{i=1}^{n} {Y_i}^2 + \sum_{i\neq j}^{1,n} Y_i Y_j$)|N=n) = la speranza è additiva; per la linearità

=$\sum_{i=1}^{n} E({Y_i}^2\ |N=n)$+ $\sum_{i\neq j}^{1,n} E(Y_i Y_j$|N=n) il primo addendo è il momento secondo della distribuzione di questi e non dipende da n: E(Y^2); mentre per il secondo addendo sfrutto al indipendenza stocastica E(Y_i|N=n)E(Y_j|N=n) = E(Y) E(Y) ma devo scludere quelli della diagonale i diverso da j:

= n E(Y^2)+(n^2-n)E(Y)^2

Oss. Anche in questo caso può venire incluso in n=0

E(X)^2= $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})[\mathrm{nE}(Y_2)+n^2\ \mathrm{E(Y)}^2-\mathrm{nE(Y)}^2]$=

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})\ [nVar(Y)+n^2\ \mathrm{E(Y)}^2]=$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})nVar(Y)+\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})\, n^2\ \mathrm{E(Y)}^2=$

$Var(Y)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})n$+$\mathrm{E(Y)}^2\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})\, n^2$= supponendo che le due serie convergano, cioè esistano finite E(N) e E(N^2)

$= Var(Y)E(N)+\mathrm{E(Y)}^2E(N^2)$

Oss. Per valutare Var(Y) mi basta valutare separatamente E(N) e Var(N), Var(Y) ed E(Y^2)

Riusciamo a scrivere la funzione di ripartizione di x, F_x(x)=? Dove X è un numero aleatorio in ipotesi di distribuzione composta

Fissiamo x∈R:

F_x(x)=Pr(X≤x)= $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{N=n})\ \mathrm{Pr}(X\leq \mathrm{x}|\mathrm{N=n})$

$\Pr(X \leq x|N = n)$, distinguo:

- n=0 $\Pr(X \leq x|N = n)$ $ma\ X = 0\ in\ ipotesi\ N$=0

  dipende da x quanto vale la Pr($X \leq x|N = 0$): sarà

  1 se x≥0

  0 se x<0 poiché $X \leq x$ è l'evento impossibile, Pr($X \leq x|N = 0$)=0

  La denoto con $F_y^{*(0)}(y)$

- n>0 Pr($X \leq x|N = n$)= Pr($\sum_{i=1}^{N} Y_i \leq x|N = n$)= Pr($\sum_{i=1}^{n} Y_i \leq x|N = n$)=
  =Pr{ (Y_1|N=n)+…+(Y_n|N=n) ≤x} è il valore in x della funzione di ripartizione della somma di questi numeri aleatori indipendenti e identicamente distribuiti, con funzione di ripartizione $F_y(y)$: la indico con il simbolo $F_y^{*(n)}(y)$ convoluzione n-esima della $F_y(y)$
  [Cioè: dati $w_1,..,w_n$ i.i.d. con funzione di ripartizione comune a tutti, allora w1+w2+…+wn ha funzione di ripartizione $F_W^{*(n)}(w)$]

In modo compatto (mettendo insieme n=0 e n>0) ottengo $F_X(x)$=$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n) F_y^{*(n)}(x)$

Dal pdv operativo non riesco a ricavare in forma chiusa la funzione di ripartizione se non in casi particolari (di distribuzioni di N).

Quindi la formula iterata è solo buona dal pdv di vista formale. Quello che è evidente è che per valutare Fx(x) del risarcimento totale devo valutare separatamente Pr(N=n) e $F_y(y)$

Oss. Siccome Y_i=φ(Zi) e (Y_i|N=n)= φ(Zi|N=n) se io ho $F_z(z)$ posso risalire a $F_y(y)$ e anche ai momenti E(Y_k) come? Facendo E(Y_k) =$\int \varphi(z)^k dF_z\,(z)$

A volte come base tecnica prenderemo Pr(N=n) e F_z (z)

Ora calcoliamo al funzione generatrice dei momenti:

$m_x(t) = E[e^{tx}] < +\infty$ per t∈ I_0 , disintegro sulla partizione che descrive il numero aleatorio N

=$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n)\, E[e^{tx}|N = n]$ (*)

- n=0 E[$e^{tx}|N = 0]\ N \to X = 0$ quindi e^{tx} è numero certo 1
- n>0 (fissato) E[$e^{tx}|N = n$]= E[$e^{t\sum_{i=0}^{N} Y_i}|N = n$]= E[$e^{tY_1}e^{tY_2}$ … $e^{tY_N}|N = n$]=
  E[$e^{tY_1}e^{tY_2}$ … $e^{tY_n}|N = n$]= stocasticamente indipendenti = $\prod_{i=1}^{n} E(e^{tY_i}|N = n)$ trasformato di un numero aleatorio avente F_y come funzione di ripartizione = $\prod_{i=1}^{n} E(e^{tY_i})$ $m_y(t)$ e suppongo $m_y(t)$ finito in I_0 = $(m_Y(t))^n$.

Sostituisco in (*):

$m_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n)\, (m_Y(t))^n$

= E[$(m_Y(t))^N$] speranza matematica di un trasformato di sx; $(m_Y(t))^N = e^{\mathrm{N}\log((m_Y(t))}$

= E[$e^{N\log(m_Y(t))}$] osservo che E[e^{SN}]= $m_N(S)$

=$m_N(log(m_Y(t)))$

Quindi posso concludere che se la distribuzione N Pr(N=n) e F_y (y)sono dotati di funzione generatrice dei momenti anche la distribuzione composta F_x(x) è dotata di funzione generatrice dei momenti m_x(t).

Oss. Dato X vale soltanto questa implicazione: N=0 → X=0 ma non il contrario. Controesempio: Se X=0 non è vero che N=0)

Inoltre per la monotonia della probabilità Pr(N=n)≤Pr(X=0), cioè X ha una massa concentrata in 0.

RAGIONEVOLEZZA (O MENO) DELLE IPOTESI I) E II)

Ritornando alle ipotesi (I)a) e b) e II), sono ragionevoli?

I)a) $\forall n > 0$ $\quad Z_1|N = n,\ Z_2|N = n, \dots, Z_n|N = n$ i.d. identicamente distribuiti

È ragionevole perché: per quale motivo a priori dovrei assegnare una valutazione probabilistica diversa? →Quest'obiezione potrebbe valere solo se la copertura t è lunga e sono in presenza di fenomeni inflattivi, ma qui ho copertura breve, 1 anno, quindi è ok.

b) $\forall n > 0$ $\quad Z_1|N = n,\ Z_2|N = n, \dots, Z_n|N = n$ i. stocasticamente indipendenti

cioè $(Z_i\big|N = n)\ =^d\ (Z_n\big|(N = n) \wedge H)$ con H avente informazioni su altri danni.

<u>Esempio</u>: $Z_2|N=2 =^d Z_2|N=2 \wedge z_1 \in I_1$ è elevato mentre l'altro in media sarà basso, cioè c'è correlazione negativa. Ad esempio un incendio disastroso: è impossibile che l'edificio prenda fuoco di nuovo: potrei pensare di dare più massa ai valori bassi

È un'ipotesi che è contrastante con quello che si vede in pratica.

→No ragionevole

II) i≤n Z_i|N=n ha distribuzione che non dipende da n

Es. Z_1|N=1 danno del primo sinistro nell'ipotesi che il contratto sia colpito da 1 sinistro

Es. Z_1|N=7 danno del primo sinistro nell'ipotesi che il contratto sia colpito da7 sinistri

Per la ipotesi II) dovrebbe valere (Z_1|N=1)$=^d$ (Z_7|N=7) ma intuitivamente se un contratto è colpito da più sinistri, in teoria sono sinistri di piccola entità. La II) contrasta con quello che si vede in pratica (non ci viene da dare uguale distribuzione probabilistica)

→No ragionevole

<u>Quindi a che servono ipotesi nulle o inutili e particolari?</u>

Valutare un processo stocastico significa anche dare tutte le funzioni di ripartizione congiunte finito-dimensionali, cioè dare $F_{\mathrm{N}\wedge \mathrm{Z}_{i_1}\wedge\ldots\wedge \mathrm{Z}_n}$, in tutti i modi possibili.

Invece le nostre ipotesi semplificano drasticamente il problema, valutando e assegnando F_n e F_z.

Ma queste semplificazioni non giustificano il fatto di inserire un modello che snatura il problema!

Si osservi però che l'effetto delle ipotesi **I)b)** e **II)** non viene risentito troppo. Le ipotesi I)b) e II) diventano pesanti quando n=2,N=3,N=4,.. ma per fortuna la probabilità che qualcosa sia colpito da 2 o più sinistri sono basse. La massa si concentra su 1 e 0 sinistri: tutte le valutazioni $F_x(x)$ed E(X) fintanto che n=0, n=1 sono le stesse indipendentemente dalle ipotesi.

ALTRE IPOTESI CHE SEMPLIFICANO

Non si considerano gli aspetti finanziari nel valutare l'impegno dell'assicuratore perché gli importi dei risarcimenti non vengono attualizzati (no differimento) anche perché i contratti in ambito danni hanno durata breve.

Se volessimo tenerne conto avrei istanti aleatori e quindi dovrei scrivere: $\sum_{h=1}^{N} Y_h(1+i)^{-T_h}$ con i= tasso interesse. Cioè dovrei tenere conto anche di un processo stocastico relativo agli istanti in cui si verificano i sinistri.

Ipotesi: Un modo semplificato per tenere conto di aspetti finanziari è supporre che tutti i risarcimenti sono pagati a metà anno.

Oppure potrei tenerne conto ma avere una visione più semplificata del differimento:

$X' = \sum_{h=1}^{N} Y_h(1+i)^{-\frac{1}{2}}$ cioè una distribuzione uniforme dei sinistri nel tempo

Come cambia il premio equo?

Se ora considero X=$\sum_{h=1}^{N} Y_h$ e calcolo la speranza matematica di X e X' ho:

E(X')= $(1+i)^{-\frac{1}{2}}$E(X) < E(X) non sto tenendo conto del differimento

Allora E(X')<E(X) sto tenendo conto di un <u>caricamento implicito</u> che tenga conto dell'aspetto finanziario.

Oss. L'aspetto del differimento è importante perché esistono dei sinistri che vengono rimborsati molto dopo l'avvenuta del fatto.

Quindi, concludendo, dai X, $F_x(x)$ anziché fare una valutazione sul numero aleatorio X nel suo insieme con il nostro procedimento ho "scomposto" la valutazione in F_N, F_y.

Ottengo modelli più flessibili cioè posso fare valutazioni più accurate, posso descrivere i due effetti N e Y (risarcimento per sinistro) che influiscono su X e tener conto degli aspetti di uno più che dell'altro.

IPOTESI RIPORTATE SUI LIBRI

Dati X=$\sum_{i=1}^{N} Y_i$ $Y_i=\varphi(Z_i)$, con X=0 se N=0

Usualmente sono riportate queste ipotesi

a) $Z_1,Z_2,..$ i.i.d. con funzione di ripartizione F_z
Il processo $Z_1,Z_2,..$ è indipendente da N
NB: Dove con Z_i indichiamo <u>l'importo di danno</u> per il sinistro i-esimo.

Le ipotesi a) e b) <u>non sono coerenti</u>! Infatti ricordiamo che $(Z_i=0)=(N<i)$

b) Ci dice che tali numeri sono stocasticamente indipendenti da N, cioè
(*) $((Z_{i_1}, \dots, Z_{i_n})|N\epsilon I) =^d (Z_{i_1}, \dots, Z_{i_n}) \forall N, \forall i_1, \dots, \forall i_n, \forall I$, con I insieme delle determinazioni del numero aleatorio N
In particolare se considero:
$Z_1|N=0 =^{?d} Z_1$ vale ancora la proprietà (*)
$Pr(Z_1=0|N=0)=1$
$Pr(Z_1=0)=Pr(N=0)<1$ (se fosse=1 non andrei ad assicurarmi)
(sto dicendo che non posso attribuire ai due numeri aleatori diverso la stessa probabilità, come fatto addietro).
Quindi la b) non va bene con il significato dato a Z_i (importo di danno)

a₁) $Z_1,Z_2,..$ identicamente distribuiti

In particolare $Z_1=^d Z_2$

Calcoliamo

$Pr(Z_1=0)=Pr(N=0)$

$Pr(Z_2=0)=Pr(N<2)=Pr(N=0)+Pr(N=1)$, ragionevolmente $Pr(N=1)$ non è nulla, >0. Ho anche sfruttato la proprietà di additività.

Dunque $Z_1\neq^d Z_2$

a₂) $Z_1,Z_2,..$ stocasticamente indipendenti

$(Z_i|Z_{i_1} \in I_1 \wedge \dots \wedge Z_{i_n} \in I_n) =^d Z_i \; \forall i_1,.., i_n \forall n$ "data cioè un'informazione su $Z_{i_1},.., Z_{i_n}$ ..."

In particolare considero

Z_1 $\quad$ $Z_1|Z_2>0$ (informazione su un altro importo Z_2)

$Pr(Z_1=0)=Pr(N=0)>0$

$Pr(Z_1=0|Z_2>0)=Pr(N=0|N\geq 2)=0$ con $Z_1=0$ = "il contratto non è colpito da sinistro" e $Z_2>0$ o $N\geq 2$ = "il contratto è colpito da almeno 2sx"

Abbiamo trovato dei controesempi che mi dicono che per questioni di coerenza non possiamo usare a) e b)

<u>Ma allora perché le scrivono sui libri?</u>

1) Spiegazione teorica:
Posso usarli se indico con $X'=\sum_{i=1}^{N} Y'_i$ con $Y'_1=\varphi(Z_i')$ che è una descrizione formale del problema svincolata dall'aspetto semantico del problema
Hp_1: $Z_1', Z_2', \dots$ i.i.d. $F_z(z)$

Hp_2: $Z_1', Z_2', \ldots$ indipendente da N

2) Nel nostro caso:

$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ con $Y_1 = \varphi(Z_i)$

1) $\forall n > 0 \qquad Z_1|N = n,\ Z_2|N = n, \ldots, Z_n|N = n$ i.i.d

2) la legge di ripartizione di $Z_{i_{i \leq n}}|N = n$ non dipende da n, → F_z

→ Se ho $F_z(z)$ sia nel nostro caso che per 1) e $Pr(N=n)=p_n \quad n=0,1,\ldots$

→ $X' =^d X$

Quindi: se voglio interpretare Zi come danno di sinistro allora devo usare il caso B, mentre nel modello teorico svincolato dall'espetto fisico, considero 1).

La base tecnica che ho preso in considerazione è: F_z $Pr(N=n)p_n$

F_z $E(Y^k) = \int_0^{+\infty} \varphi(z)^k \, dF_Z(z)$

Calcoliamo i momenti supponendo di conoscere Fz

Esempio di copertura con franchigia

$\varphi(z)$: fino a d è zero, fino ad M è z-d, poi è costante e pari a M-d:

$E(Y) = \int_d^M (1 - F_Z(z))dz$, pongo $\overline{F_Z}(z) = 1 - F_Z(z)$ *funzione delle code* della distribuzione del danno per sinistro nelle ipotesi che il sinistro si verifichi. Il nome è dovuto al fatto che dà la probabilità che il danno superi z. Va a calcolare la massa a destra.

Dai conti che ho omesso si ricava:

- Assicurazioni a valore intero: con d=0, M=V (valore assicurato) sostituendo nell'esempio ottengo per l'assicuratore il valore intero: $E(Y)=E(Z)=\int_0^v \overline{F_Z}(z)\, dz$
- Assicurazioni a garanzia illimitata: la trovo sostituendo d=0 M=+∞ nell'esempio $E(Y)=E(Z)=\int_0^{+\infty} \overline{F_Z}(z)\, dz$ la speranza matematica di un numero aleatorio >0 di può ottenere con un integrale ordinario avendo come funzione integrande la funzione delle code.
- Assicurazioni primo rischio: d=0, $E(Y)=\int_0^M \overline{F_Z}(z)\, dz$

Mentre per gli altri momenti:

$E(Y^k) = k \int_d^M (z-d)^{k-1}\, \overline{F_Z}(z) dz$

PORTAFOGLI DI CONTRATTI

Ora fisso l'attenzione su un portafoglio di contratti e su un fissato intervallo di tempo (1 anno)

Come descrivo il risarcimento totale X?

- Impostazione di tipo individuale:

h= numero dei contratti in portafoglio

X_i= risarcimento totale per il contratto i –esimo

→ $X=X_1+\ldots+X_n$

Oss. In pratica i portafogli sono organizzati in sotto-portafogli che hanno contratti analoghi.

Con l'ipotesi $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d., sia F() la comune funzione di ripartizione.

$E(X)=n\mu$ con $E(X_i)=\mu$

$Var(X)=n\delta^2$ con $Var(X_i)=\delta^2$

$F_X(x)=F^{*(n)}(x)$

- <u>Impostazione di tipo collettivo</u>:

Il portafoglio non è visto come insieme di contratti ma un tutt'uno, quindi il risarcimento totale è descritto in questo modo:

$X=\sum_{i=1}^{N} Y_i$ con

N= numero di sinistri che colpiscono i rischi del portafoglio

Y_i= risarcimento per l'i-esimo sinistro.

Ritrovo lo stesso modello che ho usato per descrivere il risarcimento totale di contratto (per una polizza)

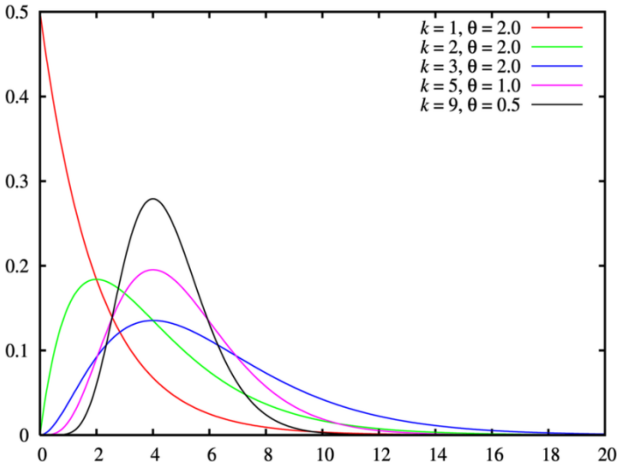
Oss. Inoltre non occorre che N sia certo!

Ipotesi probabilistica: modello *distribuzione composta*: qui devo assegnare la base tecnica: Pr(N=n) n=0, 1, 2,… $F_y(y)$ per la distribuzione del danno per sinistro nell'ipotesi che il sinistro si verifichi.

Oss. F_z è funzione di ripartizione di $Z_i|N=n$ con $i\leq n$ o equivalentemente $Z_i|N\geq i$

MODELLI DISTRIBUTIVI PER IL RISARCIMENTO PER SINITRO

DISTRIBUZIONE GAMMA $Ga(\alpha,\rho)$



Nel grafico: K → α e θ→ ρ

$f_z(z) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1}e^{-\rho z}$ con parametro di scala ρ >0 e parametro di forma α>0 , supporto z>0

dove $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\, e^{-z}dz$ *Funzione gamma* (convergente per α >0)

Oss. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(1) = 1$

Allora $\int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\, e^{-\rho z}dz$, con ρ >0 e α>0, converge a $\left[\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right]^{-1}$ quindi $f_z(z) \geq 0$ con $\int_0^{+\infty} f_z(z)\, dz = 1$ è una funzione di densità.

Se $\alpha = 1$ allora $f_z(z) = \rho e^{-\rho z}$ con ρ>0 *Funzione esponenziale*

Oss. $z^{\alpha-1}e^{-\rho z}$ è un infinitesimo soprareale forte grazie alla parte esponenziale.

Tale funzione concentra solo in intervalli limitati la massa: al massa da un certo punto in poi è praticamente 0.È molto usata.

Oss. Se $\alpha = n \in N$ la distribuzione è $f_z(z) = \frac{\rho^n}{(n-1)!} z^{n-1}e^{-\rho z}$ cioè $\Gamma(n) = (n-1)!$

***DISTRIBUZIONE ERLANGIANA* (n,p)**

Calcolo i momenti:

$E(Z^n)$= $\int_0^{+\infty} z^n \frac{\rho^n}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1}e^{-\rho z}dz$ con n∈N

=$\frac{\rho^n}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} z^{n+\alpha-1}\, e^{-\rho z}dz$ l'argomento risultata essere il nucleo della Gamma (ρ+n, α), per quanto visto prima tale integrale vale $\left[\frac{\rho^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\right]^{-1}$

=$\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\rho^{n+\alpha}}$

=$\frac{1}{\rho^n} \frac{(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)}{\Gamma(\alpha)}$

=$\frac{1}{\rho^n} \frac{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$

=$\frac{1}{\rho^n}(\alpha + n - 1)(\alpha + n - 2) \ldots (\alpha)$ → esiste finito il momento n-esimo ed è scrivibile in forma compatta

In particolare da tale formula ricavo:

$E(Z) = \frac{\alpha}{\rho}$

$E(Z^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\rho^2}$

→$Var(Z) = E(Z^2)$- $E(Z)^2$=$\frac{\alpha}{\rho^2}$

La funzione di distribuzione è dotata di funzione generatrice de dei momenti:

$m_z(t) = E[e^{tz}] = \int_0^{+\infty} e^{tz} \frac{\rho^n}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\rho z} dz = \frac{\rho^n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1} e^{-z(\rho-t)} dz$ questo integrale è convergente e questo significa che $\rho - t$>0 quindi $\rho > t$ ora ho una funzione dotata di fgm se $\exists\, I_0$ cioè non occorre per ogni t dove l'integrale è finito e siccome ρ è positivo questo individua un intorno di 0. È dotato di fgm ed è:

$= \frac{\rho^n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} nucleo\ Ga(\ \alpha, \rho - t) = \frac{\rho^n}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(\rho-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right]^{-1} = \left[\frac{\rho}{\rho-t}\right]^\alpha$ t< ρ

Oss. Se un numero aleatorio ha questa fgm → quel numero aleatorio ha distribuzione Ga(α,ρ)

Nell'ambito della famiglia gamma osserviamo che:

Z_1,…, Z_n iid Z_i~Ga(α,ρ)

Z_1+…+ Z_n dovrei fare la convoluzione n-esima ma posso anche fare un discorso più diretto

$m_{z_1+\cdots+z_n(t)} = \prod_{i=1}^n m_{z_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\rho}{\rho-t}\right]^\alpha = \left[\frac{\rho}{\rho-t}\right]^{n\alpha}$ trovo che la funzione dei momenti della gamma ha un'espressione che è quella della fgm di una Ga($n\alpha, \rho$)

→ Z_1+…+ Z_n ~Ga($n\alpha, \rho$)

Si dice che la famiglia Gamma è chiusa per convoluzione (cioè se tutte le componenti della somma hanno distribuzione nella famiglia Gamma, anche la loro somma avrà distribuzione nella famiglia Gamma)

Oss. Se Z_1+…+ Z_n sono indipendenti e Z_i~Ga(α_i, ρ)

$m_{z_1+\cdots+z_n(t)} = \prod_{i=1}^n m_{z_i}(t) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\rho}{\rho-t}\right]^{\alpha_i} = \left[\frac{\rho}{\rho-t}\right]^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$

Cioè si ha Z_1+…+ Z_n~Ga($\sum_{i=1}^n \alpha_i$, ρ)

Ricardiamo nella famiglia gamma sia che i Z_i siano indipendenti sia che se hanno stessa fgm

DITRIBUZIONE LOG-NORMALE Ln(μ, σ)

$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma z} e^{-\frac{1}{2}(\log z - \mu)^2}$ z >0

I due parametri sono $\mu \in R\ e\ \sigma \epsilon R^+$ e sono collegati alla varianza e speranza matematica della trasformata logaritmica.

Oss. Z~Ln(μ, σ) ↔ log(Z) ~N(μ, σ^2)

Questa distribuzione è molto usata per l'assicurazione danni (es. ramo incendio ed RCAuto)

$E(Z^n) = E\left[e^{n log(Z)}\right] = m_{\log(Z)}(n)\ con\ n \in N$

I momenti di un numero aleatorio con distribuzione log-Normale lo posso trovare come fgm di una funzione logaritmica

RICHIAMI

X~N(0,1) distribuzione normale standard

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\quad x \in R$

Oss. Si prova che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$

$m_X(t) = E[e^{tx}]$=$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2-t^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{2}t^2} dx =$

$= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx$ pongo ora y=x-t (faccio una sostituzione di variabile dy=dx, gli estremi dell'integrale non cambiano)

=$\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dx = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{\frac{t^2}{2}}\ \ \forall t \in R$ poiché non abbiamo imposto condizioni per t.

Piccola modifica:

Y~ N(μ, σ^2) o rifacendo i conti o a partire da Y posso costruire una trasformata che sia normale standard

→$X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$~N(0,1) → Y= $\sigma X + \mu$ trasformata lineare affine

→ $m_Y(t) = e^{tu} m_X(\sigma t)$, X ha una funzione normale standard, =$e^{tu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\quad \forall t \in R$

Fine richiami.

Quindi $m_{\log(Z)}(n) = e^{n\mu+\frac{\sigma^2 n}{2}}$ e in particolare:

$E(Z) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

$E(Z^2) = e^{2\mu+\sigma^2}$

Inoltre si verifica che:

$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$=$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

La fgm si trova ma non è esprimibile in forma chiusa

DISTRIBUZIONE DI PARETO

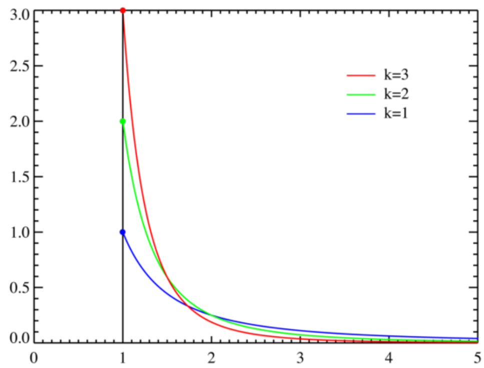
È utilizzata soprattutto in presenza di importi di danno elevati

$f_Z(z) = \alpha\lambda^\alpha z^{-(\alpha+1)}$, z > λ e con α, λ> 0 parametri positivi

$\int_{\lambda}^{+\infty} \alpha\lambda^\alpha z^{-(\alpha+1)} dz = \alpha\lambda^\alpha \left[\frac{z^{-(\alpha+1)+1}}{-(\alpha+1)+1}\right]_{\lambda}^{+\infty} = \alpha\lambda^\alpha \left[\frac{z^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{\lambda}^{+\infty}$,da qui si vede che $\alpha > 0$ perché se no l'integrale non sarebbe convergente, $\alpha\lambda^\alpha \frac{\lambda^{-\alpha}}{-\alpha} = 1$

Grafico densità:

Decresce rispetto lambda con infinitesimo di ordine reale, ma rimangono probabilità abbastanza elevate sulle code.



$E(Z^n) = \int_\lambda^{+\infty} z^n \alpha\lambda^\alpha z^{-(\alpha+1)} dz = \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^{+\infty} z^{-(\alpha-n+1)} dz =$

tale integrale è convergente se $\alpha - n > 0$ cioè $\alpha > n$

$\alpha\lambda^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{\alpha-n}$ con $\alpha > n$

La distribuzione di Pareto ha momento n-esimo finito sse $\alpha > n$

E la funzione generatrice dei momenti?

Sappiamo che se una distribuzione ha fgm → ha tutti i momenti finiti. Qui invece non è detto che tutti i momenti siano finiti → non ∃ fgm (non sono in grado di trovare un intorno per cui $E[e^{tZ}]$ è finita) → tale distribuzione (di Pareto) non è dotata di fgm.

Oss. La Pareto e la Pareto generalizzata sono distribuzioni per non sottostimare il premi nelle situazioni in cui ci sono determinazioni possibili di danno molto elevato.

Oss. La famiglia di distribuzioni di Pareto con supporto [0,+∞]. Attuo una traslazione della distribuzione di Pareto con Z> λ → $f_Z(z) = \alpha\lambda^\alpha (z+\lambda)^{-(\alpha+1)}$ con z>0 (traslo)

$E(Z^n) = \frac{\lambda^n n!}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}$

MODELLI DISTRIBUTIVI PER IL NUMERO DEI SINISTRI

DISTRIBUZIONE DI POISSON

(concentrata molta massa all'inizio e poca sulle code)

$\Pr(\mathrm{N} = \mathrm{n}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ n=0,1,... dove $\lambda > 0$ → la indico con Poi(λ)

Oss. Ricordando: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$ l'intera probabilità si concentra sui naturale.

$m_N(t) = E[e^{tN}]$ è finita in un intorno dell'origine?

$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[e^{tn}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right] = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[e^{tn}\frac{\lambda^n}{n!}\right] = e^{-\lambda e^{-t}\lambda} = e^{\lambda(e^{-t}-1)}$ $\forall t \in R$ → la fgm esiste ed ha quest'espressione

$m'_N(t)|_{t=0} = E(N) = \lambda$ il parametro della distribuzione è collegato con il valore atteso: N=n° di sinistri, λ= n° atteso annuo di sinistri per quell'assicurato

$m''_N(t)|_{t=0} = E(N^2) = \lambda^2 + \lambda$

Var(N)= λ

→ la distribuzione di Poisson ha la Var(N)= $\lambda = E(N)$

<u>Problema</u>: nella pratica Poi(λ) non è adatta perché le esperienze empiriche mi dicono che Var(N)>E(N), quindi la distribuzione di Poisson mi dà una sovra-dispersione.

Oss. $X = \sum_{i=1}^{N}[Y_i]$ ~distribuzione composta

Se N~$Poi(\lambda)$ → la distribuzione di X è detta Poisson composta

X~$Poisson\ composta(\lambda, F_y)$, con $F_y$sufficienti per caratterizzare la distribuzione

Oss. Per determinare la Poisson composta devo dare la base tecnica mentre per Poisson basta λ (distribuzione dei sinistri) → Poisson composta → λ e F_y

E(X)=E(N)E(Y)= λE(Y)

$\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(N)Var(Y)} + \mathrm{Var(N)E(Y)}^2$

=$\lambda Var(Y) + \lambda E(Y)^2 + \lambda E(Y)^2$

= $\lambda\big(Var(Y) + E(Y)\big)^2$

= $\lambda E(Y^2)$

<u>Esempio</u>:

Dati $N_1,\ldots,N_m$ i.i.d. ciascuno con N_i ~ Poi(λ)

N= $N_1+\ldots+N_m$, qual è la distribuzione di N?

Essendo i.i.d dovrei trovare la convoluzione n-esima della distribuzione di Poisson. Ma troviamo anche:

$m_N(t) = \prod_{i=1}^{m} m_{N_i}(t) = e^{m\lambda(e^t-1)}$ è la fgm di Poisson con parametro m λ

→N~Poi(mλ) → questo ci dice come la famiglia di Poisson è chiusa per convoluzione

Oss. Se $N_1,\ldots,N_m$ indipendenti (no i.d.) con N_i~Poi(λ_i)

$m_N(t) = \prod_{i=1}^{m} m_{N_i}(t)$ non sono più tutte uguali ma per i fissato ho

$= \prod_{i=1}^{m} e^{\lambda_i(e^t-1)}$=$e^{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(e^t-1)}$=$e^{(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i)(e^t-1)}$ ho fgm di Poi($\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$)

- → N= $N_1+\ldots+N_m$

Esempio:

Data una collettività eterogenea di assicurati, posso individuare due tipologie di rischi per queste modalità:

- “buoni” Poi(0.1) 0.7
- “cattivi” Poi(0.2) 0.3

n°atteso di sx in un anno — nel portafoglio ho 70% di rischi buoni 30% rischi cattivi

N= numero annuo di sinistri di un assicurato

Che valutazione posso dare, se non conosco l’essere buono o cattivo a priori?

Introduco Λ parametro aleatorio di rischio o eterogeneità che dà l’eterogeneità della collettività (mi dice a che sottogruppo appartiene l’assicurato):

$$\Lambda = \begin{cases} 0.1 & p_1 = 0.7 \\ 0.2 & p_2 = 0.3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} N|\Lambda = 0.1\ Poi(0.1) \\ N|\Lambda = 0.2\ Poi(0.2) \end{matrix} \text{ con } p_1+p_2=1$$

Pr(N=n)=Pr($\lambda = 0.1$)Pr(N=n|$\lambda = 0.1$)+Pr($\lambda = 0.2$) Pr(N=n|$\lambda = 0.2$)=$p_1 e^{-0.1} \frac{(0.1)^n}{n!} + p_2 e^{-0.1} \frac{(0.2)^n}{n!} = 0.7 e^{-0.1} \frac{(0.1)^n}{n!} + 0.3 e^{-0.1} \frac{(0.2)^n}{n!}$

La possibilità che assegno è combinazione convessa (mistura) di distribuzioni di Poisson con misturante p_1,p_2 (è un modello molto usato per portafogli di rischi eterogenei)

MISTURE DI DISTRIBUZIONE DI POISSON

N, per valutare probabilisticamente N introduco Λ>0 parametro di rischio o eterogeneità e assegno la distribuzione a Λ.

Ipotizzo N| $\Lambda = x$ ~Poi(x)

Ho 2 casi particolari:

- $\Lambda = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ \cdots & \cdots \\ x_m & p_m \end{cases}$ con $p_1 \geq 0, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ con x_i le determinazioni possibili

  $\Pr(N = n) = \sum_{i=1}^{m} (\Lambda = x_i) \Pr(N = n|\ \Lambda = x_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i\, e^{-\frac{(x_i)^n}{n!}}$
- $\Lambda \sim F_\Lambda$

  $\Pr(N = n) = \int_0^{+\infty} \Pr(N = n|\Lambda = x)\, \mathrm{dF}_\Lambda(\mathrm{x}) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!}\, \mathrm{dF}_\Lambda(\mathrm{x})$, se $\mathrm{f}_\Lambda(\mathrm{x})$ è dotata di densità $\mathrm{f}_\Lambda(\mathrm{x})$ allora $= \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!} \mathrm{f}_\Lambda(\mathrm{x}) dx$ integrale ordinario

La misturante F_Λ : o del tipo Pr(λ=x_i) o del tipo f_λ (λ) sono dette funzioni di struttura perché descrivono la composizione\strutturamento della collettività.

$$\mathrm{E(N)} = \int_0^{+\infty} E(N|\Lambda = x)\, \mathrm{dF}_\Lambda(\mathrm{x}) = \int_0^{+\infty} x\, \mathrm{dF}_\Lambda(\mathrm{x}) = E(\Lambda)$$

$$\mathrm{E(N^2)} = \int_0^{+\infty} E(N^2|\Lambda = x)\, \mathrm{dF}_\Lambda(\mathrm{x}) = \int_0^{+\infty} (x^2 + x)\, \mathrm{dF}_\Lambda(\mathrm{x}) = \mathrm{E}(\Lambda^2) + E(\Lambda)$$

$\text{Var(N)} = \text{E}(\text{N}^2) - \text{E}(\text{N})^2 = E(\Lambda) + Var(\Lambda)$

Oss. Var(N)>E(N) quindi mi risolve l'uguaglianza che avevano invece con Poisson

Se Var(N)=0 , N è concentrato su un solo valore di Λ e quindi non avrei considerato una collettività.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA Bn(α,p)

$Pr(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha+n)\dots(\alpha)}{n!} p^{\alpha}(1-p)^n$ n=0,1,…; α>0, 0<p<1

Oss. Tale serie è convergente grazie alla serie binomiale

$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^n$ se |x|<1, $\alpha > 0$ con $\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha)(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, infatti ponendo q=1-p per scrivere di meno si ha: $p^{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha+n-1)\dots(\alpha)}{n!} q^n =$ posso mettere in evidenza un meno: $\frac{(-1)^n(-\alpha-n+1)\dots(-\alpha-1)(-\alpha)}{n!} = (-1)^n\binom{-\alpha}{n} = p^{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{n} q^n = p^{\alpha}(1-q)^{\alpha} = p^{\alpha}p^{-\alpha} = 1$

→Ho una distribuzione di probabilità sugli interi

$m_N(t) = E[e^{tN}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha+n-1)\dots(\alpha)}{n!} p^{\alpha} q^n = p^{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} (-1)^n \binom{-\alpha}{n} q^n = p^{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^t q)^n \binom{-\alpha}{n} =$,converge perché $-e^t q < 1$, $= p^{\alpha}(1-e^t q)^{-\alpha}$ con $e^t < \frac{1}{q} \leftrightarrow t < \log\left(\frac{1}{q}\right) \leftrightarrow t < -\log(q)$

È quindi dotata di fgm? Sarebbe dotata se questa condizione individua un intorno di 0. E lo fa?

Ma $\text{q} < 1 \rightarrow \log(\text{q}) < 0 \rightarrow -\log(\text{q}) > 0 \rightarrow$ ok

→ è dotata di fgm poiché la speranza matematica è finita in un intorno di 0.

Ora $m'_N(t)|_{t=0} = E(N) = \alpha\frac{q}{p}$

$$= p^{\alpha}(1-e^t q)^{-\alpha} = -\alpha p^{\alpha}(1-e^t q)^{-(\alpha+1)}(-q) =, pongo\ t = 0, = \alpha p^{\alpha}(1-q)^{-(\alpha+1)}(q) = \alpha\frac{q}{p}.$$

E $m''_N(t)|_{t=0} = E(N^2)$

$$= \alpha p^{\alpha}(1-e^t q)^{-(\alpha+1)}(+q) + (\alpha+1)q^2\alpha p^{\alpha}(1-e^t q)^{-(\alpha+1)-1} =, pongo\ t = 0,$$

$$= q^2\alpha(\alpha+1)p^{\alpha}(1-q)^{(-\alpha-2)} = \alpha(\alpha+1)\frac{q^2}{p^2}$$

Relazione tra E e Var: Var(N)>E(N) → consente di modellare la sovradispersione dei dati→ ok

Oss. In realtà questo è una conseguenza di quello visto prima, infatti:

<u>Esempio</u>:

N ~mistura di distribuzioni Poisson con misturante Γ

Per assegnare la distribuzione di N prendo il parametro Λ>0, assegno Λ Ga~ (α, ρ) e con N| Λ=x~ Poi(x)

Allora:

$$Pr(N=n)=\int_0^{+\infty} Pr(N=n|\Lambda=\mathrm{x})\,dF_\Lambda(x)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{x^n}{n!}f_\Lambda(x)dx$$
$$=, dotata\ cioè\ di\ densità\ Gamma,: f_\Lambda(x)=\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\rho x},$$
$$=\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)n!}\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1+n}e^{-(\rho+1)x}\,dx, che\ è\ il\ nucleo\ di\ una\ Gamma\ (\alpha+n,\rho+1),$$
$$=\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)n!}\left[\frac{(\rho+1)^{\alpha+n}}{\Gamma(\ \alpha+n)}\right]^{-1}=\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)n!}\frac{\Gamma(\ \alpha+n)}{(\rho+1)^{\alpha+n}}$$
$$=\frac{\Gamma(\ \alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}\frac{\rho^\alpha}{(\rho+1)^\alpha}\left(\frac{1}{\rho+1}\right)^n, il\ primo\ fattore\ è\ un\ altro\ modo\ per\ esprimere\ \frac{(\alpha+n)\dots(\alpha)}{n!},$$
$$il\ secondo\ fattore\ è\ compreso\ fra\ ]0,1[, mentre\ il\ terzo\ è\ complementare\ a\ 1: \frac{(\alpha+n)\dots(\alpha)}{n!}\rho^\alpha q$$

→ È il nucleo di una binomiale negativa $\sim Bn(\alpha,\frac{\rho}{\rho+1})$

→ La distribuzione di Binomiale Negativa è ottenibile con mistura di Poisson con misturante Gamma.

COME SCELGO IL PREMIO?

$\mathrm{X}, \mathrm{E(X)}, \mathrm{Var(X)}$

Comporta: $\mathrm{E(X)=E(N)E(Y)}$ $\quad \mathrm{Var(X)=E(N)Var(Y)+Var(N)E(Y)^2}$

Valutazioni attendibili se ho la base tecnica

$\begin{cases}\Pr(N=n)\\ F_y(y)\end{cases}$ vanno valutate usando osservazioni statistiche

Se ho un rischio da valutare chi ci dice quale distribuzione è da usare?

Considero una famiglia parametrica di distribuzioni e poi vado a valutare i parametri attraverso diversi metodi.

- Metodo minimi quadrati
- Metodo dei momenti
- Metodo di massima verosimiglianza

L'approccio che useremo è quello di ottenere stime empiriche, ottenute sulla base di dati, di elementi che descrivono\valutano la rischiosità.

Tali stime hanno diverse applicazioni pratiche:

- grandezze di base usate per la tariffazione;
- per ottenere stime della base tecnica per stimare la distribuzione con il metodo dei momenti.
- come indicatori tecnici

<u>Problema di tariffazione</u>: assegnare un premio ad un rischio. Fissata una copertura, una polizza e sia X il risarcimento totale per una polizza per una durata annuale (1 anno = periodo di copertura). Valuto E(X) in un approccio di tipo tecnico attuariale

Suppongo di disporre di una base di dati:

- "ampia" (numero sufficiente di dati)
- Relativa a polizze con forti caratteristiche di analogia (i dati devono riferirsi a polizze che hanno in comune quante più caratteristiche possibili; cioè in teoria dovrei essere in grado di dare a tutte lo stesso rischio)

es. copertura per incendio:

chiedo i dati relativi alla copertura incendio per una particolare categoria di beni all'ufficio statistico

QUOTA DANNI

Supponiamo quindi di avere la base di dati relativa a r polizze osservate per l'intero periodo di copertura (1 anno) e che esse abbiano riportato n sinistri in tutto

n= numero di sinistri osservato\riportato nelle r polizze

c_j= risarcimento osservato per il j-esimo sinistro j=1,..,n

$Q = \frac{c_1+\cdots+c_n}{r}$ *quota danni* o risarcimento medio per sinistro

Per mettere in modo naturale a confronto Q con E(X) posso porre: Q=$\hat{E}$(X) stima di E(X). Interpreto Q come stima.

Richiami:

- stimatore: numero aleatorio (ex ante)
- dati= valori osservati di numeri aleatori (ex post)
- stima = valore osservato d un stimatore: lo indico con ^

Sia X il rischio da tariffare; indichiamo con X_1,.. X_i,…,X_r i numeri aleatori | X_i=risarcimento totale per la polizza i-esima.

Supponiamo che l'analogia di tipo qualitativo faccia sì che tali X_i sono identicamente distribuiti: → X_1,..X_i,…,X_r identicamente distribuiti (i.d.) quindi E(X_i)=E(X) ∀i

Quindi la media campionaria: $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i$ è uno stimatore (numero aleatorio) con E$\left[\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_i\right]$=E(X)

Questo mi dice che è uno stimatore non distorto della comune speranza matematica di X; X_1,.. X_i,…,X_r

Se avessimo x_i , valore osservato di X_i (dati ex post):

- $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_i$= valore osservato dello stimatore
- uso questo come stima del parametro
- $\hat{E}$(X) =$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_i$

Ora osservo che:

$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_i$ = Q quota danni

Posso costruire equivalentemente la quota danni o con i c_j o con x_i, la differenza tra le due costruzioni è:

- con x_i gli x_i saranno soprattutto zeri
- i c_j sono tutti positivi

Oss. La quota danni può essere vista come premio equo ex post. Infatti dato $\sum_{i=1}^{r} X_i$ e se assegno ai rischi P_i=E(X_i) e faccio la somma dei premi ottengo: $\sum_{i=1}^{r} P_i$= E($\sum_{i=1}^{r} X_i$). Ma osservo anche che r*Q = risarcimento del portafoglio = $\sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{i=1}^{r} x_i$ → l'osservazione mi dice che la quota danni (ex post) fa lo stesso servizio del premio equo (ex ante)

Oss. Se X_1,.. X_i,...,X_r sono i.i.d. allora lo stimatore sarebbe anche uno stimatore consistente oltre che non distorto. $\sum_{i=1}^{r} X_i$ → consistente e non distorto

<u>Richiamo</u>:

Teorema del limite centrale (TLC)

Dati X_1,..,X_n, ... i.i.d. con E(X_i)=E(X) speranza matematica comune e finita (perché i.d.) allora la media aritmetica $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^{+\infty} E(X)$ converge in probabilità, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i) - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Fissato un intorno di 0, per un n abbastanza elevato, ho una probabilità alta che il valore osservato dalla media sia vicino a quello di E(X).

Fine richiamo.

SCOMPOSIZIONE DELLA QUOTA DANNI

Ora data $Q = \frac{c_1+\cdots+c_n}{r} = \frac{n}{r}\frac{c_1+\cdots+c_n}{n}$ riesco ad individuare alcune importanti caratteristiche:

- $\frac{n}{r} = \frac{numero\ totale\ di\ sinistri}{num\ totale\ di\ rischi}$ è il numero medio di sinistri per rischio osservato o *indice di sinistrosità* o *frequenza sinistri*
- $\frac{c_1+\cdots+c_n}{n} = \frac{\bar{c}}{n} = \frac{risarcimento\ totale}{numero\ tot\ sinistri}$ = risarcimento medio per sinistro o costo medio per sinistro

Questa formula empirica ha un corrispondente teorico: E(X)=E(N)E(Y) (in ipotesi di distribuzione composta).

Posso mettere in relazione:

a) $\frac{n}{r}$ con E(N)
b) $\bar{c}$ con E(Y)

Infatti:

a) Nelle ipotesi che N; N_1,.. N_r i.d. con N_i= numero aleatorio di sinistri per la polizza i-esima.
$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_i$ è uno stimatore non distorto della comune speranza matematica dei numeri aleatori N_i e il suo valore osservato è $\frac{n}{r}$
→ lo accolgo come stima: $\frac{n}{r}$ = $\hat{E}$(N)
→ $\frac{n}{r}$ è il corrispondente empirico di E(N)

b) $\bar{c}$ è il valore osservato del numero aleatorio $\frac{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Xi}}{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ni}}$

Terminologia

Prima avevamo chiamato $\frac{n}{r}$ indice di sinistrosità, ma in generale è chiamato anche frequenza sinistri. Tale termine però non è appropriato, infatti dati $E_1,E_2,..,E_s$ $\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} |E_k|$ è la frequenza relativa, cioè numero di successi / numero di prove.

Nel caso $\frac{n}{r}$ abbiamo sì N_1,.. N_r ma questi non hanno (nella sommatoria) valore 0 e 1, come gli indicatori di evento $|E_k|$, infatti essi possono essere anche numeri maggiori di 1.

<u>Esempio</u>. Ho 10 polizze collettive, in quest'ambito per ciascuna posso avere più di un sinistro, quindi non è una frequenza sinistri anche se la chiamiamo con questo nome.

La seconda scrittura Q=$\frac{n}{r}$ $\frac{c_1+\cdots+c_n}{n}$ mi è utile perché mi dà più informazioni (es da un anno all'altro l'effetto inflattivo può avere un'incisione su $\bar{c}$ più che su $\frac{n}{r}$). Abbiamo un dettaglio maggiore sulla componente "frequenza" e sul "costo medio" e quindi posso valutare gli elementi che influiscono di più su una che sull'altra.

Le grandezze $\frac{n}{r}$ e $\bar{c}$ sono usate anche per altri fini: come ad esempio confrontare portafogli relativi ad anni diversi. Cioè se non ho forti condizioni di analogia $\bar{c}$ e $\frac{n}{r}$ sono dati utili per confronti

esempio. Spesso si trova: $\bar{c}$ in Italia, Francia, U.S.A. nel 2012 e 2013

→ Riassumendo $\bar{c}$ e $\frac{n}{r}$ sono:

- In forte caratteristica di analogia dei dati, stime per elementi di rischiosità {Q →E(X); $\frac{n}{r}$→E(N); $\bar{c}$→E(Y)}
- Senza analogia dei dati, sono usati per analisi di confronto → sintesi dell'analisi della sinistrosità di un portafoglio (più in generale).
  Esempio. portafoglio Italia: $\frac{n}{r}$ = 0.008 frequenza sinistri

SCOMPOSIZIONE DELLA FREQUENZA SINISTRI

Ora supponiamo di aver raccolto sul nostro portafoglio di r polizze tali dati:

(1) r_0=numero delle polizze con 0 sinistri

r_1=numero delle polizze con 1 sinistro

…

r_h=numero delle polizze con h sinistri

(2) suppongo h=massimo del numero di sinistri riportato da una singola polizza $\leftrightarrow$ r_0 +..+r_h = r
def $\frac{r_j}{r}$ è la frequenza relativa delle polizze che hanno riportato j sinistri. Cioè $\frac{r_j}{r} \approx \Pr(N = j)$
formalmente $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}|N_i = j|$ con $E[\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}|N_i = j|] = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}E[|N_i = j|] = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\Pr(N_i = j)$. In ipotesi che N;$N_1$,$N_2$,…,$N_r$ i.d. ho quindi = $\frac{n}{n}$ Pr(N=j) = Pr(N=j)

Ho un'ulteriore riscrittura per $\frac{n}{r}$:

$\rightarrow \frac{n}{r} = \frac{n}{r-r_0}\frac{r-r_0}{r}$

- con $\frac{n}{r-r_0} = \frac{num\ sinistri}{num\ polizze\ sinistrate}$ cioè numero medio di sinistri per polizza sinistrata o *Indice di ripetibilità* (oss è >1)
- con $\frac{r-r_0}{r} = 1 - \frac{r_0}{r} = \frac{num\ polizze\ sinistrate}{num\ polizze}$ quota delle polizze sinistrate (stima della probabilità di non avere sinistri)

Il corrispondente teorico di questa formula è: E(N) = ? * ?

Ora per la proprietà di disintegrabilità con la partizione dell'evento certo: P={N=0,N≥1} si ha

$\mathrm{E(N)0 = Pr(N = 0) * E(N|N = 0) + Pr(N \geq 1) * E(N|N \geq 1)\ =\ Pr(N \geq 1) * E(N|N \geq 1)}$ dunque, poiché $\mathrm{E(N|N = 0) = 0}$

$\rightarrow \mathrm{E(N) = Pr(N \geq 1)E(N|N \geq 1)}$ i cui corrispondenti empirici sono $\frac{n}{r} = \frac{n}{r-r_0}\frac{r-r_0}{r}$.

La quota danni posso interpretarla in modi diversi:

$\mathrm{Q} = \frac{n}{r}\bar{c} = \frac{n}{r-r_0}\frac{r-r_0}{r}\bar{c}$ (ho 3 fattori ora)

Oss. A parità di frequenza di sinistri un elevato indice di ripetibilità mi dice che c'è una concentrazione maggiore di sinistri su poche polizze.

CALCOLO VAR(X)

Supponendo di avere una base di dati con forti analogie, come stimo Var(X)?

<u>Ripasso</u>:

lo stimatore più usato è la varianza campionaria:

dati W_1,W_2,.., W_n numeri aleatori i.i.d. con varianza finita $\rightarrow$ Var(W_i)=Var(W)

$S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \bar{W})^2$ con $\bar{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W_i$

Oss. Per n 'grande' vale che $E(S_n) = \mathrm{Var(W)}$, altrimenti $E(S_n) = \frac{n}{n-1}\mathrm{Var(W)}$.

Sviluppo S_n: $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \bar{W})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}({W_i}^2) + n\bar{W}^2 - 2\bar{W}\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}({W_i}^2) - n\bar{W}^2$ se n>> "grande" allora $S_n \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left({W_i}^2\right) - \bar{W}^2$ (*) , che in lineare teorica è stimatore distorto della varianza → posso usarlo come stimatore non distorto solo se n è grande

Fine ripasso.

Torno al problema precedente: stimare Var(X)

Se possiamo ipotizzare $X_1, X_2, .., X_r$ i.i.d. allora posso usare la varianza campionaria come stimatore.

→ $Var(X) = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(X_i - \bar{X})^2$ con $\bar{X} = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} X_i$ è stimatore non distorto della comune varianza, con la stima data da $\widehat{Var}$(X) = $\sum_{i=1}^{r}(x_i - Q)^2$ con x_i dati raccolti.

Confrontandolo con l'altro stimatore $S_n \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left({W_i}^2\right) - \bar{W}^2$ (*), se r >> allora $\widehat{Var}(\mathrm{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left({X_i}^2\right) - Q^2$ posso cioè usare un'altra stima.

Per studiare la varianza, che ci consente di capire l'effetto della valutazione sul numero di sinistri e sul risarcimento per sinistro nell'ipotesi che il sinistro si verifichi, facciamo così:

So che in ipotesi di distribuzione composta:

$\mathrm{Var(X) = E(N)Var(Y) + Var(N)E(Y)^2}$ con la corrispondenza empirica $\frac{n}{r}$? + ? $\bar{c}$

Adesso dobbiamo procurarci le stime $\widehat{\mathrm{Var}}(\mathrm{N})$ e $\widehat{\mathrm{Var}}(\mathrm{Y})$:

- $\widehat{\mathrm{Var}}(\mathrm{N})$ se posso ipotizzare che i numeri aleatori di sinistri (ex ante) N;N_1, N_2,..,N_r sono numeri aleatori i.i.d. $\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(N_i - \bar{N})^2$, con $\bar{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i$, che è stimatore non distorto della comune varianza →
  $\widehat{\mathrm{Var}}(\mathrm{N}) = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(n_i - \frac{n}{r})^2$ con n_i valore osservato di N_i (ho bisogno quindi dell'informazione del numero di sinistri per polizza)

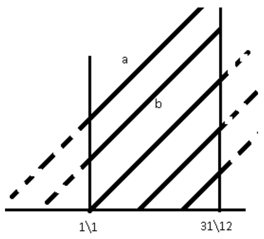
Per quanto riguarda la Y invece:

- $\widehat{\mathrm{Var}}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(c_j - \bar{c})^2$

→ora ho una stima di $\mathrm{Var(X)}$

TEMPO DI ESPOSIZIONE DELLE POLIZZE

Finora abbiamo preso in osservazione r polizze per un anno (l'intero periodo di copertura), ma possiamo anche scegliere il periodo di osservazione fissando quello che viene *detto intervallo / finestra di* *osservazione*. A questo proposito, usando l'usuale approccio, fisso una finestra di osservazione, dentro la quale osservo le polizze. Però riscontro un problema, potrei avere delle polizze che osservo per tutta la durata della copertura ma anche altre che non vedo per tutta la durata di copertura.



→Non osservo r polizze per una durata fissata. Come faccio?

Quindi avendo questi dati per una frazione di anno il problema è dato dal valutare o meglio aggiustare le stime per le stime e gli stimatori.

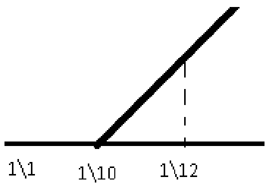
E(N)=?

Siano:

r = polizza osservate

t_i= durata dell'intervallo di tempo nel quale la polizza rimane in osservazione (l'unità di tempo è l'anno) detto *tempo di esposizione* o *esposizione* (per brevità) o *rischio anno* (o per R.C.A.: macchina\anno)

m_i = numero osservato di sinistri per l'i-esima polizza nel suo tempo di esposizione

es. 

(3 mesi) cioè 3/12 = tempo di esposizione

m_i = numero sinistri

M_i = numero aleatorio di sinistri per la polizza i-esima (aleatorio in quanto pensato ex ante, prima dell'osservazione)

m_i = valore osservato di M_i (ex post)

Siano $N_1,\dots,N_r$ i.d.

N_i= numero aleatorio di sinistri <u>in un anno</u> per la polizza i-esima.

A differenza di M_i questo numero è relativo all'intero periodo di copertura (1 anno)

IPOTESI DI PROPORZIONALITA'

Ipotesi:

I. sempre in ipotesi di analogia, cioè le r polizze possono avere i numeri di sinistri identicamente distribuiti ($N_1,\ldots,N_r$ i.d.)
$\rightarrow E(N_i) = E(N)\ \ \forall$i

II. Ipotizzo che il numero atteso di sinistri per la polizza nel tempo t_i sia proporzionale col E(N)
$\mathrm{E}(M_i) = t_i\mathrm{E}(N_i) = t_i\mathrm{E(N)}$ _ipotesi di proporzionalità_ 1 (rispetto la durata di osservazione)
$\rightarrow$ E($\sum_{i=1}^{r} M_i$)= $\sum_{i=1}^{r} E(M_i)$= $\sum_{i=1}^{r} t_i\, E(N)$= $E(N)\sum_{i=1}^{r} t_i$, con $\sum_{i=1}^{r} t_i$ numero certo

Oss. M_i li posso osservare, N_i no!

Considero, essendo $\sum_{i=1}^{r} t_i$ certo, $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} M_i}{\sum_{i=1}^{r} t_i}\right) = \mathrm{E}(N_i)$

$\rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{r} M_i}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ è uno stimatore non distorto della comune speranza matematica dei numeri aleatori N_i.

$\rightarrow\hat{E}(N)$= $\frac{\sum_{i=1}^{r} m_i}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ = $\frac{n}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ detto *Indice di sinistrosità* o *frequenza sinistri*. È una stima del numero annuo di sinistri. N = numero totale di sinistri osservato nel corso dell'anno per le r polizze, $\sum_{i=1}^{r} t_i$ è l'esposizione totale o numeri di rischi\anno o macchine\anno.

La stima del numero annuo di sinistri per una polizza è pari al valore osservato dello stimatore che è pari all'indice di sinistrosità.

È ragionevole (e se si quando) stimare il questo modo il numero di sinistri annuo?

Osservo l'ipotesi II (ipotesi di proporzionalità): il numero aleatorio di sinistri sia proporzionale ad $E(N)$ indipendentemente dal periodo t_i preso significa che II è difficilmente accoglibile. Ma allora a cosa serve?

Esempio

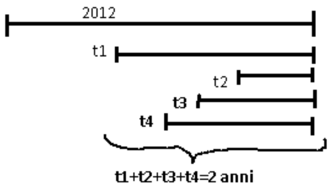
Suppongo di avere: il periodo anno 2012 e 3 tempi di esposizione:

I polizza	t_1=1 (12/12)	1 anno
II polizza	t_2=3/12	3 mesi
III polizza	t_3=9/12	9 mesi

Qui sto raccogliendo la rischiosità su tutto l'anno.

Tempo totale di esposizione: 1 anno + 3 mesi + 9 mesi = 2 anni (24\12) cioè è equivalente ad aver osservato 2 polizze per un anno

Esempio



Se invece ho il seguente tipo di portafoglio (diverso dal primo)

Posso osservare che in questo caso se la rischiosità è tutta nella prima parte dell'anno, infatti nessuna delle polizze la sta considerando. Quindi mi metto in ipotesi di stazionarietà rispetto l'arrivo dei sinistri, cioè t_i non dipende dal tipo di t_i (cioè da quale frazione sto considerando dell'anno) ma solo della sua ampiezza.

→ $E(M_i) = t_i E(N_i)$ polizza per polizza non va bene, ma posso supporre di avere una certa uniformità del tipo di polizza, cioè anche se a livello individuale non va bene, se ho un portafoglio numeroso spero di avere dei fenomeni di compensazione del rischio.

Quindi la stima è in generale buona in ipotesi di uniformità temporale delle polizze

La varianza viene stimata, dato

$\hat{E}(N)=\frac{n}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ e $\frac{\sum_{i=1}^{r} M_i}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$

$$\widehat{Var}(N) = \frac{1}{denominatore} \sum_{i=1}^{r} t_i \left(\frac{M_i}{t_i} - \frac{\sum_{h=1}^{r} M_h}{\sum_{h=1}^{r} t_h}\right)^2$$

con 'denominatore' che può essere

- r-1
- r
- $\sum_{i=1}^{r} t_i$-1
- $\sum_{i=1}^{r} t_i$

Dato $\mathrm{E(X)}$, la quota danni è data da: $\mathrm{Q} =?$ (passaggi formali)

Prendendo spunto da $\mathrm{E(X)} = \mathrm{E(N)E(Y)}$ formalmente, siccome ho trovato una stima di E(N), si hanno i corrispondenti empirici:

Q= $\frac{n}{\sum_{i=1}^{r} t_i} \overline{c}$ = $\frac{c_1+\cdots+c_n}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ al posto di r qui ho il tempo di esposizione totale

ALTRA IPOTESI DI PROPORAZIONALITA'?

L'ipotesi che sta sotto l'utilizzo di questa stima è: se indichiamo con

X_i = risarcimento totale (ex-ante) anno per la polizza i-esima

$\overline{X_i}$= risarcimento totale (ex ante) per la polizza i-esima nel tempo di esposizione t_i

Sotto le ipotesi:

- $X_1, X_2, \ldots, X_r$ identicamente distribuite →$E(X_i)$=$E(X)$ ∀i
- $E(\overline{X_i}) = t_i E(X_i)$=$t_i E(X)$ <u>ipotesi di proporzionalità 2</u> (rispetto la durata di osservazione)

Allora $\frac{\sum_{i=1}^{r} \overline{X_i}}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ è uno stimatore non distorto della comune speranza matematica dei numeri aleatori X_i, cioè $E(X) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} \overline{X_i}}{\sum_{i=1}^{r} t_i}\right)$ e il valore osservato è proprio $\frac{c_1 + \cdots + c_n}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$.

Oss. L'ipotesi II (ipotesi di proporzionalità) cioè che E($\overline{X_i}$) sia proporzionale alla durata di osservazione è diversa da prima? O è di più rispetto ad $E(M_i) = t_i E(N_i)$?

La stima del passaggio formale, visto prima, è equivalente ad introdurre le ipotesi I e II del ragionamento che vi è sotto?

Indico con $\overline{X_i}$=$\sum_{h=1}^{M_i} Y_h^{(i)}$ e $X_i = \sum_{h=1}^{N_i} Y_h^{(i)}$

(descrizione analoga solo che le grandezze sono relative all'intervallo preso in considerazione, cioè l'anno o la frazione d'anno)

Supponiamo di essere in ipotesi di distribuzione composta:

$E(X_i)$=$E(N_i)E(Y^{(i)})$ con $E(Y^{(i)})$ risarcimento atteso per sinistro nell'ipotesi che il sinistro si verifichi, per il rischio i-esimo.

$E(\overline{X_i}) = E(M_i)E(Y^{(i)})$ ma se ho l'ipotesi $E(M_i) = t_i E(N_i)$ posso sostituire, quindi come conseguenza dell'ipotesi di proporzionalità trovo: $E(\overline{X_i}) = t_i E(N_i) E(Y^{(i)})$= $t_i E(X_i)$ cioè l'ipotesi stessa!

In realtà ho fatto anche l'ipotesi che il risarcimento atteso per sinistro sia lo stesso per un sinistro che si verifica nell'intervallo t_i, che per uno che si verifica nell'anno.

Quest'ipotesi infatti è insita nelle ipotesi del modello (i.i.d. per i risarcimenti attesi) e della distribuzione composta.

Conclusione → l'ipotesi di proporzionalità per numero di sinistri implica l'ipotesi di proporzionalità per il risarcimento totale.

$\hat{E}(X) = \frac{c_1 + \cdots + c_n}{\sum_{i=1}^{r} t_i}$ = $\frac{n}{\sum_{i=1}^{r} t_i}\ \overline{c}$

BASE DI DATI TROPPO RISTRETTA

Date r polizze osservate per un anno, con marcati dati di analogia e dati ampia base di, per ricavare:

$\hat{E}(X) = Q$ → abbiamo fatto l'ipotesi ex ante che $X_1, .. X_i$ fossero i.i.d.

$$\hat{E}(N) = \frac{n}{r}$$

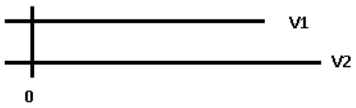
Ma questa è un'ipotesi molto forte se io voglio avere un'ampia base di dati:

esempio: polizza incendio

(1) → V_1= valore assicurato I polizza
(2) →V_2= valore assicurato II polizza

Con V_2>V_1 e suppongo che siano due rischi dello stesso tipo ma con un valore assicurato leggermente diverso; tutte e due le case sono fatte di legno.

Le determinazioni del danno per sinistro provocato dal I rischio è [0, V_1] , V_1 le determinazioni possibili, mentre per il secondo è [0, V_2]



Non sono i.i.d. perché hanno rango diverso

→ l'ipotesi che siano i.i.d. non è accoglibile per rischi con diversi V_i diversi massimali.

→ questo mi restringe la base di dati!

Per amplificarla devo modificare le condizioni di analogia (dove analogia significa dare la tessa distribuzione)

TASSO DI PREMIO

Suppongo quindi r polizze che abbiano forti caratteristiche di analogia ma potenzialmente diversi valori di esposizione monetaria ω_i.

Siano

X_i= risarcimento totale per i-esimo rischio nel caso di 1 anno

ω_i= massima determinazione, finita, possibile per risarcimento per sinistro (massimo di $Y_h^{(i)}$)

Esempio.

- Per le assicurazioni a valore intero:
  ω_i= valore assicurato
- Per le assicurazioni a primo rischio:
  ω_i=M (massimale)
- Nb. Non esiste nelle copertura a garanzia illimitata poiché lo voglio finito.

In questa situazione cade l'ipotesi che $X_1, X_2, \dots, X_r$ i.d. !

Suppongo di avere l'ipotesi

$\frac{X_1}{\omega_1}, \frac{X_2}{\omega_2}, \dots, \frac{X_r}{\omega_r}$ i.d. dove indico con: $\frac{X_i}{\omega_i}$ = risarcimento totale per unità di esposizione

→ $E\left(\frac{X_i}{\omega_i}\right) \triangleq m$ hanno la stessa/comune speranza matematica

→ $E(X_i) = m\,\omega_i$ il risarcimento totale della polizza i-esima è uguale ad un parametro m per l'esposizione monetaria

m è il *tasso teorico di premio*

Oss. Si chiama tasso poiché è il premio equo per una polizza che abbia esposizione monetaria pari ad 1: $E(X_i) = 1 \leftrightarrow \omega_i = 1$

Considero un nuovo rischio X che rientra nella nostra categoria di polizze con esposizione monetaria ω.

$X \quad \omega$, devo calcolare E(X). Per stimarlo uso la stima del tasso di premio → $\hat{E}(X) = \hat{m}\,\omega$

Stimiamo E(X):

n = numero di sinistri che hanno colpito gli r rischi

c_j= risarcimento per il j-esimo sinistro j=1,…,n

Riesco a costruire uno stimatore non distorto per stimare $\hat{E}(X)$? $\hat{m}$?

Andando a considerare

$E(\sum_{i=1}^{r} X_i) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i)$= $\sum_{i=1}^{r} m\,\omega_i$=$m\sum_{i=1}^{r}\omega_i$ osservo che $\sum_{i=1}^{r}\omega_i$ è un numero certo, quindi lo posso portare dentro la speranza matematica: $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} X_i}{\sum_{i=1}^{r}\omega_i}\right) = m$ perciò $\frac{\sum_{i=1}^{r} X_i}{\sum_{i=1}^{r}\omega_i}$ è stimatore non distorto del parametro m.

Il valore osservato dello stimatore è: $\frac{risarcimento\ totale\ del\ portafoglio}{esposizione\ monetaria\ totale}$ cioè $\hat{m} = \tau = \frac{c_1 + \dots + c_n}{\omega_1 + \dots + \omega_n}$.

→ $\tau = \frac{c_1 + \dots + c_n}{\omega_1 + \dots + \omega_n}$ è *tasso di premio*.

Oss. Il tasso di premio posso calcolarlo anche come $\frac{x_1 + \dots + x_r}{\omega_1 + \dots + \omega_n}$

Il tasso di premio è anche pari a : $\tau = \frac{n}{r}\frac{\frac{c_1 + \dots + c_n}{n}}{\frac{\omega_1 + \dots + \omega_n}{r}} = \frac{n}{r}\frac{\overline{c}}{\overline{\omega}}$ e quindi $\tau = \frac{n}{r}\frac{\overline{c}}{\overline{\omega}}$ dove

$\overline{c}$ è il costo medio per sinistro o il risarcimento medio per sinistro

$\overline{\omega}$ è *l'esposizione monetaria media*

$\frac{n}{r}$ è l'indice di sinistrosità

$\frac{\bar{c}}{\omega}$ è il *grado medio di danno*

Essi sono i corrispondenti empirici di $E\left(\frac{X}{\omega}\right) = E(N)\, E\left(\frac{Y}{\omega}\right)$

In ipotesi di distribuzione composta, e per la linearità della speranza matematica, ho: $E\left(\frac{X}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} E(X) = \frac{1}{\omega} E(N)\, E(Y) = E(N)\, E\left(\frac{Y}{\omega}\right)$ dove $E\left(\frac{Y}{\omega}\right)$ è il risarcimento atteso per sinistro per unità di esposizione detto *grado medio di danno (teorico)*

Dal gioco fatto con le esposizioni monetarie:

$X = \sum_{h=1}^{N} Y_h$ con Y_h risarcimento dell'h-esimo sinistro con determinazioni in $[0, \omega]$ perché ω è la max determinazione possibile. → $\frac{Y_h}{\omega}$ ha come determinazioni [0,1]. Quindi diventano tutti relativi all'intervallo di determinazioni [0,1] e non a diversi intervalli (questo perché l'ho rapportato all'esposizione)

→ Allora il premio sarà calcolato così: $P = \tau\, \omega$

Ma è possibile?

<u>Esempio</u> se vado a calcolare il premio per un incendio è possibile che il tasso di premio sia comune a tutti i rischi del portafoglio? In pratica no! Infatti di solito vi sono, per le tariffe, *tavole di tassi* di premi. In teoria però 'potrei prendere lo stesso tasso ' in quanto quando considero $\frac{X_1}{\omega_1}, \frac{X_2}{\omega_2}, \dots, \frac{X_r}{\omega_r}$ i.d.→ sto prendendo le esposizioni monetarie $\omega_i$non troppo diverse tra loro. Quindi vado a considerare le tavole dei tassi di premio.

TEMPI DI ESPOSIZIONE NEL TASSO DI PREMIO

Date r polizze di solito vado a vederle nel corso di un anno solare. Ma potrei considerare una frazione d'anno:

Indico con

- X_i risarcimento totale annuo per la polizza i-esima i=1,..r (numero aleatorio ex ante)
- t_i tempo di esposizione (finito)
- ω_i esposizione monetaria (determinazione massima del risarcimento per sinistro)
- $\overline{X_i}$ risarcimento totale per la polizza i-esima nel tempo di esposizione i

Ipotesi: $\frac{X_i}{\omega_i}$ i.d. dotati di comune speranza matematica

- $E(X_i) = x_i m \leftrightarrow E\left(\frac{X_i}{\omega_i}\right) \triangleq m$ tasso teorico di premio
- $E(\overline{X_i}) = t_i\, E(X_i)$

<u>Obiettivo</u>: trovare uno stimatore per il tasso teorico di premio (tasso che è riferito su base annua ma che calcolo a partire da considerazioni su dati riferiti ai t_i)

$E\left(\sum_{i=1}^{r} \overline{X_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} E\left(\overline{X_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} t_i\, E(X_i) = \sum_{i=1}^{r} t_i\, m\omega_i = m \sum_{i=1}^{r} t_i\, \omega_i$ con $\sum_{i=1}^{r} t_i\, \omega_i$ numero certo.
Quindi $E\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} \overline{X_i}}{\sum_{i=1}^{r} t_i\omega_i}\right) = m$, trovo un numero m.

Qualunque sia la speranza matematica di $\frac{X_i}{\omega_i}$ trovo m. Allora $\frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{\sum_{i=1}^{r} t_i\omega_i}$ è uno stimatore non distorto del parametro m (tasso di premio). È il valore osservato dello stimatore, perciò posso prenderlo come stima del parametro.

Ho due casi: (a seconda delle osservazioni)

I. h sinistri
II. c_j risarcimento per il j-esimo sinistro j=1,...,n

→ valore osservato $\widehat{m} = \tau = \frac{\sum_{i=1}^{r} \overline{X_i}}{\sum_{i=1}^{r} t_i\omega_i}$

Oss. Il tasso di premio posso scriverlo anche come:

$\tau = \frac{n}{t} \frac{\frac{c_1+\cdots+c_n}{n}}{\frac{(t_1+\cdots+t_n)\omega_i}{t}} = \frac{n}{t}\, \frac{\overline{c}}{\sum_{i=1}^{r} \frac{t_i}{t}\omega_i}$, dove

posto $t = \sum_{i=1}^{r} t_i$ esposizione totale

$\frac{n}{t}$ indice di sinistrosità

$\overline{c}$ costo medio

$\sum_{i=1}^{r} \frac{t_i}{t}\omega_i$ media ponderata delle esposizioni monetarie con pesi relativi ai tempi di esposizione t_i

$\frac{\overline{c}}{\sum_{i=1}^{r} \frac{t_i}{t}\omega_i}$ *grado medio di danno*.

Una volta ottenuto τ so calcolare, per un rischio relativo alla categoria considerata, il premio:

dato X risarcimento totale annuo ed ω

→ $E(X) = \tau\, \omega$

<u>Commento</u>: la speranza matematica non dipende da dove l'intervallino è collocato ma solo dalla sua ampiezza →ipotesi di stazionarietà derivante dal processo di arrivo dei sinistri.

È un'ipotesi forte ma va bene se ho portafogli non concentrati in determinati periodi dell'anno ma in periodi diversi che mi permettono di avere effetti di compensazione

Osservazioni
V → $P = \tau V$ "Valore dichiarato dall'assicurato → premio associato alla dichiarazione"

Il premio dipende in modo forte dal valore assicurato

GIUSTIFICAZIONE REGOLA DELLA SOTTOASSICURAZIONE

Ora però, a sinistro avvenuto, l'assicuratore controlla la dichiarazione; può accadere che:

$V_r > V$ sottoassicurazione: il risarcimento non è uguale al danno Z → $Y = \frac{V}{V_r} Z$ *regola proporzionale* giustificata dal fatto che se l'assicurato avesse dichiarato il vero avrebbe dovuto pagare un premio $P_r = \tau\, V_r$. Avendo invece dichiarato $V_r > V$ ha pagato come premio $P = V\, \tau$, con $P_r > P$

→ $\frac{P}{P_r} = \frac{\tau V}{\tau\, V_r} = \frac{V}{V_r} = \frac{Y}{Z}$ ecco giustificata la regola!

OSSERVAZIONE SUL GRADO MEDIO DI DANNO TEORICO

Il grado medio teorico di danno l'abbiamo definito, dati $X \quad \omega$, sotto l'ipotesi di distribuzione composta $E\left(\frac{X}{\omega}\right) = E(N)\frac{E(Y)}{\omega}$ con $\frac{E(Y)}{\omega}$ grado medio teorico di danno.

Andiamo a considerare una copertura primo rischio dove, fissato un massimale di copertura, indico con $g(M) = \frac{E(Y(M))}{M}$ una funzione del grado medio di danno . Dove $E(Y(M))$ è il risarcimento atteso di sinistro una volta fissato il massimale M.

<u>Obiettivo</u>: Voglio studiare come varia il risarcimento atteso in funzione di M.

$E(Y(M)) = \int_0^M \overline{F}_Z(z)\, dz$ con $\overline{F}_Z(z)$=1-$F_Z(z)$ complemento a 1

<u>Ipotesi</u>: $F_Z(z)$ sia un funzione continua (per comodità\facilità)

In questo modo:

g(M) $= \frac{1}{M}\int_0^M \overline{F}_Z(z)\, dz$ è derivabile per il teorema fondamentale del calcolo integrale (integrale di una funzione continua)

→ g'(M)=$\frac{\overline{F}_Z(M)\, M - \int_0^M \overline{F}_Z(z)dz}{M^2} = \frac{1}{M}\left[\overline{F}_Z(M) \;- \frac{1}{M}\int_0^M \overline{F}_Z(z)\, dz\right]$ per il teorema della media integrale (la funzione è FC) $\exists \alpha \epsilon]0, M[\;|\; \overline{F}_Z(\alpha) = \frac{1}{M}\left[\overline{F}_Z(M) - \overline{F}_Z(\alpha)\right]$, con $\alpha\epsilon]0, M[$

Che segno ha la derivata?

$F_Z(z)$ monotona non decrescente

$\overline{F}_Z(z)$ monotona non crescente

$\alpha \leq M \;\rightarrow\; \overline{F}_Z(z) - \overline{F}_Z(M) \leq 0$

→ la funzione del grado medio di danno ha derivata prima ≤ 0

→ g(M) monotona non crescente

Quindi se ho $M_1 \rightarrow P_1$ e $M_2 \rightarrow P_2$. Se $M_1 < M_2$ allora $P_1 < P_2$

<u>Domanda</u>: se io raddoppio il massimale il premio raddoppia? In pratica cresce ma non in modo proporzionale. Scrivo i premi in termini di premio equo e ne studio il rapporto.

$P_1 = E(X(M_1) = E(N)E\big(Y(M_1)\big)$ perché E(N) è indipendente dal massimale, in ipotesi di distribuzione composta.

$P_2 = E(X(M_2) = E(N)E\big(Y(M_2)\big)$

$\rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{E(N)E\left(Y(M_2)\right)}{E(N)E\left(Y(M_1)\right)} = \frac{E(YM_2)}{E\left(Y(M_1)\right)} = \frac{\frac{E\left(Y(M_2)\right) M_2}{M_2}}{\frac{E(Y(M_1))M_1}{M_1}} = \frac{M_2}{M_1}\frac{g(M_2)}{g(M_1)}$, poiché $\frac{g(M_2)}{g(M_1)} < 1$ perché $M_1 < M_2$ e g() è monotona non crescente, ottengo $\rightarrow \frac{P_2}{P_1} \leq \frac{M_2}{M_1}$ cioè il premio cresce ma meno rispetto al massimale.

PROCEDIMENTO DI TARIFFAZIONE NEI RAMI DANNI

Per *tariffazione* si intende quel procedimento per determinare i premi per i diversi assicurati, copertura per copertura.

Fissata una copertura, allora viene fissata anche la tariffa, cioè il premio per gli assicurati.

Dato X, risarcimento totale, valuto la base tecnica:

$$\begin{cases} \Pr(\mathrm{N} = \mathrm{n}) \\ \mathrm{F(z)}, \mathrm{F(y)} \end{cases}$$

Vado a calcolare:

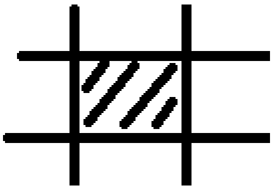
$$\mathrm{E(N)}, \mathrm{Var(N)}, \mathrm{E(Y)}, \mathrm{Var(Y)} \text{ o } \mathrm{E(X)}, \mathrm{Var(X)}$$

Queste valutazioni sono ricavate grazie a metodologie di tipo statistico, dai dati:

<u>Esempio</u> R.C.A. , ho una collettività di rischi eterogenei, quindi non è corretto far pagare a tutti lo stesso premio, infatti se lo facessi andrei contro il principio di equità (premio commisurato al risarcimento). Non è conveniente ed è pericoloso per l'assicuratore: gli assicurati buoni (che subiscono meno sinistri) che pagano più del dovuto se ne andrebbero e quindi l'assicuratore li perderebbe → portafoglio antiselezionato. Ho cioè peggiorato la qualità del portafoglio.

L'assicuratore quindi deve ripartire la collettività eterogenea di rischi in sottogruppi di rischi con caratteristiche di analogia

I. **PERSONALIZZAZIONE A PRIORI** (o *segmentazione del portafoglio* o *classificazione dei rischi*): a priori in quanto considero elementi osservabili senza avere informazioni sulla sinistrosità. In questa fase si osservano caratteristiche/fattori influenti sulla sinistrosità e in base ad esse si va a ripartire la collettività in classi dette *classi tariffarie*. E per ciascuna classe tariffaria viene calcolata il premio detto *tariffa*.



II. **PERSONALIZZAZIONE A POSTERIORI**: se fisso l'attenzione su una classe tariffaria ottenuta andando a considerare elementi influenti sulla sinistrosità, trovo comunque una collettività eterogenea. Quindi modifico il premio individuo per individuo tenendo conto dell'esperienza di sinistrosità individuale. Quindi aggiorno il premio collettivo della classe adeguandolo a ciascun individuo. Ho una eterogeneità non spiegata dalle caratteristiche tariffarie: eterogeneità residua.

Studiamo le due fasi in dettaglio:

PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

Data una fissata copertura (es. incendio, malattia,..) la personalizzazione a priori si basa sull'analisi di dati. Dati di portafoglio o di mercato.

Schematizzazione:

PASSO 1

Si effettuano analisi preliminari sui dati per cercare di individuare caratteristiche specifiche dei rischi osservabili a priori "influenti sulla sinistrosità", cioè andiamo a cercare di capire dai dati se esistono elementi che abbiano un'influenza sulla valutazione probabilistica degli elementi che descrivono la sinistrosità di un assicurato.

Gli elementi che descrivono la sinistrosità di un assicurato sono:

- Numero di sinistri N
- Risarcimenti per sinistro Y
- Risarcimento totale X

Oss. Potrei pensare anche a cose più raffinare come ad es. dividendo i sinistri in sinistri a persone, a cose e a cose e persone, ma non lo faremo.

Dobbiamo dare a tali elementi una valutazione probabilistica e devo vedere se ci sono elementi\grandezze che sono influenti per tali valutazioni. Cioè elementi dai quali faremo dipendere le valutazioni di probabilità, essi sono detti *fattori di rischio* o *variabili tariffarie* (o potenziali)

Esempio:

Fattori di rischio R.C.A

- Caratteristiche dell'assicurato:

    - Età
    - Sesso (femmine<maschi)
    - Professione (dipende dall'uso dei veicolo)
    - Stato civile (sposato o no)
    - Zona di residenza
    - Provincia di residenza
- Caratteristiche del mercato
    - Potenza (Kw,CV) (potenze maggiori) →
    - Massa veicolo
    - Alimentazione del veicolo (diesel più nel commercio)
    - Marca e tipo di autoveicolo
    - Anzianità del veicolo
    - Colore
- Altri elementi
    - Uso del veicolo
    - Livello del massimale di copertura
    - Viene messo o no in garage
    - ..

<u>Esempio</u>: Fattori di rischio nel Ramo incendio

- Tipi di materiali con i quali sono costruite le diverse parti
- Numero piani
- Zona di ubicazione
- Uso

<u>Esempio</u>: Fattori di rischio nel Ramo malattia

- Età (è crescente con l'età)
- Sesso
- Professione
- Zona di residenza
- Limitazioni di copertura massimale

Sono fattori osservabili a priori con un'intervista all'assicurato

PASSO 2

Ogni fattore ha molte determinazioni, nelle tariffe però non vengono osservate tutte le determinazioni, ma esse vengono ripartite in livelli. Quindi il passo 2 si divide in:

I. Considerati i fattori di rischio, ho delle determinazioni che ripartiscono in *livelli* o *modalità*: <u>Esempio</u>: R.C.A.: età (18-22,23-27,28-50,50-64,>64) potenza (8-10,11-13,13.24,..)
II. Inoltre cerchiamo di eliminare fattori ridondanti o non particolarmente significativi (se li considerassi tutti non riassumerei bene la tipologia). Devo quindi selezionare i fattori

maggiormente significativi (infatti la numerosità dei fattori di rischio si riflette sul numero di variabili\parametri del modello; per farlo più semplice devo avere meno variabili)

L'obiettivo della fase 2 è quello di arrivare a selezionare dei fattori di rischio in modo tale da ripartire la collettività in classi di rischi analoghi e t.c. gli assicurati di una stessa classe siano analoghi al punto che riteniamo di dare la stessa valutazione probabilistica ai fattori di rischiosità.

Questo mi consente di trattare tutti gli assicurati di una stessa classe come copie di uno stesso tipo di rischio, tramite metodologie statistiche (GLM)

Le variabili selezionate sono chiamate variabili tariffarie.

PASSO 3

Attribuzione del premio alla classe tariffaria

Introduco una funzione detta *modello tariffario*, che ad ogni classe associa\attribuisce un premio.

Tale funzione tipicamente dipende da alcuni parametri, stimati dai dati con metodologie di tipo statistico.

Problema: che approccio utilizzo? Dal passo 2 sono arrivato alla suddivisione in classi tariffarie che rappresentano ciascuna un gruppo di rischi con caratteristiche di analogia talmente forti che assegniamo i.i.d. ai rischi di sinistrosità.

Come assegno il premio, valore che è uguale per ogni assicurato della classe?

- APPROCCIO TRADIZIONALE: (controllare se ce ne sia un altro)
  per semplicità di notazione suppongo che le analisi precedenti ci abbiano portato a considerare 2 variabili, cioè siano 2 le variabili tariffarie selezionate: (es. età e potenza fiscale del veicolo per R.C.A.) con determinazioni ripartite in I livelli o modalità (1,2,…,I) per la prima variabile e J livelli o modalità (1,2,..,J) per la seconda.
  Esempio
  Età: 18-22, 23-27, 27-43, >43
  1 2 3 4 classi
  Potenza: <17, 17-23, >23
  1 2 3 classi

A) MODELLI BASATI SULLE QUOTE DANNI:

Indico con $X_{ij}^{(k)}$ il risarcimento totale aleatorio (ex ante) per il k-esimo rischio nella classe tariffaria (i,j) individuata da una coppia ordinata (con i modalità della variabile I; j modalità della variabile J)

Supponiamo $X_{ij}^{(k)}$i.d. identicamente distribuiti al variare di k.

→ ne segue $E\left(X_{ij}^{(k)}\right) \triangleq E(X_{ij})$ è indipendente cioè da k, e chiamiamo con tale nome il risarcimento totale atteso comune a tutti i rischi della classe tariffaria (i,j).

Dati (sulla collettività)

Suppongo di disporre delle informazioni:

- c_{ij} = risarcimento totale osservato per i rischi della classe (i,j)
- t_{ij} = tempo di esposizione totale (nell'ambito della classe (i,j) o rischi anno (somma delle frazioni di anno nelle quali ciascuna polizza (i,j)è rimasta in osservazione)
- c = risarcimento totale portafoglio
- t = esposizione totale di portafoglio

Allora posso calcolare, classe tariffaria per classe tariffaria, i rapporti $Q_{ij} = \frac{c_{ij}}{t_{ij}}$ ma tale rapporto l'ho già introdotto\incontrato: è la quota danni ricavata per gli assicurati della classe (i,j). Ma siccome ho l'ipotesi: $X_{ij}^{(k)}$i.d. → la quota danni può essere vista come stima del risarcimento totale atteso per una classe (i,j).

→$Q_{ij} = \frac{c_{ij}}{t_{ij}} = \hat{E}(X_{ij})$

Posso pensare quindi di associare Q_{ij} ad una classe (i,j) ma invece non ci si ferma a tali stime grezze!

Si introduce un modello tariffario e si utilizzano qui le stime grezze! Un modello tariffario è una funzione che ad ogni classe tariffaria associa un premio e dipende da alcuni parametri.

I modelli tariffari più usati sono:

1. modello tariffario additivo
2. modello tariffario moltiplicativo

$$E(X_{ij}) = \begin{cases} p + \alpha_i + \beta_j & \mathit{nel\ modello\ addivito}\ 1. \\ p\ \alpha_i\ \beta_j & \mathit{nel\ modello\ moltiplicativo}\ 2. \end{cases}$$

Associa (i,j) → valore del premio

In queste funzioni p è un valore assegnato, mentre $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_{1,\dots,}\beta_j$ sono parametri chiamati *relatività*, che vengono stimate dai dati con l'obiettivo di andare ad accostare il modello ai dati.

<u>Esempio</u>: date le stime $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_j$ determinate in modo da avvicinarsi alle stime grezze:

$$\hat{E}(X_{ij}) = \begin{cases} \hat{p} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j \\ \hat{p}\ \hat{\alpha}_i\ \hat{\beta}_j \end{cases}$$

Perché introdurre modelli tariffari? Non bastano le stime grezze?

1. Perché l’uso delle stime grezze può portarci anche a premi molto diversi per classi che sono “vicine” (quindi potrei non riuscire a vendere la tariffa)
2. Perché potrei avere classi tariffarie con poche osservazioni quindi la quota danni non è detto sia ragionevole
3. Perché i dati potrebbero avere perturbazioni casuali non imputabili alle caratteristiche tariffarie (es. avvenimento di 1 grande sx → può essere casuale)
4. Perché le tariffe introducono un grado di solidarietà, cioè ci sono assicurati che pagano più dell’equo a fronte di assicurati che pagano meno dell’equo, per non avere troppa sperequazione tra i premi. SI decide di imputare premi più alti dell’equo a quelli ‘più buoni’ per far pagare un po’ meno a quelli con elevata sinistrosità.
   Oss. DI solito l’assicurazione prevede un meccanismo di *mutualità*: una collettività in cui tutti pagano P in modo che si possano risarcire i pochi sinistrati

Quali benefici introducono i modelli tariffari?

Io ho $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ classi tariffarie → dovrei studiare $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ premi. Con i modelli additivo-moltiplicativo invece di stimare $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ premi stimo $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ parametri (relatività) → si riduce il problema della stima.

Però ho delle restrizioni, introduco delle ipotesi:

- Si introduce un’ipotesi sull’effetto che hanno i rischi di tipo additivo dei 2 fattori sul risarcimento atteso (modello additivo)
- Si introduce un’ipotesi sull’effetto che hanno i rischi di tipo moltiplicativo dei 2 fattori sul risarcimento atteso (modello moltiplicativo)
- Si trascura l’effetto combinato delle due variabili\dei due fattori
  Es. $E(X_{ij}) = p\ \alpha_i\ \beta_j$
  Se vado a prendere $A = i$
  → $p\ \alpha_i\ \beta_1\ se\ \beta = 1$ (la seconda variabile ha modalità 1)
  → $p\ \alpha_i\ \beta_2$ se $\beta = 2$
  …
  → $p\ \alpha_i\ \beta_J\ se\ \beta = J$
  Qualunque sia l’effetto della seconda variabile il valore della prima variabile,cioè la prima variabile non ne risente
  → ipotesi di indipendenza dei valori dei due fattori

Come scelgo p?

1. $p = Q = \frac{c}{t}$
   <u>Idea</u>: se tutti gli assicurati pagassero Q, avrei coperto il risarcimento del portafoglio (soddisfa la condizione di bilanciamento tra entrate e uscite). Ma vengono meno le condizioni di equità! I buoni assicurati pagano troppo e se ne vanno, quindi avrei un portafoglio con selezione negativa.
   → calcolo p classe per classe in proporzione al rischio di sinistrosità $E(X_{ij}) = Q\ \alpha_i\ \beta_j$ → aggiusto Q classe per classe tenendo conto dei fattori di rischio di sinistrosità:

se $\alpha_i\beta_j$ < 1 → premio < premio equo

se $\alpha_i\beta_j$ > 1 → premio > premio equo

2. $p = Q(i^*, j^*)$ scelgo come premio la quota danni di una classe scelta come classe tariffaria di riferimento (i^*, j^*). Vado dunque a graduare i premi delle altre classi con il premio di tale classe (es. quella più numerosa del portafoglio più numeroso)

Come stimo le relatività?

Metodi di stima della relatività

A. Metodo di stima delle relatività intuitive per il modello moltiplicativo

Suppongo $p = Q$ → ipotesi del modello moltiplicativo

$E(X_{ij}) = Q\ \alpha_i\ \beta_j$

<u>Idea</u>: vado a considerare $Q_{i\cdot}$ è la quota danni osservata per gli assicurati del portafoglio che hanno la prima variabile tariffaria nella modalità i.

→ $Q_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{J} Q_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{J} c_{ij}}{\sum_{j=1}^{J} t_{ij}}$, con $\sum_{j=1}^{J} c_{ij}$ risarcimento totale dei rischi che hanno la prima variabile = i, con $\sum_{j=1}^{J} t_{ij}$ esposizione totale.

Oss. Può succedere che $Q_{i\cdot} > Q$, con Q quota danni calcolata a livello del portafoglio.

Il risarcimento medio per rischio (significato della quota danni) per gli assicurati che hanno la prima variabile tariffaria nella modalità i è più grande di Q (quota danni calcolata a livello del portafoglio)→ si pensa di fissare le relatività considerando i rapporti:

$\alpha_i = \frac{Q_{i\cdot}}{Q}$ e $\beta_j = \frac{Q_{\cdot j}}{Q}$ con $Q_{\cdot j}$ quota danni per gli assicurati che hanno la seconda variabile tariffaria nella modalità j.

→ $Q_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{I} c_{ij}}{\sum_{i=1}^{I} t_{ij}}$

Il valore atteso secondo questo approccio è:

$\hat{E}(X_{ij}) = \frac{Q_{i\cdot}}{Q}\frac{Q_{\cdot j}}{Q} Q = \frac{Q_i Q_{\cdot j}}{Q}$

→ tramite questo ho una perequazione dei primi, "lisciamento dei dati"

<u>Esempio numerico</u>:

i età	j potenza
1	1
1	2
1	3
..	..

Età: 18-22, 23-27, ..

Potenza: 8-12, 13-17, >17

Esempio reale: tariffe R.C.A. fino al 1/7/94
Le tariffe venivano decise a livello ministeriale e tutti dovevano imporre la stessa tariffa. Poi è entrata in vigore la liberalizzazione della tariffa. Tale tariffa veniva determinata in questo modo:
Aveva tre variabili tariffarie:

1. Potenza CV del veicolo (ripartita in 8 modalità)
2. Provincia di immatricolazione del veicolo (tripartita in 8 modalità)
3. Livello di massimale di copertura (ripartito in 8 modalità)

→ ogni classe tariffaria era individuata dalla terna $(\mathrm{i,j,h})$ ed era accolta un'ipotesi di modello moltiplicativo cioè:
$E(X_{ijh}) = \ p \ \alpha_i \ \beta_j \gamma_h$ con $\alpha_i, \beta_j, \gamma_h$ stimate dai dati tramite l'approccio delle relatività intuitive, ponendo $p = Q_{(i^* j^* h^*)}$:

$$\widehat{\alpha_i} = \frac{Q_{i\cdot\cdot}}{Q_{(i^* j^* h^*)}}$$

$$\widehat{\beta_j} = \frac{Q_{\cdot j \cdot}}{Q_{(i^* j^* h^*)}}$$

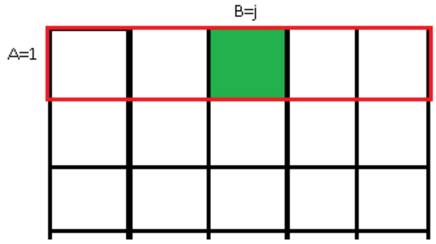
$$\hat{\gamma}_h = \frac{Q_{\cdot\cdot h}}{Q_{(i^* j^* h^*)}}$$

le stime delle relatività tramite approccio intuito vengono dette *coefficienti tecnici di personalizzazione della tariffa*

B. Condizione di bilanciamento

Data una tariffa, si considera la ripartizione del portafoglio in gruppi "numerosi" di assicurati (in macroclassi), e si dice che la tariffa soddisfa\rispetta la condizione di bilanciamento rispetto all'assegnata ripartizione. Se per ogni macroclasse applicando la tariffa agli assicurati, si ha uguaglianza tra premi e risarcimenti osservati (cioè macroclasse per macroclasse la somma premi = somma risarcimenti osservati → la tariffa copre il fabbisogno)

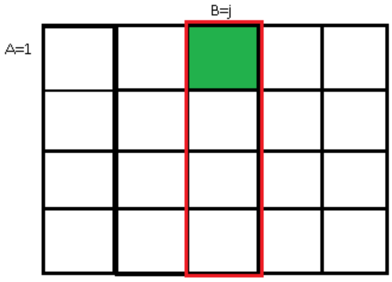
- Bilanciamento sulle righe: (o bilanciamento rispetto la prima variabile) Se per ogni livello della prima variabile tariffaria il montepremi, applicando la tariffa, è uguale al risarcimento osservato.
  $P_{ij} \rightarrow \sum_{j=1}^{J} p_{ij} t_{ij} = \sum_{j=1}^{J} Q_{ij} t_{ij} = \sum_{j=1}^{J} c_{ij} \ \ \forall i = 1, .., I$
  Per ogni riga, applicando la tariffa, ho uguaglianza tra premi e risarcimento → ok!



la macroclasse è la riga

- Bilanciamento sulle colonne: (o bilanciamento rispetto la seconda variabile)

$P_{ij} \rightarrow \sum_{i=1}^{I} p_{ij} t_{ij} = \sum_{i=1}^{I} Q_{ij} t_{ij} = \sum_{i=1}^{I} c_{ij} \; \forall j = 1,..,J$



la macroclasse è la colonna

→ bilanciamento globale:

def. Si dice che una tariffa verifica la condizione di *bilanciamento globale* se l'equilibrio tra entrate e uscite è a livello del portafoglio, cioè: $\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} p_{ij} t_{ij} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} c_{ij}$.

È una condizione molto importante per l'assicuratore.

Oss. Bilanciamento righe → bilanciamento totale

Bilanciamento colonne → bilanciamento totale

C. Metodo dei totali marginali

(sia per modello additivo che per modello moltiplicativo)

$E(X_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j) \triangleq \begin{cases} p + \alpha_i + \beta_j \\ p\;\alpha_i\;\beta_j \end{cases}$ nelle ipotesi del modello

Va a stimare le stime delle relatività in modo che la tariffa verifichi BC e BR, cioè $\widehat{\alpha_i}, \widehat{\beta_j}$ sono determinate grazie al sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} f(\alpha_i, \beta_j)\, t_{ij} = \sum_{j=1}^{J} c_{ij} & i = 1,..,I \quad BR \\ \sum_{i=1}^{I} f(\alpha_i, \beta_j)\, t_{ij} = \sum_{i=1}^{I} c_{ij} & j = 1,..,J \quad BC \end{cases}$$

Ad esempio nel modello moltiplicativo: con $\mathrm{p} = \mathrm{Q}$ diventa

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} Q\;\alpha_i \beta_j\, t_{ij} = \sum_{j=1}^{J} c_{ij} & i = 1,..,I \quad BR \\ \sum_{i=1}^{I} Q\;\alpha_i \beta_j\, t_{ij} = \sum_{i=1}^{I} c_{ij} & j = 1,..,J \quad BC \end{cases}$$

Equivalentemente posso riscrivere i termini del sistema

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{J} c_{ij}}{Q\sum_{j=1}^{J} \beta_j\, t_{ij}} & i = 1,..,I \quad BR \quad (I° \; gruppo) \\ \beta_j = \dfrac{\sum_{j=1}^{J} c_{ij}}{Q\sum_{j=1}^{J} \alpha_i\, t_{ij}} & j = 1,..,J \quad BC \;\; (II° \; gruppo) \end{cases}$$

In questo sistema nel I° gruppo di equazioni α_i viene a dipendere solo dai β e non dagli α. E nel II° gruppo i β_j non dipende dai β ma solo dagli α.

→ posso risolvere con un metodo iterativo.

Che strategia uso?

- I° passo: fissiamo $(\alpha_1^{(I°)}, \dots, \alpha_I^{(I°)})$ li sostituisco nelle equazioni del II° gruppo → ho un vettore al primo passo $\left(\underline{\alpha}_i^{(I°)}, \underline{\beta}_j^{(I°)}\right)$
- II° passo: prendo i $\underline{\beta}_j^{(I°)}$ del primo gruppo e determino $(\alpha_1^{(II°)}, \dots, \alpha_I^{(II°)})$ li sostituisco in II° e ricavo $(\beta_1^{(II°)}, \dots, \beta_J^{(II°)})$ e ottengo $\left(\underline{\alpha}_i^{(II°)}, \underline{\beta}_j^{(II°)}\right)$.
- III° passo: …

Si prova che la successione $\left(\underline{\alpha}_i^{(n°)}, \underline{\beta}_j^{(n°)}\right)_n$ converge alla soluzione del sistema.

Oss. In pratica si impone una condizione di arresto $\left(\underline{\alpha}_i^{(\overline{n})}, \underline{\beta}_j^{(\overline{n})}\right)$

A livello $\left(\underline{\alpha}_i^{(n)}, \underline{\beta}_j^{(n)}\right)$ cosa succede?

Es. al secondo passo: questo passo in generale non soddisfa il BR e BC (entrambe) ma una condizione di bilanciamento è soddisfatta: quella sulle colonne, per come ho impostato il sistema (e approssimativamente quella sulle righe) ma → anche quella generale

Se invece parto dai Beta invece che dagli Alfa:

- I° passo: fisso i $(\beta_1^{(I°)}, \dots, \beta_J^{(I°)}) \rightarrow^{(I)} (\alpha_1^{(I°)}, \dots, \alpha_I^{(II°)})$ → ho la soluzione del 1° passo $\left(\underline{\alpha}_i^{(I°)}, \underline{\beta}_j^{(I°)}\right)$ che verifica BR

  ↙
- II° passo: prendo gli $\underline{\alpha}_i^{(I°)}$del primo gruppo e determino i $(\beta_1^{(II°)}, \dots, \beta_J^{(II°)}) \rightarrow^{(II)}$ $(\alpha_1^{(II°)}, \dots, \alpha_I^{(II°)})$ ecc..
- Ho la soluzione del 2° passo $\left(\underline{\alpha}_i^{(2)}, \underline{\beta}_j^{(2)}\right)$ che verifica BR (ma in generale non BC assieme)
- …

Mi fermo per un fissato n*.

Oss. BG <u>non</u> implica né BC né BR

Oss. $E\left(X_{ij}\right)$ non cambia per gli assicurati di una stessa classe.

Ricordando che le quote danni sono $Q_{ij} = \frac{c_{ij}}{t_{ij}}$ stime grezze di $E\left(X_{ij}\right)$ e $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ sono stimate dai dati secondo qualche criterio di accostamento ai dati, vediamo altri metodi.

D. Altri metodi di stima delle relatività

Dato $E\left(X_{ij}\right) = f\left(\alpha_i, \beta_j\right)$ e Q_{ij}(stime) accostiamo le stime ai dati tramite:

E. Metodo dei minimi quadrati

Considero gli scostamenti quadratici tramite i valori attesi forniti dal modello e le stime grezze, si vanno poi a stimare le relatività che si adattano ai dati secondo i minimi quadrati:

$\min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \left(f\left(\alpha_i, \beta_j\right) - Q_{ij} \right)^2 = \min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} F(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$

→ trovo $\underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\beta}}$ studiando numericamente (non in forma chiusa) il sistema:

$\begin{cases} \frac{dF}{dx_i} = 0 & i = 1, \ldots, I \\ \frac{dF}{dx_j} = 0 & j = 1, \ldots, J \end{cases}$ sistema condizioni del 1° ordine

In questo caso gli scostamenti sono pesati con peso 1. Ma esistono altri modelli con altri pesi come:

- Metodo dei minimi quadrati ponderati con peso dato dalle esposizioni t_{ij}

  $\min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} t_{ij} \left(f\left(\alpha_i, \beta_j\right) - Q_{ij} \right)^2$

- Metodo del minimo Chi-quadrato

  $\min_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} t_{ij} \frac{\left(f(\alpha_i, \beta_j) - Q_{ij} \right)^2}{f(\alpha_i, \beta_j)}$

Abbiamo presentato modelli tariffari basati sulle quote danni; ma noi abbiamo due componenti: componente numero di sinistri e componente risarcimento per singolo sinistro. Allora possiamo studiarle separatamente e costruire modelli tariffari partendo da essi.

B) MODELLI BASATI SU FREQUENZA SINISTRI E COSTO MEDIO PER SINISTRO:

Abbiamo sempre le due variabili selezionate e le ipotesi di analogia per assicurati che appartengono alla stessa classe tariffaria

Indico con $N_{ij}^{(k)}$= numero aleatorio di sinistri in un anno per il k-esimo (assicurato) rischio della classe (i, j).

Introduco tali ipotesi:

- Ipotesi 1: supponiamo che $N_{ij}^{(k)}$ siano i.d. al variare di k (o meglio supponiamo che il processo di selezione ci faccia dire che $N_{ij}^{(k)}$siano i.d.)

  → $N_{ij}^{(k)} \triangleq N_{ij}$ cioè non dipendente da k: N_{ij} è un simbolo compatto per numero annuo atteso di sinistri per un qualunque assicurato della classe (i, j).

- Ipotesi 2: suppongo che i risarcimenti per sinistro in ipotesi che il sinistro si verifichi Y_{ij} siano i.d.; cioè la distribuzione del risarcimento per sinistro sia la medesima per tutti gli assicurati per tutti i sinistri che colpiscono la classe (i, j).

Indichiamo con $E(Y_{ij})$ il valore atteso di tale distribuzione (non dipende dall'assicurato ne dal sinistro) → rischi omogenei

- Ipotesi 3: Supponiamo di disporre dei seguenti dati, rilevati nel tempo di esposizione di un anno.
    - n_{ij} = numero totale di sinistri osservati nella classe (i,j)
    - t_{ij}= esposizione totale della classe (i,j)
    - c_{ij}= risarcimento totale osservato nella classe (i,j)
    - n= numero dei sinistri di portafoglio
    - t= tempo di esposizione totale del portafoglio $\sum t_{ij} = t$
    - c= risarcimento totale osservato ($\sum c_{ij} = c \forall$ i, j)
        - $\rightarrow \frac{c_{ij}}{n_{ij}}$= costo medio per sinistro nella classe (i,j) (stima empirica di $E(Y_{ij})$)
        - $\rightarrow \frac{n_{ij}}{t_{ij}}$= frequenza sinistri nella classe (i,j) (stima empirica di $E(N_{ij})$)

❖ **Componente $E(N_{ij})$**

Dai dati ricavo $\frac{n_{ij}}{t_{ij}} = f_{ij}$ frequenza sinistri nella classe (i,j) ed è una stima empirica di $E(N_{ij})$ quindi sono stime grezze degli $E(N_{ij})$ che voglio stimare. Ma per esigenze di perequazione delle stime grezze tramite modello tariffario, vado a considerarne uno di tipo additivo e uno di tipo moltiplicativo:

$E(N_{ij}) = \begin{cases} p + \alpha_i + \beta_j \\ p\,\alpha_i\,\beta_j \end{cases}$ con p assegnato in 2 modi: p $= \begin{cases} \frac{n}{t} = f\ (freq\ di\ portafoglio) \\ f_{i^*,j^*} \qquad (freq\ classe\ \ (i,j)) \end{cases}$

Vado ora a stimare le relatività andando ad accostare il modelle alle stime grezze $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ e vado a confrontare modello e frequenze.

Ricavate $\underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\beta}}$ ottengo $\hat{E}(N_{ij}) = \begin{cases} \hat{p} + \widehat{\alpha_i} + \widehat{\beta_j} \\ \hat{p}\,\widehat{\alpha_i}\,\widehat{\beta_j} \end{cases}$ stima della componente numero di sinistri della classe (i,j).

❖ **Componente $E(Y_{ij})$**

Stimiamo il risarcimento atteso per sinistro in ipotesi che il sinistro sia avvenuto classe per classe; calcolando:

$\frac{c_{ij}}{n_{ij}} = \overline{c}_{ij}$ cioè il risarcimento medio di sinistri della classe (i,j) che è proprio la stima grezza di $E(Y_{ij})$. In realtà il costo medio per sinistro non è quello cercato perché voglio perequare le stime grezze.

Vado quindi a stimare

$E(Y_{ij}) = \begin{cases} p + \alpha_i + \beta_j \\ p\,\alpha_i\,\beta_j \end{cases}$con p=$\begin{cases} \frac{c}{n} = \overline{c} \\ \overline{c}_{ij}{}^{*} \end{cases}$ dove $p = \overline{c}$ è costo medio per sinistro valutato con i dati di portafoglio

Stimo dai dati $\underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\beta}}$ con uno dei metodi visti accostando il modello con le stime grezze.

Posso così ricavare $\hat{E}(Y_{ij}) = \begin{cases} \hat{p} + \widehat{\alpha_\imath} + \widehat{\beta_\jmath} \\ \hat{p}\,\widehat{\alpha_\imath}\,\widehat{\beta_\jmath} \end{cases}$

Oss. $\hat{p} + \widehat{\alpha_\imath} + \widehat{\beta_\jmath}$ sono $\neq$ da quelli di $\hat{E}(N_{ij})$!

Avendo $\hat{E}(N_{ij})$e $\hat{E}(Y_{ij})$ posso, classe tariffaria per classe tariffaria, costruire $\hat{E}(X_{ij})$ in ipotesi di modello composto come: $\hat{E}(X_{ij}) = \hat{E}(N_{ij})\hat{E}(Y_{ij})$ risarcimento totale atteso per ciascun rischio nella classe.

Oss. Potrebbe accadere (e spesso accade) che quando selezioniamo le variabili significative esse dipendano dalla variabile risposta; ma per fortuna ho una certa flessibilità con la formula $\hat{E}(X_{ij}) = \hat{E}(N_{ij})\hat{E}(Y_{ij})$ di modello perché posso studiare la significatività delle variabili sulle diverse componenti $E(N_{ij})$ e $E(Y_{ij})$.

<u>Esempio</u> R.C.A.

Età, sesso

$et\grave{a}$	M	F
1	(i,j)	…
2	…	…

Raccolgo i dati e stimo $\hat{E}(N_{iF})\ ed \hat{E}(N_{iM})$. Ora vado a vedere la variabile risposta e andando a studiare i costi medi mi accorgo che sono influenti il sesso e la potenza fiscale del veicolo e non l'età! Con ripartizione del portafoglio data da: M/F al variare del costo del sinistro ricavo $\hat{E}(N_{Mj})\ ed \hat{E}(N_{Fj})$.

Per la tariffa devo costruire la partizione prodotto (la più fine) (età, sesso, potenza fiscale) quindi studio la terna di variabili. $\rightarrow \hat{E}(X_{iFj}) = \hat{E}(X_{iF})\hat{E}(Y_{Fj})$

C) MODELLI BASATI SUL TASSO DI PREMIO

<u>Ipotesi sottostanti</u>:

Se indico con $\boldsymbol{X_{ij}^{(k)}}$= risarcimento totale per il k-esimo rischio nell'ambito della classe (i,j) e introduco $\boldsymbol{\omega_{ij}^{(k)}}$= esposizione monetaria (massima determinazione possibile del risarcimento per sinistro) per il k-esimo rischio nell'ambito della classe (i,j).

Accogliamo tali ipotesi:

1. La selezione delle variabili mi consente di far si che posso considerare che i risarcimenti per unità di esposizione monetaria $\frac{X_{ij}^{(k)}}{\omega_{ij}^{(k)}}$ siano i.d. al variare di k → ho un'uguale speranza matematica: $E\left(\frac{X_{ij}^{(k)}}{\omega_{ij}^{(k)}}\right) = m_{ij}$ tasso teorico di premio
2. Suppongo di avere i dati:

   c_{ij} risarcimento totale osservato nell'ambito della classe (i,j).

$\omega_{ij} = \sum_k t_{ij}^{(k)} \omega_{ij}^{(k)}$ dove $t_{ij}^{(k)}$ è il tempo di esposizione per la polizza di rischio k-esimo nella classe (i, j)

$\rightarrow \tau_{ij} = \frac{c_{ij}}{\omega_{ij}}$ è il tasso di premio che è una stima empirica di m_{ij} (tasso teorico)

Indico con $\tau = \frac{c}{\omega}$ il tasso medio del portafoglio

Anche qui introduciamo un modello tariffario o additivo o moltiplicativo.

$\rightarrow m_{ij} = \begin{cases} p + \alpha_i + \beta_j \\ p\ \alpha_i\ \beta_j \end{cases}$ con p=$\begin{cases} \tau & tasso\ di\ portafoglio \\ \tau_{i^* j^*} & tasso\ di\ una\ classe \end{cases}$

$\rightarrow \underline{\hat{\alpha}}, \underline{\hat{\beta}}$ ottenute andando a mettere in relazione $m_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$ con i dati τ_{ij}, ottenendo dunque $\widehat{m_{ij}}$ stima del tasso teorico di premio.

Oss. Qui i tassi di premio, <u>non</u> i premi, sono gli stessi nell'ambito di una medesima classe tariffaria (i, j)

<u>Esempio</u>: fissata una classe

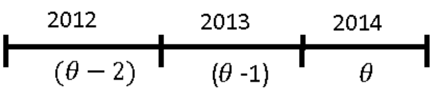
X $\qquad \hat{E}$(X)=?

ω nella classe (i, j)

$\hat{E}$(X) è dato da $\widehat{m_{ij}} * \omega$. I premi sono diversi perché l'assicurato potrebbe avere esposizione monetaria diversa. Quindi costruisco una tavola di tassi.

CHE DATI USO DA UN ANNO ALL'ALTRO?

Come abbiamo appena visto, sulla base dei dati in un anno riesco a stimare $\hat{E}(X_{ij})$. Suppongo di essere nel 2013 e di voler costruire la tariffa del 2014. Per stimare tale grandezza ho bisogno dei dati su un anno.



Ho i dati su un anno (2012), io mi colloco nel 2013, non ancora finito.

In generale quindi, se voglio sapere θ e sono in (θ -1) ho i dati di $(\theta - 2)$.

Oss. Posso accogliere come premi le stime $P_{ij} = \hat{E}(X_{ij})$ solo se nel passare dall'anno (θ -1) a θ il fenomeno non è cambiato in modo significativo.

In generale però non è cosi a causa dell'inflazione e altri fattori. Perciò $\hat{E}(X_{ij})$ non è adeguato come premio.

Idea: Siccome le stime vecchie possono non essere adeguate, faccio questo ragionamento. Ho stimato in $(\theta - 2)$ $\widehat{\alpha_\iota}, \widehat{\beta_J}$ e la quota danni di portafoglio scomponibile come $Q = f\,\overline{c}$ (da $\mathrm{E(X)} = \mathrm{E(N)E(Y)}$). Ora f è la frequenza sinistri di portafoglio valutata con i dati $(\theta - 2)$. Ma in realtà noi ci troviamo nell'anno $(\theta - 1)$ → posso valutare se tale stima (di $f\ e\ \overline{c}$) è cambiata usando le informazioni dell'anno precedente cioè se tale stima con i dati aggiornati a $(\theta - 1)$ è buona o meno.

Infine proietto la stima Q per l'anno θ. Così arrivo ad una stima $Q' = f'\,\overline{c}'$ cioè una stima del risarcimento medio per rischio valutato nell'anno $(\theta – 2)$ per il periodo di validità della tariffa.

→ Q è il premio medio di tariffa

Ora uso le relatività stimate per avere una grandezza proporzionale al premio:

$P_{ij} \propto \hat{E}(X_{ij})$ cioè $P_{ij} = P\hat{E}\big(X_{ij}\big)$, vado poi a stimare P in modo che la tariffa ricopra il valore stimato del fabbisogno.

Se P_{ij} = quota dei rischi che si trovano nella classe (i, j) (cioè è la stima della probabilità che un rischio si trovi nella classe(i, j)).

Se c'è stabilità nel portafoglio, posso accogliere queste stime anche per l'anno θ (2014) altrimenti per essere più preciso, proietto le mie stime ottenendo p'_{ij} (es. evoluzione del parco assicurato non mi garantisce la stabilità della ripartizione degli assicurati nelle classi.)

Allora vado a valutare:

$P \mid \sum_i \sum_j P\hat{E}\big(X_{ij}\big)\hat{P}_{ij} = \mathrm{Q}$ cioè tale che il premio medio = premio di tariffa, ossia tale che la tariffa vada a coprire il fabbisogno stimato di portafoglio. La formula dice che i premi sono proporzionali alle stime ottenute in $(\theta - 2)$ usando Q come costante di proporzionalità.

Es. $\sum_i \sum_j \overline{P}\widehat{\alpha_\iota}, \widehat{\beta_J}\hat{P}_{ij} = \mathrm{Q}$

Oss. Le ipotesi però devono essere le stesse di 2 anni fa!

Oss1. $\frac{P_{ij}}{P_{hk}} = \frac{\hat{E}(X_{ij})}{\hat{E}(X_{hk})}$ cioè il rapporto tra i premi delle due classi tariffarie è uguale al rapporto tra i risarcimenti attesi stimati. Nel modello moltiplicativo $\frac{\hat{E}(X_{ij})}{\hat{E}(X_{hk})} = \frac{\widehat{\alpha_\iota}\widehat{\beta_J}}{\widehat{\alpha_h}, \widehat{\beta_k}}$ con $\widehat{\alpha_\iota}, \widehat{\beta_J}$ si chiamano "relatività" perché sono livelli relativi di premio.

Oss2. In pratica la manovra di stima delle relatività $\widehat{\alpha_\iota}, \widehat{\beta_J}$ viene fatta usando i dati di più anni (es. dati del $(\theta - 2), (\theta - 3), (\theta - 4)$). Come se i dati di più anni fossero indipendenti, ma tenendo conto di alcune cose come ad es l'inflazione.

Oss3. La tariffa viene vista e rivalutata (aggiornata) in modo continuo nel caso dell'anno e non una sola volta all'anno.

PREMI E STORIA DI SINSITROSITA' DI UN INDIVIDUO: TECNICHE DI ADEGUAMENTO DEL PREMIO (II PERSONALIZZAZIONE A POSTERIORI)

Ripetendo:

l'obbiettivo della personalizzazione a priori: dividere in classi la collettività e associare il premio ad ogni classe. Abbiamo inoltre selezionato le variabili in modo che in ogni classe gli assicurati risultino omogenei (analoghi).

Oss. Per quanto riguarda gli assicurati vengono ben ripartiti, ma vi è comunque un'eterogeneità negli individui e anche nei sinistri (es. prontezza riflessi, stile di guida, uso sostanze stupefacenti,..) poiché alcune variabili osservabili non sono note a priori o non sono state prese in considerazione perché dovrei controllarne la veridicità (nb: oppure perché vi sono delle variabili influenti ma che non posso usare come il sesso) e ciò è economicamente sconveniente.

Vi sono elementi che fanno sì che vi sia un'eterogeneità residua

Per formulare la sinistrosità futura di un individuo e fare valutazioni sui numeri aleatori che lo descrivono è quindi utile tenere conto sia di caratteristiche osservabili a priori che della storia di sinistrosità dell'individuo. Infatti essa mi aiuta a valutare meglio un individuo poiché è rilevatrice di caratteristiche non osservabili a priori ma influenti sulla sinistrosità.

Oggi si aggiusta il premio P che è ricavato a priori e a posteriori tenendo conto della specifica storia di sinistrosità dell'assicurato in questo modo:

dato P=premio collettivo di una classe (i, j), lo adatto ad ogni individuo andando a vedere la sua storia:

- se non ha avuto sinistri (<sinistrosità) gli faccio pagare <P (sconto)
- se ha avuto sinistri (> sinistrosità) gli faccio pagare > P (aggravio di premio)

→ Premio collettivo di classe $(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \rightarrow^{passo\ a}$ premio basato sull'esperienza/storia individuale.

Obiettivo: arrivare a premi che valutino meglio le grandezze che descrivono la sinistrosità di un individuo.

Tali tecniche di personalizzazione basate sull'esperienza individuale sono dette *merit rating* o *experience rating*.

In realtà hanno due obiettivi:

- consentire all'assicuratore di valutare meglio i rischi
- indurre gli assicurati ad un comportamento migliore per evitare gli aggravi di premio

Esistono diverse tecniche per il problema dell'adeguamento del premio in base all'esperienza:

1. Approccio bayesiano:
   parte da valutazioni fatte a priori $P(E), P(H) e\ P(E|H)$ per arrivare a valutazioni aggiornate. Tale approccio è però complicato; ci sono tecniche semplificate.
2. Approccio basato sulla teoria della credibilità: in opportune ipotesi è equivalente al bayesiano semplificato
3. Approccio attraverso sistemi (Bonus-Malus)

Vediamo le idee che stanno dietro a questi approcci:

Approccio bayesiano:

Fisso un individuo osservato per T anni e descrivo la sua sinistrosità tramite un processo stocastico $X_1, X_2, \ldots$ dove X_t=risarcimento totale aleatorio per individuo nell'anno t. (con l'ipotesi di avere un modello discreto)

Si introduce ora un'ipotesi probabilistica assegnando la legge al processo: individui appartenenti alla stessa classe (i,j) hanno la stessa legge\ distribuzione di probabilità del processo.

Oss. In un approccio di questo tipo non è possibile accogliere un'ipotesi di indipendenza stocastica (perché sto tenendo conto della storia di un individuo) quindi è uno dei modelli in cui si assume vi sia qualche struttura di dipendenza tra i numeri aleatori.

Voglio valutare il premio nell'anno T+1:

$E(X_{T+1})$= premio a priori nell'anno T+1

Se indico con $H_T = (X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_T = x_T)$ la storia di sinistrosità di un individuo, allora valuto $E(X_{T+1}|H_T)$ detto *premio a posteriori* per l'anno T+1 nota la storia H_T o premio bayesiano.

Oss. Mentre $E(X_{T+1})$ è lo stesso per tutti gli individui della classe (i, j) poiché essi hanno la stessa legge; $E(X_{T+1}|H_T)$, dipende dalla storia passata di ciascuno.

Tale approccio è (molto) complicato: devo infatti specificare la legge del processo stocastico, devo saper calcolare $E(X_{T+1}|H_T)$ ed è di difficile esposizione, da parte dell'assicuratore, all'assicurato poiché richiede un elevato livello di specializzazione!

Oss. Esistono altre strade che hanno l'approccio bayesiano come guida ma forniscono un approccio che richiede meno valutazioni e più facilità nel fare i conti.

Approccio basato sulla teoria della credibilità:

Descrizione:

suppongo di avere fissata una classe tariffaria k, anno di calendario t, e suppongo che il premio (premio basato sulla personalizzazione a priori) sia P_{tk} (costruito andando a considerare una collettività di individui)

Suppongo ora di avere nel portafoglio un assicurato che abbiamo potuto osservare per T anni precedenti, e per questo assicurato suppongo di aver osservato i seguenti risarcimenti:

$x_1, \ldots, x_T \rightarrow$ risarcimenti totali aleatori osservati

Posso calcolare la loro media aritmetica:

$\overline{x_T} = \frac{x_1 + \cdots + x_T}{T} \rightarrow$ può essere intesa come la stima di $E(X_{T+1})$

abbiamo osservato l' esperienza di sinistrosità dell' assicurato.

Ho due strade estreme per dare il premio a tale individuo:

a. Non tengo conto della sua sinistrosità personale e gli assegno il P della classe cioè P_{tk} (premio a priori, collettivo o premio basato su dati collaterali)

b. Gli do il premio P che non tiene conto degli altri individui ma è basato esclusivamente sulla storia individuale cioè $\overline{x_T}$ (basata su dati individuali

La via della credibilità persegue una via intermedia. Una tipica formula della credibilità è: $P_{t,k}(H_T) = (1 - z_T)P_{t,k} + z_T\overline{x_T}$ con $0 \leq z_T \leq 1$ detto fattore\peso di credibilità, mentre P_{tk}è premio dell'assicurato della classe k, vista la sua esperienza di sinistrosità

→È una combinazione convessa (poiché $z_T \in [0,1]$) ha il premio a priori e il riassunto della sua storia di sinistrosità. Significa che tanto più grande è z_T tanto più peso è dato dall'esperienza individuale rispetto al premio collettivo $P_{t,k}$

Formule di questo tipo sono nate da idee intuitive e sono inoltre usate per valutare tariffe (quelle con pochi dati) in nuovi settori d'affari.

Come assegno i pesi z_T?

È naturale pensare che $z_1 < z_2 < \cdots$ cioè più lungo è il periodo di osservazione sull'individuo più il peso dò alla sua storia individuale! Ma come scelgo z_T?

Teoria della credibilità bayesiana lineare:

<u>Idea</u>: Mi metto nel quadro bayesiano: ad ogni individuo assegno una valutazione probabilistica ed un premio bayesiano, valutato andando a considerare lo stimatore: $E(X_{T+1}|X_1, X_2, \dots, X_T)$, dove $X_1, X_2, \dots, X_T$ è il processo di osservazione, che è funzione del processo di osservazione, anche molto complesso. Lo approssimo. Lo approssimo con funzioni semplici. Come polinomi di grado 1 o inferiori. Idea: considero una *funzione lineare affine* $\alpha_0 + \sum_{h=1}^{T} \alpha_h X_h$ con $(\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_T) \in R^T$. Vado ora a determinare $\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_T$ andando a minimizzare una funzione di perdita (quadratica):

$$\min_{\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_T} [E(X_{T+1}|x_1, x_2, \dots, x_T) - (\alpha_0 + \textstyle\sum_{h=1}^{T} \alpha_h x_h)]^2 \text{ con}$$

$E(X_{T+1}|x_1, x_2, \dots, x_T)$ premio bayesiano

$\alpha_0 + \sum_{h=1}^{T} \alpha_h X_h$ premio comb. lineare

Cerco la funzione lineare affine che mi accosta al meglio il premio bayesiano.

Se chiamo $\alpha^*{}_0, \alpha^*{}_1, .., \alpha^*{}_T$ la soluzione è $\alpha^*{}_0 + \sum_{h=1}^{T} \alpha^*{}_h x_h$

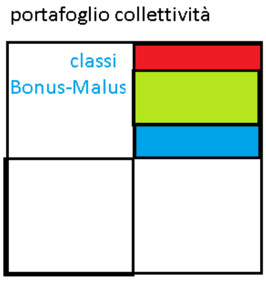
Quindi vista l'esperienza di sinistrosità $x_1, x_2, \dots, x_T$ e l'esperienza H_T

→ $P_{t,k}^{cred}(H_T)$= $\alpha^*{}_0 + \sum_{h=1}^{T} \alpha^*{}_h x_h$ e sotto opportune ipotesi questa formula si particolarizza nella formula: $\alpha^*{}_0 + \sum_{h=1}^{T} \alpha^*{}_h x_h = (1 - z_T)P_{t,k} + z_T\overline{x_T}$

→ capisco qual è l'espressione di z_T

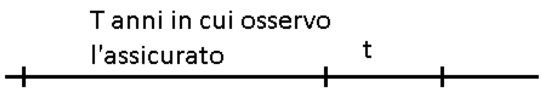
Approccio mediante sistemi bonus-malus:

In questo caso, fissata la generica classe tariffaria k, gli assicurati della classe sono ulteriormente ripartiti in classi dette *classi di merito* del sistema o *classi bonus-malus*



Il premio quindi dipende da k e dalla classe di merito Y_t per l'anno t.
La classe bonus-malus nell'anno t viene determinata, nota la classe precedente e il numero di sinistri che ho riportato nell'anno t-1, i quali sono $Y_t \leftarrow (Y_{t-1}, n_{t-1})$ con
Y_{t-1} classe bonus-malus anno precedente
n_{t-1} numero sinistri nell'anno precedente a t

Oss. In questo caso tengo conto dell'esperienza di sinistrosità solo tenendo conto del numero di sinistri, mentre prima (e in generale) il premio veniva a dipendere anche dal premio a priori e dagli importi di danno; avevo cioè una situazione del tipo:
$P_{t,k}(H_T) = f(P_{t,k}, x_1, x_2, \dots, x_T)$ con
t anno
K classe
$P_{t,k}$ premio a priori
$x_1, x_2, \dots, x_T$ numero sinistri e importi di danno.
Ora invece con il sistema bonus-malus ho:
$P_{t,k} = f(P_{t,k}, n_{t-1}, \varphi(n_1, \dots, n_T))$
chiamo $y_{t-1} \triangleq \varphi(n_1, \dots, n_T)$ la sintesi della esperienza di sinistrosità dell'assicurato data dalla classe bonus-malus occupata nell'anno precedente



Non tengo conto degli importi di danno perché:

- per semplicità
- mentre il numero di sinistri in un dato anno è subito accessibile (o presto ricavabile\disponibile) ed è affidabile, un sinistro per essere pagato può richiedere anche più tempo (es. 5anni). Quindi l'importo di danno è un'informazione disponibile anche molto tempo dopo
- Sotto tale ragionamento vi è la seguente ipotesi: l'attenzione dell'individuo può influire più sulla componente numero sinistri che su quella dei costi in quanto un errore alla guida dello stesso tipo può causare costi molto diversi (es. incidente auto: danni cose, danni a persone, etc.)
  → l'idea è che i diversi tipi di conseguenze dovute ad uno stesso tipo di errore sono difficilmente conoscibili a priori.

Il sistema bonus-malus è quindi costituito da

- Classi di merito 1,2,.., J

- Regole di ingresso nel sistema: in quali delle classi vado ad inserire un nuovo assicurato o un assicurato proveniente da un'altra tariffa
- *Regole di transizione* o evolutive: noto il numero di sinistri si ha $(n_{t-1}, y_{t-1}) \to y_t$
- Coefficienti di premio: a fronte di ogni classe di merito corrisponde un coefficiente π_i. Essi soddisfano π_1<…<π_J

  1 → π_1

  2 → π_2

  …

  J → π_J

  Tali π_i sono *fattori di riduzione* (o sconto) o *fattori di aggravio* di premio per gli assicurati in classe bonus-malus, rispetto al premio base: il premio bonus-malus calcolato con una formula di tipo moltiplicativo è:

  $P_{t,k,j}^{BM} = P_{tk}\pi_j$ con

  j classe di BM

  k classe tariffaria

  t anno

  $P_{t,k,j}^{BM}$ premio bonus-malus per un assicurato in classe tariffaria k e classe bm j

  P_{tk} premio di riferimento o premio base per l'anno t, per la classe tariffaria k

  - Se π_j<1 allora ho classi bonus-malus (sono le classi per cui ho sconto)
  - Se π_j>1 allora ho classi bonus-malus (sono le classi per cui aggravio)
  - A volte $\exists h | \pi_h = 1$ allora gli assicurati pagano il premio base

  Il premio base spesso è del tipo $P_t\gamma_k$ parametro che dovrebbe tenere conto delle caratteristiche di sinistrosità della classe tariffaria.

  (γ_kè una relatività introdotta nella fase di personalizzazione a priori)

<u>Esempio</u>. Bonus-Malus italiano (prima della liberalizzazione delle tariffe)

Spesso un sistema di bonus-malus è rappresentato da una tabella.

Il sistema italiano è un sistema di 18 classi con la 13ª classe che è quella di riferimento e la 14ª quella di ingresso.

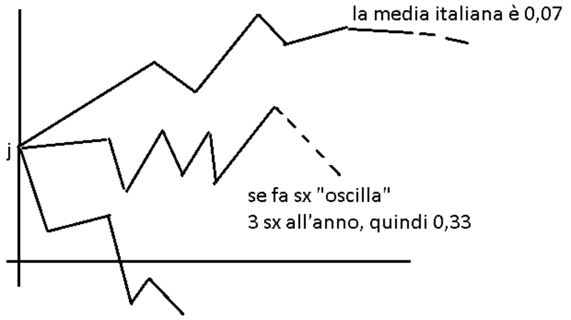
	numero di sinistri					
classi	0	1	2	3	>3	π_J
1	1	3	6	9	12	0.5
2						
3						
…						
13						1
14						1, qlc
…						
18						2.00

Es. 12 = classe di arrivo se faccio più di 3 sinistri partendo dalla prima classe.

Mentre nelle metodologie precedenti c'era alla base un modello bayesiano , un approccio metodologico solido basato sulla descrizione probabilistica, qui abbiamo a che fare con metodologie di tipo semplificato.

Problema 1:

Nel sistema italiano nel caso di non sinistro si sale di una classe mentre nel caso di sinistro si scende di 3 classi. Se un individuo quindi parte dalla classe j si ha:



Quindi in Italia, in poco tempo l'assicurato si trova nelle classi minime.

I premi non si differenziano troppo perché quasi tutti vanno nelle classi minime..

Vi è quindi anche un problema di stabilità finanziaria (sconti compensati dagli aggravi → tale compensazione viene a mancare)

Per risolvere i problemi bonus-malus vengono effettuate delle analisi. Studio la sinistrosità degli assicurati della collettività e 'aggiusto' il sistema.

Problema 2: problema di autoliquidazione dei sinistri: un individuo che denuncia un sinistro ottiene un aggravio di premio. È possibile non rincorrere nell'aggravio grazie all'autoliquidazione del sinistro. È simile ad una franchigia. Questo processo di autoliquidazione va bene fino ad un certo punto, mentre se avviene spesso comporta:

- induce comportamenti fraudolenti: scappa per non pagare l'aggravio
- viene meno l'utilità dell'assicurazione
- viene minata la stabilità finanziaria del sistema

Oss. Il sistema non è penalizzante, infatti si assiste ad un graduale spostamento degli assicurati verso le classi minime.

RIASSICURAZIONE

L'assicurazione è importante quando il risarcimento del sinistro potrebbe mettere in difficoltà finanziariamente l'individuo (situazione di rischio finanziario)

L'assicurazione poi risulta obbligatoria e cioè dettata dallo stato, quando il non risarcimento può mettere a repentaglio la collettività.

Pago quindi un premio P e trasferisco il problema del risarcimento di un sinistro all'assicuratore; dall'altra parte l'assicuratore che raccoglie P, grazie ai suoi investimenti deve essere in grado di:

- Coprire le spese
- Avere guadagni\rendimenti (profitto) per remunerare gli azionisti o reinvestire nella società
- Coprire i risarcimenti dei sinistri

Il premio di tariffa che l'assicurato paga è quindi studiato per far fronte a questi 3 punti:

P^T= E(X) + caricamento sicurezza + caricamento spese

Premio di tariffa = copre i risarcimenti per sinistri + caricamento legato all' avversione al rischio dell'assicuratore (a volte è nascosto il caricamento di profitto)

Però può succedere che l'insieme di tali caricamenti pussa comunque mettere in difficoltà l'assicuratore; ad esempio:

- Se a posteriori i risarcimenti sono maggiori di quelli stimati a priori
- Se il costo dei sinistri è elevato l'agenzia potrebbe avere dei problemi di liquidità e imporre un disinvestimento forzato di titoli
- Può succedere un unico evento che colpisce una collettività (tifone, terremoto, catastrofe dovuta all'uomo come 11 Settembre) e obbliga a molti risarcimenti

  Il premio puro (quello minimo che l'assicuratore richiede) in via approssimata è così $P \approx E(X) + \frac{1}{2A}Var(X)$. $\frac{1}{2A}Var(X)$ è il caricamento minimo: può essere elevato (ad es per una polizza rischiosa in relazione all'avversione al rischio degli assicuratori). Così facendo però non viene venduta la tariffa: siccome l'assicuratore non vuol far scappare il cliente, come può fare?

  Il riassicuratore dice al cliente di pagare E(X)+m ma con m<$\frac{1}{2A}Var(X)$ cioè stipula la polizza con un premio minore di quello che rende non svantaggioso per l'assicuratore il contratto → l'assicuratore si trova esposto ad una rischiosità maggiore da quella ritenuta da lui accettabile. Ma se cliente per cliente l'assicuratore è in posizione non svantaggiosa sono sicuro che per quanto riguarda quel portafoglio egli è in posizione vantaggiosa?

  Individualmente la non svantaggiosità NON → collettivamente la svantaggiosità
  (probabilità marginale) (probabilità congiunta)

Esempio:

Vediamo ora un modello che illustra come la non svantaggiosità sui singoli contratti ma che non implica la non svantaggiosità a livello di portafoglio

Preso un assicuratore con utilità del tipo quadratico cioè: $u(x) = x - \frac{1}{2A}x^2$ con x<A

Sia n = n° contratti

X_i i=1,…, n= risarcimento totale aleatorio per l'i-esimo contratto

P_i=premio del contratto in modo da avere non svantaggiosità, cioè | $E[u(P_i-X_i)] \geq u(0) = 0$ (perché normalizzata) allora, la condizione di non svantaggiosità, contratto per contratto, diventa la seguente: $E[(P_i-X_i) - \frac{1}{2A}(P_i-X_i)^2] \geq 0$ da cui $P_i-E(X_i) - \frac{1}{2A}E(P_i-X_i)^2] \geq 0$:

$E(P_i-X_i)^2]=Var(P_i-X_i)+[E(P_i-X_i)]^2 = Var(P_i-X_i)+[P_i-E(X_i)]^2$ → P_i certo → $= Var(X_i)+[P_i-E(X_i)]^2$, pongo ora $m_i=P_i-E(X_i)$ come caricamento di sicurezza e δ_i=Var(X_i)

$m_i - \frac{1}{2A}E(\delta_i^2 - m_i^2) \geq 0$ i=1,…,n cioè individualmente la condizione di non svantaggiosità è soddisfatta. Ma cosa succede a livello di portafoglio?

- Siano X=$\sum_{i=1}^{n} X_i$ e P=$\sum_{i=1}^{n} P_i$ → vale E[u(P-X)] ≥0 ?

Per quanto visto prima posso scrivere equivalentemente:

(*) E[u(P-X)] ≥0 ↔ m - $\frac{1}{2A}$E(δ^2-m^2)≥0 con m=P-E(X) e δ^2=Var(X)

ma m=$\sum_{i=1}^{n} P_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Oss. $(\sum_{i=1}^{n} m_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j$

Quindi la condizione di non svantaggiosità (*) diventa:

E[u(P-X)] ≥0 ↔ $\sum_{i=1}^{n} m_i - \frac{1}{2A}$E($\delta^2$- $(\sum_{i=1}^{n} m_i)^2$)

↔ $\sum_{i=1}^{n} m_i$- $\frac{1}{2A}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i\right)^2 + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} Cov(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^{n} m_i^2 + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j)\right]$

↔ $\sum_{i=1}^{n} m_i$- $\frac{1}{2A}$ [($\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} Cov(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^{n} m_i^2$) - $\frac{1}{2A}$ ($\sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j$)]

↔ $\sum_{i=1}^{n} m_i$- $\frac{1}{2A}$ [($\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i^2$) - $\frac{1}{2A}$ ($\sum_{i\neq j,i=1}^{n} Cov(x_i, x_j) + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j$)] ≥0, ora

- $\sum_{i=1}^{n} m_i$- $\frac{1}{2A}$($\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i^2$) è)≥0 perché per ipotesi la condizione di non svantaggiosità vale individualmente
- -$\frac{1}{2A}$ ($\sum_{i\neq j,i=1}^{n} Cov(x_i, x_j) + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j$) non so se è >0 o <0.

➔ Complessivamente non so se il risultato è positivo!

Studio -$\frac{1}{2A}$ ($\sum_{i\neq j,i=1}^{n} Cov(x_i, x_j) + \sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j$): sto andando a togliere qualcosa dove $\sum_{i\neq j,i=1}^{n} m_i\, m_j$ >0 ma un grosso gioco è fatto dalle covarianza. Quello che vado a togliere è tanto più grande quanto più vi è correlazione positiva tra i contratti. Quindi se la correlazione è >0 è maggiore la possibilità di non aver soddisfatta la condizione di non svantaggiosità.

Oss. Se invece la correlazione fosse negativa ciò andrebbe a vantaggio dell'assicuratore; l'assicuratore quindi cerca clienti che non siano correlati.

Tutto ciò che abbiamo appena visto porta l'assicuratore a volersi tutelare nel caso si trovasse in difficoltà, poiché può trovarsi a gestire una rischiosità maggiore a quella accettabile secondo la sua avversione al rischio.

Quindi l'assicuratore diventa un assicurato! Può quindi cercare una copertura assicurativa: si parla di *riassicurazione* o di *assicurazione di II fase*, cioè un contratto i cui contraenti sono:

- Una compagnia di assicurazioni (*cedente* o riassicurazione)
- Uno o più assicuratori detti *cessionarie* o riassicuratori

La compagnia cedente paga un premio e il riassicuratore fornisce una copertura (di tipo risarcitorio) a fronte dei risarcimenti che la cedente deve effettuare sui sinistri dei contratti.

Compagnia cedente	Compagnia cessionaria (riassicuratore)
(paga un premio)	(paga un risarcimento)

Essi possono essere:

- riassicuratori professionali (aziende professionali che fanno solo questo, cioè stipulano solo riassicurazioni)
- compagnie assicuratrici che fanno sia *lavoro diretto* (sono cioè assicuratori e hanno contatto con gli individui) sia *lavoro indiretto* (operano come riassicuratori)

es. Generali (o pool di imprese che si scambiano assicurazioni tramite broker)

Il contratto di riassicurazione viene dunque fatto tra una compagnia, dette cedente e uno o più assicuratori. Tale terminologia è ingannevole: non si cede il rischio! Il termine cedente è dovuto al fatto che si parla di cessione del rischio, sebbene i contratti rimangano alla compagnia. Viene infatti fatta un'assicurazione di risarcimento: tutta la gestione dei rischi resta in mano alla cedente compresa la responsabilità dei contratti: i rischi non vengono dati al riassicuratore!

Esistono però alcuni benefici che si affiancano all'obiettivo di risarcimento, sono:

- flessibilità per gli assicurati: la compagnia per evitare di perdere clienti stipula contratti in condizione di non vantaggiosità
- possibilità di sviluppo delle piccole imprese assicuratrici. Le imprese assicuratrici devono infatti possedere un capitale, con limiti dettati dalla legge: la compagnia tramite la riassicurazione può ridurre l'ammontare del capitale

COME OTTENGO UNA COPERTURA RIASSICURATIVA?

1. **Riassicurazione contrattuale obbligatoria o *trattato di riassicurazione*:**
   a. È un contratto stipulato tra una cedente e uno o più riassicuratori in cui sono indicati gli ambiti di riassicurazione.
      Contraenti: cedente et riassicuratore
      Ambito + tipo di rischio coperto e limitazioni: rischi ordinati con valore assicurato<tot, rischi commerciali con valore assicurato<tot', durata
      Forma riassicurativa (come pago)
      Premio di riassicurazione
      Commissioni
      ..

      La cedente in questo caso è obbligata a cedere in riassicurazione i rischi che entrano nei termini del trattato agli assicuratori del trattato i quali sono obbligati a fornire il risarcimento per tali rischi (copertura assicurativa)
      Oss. La compagnia per legge deve riassicurare anche se il rischio è un "buon rischio"!

2. **Riassicurazione contrattuale facoltativa**
   Esempio: armatore che assicura una nave; vado sul mercato di riassicurazioni, trovo un riassicuratore e propongo un contratto, il riassicuratore può liberamente accettarlo o meno!

In questo caso la cedente può liberamente cercare un riassicuratore qualsiasi ed esso può liberamente accettare o meno il contratto
Oss. Il contratto facilita l'attività della cedente (per evitare di cercare il riassicuratore e perdere tempo). Spesso il trattato è legato a rischi di massa.

3. Forma intermedia di riassicurazione facoltativa-obbligatoria

Viene stipulato un contratto, definiti i limiti di copertura, ma a differenza di 1), la cedente è libera di chiedere o meno la copertura assicurativa, mentre i riassicuratori sono obbligati al risarcimento (non vi è simmetria) (sempre per facilitare l'attività della cedente).
Es. a fronte di grandi rischi: rischi industriali, furti in banca.

FORME RIASSICURATIVE

In parallelo con quelle assicurative le forme riassicurative sono forme contrattuali che dicono come avviene il risarcimento. Per descrivere ci mettiamo in un'impostazione individuale: N= numero di contratti di portafoglio, X_i= risarcimento totale per contratto i-esimo, X_1+…+X_n=X risarcimento totale per portafoglio)

Suppongo che la cedente abbia n polizze nel portafoglio, indichiamo con:

- n=numero polizze
- X_i=risarcimento totale per l'i-esima polizza $X_i=\sum_{h=1}^{N_i} Y_h^{(i)}$
- N_i= numero sinistri che colpiscono in un fissato anno la i-esima polizza
- $Y_h^{(i)}$ = risarcimento per l'h-esimo sinistro che colpisce la i-esima polizza
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ questo rappresenta l'impegno della cedente nei confronti degli assicurati

1) RIASSICURAZIONE QUOTA SHARE (QS; riassicurazione in quota)

Viene fissata un'aliquota 0$\leq a \leq 1$ detta *aliquota di ritenzione*.
Indico con Γ=aX l'impegno conservato dalla cedente (cioè l'impegno netto della cedente, al netto del rimborso ottenuto dal riassicuratore)
X_R=(1-a)X impegno del riassicuratore
La cedente paga X agli assicurati ma riceve dai riassicuratori il risarcimento (1-a)X=X_R → Γ =aX è un impegno netto.
Analizziamo sinistro per sinistro l'effetto di tale copertura, scrivendo:
→ $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{N_i} aY_h^{(i)}$ e
$X_R=\sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{N_i} (1-a)Y_h^{(i)}$
È una forma "globale" poiché l'impegno conservato dalla cedente (netto) è definito a partire dall'impegno totale che l'impresa ha sul portafoglio, ed è una forma detta di tipo "proporzionale" poiché c'è il fattore di proporzione "a".

2) RIASSICURAZIONE SURPLUS (SU; o per eccedente di somma)

Suono fissate le aliquote 0≤ a_i ≤1 potenzialmente diverse polizza per polizza del portafoglio.

Chiamiamo:

Γ_i=$a_i X_i$ l'impegno netto della cedente per la polizza i-esima

$X_{R,i}$=(1-a_i)X_i impegno del riassicuratore

→ $\Gamma=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{N_i} a_i\, Y_h^{(i)}$, le aliquote a_i possono essere diverse contratto per contratto

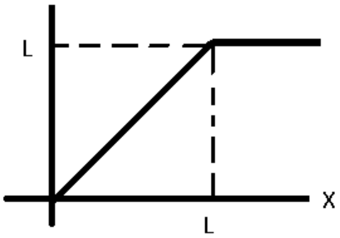
$X_R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{N_i}(1-a_i)\, Y_h^{(i)}$

Tale forma riassicurativa è detta "individuale" per contrapporla alla forma globale, perché l'impegno della cedente è definito a partire dai risarcimenti delle singole polizze, ed è di tipo "proporzionale" (vi è proporzionalità polizza per polizza tra l'impegno effettivamente assunto e quello conservato dalla cedente)

3) RIASSICURAZIONE STOP LOSS (SL; o per eccesso di perdita)

In questo caso fisso l'importo L≥0 detto *priorità* o *limite di ritenzione*. Indichiamo l'impegno conservato dalla cedente in relazione al portafoglio originariamente acquisito con:

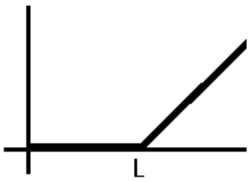
$$\Gamma = \begin{cases} X & se\ X \le L \\ L & se\ X > L \end{cases} = \min\{X, L\}$$



ricorda il legame che si ha in una copertura con massimale

e

$$X_R = \begin{cases} 0 & se\ X \le L \\ X-L & se\ X > L \end{cases} = \max\{0, X-L\}$$



Ricorda il legame fra danno e risarcimento in una copertura con franchigia assoluta

È una forma riassicurativa "globale" perché l'impegno della cedente è in funzione dell'impegno totale che la cedente ha nei confronti del portafoglio, ed è di tipo "non proporzionale"

4) RIASSICURAZIONE EXCESS OF LOSS (XL; o per eccesso singolo sinistro)

Vado sinistro per sinistro a fissare una limitazione di copertura all'impegno da parte della cedente: fisso L_i≥0 (diverso da contratto a contratto)

$\Gamma_i=\sum_{h=1}^{N_i}\min\{Y_h^{(i)}, L_i\} \neq \min\{X_i, L_i\}$ qui il minimo opera sul risarcimento totale, mentre nel membro a sinistra dell'uguale lavora sinistro per sinistro

<u>Esempio</u>:

Sia L_i=8 e una traiettoria del processo (N_i=2, $Y_1^{(i)} = 7, Y_2^{(i)} = 5,0,0,\dots$)
→ X_i=12 min{X_i,L_i}=8
→ Γ_i=7+5=12
12 ≠8

$X_{R,i} = \sum_{h=1}^{N_i} \max\{0, Y_h^{(i)} - L_i\}$
→ A livello di portafoglio ho:
$\Gamma=\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i$
$X_R=\sum_{i=1}^{n} X_{R,i}$
È una forma "individuale" poiché l'impegno della cedente è definito a partire dai singoli contratti ed è "non proporzionale" (diversa polizza per polizza).

Oss. La riassicurazione 1) in quota è semplice: il riassicuratore riceve un'aliquota fissata: vantaggio: il riassicuratore rientra in tutto il volume di affari del portafoglio, in cambio la cedente dà una parte del rischio.

Nella riassicurazione 2) il riassicuratore interviene su tutto il portafoglio ma la cedente può graduare su quali rischi cedere di più e quali di meno.

Nella riassicurazione 3) stop loss offre una protezione contro le punte dei risarcimenti, offre inoltre protezione anche contro un' elevata sinistrosità in termini di numeri (cioè protezione sul numero di sinistri)

Le forme non proporzionali sono più complesse perché comportano un problema per il calcolo del premio

Esempio: surplus

$X_{R,i}$= (1-a_i)X_i

$P_{R,i}$=(1-ai)E(X_i)+$m_{R,i}$, con E(X_i)dal pdv della valutazione: la valutazione è quella delle speranza matematica, in generale con $m_{R,i}$ caricamento. In generale $m_{R,i}$ | $P_{R,i}$<(1-a_i)P_i dove P_i= premio incassato dalla cedente.

Idea: la cedente cede una quota\ parte del rischio ma il premio è inferiore poiché il riassicuratore dà un contributo alla cedente (in qualità di chi procaccia l'affare e gestisce i contratti)

(inoltre i riassicuratori hanno una minore avversione al rischio e più possibilità economiche- partecipano alle spese)

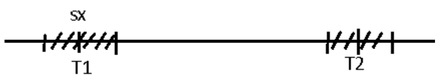
Spesso nei contratti vi è da parte del riassicuratore, una *commissione*, cioè un aiuto (ad es una parte degli utili) a copertura delle spese sostenute dalla cedente.

Esempio: stop loss

Per calcolare il premio di copertura valuto: E(X_R)=E(max{0,X-L}) e suppongo di avere F_X la funzione di ripartizione di X, osservo che il legame fra l'impegno originario e quello conservato è pari a quello con franchigia assoluta e in quel caso avevamo ricavato: Fz→E(Y)=$\int_{\alpha}^{+\infty} \overline{F_Z(z)}\, dz$. Qui essendo il legame funzionale lo stesso si ha: E(X_h)=E(max{0,X-L}=$\int_{L}^{+\infty} \overline{F_X(x)}\, dx$ dove $\overline{F_X(x)}$=1-F_x(x)

Per tale valutazione ho bisogno di avere stime affidabili delle code delle distribuzioni. Difficile perché ho pochi dati sulle code del risarcimento per sinistro. Questo è un problema grave: 3) e 4) sono coperture difficili da trattare dal pdv dell'applicazione.

Oss. (IBNR) Sulle coperture non proporzionali viene evidenziato questo aspetto: (X_L ,X_i), Li, (priorità) sia fissato l'anno di copertura:



in T2 viene rivalutato il sinistro

Avviene un sinistro con valutazione del sinistro sotto la priorità. Quindi la cedente non avverte (non denuncia il sx) il riassicuratore. Cosa succede? Se il sinistro rimane aperto e passa del tempo può accadere che esso venga rivalutato e ci si può ritrovare ad avere un importo che supera la priorità. In questo caso viene riavvertito il riassicuratore: sono nel caso in cui ho un sinistro *IBNR* (*Incorred but not reported*) cioè avvenuto ma non denunciato

(le coperture Excess of loss possono generare questo tipo di sinistro per il riassicuratore)

Oss. Abbiamo visto che nella Surplus a fronte della polizza X_i, ho a_i , Γ_i=a_iX_i. In realtà non vengono fissate l aliquote a_i ma viene fissato un importo c = *pieno di conservazione* dal quale poi ricavo le aliquote in questo modo:

Data X_i, sia $\omega_i(<\infty)$ l'esposizione monetaria:

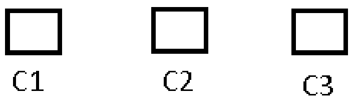
Se $\omega_i \leq c$ allora Γ_i=X_i cioè a_i=1 (la cedente conserva tutto il rischio)

Se $\omega_i>c$ allora $\Gamma_i=\frac{c}{\omega_i}X_i$ cioè $a_i=\frac{c}{\omega_i}$

Non fisso direttamente le quote di ritenzione ma le definisco andando a fissare c e vedere le esposizioni monetarie. <u>Effetto</u>: sinistro per sinistro avevamo ai $Y_h^{(i)}$ (impegno della cedente) ora $a_i=\frac{c}{\omega_i} \rightarrow$

$a_iY_h^{(i)}=\frac{c}{\omega_i}Y_h^{(i)} \leq c$ cioè l'assicuratore fissa una soglia e dice: "per ogni sinistro io pago fino a c"

Oss. Generalmente per un portafoglio ci sono <u>tavole di pieni di conservazione</u>: c_1,c_2,.. pieni diversi per diversa tipologia di contratto.



SEQUENZA DI RIASSICURATORI

Se un contratto di riassicurazione è del tipo Γ (impegno ella cedente), X_R=X- Γ esso è detto *contratto a portata illimitata* cioè il riassicuratore si fa carico di tutta la eccedenza.

In pratica\ realtà vi è una sequenza di riassicuratori. Vi è un intervento sequenziale di più assicuratori, non di uno solo!

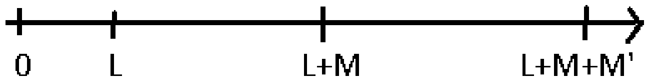
<u>Vediamo il caso Excess of loss (XL)</u>:

es. È di tipo individuale, noi fissiamo un contratto stipulato dalla cedente (ometto le "i" per non appesantire la notazione)

Indico con X=$\sum_{h=1}^{N} Y_h$ e fisso la priorità L. L'impegno della cedente per ogni sinistro che colpisce il contratto è, a fronte del sinistro h-esimo,:

Γ=$\begin{cases} Y_h & Y_h \leq L \\ L & Y_h > L \end{cases}$

Se il contratto fosse a portata illimitata tutta la eccedenza sarebbe a carico del riassicuratore. Ma può accadere che un assicuratore non si impegni in maniera illimitata; infatti in realtà l'intervento del riassicuratore avviene in più "fasce":

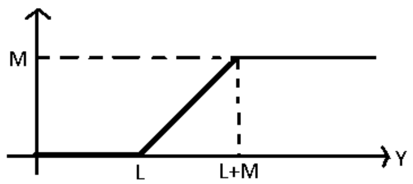


Fasce: (layer=strato)

- 0- L: a carico della cedente
- L - L+M: a carico del primo riassicuratore (I[a] fascia o 1° layer)
- L+M - L+M+M': II fascia o II° layer

A fronte del sinistro il riassicuratore del I° layer risarcisce:

$$\min(M, \max(Y_h - L, 0) = \begin{cases} 0 & se\ Y_h \leq L \\ Y_h - L & se\ L < Y_h \leq L + M \\ M & se\ Y_h > L + M \end{cases}$$



Si dice che il primo riassicuratore ricopre in un primo layer M in eccesso a L (MxsL), cioè interviene per importi di risarcimento da L in poi fino a M.

Ci sono più riassicuratori che intervengono nella fascia di competenza: 2° layer: M' xs L+M, qui la portata è M' mentre la priorità è L+M.

Il secondo riassicuratore interviene sull'eccedenza del I layer e così via.

Questo avviene perché esistono riassicuratori che preferiscono lavorare su layer bassi e altri su layer elevati.

<u>Esempio</u>:

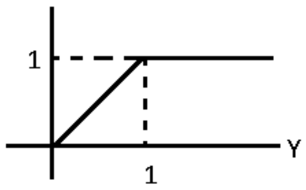
Sia il caso XL, consideriamo i 3 riassicuratori:

1) Layer 2xs1 " 2 in eccesso ad 1"
2) Layer 5xs3

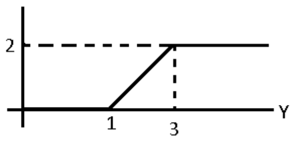
3) Layer 2xs8

E andiamo a studiare graficamente cosa succede con i risarcimenti:

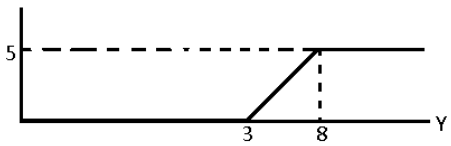
- impegno conservato dalla cedente



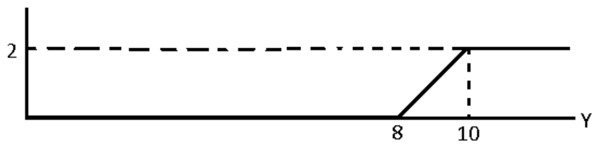
- 1° layer:



- 2° layer:



- 3° layer



Ricordando:

- individuale: X=$\sum_{i=1}^{n} X_i$
- collettivo: X=$\sum_{h=1}^{N} Y_h$

Rivediamo:

- riassicurazioni proporzionali "in quota" (QS); siamo in ipotesi di forte analogia, in questo vaso viene fissata un'aliquota 0$\leq a \leq$1
  ed ho:
  Γ=$\sum_{h=1}^{N} aY_h$ (la cedente per ogni sinistro mantiene\conserva aY_h)
  X_R= $\sum_{h=1}^{N}(1-a)Y_h$
- Riassicurazione XL (tipo collettivo)
  Vista l'omogeneità del portafoglio viene fissata la priorità e la portata L≥0 e portata M in modo che MxsL (I° layer) la cedente conserva Γ=$\sum_{h=1}^{N} \min(Y_h, L)$ e X_R(L,M)= $\sum_{h=1}^{N} \min(M, \max(Y_h - L))$
  Sinistro per sinistro: min(M, max(0,Y_h-L))

PREMI DI RIASSICURAZIONE XL IN UN PORTAFOGLIO P_R

Nel caso di riassicurazioni di tipo non proporzionale XL a fronte di un portafoglio, le valutazioni sono complesse

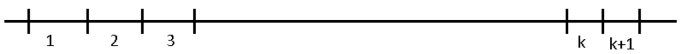
Quindi valuto (stimo) τ=tasso premio → $P^R=\tau P^T$ con P^T= montepremi coperto e P_R= premio pagato al riassicuratore: è calcolato moltiplicando il tasso di premio per P^T

Per stimare τ, tasso di premio, posso usare il metodo del BURNING COST: suppongo di essere in un MxsL cioè nel caso: $X_R(L,M)=\sum_{h=1}^{N}\min(M,\max(0,Y_h-L))$ e voglio calcolare il premio per questa copertura. M è la *portata*, L la priorità.

<u>1° obbiettivo</u>: valutiamo $E(X_R(L,M))$ premio equo

<u>Idea</u>: la copertura è relativa all'anno θ ma ci saranno osservazioni (cioè i dati a disposizione: osservazioni sul numero di sinistri e i risarcimenti) per un certo numero di anni (da 3 a 5), precedenti a θ sul portafoglio coperto.

<u>Esempio</u> ↓



Analizzo il numero di sinistri che la cedente ha osservato sul portafoglio e i risarcimenti che ha sopportato nell'anno 1,…,j,..,k

$$\left.\begin{array}{ccc} n_1 \dots & n_j \dots & n_k \\ Y_{1,1} \dots & Y_{j,1} \dots & Y_{k,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{1,n_1} \dots & Y_{j,n_j} \dots & Y_{k,n_k} \end{array}\right\} \text{pagamenti nominali (se voglio mettere anche l'inflazione devo indicizzarli per attualizzarli a k + 1)}$$

$P_1^T \dots \quad P_j^T \dots \quad P_k^T$

Indicizzo i dati con il *. Importi a valori correnti dell'anno k+1:

$$\begin{array}{ccc} Y_{1,1}^* \dots & Y_{j,1}^* \dots & Y_{k,1}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ Y^*{}_{1,n_1} & Y^*{}_{j,n_j} & Y^*{}_{k,n_k} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P_1^T \dots & P_j^T \dots & P_k^T \end{array}$$

Con $P_1^T = X_{R,1}^*(L,M)$, …, $P_k^T = X_{R,k}^*(L,M)$

Se tale copertura con L, M avesse reagito alla situazione osservata otterrei:

per ciascuno degli anni $X_{R,j}^*(L,M) = \sum_{h=1}^{n_j} min(M, \max(0, {Y_{jh}}^* - L))$ (importo a carico del riassicuratore)

Ora considero le seguenti stime: tassi di premio equo o *Burning cost* equo.

$\tau = \frac{\sum_{j=1}^{k} X_{R,j}^*(L,M)}{\sum_{j=1}^{k} P_j^{T*}}$ e $\tau' = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{X_{R,j}^*(L,M)}{P_j^{T*}}$ da cui ricavo il tasso\tassi per calcolare P_R:

$\tau = \tau(1+\acute{\eta})$ con $\acute{\eta}$ coefficiente di caricamento

→ calcolo $P_R = \underline{\tau}\, P^T$

Idea: interpreto i dati come numeri osservati di numeri aleatori $X^*_{R,j}(L,M)$

Faccio l'ipotesi che i risarcimenti rapportati ai montepremi siano identicamente distribuiti:

$\frac{X^*{}_R(L,M)}{P^T}; \frac{X^*{}_{R,1}(L,M)}{P_1{}^T}, \dots, \frac{X^*{}_{R,k}(L,M)}{P_k{}^{T*}}$ i.d.

(E che questo traduca anche l'ipotesi sul rapporto tra risarcimento totale dell'anno k+1 e il montepremi dell'anno k+1)

Essendo i.d. hanno speranza matematica comune:

$E\left(\frac{X^*{}_{R,J}(L,M)}{P_j^{T*}}\right) = E\left(\frac{X_R(L,M)}{P^T}\right) = \tau_T$ è questo è il risarcimento totale di premio diviso P^T; cioè è il *tasso teorico di premio* (qui l'esposizione è rappresentata dal montepremi coperto)

Così posso ottenere: $\hat{E}(X_R(L,M)) = \hat{\tau}$ P^T obiettivo: trovare tale stima introducendo uno stimatore e prendendo come stima un suo valore osservato.

Nelle nostre ipotesi sono stimatori non distorti di τ_T sia $\frac{\sum_{j=1}^{k} X^*{}_{R,J}(L,M)}{\sum_{j=1}^{h} P_j^{T*}}$ (stessa tecnica usata tempo fa), sia $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{X^*{}_{R,J}(L,M)}{P_j^{T*}}$ e si vede subito. La logica seguita ora è la stessa che ho seguito quando ho deciso di usare il tasso di premio per la tariffazione, con la differenza che prima avevo al denominatore l'esposizione monetaria, mentre qui ho il montepremi coperto.

In sintesi: avendo i dati relativi agli anni precedenti, si adeguano le quantità rispetto all'inflazione, poi calcolo quale sarebbe stato l'impiego del riassicuratore a fronte di ciascuna delle storie (numero sinistri, premi totali per anno) si fa poi la media aritmetica fra impegno totale e montepremi totale: tasso per montepremi mi dà il premio equo.

Oss. oltre all'inflazione bisogna tenere conto anche dei sinistri avvenuti nel passato ma non ancora "domandati"

GESTIONE DEL PREMIO

Ricevuti i vari premi (il contratto assicurativo si apre con un ricavo, il premio) nasce l'esigenza dell'accantonamento delle riserve tecniche, cioè la gestione del premio.

Cominciamo con un primo modello semplicistico poi più fine:

1) Sia un portafoglio di un assicuratore in un dato esercizio (in un anno di calendario)

Introduciamo delle ipotesi aggiuntive:

- Sia l'intervallo [0,1] il 1° anno di attività (il portafoglio prima non esisteva)
- L'assicuratore stipula contratti solo di durata annuale col premio unico
- I contratti vengono tutti stipulati in 0
- Non teniamo conto di aspetti finanziari e della riassicurazione (guardiamo solo al gestione tecnica)

Indico con P^T il monte premi di tariffa (totalità dei premi) incassato in 0

A fronte di tali premi il riassicuratore deve fare fronte a :

I. Spese:
   - per l'acquisizione dei contratti (spese iniziali) $0\leq \alpha' \leq 1 \rightarrow \alpha'$ P^T
   - altre spese iniziali $0\leq \alpha'' \leq 1\rightarrow \alpha''$ P^T
   - spese di gestione del portafoglio $0\leq \beta \leq 1 \rightarrow \beta$ P^T

II. risarcimenti per sinistri che colpiscono i contratti nel periodo di copertura [0,1]

   Con α' aliquota t.c. α' P^T sia la quota premi destinata a coprire le spese di acquisizione
   Con α'' aliquota t.c. α'' P^T sia la quota premi destinata a coprire le spese iniziali
   Con β aliquota t.c. β P^T sia la quota premi destinata a coprire le spese di gestione.

III. Introduco altre ipotesi:
   - Pongo $\alpha = \alpha' + \alpha''$ le spese iniziali (di acquisizione e altre) sono sostenute in 0
   - Le spese rimanenti di gestione ricorrono uniformemente nel tempo: le spese di portafoglio sono uniformi rispetto al tempo

     Es. β $P^T\Delta t$ = spese che emergono in un intervallo di tempo Δt indipendentemente da dove Δt si colloca nell'anno.

Indico con t un istante intermedio: $0\leq t \leq 1$

Indico con **P(t)** = premi incassati al netto delle spese sostenute in[0,t] (esclusi i risarcimenti),

$$\mathrm{P(t)} = P^T - \alpha P^T - \beta P^T(t-0) = P^T(\alpha - \beta t)$$

Indico con **S(t)** = l'importo pagato in [0,t] per i risarcimenti dei sinistri sui contratti stipulati

La differenza la indico con **d(t)** = P(t)-S(t) ed è la *disponibilità tecnica netta*

(es. in $t=0^+$ subito dopo aver pagato le spese iniziali, $d(0^+)=P^T(1-\alpha)$)

Oss. Tale disponibilità non è tutta libera (svincolata) da impegni in t; infatti:

- gli assicurati hanno pagato in 0 anche la copertura per il periodo [t,1]. L'assicuratore in t deve garantire anche la copertura delle spese per il periodo [t,1] e dei risarcimenti per i sinistri che si verificheranno in [t,1]. A questo fine si forma la *riserva premi* in t $\mathbf{R_p(t)}$. La riserva premi è la stima di quanto l'assicuratore deve mettere via per far fronte all'impegno residuo.
- C'è l'ipotesi che esistano sinistri verificatisi nel passato [0,t] ma che non sono stati pagati o non sono stati pagati in modo completo: l'assicuratore deve garantire il pagamento dei risarcimenti per sinistro avvenuti in [0,t] e non ancora pagati. A questo fine si forma in t la riserva sinistri $\mathbf{R_s(t)}$.

  Qui il *saldo* o *risultato* o 'guadagno' della gestione tecnica è $g(t)=P(t)-S(t) - [R_p(t)-R_s(t)]$ dove

  g(t) = risultato netto (netto delle spese)

  P(t)-S(t) = d(t) disponibilità

  $[R_p(t)-R_s(t)]$= stima dell'impegno residuo – voce di debito nei confronti degli assicurati

- Il *metodo pro-rata temporis*: "in proporzione al tempo"; in ipotesi di uniformità rispetto al tempo dei costi scrivo: $R_p(t)=P^T(1-\alpha)(1-t)$

Oss. La formula deriva da: uniformità $\leftrightarrow d(0^+)= P^T(1-\alpha)$; in $[0,t]\rightarrow P^T(1-\alpha)t$ e quindi $R_p(t)=P^T(1-\alpha)- P^T(1-\alpha)t$ questa valutazione però ha alcuni problemi se ci sono effetti di stagionalità, in quanto potrei non aver accantonato abbastanza!

- Per valutare la riserva sinistri si tratta di fare una valutazione più delicata ("lavoro chiave dell'attuario) anche perché si tratta di avere a che fare con somme elevate)

$R_s(t)$:

- metodo dell'inventario (per ogni pratica vado a vedere quanto costerà il sinistro)
- metodo statistico attuariale
  - di tipo deterministico (non tengo conto della struttura probabilistica: stime puntuali)
  - di tipo stocastico (ipotesi di tipo probabilistiche)

Oss. SU tali voci $R_p(t)$ e $R_s(t)$ c'è spesso il controllo dell'organo di vigilanza. Inoltre essendo sia $R_p(t)$ che $R_s(t)$ oggetto di stima, allora anche g(t) è una stima.

Teniamo presente che le valutazioni $R_p(t)$ e $R_s(t)$ sono fatte dall'assicuratore. Non approfondiamo di più.

Vedo cosa succede in t=1:

saldo della gestione tecnica dell'esercizio: $g(1)=P(1)-S(1)-[\ R_p(1)-R_s(1)]=P(1)-S(1)-R_s(1)$ che è il risultato tecnico. Nelle ipotesi fatte, in 1 l'assicuratore non deve più impegnarsi perché i contratti stipulati in 0 in 1 finiscono.

Se g(1)>0 o g(1)=0 i premi incassati sono riusciti a soddisfare i bisogni. Finisco con un utile (o pareggio)

Se g(1)<0 i premi incassati non sono stati sufficienti a coprire le spese: ho un esercizio che termina in perdita per quanto riguarda la gestione tecnica.

Proseguo con un secondo modello, un po' più realistico:

2) Sia un portafoglio di un assicuratore in un dato esercizio (in un anno di calendario)

dato esercizio (in un anno di calendario)

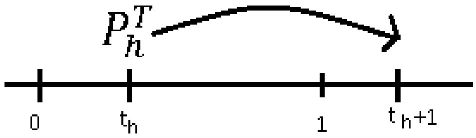
Conserviamo le ipotesi:

- Sia l'intervallo [0,1] il 1° anno di attività (il portafoglio prima non esisteva)
- L'assicuratore stipula contratti solo di durata annuale col premio unico
- no
- Non teniamo conto di aspetti finanziari e della riassicurazione (guardiamo solo al gestione tecnica)

A differenza di prima:

- Non chiedo che i premi siano tutti incassati in 0 ma introduco gli istanti t_i in cui sono stipulati i contratti e incassati i premi con $0\leq t_1< t_2<\ldots< t_n<1$

- Indico con P_h^T il montepremi di tariffa incassato in t_h essendo contratti di durata annuale:



Copertura di un anno; con questi premi l'assicuratore si impegna a fornire la copertura fino a t_h+1
Con tali premi l'assicuratore deve fare fronte alle spese (acquisizione, altre spese iniziali e di gestione) in $[t_h,t_h+1]$
Come prima indichiamo con:
$\alpha' P_h^T$ la quota dei premi P_h^T destinata a coprire le spese di acquisizione
$\alpha'' P_h^T$ la quota premi destinata a coprire le altre spese iniziali
βP_h^T la quota premi destinata a coprire le spese di gestione

Con le ipotesi aggiuntive:

- $(\alpha' + \alpha'')P_h^T = \alpha P_h^T$ subito sostenute in t_h (istante in cui ho incassato P_h^T)
- Spese di gestione uniformi nel tempo
- Siamo in $0\leq t \leq 1$

P(t) montepremi incassato in [0,t] al netto delle spese sostenute: $P(t) = \sum_{t_h\leq t}(P_h^T - \alpha P_h^T - \beta P_h^T(t-t_h) = \sum_{t_h\leq t} P_h^T(1-\alpha-\beta(t-t_h))$

S(t) importo pagato in [0,t] per risarcimenti di sinistri

Distinguiamo poi con i metodo pro rata temporis:

$R_{p(t)} = \sum_{t_h\leq t} P_h^T(1-\alpha)(t_h+1-t_h)$

$R_{s(t)}$

→ d(t)=P(t)-S(t)

g(t)=P(t)-S(t)-[R_p(t)+R_s(t)], dove R_p(t) e R_s(t) sono dette *riserve tecniche* perchè sono debiti nei confronti degli assicurati

Alla fine dell'esercizio in t=1

g(1)=P(1)-S(1)-[R_p(1)+R_s(1)], ora c'è anche questa componente R_p(1) che è calcolata con il metodo pro rata temporis $R_{p(t)} = \sum_{t_h\leq t} P_h^T(1-\alpha)(t_h+1-1) \ = \sum_{t_h\leq t} P_h^T(1-\alpha)t_h$. L'effetto della stagionalità è attenuato da fenomeni di compensazione e quindi in questo caso tale metodo è ok. Infatti spesso viene usato nella pratica ma con α' non con α o α''

Saldo 'finale':

- g(1)≥0 l'esercizio termina con un utile o pareggio
- g(1)<0 l'esercizio termina con una perdita

3) Sia un portafoglio di contratti in un esercizio. Indico con 0 e 1 gli istanti iniziali e finali dell'dell'esercizio

Considero le ipotesi:

- Sia l'intervallo [0,1] il 1° anno di attività (il portafoglio prima non esisteva)
- L'assicuratore stipula contratti solo di durata annuale col premio unico
- 0
- Non chiedo che i premi siano tutti incassati in 0 ma introduco gli istanti t_i in cui sono stipulati i contratti e incassati i premi con $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$
- Non teniamo conto di aspetti finanziari e della riassicurazione (guardiamo solo al gestione tecnica)

A differenza di prima suppongo che:

- Non è il primo anno di attività; l'assicuratore ha già esercitato

Come prima, P_h^T è il montepremi incassato in t_h

Fornisco la copertura per il periodo\intervallo di tempo $[t_h, t_h + 1]$.

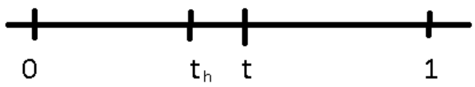
P_h^T copre le spese di acquisizione\ provvigione, altre spese iniziali e spese di gestione ed anche i risarcimenti per i sinistri che colpiscono nel periodo $[t_h, t_h + 1]$ i contratti stipulati in t_h.

Circa le spese manteniamo le ipotesi dell'altra volta:

$\alpha' P_h^T$ la quota dei premi P_h^T destinata a coprire le spese di provvigione
$\alpha'' P_h^T$ la quota premi destinata a coprire le altre spese iniziali
βP_h^T la quota premi destinata a coprire le spese di gestione

Inoltre conservo le ipotesi sulle spese: chiamo $\alpha' P_h^T + \alpha'' P_h^T = \alpha P_h^T$ spese iniziali sostenute subito cioè in t_h.

Mentre le spese di gestione emergono nel tempo in modo uniforme.



Sia $0 \leq t \leq 1$ andiamo a considerare le componenti positive e negative:

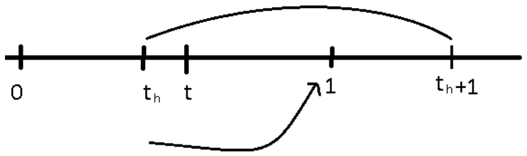
P(t): premi incassati al netto delle spese sostenute nell'intervallo [0,t](detraggo le spese sostenute), $P(t) = \sum_{t_h \leq t} P_h^T (1 - \alpha - \beta(t - t_h))$

Ora però cambia S(t)

S(t)= importo pagato in [0,t] per risarcimenti di sinistri avvenuti nell'esercizio o in esercizi precedenti. Ora posso avere pagamenti in [0,t] di sinistri avvenuti in precedenza

E ho

$R_p(t)$= riserva premi in t per sinistri e spese future (per occuparsi dei sinistri che colpiscono anche qui in figura).



Calcolo $R_p(t)$ con il metodo pro rata temporis: $R_{p(t)} = \sum_{t_h \leq t} P_h^T(1-\alpha)(t_h + 1 - t)$

NB. Mi sono messo nella normativa vigente

So che in t ci saranno sinistri avvenuti prima di t che non sono stati pagati o non del tutto.

$R_s(t)$: riserva sinistri in t. è una stima di quanto l'assicuratore deve pagare dopo t (in futuro) per sinistri che si sono verificati nell'esercizio o negli esercizi precedenti. Tiene conto di situazioni pregresse

Oss. Indico con $R_s(0)$ la riserva sinistri registrata alla chiusura dell'esercizio precedente. E con $R_p(0)$ la riserva premi registrata alla chiusura dell'esercizio precedente. Tali voci di debito vengono riportate nell'attuale esercizio.

d(t), disponibilità tecnica netta in t, $d(t)= R_p(0)+ R_s(0)+P(t)-S(t)$ cioè è data dal riporto dei premi di riserva, dal riporto di riserva sinistri, dai premi al netto delle spese meno l'importo pagato per il risarcimenti per sinistri avvenuti in [0,t]; è diversa dal guadagno perché non è libera da impegni. Il guadagno della gestione tecnica è dato da:

risultato tecnico netto: $g(t)= R_p(0)+ R_s(0)+P(t)-S(t)-[R_p(t)+ R_s(t)]$ con $[R_p(t)+ R_s(t)]$ impegno residuo e $R_p(0)+ R_s(0)+P(t)-S(t)$ disponibilità tecnica d(t).

Andiamo alla chiusura dell'esercizio in t=1:

saldo tecnico $g(1) = R_p(0)+ R_s(0)+P(1)-S(1)-[R_p(1)+ R_s(1)]$ dove:

(ricavi e costi) + + + - - -

$R_s(1)$ è stima di quanto devo ancora pagare per i sinistri già avvenuti

$R_p(1)$ è stima destinata a coprire spese e sinistri che si possono manifestare in futuro

Divido le componenti in altro modo:

$g(1) = [R_p(0) +P(1)- R_p(1)] - [S(1)+ R_s(1)-R_s(0)]$ cioè

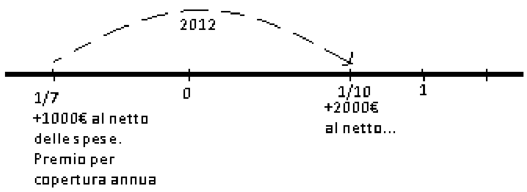
g(1) = [**competenza premi**] –[**competenza sinistri**] detti anche premi di competenza dell'esercizio o sinistri di competenza dell'esercizio.

Oss. Nel bilancio essi vanno all'interno dello stato patrimoniale, nel patrimonio netto

Analizzo in dettaglio i premi di competenza e i sinistri di competenza:

- **Premi di competenza**: $R_p(0)$ accantonamento per far fronte a spese e sinistri nell'esercizio [0,1]; $P(1)-R_p(1)$ premi dell'esercizio meno l'accantonamento destinato al prossimo esercizio.
  Tutte queste quantità sono la somma che è possibile vedere come importo dei premi destinati a coprire spese e risarcimenti di sinistri dell'esercizio.
- **Sinistri di competenza**: questa somma rappresenta i costi per il risarcimenti di sinistri che emergono nel corso dell'esercizio (cioè imputabili all'esercizio)

<u>1° esempio: esercizio 2012</u>

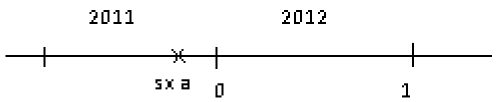


Studiamo la:

- Competenza premi:
  $R_p(0)=1000*1/2$, con ½ quanta parte di anno dopo 0 resta da coprire (pro rata temporis)
  $P(1)=2000€$
  $R_p(1)=20009/12$, rimangono 9 mesi

→ CP(2012)=2000€ = 1000 ½ + (2000-2000 9/12), competenza premi 2012 = copre i sinistri del 2011 + 2000 3/12 parte del premio incassato il 1/10: copre spese fra 1/10 e 1.

<u>2° esempio: esercizio 2012</u>



Supponiamo che nel 2011 si sia verificato un sinistro a) ancora aperto alla chiusura del 2011 (cioè non è stato ancora pagato) valutato 3000€ (sse dà 1 riserva sinistri alla chiusura del 2011 di 3000€). Cioè $R_s(0)=3000€$

Analizziamo le seguenti situazioni:

- I° caso: supponiamo che nel 2012 ci siano 0 sinistri e viene chiuso a) con un pagamento di 3000€. Qual è la competenza sinistri? $S(1)=3000$, $R_s(1)=0$, $R_s(0)=3000$.
  Quindi CS(2012)= 3000+0-3000=0. Non emergono costi nell'esercizio perché il pagamento coincide con la riserva accantonata nel 2011
- II° caso: nel 2012 ho 0 sinistri, nessun pagamento e quindi alla fine dell'anno ho a) ancora aperto e valutato ancora 3000€. $S(1)=0$, $R_s(0)=3000$, $R_s(1)=3000€$. Allora
  CS(2012)=0+3000-3000=0. Anche in questo caso non sono emersi
- III° caso: nel 2012 ho 0 sinistri e viene chiuso a) con un pagamento di 3200€. $S(1)=3200$, $R_s(0)=3000$, $R_s(1)=0$. Allora
  CS(2012)=3200+0-3000=200€ costo emerso perché il sinistro è stato rivalutato

- IV° caso: nel 2012 ho 0 sinistri, non ho un pagamento e a) è ancora aperto ma viene valutato 3200€. $S(1)=0$, $R_s(0)=3000$, $R_s(1)=3200$. Allora CS(2012)=0+3200-300=200€. Nonostante non vi sia pagamento nel 2012 c'è una componente sinistri per effetto di una rivalutazione del sinistro ancora aperto
- V° caso: nel 2012 ho 0 sinistri, 0 pagamenti, a) è aperto e valutato 2000€. $S(1)=0$, $R_s(0)=3000$, $R_s(1)=2000$. Allora
- CS(2012)=0+2000-3000=-1000. Ho un "costo con il segno meno" cioè un ricavo per effetto di una sopravvalutazione del sinistro.

Analisi di g(t),d(t), P(t):

abbiamo che nella gestione tecnica si ha:

$g(1)>0$ utile

$g(1)=0$ pareggio

$g(1)<0$ perdita

Descriviamo la disponibilità tecnica netta alla chiusura dell'esercizio che è data da:

$d(1^-)=R_p(0)+R_s(0)+P(1)-S(1)$

la riscrivo usando al definizione di g(1):

$d(1^-)=g(1)+[R_p(1)+R_s(1)]$ "guadagno" + impegno residuo

- Suppongo g(1) positivo (utile): cosa fa l'assicuratore con tale utile disponibile?

$g(1)>0$ → lo distribuisce agli azionisti

→ lo riporta per la gestione futura (autofinanziamento per l'impresa)

→ fa un mix delle prime due: una parte viene distribuita e una parte capitalizzata

Disponibilità all'inizio dell'esercizio successivo:

$d(1^+)=\delta g(1)+[R_p(1)+R_s(1)]$ con $\delta \in [0,1]$ dove $\delta = 0$ dice che tutto l'utile è stato distribuito agli azionisti $\delta = 1$ dice che tutto l'utile è stato capitalizzato $\delta \in]0,1[$ è un mix

- g(1) è negativo (perdita): i premi sono stati capaci di coprire le spese ed i risarcimenti
  → $d(1^-)<[R_p(1)+R_s(1)]$ può venire versato altro capitale (ad es. preso da un portafoglio non in perdita) per risanare o in parte o in tutto la perdita:
  → $d(1^+)= \delta g(1)+[R_p(1)+R_s(1)]$ con $\delta \in [0,1]$ dove $\delta = 0$ dice che la perdita è completamente sanata, $\delta = 1$ dice che non ho sanato la perdita, $\delta \in]0,1[$ ho sanato solo in parte la perdita

Per quanto riguarda P(t) generalmente vengono separati le componenti:

componente premi lordi $P^T(t)$ e componente spese E(t):

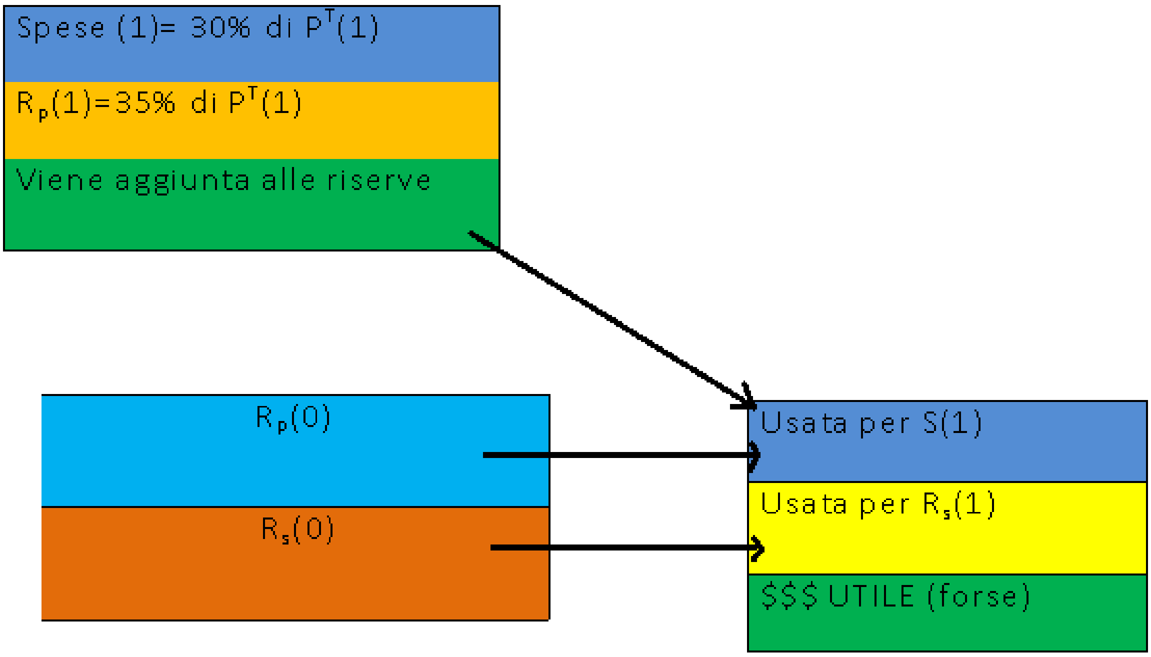
$$\mathrm{P(t) = PT(t) - E(t)} = \sum_{t_h \le t} P_h^T - \sum_{t_h \le t} P_h^T \left(\alpha + \beta(t - t_h)\right)$$

Posso scrivere:

$g(1) = [R_p(0)+P^T(1)-R_p(1)]-[S(1)+R_s(1)-R_s(0)]-E(1)$

In maniera schematica:

$P^T(1)$



4) Gestione in presenza di riassicurazione: Sia un portafoglio di contratti in un esercizio. Indico con 0 e 1 gli istanti iniziali e finali dell'esercizio

Sia un portafoglio di contratti in un esercizio. Indico con 0 e 1 gli istanti iniziali e finali dell'esercizio

Andiamo a rendere ancora più realistico il modello:

Distinguo il caso in cui l'impresa attua:

1. La "riassicurazione attiva": l'impresa agisce come riassicuratore: ottiene rischi di altre imprese)
2. La "riassicurazione passiva": l'impresa opera come cedente

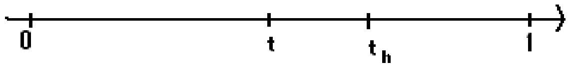
1. Il riassicuratore, oltre ai premi degli assicurati, incassa i premi di altri assicuratori; quindi posso vedere il monte premi di tariffa come composto da due parti: $P^T(t) = P^{T(d)}(t) + P^{T(i)}(t)$ dove $P^{T(d)}(t)$ è il lavoro diretto (assicuratore con assicurati) e $P^{T(i)}(t)$è il lavoro indiretto (come riassicuratore). E analogamente: $S(t) = S^d(t) + S^i(t)$,

$$R_p(t) = R_p^{(d)}(t) + R_p^{(i)}(t) \rightarrow R_p(0) = R_p^{(d)}(0) + R_p^{(i)}(0)$$

$$R_s(t) = R_s^{(d)}(t) + R_s^{(i)}(t) \rightarrow R_s(0) = R_s^{(d)}(0) + R_s^{(i)}(0)$$

La riassicurazione attiva non è un problema.

2. Suppongo di avere una riassicurazione passiva, un fissato portafoglio e un fissato esercizio



Con le ipotesi:

- L'assicuratore stipula polizze di durata annuale con premio unico (anche come la ccedente)
- Indico con $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$ istanti in cui c'è incasso di premi

Indico poi in t_h:

P_h^T= montepremi incassati in t_h (l'intervallo di copertura a fronte del premio è $[t_h, t_h+1]$

- Ipotesi semplificatrice: pago i riassicuratori nello stesso istante in cui incasso i premi

${}_rP_h^T$= premi pagati dai riassicuratori

C_k = il riassicuratore paga subito una commissione (provvigione) alla cedente (a titolo di partecipazione alle spese di "acquisizione", del rischio, ecc)

Fissiamo ora un istante intermedio $0 \leq t \leq 1$ e andiamo a valutare le componenti positive e negative:

$P^T(t) = \sum_{t_h \leq t} P_h^T$ (+) ricavo

$R_p(t)$ (-) debito;   riserva premi della cedente

${}_rP^T(t) = \sum_{t_h \leq t} {}_rP_h^T$ (-) debito   è l'importo in [0,t] pagato ai riassicuratori

Oss. Anche i riassicuratori devono accantonare una riserva premi

${}_rR_p\,(t)$ (+) voce di debito dei riassicuratori verso la cedente. Quindi (+) per la cedente

S(t) (-) importo pagato in [0,t] per sinistro dell'esercizio o degli esercizi precedenti

$R_s(t)$ (-) stima di quanto l'assicuratore deve pagare in futuro per sinistri già verificati ma che in t non sono ancora chiusi

${}_sR(t)$ (+) risarcimenti a fronte di riassicurazione che la cedente riceve dai riassicuratori in [0,t]

${}_rR_s(t)$ (+) riserva sinistri a fronte di sinistri già verificati ma non ancora risarciti. Voce di debito per i riassicuratori rispetto alla cedente

E(t) (-) voce di spese della cedente

C(t) (+) somma delle commissioni riconosciute dai riassicuratori (provvigioni riconosciute agli assicuratori)

Mancano ancora i riporti delle riserve precedenti

$R_p(0) - {}_rR_p(0)$ (+) riserva premi in 0 dedotta la parte a carico dei riassicuratori

$R_s(0) - {}_rR_s(0)$ (+) riserva sinistri

↓

$g(t) = [R_p(0) + R_s(0) - {}_rR_s(0)] + P^T(t) - {}_rP^T(t) + {}_rR_p(t) - S(t) + {}_rS(t) -$

$-R_s(t) + {}_rR_s(t) - E(t) + C(t)$

Vado ora a riscriverla separando la parte premi, sinistri e spese

$$g(t) = [R_p(0) - {}_rR_p(0) + R_S(0) - {}_rR_s(0)] + P^T(t) - {}_rP^T(t) - R_p(t) + {}_rR_p(t) - S(t) + {}_rS(t) - \\ + {}_rR_s(t) - E(t) + C(t)$$

Riscrivo la formula separando la parte premi , la parte sinistri e spese:

$g(t) = \left[\left(P^T(t) - {}_rP^T(t)\right) - \left(R_p(t) - R_p(0)\right) + \left({}_rR_p(t) - {}_rR_p(0)\right)\right] - \left[\left(S(t) - {}_rS(t)\right) + \left(R_s(t) - R_s(0)\right) - \left({}_rR_s(t) - {}_rR_s(0)\right)\right] - [E(t) - C(t)]$

In t=1 diventa

$g(1) = \left[\left(P^T(1) - {}_rP^T(1)\right) - \left(R_p(1) - R_p(0)\right) + \left({}_rR_p(1) - {}_rR_p(0)\right)\right] - \left[\left(S(1) - {}_rS(1)\right) + \left(R_s(1) - R_s(0)\right) - \left({}_rR_s(1) - {}_rR_s(0)\right)\right] - [E(1) - C(1)]$

Dove:

$\left[\left(P^T(1) - {}_rP^T(1)\right) - \left(R_p(1) - R_p(0)\right) + \left({}_rR_p(1) - {}_rR_p(0)\right)\right]$= premi di competenza dell'esercizio al netto delle cessioni in riassicurazione

(premi al netto dei premi pagati ai riassicuratori) - (variazione della riserva premi) + (variazione delle riserva premi a carico dei riassicuratori)

$\left[\left(S(1) - {}_rS(1)\right) + \left(R_s(1) - R_s(0)\right) - \left({}_rR_s(1) - {}_rR_s(0)\right)\right]$

= sinistri di competenza dell'esercizio/ oneri per sinistri al netto delle cessioni per sinistro

(variazione riserva sinistri nel periodo)+(variazione della riserva sinistri)-(variazione della riserva sinistri a carico dei riassicuratori)

$[E(1) - C(1)]$ = spese al netto delle provvigioni/commissioni riconosciute agli assicuratori dai riassicuratori

Le attività fatte dalle compagnie assicurative sono:

1. Tipicamente assicurativa
2. Gestione finanziaria
3. Di tipo amministrativo
4. Di tipo commerciale (contratti con le reti di vendita)

5. Rapporti con gli altri assicuratori

Danno luogo a fatti di gestione (sintetizzati nel bilancio di esercizio) nel caso dell'anno connessi con:

1. Incasso premi e pagamento risarcimenti
2. Acquisto di titoli o beni immobili per investire le somme e ricavare i rendimenti da tali sistemi finanziari
3. Pagare gli stipendi ai dipendenti, affitti, luce, gas, ..., costi degli uffici liquidativi, ecc
4. Pagamento provvigioni,.., premi di produzione
5. Pagamento di premi ai riassicuratori e ricevuta di risarcimenti da riassicurazione (o al contrario se l'azienda è riassicurativa)

BILANCIO DI UN'AZIENDA

Il bilancio viene fatto ogni 31/12 dell'anno e viene approvato entro il 30/4 dell'anno successivo.

Il controllo dell'autorità di vigilanza è fatto sui libri contabili, il bilancio è uno strumento di controllo da parte delle autorità di vigilanza (oggi I.V. ASS.)

Osserviamo che è uno strumento di controllo sia da parte del mercato: investitori, soggetti economici intermedi ed assicurati, sia per l'impresa stessa (controllo interno)

Da che cosa è composto il bilancio?

- Stato patrimoniale: è una fotografia della consistenza patrimoniale dell'azienda alla data del bilancio
- Conto economico: sintetizza i fatti di gestione dicendo costi e ricavi: giustifica il passaggio da uno stato patrimoniale in t ad uno in t+1
- Nota integrativa: sono specificati degli aspetti di tali prospetti
    - Rendiconto finanziario
    - Prospetto sul margine di solvibilità: un assicuratore per esercitare la sua attività deve disporre di un capitale libero da impegni (<> dalle riserve tecniche); tale margine è una riserva marginale a cui attinge se le cose vanno male.
        - L'attuale normativa dice quali sono le voci di bilancio che costituiscono tale margine di solvibilità; inoltre la normativa fissa un margine minimo con una formula che dipende dal volume di affari dell'azienda.
        - È oggetto di dibattito europeo l'emanazione della Direttiva Solvency II° (non ancora in vigore) una nuova normativa che tratta del problema dei requisiti di solvibilità. Il margine minimo non sarà più legato solo al volume di affari ma anche al tipo di affari e ad altro.
    - Allegati: relazione sulla gestione

STATO PATRIMONIALE

È un prospetto diviso in 2 parti:

Attivo	Passivo - Netto
A1 → a1 … An → an	P1 → p1 … Pn → pn Deb iti vs fornitori o terzi C1 → c1 … Cn → cn Capitale d'impresa
Investimenti: anche liquidità crediti vs terzi a = a1+…+an	Fonti: mezzi finanziari che hanno permesso di effettuare gli investimenti p = p1+…+pn c = c1+…+cn

a = p+c uguaglianza contabile

- Investimenti: in senso lato; investimenti di tipo immobiliare, finanziari, oltre a liquidità e crediti
- Finanziamenti:
  - patrimonio netto: patrimonio di proprietà dell'impresa
  - passività: ci sono scritti i mezzi finanziari che hanno consentito di attuare questi investimenti + debiti dell'impresa nei confronti di terzi

  se lo faccio la somma è soddisfatta l'uguaglianza contabile a=c+p

CONTO ECONOMICO

Questo prospetto è diviso in 3 sezioni; sono sintetizzati i fatti di gestione mediante costi e ricavi

- Conto economico rami danni
- Conto economico rami vita
- Conto non tecnico

Fornisce il saldo del conto economico che fornisce la perdita o l'utile dell'esercizio e viene riportato nel patrimonio netto

Esempio (Generali S.P.A.) Bilancio Generali 2012

Attivo:

- A: voce di credito

- B: attivi immateriali
- C: investimenti:
    - Immobiliari (terreni e fabbricati)
    - Imprese:
        - Azioni
        - Obbligazioni
        - Finanziamenti a titolo di partecipazione di altre imprese
- D: riserve tecniche a carico dei riassicuratori
    - Rami danni (crediti che vanta la generale) ${}_{r}R_{p}(1)$ riserva premi e ${}_{r}R_{s}(1)$ riserva sinistri
    - Rami vita
- E: altri crediti (nei confronti di altri soggetti: intermediari di riassicurazione
- F: altri elementi dell'attivo
    - Materiali e scorte
    - Liquidità
- G: ratei e risconti

Totale attivo: danni+ vita= (a) 74 milioni

Patrimonio netto

Esso è in sostanza il valore marginale di solvibilità, cioè del fondo libero da impegni dal quale si attinge per far fronte a cose impreviste..

A,B,C,D:

- Patrimonio netto
- Capitale sociale sottoscritto o fondo equivalente
- Riserve non tecniche (voci di debito), ma riserve patrimoniali che derivano da accantonamento di utili con l'autofinanziamento dell'impresa

<u>C. RISERVE TECNICHE</u>

1. Riserve premi $R_p(1)$
2. Riserve sinistri $R_s(1)$
3.
4. Altre riserve tecniche: es. copertura malattia su base pluriennale, viene prefissato un premio livellato, siccome il rischio malattia è crescente con l'età, all'inizio ho un esubero di premio a fronte di una mancanza degli anni successivi: *riserva di senescenza* (l'equivalente della riserva matematica nei rami vita)
   Riserva di perequazione: nel quadro normativo nuovo non sarà più ammessa nelle passività. A cosa serve? In alcuni rami vi è una variabilità del risultato tecnico, ovvero in diversi esercizi e anni si succedono anni nei quali il risultato tecnico dell'esercizio è positivo ad altri in cui è negativo. Soluzione: accantono l'utile negli anni in cui ce l'ho, ed ecco la formazione delle riserve di perequazione a cui attingere negli anni in cui ho una perdita. (ad esempio nel ramo credito)
   Oppure questa variabilità la trovo nelle situazioni con rischi rari ma onerosi quindi a fronte di molti anni in cui ho utile ho un anno con perdita (es. rami calamità naturali o rami rischi energia nucleare).

Attualmente è obbligatorio avere le riserve di perequazione per il ramo credito, ramo gestione calamità naturale; inoltre sono fiscalmente deducibili.
Per altri rami le riserve di perequazione sono facoltative ma non sono fiscalmente deducibili.
Oss. Col tempo le riserve di perequazione spariranno.

Oss. Tutte le cifre corrispondenti alle voci di bilancio sono stime: come renderle più leggibili e confrontabili? Si sta lavorando agli IAS o I.F.R.S. (International Accounting Standards) che definiscono i principi contabili in modo da rendere i bilanci più trasparenti, attendibili e facilmente confrontabili (importante in un mondo dove vi è globalizzazione o un mercato unico europeo)
Le riserve di perequazione sono un accantonamento di tipo prudenziale, e quindi non un debito, che è nato per il portafoglio in essere. La voce sarà spostata in Solvency Capital Equality.

CONTO ECONOMICO

Premi di competenza al netto delle cessioni in riassicurazione

a) è il $P^T(1)$ contabilizzati: sia quelli incassati che quelli in quietanza (con diritto di pagamento)
b)
c) Circa $R_p(1)$- $R_p(0)$
d) ${}_rR_p(1)$-${}_rR_p(0)$

4) oneri relativi a sinsitri

a) a1)-S(1)
   a2)-${}_rS(1)$
b) variazione dei recuperi (cioè recuperi di franchigie, ecc). Non tenute conto del nostro modello
c) variazione riserva sinistri
   c1) Rs(1)-Rs(0)
   c2) ${}_rR_s$(19-${}_rR_s$(0)

INDICATORI DEGLI ANDAMENTI TECNICI

Sono degli indicatori che riassumono l'attività di gestione di un'azienda nel suo complesso o in alcuni ambiti (rami). Spesso sono rapporti tra grandezze che compaiono in alcuni resoconti di bilancio e sono utilizzati in due modi principali:

1. fisso un indicatore e vedo come evolve nel tempo per una data impresa: evoluzione temporale di un'impresa
2. analisi: fisso diverse imprese in un anno e confronto il valore di un determinato indicatore delle diverse imprese

   Bisogna stare attenti a far confronti disomogenei (in quanto a volume d'affari o tipo di assicurazione)
   Ad es. non confronto RCA con rami incendi!

Eccone alcuni:

1) Loss ratio

Loss ratio o rapporto sinistri\premi: $\frac{sinistri\ di\ competenza\ di\ un\ esercizio}{premi\ di\ competenza\ di\ un\ esercizio}$

La definizione del rapporto non è sempre unica, per noi sarà dato da questa formula, ovvero in simboli: $\frac{S(1)+R_S(1)-R_S(0)}{R_p(0)+P^T(1)-R_p(1)}$

Se l'indice >1 evidenzia una situazione di sofferenza. Neanche 0,85 è un buon risultato perché non ho ancora sottratto le spese

→ un loss ratio ottimale non è troppo elevato

Un loss ratio alto suggerisce:

- Un problema di tariffazione
- Un problema della tipologia di rischio acquisito (cioè un brutto portafoglio)
- Una rete liquidativa pessima

→ suggerisce di attuare delle correzioni da parte dell'assicuratore.

$\frac{sinistri\ di\ esercizio}{premi\ di\ compentenza}$ premi di competenza o premi contabilizzati: quota premi di competenza assorbita dai costi dei sinistri dell'esercizio

Al numeratore: c'è il pagato (pagamento sx) + il riservato (riserva) + spese per sinistro avvenute nell'esercizio (spese)

$\frac{riserva\ sinistri}{premi\ contabilizzati}$ quota riserva assorbita dai premi contabilizzati

$\frac{pagato\ per\ sinsitri}{riserva\ sinistri}$ quota del pagato rispetto al riservato

2) Indicatori relativi al ricorso della riassicurazione

$\frac{pagato\ ceduti}{premi\ contabilizzati}$, in simboli $\frac{{}_rP^T(1)}{P^T(1)}$: quota premi che è stata poi pagata come riassicurazione

$\frac{riserve\ tenciche\ al\ netto\ della\ riassicurazione}{riserve\ tecniche\ al\ lordo\ della\ riassicurazione}$ in simboli $\frac{R_S(1)-{}_rR_S(1)}{R_S(1)}$

Indicazione del debito netto a fronte della riserva sinistri rispetto a quello lordo: debito che grava sull'impresa al netto della parte che grava sugli assicuratori

– $\frac{riserva\ premi}{riserva\ sinsistri}$ quota del pagato rispetto al riservato

Indicatori relativi al ricorso della riassicurazione:

- $\frac{premi\ ceduti}{premi\ contabilizzati}$, in simboli $\frac{{}_rP^T(1)}{P^T}$ quota premi che è stata poi pagata come riassicurazione
- $\frac{riserve\ tecniche\ al\ netto\ della\ riassicurazione}{riserve\ tecniche\ al\ lordo\ della\ riassicurazione}$ cioè ad esempio in simboli $\frac{R_S(1)-{}_rR_S(1)}{R_S(1)}$ indicazione del debito netto a fronte della riserva sinistri rispetto a quello lordo: debito sull'impresa al netto della parte che grava sugli assicuratori.

3) Indici relativi alla gestione amministrativa:

I. $\frac{\text{Provvigioni di acquisizione}}{premi\ contabilizzati}$ (o altre spese di amministrazione o altre spese di acquisizione)
Indicazione della quota premi assorbita delle spese
Indicazione efficienza dell'impresa per quanto riguarda la gestione delle spese

II. ***Expenses ratio***: $\frac{totale\ spese}{premi\ contabilizzati}$

III. ***Combined ratio*** = loss ratio + expenses ratio

Indicatori riguardanti lo stato patrimoniale:

1. $\frac{utile}{premi\ contabilizzati}$ indicatore della redditività rispetto al volume d'affari
2. $\frac{premi\ contabilizzati}{investimenti}$ quota investimenti finanziata dai premi
3. $\frac{riserve\ tecniche}{investimenti}$ quota investimenti finanziata dalle riserve tecniche
4. $\frac{liquidità}{totale\ attivo}$
5. $\frac{titoli\ (investim\ finanziari)}{totale\ attivo}$
6. $\frac{immobili}{totale\ attivo}$ gli immobili sono gli investimenti immobiliari

Oss. Il 5 e 6 sono indicatori sulla politica di investimenti dell'impresa: 1) dice come evolve l'impresa, 2) utile fare confronti fra le imprese

Solvency ratio: $\frac{margine\ di\ solvibilità}{premi\ contabilizzati}$ è la quota premi assorbita dal margine di solvibilità.

Tali indicatori relativi alla gestione sono spesso relativi ad uno specifico ramo (es. Loss ratio: rami incendi). Essi si vanno ad aggiungere agli indicatori di sinistrosità (stessa categoria di grandezze)

(Q , $\bar{c}, \frac{n}{t}$: serbatoio di indicatori della gestione)

RCA

Responsabilità Civile Autoveicoli a motore o natanti. Essa è obbligatoria dal 1971 con l'entrata in vigore della legge 990/69.

Le polizza RCA sono circa il 50% delle polizze totali (delle polizze danni) e coprono le obbligazioni da danni provocati involontariamente con l'auto sia che l'auto sia condotta dall'assicurato, che da un amico o da chi l'ha rubata.

È fornita una copertura per danni fatti a : beni di terzi, animali di terzi, lesioni fisiche a terzi.

I terzi sono: passanti, trasportati, familiari del conducente\assicurato, anche l'assicurato, se è lui che non guida.

Oss. Tali estensioni sono state fatte recentemente, inizialmente i "terzi" erano solo i passanti.

Oss. La copertura non opera se l'assicurato è ubriaco o sotto sostanze stupefacenti o l'autoveicolo non è stato usato per l'uso comune. In realtà il danno viene risarcito ma c'è una rivalsa sull'assicurato.

L'estensione territoriale comprende l'Italia: con città del vaticano, san Marino, .E, convenzione carata verde, e altri Stati esplicitamente ciati.

È un tipo di copertura a primo rischio assoluto, c'è un massimale minimo di legge, che dal 1° Giugno 2012 è 5 000 000€ per sinistro per un danno a persone, 1 000 000€ per sinistro per danno a cose.

È prevista inoltre un'indicizzazione ogni 5 anni in base all'indice europeo.

Esempio: ANIA assicurazione italiana 2011

(Associazione Nazionale Imprese Assicuratrici)

Pg.123

Nel 2011 c'è stato un incremento poiché sono stati aumentati i premi. Variazione della riserva premi e altre voci.

Oneri per sinistro: quelli che abbiamo chiamato competenza per sinistro al lordo delle riassicurazioni $S(1)+R_s(1)-R_s(0)$ è scomposto in : sinistri di competenza e in sufficienza/ insufficienza sinistri esercizi precedenti; cioè $S(1)=S^{old}(1)+S^{new}(1)$ importo pagato nell'esercizio per sinistri di esercizi precedenti + l'importo pagato nell'esercizio per risarcimento di sinistri dell'esercizio. L'importo complessivo pagato sia per l'esercizio precedente (se è uno solo) sia per quello attuale.

$Rs(1)=R_s^{old}(1)+R_s^{new}(1)$

Competenza sinistri: "nel foglio oneri per sinistro" al lordo della riassicurazione è scrivibile:

$S(1)+R_s(1)-R_s(0) = S^{new}(1)+R_s^{new}(1)-[R_s(0)-S^{old}(1)-R_s(1)]$ cioè l'importo pagato per sinistri dell'esercizio, nuovi – [suff\insuff di sinistri degli esercizi precedenti]. Il primo addendo è il "pagato +riservato" per sinistro dell'esercizio: sinistri dell'esercizio chiamati nel foglio "sinistri di competenza"

Ora ex-post, se $R_s(0)- R_s(1)<0$ cioè la riserva accantonata non è stata sufficiente a coprire le spese: auspicabilmente è vicino a 0 ma è un problema se <<0

È uno dei rischi che normativa Solvency II chiama in causa quando si vuole valutare il capitale di solvibilità. Ed è detto "rischio che la riserva accantonata non riesce a fare fronte agli impegni" o "rischio di riservazione" (Reserve Risk)

Oss. Da tre anni le riserve non sono sufficienti agli impegni presi!

Spese di gestione: viene fatta una valutazione comparativa di diversi esercizi; sono aumentate progressivamente

Saldo tecnico:: -730 Milioni è un ramo che a livello nazionale è in perdita (a livello gestione tecnica)

Utile investimenti +272 Milioni, la redditività sulla componente finanziaria complessivamente è diminuita. Tale declino parte dal 2008; è per questo che sono aumentati i premi!

Oss. L'incidenza dei premi sul totale premi rami danni è del 48,9%

Combined ratio: somma expenses ratio+ loss ratio = 102% cioè situazione di perdita nel ramo.

- Expense ratio: incidenza delle diverse voci di spesa sui premi di competenza
- Loss ratio: $\frac{S(1)+Rs(1)-Rs(0)}{P^T(1)-RR_p(1)+R_p(0)}$situazioni di Loss ratio molto elevati, 84% non profittabilità del ramo

Vi è un uso di questi indicatori monitorati nel tempo sia da parte dello stato che dalle compagnie assicurative stesse!

ANIA NOTIZIE RCA, RISARCIMENTO DIRETTO

RISARCIMENTO DIRETTO RCA (attuale modalità di risarcimento)

Normalmente nelle assicurazioni RC il danneggiato è risarcimento dalla compagnia che copre il responsabile del sinistro.

Es.

Danneggiato (Tizio)   Responsabile sx (Caio)

Comp. Ass. A   Comp. Ass. B

Caio è responsabile di un sinistro provocando Danni a Tizio. La compagnia B risarcisce Tizio.

In Italia e in altri Paesi, nel campo RCA, le imprese si sono accordate per fornire l'indennizzo tramite R.D (Risarcimento Diretto)

Danneggiato (Tizio)	Responsabile sx (Caio)
risarcimento	
Impresa assicuratrice A	Impresa assicuratrice B

Ora: nello schema risarcimento diretto tizio si rivolge ad A che paga il risarcimento per conto di B; B rimborserà l'impresa A.

A è detta ***impresa gestionaria***, poiché gestisce il sinistro per conto di B, mentre B è detta ***impresa debitrice***.

L'accordo in Italia questo tipo di risarcimento era su base volontaria e operava per una limitata tipologia di sinistri. Serviva inoltre la firma congiunta di Tizio e Caio.

Ma il 1° Luglio 1994 c'è stata la liberalizzazione delle tariffe , su Direttiva Europea. Prima l'RCA era una tariffa con premi comuni dettati dalla Commissione Filippi.

L'aumento delle tariffe RCA è avvenuto dopo il 1994 ed ha scatenato una battaglia assicuratori-assicurati: vi è stato un intervento dell'antitrust che ha modificato la modalità di risarcimento rendendo obbligatorio il risarcimento diretto per facilitare la concorrenza e diminuire i prezzi o il loro tasso di crescita.

Oss. Ulteriori motivazioni per risarcimento diretto:

- 1° effetto: semplifica e velocizza le pratiche (iter) liquidatorie
- La compagnia A liquida il sinistro: miglioramento della qualità del servizio (l'assicurato è contento) (l'agenzia A è incentivata, di più rispetto a B, di fornire un buon servizio=

- Il fatto di esserci contatto diretto fra Tizio e A può limitare fenomeni di frode. A è più facilitata rispetto a B a controllare Tizio.
- La fase di liquidazione diretta rende più facile che l'assicurato, relativo all'impresa gestionaria, si rivolga a medici-meccanici convenzionati con l'impresa: vengono meno i fenomeni opportunistici

Oss. Per evitare che A sia generoso con Tizio la compensazione\ rimborso pagato da Ba d A è determinato in modo che A no paghi più del giusto!

SCHEMA DEL RISARCIMENTO DIRETTO

Principali riferimenti normativi:

- Convenzione tra assicurati per risarcimento diretto (C.A.R.D.). Entrata in vigore il 1/2/2007 , cioè entrano in vigore per tutti i sinistri al 1/2/2007
- Una procedura di risarcimento diretto interviene per:
    - Danni al veicolo
    - Eventuali danni lievi al conducente (fino al 9% di invalidità)
    - Eventuali danni a cose trasportate

    +

    - Procedura di risarcimento dei danni al 3° trasportato
    - Danni alla persona/ terzo trasportato
    - Danni alle cose/ terzo traportato

Per attivare la procedura di risarcimento diretto deve esserci collisione:

- Fra 2 veicoli a motore targati e identificati
- Tra 2 veicoli a motore immatricolati in Italia
- Tra 2 veicoli assicurati con RCA italiana o europea
- In caso di collisione avvenuta in Italia (+ città del vaticano e San marino)

(non si applica se è coinvolto un ciclomotore non munito della nuova targa)

Il danneggiato si rivolge ad A che "lavora" per conto di B.

È previsto per velocizzare, un certo tempo in cui A deve risarcire.

Poi avviene, tramite la stanza di compensazione (CONSAP) il regolamento tra A e B (è un ter<<o che gestisce le compensazioni tra imprese)

PROCEDURA RISARCIMENTO DANNI A TERZI

- 2 o più veicoli (anche non targati) a motore
- Identificati
- Coperti da assicurazione obbligatoria

La liquidazione spetta all'impresa che assicura il veicolo dove si trova il traportato al momento del sinistro indipendentemente dalla colpevolezza o meno del conducente. L'impresa gestionaria è quella che assicura il veicolo dove era il traportato.

C.A.R.D.: gestisce le regole del R.D. ed indica come avviene il rimborso a favore della gestionaria.

1 normativa generale

+2 specifiche: Convenzione Terzi Traportati (CTT) e Convenzione Indennizzo Diretto (CID)

RIMBORSI A FAVORE DELLA GESTIONARIA

- C.I.D. se rientra nei termini il rimborso

Se rientra nei termini il rimborso è effettuato tramite un forfait.

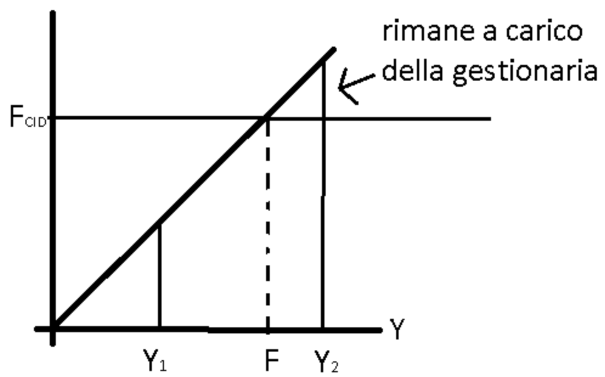
Danneggiato (CID subito per la gestionaria)

Responsabile sinistro (CID causato per la debitrice)

Debitrice → gestionaria → Tizio .La debitrice paga 1 forfait alla gestionaria che paga Tizio.

Le prestazioni nette sono:

- Per la gestionaria Y_{CID}-f_{CID}
- Per la debitrice f_{CID}



Se l'impresa risarcisce y_1 c'è una guadagno

Se l'impresa risarcisce y_2 c'è una perdita

- ➔ Un forte incentivo a pagare risarcimenti che stiano sotto il forfait (calibrato in modo adeguato)
- Come vengono fissati i forfait? Esistono forfait a seconda del veicolo usato dal danneggiato e dalla provincia di residenza del danneggiato: forfait scelto in ogni area:

	auto	Moto
Area 1		
Area 2		

Area 1683€	1683€	3455€

L'Italia è divisa in 3 macro-aree e il forfait è diverso tra auto e moto; ciò a causa dell'alta percentuale dei danni alla persona per quanto riguarda gli incidenti con moto.

Il forfait per l'auto è diverso da quello per la moto ed entrambi sono variabili nel tempo: ogni anno n comitato tecnico se ne occupa.

All'inizio quando è stato istituito il R.D. era fissato un unico forfait per macro-area (per moto e auto): ma quando uno viaggia in moto il sinistro provoca spesso danni a persone → le imprese con molte moto assicurate si trovavano ad avere molte perdite. Alcune imprese finivano in perdita per questo motivo.

CONCORSO DI COLPA (50-50)

Compagnia → A B

Chi → Tizio Caio

Danno → 3000€ 1000€

Colpita → 50% 50%

Tizio deve ricevere da B 50% di 3000€

Caio deve ricevere da A 50% di 1000€

La regolazione è fatta 50% del forfait

I rimborsi avvengono con cadenza mensile dalla stanza di compensazione: ogni mese la stanza di compensazione dice ad ogni singola impresa il saldo rispetto alle altre imprese (es. Genertel ha un debito con Allianz di tot)

Inoltre se un'impresa ha più CID subiti di quelli causati. Cioè ha più crediti che debiti, vuol dire che ha gestito più sinistri di quelli che avrebbe gestito senza R.D. → viene valutato un "rimborso spese".

Il rimborso è riconosciuto se l'importo del risarcimento supera una franchigia che viene stabilita dal comitato 0.15 (CID subito – CID causato)

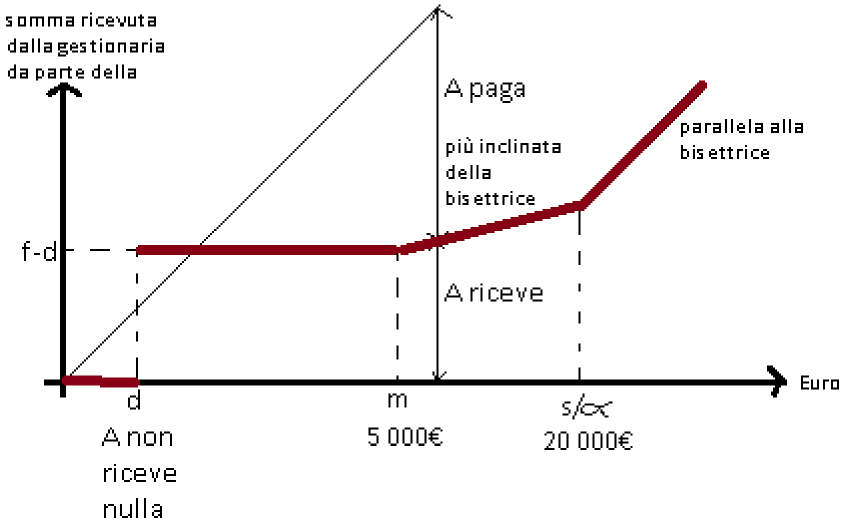
Calcolo del forfait card CTT

Convenzione Terzi Trasportati: il risarcimento della gestionaria per un sinistro che rientri in CTT è dato dalla funzione.

R_{CTT} è la funzione: $\begin{cases} 0 & Y_{CTT} \leq d \; franchigia \\ f_{CTT} - d & d \leq Y_{CTT} \leq m \; plafond = 5000€ \\ f_{CTT} + (Y_{CTT} - m) - \min\{\alpha Y_{CTT}, S\} & f_{CTT} > m \end{cases}$

con S=massimo di scoperto=20 000€, α= aliquota di scoperto 0,1

L'andamento della funzione è:



L'impresa riceve più di quanto paga solo poco dopo d.

La regolazione tra le due dipende dal sinistro:

- Se il sinistro avviene tra due veicoli assicurati e identificati: il rimborso avviene tramite la stanza di compensazione
- Se ci sono due veicoli ma uno dei due non è targato, etc o non è avvenuta collisione, il rimborso avviene in modo diretto tra A e B

Se è tra più di 2 veicoli si ha un risarcimento integrale e B paga ad A tutto quello che A ha dato a Tizio.

Oss. È stabilito che i risarcimenti che la gestionaria effettua non siano comunicati alla debitrice, salvo per danni a terzi traportati (CTT) sopra il plafond → la debitrice sa solo che deve pagare 1 forfait. Questo avviene per evitare che venga elusa la concorrenza: dal pdv attuariale p un provvedimento orribile perché le imprese si trovano a non avere una base di dati attendibile su cui valutare le tariffe (dati incompleti per la tariffazione)

SINISTRI E PARTITE DI DANNO

Nel sistema di risarcimento in vigore, un sinistro può dare luogo a più gestioni assicurative dello stesso; si parla di in questo caso di partite di danno.

Es. Collisione tra due veicoli: ho 3 partite :

I. CID (Convenzione Indennizzo Diretto)
II. CID
III. CTT

Le partite di danno sono diverse e un sinistro può essere totalmente o limitatamente ad alcune partite di danno:

- NO CARD: la compagnia B risarcisce il danneggiato
  - Danni fisici a passanti
  - Sinistri avvenuti all'estero

    - Ecc..
- CID CAUSATI
- CID SUBITI
- CTT CAUSATI
  CTT SUBITI

E se ho un sinistro tra due assicurati entrambi aventi la stessa compagnia (sinistri naturali)?

Nel 2007 questo tipo di sinistro non rientrava nei CARD poi rientrava nei card ma su base volontaria e dal 2009 rientra nei CARD → ora sono sinistri CARD: la differenza sta nel fatto che i risarcimenti "entrano" nella stanza di compensazione e per una questione di statistiche? (testuale)

Il costo complessivo per i sinistri che si verificano in un anno si ottiene sommando:

- Risarcimenti no card
- Forfait cid causati
- Risarcimento ctt subiti
- Rimborsi per ctt causati

Descrizione del risarcimento totale dovuto a terzi:

$X=Y_1+\ldots+Y_N$ quanto costa un assicurato ad un assicuratore

Oss. Esso non rappresenta la prestazione dell'assicuratore che invece è dato da:

$X^{(A)} = X_{no\ card} + X_{CID}^{subiti} + X_{CID}^{causati} + X_{CTT}^{subiti} + X_{CTT}^{causati}$

Dove ciascuno dei numeri aleatori:

$X_{no\ card} = \sum_{i=1}^{N_{no\ card}} Y_{no\ card,i}$

$X_{cid}^{S} = \sum_{i=1}^{N_{cid}^{S}} Y_{cid,i}^{S}$

con Y_{cid}^{S}= impegno dell'assicuratore per un sinistro i-esimo; $Y_{cid}^{S} = Y_{cid,i} - f_{cid,i}$ dove $f_{cid,i}$ è forfait riconosciuto dalla debitrice alla gestionaria: l'assicuratore sa già in che macro-area è e che veicolo usa poiché è un suo assicurato.

$X_{cid}^{C} = \sum_{i=1}^{N_{cid}^{C}} Y_{cid,i}^{S}$

con $Y_{cid}^{S} = f_{cid,i}$ → forfait è a priori aleatorio poiché dipende dal danneggiato: se egli si trova su un auto o moto o in una macro-area precisa

…

Oss. Per valutare la speranza matematica di $X^{(A)}$ devo calcolare la speranza matematica di ogni componente della somma: complicato perché devo introdurre un modello probabilistico per l'insieme e poiché c'è un problema di "acquisizione" dei dati

NORME BONUS-MALUS

Attualmente vi sono molti problemi, specialmente con la legge 2007 “decreto Bersani”: obbligo di applicare la stessa classe di merito assegnata ad un veicolo già assicurato al nuovo assicurato, nel caso un contratto RCA sia relativo ad un veicolo ulteriore acquistato dal proprietario di un veicolo già assicurato o da un componente del suo nucleo familiare. Es tizio ha classe BM1 → il figlio 18-enne acquista un autoveicolo perciò bisgona assegnarli la classe BM1.

Se ho un concorso di colpa al 50% o minoritario → non c’è cambio di classe

L’attribuzione della classe avviene al pagamento! (cioè è ritardata) Dovrebbe indurre a velocizzare le pratiche liquidative

Implicazioni: - benefici immeritati per alcuni individui e – effetto di ridistribuzione - …

ANALISI ANIA: assicurazione italiana 2011-2012

P 132

Tavola: evoluzione frequenza sinistri valutata sui dati di portafogli italiani RCA

Oss. Nel 2011 c’è un grosso calo della frequenza sinistri 6,49% ma non è dovuto al comportamento virtuoso:

- 1 causa: crisi economica > costo carburanti → < uso veicoli
- 2 causa: Maggior ricorso all’autoliquidazione dei sinistri (e conseguente all’incremento dei premi)
- 3 causa: calo del numero di veicoli assicurati in alcune zone del Paese dove invece c’è una frequenza sinistri elevata

Costo emdio epr sx: 4337€ nel 2011

Fondo garanzia vittime della strada:

gestito dalla CONSAP

Espleta pagamenti dei sinistro quando il responsabile del sinistro scappa o è su un veicolo non assicurato → il danneggiato viene comunque risarcito.

P133 confronto con altri Paesi Europei

Il costo elevato è dovuto al fatto che in Italia i danni alla persona sono tenuti molto in conto, anche ad esempio “Il colpo di frusta”, ma si stanno facendo delle modifiche.

P 134

P135 relativi al 2010

P 136, 157, 163

Altri indicatori che vengono monitorati

- Velocità di liquidazione a volte distinta in :

- Velocità di liquidazione = numero defunti/ numero denunciati
- Velocità di eliminazione = numero chiusi/ numero denunciati

- Numero di IBNR
- Numero sinistri con seguito
- Numero delle riaperture (sinistri chiusi senza seguito e poi riaperti perché viene riconosciuta una responsabilità del riassicuratore)
- Costo medio definito: importo definito/ num sinistri definiti (definiti nel costo)
- Costo medio riservato = pagato iniziale + riservato / num sinistri non chiusi
- Costo medio del denunciato = costo totale/ numero denunciati
- Costo medio dei denunciati con seguito: costo totale/ (num denunciati- num dei senza seguito)
- …

Diverse di queste analisi non vengono fatte solo di anno in anno ma di trimestre in trimestre

p.164 incidenza sinistri card:

anno 2010 80,7 perché quelli naturali non erano card

anno 2011 100 ..

Oss. Card + no card non sommano 100% ma di più → questo perché ci sono sinistri che non solo né card né no card.

P166, 167

Oss. Anche gli assicuratori conviene che la velocità di liquidazione sinistro sia elevata cioè conviene pagare subito e non "dialtare" nel tempo il risarcimento (152 vecchio 2010-2011 bonus-malus)

153 è il coeff medio di premio ponderato, è calcolato:

costo medio ponderato: (metà pg $\sum_{j=1}^{J}(p_j\pi_j)P$ è il premio mediamente incassato

con ($p_j$quota assicurati che si trova nella classe BM_j e π_j sono quelli della tariffa amministrata

Ho subito una decrescita negli ani: problema di stabilità finanziaria del sistema poiché è finanziariamente in equilibrio se gli sconti sono compensati dagli aggravi. E nel tempo non vi è questo equilibrio.

Es. Se P 2004 è calcolato in modo che P2004= $\sum_{j=1}^{J} p_j\pi_j = E(X)$ cioè in modo da avere equilibrio tecnico/finanziario del sistema. E(X) è risarcimento atteso per assicurato, $\sum_{j=1}^{J} p_j\pi_j$coeff medio di 0,65 circa fatto uno il premio di riferimento.

Se il coeff si abbassa ma P ed E(X) rimangono fissi: il sistema non è più in equilibrio e non è più valida l'uguaglianza, devo andare ad aumentare P per ristabilire l'equilibrio tecnico.

Quando i coefficienti di premio scendono in maniera così rapida (caso italiano) non c'è più equilibrio tecnico.

fine

Sommario