24 SETTEMBRE 2018: rapporti che sussistono tra
- importi
- date

- MAT. FIN. classica: op. finanziarie CERTE (importi e date CERTE)
- " FIN. Moderna: op. finanziarie ALEATORIE

ASSET ALLOCATION (in italiano teoria del portafoglio):

Inizio delle lezioni --:15 | ORARIO RICEVIMENTO: MAR 15:00 - 19:00

ESAME:
- Parte scritta (~ 2h/2:30h)
- Parte orale verranno ammessi anche chi non ha raggiunto la piena sufficienza

Sistema finanziario: 00:29

L'insieme degli strumenti, degli intermediari, dei mercati e delle relative regole attraverso cui si realizza la →
- movimentazione monetaria
- trasferimento del rischio tra soggetti (agenti) economici

Flussi tra:
Unità in surplus ⟶ Unità in deficit
\+ denaro del bisogno / - denaro del bisogno

- Stipula di contratti finanziari
- Compravendita di titoli finanziari

Contratto: accordo tra 2 o + parti
Contratto finanziario: è un contratto per scambiarsi importi finanziari in determinate date
Sia gli importi che le date possono essere esplicitate oppure sono dati implicitamente 00:37
bisogna esserci scritta nel contratto la regola di come scambiare questi importi nelle date stabilite
Es.: pagherò il doppio del valore di un'azione ad una CERTA data t
- assicurazioni (sulla vita): importi noti, date non note
- mutui (a tasso variabile): importi non noti, date note
- assicurazioni (RCA): importi e date non note

- Contingent claims (contratti finanziari contingenti)
- in alcuni casi nel contratto le parti non possono cambiare
- in altri contratti è possibile che le parti possono essere cedute a terzi (NEGOZIAZIONE) 00:45

Data di esigibilità: data in cui un importo viene incassato o pagato

Titolo finanziario: Io compro un titolo da X e X dopo mi pagherà attraverso flussi futuri di denaro

I titoli finanziari possono essere negoziati in appositi mercati [00.02]

- Azione: Titolo negoziabile (si può vendere) è una quota di una società che si possiede
- Obbligazione: Titolo che rappresenta una QUOTA di un prestito che viene fatto ad una certa società (negoziabile)
- Derivati: Titoli che prevedono il pagamento di flussi di denaro che dipendono da qualcos'altro.

I contratti finanziari:

Unità in surplus $\xrightarrow{\text{trasferim. monetario}}$ Unità in deficit

Operazioni di investimento: → posticipo la disponibilità di denaro
ho esborsi iniziali e avrò degli introiti in futuro, diversamente le Op. di finanziamento

Operazioni di finanziamento: → anticipo la disponibilità di denaro

Unità in surplus: soggetto che versa il denaro
Unità in deficit: soggetto che riceve il denaro

Contratto finanziario → Operazione finanziaria [01:06]

Operazione finanziaria: è una COPPIA ORDINATA DI VETTORI (n-uple)

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ importi tutti in una fissata valuta → con segno (+: ricevo; −: pago)

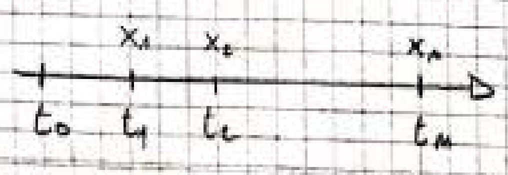
$\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ date (SCADENZARIO)

con $t_1 < t_2 < \dots < t_m$

Operazione finanziaria: $\underline{x} / \underline{t}$

t_0: data di stipula del contratto
potrebbe capitare che:
$t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$

Un altro modo è questo (grafico):



Operazioni finanziarie CERTE:
Date e importi CERTI e nella stessa valuta
$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

Operazioni a pronti (Spot): Quando $t_0 = t_1$, $x_1 \neq 0$
Nel momento in cui io stipulo il contratto pago (o ricevo) subito un flusso di denaro

Operazioni a termine (forward): Quando $t_0 < t_1$ (oppure $t_0 = t_1$, $x_1 = 0$)

al momento dell'accordo non pago e non ricevo nulla, mi metto solamente d'accordo con l'altra parte per esigere gli importi futuri

Op. di investimento: nel vettore $\underline{x}$ $(\overset{\text{importi negativi}}{-,-,-}, \dots, \overset{\text{importi positivi}}{+,+,+})$

Op. di finanziamento: nel vettore $\underline{x}$ $(\overset{\text{importi positivi}}{+,+,+}, \dots, \overset{\text{importi negativi}}{-,-,-})$

Investimento in senso lato: quando la scadenza media degli ESBORSI precede la scadenza del primo INTROITO

Finanziamento in senso lato: quando la scadenza media degli INTROITI precede la scadenza del primo ESBORSO

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

x_1

$x_1 + x_2$

$x_1 + x_2 + x_3$

$\vdots$

valore del saldo < 0 → Investimento in senso lato

$x_1 + x_2 + \dots + x_m > 0$ valore del saldo → Finanziamento in senso lato

---

25 SETTEMBRE 2018:

$\boxed{25/09/2018} = t_0$ operazione investimento a pronti:

-2000 (25-09-2018) — +1500 (25-03-2019) — - - — +700 (25-09-2020)

Vettore degli importi: $\underline{x} = (-2000, +1500, +700)$

Scadenzario $\underline{t} = (25\text{-}09\text{-}2018, 25\text{-}03\text{-}2019, 25\text{-}09\text{-}2020)$

operazione di finanziamento a termine:

(25-09-2018) — +1000 (25-09-2019) — -700 (25-09-2020) — -400 (25-09-2021)

Vettore degli importi $\underline{x} = (0, +1000, -700, -400)$

Scadenzario $\underline{t} = (25\text{-}09\text{-}2018, \dots, \dots, 25\text{-}09\text{-}2021)$

$\boxed{00:12}$

Somma tra due operazioni finanziarie:

$\underline{x}/\underline{t}$, $\underline{y}/\underline{s}$ operazioni finanziarie

Consideriamo l'unione degli elementi di $\underline{t}$ e di $\underline{s}$ e si ottiene il vettore $\underline{r}$ (UNIONE DI INSIEMI, NON di vettori)

$\dim(\underline{r}) \in [\max(\dim(\underline{t}), \dim(\underline{s})), \dim(\underline{t}) + \dim(\underline{s})]$ * Note Pag 6 $\boxed{00:17}$

x': è il vettore allungato, aggiungendo gli zeri rispetto alle date di $\underline{r}$ $\quad \underline{x}'/\underline{r}$

y': stessa cosa $\quad \underline{y}'/\underline{r}$

$\underline{X}/\underline{t} = (+3, -10, +20) // (1-1-2019,\ 1-4-2019,\ 1-11-2027)$

$\underline{Y}/\underline{s} = (-2, +15, -30) // (1-1-2019,\ 1-3-2020,\ 1-10-2025)$

il vettore $\underline{r}$ sarà: le date sono ORDINATE

$\underline{r} = (1-1-2019,\ 1-4-2019,\ 1-3-2020,\ 1-10-2025,\ 1-11-2027)$ *1

$\underline{X}' = (+3, -10, 0, 0, +20)$; $\underline{Y}' = (-2, 0, +15, -30, 0)$

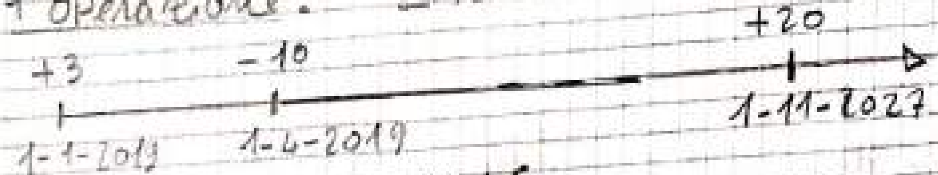
La somma tra queste due operazioni finanziarie sarà (ovviamente un'operazione finanziaria):

$\underline{Z}/\underline{r}$ dove $\underline{Z} = \underline{X}' + \underline{Y}'$

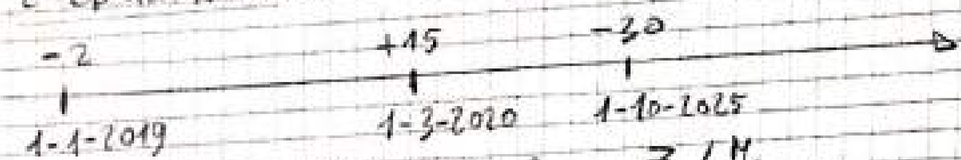
00:27

$\underline{Z} = (+1, -10, +15, -30, +20)$

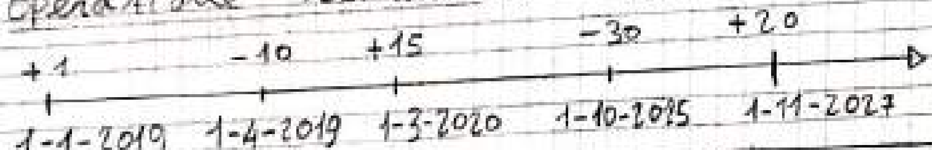
1° operazione: $\underline{X}/\underline{t}$



2° operazione: $\underline{Y}/\underline{s}$



operazione somma: $\underline{Z}/\underline{r}$



00:33

1)

Scomposizione di un'operazione finanziaria: operazioni finanziarie che hanno come somma l'operazione di partenza:

2)

$\underline{Z}/\underline{r} = \underline{X}/\underline{t} + \underline{Y}/\underline{s} = \underline{X}'/\underline{r} + \underline{Y}'/\underline{r}$

Pagamenti prima e dopo il 1-1-2020:

3)

$\underline{X}''/\underline{t}''$ dove $\underline{t}'' = (1-3-2020,\ 1-10-2025,\ 1-11-2027)$

(dopo il 1-1-2020) $\underline{X}'' = (+15, -30, +20)$

$\underline{r}$: lo stesso di prima *1

$\underline{Y}''/\underline{s}''$ $\quad \underline{s}'' = (1-1-2019,\ 1-4-2019)$

(prima del 1-1-2020) $\underline{Y}'' = (+1, -10)$

Per esempio quando si devono calcolare gli interessi bisogna essere in grado di calcolare la differenza tra 2 date (distanza), però espressa in forma numerica. Si fissa un'unità di misura di riferimento che solitamente è l'ANNO

A.

00:45

↑↑↑

Si preferisce lavorare con i numeri piuttosto che con le date. Numeri al posto di date nello SCADENZARIO

Continua sopra...

$\underline{X}''' = (+1, +15, +20)$ introiti, importi in entrata

$\underline{t}''' = (1-1-2019,\ 1-3-2020,\ 1-11-2027)$

$\underline{Y}''' = (-10, -30)$ esborsi, importi in uscita

$\underline{s}''' = (1-4-2019,\ 1-10-2025)$

(4)

Day Count conventions (convenzioni per calcolare la distanza tra due date) $t_1 < t_2$

$t_1 = (gg1, mm1, aa1) < (gg2, mm2, aa2) = t_2$

gg = n° di giorni effettivi tra le due date (che intercorrono)

Si conta dal giorno dopo gg1 fino al giorno gg2 stesso

ACT / ACT : "ACT" sta per ACTUAL che vuol dire EFFETTIVO

00:50

Se aa1 = aa2 = bisestile allora $\frac{gg}{366}$

Se aa1 = aa2 = non bisestile allora $\frac{gg}{365}$

Se aa1 < aa2 e tutti gli anni compresi (inclusi aa1 e aa2) tra aa1 e aa2 sono non bisestili allora $\frac{gg}{365}$

Se aa1 < aa2 e sono coinvolti sia anni bisestili che non allora si considerano vari blocchi:

(31, 12, aa1) − t1 +

1 per anno compreso (strettamente) tra aa1 e aa2 +

+ n° di giorni tra la data t_2 e (31, 12, aa2 − 1) / 365 o 366 se aa2 è non bisestile o bisestile

01:00

La convenzione ACT / ACT viene utilizzata nell'area Euro, USA, Gran Bretagna per i titoli di scadenza MEDIO-LUNGA (Es. Buoni Poliennali del Tesoro).

1) $t_1 = 3-2-2010$, $t_2 = 23-5-2010$ ANNO NON BISEST.

gg: 25 a febbraio +
31 a marzo +
30 ad Aprile +
23 a Maggio +
109

quindi ... $\frac{109}{365}$

2) $t_1 = 3-2-2012$ $t_2 = 23-5-2012$ ANNO BISEST.

gg = 110 quindi ... $\frac{110}{366}$

3) $t_1 = 7-10-2010$ $t_2 = 12-3-2012$

24 +
30 +
31 =
85 nel 2010

$\frac{85}{365} + 1 + \frac{72}{366}$

31 +
29 +
12 =
72 nel 2012

Altre convenzioni sono: 01:14

- ACT / 360 → Usata per i Buoni ordinari del tesoro
- ACT / 365 → Usata in G. Bretagna per i titoli a breve non per forza emessi dallo stato

Nell'esempio 3)

$\frac{522}{360}$, $\frac{522}{365}$

Altre convenzioni: (1/1F)

Anno Commerciale : 30/360 si considerano 30 gg per ogni mese anche se il mese preso in considerazione ha 31 gg oppure è febbraio

Questa convenzione viene utilizzata dagli USA per le obbligazioni societarie (NON emesse dallo stato) 01:26

<u>Business day Conventions</u>: Queste convenzioni riguardano le situazioni in cui una delle date coinvolte è un giorno festivo. Es: Lo stipendio viene accreditato ogni 25 del mese. Se il 25 cade di festivo*[2] allora l'accredito avviene il venerdì precedente[1]

Es 2: Per gli accrediti si passa al primo giorno (mercato) successivo al festivo, mentre per gli addebiti il giorno precedente!

*[2] o Sabato

Fisso un origine dei tempi $t_0 = (gg^\circ, mm^\circ, aa^\circ)^{*1} \rightarrow 0$

$t = (g, m, a) \geq t_0 \longrightarrow t - t_0$

*[1] nella lavagna $t_0 = (g_0, m_0, a_0)$

Note:

* pag. 3: in realtà sarebbe più corretto scrivere:

$$\dim(\underline{M}) = \begin{cases} \max(\dim(\underline{t}), \dim(\underline{s})) & \text{se } \underline{t} \text{ ed } \underline{s} \text{ hanno qualche elemento in comune} \\ \dim(\underline{t}) + \dim(\underline{s}) & \text{se } \underline{t} \text{ ed } \underline{s} \text{ non hanno elementi in comune} \end{cases}$$

26 SETTEMBRE 2018:

<u>Operazione finanziaria elementare</u>:

→ sono coinvolte solo 2 date (e 2 importi): $(x_1, x_2)/(t_1, t_2)$ con $x_1, x_2 \neq 0$

Se fosse un'operazione a pronti $t_1 = 0$ $t_2 = t$. Per quanto riguarda gli importi teoricamente non ci sono limitazioni sul segno di questi 2 importi, però è naturale aspettarsi, ad esempio in una operazione di finanziamento quando io ricevo del denaro che poi dovrò restituire (con gli interessi), che i 2 importi siano uno positivo e l'altro negativo 00:04 00:06

0 ———— t

L'importo in 0 lo chiamo C $C > 0$

L'importo in t lo chiamo M $M > 0$ ASSENZA di opportunità di ARBITRAGGIO

C ———— −M (0 ———— t): operazione di finanziamento (a pronti)	lo prendo C subito per cedere M in futuro	−C ———— M (0 ———— t): operazione di investimento (a pronti)	lo cedo C subito per avere M in futuro 00:09

scambio tra 2 importi in epoche diverse

Lo scambio si giudica EQUO

Si indica con $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$ SITUAZIONE FINANZIARIA ELEMENTARE: indica la disponibilità del capitale C all'epoca 0 (zero)

$\begin{pmatrix} M \\ t \end{pmatrix}$ è la SITUAZIONE FINANZIARIA ELEMENTARE analoga per il tempo t

Si ha che $\binom{C}{0} \mathcal{Y} \binom{M}{t}$ (oppure ~~$\binom{C}{0} \sim \binom{M}{t}$~~) le due situazioni finanziarie sono indifferenti per il decisore. $\boxed{00:11}$

Si suppone che $M > C$ perché se il tempo passa si vuole più denaro in futuro, quindi...

Postulato di rendimento del denaro (o di impazienza): $M > C$

"il tempo è denaro"

quindi $M - C > 0$ (prezzo del tempo)

Questa differenza può chiamarsi INTERESSE o SCONTO.

1) $I = M - C \Rightarrow M = C + I$ ← interesse

interesse, montante, capitale iniziale

Si nota che nei due casi il punto di partenza è diverso in ① si parte dal capitale iniziale, in ② si parte dal capitale finale

2) $D = M - C \Rightarrow C = M - D$ ← sconto

sconto, valore attuale (o valore scontato), capitale finale

$\boxed{00:25}$

Operazione di capitalizzazione: capitalizzare un importo significa portarlo avanti nel tempo (posticipando la disponibilità il capitale rende)

Operazione di Attualizzazione (o di Sconto): attualizzare o scontare un importo consente di portarlo indietro nel tempo (anticipare la disponibilità di capitale)

$I = f(C, 0, t)$: L'INTERESSE si può considerare una funzione (applicazione) f di C (capitale iniziale), dell'istante iniziale 0 e dell'istante futuro t in cui lo voglio portare avanti, mentre...

$D = g(M, t, 0)$: Lo SCONTO si può considerare una funzione g di M (capitale futuro) dell'istante finale e dell'istante iniziale in cui lo voglio portare indietro

$\boxed{00:30}$

Regime dell'interesse semplice: l'interesse è proporzionale rispetto al capitale iniziale e alla durata dell'operazione.

$\boxed{I = Cit}$ dove $i > 0$ per via del postulato di rendimento del denaro

i: tasso d'interesse: Si usa il termine "tasso" perché "i" rappresenta l'interesse su un capitale unitario per un'operazione di durata unitaria

se $C = t = 1 \rightarrow I = i$ $\forall i > 0$ È l'interesse su un euro per un anno

Da qui ci ricaviamo il montante: $I = iCt \rightarrow M = C + I \rightarrow$
$\rightarrow M = C + Cit \rightarrow C(1 + it) = M$

$U = 1 + i$: fattore di capitalizzazione: $\boxed{U > 1 \text{; anche perché } i > 0 \text{ per via del postulato di rendimento del denaro}}$

Un'unità monetaria disponibile in 0 (zero) è indifferente a U disponibile dopo un anno in simboli: $\binom{1}{0} \mathcal{Y} \binom{U}{1} = \binom{1+i}{1}$

Immaginiamo questo: $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{cap.} \begin{pmatrix} M \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{att.} \begin{pmatrix} C' \\ 0 \end{pmatrix}$ dove non sempre $C = C'$

Se $C' = C \quad \forall C, t$ allora le leggi di attualizzazione e di capitalizzazione sono leggi ASSOCIATE o CONIUGATE

dal punto di vista teorico:

$M = F(C, 0, t)$: funzione del capitale di partenza, dell'epoca iniziale e dell'epoca finale

$C' = G(M, t, 0)$: funzione del capitale finale, dell'epoca finale, e dell'epoca iniziale

funzioni a 3 variabili $\longrightarrow$ fissando 0 e t $\rightarrow$ funzione a 1 var. se sono fisse

Esempio: cedo 1000 subito $\rightarrow I = 1000 \cdot \underset{i=0{,}02}{0{,}02} \cdot 2 = 40$ ricevo 1040 fra 2 anni

nella pratica le leggi NON risultano sempre associate.

Si ipotizza di utilizzare una legge di attualizzazione ASSOCIATA $\boxed{00:49}$

nell'interesse semplice si ha:

$$M = C(1+it) \longrightarrow C = \frac{M}{1+it} \text{ (legge dello sconto razionale)}$$

se

$$M = t = 1 \rightarrow C = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{u} = v$$

V: fattore di sconto o di attualizzazione

in termini di INDIFFERENZA $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 1-d \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d = tasso di sconto (o tasso di interesse anticipato): rappresenta lo sconto di un euro che viene anticipato di un anno

$$\boxed{D = M - C}$$

$d = 1 - v$ sconto su un capitale unitario per un periodo unitario

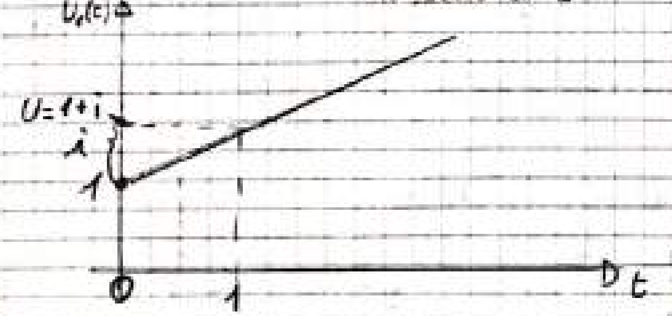
$$d = 1 - v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = i \cdot \frac{1}{1+i} = i \cdot v = d$$

$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} iv \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$ per questo motivo viene detto anche tasso d'interesse anticipato perché si anticipa l'interesse

In generale se la durata non è unitaria si ha:

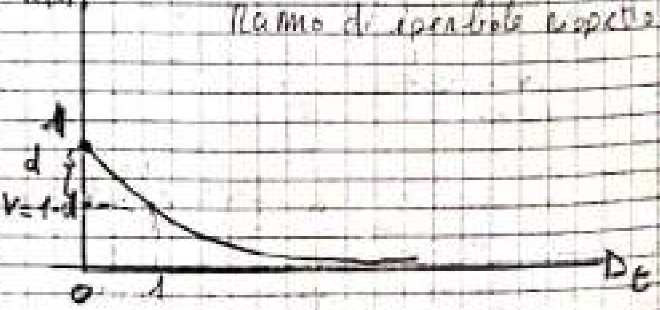
$u(t)$	$v(t)$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} u(t) \\ t \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} v(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$
$u = u(1)$	$v = v(1)$	

$U_1(t) = 1 + it$ funzione lineare rispetto a t



$U_1(t) = 1 + it \Rightarrow V_1(t) = \frac{1}{1+it}$

Ramo di iperbole rispetto a t



LEGGE e REGIME non sono esattamente la stessa cosa perché quando si parla di REGIME si ci riferisce ad una CLASSE DI FUNZIONI individuate da uno o + parametri (ad esempio il parametro può essere il tasso di interesse i) NON fissati, mentre se si fissa i (se si sceglie) allora si parla di LEGGE

$i = 0.03$ $M = C(1 + 0.03t)$ ho specificato i (tasso d'interesse) quindi è una LEGGE piuttosto che un REGIME.

$$D = M - C = M - \frac{M}{1+it} = \frac{M + Mit - M}{1+it} \cdot \frac{V}{V} = \frac{Mivt}{V + Vit}$$ 01:10

moltiplico e divido

dato che $iv = d$ e $V = 1 - d$ si ha

$$D = \frac{Mdt}{1 - d + dt}$$

il regime di interesse semplice viene utilizzato nella pratica PER le operazioni di capitalizzazione di durata inferiore all'anno o al più l'anno NO durate più lunghe

Regime dello sconto commerciale: viene utilizzato nella pratica per attualizzare importi per un periodo inferiore all'anno o max l'anno

Sconto proporzionale al capitale finale e alla durata della operazione. $\boxed{D = Mdt}$

$$C = M - D = M - Mdt = M(1 - dt)$$

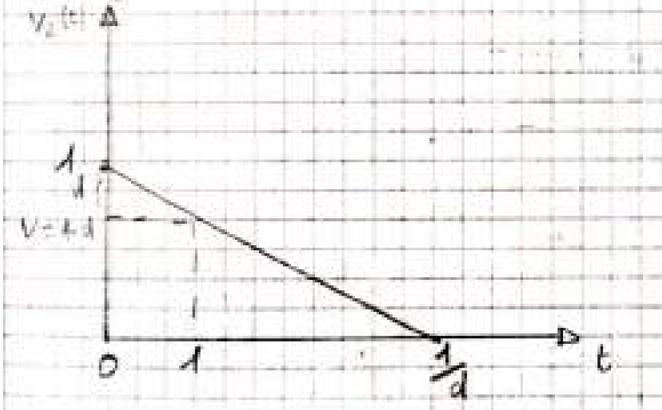
Dato che $1 - dt > 0 \Leftrightarrow -dt > -1 \Leftrightarrow dt < 1 \Leftrightarrow t < \frac{1}{d}$ 01:17

Se $1 - dt$ fosse ≤ 0 significherebbe che non si riceve nulla o addirittura si dovrà PAGARE quindi $1 - dt > 0$

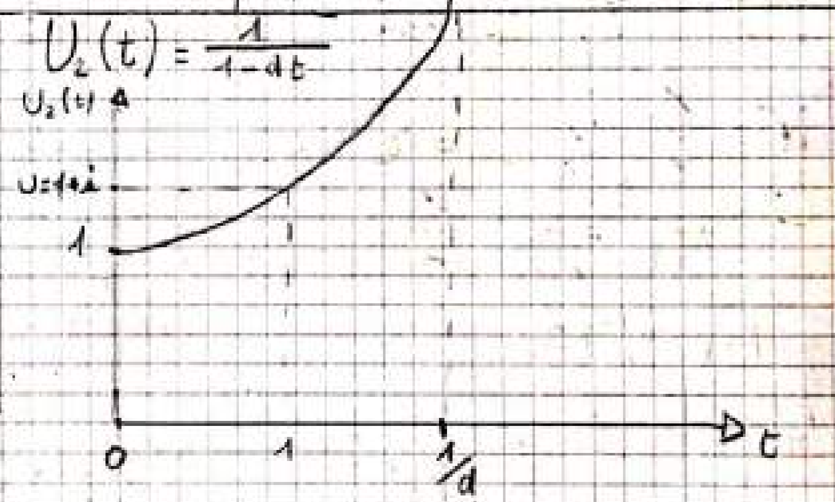
$u = \frac{1}{v}$

$$d = iv \; ; \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{iv} = \frac{u}{i} = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i}$$

$V_2(t) = 1 - dt$



$U_2(t) = \frac{1}{1 - dt}$



Regime dell'interesse composto: Nel regime dell'interesse semplice l'interesse è sempre tenuto fuori dal capitale e viene aggiunto in fondo quando si chiude l'operazione. Nel regime dell'interesse composto l'interesse viene periodicamente (o istantaneamente) aggiunto al capitale, quindi lo interesse si dice che viene CAPITALIZZATO. Non si aspetta in fondo ad un'operazione che dura ad esempio 10 anni, ma piano piano viene capitalizzato l'interesse. L'interesse diventa a sua volta capitale e concorre a produrre nuovo interesse. 01:25

Anatocismo: Pratica dell'aggiungere l'interesse al capitale. Fino al 2004 nei conti correnti, le banche capitalizzavano gli interessi (aggiungere gli interessi al capitale) creditori una volta all'anno (il 31/12 di ogni anno) cioè quelli che la banca deve ai suoi clienti, mentre gli interessi debitori, quelli che i clienti devono alla banca, venivano capitalizzati alla fine di ogni trimestre (4 volte all'anno). Oggi gli interessi sia creditori che debitori vengono capitalizzati alla fine di ogni trimestre, con il vantaggio sempre dalla parte delle banche, perché gli interessi creditori sono pressoché NULLI e poi ci sono anche le spese e le tasse

1 OTTOBRE 2018:

Capitalizzazioni ogni 3 mesi

1/10/2018

| 1000 ritiro i 1° ottobre 2019

$i = 0{,}02$

fino al 31/12/2018 applichiamo il regime dell'interesse semplice

30
30
31

$$\left[1000\left(1+0{,}02\cdot\frac{91}{365}\right)\right]\left(1+0{,}02\,\frac{90}{365}\right)\left(1+0{,}02\,\frac{91}{365}\right)\left(1+0{,}02\,\frac{92}{365}\right)\cdot\left(1+0{,}02\,\frac{1}{365}\right)$$

fino al 31/12/2018 — fino al 31/03/2019 — 30/06/2019 — 30/09 — 1/10/2019

Supponiamo che la capitalizzazione avviene il 31/12 di ogni anno, e investo C il 31/12 di un certo anno.

00:09
00:11

dopo un anno il montante M sarà $M = C(1+i)$

dopo un altro anno il montante M sarà $M = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$

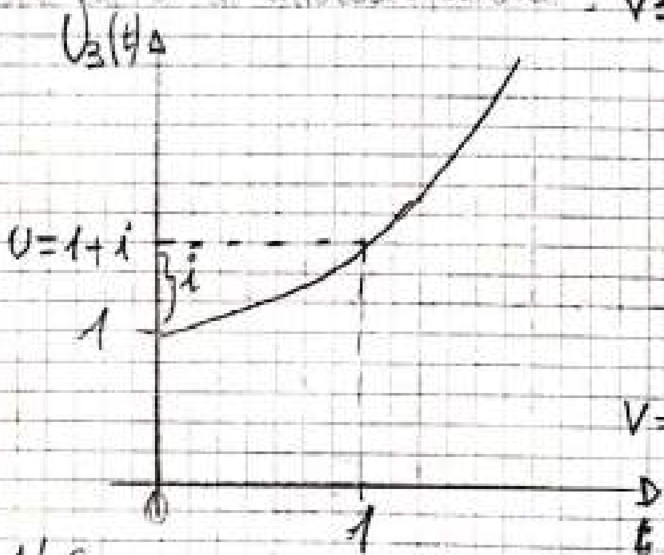
$\vdots$ .. $M = C\underbrace{(1+i)\cdots(1+i)}_{m \text{ volte}} = C(1+i)^m$ dopo m (interi) anni

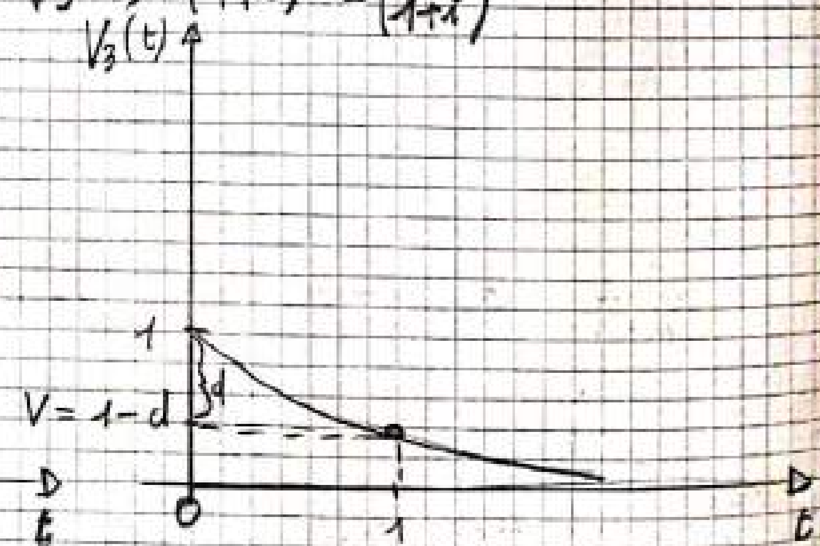
$$M = C(1+i)^m = C\,u^m$$
$$C = \frac{M}{(1+i)^m} = M\,v^m$$

qualche volta si utilizza l'espressione "regime esponenziale"

Nel regime esponenziale il fattore di capitalizzazione: $U_3(t) = (1+i)^t$

il fattore di attualizzazione: $V_3(t) = (1+i)^{-t} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t$





Nel regime esponenziale c'è una capitalizzazione nel continuo.

Supponiamo che la capitalizzazione avvenga una volta in un anno (l'anno è l'unità di riferimento) e quindi i è un tasso annuale. Se la capitalizzazione avvenisse in corrispondenza di periodi diversi (ad esempio ogni trimestre) allora si potrebbe utilizzare lo stesso tipo di relazione, scegliendo...

... come unità di misura il trimestre (quindi in questo caso m sarà il numero di trimestri) e il tasso i dovrebbe essere riferito al trimestre... (lo vedremo dopo).

Anche se venisse applicato lo stesso regime (creditore o debitore) la legge dell'interesse considerato è diversa. Se partissimo da un capitale C, arriviamo dove arriviamo dopo un certo periodo; questo capitale posso averlo investito oppure preso in prestito. Nella pratica le condizioni che vengono praticate sono diverse a seconda che io sia creditore o debitore, soprattutto se il contratto che dà luogo all'operazione di scambio di 2 importi in epoche future viene fatto con una banca, intermediario che ovviamente ci dovranno guadagnare.

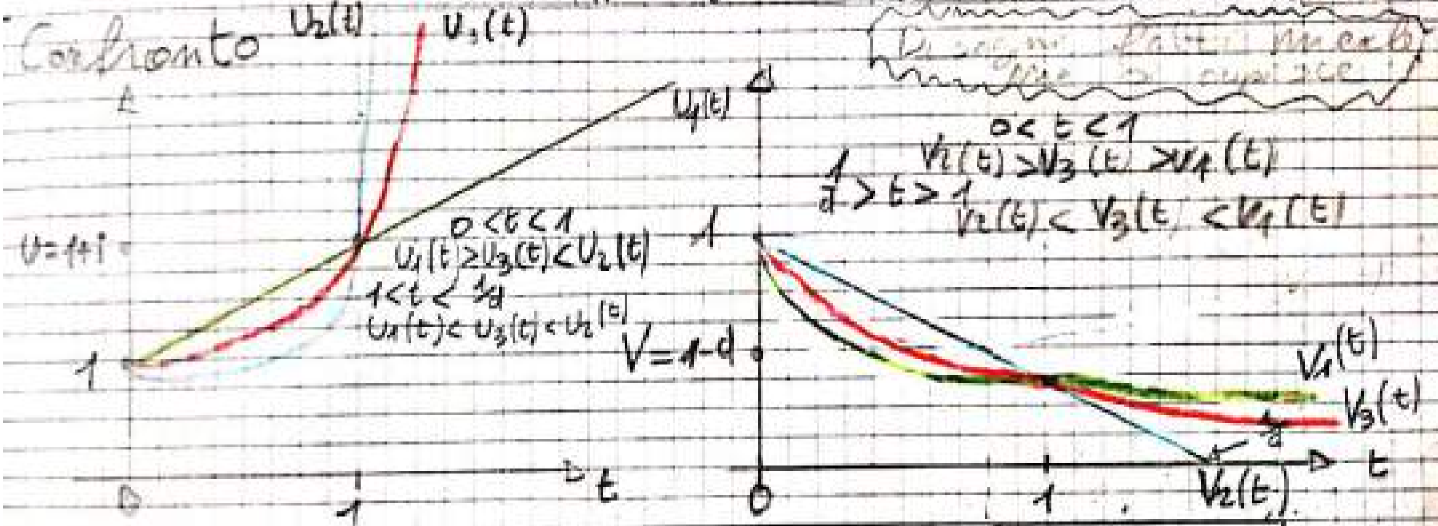
Nei mercati ideali **NON** c'è differenza tra i 2 tassi (tra le 2 posizioni). Si può VENDERE ALLO SCOPERTO qualunque titolo, anche se non ce l'ho, e il prezzo che incasso è lo stesso che dovrei pagare se invece lo acquistassi, quindi questo comporta che i tassi COINCIDONO.

A parità di tasso

100325

Disegni fatti meglio ...

Confronto



$\boxed{U(0)=1 \quad U(1)=1+i,\ V(0)=1,\ V(1)=V=1-d \quad \text{per tutti}}$

$U_1(t)=1+it$, $U_2(t)=\dfrac{1}{1-dt}$, $U_3(t)=(1+i)^t$

$V_1(t)=(1+it)^{-1}$, $V_2(t)=1-dt$, $V_3(t)=(1+i)^{-t}$

$\boxed{0<t<1}$ $\quad V_2(t)>V_3(t)\ (>0)$ Confronto tra fattori di attualizzazione tra regime sconto commerciale e l'interesse composto

$\Rightarrow \dfrac{1}{V_2(t)} < \dfrac{1}{V_3(t)} \Rightarrow U_2(t)<U_3(t)$

$\boxed{t>1}$ $\quad 0 \leq V_2(t) < V_3(t) \Rightarrow U_2(t) > U_3(t)$

$\boxed{0<t<1}$ $\quad U_1(t) > U_3(t)\ (>0) \Rightarrow V_1(t) < V_3(t)$

$\boxed{t>1}$ $\quad (0<)\ U_1(t) < U_3(t) \Rightarrow V_1(t) > V_3(t)$

$U(t)$ Partiamo da un capitale unitario in $T=0$ 00:42

$C=1$

Legge di formazione del montante nel regime esponenziale

Ipotesi:

① gli interessi capitalizzati istante per istante

② gli interessi maturati tra t e $t+\Delta$ sono prop. al capitale disponibile e alla ampiezza dell'intervallo (Δ), a meno di un termine di errore TRASCURABILE

$t \qquad t+\Delta \qquad$ con $\Delta > 0$

↓↓ IMPORTANTE ↓↓ $\boxed{\delta > 0}$

$$\boxed{U(t+\Delta)-U(t)=\delta\, U(t)\,\Delta+o(\Delta)}$$

$U(t+\Delta)-U(t)$ interesse (definizione)

δ : intensità istantanea d'interesse (o forza)

fattore di proporzionalità (>0)

log-return (tasso logaritmico)

return: rendimento

al [illegible] ... $t+1$ ... $U(t)$ ... [illegible] della capitalizzazione

quindi...

$$U(t+\Delta)-U(t)=\delta\cdot U(t)\cdot\Delta+o(\Delta)$$

Per l'ipotesi ②

infinitesimo di ordine superiore a Δ [illegible] infinitesimo

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}=0$$

$U(t)$ è il montante all'inizio del periodo; in teoria nel considerare $U(t)$ si fa un errore perché il montante cambia istante per istante, quindi bisogna considerare $o(\Delta)$ che è un infinitesimo rispetto a Δ. $o(\Delta)$ deve tendere a zero per Δ che tende a zero. $o(\Delta)$ infinitesimo di ordine maggiore di 1 dato che Δ è infinitesimo di ordine 1

Dividiamo entrambi i membri per Δ:

$$(\star)\quad \frac{U(t+\Delta)-U(t)}{\Delta}=\delta\cdot U(t)+\frac{o(\Delta)}{\Delta}$$

$\Delta\to 0$: $\frac{o(\Delta)}{\Delta}\to 0$; $\delta\cdot U(t) \xrightarrow{\Delta\to 0} \delta\cdot U(t)$

quindi tutto il limite $\delta\cdot U(t)$

Se si calcola $\lim_{\Delta\to 0}(\star)=\delta\cdot U(t)$

dato che il secondo membro ammette limite per $\Delta\to 0$ e il secondo membro è uguale al primo possiamo dedurre che la funzione a primo membro è derivabile

$$\boxed{U'(t)=\delta\cdot U(t)}$$

(differenziale)

Equazione lineare omogenea del I ordine: 00:56

Un equazione differenziale è un equazione in cui l'incognita è una funzione e compare una derivata della nostra funzione (o le sue derivate). Collegamento tra la funzione e le sue derivate.

$$\frac{U'(t)}{U(t)}=\delta=\frac{d\ln U(t)}{dt}$$

è una COSTANTE

Si cerca la PRIMITIVA di questa derivata del logaritmo che è proprio $\delta t+c$

$\ln U(t)=\delta t+c$ → soluzioni infinite a seconda del valore di c

$\Rightarrow U(t)=e^{\delta t+c}=Ke^{\delta t}$ dove $K=e^{c}$

Problema differenziale: poniamo la condizione $U(0)=1$ (si parte da un capitale iniziale unitario)

$$\begin{cases}U'(t)=\delta\cdot U(t)\\ U(0)=1\end{cases}$$

$U(0)=e^{c}=K=1 \Rightarrow K=1$ (o $C=0$)

$U(t)=e^{\delta t}$

(INTERPRETAZIONE)

$$\boxed{\frac{\dfrac{U(t+\Delta)-U(t)}{U(t)}}{\Delta}\simeq\delta\simeq\frac{\text{Variazione percentuale del montante}}{\text{Unità di tempo}}}$$

$U(1)=1+i=e^{\delta} \qquad i=e^{\delta}-1\,,\quad \delta=\ln(1+i)$ 01:03

tasso: numero puro — intensità: reciproco di un tempo

annual compounding : i
continuous compounding : δ

[01:07]

Confronto tra i, δ, d:

$(d = i = 0)$

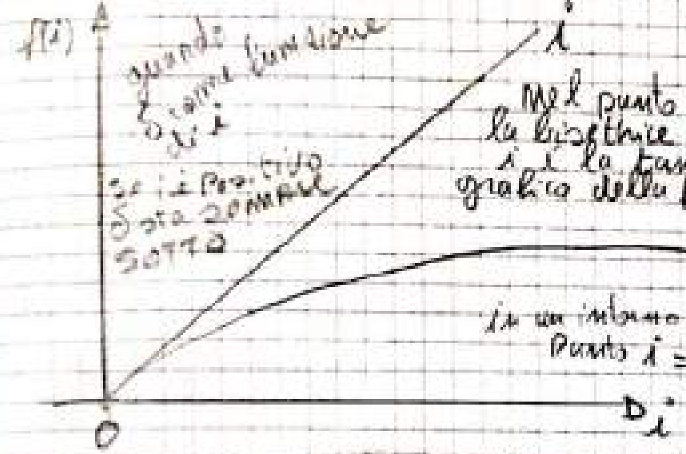
[01:08]

$\delta < i$ quando $i > 0$

funzione concava

$$\delta = \ln(1+i) = f(i) \quad \text{funzione di } i$$

$$g(i) = i \quad \text{funzione identica}$$



Nel punto 0 la bisettrice che ci dà i è la tangente al grafico della funzione δ

$$f'(i) = \frac{1}{1+i}$$

$$\boxed{y = 0 + 1 \cdot i = i} \quad \text{eq. retta tangente in 0 (zero)}$$

$$f''(i) = \frac{-1}{(1+i)^2}$$

in un intorno del punto $i = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\delta = f(i) \simeq i - \frac{i^2}{2}}$ Taylor approx del 2° ordine

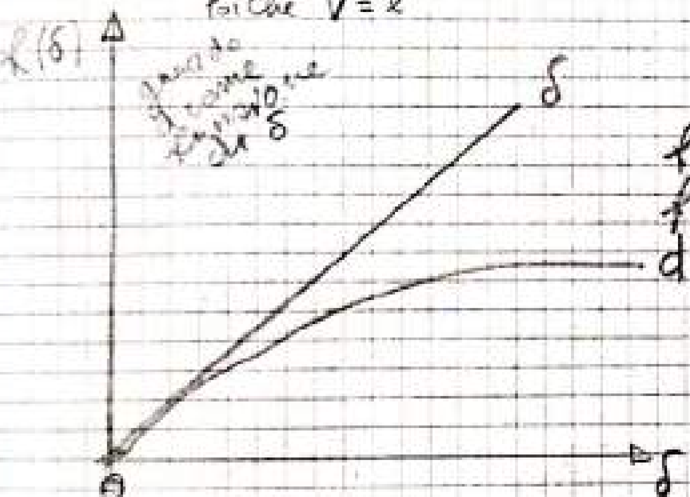
$$d = 1 - v = 1 - e^{-\delta}$$

Poiché $v = e^{-\delta}$

$d < \delta$ (per $\delta > 0$) $\quad d = \delta = 0$

$$d = f(\delta) = 1 - e^{-\delta}$$

$$g(\delta) = \delta \quad \text{funzione identica}$$



$$f'(\delta) = +e^{-\delta} \quad \text{funzione concava}$$

$$f''(\delta) = -e^{-\delta}$$

$$\boxed{y = 0 + 1 \cdot \delta} \quad \text{eq. retta tangente in 0 (zero)}$$

$$d \simeq \delta - \frac{\delta^2}{2}$$

quindi in definitiva:

$$\boxed{0 \leq d \leq \delta \leq i}$$

coincidono se sono tutti e 3 zero

[01:19]

Ipotesi: ~~riferimento~~ Pag. 12)

① uguale a prima

② uguale a prima con fattore di proporzionalità che è una funzione continua dell'istante iniziale dell'intervallo.

Questa funzione la poniamo $\delta(t)$ (non più una costante ma una funzione)

$$v(t+\Delta) - v(t) = \delta(t) \cdot v(t) \cdot \Delta + o(\Delta) \quad \text{infinitesimo di ordine maggiore di 1} \qquad \lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$$

$$\begin{cases} v'(t) = \delta(t) \cdot v(t) \\ v(0) = 1 \end{cases} \qquad \frac{d \ln v(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\ln v(t) = \int_0^t \delta(y)\, dy + C \quad \rightarrow \text{è una PRIMITIVA di}$$

01:25

Teorema di Torricelli (teorema fondamentale del calcolo integrale):

$\int_0^t \delta(y)dy$ è una PRIMITIVA $0 \leq y \leq t$

tenendo conto di:

$$\boxed{U(t) = e^{\int_0^t \delta(y)dy + c} = K e^{\int_0^t \delta(y)dy}}$$

$\begin{cases} U'(t) = \delta(t) \cdot U(t) \\ U(0) = 1 \end{cases}$ allora $U(t) = e^{\int_0^t \delta(y)dy}$

2 OTTOBRE 2018:

orari:

LUN	11:15 - 13:00
MAR	09:00 - 11:00
MER	13:15 - 15:00

$\delta \longrightarrow U(t) = e^{\delta t}$

$\delta(t)$ continuo $\longrightarrow U(t) = e^{\int_0^t \delta(y)dy}$

Legge finanziaria OMOGENEA D'IMPORTO e UNIFORME NEL TEMPO

$\delta(t)$: derivata logaritmica di $U(t)$

$\longrightarrow U(t)$ derivabile con continuità

Definizione: $\delta(t) = \frac{U'(t)}{U(t)}$ intensità di interesse associata alla legge qui sopra

00:06

① regime esponenziale:

$U(t) = e^{\delta t}$, $U'(t) = \delta e^{\delta t}$, $\delta(t) = \frac{\delta e^{\delta t}}{e^{\delta t}} = \delta$ COSTANTE *1

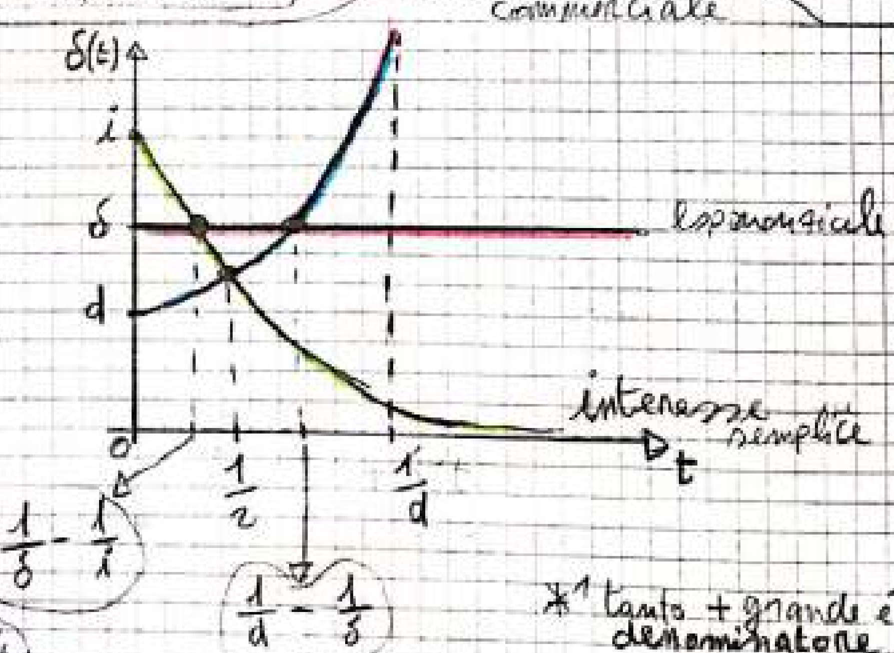
② interesse semplice:

$U(t) = 1 + it$, $U'(t) = i$, $\delta(t) = \frac{i}{1+it}$ DECRESCENTE *1

③ sconto commerciale:

$U(t) = \frac{1}{1-dt}$ $\left(t < \frac{1}{d}\right)$ $U'(t) = \frac{d}{(1-dt)^2}$ *1, $\delta(t) = \frac{d}{(1-dt)^2} \cdot (1-dt) = \frac{d}{1-dt}$ CRESCENTE *1

*1 rispetto a t



$\frac{i}{1+it} = \delta$

$i = \delta + \delta i t$

$\rightarrow \delta i t = i - \delta \rightarrow$

$\rightarrow t = \frac{i - \delta}{\delta i} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}$

$\frac{d}{1-dt} = \delta$

$d = \delta - \delta d t \rightarrow \delta d t = \delta - d$

$\rightarrow t = \frac{\delta - d}{\delta d} = \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}$

*1 tanto + grande è t tanto + piccolo è il denominatore

$$\frac{i}{1+it} = \frac{d}{1-dt} \qquad i - idt = d + dit$$

$$\rightarrow 2idt = i - d$$

Perché $d = 1 - v$

$$\rightarrow t = \frac{i-d}{2id} = \frac{i - iv}{2id} = \frac{i(1-v)}{2i d} = \frac{1}{i}$$

confronti fatti a parità del tasso d'interesse i

00:22

$i, u, d, v \rightarrow$ puri numeri

$\delta \rightarrow$ reciproco di un tempo

C ha la dimensione di un importo così come il montante e il valore attuale quindi... M, D, I, C sono IMPORTI

$$\frac{I}{t} = \frac{\text{importo}}{\text{tempo}} = \text{Flusso d'interesse}$$

relativo ad un periodo di durata l'ampiezza dell'intervallo di tempo nel quale questo importo è stato prodotto

Nel regime esponenziale

$$\frac{C(e^{\delta}-1)}{1} \longrightarrow \text{flusso annuo d'interesse}$$

(per un anno)

$$\frac{C(e^{\delta/2}-1)}{1/2} = 2C(e^{\delta/2}-1) \rightarrow \text{flusso semestrale d'interesse}$$

00:28

In generale: $\dfrac{C(e^{\delta t}-1)}{t}$. Se t tende a zero si ha...

$$\lim_{t \to 0} \frac{C(e^{\delta t}-1)}{t} = C\delta = C \cdot \ln e^{\delta}$$

Anche con De l'Hôpital

Per via del limite notevole

$C\delta$: flusso istantaneo d'interesse

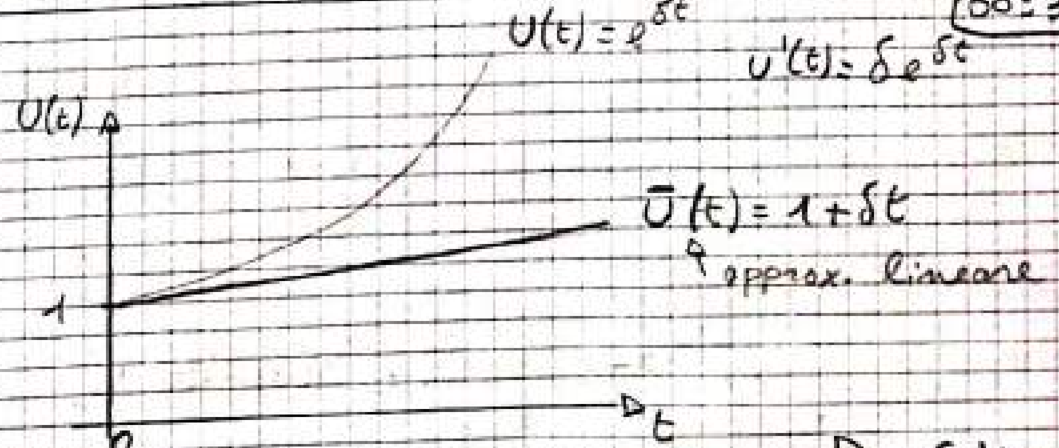
$$\frac{\text{flusso di interesse}}{\text{capitale}} = \frac{\frac{\text{importo}}{\text{tempo}}}{\text{importo}} = \frac{1}{\text{tempo}} = \text{intensità di interesse}$$

$$\lim \frac{C\left(e^{\int_0^t \delta(r)dr} - 1\right)}{t} \overset{H}{=} \frac{e^{\int_0^t \delta(r)dr} \cdot \delta}{1}$$

$t \to 0$

1

00:36



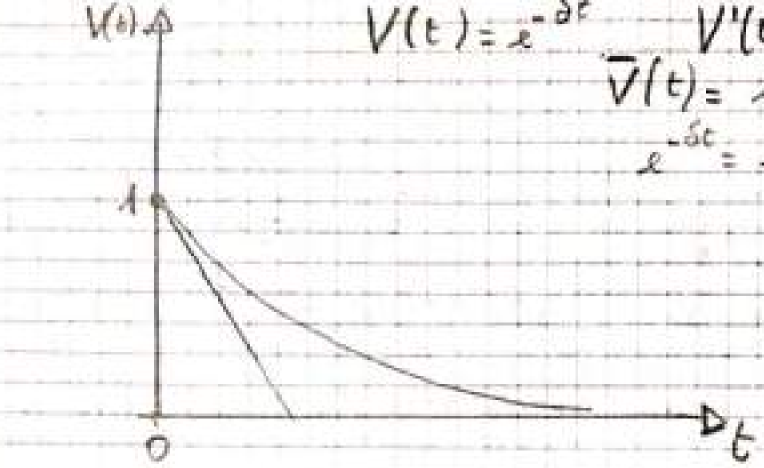
importo

$$I = C\, i \cdot t$$

importo

$$e^{\delta t} = 1 + \delta t + \frac{\delta^2 t^2}{2} + \frac{\delta^3 t^3}{3!} + \dots$$

Stesso discorso per $D = Cdt$



$$V(t) = e^{-\delta t} \qquad V'(t) = -\delta e^{-\delta t}$$

$$\bar{V}(t) = 1 - \delta t$$

$$e^{-\delta t} = 1 - \delta t + \frac{\delta^2 t^2}{2} - \frac{\delta^3 t^3}{3!} + \dots$$

Tassi equivalenti:

00:40

L'unità di misura di riferimento è l'anno, ma cosa succede se si cambia l'unità di misura di riferimento? Se si considera un intervallo di tempo che ha misura espressa in anni pari a τ [τ < anno]. Se invece si ha un intervallo di tempo che misura t anni e si vuole misurare questo intervallo in intervalli pari alla ampiezza di τ si avrà:

Vogliamo esprimere gli intervalli rispetto la misura di τ

quindi $t' = \dfrac{t}{\tau} = \dfrac{\text{misura espressa in anni}}{\text{misura dell'intervallo della nuova unità di misura}}$

Se si prende $K \in \mathbb{N}^+$ allora $\tau = \dfrac{1}{K}$ per $t = 1$ anno

$$t' = \frac{1}{1/K} = t \cdot K$$

in un anno ci sono K K-esimi d'anno. In t anni ci sono $t \cdot K$ K-esimi d'anno.

$K = 4$ trimestre $\quad K = 2$ Semestre $\quad K = 1$ anno

$K = 3$ Quadrimestre $\quad K = 12$ mese

$K = 6$ Bimestre $\quad K = 365$ giorno

Due tassi d'interesse riferiti a unità di misura del tempo diverse, si dicono EQUIVALENTI se nello stesso regime finanziario (fissato) producono lo stesso montante nello stesso intervallo di tempo a partire dallo stesso capitale.

00:49

00:52

[Stesso discorso per sconto, scambiare montante con valore attuale)

i_K = tasso riferito al K-esimo d'anno $(i = i_1)$

$i_3 \longrightarrow i_4 \qquad\qquad i_3 \longrightarrow i \longrightarrow i_4$

Interesse semplice:

intervallo di tempo in t anni $\qquad$ K-esimi d'anno

$t' = t \cdot K$

il montante è $(1 + it$, per un anno e $(1 + i_K t k)$ per il K-esimo di anno

Si pongono uguali $\quad 1 + it = 1 + i_K\, t \cdot k \Rightarrow i = K i_K$ oppure

$$i_K = \frac{i}{K}$$

$t > 0$

Regime esponenziale:

$$(1+i)^t = (1+i_K)^{tK} \Leftrightarrow 1 + i = (1+i_K)^K \Leftrightarrow \boxed{i = (1+i_K)^K - 1}$$

mentre $(1+i)^{1/K} = 1 + i_K \Leftrightarrow i_K = (1+i)^{1/K} - 1$

$$\Leftrightarrow i_K = \sqrt[K]{1+i} - 1$$

Confronto tra intensità:
$e^{\delta t} = e^{\delta_k t k} \Leftrightarrow \delta t = \delta_k t k \Leftrightarrow \boxed{\delta = k\,\delta_k} \Leftrightarrow \boxed{\delta_k = \frac{\delta}{k}}$
passaggio ai log nat.

01:04

Nella pratica, anche se si fa riferimento a strumenti che pagano gli interessi periodicamente, magari non in periodi che misurano un anno ma che possono misurare un semestre, un trimestre.
Per esempio ci sono Obbligazioni come i BTP che pagano gli interessi alla fine di ogni semestre, però quello che viene dichiarato nella descrizione del titolo è un tasso su base annua, perché l'anno è tipicamente l'unità di misura del tempo.
Es: BTP con $i = 0{,}02$ ogni semestre verrà pagato l'interesse sul capitale ad un tasso che è la metà di 0,02

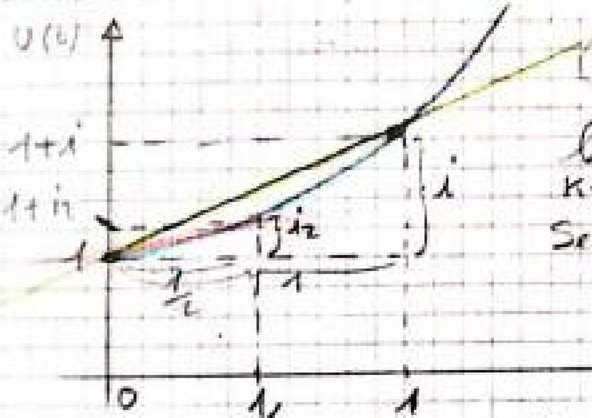
01:06

Tasso nominale convertibile K volte l'anno: $j_k = K i_k$ Se si ha un capitale unitario ($C=1$) e dopo ogni semestre viene pagato 0,01€, dove $0{,}01 = i_2$ quello che viene dichiarato non è i_2 ma è $2 \cdot i_2 = j_2$ ($K=2$), quindi rispetto all'anno risulta è un'intensità più che un tasso

$j_k = K \cdot i_k = \frac{i_k}{1/K}$ $\frac{\text{tasso nom}}{\text{tempo}}$ // $\boxed{j_1 = i}$ $\forall$ regime

Interesse semplice: $j_k = K \cdot \frac{i}{K} = i \quad \forall K \in \mathbb{N}^+$

Regime esponenziale: $j_k = K\left((1+i)^{1/K} - 1\right)$, j_k decrescente con K
Se $K > 1 \rightarrow j_K < i = j_1$
Si considera il fattore di capitalizz. $U(t) = (1+i)^t$ $\left(m_1 = \frac{i}{1} = i = j_1\right)$



$\left(m_2 = \frac{i_2}{1/2} = 2 i_2 = j_2\right)$ ← coeff. angolare

$\lim_{K \to +\infty} j_K = \lim_{K \to +\infty} \frac{(1+i)^{1/K} - 1}{1/K}$
lim. notevole
Se pongo $x = \frac{1}{K}$
$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+i)^x - 1}{x} = \ln(1+i) = \delta$

quindi $\delta < j_K \quad \forall K > 0 \in \mathbb{N}^+$ (intero)

i coefficienti angolari delle secanti che si formano sono sempre + piccoli e le rette secanti sempre meno inclinate.

01:20

Situazione finanziaria elementare: $\binom{S}{T}$ S: importo > 0, T: data (≥ 0)
importo S disponibile all'epoca T

Per definire la legge finanziaria in situazioni più generali possiamo partire dalle situazioni finanziarie elementari. Situazione in cui ad esempio ci si trova a fare uno scambio.
Si suppone che un certo individuo sia sempre in grado di fronte ad una coppia qualunque di sit. fin. elem. di decidere quale delle 2 PREFERISCE

Insieme delle situazioni finanziarie elementari:

$\binom{S}{T} \succ \binom{S'}{T'}$ — $\binom{S}{T}$ è preferibile strett. a $\binom{S'}{T'}$

$\binom{S}{T} \prec \binom{S'}{T'}$ — $\binom{S'}{T'}$ è preferibile strett. a $\binom{S}{T}$

$\binom{S}{T} \sim \binom{S'}{T'}$ — Le 2 situazioni finanziarie sono indifferenti

~~$\binom{S}{T}$ ~ $\binom{S'}{T'}$~~

3 OTTOBRE 2018: L'INTENSITÀ ISTANTANEA si considera quando si hanno operazioni di durata istantanea (vedi pag. 15)

OSSERVAZIONE

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{\int_0^t \delta(r)dr} - 1}{t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^{\int_0^t \delta(r)dr} \cdot \delta(t)}{1} = \delta(0)$$

Un'operazione che inizia in 0 e finisce in t. Se invece consideriamo un'operazione che comincia in t (istante d'inizio) che dura τ (durata), si fa la differenza tra il montante $(t+\tau)$ e quello in t ottenendo l'interesse, questo interesse si rapporta alla durata τ e si divide nuovamente per l'importo del capitale iniziale

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{e^{\int_0^{t+\tau} \delta(r)dr} \cdot \delta(t+\tau)}{\tau} = \delta(t)$$

Nel caso del regime esponenziale l'intensità è costante

Situazione finanziaria elementare (pag. 17)

$\mathcal{Y}$: relazione di indifferenza:

$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}$ Due situazioni finanziarie (S_1, T_1) e (S_2, T_2) sono INDIFFERENTI se l'individuo giudica equo lo scambio tra esse

00:05

Postulati: $\forall S_1 > 0 \ \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ dove $\mathcal{T}$ è l'insieme delle date

① Dati S_1 in T_1 e dato T_2 $\exists!$ S_2 in T_2 che reputo EQUO scambiare contro S_1 in T_1

$\Rightarrow S_2 = f(\underset{\text{importo}}{S_1}; \underset{\text{date}}{T_1, T_2})$ (talvolta si mette ; per distinguere le variabili dai parametri ma non in questo caso)

$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2' \\ T_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2 = S_2' \quad \forall S_1 > 0 \ \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$: insieme date)

② $\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_1' \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2' \\ T_2 \end{pmatrix}, S_1' > S_1 \Rightarrow S_2' > S_2 \quad \forall \ldots$

$\boxed{f\Big|_{(T_1, T_2)\text{ fissata}}^{\text{funzione ristretta ad una coppia di date}} \text{ è CRESCENTE (monotona) rispetto a } S_1}$

③ Proprietà riflessiva di $\mathcal{Y}$: $\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \quad \forall S, T$

① + ③ $\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S' \\ T \end{pmatrix} \Leftrightarrow S = S'$

($\Leftarrow$) per via della ③

($\Rightarrow$) per via di ① e ③

$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S' \\ T \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}}_{③} \overset{①}{\Rightarrow} S' = S$

$f(S; T, T) = S$

Se io devo scambiare due importi alla stessa epoca devono essere COINCIDENTI per essere INDIFFERENTI. 00:24

$$f(S_1; T_1, T_2) = S_2 = \begin{cases} f_M(S_1; T_1, T_2) & \text{se } T_1 \le T_2 \\ f_A(S_1; T_1, T_2) & \text{se } T_1 \ge T_2 \end{cases}$$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow f(S_1;T_1,T_2) = f_M(S_1;T_1,T_2) = f_A(S_1;T_1,T_2) = S_1$$

f_M: funzione di CAPITALIZZAZIONE, quindi S_2 è il Montante di S_1 in T_1

f_A: funzione di ATTUALIZZAZIONE quindi S_2 è il V. attuale di S_1 in T_1

00:29

$T_1 < T_2$ (Associate o Coniugate è lo stesso)

$\binom{S_1}{T_1} \mathcal{Y} \binom{S_2}{T_2}$

$$S_2 = f_M(S_1;T_1,T_2) \Longrightarrow f_A(S_2;T_2,T_1) = S_1$$

allora f_A ed f_M sono ASSOCIATE

00:32

(In realtà quello che si ottiene in generale non coincide con quello da cui siamo partiti, se decidessimo di attualizzare i montante, ma se accade allora f_A ed f_M sono associate)

$\boxed{\text{Leggi associate: } S_2 = f(S_1;T_1,T_2) \Longleftrightarrow f(S_2;T_2,T_1) = S_1}$

$\binom{S_1}{T_1}\mathcal{Y}\binom{S_2}{T_2} \Longrightarrow \binom{S_2}{T_2}\mathcal{Y}\binom{S_1}{T_1} \ \forall\ldots$ Solamente se le leggi sono associate, quindi in questo caso la relazione di indifferenza è anche SIMMETRICA

Proprietà delle leggi finanziarie: *1

1) OMOGENEITÀ d'importo: $\binom{S_1}{T_1}\mathcal{Y}\binom{S_2}{T_2} \Longrightarrow \binom{kS_1}{T_1}\mathcal{Y}\binom{kS_2}{T_2} \ \forall\ldots \quad \forall k>0$

$$S_2 = f(S_1;T_1,T_2) \Rightarrow kS_2 = f(kS_1;T_1,T_2) = kf(S_1;T_1,T_2)$$

La funzione f è LINEARE e OMOGENEA rispetto all'importo

Omogenea perché si può, rispetto alla prima variabile moltiplicare per una qualunque costante la prima variabile e anche l'immagine viene moltiplicata per quella costante.

00:42

Se si fissa $\bar{S}$: $S_1 = \bar{S}\left(\frac{S_1}{\bar{S}}\right)$

Basta essere in grado di seguire gli import unitari

INSEGUIRE GLI IMPORTI UNITARI!!! (IMPORTANTE)

*1: a seconda dei casi queste proprietà possono valere oppure no

$\binom{1}{T_1}\mathcal{Y}\binom{S_2}{T_2} \Longrightarrow \binom{S_1}{T_1}\mathcal{Y}\binom{S_1S_2}{T_2}$ perché moltiplico per $S_1>0$

$1 = S_1\left(\frac{1}{S_1}\right) \Leftrightarrow S_1\cdot 1 = S_1\cdot 1 \Rightarrow$ in T_2 si ha S_1S_2

$f(1;T_1,T_2) = \varphi(T_1,T_2)$: FATTORE DI SCAMBIO

00:44

$$f(S_1;T_1,T_2) = S_1\varphi(T_1,T_2)$$

$$\varphi(T,T) = 1 \quad \forall T \qquad \varphi(T_1,T_2) = \begin{cases} U(T_1,T_2) \ (= f_M(1;T_1,T_2)) & \text{se } T_1 \le T_2 \\ V(T_2,T_1) \ (= f_A(1;T_1,T_2)) & \text{se } T_1 \ge T_2 \end{cases}$$

$U(T_1,T_2)$: fattore di capitalizzazione

$V(T_2,T_1)$: fattore di attualizzazione

$$U(T,T) = V(T,T) = 1$$

Quando si lavora con leggi associate se $T_1 \leqslant T_2$ $C=1$

$U(T_1, T_2) \cdot V(T_1, T_2) = 1 \quad \forall T_1, T_2$ 00:52

Utilizzare una legge omogenea d'importo significa che le condizioni che vengono applicate sono indipendenti dall'ordine di grandezza dell'importo.

Esempio: Mi rivolgo ad una banca e chiedo che condizioni mi applicano.

Ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio (idea intuitiva): non ci si può arricchire dal niente, SENZA RISCHIO

01:04

$$S_2 = f(S_1; T_1, T_2) \Rightarrow S_1 = f(S_2; T_2, T_1) \quad \forall$$

Omogeneità d'importo

$$S_2 = S_1 \varphi(T_1, T_2) \Leftrightarrow S_1 = S_2 \varphi(T_2, T_1) \qquad T_1 \leqslant T_2$$

$$S_2 = S_1 U(T_1, T_2) \Leftrightarrow S_1 = S_2 V(T_1, T_2) = S_1 U(T_1, T_2) V(T_1, T_2)$$

si mette la data + piccola prima 01:08

Teoremino: Divisibilità degli importi (corollario omogeneità d'importo)

legge omogenea d'importo

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} S_1' \\ T_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S_2 \\ T_1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} S_2' \\ T_2 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} S_n \\ T_1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} S_n' \\ T_2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} S_1 + S_2 + \cdots + S_m \\ T_1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} S_1' + S_2' + \cdots + S_m' \\ T_2 \end{pmatrix}$$

Si definisce anche come "spezzettare" gli importi. Alla varrebbe anche $\Leftarrow$ 01:12

Dimostrazione:

$$\left|\begin{array}{l} S_1' = S_1 \varphi(T_1, T_2) \\ S_2' = S_2 \varphi(T_1, T_2) \\ \vdots \\ S_m' = S_m \varphi(T_1, T_2) \end{array}\right. \Rightarrow S_1' + S_2' + \cdots + S_m' = (S_1 + S_2 + \cdots + S_m) \varphi(T_1, T_2)$$

② UNIFORMITÀ nel tempo: $\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 + z \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 + z \end{pmatrix}$ (z può anche essere negativo)

$\forall z$ (purché $T_1 + z \geqslant 0$ e $T_2 + z \geqslant 0$) $\forall \ldots$

$S_2 = f(S_1; T_1, T_2) \Rightarrow f(S_1; T_1 + z, T_2 + z) = S_2$

Quello che conta quando si calcola il montante o il valore attuale è la DISTANZA TRA 2 DATE 01:21

Legge omogenea d'importo e uniforme nel tempo:

$T = |T_1 - T_2|$ → durata dell'investimento se $T_1 \leqslant T_2$

→ durata del differimento se $T_1 \geqslant T_2$

$$\varphi(T_1, T_2) = \bar{\varphi}(T_2 - T_1) = \begin{cases} U(t) = U(T_2 - T_1) & \text{se } T_1 \leqslant T_2 \ (= U(T_1, T_1 + t)) \\ V(t) = V(T_1 - T_2) & \text{se } T_1 \geqslant T_2 \ (= V(T_1 - t, T_1)) \end{cases}$$

$\bar{\varphi}$ non dipende da T_1 e T_2 singolarmente presi ma dalla loro differenza $(T_2 - T_1)$ (o distanza)

$U(0) = V(0) = 1$

Si lavora con leggi associate: $u(t) \cdot v(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$ 01:28

$\begin{pmatrix} u(t) \\ t \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad U(t) = U(0, t)$

$\qquad\qquad V(t) = V(0, t)$

$\begin{pmatrix} v(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ 01:30

---

8 OTTOBRE 2018:

$u(t) \qquad U = U(1) \qquad U = 1 + i = e^{\delta}$

$v(t) \qquad V = v(1) \qquad V = 1 - d = e^{-\delta}$

00:05

Definizione: La legge si dice SCINDIBILE se $\mathcal{Y}$ (rel. di indiff.) è transitiva, quindi

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_3 \\ T_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_3 \\ T_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \forall S_1, S_2, S_3 > 0 \\ \forall T_1, T_2, T_3 \end{matrix}$$

Se $T_1 \leq T_2 \leq T_3$ SCINDIBILITA' PROSPETTIVA

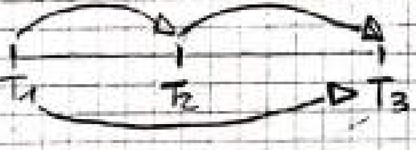
Se $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ SCINDIBILITA' RETROSPETTIVA

Se la relazione d'indifferenza tra situazioni finanziarie elementari gode della proprietà transitiva allora la legge finanziaria associata si dice che è scindibile

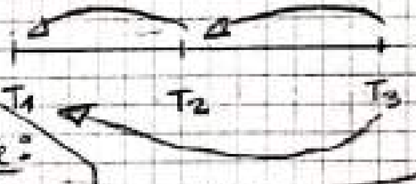
IMPORTANTE!

$$\boxed{\text{SCINDIBILITA'} \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \begin{cases} \text{SCINDIBILITA' PROSP.} \\ \text{SCINDIBILITA' RETROSP.} \end{cases}}$$

Scindibilità prospettiva:



Scindibilità retrospettiva:



00:16

Possibili ordinamenti di 3 date:

$\boxed{T_1 \leq T_2 \leq T_3 \longleftarrow \text{Sc. prosp.}}$

$T_1 \leq T_3 \leq T_2$ $\qquad 3! = 6$

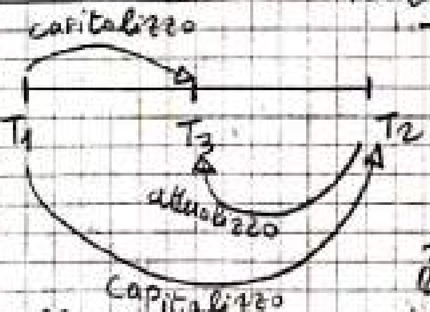
$T_2 \leq T_1 \leq T_3$

$T_2 \leq T_3 \leq T_1$

$T_3 \leq T_1 \leq T_2$

$\boxed{T_3 \leq T_2 \leq T_1 \longleftarrow \text{Sc. retrosp.}}$

nel caso in cui: $T_1 \leq T_3 \leq T_2$



Si ottiene sempre lo stesso risultato

nella pratica questa proprietà non è sempre rispettata come anche le altre che abbiamo studiato.

Nel caso della Sc. prosp. se si sta pensando ad operazioni a pronti...

$\Longrightarrow$ Th. prezzi (tassi) impliciti

Cosa comporta la scindibilità?

- Caso generale: situazioni non ordinate

$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}$, $S_2 = f(S_1; T_1, T_2)$

$S_3 = f(S_2; T_2, T_3)$ oppure $S_3 = f(S_1; T_1, T_3)$

$\begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_3 \\ T_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_3 \\ T_3 \end{pmatrix}$ per questo motivo

Se la rel. è SCINDIBILE allora...

$$f(f(S_1; T_1, T_2); T_2, T_3) = f(S_1; T_1, T_3) \quad \forall \ldots$$

Sc. prosp. f_M; Sc. retrosp. f_A

Se la legge è omogenea di importo:

$$f(S_1; T_1, T_3) = S_1 \varphi(T_1, T_3) = f(S_1; T_1, T_2) \cdot \varphi(T_2, T_3) =$$

caso generale: $S_1 \varphi(T_1, T_3) = S_1 \varphi(T_1, T_2) \varphi(T_2, T_3) \quad \forall T_1, T_2, T_3$

Date ordinate $T_1 \le T_2 \le T_3$:

$$\varphi(T_1, T_3) = \varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) \quad \forall T_1, T_2, T_3$$

$$U(T_1, T_3) = U(T_1, T_2) U(T_2, T_3)$$

SOLO per leggi OMOGENEE D'IMPORTO

date ordinate $T_1 \ge T_2 \ge T_3$:

$$\ldots V(T_3, T_1) = V(T_3, T_2) V(T_2, T_1)$$

00:30

Se la legge è O.I. e uniforme nel tempo:

$$t = T_2 - T_1 \; ; \; \tau = T_3 - T_2 \Rightarrow T_3 - T_1 = T_3 - T_2 + T_2 - T_1 = t + \tau$$

quindi $\bar\varphi(t+\tau)$ (che dipende dalla differenza tra le date):

$$\bar\varphi(t+\tau) = \bar\varphi(t)\bar\varphi(\tau)$$

Si considera il valore assoluto perché si lavora con le differenze tra date

Scindib. prosp.: $T_1 \le T_2 \le T_3$:

$$U(t+\tau) = U(t)U(\tau)$$

Scindib. retrosp.: $T_1 \ge T_2 \ge T_3$:

$$V(|t+\tau|) = V(|t|)V(|\tau|)$$

00:36

Ordinamento a caso $T_2 \le T_3 \le T_1$:

$$V(|t+\tau|) = V(|t|)U(\tau)$$

---

vediamo se le leggi studiate all'inizio sono SCINDIBILI

Interesse semplice: $T_1 < T_2 \le T_3$ $\quad 1 + i(T_2 - T_1) = U(T_1, T_2)$; 00:41

$(1 + i(T_3 - T_1))$ dove: $1 + i(T_3 - T_1) = U(T_1, T_3)$; $1 + i(T_3 - T_2) = U(T_2, T_3)$

$$(1 + i(T_2 - T_1))(1 + i(T_3 - T_2)) = 1 + i(T_2 - T_1) + i(T_3 - T_2) + i^2(T_2 - T_1)(T_3 - T_2) =$$

$$= 1 + i(T_2 - T_1 + T_3 - T_2) + i^2(T_2 - T_1)(T_3 - T_2) =$$

$$= U(T_1, T_3) + i^2(T_2 - T_1)(T_3 - T_2) \ne U(T_1, T_3) \Rightarrow$$ Non c'è scindibilità

Non c'è sc. prospettiva

$T_1 > T_2 > T_3$ Sconto commerciale:

$$\underbrace{V(T_3, T_1)}_{1-d(T_1-T_3)} = \underbrace{V(T_2, T_1)}_{1-d(T_1-T_2)} \underbrace{V(T_3, T_2)}_{1-d(T_2-T_3)}$$

$$(1-d(T_1-T_2))(1-d(T_2-T_3)) = 1-d(T_1-T_2)-d(T_2-T_3)+d^2(T_1-T_2)(T_2-T_3)$$

$$= 1-d(T_1 \cancel{-T_2} \cancel{+T_2} - T_3) + d^2(T_1-T_2)(T_2-T_3) \neq \underbrace{1-d(T_1-T_3)}_{V(T_3, T_1)}$$

Non c'è sc. retrosp. $\Rightarrow$ Non c'è scindibilità

$\boxed{00:52}$

Regime esponenziale:

$t = T_2 - T_1$ $\quad (T_1 \leq T_2)$

$$U(T_1, T_2) = U(t) = (1+i)^t = e^{\delta t} = (1+i)^{T_2-T_1} = e^{\delta(T_2-T_1)} \quad t \geq 0$$

$$V(T_2, T_1) = V(-t) = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{-t} = e^{-\delta t} \quad (T_1 \geq T_2) \quad t \leq 0$$

$$\varphi(T_1, T_2) = \overline{\varphi}(T_2 - T_1) = (1+i)^{T_2-T_1} = e^{\delta(T_2-T_1)}$$

$\forall T_1, T_2, T_3$

$$\overline{\varphi}(T_2-T_1)\overline{\varphi}(T_3-T_2) \stackrel{?}{=} \overline{\varphi}(T_3-T_1) \quad \text{Risposta: SI!}$$

$$(1+i)^{T_2-T_1}(1+i)^{T_3-T_2} = (1+i)^{T_2-T_1+T_3-T_2} = (1+i)^{T_3-T_1}$$

Stessa cosa se:

$$e^{\delta(T_2-T_1)} e^{\delta(T_3-T_2)} = e^{\delta(T_2-T_1+T_3-T_2)} = e^{\delta(T_3-T_1)} \quad \text{SCINDIBILE!!}$$

Ogni sit. finanziaria è <u>INDIFFERENTE</u> a se stessa

① $\binom{S}{T} \mathcal{Y} \binom{S}{T} \quad \forall S, T$ $\quad$ <u>Pr. riflessiva</u> $\Rightarrow$ Postulato

② Se si lavora con leggi associate $\quad$ Se $\binom{S_1}{T_1} \mathcal{Y} \binom{S_2}{T_2}$ allora $\binom{S_2}{T_2} \mathcal{Y} \binom{S_1}{T_1}$ $\forall S_1, S_2, T_1, T_2$ $\Rightarrow$ <u>Pr. simmetrica</u>

③ legge scindibile $\Rightarrow$ <u>Pr. transitiva</u> $\binom{S_1}{T_1} \mathcal{Y} \binom{S_2}{T_2}, \binom{S_2}{T_2} \mathcal{Y} \binom{S_3}{T_3} \Rightarrow \binom{S_1}{T_1} \mathcal{Y} \binom{S_3}{T_3}$ $\forall \ldots$

Se si lavora con leggi <u>ASSOCIATE</u> e <u>SCINDIBILI</u> allora...

- $\mathcal{Y}$ (relazione di indifferenza) è un' <u>EQUIVALENZA</u> quindi

$$\binom{S_1}{T_1} \sim \binom{S_2}{T_2}$$

$\boxed{01:08}$

legge omogenea d'importo

① $\varphi(T, T) = 1 \quad \forall T$ $\quad$ <u>Prop. riflessiva</u>

$(U(T,T) = V(T,T) = 1)$

② $\varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_1) = 1 \quad \forall T_1, T_2$ $\quad$ <u>Prop. simmetrica</u>

(se $T_1 \leq T_2$ $\quad U(T_1, T_2) V(T_1, T_2) = 1$)

③ $\varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) = \varphi(T_1, T_3) \quad \forall T_1, T_2, T_3$ $\quad$ <u>Prop. transitiva</u>

La relazione di indifferenza tra situazioni finanziarie elementari è un'equivalenza se gode delle proprietà di riflessività, simmetria, transitività e se si lavora con leggi associate e scindibili. Inoltre se si lavora con leggi omogenee di importo in realtà basta la proprietà di transitività **01:12**

Teorema: Sia f omogenea d'importo.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la relaz. d'indifferenza tra sit. fin. elementari sia un'EQUIVALENZA è $\varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) = \varphi(T_1, T_3) \quad \forall T_1, T_2, T_3$ cioè la SCINDIBILITÀ

"$\mathcal{Y}$" è "$\sim$" $\Leftrightarrow \varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) = \varphi(T_1, T_3) \quad \forall T_1, T_2, T_3$ **01:17**

Dimostrazione: (condizione necessaria $\Rightarrow$)

fisso arbitrariamente T_1, T_2, T_3

$$\underset{\text{def. di } \varphi}{\begin{pmatrix} 1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_3) \\ T_3 \end{pmatrix}} \xRightarrow{\text{P. simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_3) \\ T_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ T_1 \end{pmatrix} \underset{\text{def. di } \varphi}{\sim} \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_2) \\ T_2 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{P. transitiva}} \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_3) \\ T_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_2) \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_2) \\ T_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) \\ T_3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{P. transitiva}} \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_3) \\ T_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) \\ T_3 \end{pmatrix}$$

P. riflessiva + postulato 1

$$\Longrightarrow \varphi(T_1, T_3) = \varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3)$$

(Condizione sufficiente $\Leftarrow$)

$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \quad \forall S, T \qquad T_2 = T_3 = T \qquad \underbrace{\varphi(T_1, T)}_{\geq 0 \text{ per il postulato di rendim. del denaro}} \overbrace{\varphi(T, T)}^{1} = \varphi(T_1, T)$

S, T fissati arbitrariamente

$\Rightarrow \varphi(T, T) = 1$ perché divido per $\varphi(T_1, T)$

$$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S\varphi(T, T) \\ T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$$

Proprietà simmetrica:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

Si fissano arbitrariamente S_1, S_2, T_1, T_2.
Si pone $T_1 = T_3$

$\varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_1) = \varphi(T_1, T_1) = 1$

$\Rightarrow \varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_1) = 1$

$S_2 = S_1\varphi(T_1, T_2)$ moltiplico ambo i membri per $\varphi(T_2, T_1)$

$\Leftrightarrow S_2\varphi(T_2, T_1) = S_1\underbrace{\varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_1)}_{= 1} = S_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \mathcal{Y} \begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$

3 OTTOBRE 2018:

$\boxed{00:06}$

$\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3)=\varphi(T_1,T_3)\quad \forall T_1,T_2,T_3$ $\quad y$ è una $\sim$

$\begin{pmatrix}S_1\\T_1\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}S_2\\T_2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}S_2\\T_2\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}S_3\\T_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}S_1\\T_1\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}S_3\\T_3\end{pmatrix}\quad \forall\dots$ ← Proprietà transitiva

Fisso arbitrariamente (S_1,S_2,S_3) (T_1,T_2,T_3) le 2 terne

$\begin{pmatrix}S_1\\T_1\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}S_2\\T_2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}S_2\\T_2\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}S_3\\T_3\end{pmatrix}$

Sfrutto la ipotesi di partenza

$\boxed{00:13}$

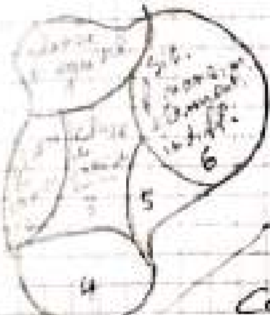
$S_2 = S_1\varphi(T_1,T_2)$ (def. di fattore di scambio)

$S_3 = S_2\varphi(T_2,T_3) \Rightarrow S_3 = \underbrace{S_1\varphi(T_1,T_2)}\varphi(T_2,T_3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_3 = S_1\varphi(T_1,T_3) \Rightarrow \begin{pmatrix}S_1\\T_1\end{pmatrix} y \begin{pmatrix}S_3\\T_3\end{pmatrix}$

$S_1\varphi(T_1,T_3) = S_1\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3)$

$\varphi(T_1,T_3) = \varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3)$



insieme ripartito in classi di equivalenza (insiemi a 2 a 2 disgiunti)

Quando nell'insieme delle situazioni finanziarie elementari si introduce una relazione di equivalenza, si può ripartire l'insieme in classi di equivalenza. In ogni classe cambiano le situazioni, potrebbero diventare alcune preferib. $\boxed{00:14}$

$\boxed{00:17}$

$\varphi(T_1,T_2)\varphi(T_2,T_3)=\varphi(T_1,T_3)$ $\quad$ Leggi o.i.

Caso particolare: $T_2=T_3$

$\varphi(T_1,T_2)=\varphi(T_1,T_2)$ identità

Caso in cui $T_2 \neq T_3$ ($\Leftrightarrow T_3 - T_2 \neq 0$)

$T=T_1$; $t=T_2-T_1 \Rightarrow T_2=T+t$; $\tau=T_3-T_2 \Rightarrow T_3=T+t+\tau$

$\varphi(T,T+t)\varphi(T+t,T+t+\tau)=\varphi(T,T+t+\tau)\quad \forall T(\geq 0),\forall t,\forall\tau\neq0$

$\boxed{00:21}$

$\psi_K(j)=\varphi(K,K+j)\quad K(\geq0),\ j\in\mathbb{R}$

(Se la legge fosse anche uniforme nel tempo la legge non cambia al variare di K; ψ_K non cambia al valore di K)

$\boxed{00:27}$

$\psi_T(t)\psi_{T+t}(\tau)=\psi_T(t+\tau)\quad \forall T,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall\tau\neq0$

$\psi_T(t)\psi_{T+t}(\tau)-\psi_T(t)=\psi_T(t+\tau)-\psi_T(t)$ Sottraiamo membro a membro $\psi_T(t)$ e raccogliamo a primo membro $\psi_T(t)$, tenendo conto che:

$\psi_T(t)\left(\psi_{T+t}(\tau)-\psi_{T+t}(0)\right)=\psi_T(t+\tau)-\psi_T(t)$ $\quad$ divido per τ ambo i membri $\quad$ $\psi_K(0)=1\ \forall K$

$\psi_T(t)\dfrac{\psi_{T+t}(\tau)-\psi_{T+t}(0)}{\tau}=\dfrac{\psi_T(t+\tau)-\psi_T(t)}{\tau}$

Supponiamo che ψ_K siano DERIVABILI con CONTINUITÀ (su un intervallo)

Passando a

$$\lim_{\tau\to0}\psi_T(t)\underbrace{\frac{\psi_{T+t}(\tau)-\psi_{T+t}(0)}{\tau}}_{\psi'_{T+t}(0)}=\underbrace{\lim_{\tau\to0}\frac{\psi_T(t+\tau)-\psi_T(t)}{\tau}}_{\psi'_T(t)}$$

$\Psi_T(t)\Psi'_{T+t}(0) = \Psi'_T(t)$ Pongo $\delta(K) = \Psi'_K(0)\ \forall K$ quindi...

$\Psi_T(t)\delta(T+t) = \Psi'_T(t)$ divido ambo i membri per $\Psi_T(t)$ e scambio i membri

00:33

00:36

$$\boxed{\delta(T+t) = \frac{\Psi'_T(t)}{\Psi_T(t)}}$$

$\delta(T+t)$ è una funzione continua (definita in un intervallo). Questa equazione è molto simile a quella della formazione del montante nel regime esponenziale (Pag. 12)

$$\begin{cases} \dfrac{\Psi'_T(t)}{\Psi_T(t)} = \delta(T+t) \\ \Psi_T(0) = 1 \end{cases}$$

il primo membro è $\dfrac{d \ln \Psi_T(t)}{dt} = \delta(T+t)$

Se si cerca di risolvere l'equazione $\frac{\Psi'_T(t)}{\Psi_T(t)} = \delta(T+t)$ non si ottiene una sola soluzione ma infinite, quindi si pone il vincolo che $\Psi_T(0) = 1$

$$\delta(k) = \left[\frac{d\,\Psi_k(j)}{dj}\right]_{j=0} = \left[\frac{\partial \varphi(k,y)}{\partial y}\right]_{y=k}$$

Io so che $\ln \Psi_T(t)$ è PRIMITIVA di $\delta(T+t)$

2 primitive della stessa funzione

$\int_0^t \delta(T+y)\,dy$ è un'altra primitiva di $\delta(T+t)$ (Teorema fondamentale del calcolo integrale (di Torricelli, Barrow))

Pongo $x = T+y \Rightarrow y = x-T$; $dx = dy$

$$\int_0^t \delta(T+y)\,dy = \int_T^{T+t} \delta(x)\,dx \Rightarrow$$

Corollario del teorema di Lagrange: le 2 primitive che ho trovato differiscono per una costante

$$\Rightarrow \ln \Psi_T(t) = \int_0^t \delta(T+y)\,dy + C \Rightarrow \Psi_T(t) = \varphi(T, T+t) = e^{\int_0^t \delta(T+y)dy + C} =$$

$$= H e^{\int_0^t \delta(T+y)dy}$$ (posto $H = e^C$) quindi $\Psi_T(0) = \varphi(T,T) = H = 1$

$\Rightarrow H = 1$

$$\Psi_T(t) = \varphi(T, T+t) = e^{\int_0^t \delta(T+y)dy} = e^{\int_T^{T+t} \delta(x)dx}$$

00:53

dove:

$$\delta(x) = \left[\frac{d\Psi_x(t)}{dt}\right]_{t=0} = \Psi'_x(0) = \left[\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\right]_{y=x}$$

Se la legge è o.i e u.t.

$\Psi_K(j)$ non dipende da K quindi

$\delta(K) = \Psi'_K(0) \Rightarrow \delta$ è **COSTANTE**.

L'unica legge che è scindibile tra le leggi o.i e u.t. è la LEGGE ESPONENZIALE

01:00

D'ora in poi a meno che non sia specificato si lavorerà con leggi esponenziali.

$(\underline{X}/\underline{t})$: op. finanziaria

01:30 - 01:05

$\binom{S}{T}$ $S>0$

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & -S_2 \\ | & \text{———} & | \\ T_1 & & T_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} -S_1 & & S_2 \\ | & \text{———} & | \\ T_1 & & T_2 \end{array}$$

situazione finanziaria (elementare)

Un'operazione finanziaria (in generale) si può ottenere combinando (sommando) situazioni finanziarie (elementari). In realtà però potrebbero essere situazioni oltre che CREDITORIE anche DEBITORIE, quindi si estende il concetto di sit. fin. elementare considerando anche importi $S_i < 0$ negativi

Si ... ha a che fare con leggi O.i. è possibile fare questa estensione di situazioni finanziarie.

K: costante — omogeneità d'importo

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} KS_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} KS_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad \forall K>0$$ togliamo questo vincolo!! Per esempio se $K=-1$ ...

$S_1, S_2 > 0$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}$$ vale per la omogeneità di importo

01:09

SITUAZIONI FINANZIARIE

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1' \\ T_1' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_2' \\ T_2' \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} S_m \\ T_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_m' \\ T_m' \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $S_1, S_2, \dots, S_m$ in $T_1, T_2, \dots, T_m$ $\sim$ $S_1', S_2', \dots, S_m'$ in $T_1', T_2', \dots, T_m'$

OPERAZIONI FINANZIARIE

Caso particolare:

$T_1' = T_2' = \dots = T_m' = T$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_1' \\ T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_2' \\ T \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} S_m \\ T_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} S_m' \\ T \end{pmatrix}$$

Per il teorema della divisibilità degli importi (conseguenza della om. importo)

$\Rightarrow$ $S_1, S_2, \dots, S_m$ in $T_1, T_2, \dots, T_m$ $\sim \begin{pmatrix} S_1' + S_2' + \dots + S_m' \\ T \end{pmatrix}$

se $T-T_j>0$ montante
se $T-T_j<0$ valore attuale

01:15

$$S_j' = S_j e^{\delta(T-T_j)}$$ (dato che si opera nel regime esponenziale)

e quindi...

$$\begin{pmatrix} S_1' + S_2' + \dots + S_m' \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} S_j e^{\delta(T-T_j)} \\ T \end{pmatrix}$$

S_j' quindi può essere o il montante o il valore attuale di S_j

$S_1, S_2, \dots, S_m$ in $T_1, T_2, \dots, T_m$

Saldo in T dell'op. finanziaria: con regime di riferimento il regime esponenziale e con δ fissato

$$W(T) = \sum_{j=1}^{m} S_j e^{\delta(T-T_j)}$$

L'operazione finanziaria si definisce **EQUA** in T allora $W(T) = 0$. Nel regime esponenziale un'operazione fin. è EQUA in T $\Leftrightarrow$ op. è equa in T' $\forall T' \neq T$ (per la scindib.)

$$W(T') = W(T)\, \underbrace{e^{\delta(T'-T)}}_{>0}$$

$=0 \Leftrightarrow =0$

EQUA perché tutti gli importi positivi vengono compensati da tutti gli importi negativi (o viceversa)

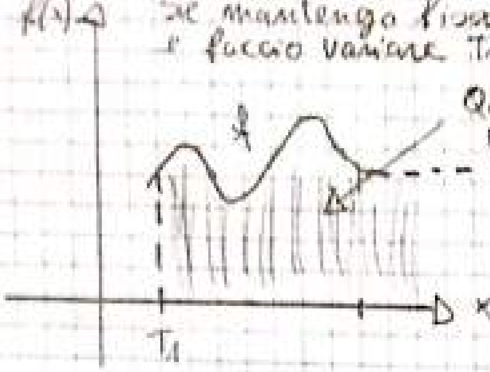
T può essere $T \geq T_j$ oppure $T < T_j$ a seconda dei casi.
Se $T \geq T_j$ si ha intuitivamente la somma dei montanti e analogamente se $T < T_j$ la somma dei valori attuali.

In altri regimi si potrebbe definire un importo che si giudica INDIFFERENTE scambiare in una futura epoca come la somma degli importi corrispondenti?
Però non è più vero che se l'operazione è equa in una certa data lo è in qualunque data, perché negli altri regimi visti le leggi NON sono SCINDIBILI (Es. interesse semplice)

10 OTTOBRE 2018: Si considera un'operazione di capitalizzazione

$T_1 < T_2$

$\varphi(T_1, T_2) = u(T_1, T_2) = e^{\int_{T_1}^{T_2} \delta(y)dy}$



Se si accoglie il postulato di rendimento del denaro, succede che: tanto + lunga è la durata dell'operazione tanto + grande risulterà il montante

Quest'area se la f è positiva al variare di T_2 non può che aumentare

Operazione finanziaria (generica):

$$\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ \hline T_1 & T_2 & \dots & T_m \end{array}$$

δ: intensità di valutazione

fissato δ ($\Rightarrow i = e^{\delta} - 1$), $T (\geq 0)$

Valore (o saldo) dell'op. in T: $\boxed{W(T) = \sum_{j=1}^{m} S_j e^{\delta(T - T_j)}}$

00:05

Dal punto di vista interpretativo l'importo $W(T)$ che può essere di segno qualunque è l'importo che si giudica equo scambiare in T contro l'operazione finanziaria in toto.

$$\left(\begin{array}{ccc} S_1 & \dots & S_m \\ \hline T_1 & \dots & T_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c} W(T) \\ T \end{array}\right)$$

Se per esempio $W(T) > 0$ allora la operazione finanziaria è "vantaggiosa". Se io volessi acquisire l'op. finanziaria sarei disposto a pagare $W(T)$.
Se invece io avessi già l'operazione e la volessi cedere incasserei $W(T)$. 00:10
Se $W(T) < 0$ allora l'operazione finanziaria è "svantaggiosa" perché il valore dei debiti prevale su quello dei crediti, quindi se acquisissi l'op. fin. mi accollerei i debiti e pagherei $W(T)$ (Pagare un importo negativo significa ricevere qualcosa). Viceversa se io volessi venderla incasserei un importo negativo quindi pagherei per liberarmi dai debiti. Tutti questi discorsi dipendono da come viene scelto δ (delta).

$\boxed{W(T) = 0 \Rightarrow \text{Operazione EQUA}}$

CASO PARTICOLARE δ FISSATO

$W(T) = W(T')e^{\delta(T - T')}$ con $T' \geq T$ oppure $T' \leq T$

Operazione finanziaria elementare: Scambio tra 2 importi in epoche diverse

$S_1, S_2 > 0$
$T_1 < T_2$

$$\begin{array}{cc} S_1 & -S_2 \\ \hline T_1 & T_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} -S_1 & S_2 \\ \hline T_1 & T_2 \end{array}$$

op. di finanziamento — op. di investimento

op. finanziamento

$W(T) = S_1 e^{\delta(T - T_1)} - S_2 e^{\delta(T - T_2)} = 0 \Leftrightarrow S_1 e^{\delta(T - T_1)} = S_2 e^{\delta(T - T_2)}$

$\Leftrightarrow S_2 = \frac{S_1 e^{\delta(T - T_1)}}{e^{\delta(T - T_2)}} = S_1 e^{\delta(T_2 - T_1)}$ (in ipotesi di operazione equa dove $W(T) = 0$)

T: epoca di valutazione

Fissati δ e T definiamo MONTANTE di un'operazione finanziaria:

$M(T) = \sum_{j: T_j \leq T} (-S_j) e^{\delta(T - T_j)}$ ($= 0$ se $T < T_1$ poiché non c'è nessun d (nessuna data)) *1
$V(T) = W(T)$

mentre il FABBISOGNO di un'operazione finanziaria (in T):

$V(T) = \sum_{j: T_j > T} S_j e^{-\delta(T_j - T)}$ ($= 0$ se $T \geq T_m$ per lo stesso motivo di prima)
$M(T) = -W(T)$ *1

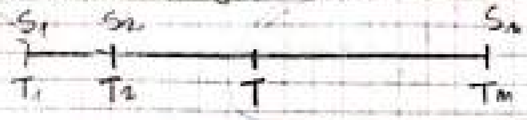
$\forall T$

$$W(T)=\sum_{j=1}^{m} S_j e^{\delta(T-T_j)} = \overbrace{\sum_{j:T_j\leq T} S_j e^{\delta(T-T_j)}}^{-M(T)} + \overbrace{\sum_{j:T_j>T} S_j e^{-\delta(T_j-T)}}^{V(T)} =$$

$$= -M(T)+V(T) = V(T)-M(T)$$

in particolare l'operazione è equa $\Leftrightarrow M(T)=V(T)$

il fabbisogno dell'operazione viene anche chiamato valore residuo [00:34]



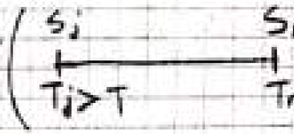
→ in T voglio liberarmi di tutto quello che viene dopo, voglio liberarmi della operazione residua.

Si potrebbe pensare di contrattare l'operazione finanziaria in una certa epoca. Si comincia con i pagamenti oppure con l'incasso degli introiti, arrivo ad un certo punto T prima di T_m e mi voglio liberare dell'operazione residua perché tutto quello che è passato c'è già stato. Si vuole chiudere tutto quindi si cerca una controparte (che potrebbe essere quella di partenza) e gli si chiede: "Quanto vuoi che ti paghi per liberarmi di questa sottooperazione?". Quindi si cerca l'importo in T che sono disposto a scambiare contro l'operazione, quindi si cede l'operazione, incassando V(T). Per calcolare questo importo si fissa δ (Es. lo stesso di inizio op. tasso di mercato al momento dell'accordo), si potrebbe anche utilizzare un altro δ poiché magari le condizioni di mercato sono cambiate. [00:39]

$M(T)=[\text{dato}-\text{avuto}]$: quando si calcola il montante guardo indietro (a tutto quello che è già avvenuto), pagam. effettuati nelle epoche precedenti, considerandoli col segno opposto. (riserva matematica retrospettiva)

$V(T)=[\text{avere}-\text{dare}]$: Quando si calcola il fabbisogno guardo gli importi sono successivi a T (quelli che devono essere pagati o riscossi). Gli importi si prendono col loro segno. (riserva matematica prospettiva)

V(T) può essere decomposto in 2 quantità → nuda proprietà $P(T)$ → usufrutto $U(T)$

$\begin{pmatrix} V(T) \\ T \end{pmatrix} \sim$  operazione di finanziamento:

$V(T)=U(T)+P(T)$ dove:

P(T): valore dei movimenti futuri di capitale

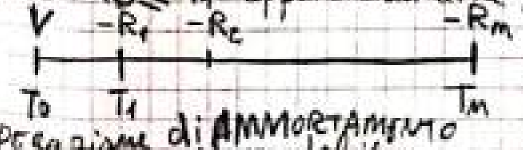
U(T): valore degli interessi futuri (man mano che si formano)

"il 19% degli interessi passivi in alcune op. finanziarie nella dichiarazione dei redditi si può detrarre". Potrebbe essere interessante scomporre V(T) perché si va a vedere la quota degli interessi passivi relativi a V(T) [00:51]

Rendita: è una situazione finanziaria  con importi tutti dello stesso segno, e usualmente esigibili in date EQUINTERVALLATE, con $(T_j - T_{j-1} = \text{costante} = \Delta)$

Situazione perché gli importi sono tutti dello stesso segno

Operazione di rendita: è un op. finanziaria che prevede lo scambio di un unico importo (solitamente pagato allo inizio $T_0 < T_1$ oppure alla fine, $T \geq T_m$) contro una rendita



operazione di AMMORTAMENTO di un debito

operazione di rendita

dopo aver incassato V ci si ritrova nella SITUAZIONE

$V \quad -R_1 \quad -R_2 \quad \dots \quad -R_m$

$T_0 \quad T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_m$

operazione di ammortamento di un debito dal punto di vista del debitore

$R_j > 0$

mentre...

$-R_1 \quad -R_2 \quad \dots \quad -R_m \quad M$

$T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_m \quad T$

operazione di COSTITUZIONE di un capitale dal punto di vista del creditore

R_j si chiamano RATE mentre i T_j vengono chiamate SCADENZE

$R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_m$

$T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_m$

fisso δ, fisso una data $T_0 \leq T_1$ si chiama VALORE ATTUALE della rendita in T_0

$$V(T_0) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta(T_j - T_0)}$$

01:05

Se analogamente si fissa una data $T \geq T_m$ si chiama MONTANTE della rendita in T

$$M(T) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{\delta(T - T_j)}$$

qualche volta non si specifica T

$T_0 = 0$ valore attuale (in 0)

montante (in $T = T_m$ oppure in $T = T_m + \Delta$) dove $\Delta = T_j - T_{j-1}$

Ammortamento di un debito: 01:11

$$W(T_0) = V - \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta(T_j - T_0)} \overset{\text{op. equa ipotesi}}{=} 0 \iff V = \text{valore attuale della rendita}$$

costituzione di un capitale:

$$W(T) = -\sum_{j=1}^{m} R_j e^{\delta(T - T_j)} + M \overset{\text{op. equa ipotesi}}{=} 0 \iff M = \text{montante della rendita}$$

Classificazione delle rendite: Scadenze equintervallate quindi $T_j - T_{j-1} = \Delta$

$R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \dots \quad R_m$

$T_1 \quad T_1+\Delta \quad T_1+2\Delta \quad \dots \quad T_1+(m-1)\Delta$

$\Delta = 1$ anno : rendita annuale

$\Delta = 1$ semestre : rendita semestrale

$\vdots$

$\Delta = 1$ mese : rendita mensile

: Rendite discrete

... poi ci sono anche le rendite continue

m pagamenti : rendita temporanea m periodi

∞ rate : rendita perpetua (o perpetuità)

01:24

Se $\Delta = 1$ le date di esigibilità posso scriverle

$R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \dots \quad R_m$

$T_1 \quad T_1+1 \quad T_1+2 \quad \dots \quad T_1+(m-1)$

Rendite IMMEDIATE: primo pagamento nel primo intervallo di tempo

Rendite DIFFERITE: primo pagamento dopo il primo intervallo

Se i pagamenti avvengono all'inizio di ogni intervallo allora la rendita si dice ANTICIPATA, se invece avvengono alla fine di ogni intervallo si dice POSTICIPATA.

IPOTESI: T_1 è la data del primo pagamento $\boxed{01:29}$

$T_0 \leq T_1$ $T_1 = 0 \Rightarrow$ Rendita IMMEDIATA ANTICIPATA

 $T_1 = 1 \Rightarrow$ Rendita IMMEDIATA POSTICIPATA

$\overset{\vee}{0}$

rendita anticipata $T_1 > 0$
rendita posticipata $T_1 > 1$ } rendita differita

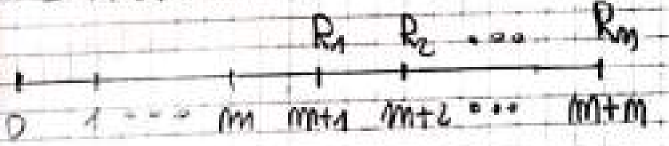
15 OTTOBRE 2018: Si consideri una rendita temporanea di n rate:

- IMMEDIATA POSTICIPATA:

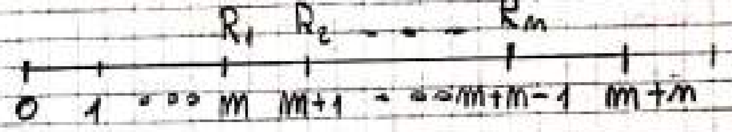
- IMMEDIATA ANTICIPATA:

Rendita temporanea n, differita di m periodi:

- DIFFERITA POSTICIPATA:



DIFFERITA ANTICIPATA:

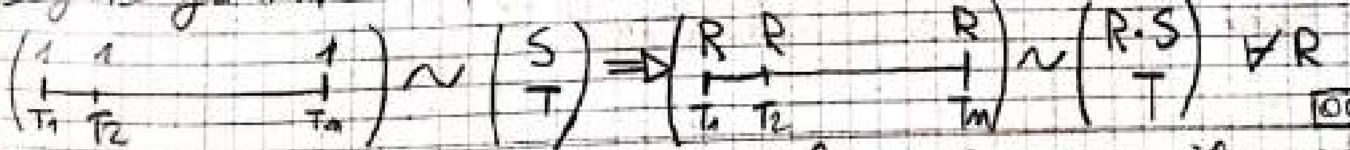


Osservazione: la rendita immediata posticipata presa come Δ l'anno, può essere vista come una differita anticipata di un anno. $\boxed{00:12}$

Se non si dice nulla il valore attuale sarà riferito al tempo 0 mentre il montante sarà riferito a n o $m+n$ nel caso di differimento.

Rendite a rate costanti:

- Per leggi omogenee d'importo si ricorda che basta semplicemente seguire gli importi unitari



$\boxed{00:18}$

I simboli che verranno introdotti valgono SOLO per il regime esponenziale. $\boxed{00:20}$

I collegamenti che dopo vedremo che ci saranno tra i diversi tipi di rendita sono leciti SOLAMENTE nel regime esponenziale, per via anche della proprietà di scindibilità.

In altri regimi le cose cambiano

Simboli: i = tasso di valutazione

- Valore attuale in 0 di una rendita annua, immediata, unitaria temporanea n anni: (2)

  - IMMEDIATA POSTICIPATA: $a_{\overline{n}|i}$ (a figurato n al tasso i)
  - IMMEDIATA ANTICIPATA: $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

$$\begin{pmatrix} a_{\overline{n}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

- Valore attuale in 0 di una rendita annua differita di m periodi, unitaria, temporanea n anni:

  - DIFFERITA POSTICIPATA: $_{m/}a_{\overline{n}|i}$
  - DIFFERITA ANTICIPATA: $_{m/}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

$$\begin{pmatrix} _{m/}a_{\overline{n}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} _{m/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m & m+1 & \dots & m+n-1 \end{pmatrix}$$

- per le rendite perpetue con $n = \infty$: $a_{\overline{\infty}|i}$, $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$, $_{m/}a_{\overline{\infty}|i}$, $_{m/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$
- Valore attuale rendita unitaria con pagamenti nel continuo dove n indica la durata del pagamento: $\bar{a}_{\overline{n}|i}$, $_{m/}\bar{a}_{\overline{n}|i}$, $\bar{a}_{\overline{\infty}|i}$, $_{m/}\bar{a}_{\overline{\infty}|i}$

Montante in n (oppure $m+n$) di una rendita annua, immediata (oppure diff.) unitaria temporanea n anni: $\boxed{00:37}$

- IMMEDIATA POSTICIPATA: $s_{\overline{n}|i}$
- IMMEDIATA ANTICIPATA: $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$
- DIFFERITA POSTICIPATA: $_{m/}s_{\overline{n}|i}$
- DIFFERITA ANTICIPATA: $_{m/}\ddot{s}_{\overline{n}|i}$

- nel continuo analogamente si hanno questi simboli: $\bar{s}_{\overline{n}|i}$; $_{m/}\bar{s}_{\overline{n}|i}$

NON si introduce un simbolo per il montante di rendite perpetue perchè, a parte che l'epoca in cui si valuterebbe non è nota proprio perchè $n = \infty$, accogliendo il postulato di rendimento del denaro (tasso POSITIVO) il montante sarebbe INFINITO $\boxed{00:44}$

$$\begin{pmatrix} s_{\overline{n}|i} \\ n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \ddot{s}_{\overline{n}|i} \\ n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} _{m/}s_{\overline{n}|i} \\ m+n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m+1 & m+2 & \dots & m+n \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} _{m/}\ddot{s}_{\overline{n}|i} \\ m+n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m & m+1 & \dots & m+n-1 \end{pmatrix}$$

---

(1) via definizione $\boxed{00:48}$

$$a_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n} e^{-\delta j} = \quad \text{con } \delta \text{ FISSATO in partenza}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i}\right)^j = \sum_{j=1}^{n} v^j = v + v^2 + \dots + v^n = v\underbrace{(1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1})}_{\text{somma di termini in progress. geometrica di ragione } v \ \left(\sum_{j=0}^{n-1} v^j\right)} =$$

$$= v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \cancel{v}\,\frac{1-v^n}{i\cancel{v}} = \frac{1-v^n}{i}$$

dove $1 - v = d = iv$ tasso interesse anticipato $\boxed{0 < v < 1}$

Scanned by CamScanner

③ Via significato finanziario: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \underset{\text{def. di } i}{\sim} \begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix} \underset{\text{omogeneità importo}}{\sim} \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ COPPIA di situazioni

per la transitività della relazione (scindibilità):

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ applicare iterativamente la proprietà di SCINDIBILITA'

00:55

per la proprietà di uniformità del tempo:

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix} \xRightarrow{\text{uniformità nel tempo}} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ uniformità nel tempo

quindi...

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1+i\\1\end{pmatrix} \overset{\text{omogeneità d'importo}}{\sim} \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} \sim \dots \sim \left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}i\\m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right\} \sim$

$\sim \left\{\begin{pmatrix}i & i & & i\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right\} \sim \left\{\begin{pmatrix}i\, a_{\overline{m}|i}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^m\\0\end{pmatrix}\right\} \sim \begin{pmatrix}i\, a_{\overline{m}|i} + v^m\\0\end{pmatrix}$ Poi...

omogeneità d'importo (divisibilità degli importi)

per la scindibilità:

$\xRightarrow{\text{scindib.}} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}i\, a_{\overline{m}|i} + v^m\\0\end{pmatrix}$ Poi si considera il postulato ③ (Pag. 18)

$\xRightarrow{③} 1 = i\, a_{\overline{m}|i} + v^m \Leftrightarrow a_{\overline{m}|i} = \frac{1-v^m}{i}$

01:07

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \left\{\begin{pmatrix}i & i & & i\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right\}$ Si può pensare di prendere in prestito in 0 un importo (unitario), ci si indebita e si deve restituire questo debito. Questo debito (come si vedrà negli ammortamenti) si può restituire restituendo il capitale preso in prestito + gli interessi. Si può un po' alla volta restituire gli interessi e poi la parte del capitale preso in prestito oppure si possono pagare solo gli interessi e il capitale viene restituito tutto in blocco alla scadenza dell'obbligazione

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \left\{\begin{pmatrix}i & i & & i\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right\}$ dove $\begin{pmatrix}i & i & & i\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$ è il pagamento degli interessi e $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ è la restituzione del capitale (unitario)

Calcoliamo adesso il montante: Ipotesi di leggi associate

$\begin{pmatrix}s_{\overline{m}|i}\\m\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & & 1\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$ mentre $\begin{pmatrix}a_{\overline{m}|i}\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & & 1\\ 1 & 2 & \cdots & m\end{pmatrix}$ Per la Proprietà simmetrica

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & & 1\\ 1 & \cdots & m\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}a_{\overline{m}|i}\\0\end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Proprietà transitiva}} \begin{pmatrix}s_{\overline{m}|i}\\m\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}a_{\overline{m}|i}\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}a_{\overline{m}|i}\, u^m\\m\end{pmatrix}$

$\xRightarrow{\text{trans.} + ③} s_{\overline{m}|i} = a_{\overline{m}|i}\, u^m = \frac{1-v^m}{i} \cdot u^m = \frac{u^m - 1}{i}$

Calcoliamo $a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{m \to +\infty} a_{\overline{m}|i} = \lim_{m \to +\infty} \frac{1-v^m}{i} = \frac{1}{i}$ ($v^m \to 0$) Postulato rendim. ordinario $0 < v < 1$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}i & i & \\ 1 & 2 & \cdots\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}i\, a_{\overline{\infty}|i}\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{trans.} + ③} 1 = i\, a_{\overline{\infty}|i}$

01:17

Le rendite perpetue esistevano. Qualche volta le rendite perpetue sono state messe dagli stati in periodi di guerra per far fronte al debito pubblico, per esempio c'è stata un'obbligazione italiana che prevedeva il pagamento degli interessi e la restituzione del debito alla scadenza (RENDITA ITALIANA) ma in realtà era IRREDIMIBILE (non poteva essere riscattata) ma dal 1998 è stata ritirata rimborsando tutti gli obbligazionisti.

Rendite differite: $\begin{pmatrix} {}_{m/}a_{\overline{n|}i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \\ \hline m+1 & m+2 & & m+n \end{array} \right)$

$\begin{pmatrix} a_{\overline{n|}i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & 2 & & n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{uniformità tempo}} \begin{pmatrix} a_{\overline{n|}i} \\ m \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \\ \hline m+1 & m+2 & & m+n \end{array} \right)$

$\dots \begin{pmatrix} {}_{m/}a_{\overline{n|}i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{\overline{n|}i} \\ m \end{pmatrix} \underset{\text{R. scinit.}}{\sim} \begin{pmatrix} a_{\overline{n|}i}\, v^m \\ 0 \end{pmatrix}$ ② $\Rightarrow \boxed{{}_{m/}a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i}\, v^m}$

la attualizzo e la porto in 0

Stessa cosa per le diff. perpetue

$\boxed{{}_{m/}a_{\overline{\infty|}i} = a_{\overline{\infty|}i} \cdot v^m}$

$\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & -1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & m & m+1 & m+n \end{array}$

Sottraggo a quella sotto le prime m rate

$\boxed{{}_{m/}a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{m+n|}i} - a_{\overline{m|}i}}$

Vediamo i montanti:

$\begin{pmatrix} {}_{m/}s_{\overline{n|}i} \\ m+n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} {}_{m/}a_{\overline{n|}i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} {}_{m/}a_{\overline{n|}i} \cdot u^{m+n} \\ m+n \end{pmatrix} \Rightarrow$

la capitalizzo e la porto in m+n

$\Rightarrow \boxed{{}_{m/}s_{\overline{n|}i} = {}_{m/}a_{\overline{n|}i}\, u^{m+n}}$

$\boxed{{}_{m/}s_{\overline{n|}i} = s_{\overline{m+n|}i} - s_{\overline{m|}i}\, u^n}$ *1

Cosa importante: $\boxed{{}_{m/}s_{\overline{n|}i} = s_{\overline{n|}i}}$ il montante è sempre lo stesso...

il montante in una rendita posticipata lo calcolo nell'epoca di pagamento dell'ultima rata, le rate sono n. Si dimostra che ${}_{m/}s_{\overline{n|}i} = s_{\overline{n|}i}$. Non importa di quando si è iniziato a pagare, l'importante è CAPITALIZZARE.

*1 Se si prova a fare lo stesso discorso della scomposizione ma stavolta per i montanti, anziché per i valori attuali, non è giusto fare la differenza come prima perché il montante della rendita immediata di m rate è riferito in m e non si può sottrarla dalle altre che è in (m + n). Per sottrarlo si deve capitalizzare $s_{\overline{m|}i}$ di n periodi

16 OTTOBRE 2018:

Domanda: si potrebbe vedere graficamente perché

$${}_{m/}s_{\overline{n|}i} = s_{\overline{m+n|}i} - s_{\overline{m|}i}\, u^n$$

Perché è riferito a 2 epoche diverse

$s_{\overline{m+n|}i}$ è valutato in (m+n) mentre $s_{\overline{m|}i}$ è valutato in m

$${}_{m/}a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{m+n|}i} - a_{\overline{m|}i}$$

qui sottraiamo valori riferiti alla stessa epoca (in 0)

$u = 1+i$ *2

$\begin{pmatrix} \ddot{a}_{\overline{n|}i} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \\ \hline 0 & 1 & {*2} & n-1 \end{array} \right) \underset{\text{Uniformità del tempo}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc} u & u & & u \\ \hline 1 & 2 & & n \end{array} \right) \sim \begin{pmatrix} u\, a_{\overline{n|}i} \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusione: con $d = iv$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = u\, a_{\overline{n|}i} = u\, \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-v^n}{i\,v} \underset{\text{transitività}}{=} \frac{1-v^n}{d}$$

*2 Tutti questi pagamenti possono essere portati avanti di un periodo ricordando che $u = 1+i$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \left[\begin{pmatrix} d & d & d & \cdots & d & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & m-1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right] \sim \begin{pmatrix} d\,\ddot{a}_{\overline{m}|i} + v^m \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = d\,\ddot{a}_{\overline{m}|i} + v^m \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{m}|i} = \frac{1-v^m}{d}$$

INTERESSI ANTICIPATI (d in 0 riferito all'anno 1, d in 1 riferito all'anno 2 ...)

separo (1) da tutto il resto

$$\begin{pmatrix}\ddot{a}_{\overline{m}|i}\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 \end{pmatrix} \sim \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & m-1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{a}_{\overline{m}|i} = 1 + a_{\overline{m-1}|i}$$

andiamo al montante ... Sotto l'ipotesi che le leggi siano ASSOCIATE

$$\begin{pmatrix}\ddot{a}_{\overline{m}|i}\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\ddot{s}_{\overline{m}|i}\\m\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\ddot{a}_{\overline{m}|i}\cdot u^m\\m\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{s}_{\overline{m}|i} = \ddot{a}_{\overline{m}|i}\, u^m = \frac{1-v^m}{d}\, u^m = \frac{u^m - 1}{d}$$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{m\to+\infty} \ddot{a}_{\overline{m}|i} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-v^m}{d} \to 0 = \frac{1}{d} = \frac{1}{iv} = \frac{u}{i} =$$

$$= u\, a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} = 1 + a_{\overline{\infty}|i}$$

Non c'è come prima la COPPIA perché qui non c'è la restituzione del capitale

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d & d & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = d\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$$

Solo il pagamento degli interessi anticipati

00:24

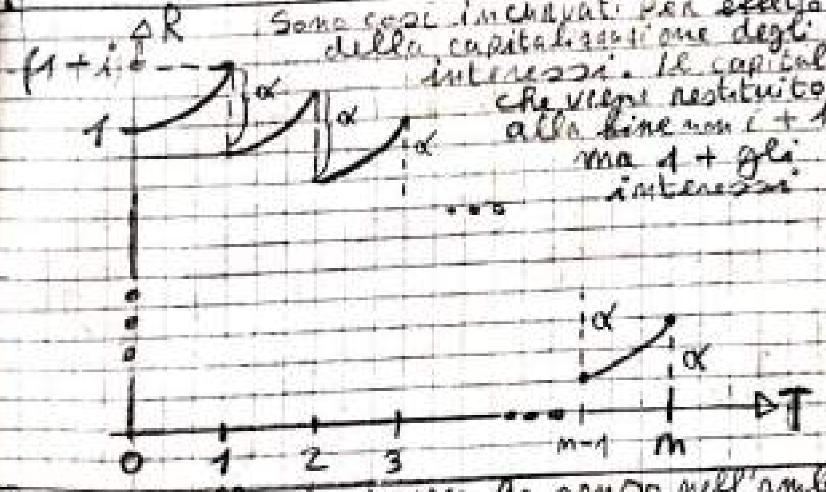
$$_{m/}\ddot{a}_{\overline{m}|i} = v^m\, \ddot{a}_{\overline{m}|i}$$

$$_{m/}\ddot{s}_{\overline{m}|i} = \ddot{s}_{\overline{m}|i} = u^{m+m}\, \ddot{a}_{\overline{m}|i}$$

__Ammortamento__: in o una parte (che potrebbe essere un privato cittadino) che ha bisogno di denaro prende a prestito un certo importo che si impegna a restituire nel tempo (all'altra parte) pagando anche gli interessi. Una modalità di restituzione, che solitamente è adottata dagli enti pubblici, è quella di restituire tutto il capitale alla scadenza e pagare periodicamente solo gli interessi (anticipati o posticipati), mentre la modalità attuata dai privati è quella di restituire gradualmente il debito nel tempo insieme agli interessi. Una modalità di restituzione del capitale che spesso è adottata nei prestiti a tasso fisso è quella di pagare delle rate COSTANTI fino alla scadenza (importo che da una parte è composto da una quota di capitale e dall'altra parte da una quota di interessi).

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} R & R & \cdots & R \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = R\, a_{\overline{m}|i} \Rightarrow R = \frac{1}{a_{\overline{m}|i}} \overset{\text{def.}}{\equiv} \alpha_{\overline{m}|i}$$

$$\boxed{\alpha_{\overline{m}|i} : \underline{\text{Rata (o quota) di ammortamento del debito unitario}}}$$



Sono così incurvati per effetto della capitalizzazione degli interessi. Il capitale che viene restituito alla fine non è 1 ma 1 + gli interessi

Volendo si potrebbe fare lo stesso discorso per le rate anticipate e si avrebbe:

$$\ddot{\alpha}_{\overline{m}|i} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|i}}$$

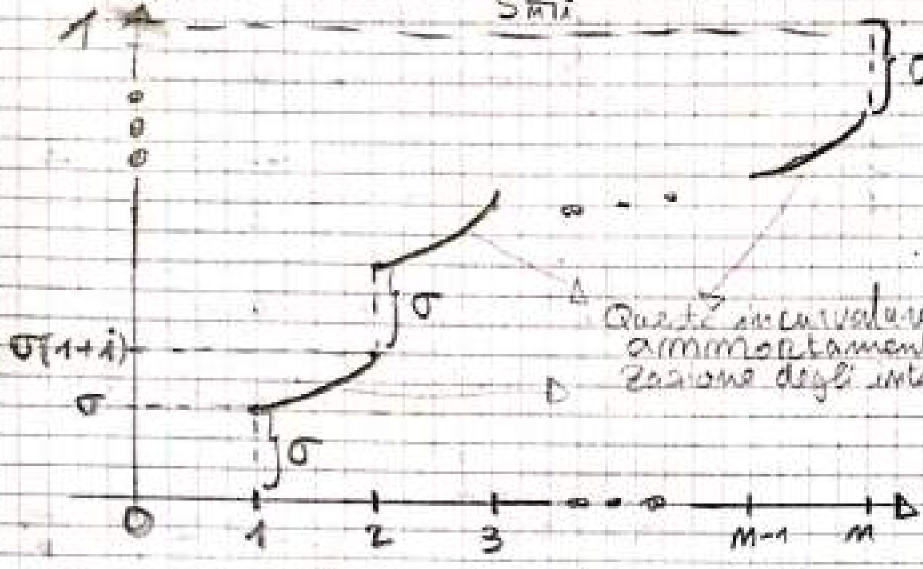
ma non ha molto senso perché le rate sarebbero pagate a partire da 0 e l'ultima in $(m-1)$. Quindi in 0 non si riceverebbe in prestito il capitale unitario ma $(1-R)$. Dal punto di vista pratico non ha senso perché lo ammortamento è PROGRESSIVO. Sarebbe come farsi prestare i soldi e restituirne SUBITO una parte. Quello che invece ha senso nell'ambito degli ammortamenti è il caso in cui gli interessi sono ANTICIPATI, nel senso che gli interessi di un periodo sono pagati all'inizio però solo gli interessi sono anticipati ma il capitale comincia ad essere restituito da 1 in poi fino ad m.

Quota costitutiva del capitale unitario: Si tratta sempre di una operazione di scambio tra un unico importo e una rendita, dove qui viene versato periodicamente ad intervalli regolari una rata COSTANTE per arrivare a costruire il capitale unitario in fondo (per esempio in m se m sono le rate). Qui avrebbe + senso rispetto all'ammortamento considerare una sequenza di rate anticipate. Si considera comunque per semplicità il caso posticipato.

$$R s_{\overline{m}|i} \overset{(*1)}{=} 1 \Rightarrow R = \frac{1}{s_{\overline{m}|i}} \overset{def}{=} \sigma_{\overline{m}|i}$$

A differenza dell'ammortamento in questo caso si ha 1 in m anziché in 0

$$(*1)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc} R & R & R \\ 1 & 2 & m \end{array} \right)$$



Queste incurvature analogamente agli ammortamenti sono dovute alla capitalizzazione degli interessi

$$a_{\overline{m}|i} = \frac{1 - v^m}{i} \Leftrightarrow i = \frac{1}{a_{\overline{m}|i}} - \frac{v^m}{a_{\overline{m}|i}} = \frac{1}{a_{\overline{m}|i}} - \frac{1}{\underbrace{u^m a_{\overline{m}|i}}_{s_{\overline{m}|i}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\overline{m}|i} = i + \sigma_{\overline{m}|i} \Leftrightarrow i = \alpha_{\overline{m}|i} - \sigma_{\overline{m}|i}$$

PAGAMENTO DEGLI INTERESSI — RESTITUZIONE CAPITALE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left\{ \left(\begin{array}{ccc} i & i & i \\ 1 & 2 & m \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \left(\begin{array}{ccc} i & i & i \\ 1 & 2 & m \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \sigma_{\overline{m}|i} & \sigma_{\overline{m}|i} & \sigma_{\overline{m}|i} \\ 1 & 2 & m \end{array} \right) \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc} i+\sigma & i+\sigma & i+\sigma \\ 1 & 2 & m \end{array} \right)$$ d'altra parte sappiamo che...

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc} \alpha_{\overline{m}|i} & \alpha_{\overline{m}|i} & \alpha_{\overline{m}|i} \\ 1 & 2 & m \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 2 & m \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} i+\sigma & i+\sigma & i+\sigma \\ 1 & 2 & m \end{array} \right) \Rightarrow \alpha = i + \sigma$$

qui si sfrutta il fatto che le rate sono COSTANTI, se no non vale questa cosa.

Rendite frazionate: Nei pagamenti reali ad esempio quelli in cui le rate vengono pagate ogni mese viene dichiarato il valore della rata ANNUA, dopodiché questa viene divisa per 12 e pagata mensilmente. Si può pensare ad una rata annua pari ad 1 unità monetaria (anno unità di misura del tempo scelta) ripartita in K-esimi.

RATA ANNUALE 1 — K volte l'anno — RATA K-esima $\frac{1}{K}$

m nella notazione a sinistra indica stavolta il numero di anni e non il numero di rate come negli altri casi.

$$\begin{pmatrix} a^{(K)}_{\overline{m}|} \\ 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc} 1/K & 1/K & 1/K \\ 1/K & 2/K & mK/K \end{array} \right)$$

Di solito nella pratica quello che viene dichiarato non è il tasso annuo d'interesse bensì è il TASSO NOMINALE CONVERTIBILE K VOLTE L'ANNO (J_K).

TAN: Tasso annuo nominale (convertibile K volte l'anno)

(Riguardare appunti pag. 16 – 17)

$$\boxed{j_k = k \cdot i_k}$$

$a_{\overline{m}|}^{(k)}$: valore attuale in 0 di una rendita

$$a_{\overline{m}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\, a_{\overline{mk}|i_k} = \frac{1}{k}\,\frac{1-v_k^{mk}}{i_k} = \frac{1-\left((v_k)^k\right)^m}{k\, i_k} =$$

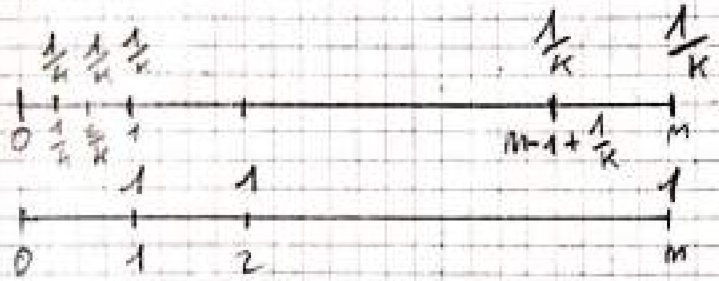
$$= \frac{1-v^m}{j_k} = \alpha_{\overline{m}|}^{(k)} = \frac{1-v^m}{i}\cdot\frac{i}{j_k} = a_{\overline{m}|i}\cdot\frac{i}{j_k}$$

$(k>1)$

dove $v_k = \frac{1}{1+i_k}$
$1+i = (1+i_k)^k$
$1+i_k = (1+i)^{1/k}$
quindi $v_k = v^{1/k}$

$$\boxed{a_{\overline{m}|i}\cdot\frac{i}{j_k} > a_{\overline{m}|i}}$$

Quando $k>1$ i j_k sono decrescenti con k quindi $j_k < i$ e quindi $\frac{i}{j_k} > 1$



Se si fa il confronto tra le 2 situazioni globalmente si riceve sempre 1 ogni anno ma nel caso di rate mensili questo 1 viene anticipato a poco a poco quindi ci si ritrova ad "avere soldi prima"

"Postulato di rendimento del denaro"

Rendita perpetua frazionata: $a_{\overline{\infty}|}^{(k)} = \lim_{m\to+\infty} a_{\overline{m}|}^{(k)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1-v^m}{j_k} = \frac{1}{j_k}$ ($v^m \to 0$)

Rendita continua: ($\lim_{k\to\infty} j_k = \delta$) vedi pag. 17

$$\bar{a}_{\overline{m}|} = \lim_{k\to+\infty} a_{\overline{m}|}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty}\frac{1-v^m}{j_k} = \frac{1-v^m}{\delta}$$

Rendita perpetua continua: $\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{\delta} = \lim_{m\to+\infty}\frac{1-v^m}{\delta}$ ($v^m \to 0$) 01:14

1
1 · 1/K
anno

Δt
1 · Δt
ampiezza delta

$$\bar{a}_{\overline{m}|} = \int_0^m e^{-\delta t}\cdot 1\,dt = \left|\frac{e^{-\delta t}}{-\delta}\right|_0^m = \frac{e^{-\delta m}}{-\delta} - \frac{e^{-\delta 0}}{-\delta}$$

$$= \frac{1-e^{-\delta m}}{\delta} = \frac{1-v^m}{\delta}$$

Variazione infinitesima (differenziale) 01:18

Rendita a rate non costanti ma equintervallate:

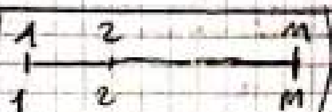
$\to a>0$ Rate crescenti in progressione aritmetica di ragione a

$\to a<0$ Rate decrescenti in progressione aritmetica di ragione a

Se $a<0$ si ha questo vincolo:
$R+(m-1)a>0 \Rightarrow a > -\frac{R}{m-1}$
l'ultima rata deve rimanere POSITIVA

P. aritmetica: la differenza tra un termine e il suo successivo è COSTANTE
P. geometrica: il rapporto ... è COSTANTE

$R = a = 1$ (INCREASING $\to$ $\left((Ia)_{\overline{m}|i}\right) \sim$



$(Ia)_{\overline{m}|i} = v + 2v^2 + 3v^3 + \dots + (m-1)v^{m-1} + m v^m$ moltiplico entrambi i membri per $(1+i)$

$(1+i)(Ia)_{\overline{m}|i} = 1 + 2v + 3v^2 + \dots + m v^{(m-1)}$ Sottraggo membro a membro la prima equazione dalla seconda

$i(Ia)_{\overline{m}|i} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{m-1} - m v^m$

$$(Ia)_{\overline{m}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|i} - m v^m}{i}$$

dove: $\underbrace{1+v+v^2+\dots+v^{m-1}}_{\ddot{a}_{\overline{m}|i}} - m v^m$

13:25 — 17 OTTOBRE 2018:

martedì la sala la prima ora di lezione

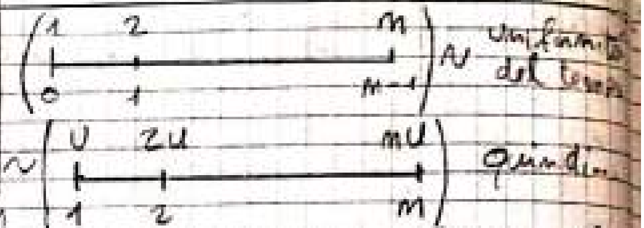
$$(Ia)_{\overline{m}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|i} - m v^m}{i}$$

limite notevole tende a 0

$$(Ia)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{m \to +\infty} \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|i} - m v^m}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}}{i} = \frac{1}{i d} = \frac{1}{i^2 v} = \frac{1+i}{i^2} =$$

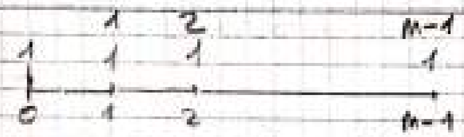
$$= \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i}$$ capitalizzati

$$(Is)_{\overline{m}|i} = u^m (Ia)_{\overline{m}|i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{m}|i} - m}{i}$$



$$(I\ddot{a})_{\overline{m}|i} = u (Ia)_{\overline{m}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|i} - m v^m}{i} \cdot u = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|i} - m v^m}{i v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m}|i} - m v^m}{d}$$

00:11

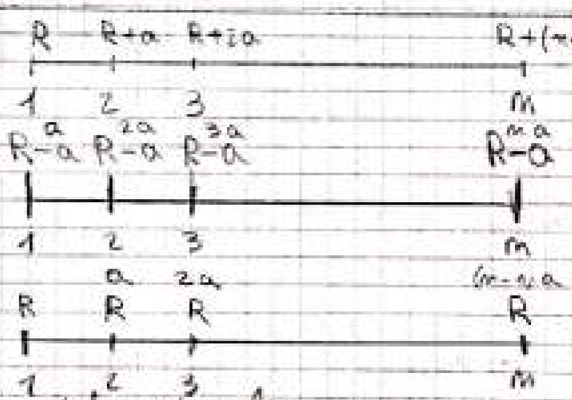


$$(I\ddot{a})_{\overline{m}|i} = \ddot{a}_{\overline{m}|i} + (Ia)_{\overline{m-1}|i}$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|i} = \lim_{m \to +\infty} (I\ddot{a})_{\overline{m}|i} = \frac{1}{d^2} = \frac{1+i}{i d} = \frac{1+i}{i^2 v} = \frac{(1+i)^2}{i^2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{i d}$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{m}|i} = (I\ddot{a})_{\overline{m}|i} u^m = \frac{\ddot{s}_{\overline{m}|i} - m}{d} = \ddot{s}_{\overline{m}|i} + (Is)_{\overline{m-1}|i}\, u$$

00:21



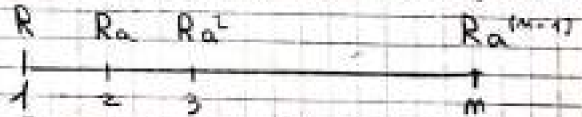
$\boxed{a > -\frac{R}{(m-1)}}$ l'ultima rata DEVE essere positiva

valore attuale

$$V = (R-a)a_{\overline{m}|i} + a (Ia)_{\overline{m}|i} =$$

$$= R a_{\overline{m}|i} + (Ia)_{\overline{m-1}|i} \cdot a$$

Rata in progressione geometrica:



$\boxed{a > 0}$

Valore attuale:

$$V = Rv + Rav^2 + Ra^2v^3 + \dots + Ra^{(m-1)} v^m =$$

$$= Rv\left(1 + av + (av)^2 + \dots + (av)^{(m-1)}\right) =$$

si distinguono 2 situazioni:

① la prima situazione è quella in cui la ragione della progressione è pari a 1

② l'altra situazione è quella in cui $a \neq u$

$$= R v \ddot{a}_{\overline{m}|\left(\frac{1}{av} - 1\right)}$$

$$= \begin{cases} R v m & \text{se } a = u \\ R v \dfrac{1-(av)^m}{1-av} & \text{se } a \neq u \end{cases}$$

① $av = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{v} = (1+i) \Leftrightarrow a = u$

Posto: $v^* = av$ e $i^* = \frac{1}{av} - 1$ poiché $v = \frac{1}{1+i} \Rightarrow i = \frac{1}{v} - 1$

00:36

Se $a > 1$ rate crescenti

Se $0 < a < 1$ rate decrescenti

Ammortamenti: Ci si occuperà delle modalità in base alle quali viene restituito un capitale C prestato all'epoca 0. Ci sono 2 parti: il debitore che chiede il prestito e il creditore che presta il capitale. In realtà, come si vedrà, non è soltanto il capitale che viene restituito ma vengono pagati anche gli interessi (corresponsione degli interessi).

Dal punto di vista del debitore: operazione di finanziamento
Dal punto di vista del creditore: operazione di investimento

00:40

Piano di ammortamento: E' il piano di restituzione del capitale concordato tra le parti in cui vengono specificate nel contratto le modalità e i dettagli sugli importi e sui tempi. Il tasso di interesse che rende equa l'operazione di ammortamento può essere fisso (la situazione di cui ci si occuperà) cioè noto. Il tasso fisso può essere costante oppure no (crescente o decrescente) ma comunque sempre noto (o noti se è fisso ma non costante), quando non è costante varia nel tempo in maniera deterministica. I tassi possono anche essere variabili nel senso che variano (non in maniera deterministica) stocasticamente perché il tasso dipenderà da qualche variabile di mercato (EURIBOR, LIBOR) che cambia nel tempo in maniera aleatoria in base alle condizioni di mercato. Nel caso di tasso variabile si specifica che gli interessi del primo anno sono legati a questo tasso, mentre gli interessi del secondo anno saranno collegati al tasso variabile di riferimento di cui ancora si deve osservare il valore (interessi aleatori).

00:44

Interessi a tasso fisso (e costante nel tempo):

i: tasso tecnico (o di remunerazione): è il tasso che rende EQUA l'operazione finanziaria

supponiamo che le rate siano $m+1$ con $R_0=0$ a volte: R_j

$$\binom{C}{0} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_m \\ 0 & t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix} \quad \boxed{C=\sum_{j=0}^{m} R_j v^{t_j} = \sum_{j=0}^{m} R_j \left(\frac{1}{1+i}\right)^{t_j}}$$

$\boxed{t_0=0}$

CONDIZIONE di CHIUSURA FINANZIARIA dell'operazione di AMMORTAMENTO

00:50

$$\begin{matrix} C-R_0 & -R_1 & -R_2 & \dots & -R_m \\ 0 & t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{matrix}$$

il saldo in 0 è:

$$C-R_0-R_1\left(\frac{1}{1+i}\right)^{t_1}-\dots-R_m\left(\frac{1}{1+i}\right)^{t_m}=0$$

00:54

C_j: quota capitale*[1]
I_j: quota interessi

$\boxed{R_j=C_j+I_j}$, $j=0,1,\dots,m$

Solitamente $C_0=0$

*[1] o di ammortamento

$\boxed{C=C_1+C_2+\dots+C_m}$ CONDIZIONE DI CHIUSURA ELEMENTARE dell'operazione di AMMORTAMENTO.

$C_j>0 \quad \forall j>0$ perché $C_0=0$ AMMORTAMENTO PROGRESSIVO

$C_j=0 \quad j=0,1,\dots,m-1$, $C_m=C$ AMMORTAMENTO NON PROGRESSIVO

C'è un'unica quota capitale a scadenza nella modalità non progress.

Ammortamenti non progressivi: Unica quota capitale a scadenza

1) Unica quota interessi (posticipati) a scadenza

$$\binom{C}{0} \underset{i}{\sim} \binom{C(1+i)^{t_1}}{t_1} \qquad R_0=C_0=I_0=0$$

$$R_1=C(1+i)^{t_1},\ C_1=C,\ I_1=C\left[(1+i)^{t_1}-1\right]$$

segue →

Questa modalità di restituzione del debito viene utilizzata dalle poste quando emettono i BUONI FRUTTIFERI. In questo caso la CASSA DEPOSITI E PRESTITI (POSTA) funge da debitore nei confronti dei cittadini investitori. L'investitore ad esempio investe 100€ comprando il buono e diventando creditore nei confronti della (POSTA). I buoni fruttiferi postali hanno una scadenza massima (si potrebbero però incassare anche prima di tale scadenza). A scadenza viene restituito il capitale + gli interessi. Ci sono dei buoni di investimento che prevedono tagli fissi ma di basso valore (non necessariamente multipli di 1000€ come per altri titoli). Si potrebbero emettere buoni fruttiferi che prevedono un tasso fisso variabile (deterministicamente) nel tempo, in modo da tenere la gente fedele (es. 1° anno: $i = 0{,}01$, 2° anno: $i = 0{,}02$, 3° anno: $i = 0{,}03$ ...). Gli interessi per i buoni fruttiferi postali vengono capitalizzati ogni anno a partire dal conseguimento del primo anno dopo l'emissione (Es. emissione buono: 17/10/2018 $\Rightarrow$ 1° capitalizz.: 17/10/2019 $\Rightarrow$ 2° capit. 17/10/2020). Solitamente capita che se si ritira il capitale dopo solo un anno gli interessi NON vengono pagati.

01:05 ... 01:11

2) Unica Quota interessi anticipata in 0:

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\sim} \begin{pmatrix} R_0 & & R_1 \\ 0 & \text{———} & t_1 \end{pmatrix} \qquad R_0 = I_0 = C(1 - v^{t_1}) = C\underbrace{\left[(1+i)^{t_1} - 1\right]}_{\text{la quota interessi posticipata}} v^{t_1} \;\; \text{anticipati in 0}$$

$$R_1 = C_1 = C$$

Questa modalità viene utilizzata quando vengono emessi gli Zero Coupon Bonds (ZCB) titoli a cedola nulla. La cedola è la quota interessi.

BOT (Buoni ordinari del tesoro) scadenza dall'emiss.: 3 mesi, 6 mesi, 12 mesi

CTZ (Certificati del tesoro Zero coupon bonds) scadenza 2 anni.

$$\begin{pmatrix} C - R_0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} R_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

la differenza tra gli ZCB e i BUONI FRUTTIFERI postali sta nel fatto che nei ZCB emessi dallo stato il taglio minimo è di 1000€ e si possono eventualmente investire tagli multipli di 1000€. In questo caso 1000€ è il valore NOMINALE (C cioè quello che di fatto viene rimborsato in fondo). Quando si comprano gli ZCB si acquistano a $(C - R_0)$ vi è uno sconto (o interesse anticipato). Quindi nel caso di prima c'era il montante in questo caso c'è lo sconto

3) Interessi pagati periodicamente (a scadenze equintervallate) solitamente posticipata-mente. *1

$t_j = j$ $\qquad j = 0, 1, \dots, m-1$ (da j a $j+1$)

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} Ci & Ci & & Ci + C \\ 1 & 2 & \text{———} & m \end{pmatrix} \qquad C_0 = C_1 = \dots = C_{m-1} = 0$$

$C_m = C$ quota capitale tutta in fondo

$I_0 = 0, \; I_j = Ci, \; j = 1, \dots, m$

$R_0 = 0, \; R_j = Ci, \; i = 1, \dots, m-1, \; R_m = C(1+i)$

Modalità utilizzata per le emissioni di coupon bonds come ad esempio i BTP (Buoni del tesoro Poliennali). I BTP hanno durate molto lunghe (addirittura 50 anni). Questi buoni pagano gli interessi solo sul valore nominale (C) e gli interessi sono pagati alla fine di ogni semestre quindi le cedole (quote interessi) sono semestrali

4) Interessi pagati periodicamente *1 ... Anticipatamente.

$t_j = j$ $\qquad j = 0, 1, \dots, m-1, \; Ci\,v = Cd$ (da j a $j+1$)

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} cd & cd & & cd & C \\ 0 & 1 & \text{———} & m-1 & m \end{pmatrix} \qquad I_j = R_j = Cd, \; R_m = C$$

$C_m = C, \; C_j = 0 \quad \forall j < m$

anche qui la quota capitale viene si paga tutta in fondo

22 OTTOBRE 2018:

Debito residuo in t_j (cioè il capitale ancora da restituire, dopo il pagamento dell'eventuale quota capitale ivi dovuta):

$$\boxed{Q_j = C_{j+1} + C_{j+2} + \dots + C_m \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1} \quad \boxed{\text{DEBITO RESIDUO}}$$

in particolare: $Q_0 = C$ (condizione di CHIUSURA ELEMENTARE)

$Q_{m-1} = C_m$ con $Q_m = 0$ (per convenzione) $\boxed{00:03}$

DEBITO RESIDUO IN $m-1$

Consideriamo il periodo $\underset{t_{j-1}}{Q_{j-1}} \; I_{j-1} \quad I_j \; \underset{t_j}{}$ $\quad j = 1, 2, \dots, m$

Se gli interessi sono posticipati vengono pagati in t_j, quindi

$I_j = Q_{j-1}(1+i)^{t_j - t_{j-1}} - Q_{j-1} = Q_{j-1}\left[(1+i)^{t_j - t_{j-1}} - 1\right] =$ montante $-$ debito iniziale

Se gli interessi sono anticipati vengono pagati in t_{j-1}, quindi

$I_{j-1} = Q_{j-1}\left[1 - (1+i)^{-(t_j - t_{j-1})}\right] = Q_{j-1} - Q_{j-1}(1+i)^{-(t_j - t_{j-1})} =$ debito $-$ valore attuale

nel caso particolare che $t_j = j$, interessi post.: $I_j = i\,Q_{j-1}$

nel caso particolare che $t_j = j$, interessi anticip.: $I_{j-1} = d\,Q_{j-1}$

$\boxed{00:11}$

Ammortamenti a interessi posticipati: $(t_j = j \quad \forall j)$

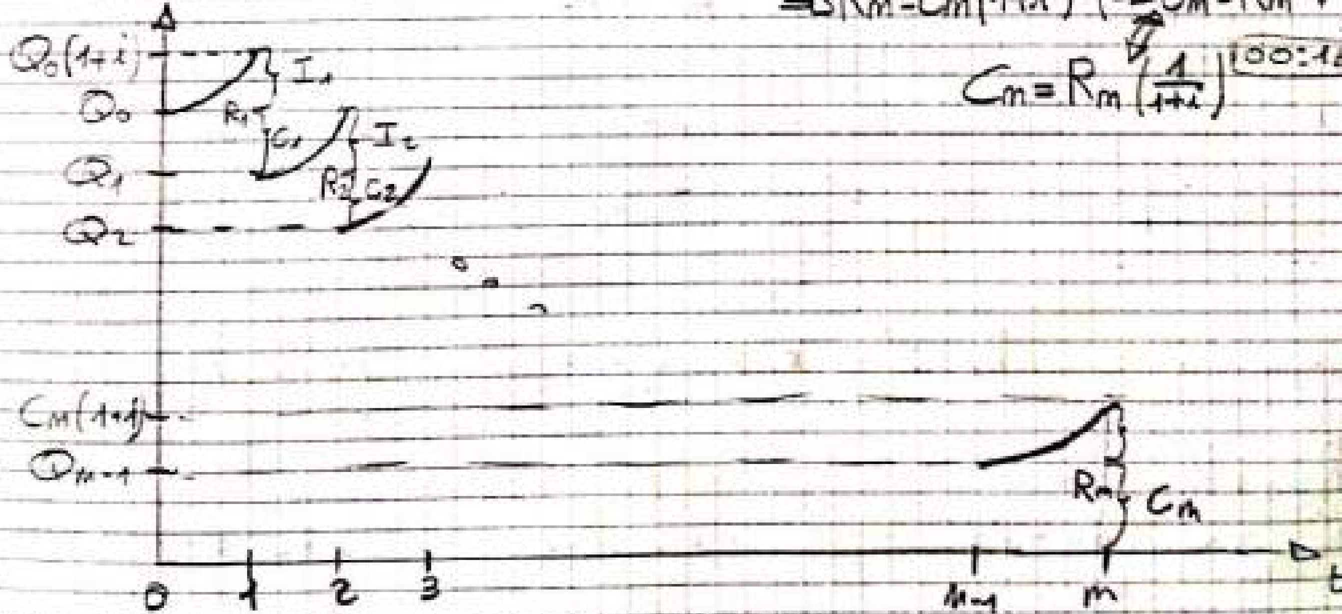
$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$ $\quad I_j = i\,Q_{j-1}, \; j = 1, \dots, m$

$R_j = C_j + I_j \quad j = 1, \dots, m$

In particolare: $Q_{m-1} = C_m \Rightarrow I_m = i\,C_m \Rightarrow R_m = C_m + i\,C_m$

$\Rightarrow R_m = C_m(1+i) \quad (\Rightarrow C_m = R_m \cdot v)$

$C_m = R_m\left(\frac{1}{1+i}\right)$ $\boxed{00:15}$



$Q_0 = C_1 + C_2 + \dots + C_m$

$Q_1 = Q_0 - C_1 = C_2 + C_3 + \dots + C_m$

$Q_2 = Q_1 - C_2 = C_3 + C_4 + \dots + C_m$

$Q_{m-1} = C_m$

Piano di ammortamento a interessi posticipati con date equintervallate:

j	R_j	C_j	I_j	Q_j
0	/	/	/	Q_0
1	C_1+I_1	C_1	iQ_0	Q_0-C_1
⋮				
j	C_j+I_j	C_j	iQ_{j-1}	$Q_{j-1}-C_j$
⋮				
m	$C_m(1+i)$	C_m	iC_m	0

dove $Q_0=C$

00:30

Il debito residuo in un piano di ammortamento a interessi posticipati si può ottenere anche calcolando il VALORE ATTUALE di tutte le rate future (al tasso di remunerazione i)

$\Updownarrow$ ricordando che: $V=(1+i)^{-1}$

$$Q_j=C_{j+1}+C_{j+2}+\dots+C_m \ ,\ j=0,1,\dots,m-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Q_j=R_{j+1}V+R_{j+2}\cdot V^2+\dots+R_m\cdot V^{m-j} \quad j=0,\dots,m-1$$

nel caso particolare che $j=0$ e $Q_0=C$ si ha EQUIVALENZA tra CHIUSURA ELEMENTARE e FINANZIARIA.

Dimostrazione: $(\Rightarrow)$ Hp: $Q_j=C_{j+1}+\dots+C_m \quad \forall j$

Ts: $Q_j=R_{j+1}V+\dots+R_mV^{m-j} \quad \forall j$

$R_{j+1}V+R_{j+2}V^2+\dots+R_mV^{m-j}=$ Scompongo le rate nella somme di quote capitale e quote interessi

$=(C_{j+1}+iQ_j)V+(C_{j+2}+iQ_{j+1})V^2+\dots+(C_m+iQ_{m-1})V^{m-j}=$

$=C_{j+1}V+C_{j+2}V^2+\dots+C_mV^{m-j}+iV(C_{j+1}+C_{j+2}+\dots+C_m)+\dots$ a capo

$+iV^2(C_{j+2}+C_{j+3}+\dots+C_m)+\dots+iV^{m-j}C_m=$

$=C_{j+1}V+C_{j+2}V^2+\dots+C_mV^{m-j}+iC_{j+1}a_{\overline{1}|i}+iC_{j+2}a_{\overline{2}|i}+\dots+iC_ma_{\overline{m-j}|i}=$

$=C_{j+1}V+\dots+C_mV^{m-j}+iC_{j+1}\frac{1-V}{i}+\dots+iC_m\frac{1-V^{m-j}}{i}=$ semplifico "i"

$=\cancel{C_{j+1}V}+\cancel{C_{j+2}V^2}+\dots+\cancel{C_mV^{m-j}}+C_{j+1}-\cancel{C_{j+1}V}+C_{j+2}-\cancel{C_{j+2}V^2}+\dots+C_m-\cancel{C_mV^{m-j}}$

$=Q_j$ si elidono alcuni termini

00:47

$(\Leftarrow)$ Hp: $Q_h=R_{h+1}V+R_{h+2}V^2+\dots+R_mV^{m-h} \quad \forall h$ h arbitrario

Ts: $Q_j=C_{j+1}+C_{j+2}+\dots+C_m \quad \forall j$

$C_{j+1}+C_{j+2}+\dots+C_m=(R_{j+1}-\underbrace{iQ_j}_{I_{j+1}})+(R_{j+2}-\underbrace{iQ_{j+1}}_{I_{j+2}})+\dots+(R_m-\underbrace{iQ_{m-1}}_{I_m})=$

$=R_{j+1}+R_{j+2}+\dots+R_m-i(R_{j+1}V+R_{j+2}V^2+\dots+R_mV^{m-j})-i(R_{j+2}V+R_{j+3}V^2+\dots+R_mV$

00:54

$=R_{j+1}+R_{j+2}+\dots+R_m-iR_{j+1}a_{\overline{1}|i}-iR_{j+2}a_{\overline{2}|i}-\dots-iR_ma_{\overline{m-j}|i}=$

$=R_{j+1}+\dots+R_m-iR_{j+1}\frac{1-V}{i}-iR_{j+2}\frac{1-V^2}{i}-\dots-iR_m\frac{1-V^{m-j}}{i}=$ semplifico le i

$=\cancel{R_{j+1}}+\dots+R_m-\cancel{R_{j+1}}+R_{j+1}V-R_{j+2}+R_{j+2}V^2-\dots-\cancel{R_m}+R_mV^{m-j}=Q_j$

si elidono alcuni termini

$$(Q_j, i) \sim \begin{pmatrix} R_{j+1} & R_{j+2} & \dots & R_m \\ j+1 & j+2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

$Q_j = \sum_{k=j+1}^{m} R_k v^{k-j}$ il debito residuo e il FABBISOGNO dell'operazione di ammortamento dal punto di vista del creditore

$\boxed{01:303}$

$-C$	R_1	R_2		R_j	R_{j+1}		R_m
0	1	2	...	j	j+1	...	m

Si considerano tutti i pagamenti che vanno da j+1 in poi (col loro segno)

tutto quello che devo ancora avere al netto di tutto quello che devo ancora dare perchè in generale tutti questi importi potevano avere segno negativo. In questo specifico caso il Fabbisogno è solo il valore attuale degli importi che il creditore deve ancora avere.

Ammortamenti ad interessi posticipati (ESEMPI):

Q. capitale costanti ($\Rightarrow$ Ammortamento Italiano)

$\boxed{\text{Condizione di chiusura elementare: } \sum_{j=1}^{m} C_j = C \Rightarrow C_j = \frac{C}{m}}$

$Q_j = \sum_{k=j+1}^{m} C_k = (m-j)\frac{C}{m}$ $\qquad j = 1, \dots, m$

$Q_j - Q_{j+1} = \frac{C}{m} \quad \forall j \Rightarrow$ decresce in progressione aritmetica di ragione C/m

$I_j = i\, Q_{j-1} = i\,\frac{C}{m}(m-(j-1)) = i\,\frac{C}{m}(m-j+1)$, $j = 1, \dots, m$

$\Rightarrow$ decrescenti in progressione aritmetica di ragione $i\frac{C}{m}$

$R_j = C_j + I_j = \frac{C}{m}[1 + i(m-j+1)]$ $\qquad j = 1, \dots, m$

decrescenti in progressione aritmetica di ragione $i\frac{C}{m}$

$C = 50'000 \qquad m = 5 \qquad i = 0{,}01 \qquad C_j = \frac{50'000}{5} = 10'000$

j	R_j	C_j	I_j	Q_j
0	/	/	/	50'000
1	10'500	10'000	500	40'000
2	10'400	10'000	400	30'000
3	10'300	10'000	300	20'000
4	10'200	10'000	200	10'000
5	10'100	10'000	100	0

$(m-j-1) - \dots - i R_m V$

Ammortamento a interesse posticipato e rate costanti ($\Rightarrow$ Ammortamento Francese)

Condizione di chiusura finanziaria: $R_j = R \quad j = 1, \dots, m$

$\boxed{01:23}$

$C = R\, a_{\overline{m}|i} \Rightarrow \frac{C}{a_{\overline{m}|i}} = C\, \alpha_{\overline{m}|i}$

$C_j = R - I_j$

$Q_j = R\, a_{\overline{m-j}|i}$ $\quad j = 1, \dots, m \qquad I_j = i\,Q_{j-1} = i\,R\, a_{\overline{m-j+1}|i}$

le quote capitale sono REGOLARI e crescono in progressione geometrica di ragione $(1+i)$

$\boxed{01:26}$

$$C_j = R - I_j = R - iQ_{j-1} = R - iR\,a_{\overline{m-j+1}|i} = R\left(1 - i\,\frac{1-v^{m-j+1}}{i}\right) = Rv^{m-j+1}$$

$j = 1, \dots, m$

$$\frac{C_{j+1}}{C_j} = \frac{R\,v^{m-j}}{R\,v^{m-j+1}} = \frac{1}{v} = (1+i) \qquad j = 1, \dots, m-1$$

Crescono perché (le quote capitale si intende) per poter mantenere la rata COSTANTE.

23 OTTOBRE 2018: $C = 50'000$, $m = 5$, $i = 0{,}01$

j	R_j	C_j	I_j	Q_j
0	/	/	/	50'000
1	10'301,99	9'801,99	500	40'198,01
2	10'301,99	9'900,01	401,98	30'298,00
3	10'301,99	9999,01	302,98	20'298,99
4	10'301,99	10'099,00	202,99	10199,99
5	10'301,99	10199,99	102,00	0

$$R = \frac{50'000}{a_{\overline{5}|0{,}01}} \simeq \frac{50'000}{4{,}853431239} \simeq 10'301{,}99$$

basis point (punti base): decimillesimi

$\boxed{00:18}$

ITALIANO:	FRANCESE:
C_j costanti	C_j crescenti
R_j decrescenti	R_j costanti

la quota capitale costante è una media aritmetica

$$\bar{C} = \frac{C}{m} = \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_m}{m}$$

$$\min_j C_j \leq \bar{C} \leq \max_j C_j$$

$$R\,a_{\overline{m}|i} = R_1 \cdot v + R_2 \cdot v^2 + \dots + R_m v^m$$ anche qui si ha una media aritmetica pesata (con $\sum_j p_j = 1$)

$$a_{\overline{m}|i} = v + v^2 + \dots + v^m$$

$$R = R_1 \cdot \frac{v}{a_{\overline{m}|i}} + R_2\,\frac{v^2}{a_{\overline{m}|i}} + \dots + R_m\,\frac{v^m}{a_{\overline{m}|i}} = \sum_{j=1}^{m} R_j p_j$$ dove $p_j = \frac{v^j}{a_{\overline{m}|i}} > 0 \quad \forall j$

$\boxed{00:25}$

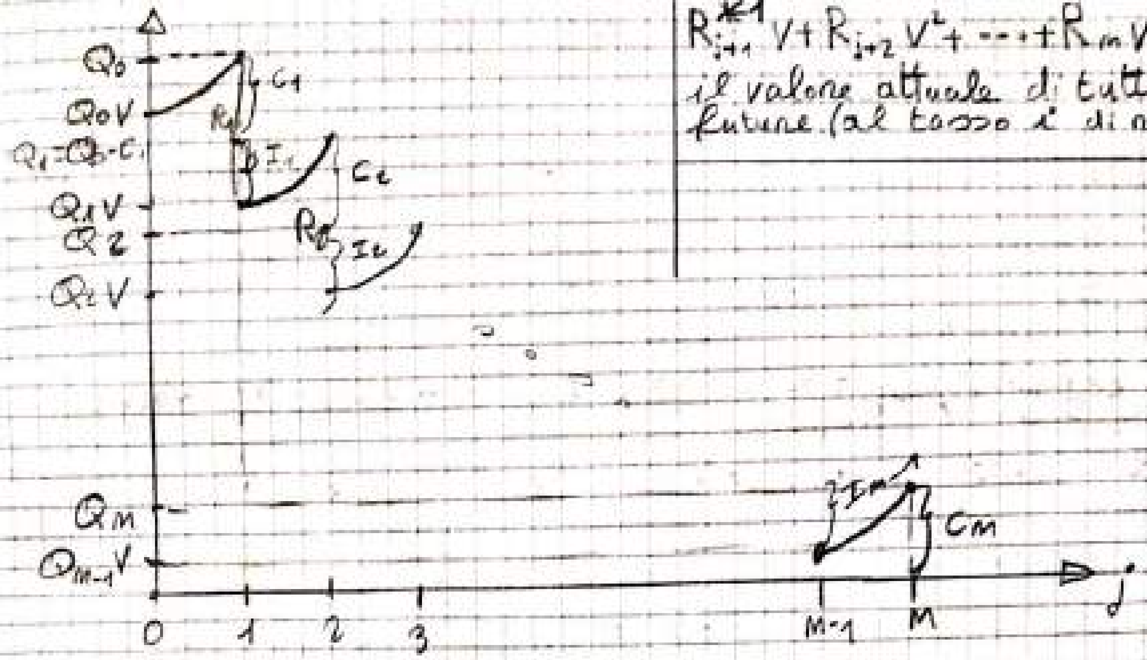
Ammortamenti progressivi a scadenze equintervallate ad interessi ANTICIPATI:

$t_j = j$, $j = 0, 1, \dots, m$ $\quad I_j = dQ_j \longrightarrow$
$R_0 = I_0$
$R_j = I_j + C_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$
$R_m = C_m$

$$\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_m \\ 0 & 1 & \dots & m \end{pmatrix}, \qquad C - R_0 = C - dC = C(1-d) = Cv$$

$$\begin{pmatrix} C(1-d) \\ 0 \end{pmatrix} \underset{i}{\sim} \begin{pmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

Condizione di chiusura finanziaria dell'operazione:
Il capitale iniziale è equivalente (al tasso tecnico i) al valore attuale di tutte le rate



$R_{j+1}^{*1} V + R_{j+2} V^2 + \dots + R_m V^{m-j}$: è il valore attuale di tutte le rate future (al tasso i di remunerazione)

j	R_j	C_j	I_j	Q_j
0	dQ_0	/	dQ_0	C
1	C_1+I_1	C_1	dQ_1	Q_0-C_1
⋮				
j	C_j+I_j	C_j	dQ_j	$Q_{j-1}-C_j$
⋮				
m	C_m	C_m	0	0

24 OTTOBRE 2018:

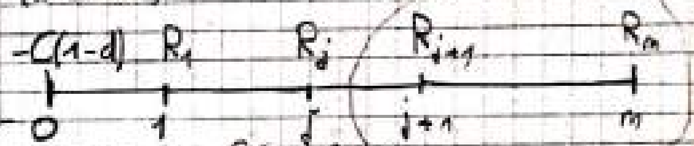
$Q_j = C_{j+1}+C_{j+2}+\dots+C_m \quad j=0,1,\dots,m-1$

$\Longleftrightarrow Q_j(1-d) = R_{j+1}^{*1} V + R_{j+2} V^2 + \dots + R_m V^{m-j} \quad j=0,1,\dots,m-1$

nel caso particolare di $j=0$:

Chiusura elementare $\Longleftrightarrow$ Chiusura finanziaria

"Pago" solo queste (incasso)



C'è solo AVERE e non AVERE-DARE perché gli importi sono tutti positivi.

FABBISOGNO dell'op. di AMMORTAMENTO (P.d.v. creditore)

(Si ricorda che $V=1-d$)

$$Q_j = R_{j+1} + R_{j+2}V + \dots + R_m V^{m-j-1} \Longleftrightarrow Q_j = R_{j+1}\frac{V}{V} + R_{j+2}\frac{V^2}{V} + \dots + R_m \frac{V^{m-j}}{V}$$

Dimostrazione: $\Longrightarrow$

$$R_{j+1} + R_{j+2}V + \dots + R_m V^{m-j-1} = (C_{j+1}+dQ_{j+1}) + (C_{j+2}+dQ_{j+2})V + \dots + C_m V^{m-j-1} = \boxed{0011}$$

$$= C_{j+1} + C_{j+2}V + \dots + C_m V^{m-j-1} + d(\overbrace{C_{j+2}+C_{j+3}+\dots+C_m}^{Q_{j+1}}) + d(\overbrace{C_{j+3}+\dots+C_m}^{Q_{j+2}})V + \dots$$

$$\dots + dC_m V^{m-j-2} = \quad \boxed{\text{dove } C_m V^{m-j-2} = Q_{m-1} \cdot V^{m-j-2}}$$

$$= C_{j+1} + C_{j+2}V + \dots + C_m V^{m-j-1} + dC_{j+2}\,\ddot{a}_{\overline{1}|i} + dC_{j+3}\,\ddot{a}_{\overline{2}|i} + \dots + dC_m\,\ddot{a}_{\overline{m-j-1}|i} =$$

poiché $(m-j-2+1)$

$$= C_{j+1} + C_{j+2}V + \dots + C_m V^{m-j-1} + dC_{j+2}\frac{1-V}{d} + dC_{j+3}\frac{1-V^2}{d} + \dots + dC_m\frac{1-V^{m-j-1}}{d} =$$

$$= C_{j+1} + \cancel{C_{j+2}V} + \dots + \cancel{C_m V^{m-j-1}} + C_{j+2} - \cancel{C_{j+2}V} + C_{j+3} - \cancel{C_{j+3}V^2} + \dots + C_m - \cancel{C_m V^{m-j-1}} =$$

$$= C_{j+1} + C_{j+2} + \dots + C_m = Q_j$$

$\Leftarrow$ $C_{j+1}+C_{j+2}+\dots+C_m=(R_{j+1}-dQ_{j+1})+(R_{j+2}-dQ_{j+2})+\dots+R_m=$ 00:23

$=R_{j+1}+R_{j+2}+\dots+R_m-d(R_{j+2}+R_{j+3}v+\dots+R_m v^{m-j-2})-d(R_{j+3}+R_{j+4}v+\dots+R v^{m-j-3})$

$\dots-dR_m=$

$=R_{j+1}+R_{j+2}+\dots+R_m-dR_{j+2}\ddot{a}_{\overline{1}|i}-dR_{j+3}\ddot{a}_{\overline{2}|i}-\dots-dR_m\ddot{a}_{\overline{m-j-1}|i}=$

Si fanno delle opportune semplificazioni con d — una rata in + perché è ANTICIPATA

$=R_{j+1}+\cancel{R_{j+2}}+\dots+\cancel{R_m}-\cancel{R_{j+2}}+R_{j+2}v-\cancel{R_{j+3}}+R_{j+3}v^2-\dots-\cancel{R_m}+R_m v^{m-j-1}$

$=Q_j \iff R_{j+1}+R_{j+2}v+R_{j+3}v^2+\dots+R_m v^{m-j-1}=Q_j$

00:34

Caso particolare quote capitale costanti e interessi anticipati
$\Rightarrow$ Ammortamento Tedesco. A volte per Amm. tedesco si intende uno schema di Amm. a interessi anticipati, C_j NON necessariamente COSTANTI.

$C_j=\frac{C}{m}$, $j=1,\dots,m$ $\quad Q_j=\frac{C}{m}(m-j)$, $j=0,\dots,m$

il debito residuo decresce in progressione aritmetica di ragione C/m

$I_j=dQ_j=d\frac{C}{m}(m-j)$, $j=0,\dots,m-1$ (in m viene 0) anche la quota interessi decresce in progressione aritmetica e la sua ragione è: $d\cdot C/m$.

$R_j=C_j+I_j=\frac{C}{m}[1+d(m-j)]$, $j=0,1,\dots,m$ le rate non decrescono tutte in progressione aritmetica, perché la prima rata è solo dQ_0 (pagabile in 0), la seconda rata è $\frac{C}{m}+dQ_1$.
quindi dalla seconda rata (pagabile in 1) decrescono in prog. aritmetica di ragione: $d\frac{C}{m}$

$C=50'000$ $\quad m=5$, $i=0,01$

$d=\frac{i}{1+i}\simeq 0.0099$ (0,99%)

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	495,05	495,05	/	50'000
1	10'396,04	396,04	10'000	40'000
2	10'297,03	297,03	10'000	30'000
3	10'198,02	198,02	10'000	20'000
4	10'099,01	99,01	10'000	10'000
5	10'000	0	10'000	0

00:46

nell'esempio $d=0{,}009901$

Si può stilare un piano di ammortamento simile a questo sulla sinistra ad interessi anticipati ma con rate costanti? NO!
- La 1ª rata è uguale alla sola quota interessi
- L'ultima rata deve essere uguale alla quota capitale

Questi 2 sono VINCOLI

00:48

Ammortamento Americano (a due tassi): Questo tipo di ammortamento deriva dalla combinazione di due piani di ammortamento:
- il primo è un ammortamento che prevede di restituire il capitale in fondo a scadenza in un'unica quota capitale pagando periodicam. gli interessi
- il secondo è un ammortamento dove il debitore versa delle rate in un deposito (per esempio). Quindi in realtà costituisce il capitale C da restituire in m, con rate COSTANTI

$$\begin{array}{ccccc} C & -iC & -iC & \cdots & -iC-C \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & m \end{array}$$

i: tasso tecnico di remunerazione

interessi pagati

Restituzione del capitale in un'unica quota pagata a scadenza, Periodicamente
Costituzione del capitale C da restituire in m (Rate COSTANTI)
Versamento delle rate nel deposito:

$$\begin{array}{ccccc} & -R & -R & \cdots & -R+C \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & m \end{array}$$

i': tasso di remunerazione del deposito
$\boxed{\text{con } i' < i}$

$$R\, s_{\overline{m}|i'} = C \Rightarrow R = \frac{C}{s_{\overline{m}|i'}} = C\,\sigma_{\overline{m}|i'}$$

La rata R è tale da costituire C in fondo.

Se si "sommano" le due operazioni precedenti si ottiene:

dove $R' = R + iC$

$$\begin{array}{ccccc} C & -R' & -R' & \cdots & -R' \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & m \end{array}$$

Ci sono alcuni motivi in cui è preferibile scegliere un piano di ammortamento americano piuttosto che un P.d.A. francese, ad esempio:

1. Il debitore (può anche essere un ente pubblico o una società) può aver bisogno di un Capitale ENORME e potrebbe non riuscire a trovare un unico creditore che glielo presta, quindi tipicamente si emettono delle OBBLIGAZIONI (BOND), cioè si fraziona il debito in una molteplicità di investitori che comprano le singole obbligazioni. Le obbligazioni sono dei titoli che danno il diritto a chi le acquista di ricevere il capitale a scadenza più gli interessi. Ogni compratore finanzia (in parte) il debitore unico. Le [illegible] di avere delle entrate graduali e quote costituire gradualmente le [illegible] importo da rimborsare in fondo per farlo versandolo via via in un deposito.
2. Un altro motivo (non tanto convincente) è di carattere fiscale, perché gli interessi passivi possono essere detratti nella dichiarazione dei redditi fino al 19% di essi stessi (sotto certe condizioni). Se si procedesse normalmente il capitale [illegible] sempre grande perché non si ammortizza e le quote interessi sono più alte rispetto a quelle che si avrebbero se il debito diminuisse, quindi si può beneficiare di questa riduzione fiscale. D'altro canto gli interessi attivi che si percepiscono sul deposito sono dei crediti che vengono tassati con un'aliquota del 26% perché sono rendite finanziarie provenienti da titoli di [illegible] o un deposito qualunque, se invece fossero state rendite che derivano da investimenti in titoli di stato o titoli emessi dalle poste l'aliquota è del 12.5%. A volte può prevalere la detrazione fiscale e a volte no.

Dal punto di vista pratico il debitore si indebita pagando delle rate costanti, ma a che tasso?

$$R' = R + iC = C\left(\sigma_{\overline{m}|i'} + i\right)$$

Quale è il tasso tecnico che rende equa l'operazione di ammortamento?

01:02

$R^{(i)} = C\,\alpha_{\overline{m}|i}$	$R' = C\left(\sigma_{\overline{m}|i'} + i\right) = C\left(\overbrace{\alpha_{\overline{m}|i'} - i'}^{\sigma_{\overline{m}|i'}} + i\right) =$
$R^{(i')} = C\,\alpha_{\overline{m}|i'}$	$\alpha = \sigma + i \Rightarrow \sigma = \alpha - i$ in generale
$i = \alpha_{\overline{m}|i} - \sigma_{\overline{m}|i}$	$\Leftrightarrow R' = C\,\alpha_{\overline{m}|i'} + C(i - i') \Leftrightarrow$
$i' = \alpha_{\overline{m}|i'} - \sigma_{\overline{m}|i'}$	$R' = R^{(i')} + C\underbrace{(i-i')}_{>0 \text{ poiché } i > i'} > R^{(i)}$

01:08

$$R' = C\left(\sigma_{\overline{m}|i'} + \alpha_{\overline{m}|i} - \sigma_{\overline{m}|i}\right) = \underbrace{C\,\alpha_{\overline{m}|i}}_{R^{(i)}} + C\underbrace{\left(\sigma_{\overline{m}|i'} - \sigma_{\overline{m}|i}\right)}_{>0}$$

Considerando: $i' < i$ allora

$$\Rightarrow s_{\overline{m}|i'} < s_{\overline{m}|i} \Rightarrow \frac{1}{s_{\overline{m}|i'}} > \frac{1}{s_{\overline{m}|i}}$$

quindi $R' > R^{(i)}$

Ammortamenti a tasso variabile: in questo tipo di ammortamento il tasso di remunerazione è variabile in maniera ALEATORIA e nel momento in cui si stipula, ad esempio, un contratto di mutuo non si sa quale sarà l'interesse che si pagherà in futuro perché il tasso che verrà applicato al debito residuo sarà agganciato a qualche variabile finanziaria che si osserverà in futuro. Per esempio il tasso potrebbe essere collegato al tasso di rendimento dei BOT a 3 mesi (questo stesso oppure questo + un certo numero di BASIS POINT). Un altro tasso di riferimento che viene utilizzato è il tasso EURIBOR nell'area Euro. EURIBOR è un tasso interbancario che viene applicato per le operazioni finanziarie tra banche. Analogamente in Gran Bretagna si definisce il LIBOR. Sia l'EURIBOR che il LIBOR sono tassi che vengono calcolati in regime di interesse semplice perché hanno durate brevi fino a massimo 1 anno. Dal punto di vista tecnico si accetta la ipotesi che il tasso di riferimento con il quale si andrà a calcolare la quota interessi immediatamente successiva sia noto un periodo prima della data del pagamento dell'interesse.

01:18

Ipotesi:

noto in 0: $i^{(0)} \rightarrow I_1$

noto in 1: $i^{(1)} \rightarrow I_2$

$\vdots$

Predeterminato: determinato appena sarà noto il valore

Nel contratto di mutuo che viene stipulato deve essere specificato in maniera chiara la modalità di calcolo degli interessi, in particolare qual è il tasso di riferimento, quando viene osservato e così via ... DEVE ESSERE TUTTO CHIARO!!

Fissate $C_1, C_2, \dots, C_m : C_1 + C_2 + \dots + C_m = C$

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	/	/	/	$C = Q_0$
1	$C_1 + I_1$	$i^{(0)} Q_0$	C_1	$Q_0 - C_1$
$\vdots$				
j	$C_j + I_j$	$i^{(j-1)} Q_{j-1}$	C_j	$Q_{j-1} - C_j$
m	$C_m + I_m$	$i^{(m-1)} Q_{m-1}$	C_m	0

Non si può pensare in questo caso di rispettare la condizione di CHIUSURA FINANZIARIA perché non si ha un tasso noto in 0 che rende il valore attuale dell'operazione di ammortamento uguale a C. Mentre vale ancora la condizione di CHIUSURA ELEMENTARE

29 OTTOBRE 2018:

1) 1° metodo: scadenze equidistanziate

$0 \longrightarrow$ noto $i^{(0)}$

$R_1 = C \, \alpha_{\overline{m}|i^{(0)}} \longrightarrow I_1 = i^{(0)} Q_0 \longrightarrow C_1 = R_1 - I_1$

$Q_1 = Q_0 - C_1$

le quote capitale successive sono calcolate in progressione geometrica di ragione il tasso $i^{(0)}$

$\boxed{C_j = C_{j-1}(1 + i^{(0)})}$ questa sequenza di quote rispetta la condizione di chiusura elementare

le quote capitale quindi vengono calcolate col tasso $i^{(0)}$ mentre le quote interessi coi successivi tassi. L'effetto è che la rata non sarà costante perché si otterrà sommando la quota capitale con le quote interessi che si calcoleranno coi tassi futuri (anziché $i^{(0)}$). Se i tassi non variassero, si avrebbe un ammortamento a rate costanti (tipo Francese). Il difetto di questo metodo è che le variazioni di tasso da un periodo all'altro vengono assorbite in blocco nella rata di quel periodo. Quindi la rata varia in funzione dell'interesse.

2) 2° metodo: tutte le rate, tranne l'ultima, vengono mantenute costanti.

$R_1 = C \, \alpha_{\overline{m}|i^{(0)}} \longrightarrow I_1 = i^{(0)} Q_0 \longrightarrow C_1 = R_1 - I_1 \rightarrow Q_1 = Q_0 - C_1$

$R_2 = R_1 \longrightarrow I_2 = i^{(1)} Q_1 \longrightarrow C_2 = R_1 - I_2 \rightarrow Q_2 = Q_1 - C_2$

$\vdots$

Non so quando sarà l'ultimo periodo di pagamento

Tutte le rate per un bel po' rimangono costanti, l'ultima rata, quando si è raggiunto l'ammortamento del debito nel senso che sono state pagate le quote capitali per cui vale la condizione di chiusura elementare, sarà in generale + piccola di R_1. Con questo metodo può succedere che il periodo di ammortamento rispetto a quello prefissato può allungarsi oppure accorciarsi. Per tenere la rata costante pago gli interessi dovuti più meno capitale (se il tasso rimane fermo). Potrebbe capitare ad esempio che tra un periodo ed un altro il tasso d'interesse aumenta di tanto e la quota interesse assume un valore maggiore della rata R_1, il che porterebbe a considerare una quota capitale negativa e conseguentemente c'è il pericolo che il debito residuo possa aumentare.

③ 3° metodo (metodo classico o metodo per inseguimento):
Le rate non sono costanti (similmente al 1° metodo) e rispetto al 1° metodo non variano troppo. A differenza del 1° metodo una variazione di tasso, da un periodo al suo successivo non viene interamente assorbita la quota interessi del periodo di riferimento ma viene spalmata su tutto il periodo residuo quindi se i tassi aumentano questo aumento si spalma su tutte le rate dal periodo considerato fino a scadenza.

In 0 si calcola: $R_1 = C\,\alpha_{\overline{m}|i^{(0)}} \rightarrow I_1 = i^{(0)} Q_0 \rightarrow C_1 = R_1 - I_1 \rightarrow Q_1 = Q_0 - C_1$
R_1, I_1, C_1, Q_1 vengono pagate in 1

In 1 si calcola: $R_2 = Q_1\,\alpha_{\overline{m-1}|i^{(1)}} \rightarrow I_2 = i^{(1)} Q_1 \rightarrow C_2 = R_2 - I_2 \rightarrow Q_2 = Q_1 - C_2$
R_2, I_2, C_2, Q_2 vengono pagate in 2

e così via ... ... non c'è il rischio che $C_2 < 0$ perché I_2 è calcolata con lo stesso tasso $i^{(1)}$ che è stato usato anche per calcolare R_2

Esempio numerico:
$C = 100'000 \quad m = 5$
$i^{(0)} = 0{,}1 \quad i^{(1)} = 0{,}12\ ; \ i^{(2)} = 0{,}09\ ; \ i^{(3)} = 0{,}02\ ; \ i^{(4)} = 0{,}2$

① 1° metodo

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	/	/		100'000
1	26'379,75	10'000	16'379,75	83'620,25
2	28'052,15	10'034,43	18'017,72	65'602,53
3	25'723,73	5'904,23	19'819,50	45'783,03
4	22'717,10	915,66	21'801,44	23'981,59
5	28'777,91	4796,32	23'981,59	0

$R_1 = 100'000\,\alpha_{\overline{5}|0,1}\ *^1$
le quote capitale le calcolo in 0
$*^1 = 26'379,75$

② 2° metodo

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	/	/	/	100'000
1	26'379,75	10'000	16'379,75	83'620,25
2	26'379,75	10'034,43	16'345,32	67'274,93
3	26'379,75	6'054,74	20'325,00	46'949,93
4	26'379,75	939,00	25'440,75	21'509,18
5	25'811,02	4'301,84	21'509,18	0

In questo caso $C_5 = Q_4$ per rispettare la condizione di CHIUSURA ELEMENTARE

00:40

Se la durata fosse stata di 30 anni

$R_1 = 100'000 \cdot \alpha_{\overline{30}|0,1}$

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	/	/	/	100'000
1	26'379,75	10'000	16'379,75	83'620,25
2	27'530,67	10'034,43	17'496,24	66'124,01
3	26'122,60	5'951,16	20'171,44	45'952,57
4	23'667,85	919,05	22'748,80	23'203,77
5	27'844,52	4'640,75	23'203,77	0

3) 3° metodo

$R_3 = 66'120,01 \cdot \alpha_{\overline{3}|0,1}$

$R_4 = 45'952,57 \cdot \alpha_{\overline{2}|0,1}$

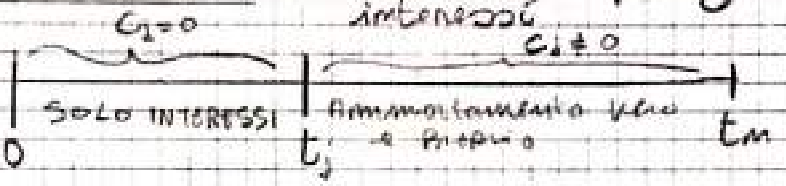
$R_5 = 23'203,77 \cdot \alpha_{\overline{1}|0,1}$

01:04

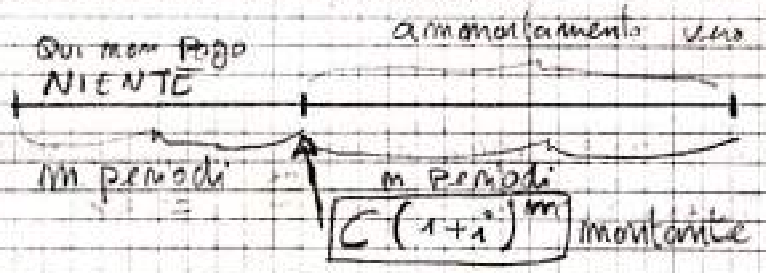
01:10

Altri tipi di ammortamenti non standard:

Preammortamento: all'inizio vengono pagati solo gli interessi



Ammortamento con ritardo:



Quando si parte con l'ammortamento vero e proprio si ammortizza non il debito iniziale C ma il montante $C(1+i)^m$

$t_0 = 0$ $\quad t_m \quad 0 = t_0 \leq t \leq t_m$

Valutazione degli IMPEGNI (dal p.d.v. del debitore) futuri:

01:15

i (tecnico, remunerazione)

i': tasso di valutazione

01:18

Si potrebbe ad un certo punto NEGOZIARE il debito. Ad esempio il debitore che ha stipulato un contratto di mutuo per 20 anni, vince "magicamente" alla lotteria e decide di voler pagare i suoi debiti residui prima della scadenza estinguendo subito il debito. Quindi si negozia il debito con l'istituto di credito per chiudere tutto subito, oppure cedere il debito ad una terza parte provvedendo al pagamento immediato di quest'ultima che si impegnerà a pagare a sua volta le rate.

La negoziazione può avvenire anche da parte del creditore.

- Il creditore che ha il diritto di ricevere le rate future (crediti) e vuole avere i soldi subito, trova qualcun altro a cui cede il suo credito e quest'altro soggetto paga subito il creditore. Se la valutazione avviene ad un'epoca successiva alla stipula del contratto sarà al nuovo tasso i' prevalente in quel momento secondo anche le condizioni del mercato.

Valore residuo in t, $V(t)$: Valore attuale, al tasso i', delle rate future
Usufrutto in t, $U(t)$: Valore attuale, al tasso i', delle q. interessi future
Nuda proprietà in t, $P(t)$: Valore attuale, al tasso i', delle q. capitale future
con i' tasso di valutazione
Se $t = t_j$ non includo rate, quote ... dovute in t_j
Se $t_j \leq t < t_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{pmatrix} V(t) \\ t \end{pmatrix} \underset{i'}{\sim} \begin{pmatrix} R_{j+1} & \dots & R_m \\ t_{j+1} & \dots & t_m \end{pmatrix} \qquad V(t) = \sum_{k=j+1}^{m} R_k v'^{\,t_k - t} \to \text{Sconto}$$

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ t \end{pmatrix} \underset{i'}{\sim} \begin{pmatrix} I_{j+1} & \dots & I_m \\ t_{j+1} & \dots & t_m \end{pmatrix} \qquad U(t) = \sum_{k=j+1}^{m} I_k v'^{\,t_k - t} \to \text{Sconto}$$

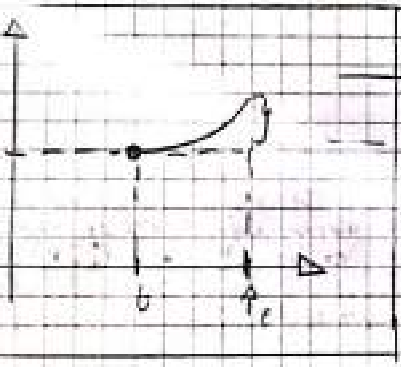
$$\begin{pmatrix} P(t) \\ t \end{pmatrix} \underset{i'}{\sim} \begin{pmatrix} C_{j+1} & \dots & C_m \\ t_{j+1} & \dots & t_m \end{pmatrix} \qquad P(t) = \sum_{k=j+1}^{m} C_k v'^{\,t_k - t} \to \text{Sconto}$$

con $v' = \frac{1}{1+i'}$

30 OTTOBRE 2018:

$t_0 \leq t \leq t_m \Rightarrow V(t) = U(t) + P(t)$ il valore residuo è la somma di Usufrutto e Nuda Proprietà
t_0: data di stipula del contratto
t_m: scadenza

Avevamo definito a suo tempo l'usufrutto come il valore (ad un certo istante T) di tutti i futuri movimenti d'interesse man mano che si formano



→ Nel regime esponenziale gli interessi si formano istante per istante.
La differenza sta che stavolta invece di prenderli istante per istante gli interessi (nel continuo) li prendiamo in blocco cioè nella data in cui vengono pagati

00:07

$t_j \leq t \leq t_{j+1}$ "Scindibilità"

$V(t) = V(t_j)(1+i')^{t-t_j}$; $V_j = V(t_j)$ $\quad t_j = j \ \forall j$
$U(t) = U(t_j)(1+i')^{t-t_j}$; $U_j = U(t_j)$ $\quad j \leq t < j+1$
$P(t) = P(t_j)(1+i')^{t-t_j}$; $P_j = P(t_j)$ $\quad j = \lfloor t \rfloor$ max intero $\leq t$

dove $\lfloor t \rfloor$ è la PARTE INTERA di t ovvero il max intero $\leq t$

$V(t) = V(\lfloor t \rfloor)(1+i')^{t - \lfloor t \rfloor}$
$U(t) = U(\lfloor t \rfloor)(1+i')^{t - \lfloor t \rfloor}$
$P(t) = P(\lfloor t \rfloor)(1+i')^{t - \lfloor t \rfloor}$

00:12

Ammontamenti a interessi posticipati:

$Q_j = V_j \quad i' = i$

$Q_j > V_j \quad i' > i$

$Q_j < V_j \quad i' < i$

Ammortamenti a interessi anticipati: $Q_j(1-d) = Q_j - dQ_j = Q_j - I_j$

$Q_j - I_j = V_j \quad i' = i$

$Q_j - I_j > V_j \quad i' > i$

$Q_j - I_j < V_j \quad i' < i$

Ammortamenti a quota capitale costante (e scadenze equidistanziate):

- $C_k = \frac{C}{m} \quad k = 1, \dots, m \qquad P_j = \frac{C}{m} a_{\overline{m-j}|i'} \quad j = 0, 1, \dots, m-1$
- $Q_j = \frac{C}{m}(m-j)$: somma delle quote capitale rimanenti; $m-j$ è il numero delle quote capitale ancora da pagare

somma decrescente in progressione aritmetica di ragione $\frac{C}{m}$

① Ammortamento tedesco (interessi anticipati):

$I_k = d\,Q_k = d\frac{C}{m}(m-k), \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \qquad$ posto $v_1 = \frac{1}{1+i'}$

$U_j = \sum_{k=j+1}^{m-1} I_k v_1^{k-j} = \sum_{K=1}^{m-j-1} I_{j+K} v_1^K = \sum_{K=1}^{m-j-1} \frac{dC}{m}(m-j-K)v_1^K =$

$= \sum_{K=1}^{m-j-1} \frac{dC}{m}(m-j)v_1^K - \sum_{K=1}^{m-j-1} \frac{dC}{m} K v_1^K = \frac{dC}{m}\sum_{K=1}^{m-j-1}(m-j)v_1^K - \frac{dC}{m}\sum_{K=1}^{m-j-1} K v_1^K \iff$

$\iff U_j = d\frac{C}{m}(m-j)\,a_{\overline{m-j-1}|i'} - d\frac{C}{m}(Ia)_{\overline{m-j-1}|i'}$

② Ammortamento italiano (interessi posticipati):

$I_k = i\,Q_{k-1} = i\frac{C}{m}(m-k), \quad k = 1, \dots, m \qquad$ posto $v_1 = \frac{1}{1+i'}$

$U_j = \sum_{k=j+1}^{m} I_k v_1^{k-j} = \sum_{K=1}^{m-j} I_{j+K} v_1^K = \sum_{K=1}^{m-j} \frac{iC}{m}(m-j-K)v_1^K =$ dopo alcuni passaggi simili a quelli visti in ① ...

$= \frac{iC}{m}\sum_{K=1}^{m-j}(m-j)v_1^K - \frac{iC}{m}\sum_{K=1}^{m-j} K v_1^K$

$U_j = \frac{iC}{m}(m-j)\,a_{\overline{m-j}|i'} - \frac{iC}{m}(Ia)_{\overline{m-j}|i'}$

③ Ammortamento francese (rata costante, interessi posticipati):

$V_j = R\,a_{\overline{m-j}|i'} \qquad C_j = R v^{m-j+1} \qquad P_j = \sum_{k=j+1}^{m} C_j (1+i)^{k-j} v_1^{k-j} = \sum_{K=1}^{m-j} C_j (1+i)^K v_1^K \dots$

$U_j = V_j - P_j$

$U_j = $

Formula di Makeham:

⇒ ammortamenti a interessi posticipati e scadenze equintervallate

$$\begin{pmatrix} V_j \\ j \end{pmatrix} \underset{i'}{\sim} \begin{pmatrix} I_{j+1} & I_{j+2} & & I_m \\ j+1 & j+2 & & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iQ_j & iQ_{j+1} & & iQ_{m-1} \\ j+1 & j+2 & & m \end{pmatrix} \underset{i'}{\sim} \text{ a capo...}$$

$$\underset{i'}{\sim} \begin{pmatrix} iC_{j+1} & & \\ iC_{j+2} & iC_{j+2} & \\ \vdots & \vdots & \\ iC_m & iC_m & iC_m \\ j+1 & j+2 & m \end{pmatrix} \underset{i'}{\sim} \begin{pmatrix} iC_{j+1}a_{\overline{1}|i'} + iC_{j+2}a_{\overline{2}|i'} + \dots + iC_m a_{\overline{m-j}|i'} \\ j \end{pmatrix}$$

$\boxed{00{:}40}$ Per le varie proprietà si ottiene che...

$$V_j = iC_{j+1}a_{\overline{1}|i'} + iC_{j+2}a_{\overline{2}|i'} + \dots + iC_m a_{\overline{m-j}|i'} =$$

$$= i\left(C_{j+1}\frac{1-v_1}{i'} + C_{j+2}\frac{1-v_1^2}{i'} + \dots + C_m\frac{1-v_1^{m-j}}{i'}\right) =$$

$$= \frac{i}{i'}\Big(\underbrace{C_{j+1} + C_{j+2} + \dots + C_m}_{Q_j}\Big) - \Big(\underbrace{C_{j+1}v_1 + C_{j+2}v_1^2 + \dots + C_m v_1^{m-j}}_{P_j}\Big)\Big) =$$

$$= \frac{i}{i'}(Q_j - P_j) = V_j \Rightarrow \text{Formula di Makeham:}$$

$$V_j = P_j + \frac{i}{i'}(Q_j - P_j) \quad j = 0,1,\dots,m-1$$

nel caso dell'ammortamento italiano: $\boxed{00{:}52}$

$$P_j = \frac{C}{m}a_{\overline{m-j}|i'} \qquad Q_j = (m-j)\frac{C}{m} \qquad V_j = \frac{i}{i'}\frac{C}{m}\left(m-j-a_{\overline{m-j}|i'}\right)$$

nel caso dell'ammortamento francese:

$$V_j = Ra_{\overline{m-j}|i} \qquad Q_j = Ra_{\overline{m-j}|i} \qquad V_j = P_j + \frac{i}{i'}(Q_j - P_j)$$

$$i'V_j = i'P_j + iQ_j - iP_j \Leftrightarrow P_j(i'-i) = i'V_j - iQ_j$$

se $i' \neq i$: $P_j = \dfrac{i'V_j - iQ_j}{i'-i} = R\dfrac{(i'a_{\overline{m-j}|i} - ia_{\overline{m-j}|i})}{i'-i} = \dfrac{R\left(i'\frac{1-v_1^{m-j}}{i'} - i\frac{1-v^{m-j}}{i}\right)}{i'-i}$

$$= R\frac{v^{m-j} - v_1^{m-j}}{i'-i}$$

se $i' = i$ ci sono 2 strade:

- o si calcola direttamente sfruttando la progressione geometrica
- oppure si può calcolare direttamente dal risultato precedente facendo $\lim_{i' \to i}$ $*1$

$$Rv^{m-j+1} \to P_j = C_j\sum_{k=1}^{m-j}\left((1+i)v_1\right)^k \qquad i = i' \to (1+i)v_1 = 1$$

$$= (m-j)C_j = Rv^{m-j+1}(m-j)$$

$*1$ $\lim_{i' \to i} R\dfrac{v^{m-j} - v_1^{m-j}}{i'-i}$ ci si ritroverebbe con una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ quindi si applica De l'Hôpital e si arriva ad un risultato accettabile

Se si parte da $V_i = P_i + \frac{i}{i'}(Q_i - P_i) \left(-Q_i\right) + Q_i$ togliamo e aggiungiamo

$= Q_i + (Q_i - P_i)\left(\frac{i}{i'} - 1\right) = Q_i + (Q_i - P_i)\frac{i-i'}{i'}$

$$\boxed{V_i = Q_i + (Q_i - P_i)\frac{i-i'}{i'}}$$

01:04

$$V_i = Q_i + \underbrace{(Q_i - P_i)}_{>0 \text{ se } i > 0} \frac{i-i'}{i'}$$

→ P: calcolato rendimento denaro

01:08

Prestiti divisi:

- Emissione di un prestito obbligazionario

1 obbligazione, bond, buono: è un titolo di credito

- Esempio: debito di 5'000'000'000'000 €
- N = 5'000'000'000 obbligazioni di valore nominale di 1000€
- DEBITORE → UNICO
  mutuatario, o emittente

  CREDITORI → TANTI
  mutuanti, possessori, titolari, portatori della obbligazione, obbligazionisti

- Nel momento in cui il debitore prende in prestito emettendo il prestito obbligazionario, l'emissione di solito avviene tramite intermediari finanziari.
- Mercato primario (→ tramite intermediari) tipicamente banche.

Un soggetto che possiede un'obbligazione può averla comprata sul mercato quando l'obbligazione c'è già oppure può averla acquistata al momento del collocamento del prestito. Titoli negoziabili nei Mercati Secondari.

I mercati secondari possono essere:

- Mercati regolamentati: per esempio per i titoli di stato c'è il MOT (Mercato obbligazionario telematico) (segmento della Borsa)
- mercati non regolamentati: per esempio OTC (Over the Counter)

01:23

Nel momento in cui viene emesso il prestito obbligazionario le banche collocano le obbligazioni tra i vari risparmiatori, quindi chi compra un'obbligazione all'emissione presta del denaro alla società (oppure allo stato) e il prezzo di acquisto è il prestito effettivo. Dopodiché l'obbligazione dà il diritto di ricevere gli interessi e il capitale indietro. Questo titolo eventualmente può essere negoziato dopo l'emissione. Non è detto però che nel momento in cui si compra l'obbligazione quello si paga all'inizio coincide col capitale che si presta (Valore nominale ⊂ quello dove vengono calcolati gli interessi). Solitamente per le obbligazioni private il valore della obbligazione all'emissione coincide col valore nominale, ma non sempre.

ESEMPI:

① Valore nominale: 100€ Valore all'emissione: 95€

L'obbligazione è quotata SOTTO LA PARI (ricevo gli interessi su 100€ e la restituzione di 100€)

② Valore nominale: 100€ Valore all'emissione: 105€

L'obbligazione è quotata SOPRA LA PARI

③ Valore nominale: 100€ Valore all'emissione: 100€ ALLA PARI

31 OTTOBRE 2018: c: valore nominale di ogni (c piccolo)

$C = Nc$

$C_1, C_2, \dots, C_m : C_1 + C_2 + \dots + C_m = C$ con i chiusi

multipli di c (c piccolo)

- Zero coupon bonds: niente quota interessi (cedola)
- Coupon bonds: pagamento interessi posticipati alla fine di ogni periodo e restituzione capitale a scadenza.
- Sinking-fund bonds: obbligazioni che prevedono una restituzione parziale del capitale nel tempo (+ diffuse nel mercato americano). Sinking letteralmente vuol dire "affondare" ma in questo caso vuol dire "ammortizzare". Poco diffuse.

Se il debitore volesse fare un ammortamento progressivo emettendo obbligazioni di tipo coupon bonds potrebbe spaccare il prestito in tanti prestiti. Emettere tanti prestiti obbligazionari

$C_1 = N_1 c, \dots, C_m = N_m c \rightarrow N_1 + N_2 + \dots + N_m = N$

N_1 obbligazioni con scadenza 1
N_2 obbligazioni con scadenza 2
⋮
N_m obbligazioni con scadenza m

⇒ hanno lo stesso valore nominale c ma le scadenze sono diverse

Alla fine del primo anno ci sono in ballo tutte le obbligazioni quindi il debitore paga gli interessi su tutte le obbligazioni $(N_1, N_2, \dots, N_m)$ cioè sulle N obbligazioni, quindi l'interesse su $Nc = C$ che è il debito iniziale Q_0, oltre a pagare gli interessi il debitore rimborsa il valore nominale C_1 (ci grande) che è quello dell'N_1 obbligazioni che scadono in 1. Alla fine del secondo anno ci sono $(N - N_1)$ obbligazioni di valore nominale $(C - C_1) = Q_1 = (Q_0 - C_1)$ su tutte queste si pagano gli interessi e si rimborsano quelle che scadono in 2 e che hanno valore nominale C_2 e così ... di fatto è come avere un ammortamento progressivo con quote capitale.

Un'altra modalità utilizzata è quella di emettere un unico prestito obbligazionario (obbligazioni tutte uguali e non differenziate). Si emettono N obbligazioni ciascuna al valore nominale c (ci piccolo) con una clausola. Questa clausola è quella del RIMBORSO ANTICIPATO. Questa clausola di rimborso anticipato è prevista a livello contrattuale. La scelta delle obbligazioni da rimborsare anticipatamente avviene mediante SORTEGGIO, quindi alla fine del primo periodo verranno sorteggiate:

N_1 obbligazioni da rimborsare in 1
N_2 obbligazioni da rimborsare in 2
⋮
N_{m-1} obbligazioni da rimborsare in $m-1$
N_m obbligazioni da rimborsare in m

$$\begin{array}{cccccc} C & -(C_1+I_1) & -(C_2+I_2) & \dots & -(C_m+I_m) \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & m \end{array}$$

(dal punto di vista del debitore)

Operazione di ammortamento a interessi posticipati.

Nella pratica potrebbe capitare che il capitale che si riceva all'inizio non sia C (ci piccolo) ma sia un po' più piccolo di c, comunque c è il valore nominale ed è il valore sul quale vengono calcolati gli interessi al tasso nominale i. Quindi se quello che ricevo è diverso da c il tasso che rende equa l'operazione sarà un tasso diverso da i

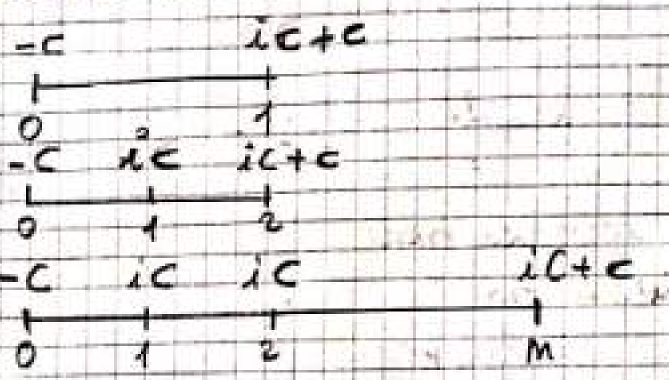
Dal punto di vista del creditore si ha un'operazione di durata aleatoria

(1) sorteggio in 1

(2) sorteggio in 2

⋮

(m) mai sorteggiata



00:21

V_0, U_0, P_0 diventano quantità aleatorie che prendono come possibili determinazioni

m possibili determinazioni: $\underbrace{V_0^{(h)}, U_0^{(h)}, P_0^{(h)}}$, $h = 1, \dots, m$

unico quota capitale — quota interessi — rimborso/estrazioni all'epoca h

$$P_0^{(h)} = C v_1^{\,h}, \quad U_0^{(h)} = iC\, a_{\overline{h}|i'}, \quad V_0^{(h)} = C v_1^{\,h} + iC\, a_{\overline{h}|i'}$$

debito residuo a_0

applicando la formula di Makeham: $U_0^{(h)} = \frac{i}{i'}\left(C - P_0^{(h)}\right)$

quindi...

$$V_0^{(h)} = P_0^{(h)} + \frac{i}{i'}\left(C - P_0^{(h)}\right) + C - C \iff \left(C - P_0^{(h)}\right)\frac{i}{i'} - \left(C - P_0^{(h)}\right) + C$$

sommiamo e sottraiamo C

$$V_0^{(h)} = C - \left(C - P_0^{(h)}\right)\frac{i' - i}{i'}$$

00:29

Ma se si vuole valutare l'obbligazione in 0 è più opportuno dare una valutazione sintetica per trovare un prezzo per questa obbligazione da vendere. Si potrebbero calcolare le quantità medie di V_0, U_0, P_0 o valori attesi o speranze matematiche con pesi le probabilità di sorteggio.

$$V_0^* = E[V_0] = \sum_{h=1}^{m} V_0^{(h)} \frac{N_h}{N}, \quad P_0^* = E[P_0] = \sum_{h=1}^{m} P_0^{(h)} \frac{N_h}{N},$$

$$U_0^* = E[U_0] = \sum_{h=1}^{m} U_0^{(h)} \frac{N_h}{N} \Rightarrow V_0^* = U_0^* + P_0^*$$

la valutazione avviene in 0 (quindi a denominatore è sempre N)

$\sum_{h=1}^{m} \frac{N_h}{N} = 1$. Se per esempio l'obbligazione viene estratta in 1 in 2 non c'è più quindi $\frac{N_2}{N} = 0$, $\frac{N_3}{N} = 0$, ... tutte zero

$$V_0^* = \sum_{h=1}^{m}\left[C - \left(C - P_0^{(h)}\right)\frac{i'-i}{i'}\right]\frac{N_h}{N} = \sum_{h=1}^{m}\left[C - C\frac{i'-i}{i'} + P_0^{(h)}\frac{i'-i}{i'}\right]\frac{N_h}{N} =$$

$$= \underbrace{\sum_{h=1}^{m} C\frac{N_h}{N}}_{C} - \underbrace{\sum_{h=1}^{m} C\frac{i'-i}{i'}\frac{N_h}{N}}_{C\frac{i'-i}{i'}} + \underbrace{\sum_{h=1}^{m} P_0^{(h)}\frac{i'-i}{i'}\frac{N_h}{N}}_{P_0^*\frac{i'-i}{i'}} = V_0^* \quad \text{quindi...}$$

FORMULA DI ACHARD (per la valutazione iniziale):

$$V_0^* = C - \frac{i'-i}{i'}\underbrace{\left(C - P_0^*\right)}_{>0} \quad \text{dato che } P_0^* = \sum_{h=1}^{m} P_0^{(h)}\frac{N_h}{N}$$

00:44

e $P_0^{(h)} = C v_1^{\,h}$ che rispetto a C è $P_0^{(h)} < C \quad \forall h$

quindi quando si calcola la media P_0^* di quantità tutte più piccole di c, anche la media sarà più piccola di c
essendo $P_0^{(1)} < P_0^* < P_0^{(m)}$ quindi possiamo inoltre confermare:

$$\boxed{V_0^* \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} c \quad \text{quando} \quad i' \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} i}$$

Quando il valore della quotazione V_0^*...

$V_0^* < c$	SOTTO la pari
$V_0^* = c$	ALLA pari
$V_0^* > c$	SOPRA la pari

$U_0^* = \frac{i}{i'}(c - P_0^*)$, $V_0^* = P_0^* + \frac{i}{i'}(c - P_0^*)$ **00:48**

V_j^*, P_j^*, U_j^*, $j = 1, \dots, m-1$ la valutazione ha senso solamente per le obbligazioni ancora in circolazione

$N - N_1 - N_2 \dots - N_j = N_{j+1} + N_{j+2} + \dots + N_m = L_j$

V_j, U_j, P_j valori aleatori degli impegni futuri in j

$V_j^{(h)}$, $U_j^{(h)}$, $P_j^{(h)}$, $h = j+1, j+2, \dots, m$

$P_j^{(h)} \dots$ $U_j^{(h)} = i c\, a_{\overline{h-j}|i'}$, $V_j^{(h)} = P_j^{(h)} + U_j^{(h)}$ **00:54**

$V_j^{(h)} = P_j^{(h)} + U_j^{(h)} = c - \frac{i'-i}{i}(c - P_j^{(h)})$

V_j^*, P_j^*, U_j^* probabilità di sorteggio in h: $\frac{N_h}{L_j}$, $h > j$

tutto come prima → al posto del pedice 0 il pedice j...

$$\boxed{\text{FORMULA DI ACHARD: } V_j^* = c - \frac{i'-i}{i'}(c - P_j^*)}$$

oppure $V_j^* = P_j^* + \frac{i}{i'}(c - P_j^*)$

01:00

Se per il debitore l'ammortamento è a quota capitale COSTANTE

$N_h = \frac{N}{m}$ $\quad C_h = \frac{C}{m} = N_h c = N_h \frac{C}{N}$

in $j = 0$ la prob. di sorteggio $\frac{N_h}{N} = \frac{1}{m}$

$P_0^* = \sum_{h=1}^{m} c v_1^h \cdot \frac{1}{m} = \frac{c}{m} a_{\overline{m}|i'}$ $\quad \boxed{U_0^* = \frac{i}{i'}(c - P_0^*)}$

in dato j generico $\quad L_j = \frac{N}{m}(m-j)$ la prob. di sorteggio: $\frac{N_h}{L_j}$

$\frac{N_h}{L_j} = \frac{\frac{N}{m}}{\frac{N}{m}(m-j)} = \frac{1}{m-j}$; $P_j^* = \sum_{h=j+1}^{m} c v_1^{h-j} \frac{1}{m-j} = \sum_{k=1}^{m-j} c v_1^k \frac{1}{m-j} = \frac{c}{m-j} a_{\overline{m-j}|i'}$

U_j^* con ACHARD

(obbligazioni chiamate sorteggio) 01:10

Obbligazioni in circolazione in j:

<u>VITA MEDIA dell'obbligazione</u>: $Z_j = \sum_{k=j+1}^{m} (k-j) \frac{N_k}{L_j}$

<u>VITA MATEMATICA dell'obbligazione</u>: $Z_j' = \frac{\ln\left(\sum_{k=j+1}^{m} V_1^{k-j} \frac{N_k}{L_j}\right)}{\ln V'}$

è quel numero tale per cui se

$V_1^{Z_j'} = \sum_{k=j+1}^{m} V_1^{k-j} \frac{N_k}{L_j}$ Se l'epoca di rimborso dell'obbligazione fosse Z_j' la durata residua sarebbe certa e la vita matematica è quella durata CERTA che renderebbe la nuda proprietà come P_j^*

moltiplicando per "C"

$$C V_1^{Z_j'} = \underbrace{\sum_{k=j+1}^{m} C V^{k-j} \frac{N_k}{L_j}}_{P_j^*} = \sum_{k=j+1}^{m} P_j^{(k)} \frac{N_k}{N} = P_j^*$$

01:16

Epoca di rimborso $Z_j' + j$

$Z_j' \not\uparrow i'$ dimostrazione nel libro Daboni De Ferra

$\lim_{i' \to 0} Z_j' = Z_j$ si dimostra applicando de l'Hôpital

$\lim_{i' \to \infty} Z_j' = 1$ anche questo con De l'Hôpital
principio sostituzione infinitesimi

$$1 < Z_j' < Z_j$$

01:20

iC $\quad$ iC

C $\quad$ talvolta $\bar{C} \neq C$ (Spesso $\bar{C} > C$ rimborso sopra la pari $\to \bar{C} - C$: premio di rimborso)

$iC = \bar{i}\bar{C} \to \bar{i} = \frac{iC}{\bar{C}}$ $\qquad$ $\bar{C}, \bar{i}$ Si lavora esattamente come prima con le nuove quantità

▼ relazione tra le cedole

5 NOVEMBRE 2018:

$x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n$

$t_0 \quad t_1 \quad \dots \quad t_n$

$\|$
0

<u>a pronti</u>: Se l'importo $X_0 \neq 0$, cioè c'è scambio di denaro nel momento in cui si stipula il contratto.

<u>a termine</u>: Se l'importo $X_0 = 0$ cioè non c'è scambio di denaro nel momento in cui si stipula il contratto

Si consideri $T = t_0 = 0$

Valore Attuale Netto dell'operazione finanziaria: Saldo dell'operazione finanziaria in 0. Si chiama Valore attuale perché ci si mette all'epoca iniziale e tutti gli importi sono esigibili in epoche successive a t_0 (in questo contesto si tiene conto di TUTTI gli importi quindi anche di quello esigibile in t_0). Netto perché si fa una "somma algebrica" tra il valore attualizzato degli introiti e il valore attualizzato dei costi. Introiti al netto dei costi

VAN oppure Discounted Cash Flow (DCF)

Per calcolare il VAN bisogna fissare un regime → solitamente regime esponenziale e poi scegliere $\bar{i}$, $\delta = \ln(1+i)$, $V = \frac{1}{1+i}$ il VAN dipende da queste quantità. funzione di V

W da adesso in poi sarà il VAN e non più il Saldo

$W(v) = \sum_{j=0}^{m} x_j v^{t_j}$ <u>Valore Attuale Netto</u>

<u>Tasso Interno di Rendimento</u> (TIR): quel tasso [00:09]
i^*, se $\exists !$, $\in I$ (intervallo) : $W\left(\frac{1}{1+i^*}\right) = 0$ posto $v^* = \frac{1}{1+i^*}$

$$W(v^*) = 0$$

Precisiamo I: Se si accoglie il postulato di rendim del denaro

$I = \{i > 0\} \Rightarrow 0 < v < 1$

a volte il tasso potrebbe essere negativo (come in questi tempi) quindi NO POSTULATO REND. DENARO e deve essere ≥ -1

quindi: [00:15]

- $I = \{i > 0\} \rightarrow 0 < v < 1$
- $I = \{i \geq 0\} \rightarrow 0 < v \leq 1$
- $I = \{i \geq -1\} \rightarrow v > 0$

[00:18]

Condizioni sufficienti per <u>l'esistenza del TIR</u>:

operazione di puro <u>investimento</u> con un unico esborso iniziale e tutti gli altri sono introiti

$x_0 < 0$ ($C_0 = -x_0 > 0$), $x_j > 0 \ \forall j \geq 1$ $\sum_{j=1}^{m} x_j > C_0$
costo iniziale

<u>La somma degli introiti superi l'esborso iniziale</u> !!!

W è una FUNZIONE CONTINUA

$\lim_{v \to 0} W(v) = -C_0$ dove $-C_0 < 0$, $\lim_{v \to 1} W(v) = \sum_{j=1}^{m} x_j - C_0 > 0$

$W(v) = -C_0 + \sum_{j=1}^{m} x_j v^{t_j} \xrightarrow{v \to 0} 0$, $\xrightarrow{v \to 1} \sum_{j=1}^{m} x_j$

Teorema degli zeri:
Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
con $f(a) < 0 < f(b)$
allora esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che
$f(x_0) = 0$

Per il teorema degli zeri

$\Rightarrow \exists \ v \in]0, 1[: W(v) = 0$

$W'(v) = \sum_{j=1}^{m} x_j t_j v^{t_j - 1} > 0 \Rightarrow W$ strettamente crescente
$\Rightarrow$ il suo zero è UNICO

v^* è UNICO $\Rightarrow v^* \Rightarrow TIR = \frac{1}{v^*} - 1$ (>0)

Operazione di puro finanziamento con un unico introito iniziale e tutti gli altri sono esborsi

$x_0 > 0$, $x_j < 0$ $\forall j \geq 1$ <u>La somma degli esborsi è maggiore dell'introito iniziale</u> !!!

$-\sum_{j=1}^{m} x_j > x_0 \longrightarrow$ W è una funzione continua

continua $\longrightarrow$

$$W(v) = x_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i v^{t_i} \quad \xrightarrow{v \to 0} 0 \qquad \xrightarrow{v \to 1} \sum_{i=1}^{m} x_i$$

$\lim_{v \to 0} W(v) = x_0 > 0$

$\lim_{v \to 1} W(v) = \sum_{i=1}^{m} x_i + x_0 < 0$ → W strett. decrescente → il suo zero è UNICO

Per il teorema degli zeri ⇒ $W(v) = 0$ 00:31

$W'(v) = \sum_{i=1}^{m} t_i x_i^{t_i - 1} < 0$ perché stavolta gli x_i sono tutti negativi

Per ∃! possiamo affermare che il TIR esiste

Operazione di investimento:

Se si calcola la DERIVATA SECONDA in realtà non si può dire niente a priori circa il segno della derivata seconda, potrebbe succedere di tutto ma...

$$W''(v) = \sum_{i=1}^{m} x_i t_i (t_i - 1) v^{t_i - 2}$$

Se per esempio:

$t_1 > 1$: Se $t_1 > 1$ tutte le altre date a seguire sono maggiori di 1, quindi tutte le t_i e le $t_i - 1$ sarebbero POSITIVE ⇒ $W''(v) > 0$

$t_1 = 1$: $t_1 - 1 = 0$ e la funzione sarebbe LINEARE ⇒ $x_0 + x_1 v$

$t_1 = 1$, $m > 1$: La $W''(v) > 0$ quindi $W(v)$ strettamente CONVESSA

⇓ $W''(v) > 0$, W convessa

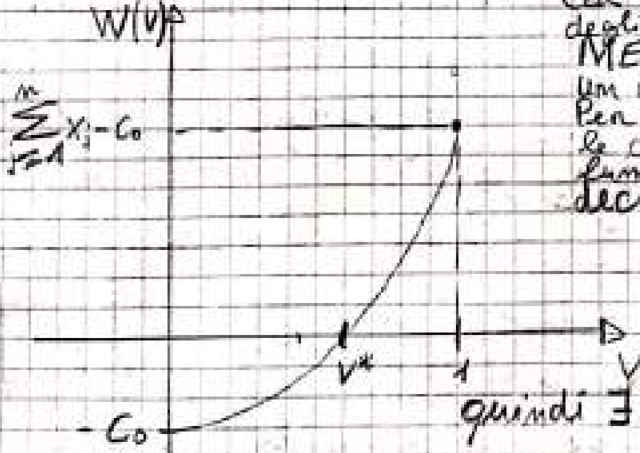
Se per esempio: 00:38

$t_m < 1$ → $W''(v) < 0$ → W concava   GLOBALMENTE

Se una funzione è definita in un intervallo la concavità o convessità globale è equivalente alla concavità o convessità in ogni punto dello intervallo. Quindi in questi esempi ci si riferisce a funzioni che sono convesse o concave GLOBALMENTE

00:42

Metodi di ricerca del TIR: L'esistenza del TIR viene dimostrata col teorema degli zeri. Il teorema degli zeri può essere dimostrato col METODO DI BISEZIONE. Applicare un algoritmo di ricerca binaria. Per applicare questo metodo bastano le condizioni come crescenza della funzione nel caso di investimento, decrescenza nel caso di finanziamento



$\lim_{v \to 0} W(v) = -C_0 < 0$

$\lim_{v \to 1} W(v) = \sum_{i=1}^{m} x_i - C_0 > 0$

quindi $\exists! \, v^* : W(v^*) = 0$

Parto da $v_1 : W(v_1) < 0$, $v_2 : W(v_2) > 0$ (esempio: $v_1 = 0$, $v_2 = 1$)

$a_0 = v_1$, $b_0 = v_2$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ qui calcolo $W(c_0)$

Possono esserci 3 alternative: 00:42

$W(c_0)$
- → $= 0$ STOP $v^* = c_0$
- → > 0 Pongo $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$
- → < 0 Pongo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$

$|W(c_i)| < \varepsilon$ fissato 1° criterio di arresto dell'algoritmo

2° criterio di arresto dell'algoritmo

c_n errore $< \frac{l}{2^{m-1}} \leq \varepsilon$ fissato

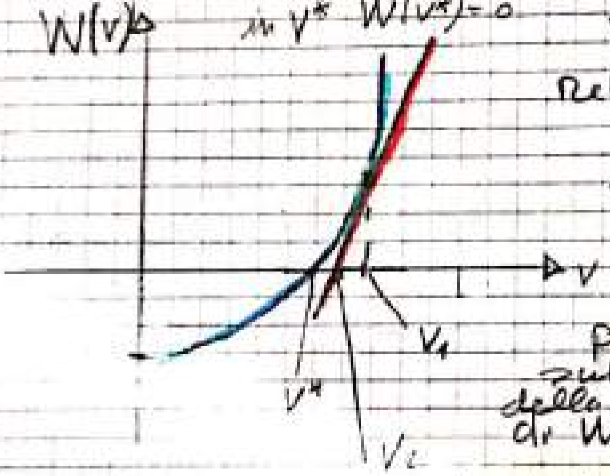
$l \leq \varepsilon 2^{m-1} \Leftrightarrow \frac{l}{\varepsilon} \leq 2^{m-1} \Leftrightarrow m-1 \geq \log_2 \frac{l}{\varepsilon}$

Altri metodi per la ricerca del TIR:
- Metodo delle secanti
- Metodo delle tangenti (Newton)

$$m = 2 + \left\lfloor \log_2 \frac{l}{\varepsilon} \right\rfloor$$

questi 2 metodi valgono per funzioni strettamente CONCAVO (o CONVESSO) su un intervallo

00:56



$v_1 > v^*$ (cioè $W(v_1) > 0$)

retta tangente grafico di W in $(v_1, W(v_1))$

Sia v_2 il suo punto di interse-zione con l'asse delle ascisse tale che $v^* < v_2 < v_1$

Poi si considera l'intercetta sull'asse delle ascisse della retta tangente al grafico di W in $(v_2, W(v_2))$ 01:06

Sia v_3 il suo punto di intersezione ... tale che: $v^* < v_3 < v_2$

Mi fermo dopo m passi

$W(v_m) < \varepsilon$ ← con ε fissato → oppure $v_j - v_{j+1} < \varepsilon$

Se $v_1 > v^*$ $(W(v_1) > 0)$

Fisso v_1 $W(v_1)$ → $= 0$ allora $v_1 = v^*$
→ > 0 allora $v_1 > v^*$
→ < 0 allora $v_1 < v^*$

Se $v_1 < v^*$ $(W(v_1) < 0) \Longrightarrow v_2 > v^*$

Metodo di Newton:

$W(v) = \sum_{j=0}^{m} x_j v^{t_j}$ $\quad W'(v) = \sum_{j=1}^{m} x_j t_j v^{t_j - 1} > 0$ 01:15

equazione retta tangente grafico di W nel punto $(v_k, W(v_k))$

$y = W(v_k) + W'(v_k)(v - v_k)$ per essere tangente $y = 0$ quindi...

$W(v_k) + W'(v_k)(v - v_k) = 0 \Leftrightarrow W'(v_k)(v - v_k) = -W(v_k)$

Metodo di NEWTON

$$v_{k+1} = v_k - \frac{W(v_k)}{W'(v_k)}$$

$v_k = v^* \to W(v_k) = 0 \to v_{k+1} = v_k$

$v_k > v^* \to W(v_k) > 0 \to v_{k+1} < v_k$

$v_k < v^* \to W(v_k) < 0 \to v_{k+1} > v_k$

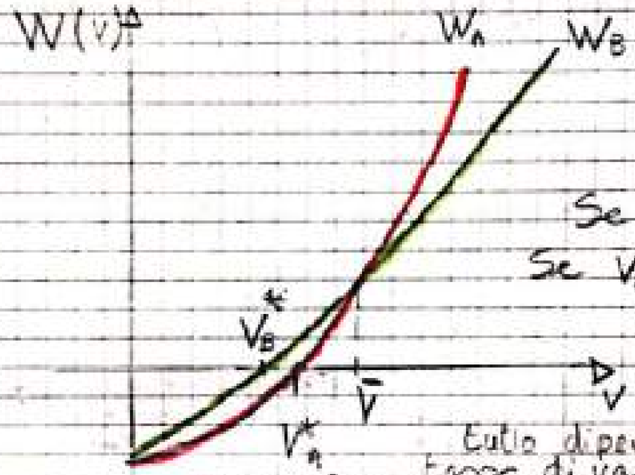
6 NOVEMBRE 2018:

TIR e VAN Vengono utilizzati quando si deve decidere tra diverse situazioni finanziarie alternative. Le situazioni da considerare devono essere abbastanza omogenee tra di loro, sia in termini di segni tra gli importi, sia a durata, sia ordine di grandezza degli importi.

① Criterio del valore attuale: Fissato $i \rightarrow v = \frac{1}{1+i}$

L'operazione finanziaria si definisce EQUA, VANTAGGIOSA, SVANTAGGIOSA quando rispettivamente $W(v)=0$, $W(v)>0$, $W(v)<0$.

Le uniche situazioni accettabili sono quando $W(v)=0$ oppure $W(v)>0$. L'operazione preferita tra quelle accettabili sarà quella con VAN maggiore. Non c'è bisogno di distinguere tra finanziamento o investimento, funziona sempre. Una critica che viene posta è la SOGGETTIVITÀ perché bisogna fissare a priori un tasso di valutazione e quindi se cambia il tasso possono cambiare le conclusioni.



Se $v < v_B^*$ $(i > i_B^*)$ A, B NON ACCETTABILI

Se $v_B^* \leq v < v_A^*$ $(i_A^* < i \leq i_B^*)$ B ACCETTABILE, A NON ACCETTABILE

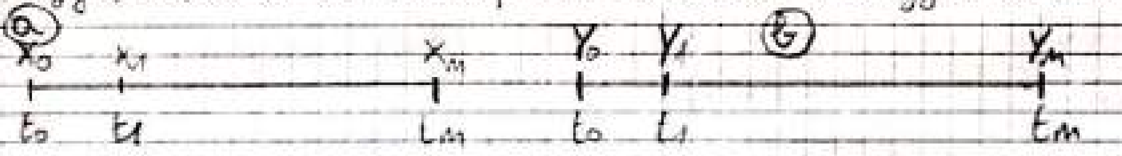
Se $v \geq v_A^*$ $(i \leq i_A^*)$ A, B ACCETTABILI

Se $v_A^* \leq v < \bar{v}$ $(\bar{i} < i \leq i_A^*)$ B è MEGLIO di A

Se $v = \bar{v}$ $(i = \bar{i})$ A, B INDIFFERENTI

Se $v > \bar{v}$ $(i < \bar{i})$ A è MEGLIO di B

Tutto dipende dalla scelta soggettiva del tasso di valutazione i. D'altra parte quando si devono fare delle scelte, a meno che un'operazione non domini l'altra, bisogna per forza introdurre qualche elemento di soggettività ad un certo punto. Pensando a soggetti razionali e non saziati...



2 OPERAZIONI FINANZIARIE CON LO STESSO SCADENZARIO

Se $x_j \geq y_j \ \forall j$

$\exists j : x_j > y_j$ la prima operazione DOMINA la seconda perché esiste almeno un importo maggiore per qualche j nella prima operazione.

Questa è una situazione teorica e non realistica, perché nella pratica le op. finanziarie sono aleatorie e quelle che offrono di + sono anche quelle + rischiose.

OPPORTUNITÀ di ARBITRAGGIO: opportunità di "arricchirsi" (00:15) senza rimetterci nulla.

Per esempio un soggetto potrebbe acquisire la situazione ⓐ e vendere (cioè mettersi come controparte) nella situazione ⓑ e facendo la differenza tra queste 2 operazioni si ha che gli importi sono tutti ≥ 0 e ce n'è almeno uno strettamente positivo per qualche j tale che $x_j > y_j$. Solitamente nei mercati ideali si suppone che queste situazioni non siano presenti. Ipotesi che caratterizza la presenza di mercati ideali è l'ASSENZA di OPPORTUNITÀ di ARBITRAGGIO. Nella pratica ci possono essere delle opportunità di arbitraggio ma solitamente sono di breve durata. Anche perché se fossero presenti tutti cercherebbero di sfruttarle e di guadagnarci sopra per cui per il gioco della domanda e dell'offerta gli importi che definiscono l'operazione tenderebbero ad assestarsi in modo tale che quest'opportunità SPARISCA.

Comunque il VAN esiste SEMPRE

② Criterio del tasso di rendimento: (NO SOGGETTIVITA') 00:26

Se si tratta di un op. di investimento → si sceglie quella col TIR maggiore

Se è tratta di un'op. di finanziamento → si sceglie quella col TIR minore

Indice sintetico per la redditività delle obbligazioni, nella ipotesi che l'obbligazione venga tenuta fino a scadenza, perché un soggetto sa quanto la paga l'obbligazione nel momento in cui la compra, sa quanto incasserà, quanto saranno le cedole ecc. e quando è quindi è possibile calcolarsi il TIR

Critiche di questo criterio: Non tutte le operazioni ammettono TIR. Significa che può non esistere oppure non essere unico. Se si ha un'operazione in cui il VAN oscilla 00:30 è difficile dire se il TIR esiste ed è unico. Se ci sono + (0) zeri nel VAN allora il TIR non è definito. Altra critica è che questo criterio si può usare solo con le operazioni di PURO FINANZIAMENTO O PURO INVESTIMENTO, non con operazioni miste

La terminologia per le operazioni di finanziamento è un po' diversa

TAN: Tasso annuo nominale

TAEG: Tasso annuo effettivo globale

In [illegible] il TAEG dovrebbe chiamarsi dal 2003 Indice Sin[illegible] di Costo (I.S.C).

Con[illegible] sono da considerarsi come TIR per definizione perché sono tassi che rendono nullo il VAN. Si stanno considerando operazioni di finanziamento. Quando si considera l'operazione si considerano gli importi NOMINALI che sono gli importi teorici da pagare senza considerare ulteriori spese (TAN). Per farsi prestare un importo c'è all'inizio una fase di istruttoria in cui la banca 00:37 valuta se il potenziale debitore ha le caratteristiche che danno GARANZIA sul fatto che possa essere solvibile in futuro. Il TAEG tiene conto anche dei costi

$\boxed{\text{TAEG è + grande di TAN}}$

10'000	−1'050	−1'051	...	−1'050
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$		1

TAN (Non tengo conto dei costi)

9'950	−1'052	−1'052	...	−1'052
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$		1

TAEG (Si tiene conto anche dei costi)

Per esempio tramite bonifico bancario

50€ di spesa di istruttoria, 2€ di commissione per ogni rata

Se si usa come unità di misura il mese anziché l'anno

$V^*_{(12)}$ (fattore di attualizzazione su base mensile); $i^*_{(12)}$: tasso mensile di interesse

$$V^* = \left(V^*_{(12)}\right)^{12} \longrightarrow i^* = \frac{1}{V^*} - 1$$

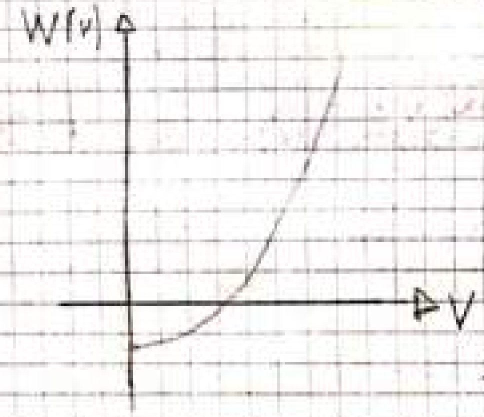
TASSI equivalenti (o fattori equivalenti) producono lo stesso montante (o valore attuale)

$V^*_{(1+2)} \longrightarrow V^* = \left(V^*_{(1+2)}\right)^{12} \longrightarrow i^* = \frac{1}{V^*} - 1$

su base mensile

$W(V) = 10'000 - 1'050\, a_{\overline{12}|\left(\frac{1}{V}-1\right)}$ 00:50

file TIR da scaricare su Moodle 2



$$W(V) = -10'000 + 1'050\, a_{\overline{10}|\frac{1}{V}-1}$$

$$W'(V) = 1'050\,(1 + 2V + 3V^2 + \dots + 10V^9)$$

$$W'(V) = (I\ddot{a})_{\overline{10}|\frac{1}{V}-1} = \frac{\ddot{a}_{\overline{10}|\frac{1}{V}-1} - 10V^{10}}{1-V}$$

$$= \frac{\frac{1-V^{10}}{1-V} - 10V^{10}}{1-V}$$

7 NOVEMBRE 2015:

$-C$ at 0, M at T

Ipotesi:
Stesso tasso applicato a creditori e ai debitori

$i_0(T)$: tasso che dipende dalla scadenza, determinato nell'epoca di contrattazione, cioè nell'epoca in cui si fa l'accordo tra le parti

$$\left.\begin{aligned} M &= C\,(1 + i_0(T))^T \\ M &= C\, e^{\delta_0(T)\,T} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{interesse composto (o esponenziale)}$$

L sta per "LIBOR" oppure per "Lineare"

$$M = C\,[1 + L_0(T)\,T] \longrightarrow \text{interesse semplice}$$

i tassi sono quindi funzioni della durata dell'operazione (o della scadenza dell'operazione). Fissata l'epoca in cui ci si mette d'accordo.

Definizione: STRUTTURA per SCADENZA dei TASSI a PRONTI all'epoca (fissata) 0 la seguente funzione:

con $T > 0$

$T \longrightarrow i_0(T)$

$T \longrightarrow \delta_0(T)$ $\qquad \delta_0(T) = \ln(1 + i_0(T))$

$T \longrightarrow L_0(T)$

Si tratta di funzioni in una variabile, dove la variabile è la scadenza T. Il grafico di queste funzioni può essere rappresentato in un piano ed è una curva che può avere diversi tipi di andamenti:

- Curva dei tassi a pronti CRESCENTE ("normale")
- Curva dei tassi a pronti DECRESCENTE ("invertita")
- Curva dei tassi a pronti COSTANTE (Struttura "piatta" "flat")
- Unico punto di max/punto di min (Struttura "campanulare")
- 1 punto di min seguito da uno di max (o viceversa) (Struttura "a cucchiaio" o ad "S")

Non esiste un'unica struttura per scadenza dei tassi, perché la struttura viene costruita a partire da segmenti "simili" del mercato, nel senso che ad esempio dipendono anche dall'emittente dei titoli, se si ricaveranno questi tassi dai prezzi delle obbligazioni

e quindi dipende da chi ha emesso queste obbligazioni. Ecco che allora si potrebbe avere per esempio la struttura per scadenza dei tassi governativi (obbligazioni emesse dallo stato) oppure strutture per scadenza dei tassi interbancari, oppure struttura per scadenza dei tassi relativi a prestiti o obbligazioni da società che hanno lo stesso Rating.
Il rating è una misura qualitativa non numerica perché si utilizzano dei simboli (AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, D dove D sta per Default) per indicare il grado di affidabilità dell'emittente (del prestito). Tanto più basso è il giudizio tanto meno vale l'obbligazione e quindi se l'obbligazione vale di meno il tasso di rendimento è alto, e in effetti lo SPREAD (differenza tra tasso di rendimento di un'obbligazione soggetta al rischio di credito e il tasso di rendimento offerto da una obbligazione simile "priva di rischio"). Lo SPREAD è una misura quantitativa del rischio di credito. Rischio di credito: Non ricevere o in tutto o in parte quanto promesso all'epoca di contrattazione (importi aleatori). Se si calcolasse il TIR delle operazioni...
La struttura per scadenza dei tassi potrebbe dipendere dalla durata:

- breve termine — fino a 3/6 mesi
- medio termine — da 3/6 mesi fino a 2 anni
- lungo termine — da 2 anni in avanti

Un importante riferimento in ambito INTERBANCARIO è il tasso EURIBOR (EURo Inter Bank Offered Rate)
è stato introdotto nel 1999 nell'area EURO e viene calcolato in regime di interesse semplice come media dei tassi in base a cui si prestano il denaro i principali istituti di credito europei, per una determinata scadenza (distinte per scadenze). Vengono pubblicati giornalmente ed hanno le seguenti scadenze

1 settimana, 2 settimane, 3 settimane, 4 settimane, 1 mese, ... 12 mesi

convenzione utilizzata 30/360 per il calcolo dei giorni

EONIA (Euro Over Night Index Average): tasso interbancario utilizzato per le transazioni di durata giornaliera (1 solo giorno)

Simile all'EURIBOR c'è il LIBOR ma vale per prestiti tra banche ma sono denominati in dollari americani o sterline

LIBOR (London Inter Bank Offered Rate)

I tassi solitamente derivano dai prezzi (delle obbligazioni ad esempio).
Chi nasce prima il tasso o il prezzo?
Si potrebbe immaginare di osservare i tassi e calcolare i prezzi come valori attuali degli introiti futuri oppure osservare i prezzi e dai prezzi ricavare i tassi. La logica che solitamente si segue è la seconda: si osservano i prezzi e si ricavano i tassi. Compro un titolo adesso ad un determinato prezzo, il titolo promette certi pagamenti futuri, quindi i tassi corrispondenti si calcolano sulla base di cosa promesse, supponendo che il titolo sia detenuto fino alla scadenza e quindi si calcolano come TIR della operazione di acquisto del titolo, viene ricavato dal prezzo.
Quindi la struttura per scadenza dei tassi si può ricavare da quella dei prezzi. Attenzione il titolo DEVE essere tenuto fino a SCADENZA. Perché se si compra il titolo oggi, un titolo che scade tra 5 anni, allora si ottiene tutto quello che il titolo promette di dare (se non è a tasso variabile) quindi si calcola quanto si paga adesso e quanto si riceverà calcolando il TIR. Se invece si pensa di vendere il titolo tra 3 anni senza tenerlo fino in fondo non si è in grado di calcolarsi quanto sarà il TIR

⇒ SEGUE

dell'operazione perché rivendendolo dopo 3 anni si rivenderebbe ad un prezzo di mercato del titolo che sarà probabilmente variato (prezzo aleatorio). Tutti i tassi che vengono calcolati a partire da prezzi vengono calcolati come se i titoli per ipotesi siano tenuti fino a scadenza.

00:4…

Zero-Coupon Bonds (o titoli senza cedola o titoli a cedola nulla o pure discount bonds o titoli di puro sconto)

Nello stato italiano: BOT, CTZ

Ogni giorno vengono pubblicati i prezzi (o quotazioni) e di solito i prezzi che vengono pubblicati sono per ogni 100€ di valore nominale

In teoria si suppone per comodità che le quotazioni avvengano per ogni euro di valore nominale $\Rightarrow$ Valore nominale unitario

- INTERMEZZO: 00:50

00:51

$i_0(T)$ 0 fissato   t fissato $i_t(T)$ t e aleatorio

Struttura per scadenza tassi a pronti in t

$$T \longrightarrow i_t(T) \qquad T>t$$

Anche questo è una funzione della scadenza T, t è anche una variabile. Non si può pensare però che questa sia una funzione di variabile reale ma un PROCESSO STOCASTICO. L'insieme di tutti i prezzi futuri del titolo che per esempio si vuole acquistare è un insieme di variabili aleatorie (processo stocastico) che evolve nel tempo in maniera aleatoria.

Si considera uno ZCB e si considerino i prezzi di acquisto del titolo che ha valore nominale unitario, quindi osservo la struttura per scadenza dei prezzi in base alla loro scadenza.

$V_0(T)$: prezzo in 0 di uno ZCB unitario (valore di rimborso 1) con scadenza T (A Pronti)

STRUTTURA per SCADENZA dei PREZZI a PRONTI in 0:

$$T \rightarrow V_0(T)$$

Come potrebbe essere calcolato nel caso di uno ZCB il prezzo se si osservasse direttamente il tasso? Visto che il valore (nominale) che si riceverà in futuro sarà 1 si potrebbe calcolare il prezzo adesso come valore attuale in base a quel tasso osservato una volta scelto il regime ecc.. Se viceversa si guardano le quotazioni dei prezzi, come si calcolano i tassi? Si possono calcolare come TIR dell'operazione di acquisto del titolo tenuto fino a scadenza.

$-V_0(T)$ in 0, 1 in T

nel regime dell'interesse composto il VAN è

$$W(T) = -V_0(T) + 1\left(\frac{1}{1+i_0(T)}\right)^T = 0 \iff$$

$$\iff V_0(T) = \left(\frac{1}{1+i_0(T)}\right)^T \qquad i_0(T) \text{ è il TIR della operazione}$$

$V_0(T) = e^{-\delta_0(T)T}$ nel regime esponenziale

$V_0(T) = \dfrac{1}{1+i_0(T)T}$ nel regime interesse semplice

Se ci si riconduce ai tassi si ottengono poi...
(esplicitare i tassi)

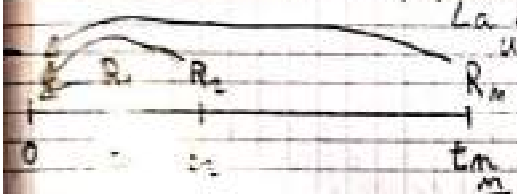
$V_0(T) = \left(\frac{1}{1+i_0(T)}\right)^T \rightarrow i_0(T) = (V_0(T))^{-\frac{1}{T}} - 1$

$V_0(T) = e^{-\delta_0(T)T} \rightarrow \delta_0(T) = -\frac{\ln(V_0(T))}{T}$

$V_0(T) = \frac{1}{1+L_0(T)T} \rightarrow L_0(T) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{V_0(T)} - 1\right)$

Ipotesi che i prezzi di questi titoli siano STRETT. POSITIVI (>0)

A partire dai prezzi si vuole costruire la struttura dei tassi $\boxed{01:07}$
ad ogni $T>0$ si associa il tasso, qui
Dal punto di vista pratico i prezzi e di conseguenza anche i tassi che derivano da questi prezzi si osservano soltanto per determinate scadenze, per le quali esistono titoli di questo tipo con quelle scadenze. Ad esempio i BOT hanno scadenza al max fino a 1 anno e tipicamente vengono emessi a metà mese, quindi non con qualunque scadenza. Allora dai prezzi osservati (o tassi) si può costruire non l'intera struttura per scadenza ma solo dei punti. Se l'obiettivo fosse la costruzione dell'intera struttura per ogni possibile scadenza si porrebbe il problema della STIMA della struttura per scadenza. Per stima si intende "riempire tutti i buchi" dando una funzione continua.

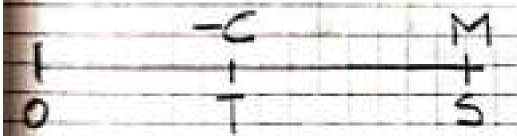


La struttura per scadenza dei tassi potrebbe essere utilizzata per la valutazione di titoli che promettono vari pagamenti in futuro.

$$V(0) = \sum_{j=1}^{m} R_j v_0(t_j) = \sum_{j=1}^{m} R_j (1+i_0(t_j))^{-t_j}$$

Notiamo in questo caso ogni importo va scontato col tasso o col prezzo corrispondente alla scadenza in cui esso è esigibile.

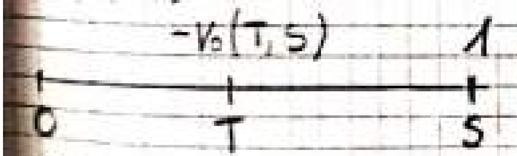
Iniziamo a considerare un'operazione A TERMINE. Adesso succede che queste operazioni vengono concordate in un'epoca che precede l'epoca del primo pagamento. In 0 ci si mette d'accordo per i tassi o i prezzi da applicare in futuro



$0 < T < S$

$i_0(T,S)$ — $\cancel{V_0 \; i_T(S)}$ ci si mette d'accordo in 0
$\delta_0(T,S)$
$L_0(T,S)$
$V_0(T,S)$

Queste 4 sono funzioni di 2 variabili perché i tassi oppure i prezzi stavolta dipendono sia dal periodo in cui si inizia a pagare che da periodo di scadenza



$-V_0(T,S)$: Prezzo a termine viene concordato in 0, ci si mette d'accordo su quanto si dovrà pagare in T per avere 1 in S

STRUTTURA per SCADENZA dei TASSI, o dei PREZZI, A TERMINE, concordato in 0

con $0 \leq T \leq S$

$(T,S) \longrightarrow i_0(T,S)$
$(T,S) \longrightarrow \delta_0(T,S)$
$(T,S) \longrightarrow L_0(T,S)$
$(T,S) \longrightarrow V_0(T,S)$

essendo adesso una funzione a 2 variabili essa è rappresentabile come una superficie nello spazio.

I tassi a pronti (o i prezzi) si possono ottenere come caso particolare di tassi o prezzi a termine ponendo $T=0$.
Se si definisse in una fissata epoca t il posto di 0 si avrebbe t con $t<T$

Legame tra prezzi e tassi:

$$V_0(T,S) = \underbrace{\left(1 + i_0(T,S)\right)^{-(S-T)}}_{\text{regime dell'interesse composto}} = \underbrace{e^{-\delta_0(T,S)(S-T)}}_{\text{regime esponenziale}} = \underbrace{\frac{1}{1 + L_0(T,S)(S-T)}}_{\text{regime dell'interesse semplice}}$$

La riferimento all'intervallo di tempo che va da T ad S.

Con riferimento ai prezzi: $V_0(T,S) \neq V_T(S)$

il prezzo a termine è diverso rispetto al prezzo a pronti perchè il secondo non lo conosco dato devo aspettare di arrivare in T.

12 NOVEMBRE 2018:

Per spiegare meglio il discorso delle quotazioni dei prezzi ogni 100€ di valore nominale

Se un titolo vale

97   Val nom. : 30.000

$30.000 \cdot \frac{97}{100} = 29100$ € il prezzo di acquisto del titolo   100:02

a termine si può anche dire "forward"
a pronti si può anche dire "spot"

Si potrebbe pensare che per costruire l'intera struttura per scadenza dei tassi (o dei prezzi) a termine servano più informazioni rispetto a quanto serve per costruire quella dei tassi a pronti ma invece non è così perchè se ci si mette sotto una serie di ipotesi ideali sui mercati diventa equivalente conoscere la struttura per scadenza dei tassi a pronti o quella dei tassi a termine. Anche conoscendo la strutt. dei tassi spot (funzioni di una variab.) si riesce a conoscere la strutt. dei tassi forward (funzioni di 2 variabili)

Ipotesi dei mercati "ideali":

- agenti razionali e non saziati (→ massimizzatori di profitto)
- Ipotesi de mercati "perfetti":
  - agenti price-takers: gli agenti (singoli) non sono in grado di modificare i prezzi sul mercato con il loro comportamento a seconda se chiedono o offrono titoli sul mercato
  - titoli perfettamente divisibili: gli agenti possono comprare titoli per qualunque quantità. Non esistono tagli minimi (come per esempio nei titoli di stato che si possono acquistare per ogni 1000€ di valore nominale)
  - assenza di tasse e costi di transazione (commissioni)
  - Possibilità di VENDITA allo SCOPERTO, senza limiti: Questa ipotesi comporta l'uguaglianza tra tasso debitore e tasso creditore, quindi se ci si indebita il tasso che viene chiesto è lo stesso applicato nel caso in cui si fa un'operazione di investimento, anzichè come nella pratica che invece i tassi per i quali ci si indebita sono solitamente più alti. Dipende dalla scadenza ma non dal segno dell'operazione. tasso creditore = tasso debitore.

Vendere allo SCOPERTO vuol dire vendere un titolo che non si possiede. In un certo senso è la stessa cosa di indebitarsi. Come si può vendere un titolo che ancora non si possiede? Ci si deve rivolgere ad un intermediario che ha questo titolo in deposito per conto di un altro cliente. Per esempio si vuole vendere una certa azione, ci si rivolge ad un broker che ha queste azioni depositate, gli si chiede di venderla, l'azione viene venduta, io (cliente) incasso immediatamente il ricavo della vendita (in pratica potrebbero trattenere una parte per garanzia), però ad una certa scadenza mi impegno a restituire l'azione, ma come? L'unico modo è quello di comprarla sul mercato al prezzo di mercato in quel momento. Quindi la compro e la restituisco.

Se durante il periodo in cui l'operazione è aperta l'azione paga dei dividendi, oppure se si parla di obbligazioni parliamo di cedole, chi l'aveva in deposito (broker) non ci deve rimettere, gli interessi devono comunque essere versati sul conto e questi interessi li paga chi ha venduto allo scoperto.

P_t : prezzo del titolo che vendo allo scoperto in t (per esempio obbligaz.)

P_T : prezzo del titolo che acquisto in T

① P_t (in t) — interessi — $-P_T$ (in T)

② $-P_t$ (in t) + interessi — P_T (in T)

Nel momento della vendita io incasso il suo prezzo di vendita. Supponiamo di impegnarci a restituire il titolo in T e per restituirlo (questo titolo) dobbiamo comprarlo sul mercato. Se tra t e T ci sono degli interessi da pagare saremo noi venditori allo scoperto a doverli pagare. La ① a tutti gli effetti è un'operazione di finanziamento mentre la ② è esattamente la operazione opposta (di investimento). Da questi schemi il TIR che è il tasso di remunerazione delle operazioni è lo stesso per ① e ②. Quindi si potrebbe considerare l'operazione di vendita allo scoperto come un'operazione di acquisto di una quantità "negativa" di un titolo, idealmente si potrebbe dire di poter comprare una quantità qualunque di titolo (qualunque numero reale per la perfetta divisibilità e di qualunque segno se si può vendere allo scoperto).

Ultima ipotesi dei mercati solo "ideali":

- Assenza di opportunità di Arbitraggio: assenza dell'opportunità di arricchirsi senza mai rimetterci. Per potersi arricchire si va sul mercato si comprano e si vendono titoli ai prezzi di mercato, perché nelle nostre ipotesi gli agenti sono Price-takers, e sono i prezzi di mercato che permettono o no di realizzare opportunità di arbitraggio. In sostanza se ci fossero delle opportunità di arbitraggio significherebbe che i prezzi sul mercato non sono in perfetto equilibrio... gioco domanda e offerta (pag. 62)

I prezzi di mercato consentono opportunità di arbitraggio se è possibile, attraverso la compravendita di titoli oggetto di scambio, costruire un'operazione finanziaria (come somma delle singole operazioni) che prevede dei flussi di cassa tutti ≥ 0 (maggiori o uguali a zero) e almeno uno strettamente positivo.

x_0 (t_0), x_1 (t_1), x_2 (t_2), …, x_m (t_m)

Opportunità di arbitraggio:

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & \forall i \\ \exists i : x_i > 0 \end{cases}$$

OPPURE

$$\begin{cases} x_i \leq 0 & \forall i \\ \exists i : x_i < 0 \end{cases}$$

00:34

$-V_0(T) \geq 0$ (in 0) — ① ≥ 0 (in T)

00:38

Se $V_0(T) \leq 0$ $\quad V_T(T) = 1$

dove $V_0(T)$ è il prezzo che si paga in 0 per comprare a pronti uno ZCB che paga 1 alla scadenza

Se $V_0(T)$ non fosse strettamente positivo succederebbe che al momento dell'acquisto si avrebbe un introito (quindi $-V_0(T) \geq 0$) così come anche alla scadenza quindi tutti e due gli importi sono ≥ 0 e in più quello che si riceve alla scadenza sarebbe strettamente positivo.

$\Rightarrow$ OPPORTUNITÀ DI ARBITRAGGIO $\Rightarrow$ $V_0(T)$ deve essere sempre > 0.

Al momento della scadenza il prezzo del titolo deve essere uguale al prezzo del titolo alla scadenza prima della scadenza. quindi $V_T(T) = 1 \quad \forall T$

Lo stesso discorso vale per il prezzo a termine, con la differenza che il prezzo a termine l'ho comprato in 0 ma lo pago dopo

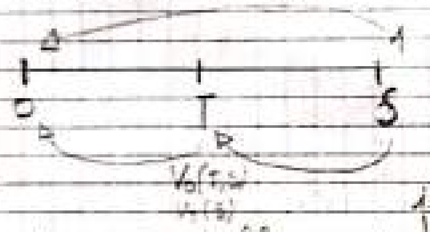
I prezzi a termine (forward) sono collegati coi prezzi a pronti (spot) da una precisa relazione

(Sotto intesi degli ZCB)

Teorema dei prezzi (o tassi) impliciti: Sotto le ipotesi precedenti (vale per gli ZCB) si ha questa relazione...

con riferimento ai prezzi...

$$V_0(T,S)\cdot V_0(T) = V_0(S) \quad \text{questa è la TESI} \quad \forall T,S: 0\leq T<S \;{*1}$$



Questa cosa assomiglia alla SCINDIBILITÀ retrospettiva ma non lo è perché se la legge fosse scindibile in qualunque momento in cui si scinde l'operazione si deve ottenere lo stesso risultato ma con le condizioni di mercato prevalenti nel momento in cui si scinde. Dovrebbe esserci $V_T(S)$ piuttosto che $V_0(T,S)$, ma non può esserci perché $V_T(S)$ è ALEATORIO e dipende dalle condizioni di mercato. Una seconda osservazione è che bastano i prezzi a pronti per ottenere i prezzi a termine

$$V_0(T,S) = \frac{V_0(S)}{V_0(T)}$$

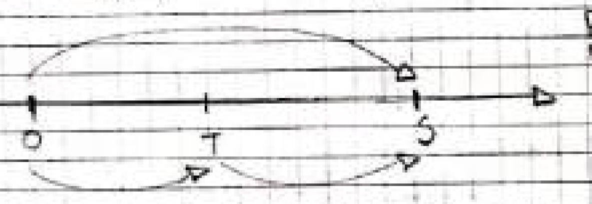
00:5

Se si esprimono in termine di tassi...

$$\left(\frac{1}{1+i_0(T,S)}\right)^{S-T}\left(\frac{1}{1+i_0(T)}\right)^{T} = \left(\frac{1}{1+i_0(S)}\right)^{S}$$ Se si passa ai reciproci...

$$(1+i_0(T))^{T}(1+i_0(T,S))^{S-T} = (1+i_0(S))^{S}$$

Sembra scind. prospettiva ma non lo è sempre per lo stesso motivo di prima. Per esempio investendo il capitale unitario in 0 fino all'epoca S a pronti



00:5

$$e^{\delta_0(T)T}\cdot e^{\delta_0(T,S)(S-T)} = e^{\delta_0(S)S}$$ passando a ln

$$\delta_0(T)T + \delta_0(T,S)(S-T) = \delta_0(S)S$$ e poi si esplicita "$\delta_0(T,S)$"

$$\delta_0(T,S) = \frac{\delta_0(S)S-\delta_0(T)T}{S-T}$$

nel regime dell'interesse semplice:

$$(1+L_0(T)\cdot T)(1+L_0(T,S)(S-T)) = (1+L_0(S)S)$$

*1 neghiamo il $\forall T,S: 0\leq T<S$ quindi scriviamo $\exists T,S: 0\leq T<S$

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che

negazione della tesi $\Longrightarrow \exists T,S: 0\leq T<S$ e $V_0(T,S)V_0(T)\neq V_0(S)$

Se $V_0(T,S)V_0(T)>V_0(S)$, in 0 si fanno 3 operazioni: l'obiettivo è far vedere che si è in presenza di opportunità di arbitraggio

(a) Vendo allo scoperto (a pronti) $V_0(T,S)$ Z.C.B. (valore nominale unitario) di scadenza T

segue

$-V_0(T,S)$ — T

Si sfruttano 2 ipotesi di quelle dei mercati di prima:
1) vendita allo scoperto
2) perfetta divisibilità dei beni (compravendita di importo)

ⓑ Vendita termine in T (accordo fatto in 0) uno z.c.b. di scadenza S

$V_0(T,S)$ in T; -1 in S

La vendita avviene in T, al prezzo concordato in 0, allo scoperto. Il ricavo della vendita allo scoperto è in T con l'obbligo di rimborso unitario alla scadenza S

ⓒ Compro (a pronti) uno z.c.b. di scadenza S

$-V_0(S)$ in 0; 1 in S

Se considera la somma delle operazioni ⓐ ⓑ e ⓒ

$V_0(T,S)V_0(T)-V_0(S)$ in 0; 0 in T; 0 in S

Se come abbiamo supposto per assurdo $V_0(T,S)V_0(T)-V_0(S)>0$, $V_0(T,S)V_0(T)>V_0(S)$ allora l'importo che si riceve in 0 è STRETT. POSITIVO per cui ci si ritrova in presenza di un'opportunità di arbitraggio, perché tutti gli importi sono ≥ 0 e un importo è >0 il che è un assurdo poiché si è esclusa quest'ipotesi.

ASSURDO!

Si mostra anche che $V_0(T,S)V_0(T)<V_0(S)$ NON è VALIDA considerando le operazioni opposte a quelle di prima. $\boxed{01:14}$

Tutte queste relazioni viste e anche tutte queste definizioni date sono di carattere generale quindi valgono qualunque siano gli istanti di apertura del mercato siano essi istanti nel discreto oppure nel continuo. In definitiva la conoscenza della struttura a pronti è necessaria e sufficiente per la conoscenza della struttura a termine. In realtà in base al tipo di scadenzario che si va a considerare (al tipo di ipotesi sulle date di apertura dei mercati) si vedrà anche qualcos'altro che equivalente alla struttura dei tassi a pronti oppure a termine ed è la conoscenza dei tassi uniperiodali o monoperiodali se ci si colloca in uno scadenzario discreto o nel caso di scadenzario continuo dei tassi istantanei (tassi forward).

Scadenzario discreto: mercati aperti alle epoche $t_0=0, t_1, t_2, \dots$ (nel discreto) $t_0<t_1<t_2<\dots$

Tasso (o intensità) a TERMINE UNIPERIODALE (concordato in $t_0=0$):

nel regime dell'interesse composto: $i_0^f(t_j) \stackrel{def}{=} i_0(t_j, t_{j+1})$ valgono per un periodo

nel regime dell'interesse semplice: $L_0^f(t_j) \stackrel{def}{=} L_0(t_j, t_{j+1})$

nel regime esponenziale: $\delta_0^f(t_j) \stackrel{def}{=} \delta_0(t_j, t_{j+1})$

Un'alternativa alla conoscenza dell'intera struttura è la conoscenza di tutti i tassi monoperiodali o uniperiodali, cioè a partire da questi si possono ricostruire tutti i tassi a termine (o le intensità) anche non monoperiodali cioè con qualunque coppia di date e da queste si può ottenere quelle a pronti quando la prima data coincide con 0 (zero)

$0 \leq j < K$

$$\delta_0(t_j, t_K) = \frac{\sum_{h=j}^{K-1} \delta_0^f(t_h)(t_{h+1}-t_h)}{t_K-t_j} = \sum_{h=j}^{K-1} \delta_0^f(t_h) w_h \quad \text{con } w_h = \frac{t_{h+1}-t_h}{t_K-t_j}$$

Si ottiene come media ponderata delle intensità monoperiodali

t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{K-1}, t_K

$$\sum_{h=j}^{K-1}(t_{h+1}-t_h) = t_K - t_j$$ ampiezza di tutto l'intervallo

$$\frac{V_0(t_k)}{V_0(t_j)} = V_0(t_j, t_k) = e^{-\delta_0(t_j,t_k)(t_k-t_j)} \Rightarrow \delta_0(t_j,t_k) = -\frac{1}{t_k-t_j}\ln\left(\frac{V_0(t_k)}{V_0(t_j)}\right)$$

Lavoro sulla quantità " $\frac{V_0(t_k)}{V_0(t_j)}$ " $\leftarrow$ $V_0(t_j,t_k)$

Per il teorema dei prezzi impliciti

$$\underbrace{\frac{V_0(t_k)}{V_0(t_{k-1})}}\cdot\underbrace{\frac{V_0(t_{k-1})}{V_0(t_{k-2})}}\cdot\underbrace{\frac{V_0(t_{k-2})}{V_0(t_{k-3})}}\cdot\ldots\cdot\frac{}{V_0(t_{j+1})}\cdot\underbrace{\frac{V_0(t_{j+1})}{V_0(t_j)}} = \frac{V_0(t_k)}{V_0(t_j)}$$

Divido e moltiplico

prezzi forward monoperiodali (uniperiodali)

$$V_0(t_{k-1},t_k)\cdot V_0(t_{k-2},t_{k-1})\cdot \;\ldots\; \cdot V_0(t_j,t_{j+1})$$

$$= -\frac{1}{t_k-t_j}\sum_{h=j}^{k-1}\ln\left(V_0(t_h,t_{h+1})\right) = \frac{1}{t_k-t_j}\sum_{h=j}^{k-1}\delta_0^f(t_h)(t_{h+1}-t_h)$$

$$\delta_0^f(t_h) = \delta_0(t_h,t_{h+1}) = -\frac{1}{t_{h+1}-t_h}\ln\left(V_0(t_h,t_{h+1})\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(V_0(t_h,t_{h+1})\right) = -(t_{h+1}-t_h)\,\delta_0^f(t_h)$$

13 NOVEMBRE 2018

$$0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} i_0^f(t_j) = i_0(t_j,t_{j+1}) \\ \delta_0^f(t_j) = \delta_0(t_j,t_{j+1}) \\ L_0^f(t_j) = L_0(t_j,t_{j+1}) \end{array}\right] \quad t_j = 0 \quad \left.\begin{array}{l} i_0 \\ \delta_0 \\ L_0 \end{array}\right\}$$

Tassi a pronti uniperiodali prevalenti all'epoca 0

t_h $k \ge h$ $\delta_{t_h}(t_k,t_{k+1}) = \delta_{t_h}^f(t_k)$

$k = h$ δ_{t_h}

$0 \le t_j < t_k$ $\delta_0(t_j,t_k) = \sum_{h=j}^{k-1}\delta_0^f(t_h)\dfrac{(t_{h+1}-t_h)}{t_k-t_j}$

$j = 0$ $\delta_0(t_k) = \sum_{h=0}^{k-1}\delta_0^f(t_h)\dfrac{(t_{h+1}-t_h)}{t_k}$

$$V_0(t_k) = e^{-\delta_0(t_k)t_k} = e^{-\sum_{h=0}^{k-1}\delta_0^f(t_h)(t_{h+1}-t_h)}$$

Se invece i mercati sono aperti nel continuo, l'analogo del tasso monoperiodale è il tasso istantaneo. Nel continuo non c'è una vera e propria epoca successiva all'apertura dei mercati, sarebbe l'istante successivo. Le definizioni date nel continuo sono analoghe a quelle date nel discreto solo che si pone un passaggio al limite.

Scadenzario continuo:

tassi (intensità) istantanei forward:

$i_0^f \overset{def}{=} \lim_{S \to T^+} i_0(T,S)$

$\delta_0^f \overset{def}{=} \lim_{S \to T^+} \delta_0(T,S)$

$L_0^f \overset{def}{=} \lim_{S \to T^+} L_0(T,S)$

Se $T=0$ allora sono tassi a pronti istantanei i_0, δ_0, L_0

$0 \leq T < S$

$$\delta_0(T,S) = \frac{\int_T^S \delta_0^f(x)\,dx}{S-T}$$ intensità forward non istantanea

Se $T=0$ intensità a pronti non istantanea $\delta_0(S) = \frac{\int_0^S \delta_0^f(x)\,dx}{S}$

$$V_0(S) = e^{-\delta_0(S)S} = e^{-\int_0^S \delta_0^f(x)\,dx}$$

00:19

teorema tassi impliciti

$$V_0(T,S) = \frac{V_0(S)}{V_0(T)} = e^{-\delta_0(T,S)(S-T)} \Rightarrow \delta_0(T,S) = -\frac{\ln(V_0(T,S))}{S-T} =$$

Questo è il rapporto incrementale della funzione $\ln(V_0(\cdot))$ calcolata in T col meno davanti $\Rightarrow$ $= -\frac{\ln(V_0(S)) - \ln(V_0(T))}{S-T}$

$$\delta_0^f(T) = \lim_{S \to T^+} \delta_0(T,S) \underset{\text{se } \exists \text{ finito}}{=} -\frac{d\ln(V_0(T))}{dT}$$ è una derivata destra

00:26

$$\int_T^S \delta_0^f(x)\,dx = -\int_T^S \frac{d\ln(V_0(x))}{dx}\,dx \overset{??}{=} -\Big[\underbrace{\ln(V_0(x))}_{\text{primitiva}}\Big]_T^S = -\big(\ln(V_0(S)) - \ln(V_0(T))\big) =$$

$$= -\ln\left(\frac{V_0(S)}{V_0(T)}\right) = -\ln(V_0(T,S)) = \delta_0(T,S)(S-T)$$

00:29

Obbligazioni: Prestiti divisi attraverso i quali ... sono dei titoli...

emissione $\longrightarrow$ collocamento (del prestito) nel MERCATO PRIMARIO

$\rightarrow$ negoziazione successiva (tramite intermediari) nel MERCATO SECONDARIO

Classificazione delle obbligazioni:

- Obbligazioni senza cedola (esempi BOT, CTZ) z.c.b.
  buoni fruttiferi postali sono un ibrido tra gli ZCB e i coupon-bond
- Obbligazioni a cedola fissa (esempi BTP) coupon bonds
- Obbligazioni a tasso variabile (stocasticamente), Floaters, Floating rate bond (esempi CCT)

www.dt.tesoro.it Certificati di credito del tesoro (CCT): durata 7 anni pagamento cedole alla fine di ogni semestre e le cedole sono PREDETERMINATE cioè nel momento in cui avviene l'emissione si conosce già quale sarà la prima cedola, perché è collegata a qualcosa che all'emissione si è già osservato, mentre la seconda cedola non essendo nota al momento dell'emissione (in 0) non la conosco ancora, sarà nota alla data di pagamento della prima cedola.
il riferimento è costituito dal tasso di rendimento dei BOT a 6 mesi $+0{,}15\%$ (controllare sul sito)

Anche le società private emettono dei titoli a cedola variabile. Tipicamente una società che emette un'obbligazione a tasso variabile pagherà periodicamente (per esempio la cedola che viene pagata fra un anno è il tasso EURIBOR che adesso è quotato per la scadenza fra 3 mesi la cedola del secondo anno sarà il tasso EURIBOR a 3 mesi osservato fra un anno e...) le cedole

Per i titoli emessi dalle società il riferimento è il tasso EURIBOR a 3 mesi + uno spread : cedola

- Reverse Floaters (Obbligazioni a tasso variabile inverso): sono come le obbligazioni a tasso variabile con gli stessi riferimenti però il collegamento è inverso. Tanto + alto è il tasso Tanto − sarà la cedola pagata.

[gli esempi che la prof. ha portato pagano delle cedole che sono crescenti in maniera lineare rispetto all'indice di riferimento, nel caso dei Reverse Floaters le cedole sono decrescenti in maniera lineare. (A meno che non sia zero perché meno di zero non viene mai pagato)]

Le cedole possono dipendere da un indice di Borsa oppure dall'indice dei prezzi al consumo, oppure ancora dal prezzo di una merce, in sostanza possono dipendere da tanti indici collegati anche a cose inimmaginabili.

00:5

- Obbligazioni con tasso variabile deterministicamente (fissato e non costante)
  - tassi ↑ : STEP-UP Se i tassi aumentano (o non diminuiscono)
  - tassi ↓ : STEP-DOWN Se i tassi diminuiscono (o non aumentano)

00:58

- Obbligazioni emesse da società private che prevedono un ammortamento progressivo del debito:

ⓐ obbligazioni con pagamento periodico sia di cedole sia di q. capitale → SINKING FUND BONDS (piuttosto rare)

ⓑ obbligazioni rimborsabili tramite sorteggio

ⓒ obbligazioni CALLABLE : obbligazioni normali che hanno la clausola di rimborso anticipato a discrezione dello emittente, quindi ha l'opzione di decidere di rimborsarle anticipatamente pagando un valore di rimborso prefissato nel contratto (= Val nom. oppure > Val nom.). Un'obbligazione CALLABLE vale di meno rispetto ad un'obbligazione definita normale perché ci si aspetta che l'emittente agisca in modo razionale (Nessuno è un benefattore!!). Si supponga che l'emittente abbia fatto il suo piano di ammortamento e ad una certa data vuole restituire il capitale pari al valore nominale di un certo numero m di obbligazioni, estinguendo il debito rimborsando anticipatamente. Nel contratto c'è la clausola di restituzione anticipata, quindi l'emittente potrebbe alternativamente ma in alternativa potrebbe anche acquistare le sue obbligazioni direttamente sul mercato secondario. Quindi l'emittente in sostanza potrebbe comprare le sue obbligazioni sul mercato se il valore di mercato di queste ultime è + piccolo del valore di rimborso, se invece il valore di mercato è + grande del valore di rimborso allora l'emittente le rimborsa. Rimborsando le obbligazioni nel secondo caso l'emittente pagherà di meno in termini di cedola. Il creditore ha anche emesso una opzione a favore dell'emittente (oppure a favore PUT). Se all'obbligazione viene rimborsata l'obbligazione anticipatamente vuol dire che il valore di mercato è alto, per cui si chiude subito pagandogli di meno del valore di mercato

(Pag. 55-58)

Zero Coupon Bond:

BOT (Buoni ordinari del tesoro) all'emissione $\to$ 3 mesi, 6 mesi, 1 anno

CTZ (certificati del tesoro Z.C.B.) all'emissione $\to$ 1,5 anno oppure 2 anni

emissione $\to$ asta

negoziazione successiva prezzo $\to$ Domanda – Offerta

taglio minimo 1000€ di valore nominale (non vale la divisibilità degli importi)

quotazione su base 100 (ogni 100€ di valore nominale)

Se il prezzo che osservo oggi è di 99,5 e compro titoli per un val. nominale di 4000€ il titolo che acquisto lo compro al prezzo effettivo di 3980€ $\to 4000€ \cdot \frac{99.5}{100} = 3980€$

I BOT che hanno scadenza di 3 mesi o 1 anno emessi il 15 di ogni mese, invece i BOT con scadenza a 6 mesi vengono emessi alla fine di ogni mese. I CTZ vengono emessi alla fine di ogni mese però non vengono emessi ogni mese

$\boxed{01:17}$

Supponiamo nelle nostre situazioni che il valore nominale sia unitario

$V_t(T)$: prezzo a pronti in t di uno Z.C.B. unitario che scade in T

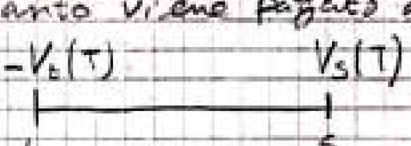
TASSO DI RENDIMENTO a SCADENZA oppure YIELD TO MATURITY il TIR di quest'operazione:

Per i BOT dato che le scadenze sono sotto l'anno per calcolare i tassi vengono calcolati nel regime dell'interesse semplice (ACT/360 convenzione calcolo giorni) $L_t(T)$

Per i CTZ ... regime dell'interesse composto $i_t(T)$

Questi tassi vengono pubblicati in t (sono già noti in t) perché sono tassi che presuppongono che il titolo venga tenuto fino alla scadenza T e quindi si sa quanto viene pagato a scadenza. Se invece si decidesse di comprare il titolo in t e di rivenderlo prima della scadenza ($S<T$) ecco che allora in t non si potrebbe pubblicare quant'è il tasso di rendimento perché in t

$t < S < T$



si sa quanto si paga ma la vendita in S avverrebbe al prezzo SPOT prevalente sul mercato all'epoca S cioè $V_S(T)$ che in t è ALEATORIO per cui il TIR di quest'operazione si può calcolare ma solo a posteriori in S una volta vendute le obbligazioni.

14 NOVEMBRE 2018: Domanda sulle obbligazioni CALLABLE

Se l'obbligazione viene rimborsata prima è perché conviene a chi ha la facoltà di scelta di rimborsarla piuttosto che comprarla sul mercato, quello che l'emittente paga come rimborso è di meno rispetto a quello che dovrebbe pagare se comprasse l'obbligazione sul mercato.
Un'obbligazione Callable si può ottenere come un'obbligazione normale con lo stesso tasso meno un'OPZIONE, dove un'opzione è un titolo che ha un valore non negativo (meno perché si è dal punto di vista dell'obbligazionista), poi si quantifica la differenza dei valori

Nel caso Z.C.B. per determinare se i tassi si utilizza il regime dello interesse semplice.

$-V_t(T)$ 1

t T

$V_t(T)$ è il rendimento a scadenza (YIELD TO MATURITY)

$$V_t(T) = \frac{1}{1+L_t(T)(T-t)} \rightarrow L_t(T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{V_t(T)} - 1\right]$$

Questo a sinistra è il rendimento a scadenza TEORICO, calcolato senza tasse e senza costi di transazione (commissioni)

In realtà nel mondo reale ci sono anche le tasse e le commissioni. Parliamo SOLO di tasse. Se si considerano i titoli di stato oppure i buoni fruttiferi postali l'aliquota di tassazione è del 12,5% mentre se si considerano i titoli di altre società l'aliquota è del 26%. La tassazione è sia sugli interessi che sul conto capitale. Comunque in sostanza i RENDIMENTI lordi e netti vengono definiti come TIR delle operazioni che prevedono tutti gli acquisti, quello che si paga al lordo delle tasse, quello che si riceve al netto delle tasse, ecc. come se tutto venisse tenuto fino in fondo a scadenza. Solo in questo caso è possibile calcolare il rendimento a priori. Se il titolo viene venduto prima il rendimento solo a posteriori. La quotazione si chiama anche CORSO, il prezzo del titolo.

Consideriamo le date sui BOT sul sito Borsa Italiana

Base 1   Si suppone che il BOT venga emesso all'epoca 0 (zero) con scadenza T e le quotazioni avvengono per ogni € di val. nominale

corso ALLA PARI

$0 \quad T \qquad V_0(T) < 1$, interessi anticipati: $(1 - V_0(T))$ quello che si riceve in fondo meno quello che si paga in anticipo

Sugli interessi anticipati si paga la tassa del 12,5% e viene pagata anche in 0 (emissione), quindi si pagherà:

$0{,}125\,(1 - V_0(T))$: Questa è la tassa che si paga per i BOT

il rendimento a scadenza è il TIR di quest'operazione (rendimento netto)

$$V_0^{tax}(T) = V_0(T) + 0.125(1 - V_0(T)) = 0{,}875\,V_0(T) + 0{,}125$$

dal prezzo si esplicita il tasso, che è proprio quello che si sente

$-V_0^{tax}(T)$ 1

0 T

$$L_0^{netto}(T) = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{V_0^{tax}(T)} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{0{,}875\,V_0(T) + 0{,}125} - 1\right] =$$

nella formula si sostituisce $V_0^{tax}(T) = 0{,}875\,V_0(T) + 0{,}125$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{0{,}875\,\frac{1}{1+L_0(T)T} + 0{,}125} - 1\right] = \frac{1}{T}\left[\frac{1 + L_0(T)T - 1 - 0{,}125\,L_0(T)T}{\underbrace{0{,}875 + 0{,}125}_{1} + 0{,}125\,L_0(T)T}\right] =$$

saltando alcuni passaggi

$$= \frac{0{,}875\,L_0(T)}{1 + 0{,}125\,L_0(T)T}$$

100:28

Cosa succede se si compra il titolo nel mercato secondario in $t > 0$? L'intera tassa è stata già pagata allo stato da chi ha comprato il titolo all'emissione, quindi in $t > 0$ non c'è più nessuna tassa da pagare allo stato, però per equità chi vende il titolo dovrebbe ricevere da chi lo compra la parte che copre le tasse che vanno dal momento in cui si scambia il titolo fino a scadenza. Per convenzione la parte di competenza del periodo che va da t a T si calcola proporzionalmente, così:

$0 \qquad t \qquad T$

$$0{,}125\,(1 - V_0(T))\,\frac{T-t}{T}$$

$V_t(T)$: Prezzo di acquisto in t

$(1 - V_0(T))$: Interessi sul periodo che va da 0 a T

Quindi quello che si pagherà in t sarà complessivamente:

$$V_t^{tax}(T) = V_t(T) + 0{,}125\,(1 - V_0(T))\,\frac{T-t}{T}$$

Supposto che l'interesse $(1 - V_0(T)) > 0$. Quindi nel momento in cui si fa l'operazione, supposto sempre che il BOT venga tenuto fino a scadenza, si calcolerà il rendimento netto dell'operazione a sinistra come il TIR dell'operazione. Indicato con L_t^{netto}.

Se si fa la curvosità si può calcolare $L_t(T)$.

$$L_t^{netto}(T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{V_t^{netto}(T)} - 1\right]$$

Ma non è ancora finita perchè ci sono altre tasse da pagare, perchè queste di cui si è parlato finora sono soltanto le tasse sugli INTERESSI, ma ci sono altre tasse per i guadagni in conto capitale (PLUSVALENZE) e crediti fiscali per le perdite in conto capitale (MINUSVALENZE). Idealmente il prezzo che si paga all'acquisto (lordo), $V_t(T)$, è interpretabile come un fattore di attualizzazione, nel senso che si riceve 1 in T e si vuole capire quanto si deve pagare prima. In realtà non si sa quanto si deve pagare prima perchè sono dei prezzi che al variare di t, tenendo fissa la scadenza T, evolvono in maniera aleatoria dipendendo dalle condizioni del mercato. Se le condizioni del mercato rimanessero invariate con tasso $L_0(T)$ il titolo vale $V_0(T)$ e se rimane invariato, man mano che passa il tempo il prezzo dovrebbe aumentare fino ad arrivare ad 1 a scadenza. Ma come aumenta? Visto che si ragiona nel regime dell'interesse semplice, il prezzo aumenterà linearmente e quindi il prezzo iniziale verrà [illegible] nel regime dell'interesse semplice al tasso $L_0(T)$ supposto INVARIATO, quindi il prezzo in t in questa situazione ideale sarà:

$$V_t(T) = V_0(T)\left[1 + L_0(T)t\right] \quad *1 \qquad \text{Se si prende } t = T \text{ allora } V_T(T) = 1$$

Questa è una situazione teorica in cui si conosce a priori il tasso $L_0(T)$. In realtà nella pratica non è così perchè $V_t(T)$ si forma nel mercato ed è aleatorio quindi l'uguaglianza di cui sopra non sussiste. Tutto quello che in qualche modo è discosto dalla relazione $*1$, quindi $V_t(T)$ può essere più grande oppure più piccolo di $*1$, viene considerato come un guadagno oppure una perdita in conto capitale, cioè guadagni o perdite per movimenti non dovuti agli interessi.

PLUSVALENZA: guadagno in C.C.; MINUSVALENZA: perdita in C.C..

Come vengono trattate queste PLUSVALENZE o MINUSVALENZE e quando vengono pagate le eventuali tasse?

Le eventuali tasse sulle PLUSVALENZE (le tasse si pagano se c'è un guadagno, non se c'è una perdita) vengono comunque pagate nel momento in cui il guadagno viene realizzato e non anticipatamente come avviene per gli interessi. Al momento della vendita del titolo (prima della scadenza) oppure alla scadenza vengono calcolate queste tasse, potrebbe esserci una plusvalenza anche qualora si tenesse il titolo fino a scadenza, purchè però si sia comprato dopo.

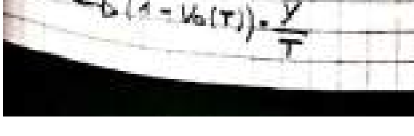
Se il titolo viene comprato in 0 e si tiene fino a T non c'è nessuna plusvalenza. Quindi le plusvalenze o le minusvalenze nascono SOLO nel momento in cui si compra il titolo dopo l'emissione oppure se già si possiede e si vende prima della scadenza. Se c'è una plusvalenza si paga una tassa del 12,5%. Se invece di una plusvalenza si ha una minusvalenza si ha la possibilità di compensare eventuali plusvalenze derivanti da altri titoli con le minusvalenze. Se si possiede solo un titolo e nient'altro e ad un certo punto quando si vende si genera una minusvalenza non succede niente. Se invece oltre a possedere quel titolo si possiedono altri titoli che hanno creato delle plusvalenze allora anzichè pagare la tassa intera del 12,5% sulle plusvalenze si calcola la somma algebrica delle plusvalenze e delle minusvalenze e si calcola la tassa sul risultato finale. Ecco perchè le minusvalenze vengono anche definite come CREDITI D'IMPOSTA.

Come vengono calcolate convenzionalmente le plusvalenze?

Nel prezzo di acquisto del titolo o di vendita che si indicherà con $V_Y(T)$

$V_Y(T)$ con $0 \leq Y < T$ è compresa una parte d'interesse

Se si vogliono calcolare solo le variazioni in conto capitale si devono scorporare gli interessi dal prezzo $V_Y(T)$, quindi il prezzo al netto degli interessi scorporati verrà indicato con $V_Y^*(T)$ e lo scorporo avviene linearmente:



$$V_Y^*(T) = V_Y(T) - (1 - V_0(T))\frac{Y}{T}$$

segue

L'epoca di emissione è 0 (zero), la scadenza avviene in T. Si supponga che il titolo venga acquistato in $t \geq 0$ e si supponga di venderlo in un istante successivo $S \leq T$. Quindi la plusvalenza o minusvalenza viene calcolata come differenza tra il prezzo di vendita al netto degli interessi scorporati con quella convenzione meno il prezzo di acquisto al netto sempre degli interessi scorporati.

$0 \leq t < S \leq T$ (t: acquisto, S: vendita)

$$\underbrace{V_S^*(T) - V_t^*(T)}_{} = V_S(T) - V_t(T) - (1 - V_0(T))\frac{S-t}{T}$$

- Se $V_S^*(T) - V_t^*(T) > 0$: PLUSVALENZA
- Se $V_S^*(T) - V_t^*(T) < 0$: MINUSVALENZA

Se $t = 0,\ S = T \Rightarrow V_T(T) - V_0(T) - (1 - V_0(T))\frac{T}{T} = 1 - V_0(T) - (1 - V_0(T)) = 0$ NIENTE

Obbligazioni con cedola fissa (coupon bonds): Ipotesi che le quotazioni avvengano con valore nominale = 1, gli interessi si calcolano nel regime dello interesse composto, poiché per questi titoli la durata è superiore all'anno. L'unica differenza è che se sono titoli statali la tassazione è del 12,5% mentre se sono di società private è del 26%.
Nelle nostre applicazioni si lavora con leggi omogenee d'importo. La proprietà di omogeneità d'importo che ha come conseguenza la divisibilità degli importi non viene rispettata sempre nella pratica. Per questi titoli quello che si paga è il prezzo intero più la quota ...
Il tasso che viene dichiarato quando questi titoli vengono emessi, non è un tasso annuo ma un tasso nominale convertibile K volte l'anno

$j_K = i_K \cdot K$: tasso nominale

K è il numero di cedole che vengono pagate in un anno dal titolo.
Un coupon bond paga alla fine di ciascun periodo gli interessi e alla fine restituisce il valore nominale (cioè 1, in questo caso).
Il tasso che viene usato per calcolare le cedole è dato da:

$i_K = \frac{j_K}{K}$: tasso cedolare — dove in questo contesto si chiama "i_c" dove "c" a pedice sta per l'iniziale di cedola

la cedola sarà : $1 \cdot i_c$ (valore nominale $\cdot$ tasso)

$-B_0$	i_c	i_c	...	$i_c + 1$
0	$1/K$	$2/K$	...	$T = \frac{KT}{K}$

$*2$

BTP (Buoni del tesoro poliennali): le cedole vengono pagate ogni semestre quindi $K = 2$.
Così come per i BOT le quotazioni vengono fatte per ogni 100 € di valore nominale e il taglio minimo all'acquisto è di 1000 €.
Scadenze dall'emissione: 3, 5, 10, 15, 30, 50 anni. Questi titoli a seconda della scadenza vengono emessi alla fine di ogni mese oppure a metà mese, non è detto però che vengono emessi ogni mese.

B_0: prezzo all'emissione del titolo, potrebbe capitare $B_0 \lesseqgtr 1$ (sotto la pari / alla pari / sopra la pari)

Il fatto che $B_0 > 1$ non è sufficiente a dire che, come nel caso degli ZCB, che si hanno rendimenti negativi.
Il rendimento a scadenza del titolo (acquistato in 0 e tenuto fino a scadenza) è il TIR dell'operazione $*2$ e viene calcolato nel regime dell'interesse composto. Anche se $B_0 > 1$ non è detto che il TIR sia negativo. Quindi sono state date condizioni sufficienti per l'esistenza, l'unicità ma anche la positività una di queste era che la somma algebrica di tutti i pagamenti futuri fosse maggiore dell'investimento iniziale, quindi in questo caso

Se $i_c(KT) + 1 > B_0$ allora il TIR è positivo anche se $B_0 > 1$

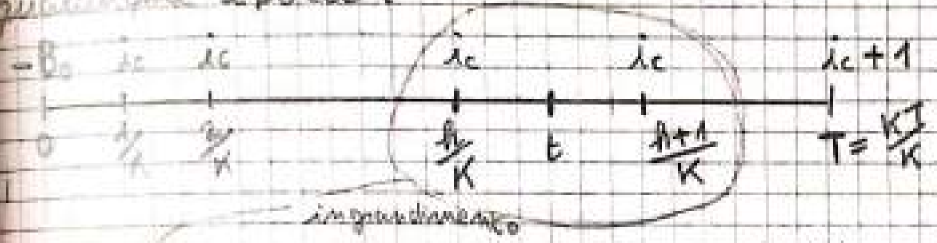
Infatti se si guardano le quotazioni si verifica che anche nel caso di un titolo che sia quotato sopra la pari il rendimento è positivo.

Corso è sinonimo di prezzo

Le quotazioni che si leggono, in realtà, avvengono al cosiddetto **CORSO SECCO**

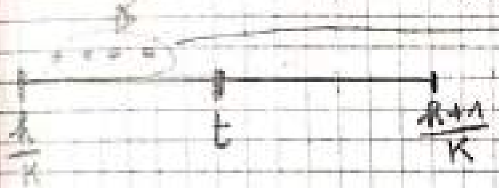
Il CORSO SECCO è il prezzo rapportato ai 100€ di valore nominale però l'acquisto avviene al **CORSO TEL-QUEL**.

Il titolo ad esempio può essere acquistato sul mercato secondario in qualunque epoca:



$$\frac{h}{K} \leq t < \frac{h+1}{K}$$

t è un epoca generica



▷ Rateo d'interesse: A_t

$$A_t = \frac{i_c\left(t - \frac{h}{K}\right)}{1/K} = i_c(tK - h) = i_c K\left(t - \frac{h}{K}\right)$$

dove $i_c K$ è il tasso nominale

Per esempio l'acquisto può avvenire in un'epoca generica t compresa tra 2 date di pagamento cedola $[\frac{h}{K}, \frac{h+1}{K}[$.

Oltre al CORSO SECCO quotato si deve comprare il RATEO D'INTERESSE, cioè si deve pagare al venditore la parte d'interesse (quella indicata da ••••) che non è di competenza dell'acquirente. Si paga in + all'inizio. Il rateo d'interesse viene calcolato proporzionalmente

$$A_t = \frac{i_c\left(t - \frac{h}{K}\right)}{1/K} = i_c(tK - h) = i_c K\left(t - \frac{h}{K}\right)$$

$$B_t^{\text{tel-quel}} = B_t^{\text{secco}} + A_t$$

Se l'acquisto avviene esattamente in una data di pagamento cedola allora $B_t^{\text{tel-quel}} = B_t^{\text{secco}}$ e $A_t = 0$

19 NOVEMBRE 2018:

25% [illegible]

[illegible] per obbligazioni statali? [illegible]

lun - mar [illegible] le giorni
solo mercoledì

[illegible] Borsa Italiana.it

Per i BTP le cedole vengono pagate ogni semestre

corso secco : 129,01

tasso nominale : $9\% = i_2$

cedola : 4,5 ogni 1-11 e 1-5

19-11-2018 oggi) Si suppone di voler acquistare 30'000€ di valore nominale [illegible] 100€ di valore nominale ha un corso secco di 129,01. Se si vuole comprare 30'000 € di valore nominale. [illegible] 10 cedole più la restituzione del valore nominale a scadenza [illegible] 45 per ogni 100 quindi la somma algebrica sarà:

$100 + 45 = 145$ [illegible] $145 > 129{,}01 +$ Rateo

00:12

$B_t^{secco} = 129{,}01$

ACT / ACT : convenzione utilizzata

$[illegible] = 4{,}5 \cdot \frac{18}{181} \simeq 0{,}45$

$B_t^{tel-quel} = 129{,}01 + 0{,}45 = 129{,}46$

[illegible] 1/05/19

29 +
31 +
31 +
28 +
31 +
30 +
1 =
181

Senza calcolare tasse e altro si spenderà

$30'000€ \cdot \frac{129{,}46}{100} = 38'838$ €

18 sono i giorni intercorsi tra l'ultima cedola prima dell'acquisto e l'acquisto (la prima data non si conta mentre l'ultima si) 181 sono i giorni che intercorrono tra il pagamento della cedola del 1/11/18 e il pagamento della cedola del 1/05/19 (la prima data non si conta mentre la ultima sì). Le cedole pagate saranno pari a: $30'000 \cdot 0{,}045 = 1350€$ ogni semestre verrà pagato 1350€ di cedola + restituzione del valore nominale [illegible]. Se invece si vogliono investire 30'000€ si riuscirà a comprare

$(30'000 \cdot 100)/129{,}46 = 23'173{,}18$ € $\sim 20'000$ di valore nominale

(Tasso di) Rendimento a scadenza o Yield to maturity:

il TIR della seguente op. finanziaria*1 l'acquisto avviene in t al corso tel-quel

$B_t^{tel-quel}$ con $\frac{h}{K} \leq t \leq \frac{h+1}{K}$

K: numero di cedole allo anno

$-B_t^{tel-quel}$	I_C	I_C	...	I_C+1
t	$\frac{h+1}{K}$	$\frac{h+2}{K}$	...	$\frac{TK}{K}$

*1 nel regime dell'interesse composto nel caso di BTP o di coupon bond

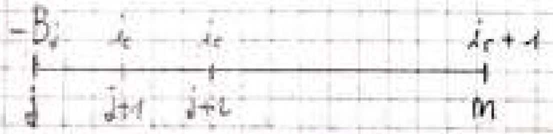
00:25

Si supponga che le cedole siano annue, quindi $i_c = i_K$ poiché $K = 1$ (tasso cedolare = tasso nominale), si supponga inoltre che l'acquisto del titolo avvenga in corrispondenza ad un'epoca di pagamento cedola, quindi $B_t^{secco} = B_t^{tel-quel}$ (corso secco = corso tel-quel) non c'è Rateo. Tutte queste considerazioni che si faranno saranno ancora valide anche se la periodicità dei pagamenti non è l'anno pur di considerare tassi corrispondenti ...

Scanned by CamScanner

... all'ampiezza del periodo. Per esempio se la periodicità è un K-esimo d'anno quello che si andrà a confrontare sarà il tasso cedolare con il corrispondente TIR su base il K-esimo d'anno nel regime dell'interesse composto, dopo si passa al TIR su base annua che è quello che viene normalmente pubblicato.

Sotto queste ipotesi:
- tasso cedolare = tasso nominale
- acquisto BTP in un'epoca di pagamento cedole



$(m-j)$ cedole

Il TIR è quel particolare tasso che annulla il Valore attuale netto (VAN) dell'operazione. In questo caso il VAN è il valore attuale di tutti i pagamenti futuri $-B_j$ (prezzo di acquisto del BTP), perché B_j è già in j (dove j è la epoca in cui si calcola il Valore attuale netto).

Condizione di $\exists$ del TIR: $(m-j)i_c+1 > B_j$

Il TIR di quest'operazione è quel tasso che fa sì che il valore attuale di tutti i pagamenti futuri sia esattamente pari a B_j. Si sa che i pagamenti cedolari sono costanti quindi $i_c\, a_{\overline{m-j}|TIR}$ + il pagamento finale del valore nominale (1 in questo caso teorico) che viene scontato con tasso il TIR di $(m-j)$ periodi.

Valore attuale di tutti i pagamenti futuri: $B_j = i_c\, a_{\overline{m-j}|TIR} + 1 \cdot \left(\frac{1}{1+TIR}\right)^{m-j}$

Facendo un richiamo agli ammortamenti a interessi posticipati

$Q_j \qquad i$

$V_j \qquad i'$

$V_j \gtreqless Q_j \iff i' \lesseqgtr i$

$Q_j \longrightarrow 1$ (restituzione a scadenza)

$V_j \longrightarrow B_j$

$i \longrightarrow i_c$

$i' \longrightarrow TIR$

In questo contesto:

$B_j \gtreqless 1 \iff TIR \lesseqgtr i_c$

Il debito residuo Q_j è il valore attuale di tutti i pagamenti futuri (rate future) al tasso i.
Il valore residuo V_j è il valore attuale di tutti i pagamenti futuri (rate future) al tasso i'

Se le cedole vengono pagate nel K-esimo d'anno

K

$TIR_K \qquad i_c$

$\Downarrow$

$(1+TIR_K)^K - 1 = TIR$

$\neq K\, TIR_K$

A parità di tutto il resto

Cosa succede se aumenta i_c (tasso cedolare)?

- TIR $\uparrow$ con i_c
- TIR $\downarrow$ con B_j

tanto + si prenderà in futuro, tanto + sarà il rendimento, si deve usare un tasso di attualizzazione + alto per sgonfiare le cedole e riportarle tutte in modo da avere B_j come prezzo d'acquisto. Analogamente se aumenta B_j si pagherà di più l'acquisto del titolo e se si paga di più B_j il titolo rende di meno.

Come varia il TIR al variare di m?

Se $B_j = 1$ (titolo quotato alla pari) il TIR ($= i_c$) non cambia con m

Se $B_j < 1$ (titolo quotato sotto la pari) il TIR ($> i_c$) $\downarrow$ con m

Se $B_j > 1$ (titolo quotato sopra la pari) il TIR ($< i_c$) $\uparrow$ con m

Il TIR rappresenta il rendimento dell'operazione su base annua. Nel caso in cui il titolo sia quotato sotto la pari il TIR risulta maggiore di ic perché si trae rendimento sia dal fatto di percepire le cedole ma anche dal fatto che si presta meno di 1 e viene restituito 1 a scadenza, quindi a scadenza si avrà la somma algebrica di tutte le cedole + $(1-B_j)$ (ricevuto una tantum a scadenza)

i_c è distribuito periodicamente

$(1-B_j)$ è ricevuto una tantum

Se la durata fosse solo un anno quindi $m = j+1$ si avrebbe come rendimento a scadenza $i_c + (1-B_j)$. Questo fa salire parecchio il TIR rispetto a i_c

Se invece la durata fosse molto lunga (tipo 30 o 50 anni) allora $(1-B_j)$ anche se fosse consistente si spalmerebbe su tutto il periodo avendo di fatto meno peso. In sostanza se si considera $(1-B_j)$ si ha che esso pesa di meno per periodi lunghi e pesa di più man mano che il periodo è più corto, a parità di $(1-B_j)$ il TIR diminuisce con n. Se la quotazione è sopra la pari allora vale il discorso opposto.
Se il TIR è negativo tutto quello che è stato detto prima non vale, mentre se la durata fosse perpetua ($n \to +\infty$) e considerando che dato che è perpetua la durata e non ci sarebbe il rimborso del valore nominale in fondo, il TIR sarebbe una rendita perpetua pari a i_c attualizzata con il TIR.

$$i_c\, a_{\overline{\infty}|i} = \frac{i_c}{i} \quad \text{quindi:} \quad B_j = \frac{i_c}{TIR_\infty} \Rightarrow TIR_\infty = \frac{i_c}{B_j} \qquad \text{Posto: } i = TIR_\infty$$

E il TIR sarà tale da far sì che il valore attuale di questa rendita perpetua $i_c\, a_{\overline{\infty}|i}$ sia esattamente pari a B_j. TIR_∞ è il rapporto tra la cedola ricevuta in ogni periodo e il prezzo B_j

Tassazione sui coupon bond (tra cui anche i BTP): 00:55

per le imprese private l'aliquota invece che del 12,5% è del 26%

$0{,}875\, i_c$: cedola netta

$0{,}875\, A_t$: Rateo al netto delle tasse (da pagare al venditore) perché si paga il rateo al netto della tassa

Se il titolo viene comprato in 0 e viene tenuto fino a scadenza e nel caso in cui $B_0 < 1$ (sotto la pari), la diff. $1 - B_0$ è considerata RENDIMENTO, quindi alla scadenza:

alla scadenza si paga $0{,}125(1-B_0)_+$ (solo se $1-B_0$ è POSITIVO)

$$X_+ = \max\{X, 0\} = \begin{cases} X & \text{se } X \geq 0 \\ 0 & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

Nei BOT invece la tassa su questo rendimento veniva pagata ANTICIPATAMENTE

Titolo comprato in 0 e tenuto fino a scadenza:

$$\begin{array}{ccccc} -B_0 & i_c 0{,}875 & i_c 0{,}875 & \dots & i_c 0{,}875 + 1 - 0{,}125(1-B_0)_+ \\ \hline 0 & 1/2 & 1 & \dots & T \end{array}$$

→ tassa da pagare

Titolo comprato in $t > 0$ e tenuto fino a scadenza:

$$B_t^{tel\text{-}quel,tax} = B_t^{secco,tax} + A_t^{netto}$$

dove: $A_t^{netto} = 0{,}875\, A_0$; $B_t^{secco,tax} = B_t^{secco} - 0{,}125(1-B_0)_+ \cdot \frac{t}{T}$

considerando il periodo $\underset{0 \quad\quad t \quad\quad\quad T}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!+\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}$ in cui è calcolato $B_t^{secco,tax}$

Dato che a scadenza va pagata la tassa $0{,}125(1-B_0)_+$ anche se il titolo è stato comprato dopo l'emissione, al momento dello acquisto si toglie la quota di tassa che va dall'emissione al momento dell'acquisto, di ampiezza t.

$$\begin{array}{ccccc} -B_t^{tel\text{-}quel,tax} & i_c 0{,}875 & i_c 0{,}875 & \dots & i_c \cdot 0{,}875 + 1 - 0{,}125(1-B_0)_+ \\ \hline t & \frac{k+1}{2} & \frac{k+2}{2} & \dots & T \end{array}$$

Quindi il TIR di questa operazione che si può calcolare in t è il TIR dell'operazione che prevede quello che c'è a sinistra.
Il TIR di quest'operazione dà il rendimento al netto delle tasse

Plusvalenze (o Minusvalenze): $0 \leq t < S \leq T$ [01:13]

Vengono calcolate sulla base di un corso secco depurato di una tassa pagata a scadenza $0,125(1-B_0)_+$

$$(B_S^* - B_t^*) = B_S^{secco} - B_t^{secco} - (1-B_0)_+ \frac{S-t}{T}$$

Se il titolo in 0 vale meno di 1 e a scadenza si riceve 1 (supposto che l'acquisto sia avvenuto in 0), non può essere considerata PLUSVALENZA la differenza $(1-B_0)_+$ perché è già PREVISTO che la tassa venga pagata per quella differenza e quindi se si considerasse plusvalenza si pagherebbero le tasse 2 volte perciò si depura di $(1-B_0)_+ Y/T$

$$B_Y^* = B_Y^{secco} - (1-B_0)_+ \frac{Y}{T}$$ (va tolta la differenza $(1-B_0)_+$ e non $0,125(1-B_0)_+$)

$t=0$, $S=T$ [01:20]

$$1 - B_0 - (1-B_0)_+ = (B_S^* - B_t^*)$$

$B_0 = 1$ (alla pari) la quantità sopra è nulla.
Di solito all'emissione le obbligazioni sono emesse alla pari nel senso che il tasso che viene corrisposto (tasso nominale) viene calcolato in modo tale da far sì che il valore dell'obbligazione sia 1 $\rightarrow$ TIR = ic [01:23]

Rischio di credito: È il rischio che l'emittente non riesca (rischio di insolvenza di default) a pagare tutto o in parte di quanto dovuto

L'interesse è anche chiamato PREZZO DEL TEMPO, perché se per esempio si ha a disposizione un certo capitale si potrebbe godere subito di questo spendendolo, oppure differire il consumo, cioè rinunciare al consumo immediato pretendendo qualcosa in + come compenso. Il rendimento a scadenza di una obbligazione che è soggetta a rischio di credito deve compensare non solo il prezzo del tempo ma deve anche remunerare il rischio, quindi:

Prezzo del tempo + Premio per il rischio (di non vedere pagato quanto è stato promesso dal titolo)

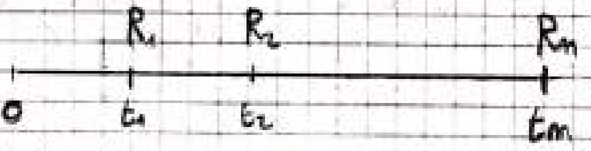
Tanto + alto è questo rischio d'insolvenza, tanto − vale l'obbligazione e se l'obbligazione vale di meno al momento dell'acquisto, il TIR promesso sarà + grande (rendimento a scadenza). La differenza tra il TIR di un'obbligazione soggetta a rischio di credito e di un'altra che ha gli stessi pagamenti futuri promessi ma senza rischio di credito, viene chiamato SPREAD ed è una misura del rischio di credito
Va considerato il TIR e non il tasso nominale
Rating agenzie specializzate Standard & Poor's, Moody's, Fitch

Questi giudizi vengono dati non ogni giorno ma periodicamente, potrebbe non essere aggiornato come lo spread

---

20 NOVEMBRE 2018:

(zero) 0: è l'istante in cui ci si trova



$R_j > 0 \quad \forall j$

Si lavora nel regime dell'interesse composto

$i_0(t_j)$: tasso a pronti
$\delta_0(t_j)$: intensità a pronti
i, $\delta = \ln(1+i)$: si usa lo stesso tasso

$t_1 < t_2 < \dots < t_m$ non necessariamente equintervallate

Si può aver prestato del denaro e questi qui sopra sono flussi positivi di denaro. Possiamo definire quella cosa lì sopra una rendita, perché si hanno flussi di cassa positivi, ma non sono

Portafoglio di titoli: insieme di titoli

necessariamente esigibili in scadenze equintervallate. L'obiettivo è quello di valutare questa rendita (portafoglio) in 0 (zero) e calcolarne il valore attuale. Bisogna portare in 0 tutte le rate e sommare i valori attuali di tutte le rate. Per valutare questa rendita si dovrebbe scontare ogni rata con il tasso (oppure l'intensità) corrispondente alla data in cui è esigibile

Ipotesi più semplice $\rightarrow$ Scontare tutto con lo STESSO tasso (o intensità)

Questa ipotesi si può giustificare ad esempio pensando che la struttura per scadenza dei tassi a pronti sia PIATTA, quindi si ha una funzione costante

1) Struttura per scadenza dei tassi a pronti piatta
2) Se non è piatta —▷ TIR dell'obbligazione se è quotata
—▷ TIR di "obbligazioni simili" se è non quotata

Se la struttura per scadenza dei tassi a pronti non è piatta ma si ha intenzione di scontare tutto con lo stesso tasso si può pensare di utilizzare un tasso che riassuma la struttura per scadenza. Se la rendita è costituita dai ricavi che derivano dal possesso di un'obbligazione e questa obbligazione è quotata (ovvero si conosce il prezzo in 0 (zero)) sul mercato si potrebbe utilizzare il TIR dell'obbligazione stessa. Se non è quotata sul mercato allora si utilizza come tasso il TIR di obbligazioni "simili".
Perché proprio il TIR?
Si vuole valutare l'obbligazione in 0 (zero) in modo da calcolare un prezzo in 0 (zero) (prezzo ottenuto come valore attuale dell'obbligazione stessa). Per calcolare il TIR (che si ricorda è il rendimento a scadenza dell'operazione) si deve già conoscere il prezzo in 0 (zero), e se la obbligazione è quotata questo prezzo si conosce; perché il TIR è quel tasso (o intensità) che rende nullo il valore attuale netto. Questa cosa avrebbe comunque un senso perché per definizione di TIR il prezzo adesso non è altro che il valore attuale dei pagamenti futuri. Il TIR in qualche modo rispecchia le condizioni di mercato perché il prezzo iniziale stesso le rispecchia e tenendo conto di questo ci si calcola il TIR, però si potrebbe vedere che succede se da un momento all'altro vi è un brusco cambiamento delle condizioni di mercato, cioè cambia il TIR bruscamente, quindi se in 0 (zero) c'è un cambiamento di questo tasso ecco che cambia anche il valore. Si potrebbe essere interessati a vedere come cambia improvvisamente il valore se cambia il TIR.

Morale della favola: Per ora si utilizzerà un tasso COSTANTE senza distinguerlo in base alla scadenza

Potrebbero essere anche altri titoli, non per forza obbligazioni. Quindi si calcolerà il valore attuale in 0 (zero).
Ci si riconduce a delle funzioni di δ quando si fa riferimento a $V(\delta)$, perché tutte le formule che si ottengono saranno più semplici. Mentre sul testo di Scandolo è tutto in funzione di i.

$V(\delta)$: valore attuale in 0 (zero) in funzione dell'intensità
δ è l'intensità con la quale si attualizza

$$V(\delta) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta t_j} \quad \underset{>0}{\text{RATE TUTTE POSITIVE}}$$

Si potrebbe essere interessati a vedere come varia $V(\delta)$ al variare di δ, quindi si calcola la derivata prima $V'(\delta)$

$$V'(\delta) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta t_j}(-t_j) < 0 \longrightarrow \text{funzione STRETTAMENTE DECRESCENTE}$$

$$V''(\delta) = -\sum_{j=1}^{m} t_j R_j e^{-\delta t_j}(-t_j) = \sum_{j=1}^{m} t_j^2 R_j e^{-\delta t_j} > 0 \rightarrow \text{funzione STRETTAMENTE CONVESSA}$$

Il valore di $V(\delta)$ diminuisce all'aumentare di δ, ma diminuisce più bruscamente quando l'intensità δ è bassa, a parità di variazione d'intensità

$$\boxed{\Delta V = V(\delta + \Delta\delta) - V(\delta)} \text{ : Variazione di valore}$$

$$\boxed{\$D = -V'(\delta)} \text{ DOLLAR DURATION}$$

$$\boxed{D = \frac{\$D}{V(\delta)} = -\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = -\frac{d\ln(V(\delta))}{d\delta}}$$

DURATION (di Macaulay)

$$\boxed{\$C = V''(\delta)} \text{ DOLLAR CONVEXITY}$$

$$\boxed{C = \frac{\$C}{V(\delta)}} \text{ CONVEXITY}$$

⇒

La definizione di CONVEXITY che si trova sul testo di Scandolo:

è QUESTA!!

$$\$\bar{C} = \$C + \$D = \sum_{j=1}^{m} (t_j^2 - t_j) R_j e^{-\delta t_j}$$

Macaulay

$$\bar{C} = C + D$$

Dividendo tutto per $V(\delta)$ si ottiene: $\bar{C} = C + D$

Duration di Fisher - Weil?

Dunque ci si ritrova ad essere interessati a quantificare la variazione di valore di uno specifico portafoglio (o di una specifica rendita) a seguito di una variazione del "tasso" δ di attualizzazione. Si potrebbe pensare di fare una approssimazione lineare se la variazione di "tasso" $\Delta\delta$ risulta "piccola". Approssimare linearmente la funzione V in un intorno di δ, cioè il δ di partenza, in questo modo:

SOLO SE $\Delta\delta$ È PICCOLO!!!

$$V(\delta + \Delta\delta) \simeq V(\delta) + V'(\delta)\Delta\delta$$

Posto $\Delta V = V(\delta + \Delta\delta) - V(\delta)$

$$\Delta V \simeq -\$D \cdot \Delta\delta$$

da questa relazione si può vedere un primo significato della DOLLAR DURATION come INDICE DI RISCHIOSITÀ, cioè da un'idea della sensibilità di un portafoglio a variazioni dei valori di tasso. Le "−" è un aggiustamento, comunque la variazione di valore è approssimata dalla variazione di tasso moltiplicata per \$D. A parità di $\Delta\delta$, tanto + grande è \$D tanto + grande sarà la variazione di valore in termini monetari del portafoglio
Espressa in \$, €, ¥, ...

Pongo $V(\delta) = V$ e divido per V entrambi i membri dell'equazione

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq -D \cdot \Delta\delta$$

L'interpretazione è simile a quella di prima come INDICE DI SENSITIVITÀ del valore del portafoglio rispetto a variazioni di tasso, ma in questo caso si ragiona in termini percentuali e quindi tanto + grande è D tanto + grande sarà la variazione di valore in percentuale del portafoglio, tenendo sempre conto che c'è il "−".

Se si prova a fare un'approssimazione del 2° ordine in un intorno di δ

$$V(\delta + \Delta\delta) \simeq V(\delta) + V'(\delta)\Delta\delta + \frac{V''(\delta)}{2}(\Delta\delta)^2 \Leftrightarrow$$

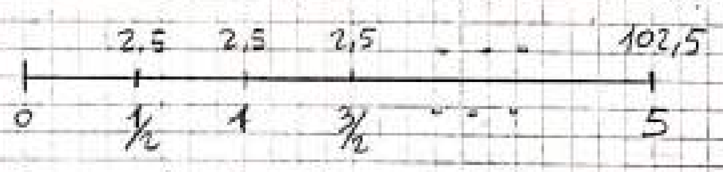
$$\Delta V \simeq -\$D \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2}\$C(\Delta\delta)^2$$

dividendo tutto per "V"

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq -D \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2} C(\Delta\delta)^2$$

La prof. ci mostra un esempio numerico file Duration su modello

Calcolare la duration di un coupon bond (esempio BTP con cedole semestrali) su base 100



Cedole: 2,5

Scadenza dopo 5 anni

$i_c = 0{,}025$

$i_2 = 0{,}05$

$$\delta = 0{,}08 \left(\Rightarrow i = e^{\delta} - 1 \simeq 8{,}33\% \Rightarrow i_2 = e^{\delta/2} - 1 \simeq 4{,}08\% \right)$$

$$V(\delta) \simeq 87{,}23, \quad D \simeq 4{,}44, \quad C \simeq 21{,}23$$

$$\sum_{i=1}^{10} t_i R_i e^{-\delta t_i} \qquad v^5 \qquad 2{,}5 \sum_{j=1}^{10} j\, v_2^j + 10 \cdot 100\, v_2^{10}$$

$$\Rightarrow V(\delta) = 2{,}5 \cdot \frac{1 - e^{-5\delta}}{i_2} + 100 e^{-5\delta}$$

Se si vuole ottenere su base annua basta dividere per 2

$\Rightarrow$ Valore attuale di tutte le 10 cedole

$\Rightarrow$ Valore attuale del capitale a scadenza

Se scandolo tutto in funzione di i

$$\overline{V}(i) = \sum_{j=1}^{m} R_j (1+i)^{-t_j}$$ si possono calcolare $\overline{V}'$ e $\overline{V}''$

e considerare $\delta = \ln(1+i)$

$$\overline{V}'(i) = V'(\ln(1+i)) \cdot \frac{1}{1+i} = -\frac{\$D}{1+i}$$ quindi $\overline{V}(i) = V(\ln(1+i))$

$$\frac{\overline{V}'(i)}{\overline{V}(i)} = -\frac{D}{1+i}$$ ▷ Questa quantità viene anche chiamata DURATION MODIFICATA

$$D_{mod} = \frac{D}{1+i}$$

Derivata di un Rapporto

$$\overline{V}''(i) = V''(\ln(1+i)) \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 - V'(\ln(1+i))\left(\frac{1}{1+i}\right)^2 =$$

$$= \frac{\$C + \$D}{(1+i)^2}$$ ▷ $\$\overline{C} \Leftrightarrow \frac{\$\overline{C}}{(1+i)^2}$

$$\frac{\overline{V}''(i)}{\overline{V}(i)} = \frac{C+D}{(1+i)^2} = \frac{\overline{C}}{(1+i)^2}$$

▷ Questa quantità si potrebbe chiamare anche CONVEXITY MODIFICATA

$$\overline{C}_{mod} = \frac{\overline{C}}{(1+i)^2}$$

$$\frac{\Delta \overline{V}}{\overline{V}} \simeq -\frac{D}{1+i}\Delta i = -D_{mod} \cdot \Delta i$$ ← approx. del 1° ordine

approx. del 2° ordine

$$\frac{\Delta \overline{V}}{\overline{V}} \simeq -\frac{D}{1+i}\Delta i + \frac{1}{2}\frac{\overline{C}}{(1+i)^2}(\Delta i)^2 = -D_{mod}\Delta i + \frac{1}{2}\overline{C}_{mod}(\Delta i)^2$$

Si potrebbe pensare di "distribuire il denominatore tra tutti gli addendi". Poi si cambia l'indice della sommatoria al denominatore

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_j R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta t_j}} = \sum_{j=1}^{m} t_j \cdot \frac{R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{h=1}^{m} R_h e^{-\delta t_h}}$$ ▷ W_j

con $W_j > 0$ $\forall j$

$$\sum_{j=1}^{m} W_j = 1$$

$$= \sum_{j=1}^{m} t_j W_j$$

la DURATION quindi è una media delle durate in cui sono esigibili le varie rate.
Media delle durate perchè c'è t_j e per questo motivo la DURATION si chiama anche DURATA MEDIA FINANZIARIA. Finanziaria perchè i pesi hanno natura "finanziaria". Il peso W_j che si dà alla durata t_j è il valore attuale in 0 (zero) della rata esigibile in t_j e questo si rapporta alla somma di tutti i valori attuali, per cui si che $\sum W_j = 1$.

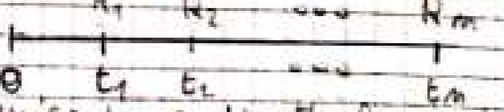
Proprietà:

① $t_1 \leq D \leq t_m$ la duration è compresa tra la + piccola e la + grande delle durate. Solo se c'è una data vale "=", diversamente se ci sono + date, quindi $m > 1$ allora si ha la disuguaglianza stretta. Quando $m = 1$ si ha a che fare con uno Z.C.B. Si ha un unico pagamento futuro

② La duration di uno Z.C.B. di scadenza T è proprio T $\Leftrightarrow D = T$

"c'è indipendenza da quanto mi paga il titolo, dal valore dell'unica rata R_1"

21 NOVEMBRE 2018:



Si suppone di avere un portafoglio di investimenti che genera delle entrate CERTE.

$R_h > 0$ con $h = 1, 2, \dots, m$

Si suppone di scegliere un unico tasso di attualizzazione per ogni scadenza
• Struttura per scadenza PIATTA • se non è piatta si utilizza il TIR

$V(\delta)$: valore in base al tasso UNICO

$$D(\text{di Macaulay}) = -\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = \sum_{j=1}^{m} t_j w_j \quad \text{dove } w_j = \frac{R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{h=1}^{m} R_h e^{-\delta t_h}}$$

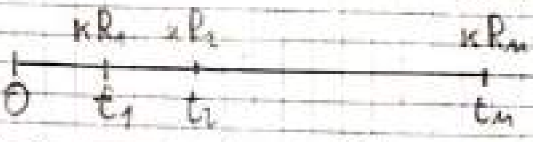
DURATA MEDIA FINANZIARIA

Proprietà della duration:

① $t_1 \leq D \leq t_m$ la duration è compresa tra la + piccola e la + grande delle durate

② la duration di uno Z.C.B. di scadenza T è proprio T $\Leftrightarrow D = T$

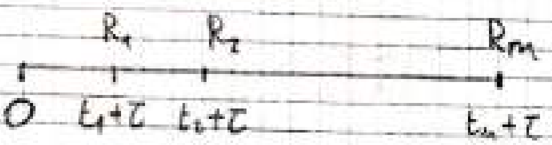
③ Moltiplico tutte le rate per una quantità $K > 0 \Rightarrow$ la duration NON cambia



$$w_j' = \frac{k R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{h=1}^{m} k R_h e^{-\delta t_h}} = \frac{K}{K} \frac{R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{h=1}^{m} R_h e^{-\delta t_h}} = w_j$$

K è indipendente dall'indice di sommatoria. Se si vuole calcolare la duration di un titolo (ad esempio di un'obbligazione) e di questa obbligazione se ne acquistano 315 allora i pagamenti alle varie epoche saranno moltiplicati tutti per 315, duration =

4 Se si spostano in avanti tutte le date di una stessa quantità (shift) $\tau > 0$, quindi:



la nuova duration D' sarà uguale a

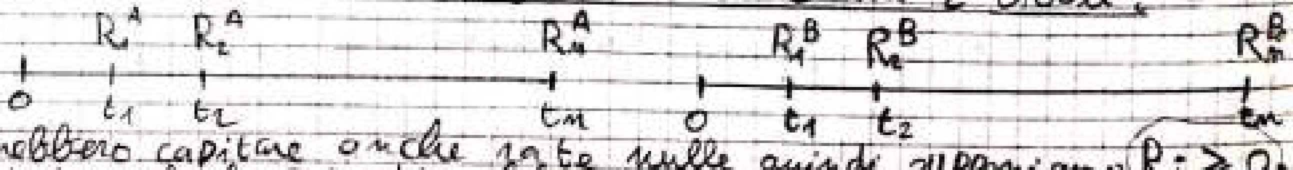
$$D' = D + \tau \qquad = \sum_{j=1}^{m} (t_j + \tau) w_j' \quad *1$$

dove stavolta
$$w_j' = \frac{R_j e^{-\delta(t_j+\tau)}}{\sum_{h=1}^{m} R_h e^{-\delta(t_h+\tau)}} = \frac{R_j e^{-\delta t_j} e^{-\delta\tau}}{\sum_{h=1}^{m} R_h e^{-\delta t_h} e^{-\delta\tau}} = w_j$$

$$*1 = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} t_j w_j}_{D} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \tau w_j}_{\tau}$$
i w_j hanno somma 1 quindi

Comunque lo stesso discorso vale anche se $\tau < 0$ (spostamento all'indietro) purché però le rate siano sempre future e non passate sia sempre tale che la prima scadenza resti sempre maggiore di 0 e $\tau > -t_1$ perché $t_1 + \tau > 0$. Se si spostano le date all'indietro non bisogna spostarle prima dell'epoca 0 (zero) anche perché il senso di tutto questo discorso è valutare una rendita con qualcosa che si deve ancora ricevere, non conta guardare cosa si è avuto, si guarda solo al futuro.

⑤ Duration di un portafoglio costituito da 2 titoli: Ⓐ Ⓑ



Potrebbero capitare anche rate nulle quindi supponiamo $R_j \geq 0$.
L'ipotesi che le 2 rendite abbiano lo stesso scadenzario non è restrittiva perché i 2 titoli sul mercato possono avere delle date diverse di pagamento.
Non cambia assolutamente niente perché se capita una $R_j = 0$ il suo valore attuale è comunque 0 (zero), quindi il valore del portafoglio non cambia e di conseguenza non cambia la sua derivata.

(87) Richiamo delle primissime lezioni quando si è definita la somma

... di reddito che anche nel
... diverse operazioni finanziarie (Pag. 4) ⇒ Si considera una Scad. comune
Quindi la duration di un portafoglio costituito da 2 rendite, che alla generica data t_j prevede di ricevere $R_j^A + R_j^B$, non è uguale alla somma delle duration ma ad una media pesata delle duration delle 2 rendite con pesi ovviamente tutti in funzione di δ

$$D^{A+B} = D^A \frac{V^A}{V^A+V^B} + D^B \frac{V^B}{V^A+V^B}$$

$\frac{V^A}{V^A+V^B}$ e $\frac{V^B}{V^A+V^B}$ e la loro somma ovviamente $= 1$

D^A D^B

V^A V^B

(in particolare, se $V^A = V^B$ allora il peso è esattamente 1/2 e quindi
$\rightarrow D^{A+B} = \frac{D^A + D^B}{2}$)

i 2 portafogli hanno lo STESSO valore

Dimostrazione:
$$D^{A+B} = \sum_{j=1}^{m} t_j \cdot \frac{(R_j^A + R_j^B)\, e^{-\delta t_j}}{V^A + V^B} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} t_j \cdot \frac{R_j^A e^{-\delta t_j}}{V^A} \cdot \frac{V^A}{V^A+V^B} + \sum_{j=1}^{m} t_j \frac{R_j^B e^{-\delta t_j}}{V^B} \cdot \frac{V^B}{V^A+V^B} =$$ Moltiplico e divido per

$$= D^A \frac{V^A}{V^A+V^B} + D^B \frac{V^B}{V^A+V^B}$$

→ Questo risultato è molto importante perché consente di costruire portafogli con duration FISSATA (il motivo lo rimando ...). Inoltre questo risultato può essere ulteriormente esteso nel senso che qua a sinistra si è supposto implicitamente di prendere le 2 obbligazioni (oppure altri titoli) e metterle nel portafoglio però si potrebbe pensare di comprare una certa quantità delle 2 obbligazioni; ad esempio X obbligazioni A e Y obbligazioni B

X "obbligazioni" A
Y "obbligazioni" B } → Pagate in t_j

Pagamento in t_j: $X R_j^A + Y R_j^B$

$V^{PORTAFOGLIO} = X V^A + Y V^B$

PORT: PORTAFOGLIO

X della I rendita
Y della II rendita

$$D^{PORT} = D^A \frac{X V^A}{X V^A + Y V^B} + D^B \frac{Y V^B}{X V^A + Y V^B}$$

Se fossero più di 2 varrebbe una relazione analoga

Caso particolare dei risultati precedenti:

$A' \rightarrow XA$; $B' \rightarrow YB$

$$D^{PORT} = D^{A'+B'} = D^{XA} \frac{X V^A}{X V^A + Y V^B} + D^{YB} \frac{Y V^B}{X V^A + Y V^B} =$$

Risultato precedente ④ ? domanda

$$= D^{A'} \frac{X V^A}{X V^A + Y V^B} + D^{B'} \frac{Y V^B}{X V^A + Y V^B}$$

Sfrutto la proprietà ③

Riuscire a costruire portafogli con una duration fissata è molto importante per l'applicazione delle tecniche di immunizzazione finanziaria

Si suppone di investire 10'000 € in 2 titoli

2 titoli → $D^A = 5$
→ $D^B = 12$

quanto investire nei 2 titoli in modo da costruire un portafoglio di duration pari a 7?

Spazio vuoto lasciato inutilmente

gira pagina ...

⇒

Scanned by CamScanner

W: importo da investire in A
Z: importo da investire in B

$$\boxed{\begin{cases} W+Z=10'000 € & \text{: Vincolo di bilancio} \\ 5\cdot\frac{W}{10'000}+12\frac{Z}{10'000}=7 & \text{: vincolo di duration} \end{cases}}$$ IMPORTANTE!!

$$\begin{cases} W+Z=10'000 \\ 5W+12Z=70'000 \end{cases} \to W=10'000-Z \quad \begin{cases} W=10'00-Z \\ 50'000-5Z+12Z=70'000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W=10'000-Z \\ 7Z=20'000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=10'000-Z \\ Z=2'857,14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W=7'142,86 € \\ Z=2'857,14 € \end{cases}$$

Quanti titoli di tipo A e quanti titoli di tipo B si devono compra~~quindi quanti x e quanti y!~~

è necessario conoscere V^A e V^B

$V^A=100€$ $V^B=400€$

$X=\frac{7'142,86}{100}$ è la quantità di titoli A che devo acquistare $=71,43$

$Y=\frac{2'857,14}{400}$ è la quantità di titoli B che devo acquistare $=7,14$

Ovviamente si sta lavorando in ipotesi di perfetta divisibilità dei titoli cioè si può comprare una quantità qualunque e non ci sono tagli minimi o altro.

$$\begin{cases} \overbrace{x\cdot 100}^{W}+\overbrace{y\cdot 400}^{Z}=10'000 \\ 5\frac{x\cdot 100}{10'000}+12\frac{y\cdot 400}{10'000}=7 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ lo stesso sistema di prima sostituendo $W=x\cdot 100$ e $Z=y\cdot 400$. Si risolve il sistema e si risponde alla domanda

(6) Duration di una rendita a rata (R) costante (date equintervallate) con scadenze equintervallate: quindi $t_j \to j$

R R ... R
0 1 2 ... m

Supponiamo rate unitarie R=1 $\to$

1 1 ... 1
0 1 2 ... n

$$D=\frac{\sum_{j=1}^{m} j V^j}{\sum_{j=1}^{m} V^j}=\frac{(Ia)_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} \qquad V^j=e^{-\delta j}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} j e^{-\delta j}}{\sum_{j=1}^{m} e^{-\delta j}}$$

$i=e^{\delta}-1$

nel caso di una rendita perpetua

$$\lim_{m\to+\infty} D=\frac{1/id}{1/i}=\frac{1}{d}=\frac{1}{iv}=\frac{1+i}{i}$$

(7) Duration di un coupon bond:

i_c i_c i_c i_c+1
0 1 2 3 m

Si può pensare di sfruttare la proprietà (5) e di mettere nel portafoglio, 2 titoli:

A : rendita di m rate costanti posticipate pari a i_c (isolare le cedole)
B : Z.C.B. di scadenza m unitario

... pari di ... che anche nel

$D^A = \frac{(Ia)_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}}$, $D^B = m$; D^A per la proprietà (6); D^B per la proprietà (2)

$$D^{Coupon\ Bond} = \frac{(Ia)_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|i}} \cdot \underbrace{\frac{i_c\, a_{\overline{m}|i}}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}}_{\text{peso del titolo A}} + m \cdot \underbrace{\frac{v^m}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}}_{\text{peso del titolo B}}$$

→ somma dei pesi

$i_c\, a_{\overline{m}|i}$: Valore attuale di tutte le cedole

v^m : Valore attuale dello Z.C.B. unitario

Come reagisce la duration rispetto alle varie quantità da cui essa dipende?

$D(\delta) = -\frac{V'(\delta)}{V(\delta)} = \frac{\$D}{V(\delta)}$ la duration è una funzione dell'intensità δ, quindi è interessante capire come "viaggia" la duration rispetto a δ

$$D'(\delta) = \frac{-V''(\delta)V(\delta) + (V'(\delta))^2}{[V(\delta)]^2} = -\frac{V''(\delta)}{V(\delta)} + \left(\frac{V'(\delta)}{V(\delta)}\right)^2 = -C + D^2 \le 0 \quad \forall \delta$$

! La convexity è sempre maggiore o uguale della duration al quadrato

$C \ge D^2$ → $C = D^2$ Z.C.B. (unico pagamento futuro)

→ $C > D^2$ almeno 2 rate > 0

→ Il secondo termine si potrebbe vedere come D^2 perché anche se non c'è il "−" il quadrato viene uguale

Coupon Bond $\xrightarrow{\text{dipendono da}}$ i_c

→ m

Si può provare calcolando la derivata prima della duration rispetto a i_c che la duration risulta DECRESCENTE con i_c. La duration si vede stavolta come funzione del tasso cedolare i_c.

Pensando alla definizione di duration come media pesata di tutte le scadenze, pensare alla media di tutte le date di pagamento il cui pagamento è i_c; in fondo oltre al rimborso di 1 c'è anche i_c quindi $(1+i_c)$ e la sua data pesa m. m prenderà 2 volte un peso, il peso del pagamento i_c e poi il peso di 1. Se si scorpora si ottengono: tutte le date esigibili in 1, 2, ..., m. Pari ad i_c e dall'altro lato il pagamento di 1 anticipato. Se aumenta i_c aumenta il denominatore per cui l'ultimo pagamento, che è il più pesante si vede un peso diminuito.
Il pagamento più grosso perde d'importanza e la media si sposta verso i pagamenti più bassi e questo fa sì che la duration diminuisca.

Peso: i_c	$j = 1, 2, \dots, m$
j	$\frac{i_c\, e^{-\delta j}}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}$
Peso: 1	
m	$\frac{1 \cdot v^m}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}$

Cosa succede rispetto a m?

Conti abbastanza laboriosi, non semplici; solo risultato:

quotazioni sopra o alla pari, sotto la pari

$V^{CB} \ge 1$ → D^{CB} ↑ con m

$V^{CB} < 1$ → D^{CB} all'inizio ↑ e poi ↓ (si ha un unico punto di massimo)

I risultati riportati sopra dipendono dal δ di partenza, cioè quello che fa sì che il coupon bond sia quotato alla pari oppure quotato sotto la pari, che valga + o − di 1

1, 2, 3, ..., m−1, m

$\frac{i_c\, e^{-\delta \cdot 1}}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}$ ... $\frac{i_c\, e^{-\delta(m-1)}}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}$ → $\frac{(1+i_c)\, e^{-\delta m}}{i_c\, a_{\overline{m}|i} + v^m}$ → Peso + grosso

$\frac{i_c\, e^{-\delta m}}{\text{denom.}} + \frac{e^{-\delta m}}{\text{denom.}}$

Pesi

28 NOVEMBRE 2018: (00:05)

$$C = \frac{V''(\delta)}{V(\delta)} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} t_j^2 R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta t_j}} = \sum_{j=1}^{m} t_j^2 W_j \quad \text{dove } W_j = \frac{R_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{k=1}^{m} R_k e^{-\delta t_k}} \quad R_j \geq 0$$

La convexity si può vedere come media dei quadrati delle scadenze

dove $\sum_{j=1}^{m} W_j = 1$

Proprietà: (analoghe a quelle della duration)

1) $t_1^2 \leq C \leq t_m^2$ per $m=1$ vale la 2)

2) nel caso di uno Z.C.B. di scadenza T: $C = T^2$

3) Se moltiplico tutte le rate per la stessa costante K ($K>0$) la convexity non cambia

4) Se sposto in avanti tutte le scadenze di τ ($\tau>0$) o all'indietro ($\tau<0$: $t_1+\tau>0$, in modo da non perdersi il pagamento di qualche rata). I pesi W_j non cambiano (si era già dimostrato per la duration) 00:11

$$\sum_{j=1}^{m} (t+\tau)^2 W_j = \sum_{j=1}^{m} t_j^2 W_j + \sum_{j=1}^{m} 2 t_j \tau W_j + \sum_{j=1}^{m} \tau^2 W_j =$$
$$= C + 2\tau D + \tau^2$$

Calcolare la dispersione delle scadenze attorno alla duration (una specie di varianza con i pesi):

5) 00:17

$$Q = \sum_{j=1}^{m} (t_j - D)^2 W_j = \dots = C - 2D^2 + D^2 = C - D^2 \geq 0$$

I conti sono uguali a quelli fatti in 4) solamente che al posto di τ mettiamo $-D$

- $C - D^2$ → $=0$ solo nel caso di uno ZCB $\Leftrightarrow m=1$
  → $>0 \Rightarrow m>1$ (e almeno 2 rate POSITIVE)

→ Se si hanno almeno 2 rate $>0 \Rightarrow C > D^2$
→ Se si ha uno ZCB $\Rightarrow C = D^2$

6) Convexity di un portafoglio: 00:23

$$C^{A+B} = C^A \frac{V^A}{V^A+V^B} + C^B \frac{V^B}{V^A+V^B}$$

mentre nel portafoglio:
Portafoglio $= xR_j^A + yR_j^B \quad \forall j$

$$C^{Port.} = C^A \frac{xV^A}{xV^A+yV^B} + C^B \frac{yV^B}{xV^A+yV^B}$$

x: quantità di titoli A
y: quantità di titoli B

Come vengono utilizzate tutte le quantità, finora viste, nella teoria dell'immunizzazione finanziaria?

Si supponga di avere a che fare con un'impresa che opera nel ramo dell'intermediazione finanziaria, ad esempio si supponga di avere a che fare con una banca che prende a prestito dei soldi (emettendo delle obbligazioni) dagli investitori (i clienti della Banca). La banca nello stesso tempo fa da intermediario finanziario, perché si indebita con gli investitori per prestare denaro a chi ne ha bisogno. Comunque un'impresa, in generale, non ha soltanto crediti ma anche debiti, e nel contesto in cui ci mettiamo sia i crediti che i debiti sono CERTI, sono CERTE le date in cui si deve restituire il denaro, sono CERTI gli importi che si devono pagare e sono CERTE le date in cui si avranno degli incassi. In realtà se si prendesse come esempio anche una compagnia assicurativa che incassa i premi a fronte del pagamento in caso di morte, oppure in caso di sinistri (a seconda se si tratta di ramo vita o rami danni) non si potrà dire che gli esborsi siano CERTI e nemmeno si potrà dire qual è l'entità di questi esborsi, però se si ragiona a livello di intero portafoglio, per effetto POOLING avendo un portafoglio abbastanza numeroso, si potrebbe fare una previsione abbastanza attendibile sugli esborsi, sfruttando la legge dei grandi numeri e così via...

Comunque un'impresa ha: (in ipotesi di CERTEZZA)

- Assets (attività) o crediti: A_1 in t_1, A_2 in t_2, …, A_m in t_m (asse dei tempi: $0, t_1, t_2, \dots, t_m$)

Questa è una rendita che alle date $t_1, t_2, \dots, t_m$ prevede di incassare gli importi $A_1, A_2, \dots, A_m$.

- Liabilities (passività) o debiti: L_1 in t_1, L_2 in t_2, …, L_m in t_m (asse dei tempi: $0, t_1, t_2, \dots, t_m$)

Analogamente, questa è una rendita che alle date $t_1, t_2, \dots, t_m$ prevede di esborsare gli importi $L_1, L_2, \dots, L_m$.

Ipotesi: Le attività e le passività seguono lo stesso scadenzario quindi seguono le stesse date $t_1, t_2, \dots, t_m$. È stato già detto che l'ipotesi di considerare lo stesso scadenzario non è restrittiva poiché potrebbe esserci anche la possibilità che qualche A_j o L_j possa essere uguale a 0 (zero), quindi:

$A_j \geq 0$, $L_j \geq 0$ $\forall j$, ma non tutte perché ci deve essere almeno un'attività e almeno una passività tale che:

$\exists j: A_j > 0$, $\exists h: L_h > 0$ $\forall j \neq h$

Che cosa succede al valore del portafoglio? Il valore del portafoglio è costituito sia dal valore dei crediti che dal valore dei debiti, è qualcosa di complessivo.
Se si valuta in 0 (zero) il portafoglio, e si suppone di fissare un'intensità di valutazione UNICA compatibile con una struttura piatta (vedi pag. 83-84), si potrebbe indicare il valore del portafoglio (in funzione dell'intensità) con:

$$V(\delta) = V^A(\delta) - V^L(\delta) : \text{Valore del portafoglio}$$

$V(\delta)^A$: valore degli assets; $V^L(\delta)$: valore delle liabilities

$$V(\delta) = V^A(\delta) - V^L(\delta) = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\delta t_j}}_{V^A(\delta)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{m} L_j e^{-\delta t_j}}_{V^L(\delta)}$$

In maniera analoga si definiscono le quantità:
D^A, D^L, C^A, C^L Duration e Convexity di Assets e Liabilities

Quindi si parte all'epoca 0 (zero) dal valore $V(\delta)$ del portafoglio. Il valore $V(\delta)$ può essere positivo, negativo o nullo a seconda di chi prevale tra attività e passività. Di cosa ci si potrebbe preoccupare? Allora, δ è stato scelto perché l'intensità di mercato o il rendimento nel momento in cui è stato scelto era piatto. Cosa succede se δ cambia improvvisamente? Cosa succede a $V(\delta)$ al variare di δ?

Se si va a guardare SEPARATAMENTE il valore delle attività e il valore delle passività si conosce tutto. Si sa che se δ aumenta il valore delle attività diminuisce e anche quello delle passività diminuisce, viceversa, se δ diminuisce attività e passività aumentano, ma un altro dubbio può essere che se δ aumenta chi prevale tra attività e passività?

Idealmente si vuole essere IMMUNIZZATI contro il rischio che il tasso (o meglio l'intensità) cambi (RISCHIO DI TASSO), cioè si teme un effetto diminutivo sul valore del portafoglio, che a seguito di un cambiamento improvviso del tasso il valore del portafoglio diminuisca e quindi ci si vuole IMMUNIZZARE contro questo rischio di tasso e si vorrebbe far sì che anche se il tasso cambia il valore $V(\delta)$ del portafoglio NON DIMINUISCE (rimane quello che era oppure meglio ancora AUMENTA). Questo si definisce IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA.

Se si vuole cercare di IMMUNIZZARSI contro il rischio di tasso ci si deve mettere nella condizione di avere un certo margine di manovra nella scelta di alcuni elementi, non devono essere dati che "piovono" dall'alto.

...

Si suppone che ci sia una rigidità sulle passività, quindi si suppone che le passività siano DATE e ci si immagina su come scegliere le attività.

MARGINE DI MANOVRA SUGLI ASSETS (LIABILITIES DATE)

Possibilità di scegliere come investire le attività (quello che è stato ricevuto all'inizio). L'esempio che calza a pennello è quello della banca che si indebita e poi presta il denaro scegliendo a chi prestarlo oppure scegliere quali investimenti fare. Stesso discorso per le assicurazioni a meno del discorso sull'aleatorietà degli esborsi, quindi la compagnia incassa i premi ~~[illegible]~~ e questi premi li deve investire (soprattutto nel ramo vita in cui ci può essere una forte componente di risparmio) e quindi sceglie dopo come investirli.

Si suppone che le liabilities siano date e si cerca di dare delle CONDIZIONI SUFFICIENTI per l'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA in termini di Assets (come scegliere le attività).

Si potrebbe criticare il fatto di prendere uno scadenzario comune per assets e liabilities e allo stesso tempo avere le liabilities date e dire di dover considerare gli assets che pagano qualcosa nelle stesse date (tempo), ma se sul mercato ci sono tanti titoli che pagano delle rendite anche in date che sono al di fuori di quelle delle liabilities...

quello con t_j

Si prende uno scadenzario ampio

Morale della favola: Visto che lo scadenzario è dato si devono scegliere gli investimenti in modo da procurare gli A_j con certe proprietà

Un modo per immunizzarsi può essere quello di scegliere un'attività che procura all'epoca t_j l'importo A_j esattamente pari alla passività corrispondente $\forall j$, quindi:

$$A_j = L_j \quad \forall_j \qquad \text{PERFECT-MATCHING (tra assets e liabilities)}$$

In questo caso non vi è assolutamente nessun tipo di rischio perché il valore del portafoglio $V(\delta) = V^A(\delta) - V^L(\delta) = 0$. Se il tasso cambia quindi va giù oppure su il valore del portafoglio è sempre 0 (zero).
Nella norma il problema si pone quando non ci si trova nella condizione di perfect-matching perché non è detto che si riescano a trovare dei titoli sul mercato che pagano esattamente nelle date delle liabilities, quindi

Se $\exists i: A_i \neq L_i$ si ha ASSETS / LIABILITIES MISMATCHING
disallineamento tra attività e passività per qualche i.

Bisogna cercare di far sì che anche se il tasso cambia il valore del portafoglio non diminuisca in modo da non rimetterci niente. Si possono distinguere 2 tipi di immunizzazione:

- Immunizzazione locale: quando non ci si rimette per "piccoli" cambiamenti dell'intensità
- Immunizzazione globale: non ci si rimette mai qualunque siano i cambiamenti dell'intensità

Il portafoglio è IMMUNIZZATO LOCALMENTE quando δ è un punto di MINIMO LOCALE (o relativo) per $V(\delta)$ quindi se:

$$\forall V_{V(\delta)}\ \exists U_\delta : \forall \delta' \in U_\delta,\ \delta' > 0 \text{ (STRETTAMENTE POSITIVO)} \Rightarrow V(\delta') \geq V(\delta)$$

δ è quello bloccato

δ è il punto di minimo

$$\delta' = \delta + \Delta\delta \qquad \text{"piccolo" } \Delta\delta : \delta + \Delta\delta \in U_\delta$$

Condizione sufficiente per punti di minimo relativi interni:

$$\begin{cases} V'(\delta) = 0 \\ V''(\delta) > 0 \end{cases}$$

$V'(\delta) = 0$ è anche una condizione NECESSARIA.

$$V'(\delta) = V'_A(\delta) - V'_L(\delta) = -\$D^A + \$D^L = -D^A V^A(\delta) + D^L V^L(\delta)$$

$$V''(\delta) = V''_A(\delta) - V''_L(\delta) = \$C^A - \$C^L = C^A V^A(\delta) - C^L V^L(\delta)$$

00:53

Queste finora dette sono le cond. suff. per la immunizzazione LOCALE

Teorema di Redington: Condizioni sufficienti per la immunizzazione locale:

(in funzione di δ è SOTTOINTESO)

$$\begin{cases} D^A V^A = D^L V^L \\ C^A V^A > C^L V^L \end{cases}$$

di solito ci si mette in un'ipotesi aggiuntiva, cioè si suppone di essere in EQUILIBRIO DI BILANCIO con l'intensità δ di partenza. L'intensità con cui si parte fa sì che ci si ritrova in equilibrio di bilancio

$$\boxed{\text{EQUILIBRIO DI BILANCIO: } V^A(\delta) = V^L(\delta)}$$
(con δ intensità di partenza)

Corollario del Tr. di Redington: Se ci si trova in eq. di bilancio una condizione sufficiente per l'immunizzazione locale è:

$$\begin{cases} D^A = D^L \\ C^A > C^L \end{cases} \quad *1$$

Abbiamo già visto qualche pag. fa (Pag. 88-89) come costruire portafogli con duration assegnate e per fare questo esercizio abbiamo sfruttato la proprietà che ci consente di esprimere la duration di un portafoglio. Abbiamo fatto un altro esercizio sulle quantità di titoli da acquistare ... Abbiamo risolto un sistema di 2 equazioni e 2 incognite. Se sul mercato ci sono tanti titoli ma inizialmente decido di investire solo su 2 titoli potrei risolvere un sistema come $*1$ considerando la 1° condizione e D^L data dopo si potrebbe fare ...
Un'altra alternativa può essere quella di scegliere K titoli con $K > 2$ e risolvere il sistema che imposta la 1° condizione cioè i K titoli avranno ciascuno la loro duration (l'importante è che ci sia almeno un titolo con duration maggiore di quella dei passivi che io voglio ottenere ed uno con duration minore). Si risolve il sistema (lineare) di K equazioni in 2 incognite e se la duration dei passivi è strettamente compresa tra almeno 2 dei titoli questo sistema è compatibile ed è INDETERMINATO, cioè ha ∞^{K-2} soluzioni.

$\Rightarrow$

Ulteriore corollario del Th di Redington: (poco importante)

Se • Equilibrio di bilancio

• $\exists ! \, j : L_j > 0 \quad (\forall k \neq j, L_k = 0)$

$T = t_j$
$L = L_j$

Unico passivo L esigibile in T

$C^L = T^2$

$D^L = T$

il vincolo sulle duration dice che $D^A = D^L = T$

Se ci sono almeno 2 attivi

$$C^L = (D^L)^2$$

$$C^A > (D^A)^2$$

Se ci sono almeno 2 attivi ($\neq 0$) allora la condizione sulla convexity è verificata automaticamente

$$\begin{cases} D^A = D^L = T \\ C^A > (D^A)^2 = T^2 = C^L \Rightarrow C^A > C^L \end{cases}$$

quindi se ci si trova in equilibrio di bilancio, c'è un unico passivo e almeno 2 attivi, condizione sufficiente per la immunizzazione locale è $D^A = D^L$

Questo risultato non è interessante perché, se si è nelle ipotesi di eq. di bilancio e unico passivo (e almeno 2 attivi) l'uguaglianza tra le duration di attivi e passivi diventa una condizione non solo sufficiente ma anche necessaria e la condizione nec. e suff. si ha non soltanto per la immunizzazione locale ma addirittura per l'immunizzazione globale

Teorema di Fisher-Weil: Se ci si trova in equilibrio di bilancio e c'è un unico passivo, condizione necessaria e sufficiente per l'immunizzazione GLOBALE è $D^A = D^L$

unico passivo e almeno 2 attivi

Dimostrazione (condizione necessaria "$\Rightarrow$"):

δ è punto di minimo ASSOLUTO $\Rightarrow$ δ è punto di minimo RELATIVO

$\xRightarrow{\text{cond nec.}} D^A = D^L$

Commento: $\overset{\text{unico passivo esigibile in T}}{T \quad L}$

$$V^A(\delta) = V^L(\delta)$$

$T' \quad A$ unico attivo esigibile in T' (T' può essere diverso da T)

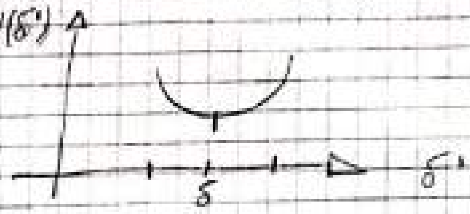
$$D^A = D^L \Rightarrow T = T'$$

$D^A = A e^{-\delta T}$ e $D^L = L e^{-\delta T}$ $\Longrightarrow$ $A e^{-\delta T} = L e^{-\delta T} \Leftrightarrow A = L$ Perfect Matching

(01:29)

Domande: SBAGLIATO

1) $V(\delta') \geq V(\delta)$?? Perchè? è MIN abbiamo detto



2) Esercizi sui portafogli (prima fare questa domanda)

3 DICEMBRE 2018:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_K = B \\ D_1 \frac{X_1}{B} + D_2 \frac{X_2}{B} + \dots + D_K \frac{X_K}{B} = \bar{D} \end{cases}$$

Se l'obiettivo di duration è compreso tra il min e il max tra $D_1, D_2, \dots, D_K$ vuol dire che c'è almeno un D_j + piccolo di $\bar{D}$ e un D_j + grande di $\bar{D}$, dove $\bar{D}$ è la media delle duration.

$$j', j'' : D_{j'} < \bar{D} ,\ D_{j''} > \bar{D}$$

Si può dire che le 2 righe (se si guardano come vettori riga) sono LINEARMENTE INDIPENDENTI perché i coefficienti di X nella prima equazione sono pari a 1 mentre nella seconda equazione i coefficienti delle X sono diversi infatti $\frac{D_{j'}}{B}$ e $\frac{D_{j''}}{B}$ sono diversi tra loro.

Quindi il sistema è COMPATIBILE e INDETERMINATO perché ha ∞^{K-2} soluzioni, allora si può scegliere una BASE. Ad esempio una base può essere costituita da una coppia di indici a cui corrispondono duration diverse fra loro. Quindi si fissano j' e j'', si risolve il sistema in queste 2 variabili j' e j'' immaginando che le altre siano dei dati e così il sistema diventa determinato

... continuazione della dimostrazione

Dimostrazione (condizione sufficiente "$\Leftarrow$"):

Ipotesi:

- almeno 2 attivi
- Vincolo di bilancio
- unico passivo (L in T)
- $D^A = D^L (= T)$

$\Longrightarrow$ δ è un punto di MIN assoluto (proprio) di V $x \in \mathbb{R}^+$

Poniamo $\Psi(x) = \frac{V^A(x)}{V^L(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} A_j e^{-x t_j}}{\sum_{j=1}^{m} L_j e^{-xT}} =$

è possibile dividere per $V^L(x)$ perchè abbiamo supposto che ci sia almeno un passivo ed essendoci un unico passivo $V^L(x) = L e^{-xT}$

$$= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{m} A_j e^{x(T - t_j)}$$

$$\Psi'(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{m} A_j e^{x(T-t_j)} (T - t_j)$$

$$\Psi''(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{m} A_j e^{x(T-t_j)} (T - t_j)^2 > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

a questo punto si sfrutta l'ipotesi di avere almeno 2 attivi positivi (Almeno 2 $A_j > 0$) e quindi le corrispondenti t_j non possono essere uguali a T, anzi se viene soddisfatto il vincolo di duration si potrebbe dire che sono una più piccola e una più grande, l'importante è che $\Psi''(x) > 0$ perché anche ammesso che uno di questi $t_j = T$ ce ne sarà sempre almeno 1 diverso da T, quindi la funzione Ψ è convessa $\Longrightarrow$ Ψ è CONVESSA GLOBALMENTE, perché l'insieme è un intervallo $]0, +\infty[$.

Provare che questo succede per δ

$$\Psi(\delta) = \frac{V^A(\delta)}{V^L(\delta)} = 1 \quad \text{condizione di vincolo di bilancio}$$

$$\Psi'(\delta) = T \cdot \underbrace{\frac{\sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\delta t_j}}{L e^{-\delta T}}}_{\text{questo vale } 1} - \frac{\sum_{j=1}^{m} t_j A_j e^{-\delta t_j}}{L e^{-\delta T}} = T - D^A = 0$$

$\to \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\delta t_j}$ per la condizione del vincolo di bilancio

in conclusione δ è punto di MIN globale proprio per Ψ

$$\forall \delta' \neq \delta \Rightarrow \Psi(\delta') > \Psi(\delta) = 1$$

$$\forall \delta' \neq \delta \Rightarrow \frac{V^A(\delta')}{V^L(\delta')} > 1 \Rightarrow V^A(\delta') > V^L(\delta') \Rightarrow \underbrace{V^A(\delta') - V^L(\delta')}_{V(\delta')} > 0 \quad V(\delta) \text{ in zero}$$

$$\Rightarrow V(\delta') > V(\delta) \quad \text{MINIMO assoluto o globale}$$

Immaginiamo di partire da un portafoglio IMMUNIZZATO in 0 (zero). Se il tempo passa cambia l'intensità in maniera aleatoria ma cambiano anche tutte le quantità finora considerate perché le t_j si "avvicinano" man mano che il tempo passa. Se il tempo passa, il portafoglio, che parte immunizzato in 0, sarà ancora immunizzato? Se si vuole mantenere il portafoglio immunizzato si dovrebbe comprare e vendere in continuazione titoli (in particolare si agisce sugli attivi poiché i passivi sono bloccati). Quindi comprare, vendere e ribilanciare il portafoglio degli attivi in modo da mantenerlo costantemente immunizzato, però i ribilanciamenti COSTANO. Se si vogliono comprare e vendere titoli si devono pagare delle commissioni per cui idealmente si dovrebbe cambiare istante per istante la composizione dei titoli in modo tale da mantenere il portafoglio immunizzato.
In qualche modo esiste un TRADE-OFF tra la frequenza del ribilanciamento e il sostenimento dei costi di transazione.
Morale della favola: si ribilancia il portafoglio solamente se ci sono dei cambiamenti "grossi" perché ribilanciare costa.

Si può osservare comunque che in certi casi il cambiamento del tempo può non dare nessun fastidio lasciando il portafoglio immunizzato ad esempio se l'intensità non varia.
Tutte le quantità considerate sono valutate in 0 (zero) con la intensità prevalente in 0 (zero)

$V_0^A(\delta_0)$ oppure $V_0^L(\delta_0)$; $D_0^{A/L}(\delta_0)$, $C_0^{A/L}(\delta_0)$, si suppone adesso che il tempo passa di τ ($\tau > 0$)

$\tau : \tau < t_1$ dove t_1 è la prima scadenza, quindi si potrebbe valutare

 $V_\tau^{A/L}(\delta_\tau)$; $D_\tau^{A/L}(\delta_\tau)$; $C_\tau^{A/L}(\delta_\tau)$

Se $\delta_\tau = \delta_0$ Se si è immunizzati in 0, si rimane immunizzati anche in τ e quindi non ci sarebbe bisogno di ribilanciare il portafoglio nell'ipotesi che l'intensità non cambi nel tempo

$V_\tau^A = V_0^L$ Se in 0 (zero) viene soddisfatto anche l'EQUILIBRIO DI BILANCIO allora se la intensità non è cambiata si capitalizza di τ periodi:

$V_\tau^A = V_0^A e^{\delta_0 \tau}$, $V_\tau^L = V_0^L e^{\delta_0 \tau} \Longrightarrow V_\tau^A = V_\tau^L$ anche in τ si ha EQUILIBRIO DI BILANCIO

Se tutte le scadenze sono spostate di una certa quantità allora anche le duration saranno spostate della stessa quantità (τ)

le date $t_1, t_2, \dots, t_m$ non si spostano ma si sposta in avanti l'epoca di valutazione (da 0 a τ). Spostare in avanti l'epoca di valutazione è uguale a spostare all'indietro le scadenze perché si accorcia la distanza perché è come se si anticipassero tutte le scadenze, come se si sommasse a tutte le scadenze un τ negativo

$D_\tau^A = D_0^A - \tau$, $D_\tau^L = D_0^L - \tau$

$D_0^A = D_0^L \Rightarrow D_\tau^A = D_\tau^L$ il vincolo di duration che era soddisfatto in 0 rimane soddisfatto in τ.

invece le convexity...

$C_\tau^A = C_0^A - 2\tau D_0^A + \tau^2$

$C_\tau^L = C_0^L - 2\tau D_0^L + \tau^2$

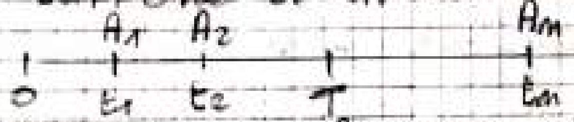
$$\begin{cases} D_0^A = D_0^L \\ C_0^A > C_0^L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_\tau^A = D_\tau^L \\ C_\tau^A > C_\tau^L \end{cases}$$

$C_0^A + \tau^2 - 2\tau D_0^A > C_0^L + \tau^2 - 2\tau D_0^L$ sapendo che per il vincolo di duration $D_0^A = D_0^L$

$C_0^A > C_0^L \Rightarrow C_0^A > C_0^L$ tutti gli altri termini si elidono

Morale della favola: anche se il tempo passa (non troppo) e l'intensità non cambia è possibile mantenere il portafoglio così come sta senza ribilanciarlo e rimane IMMUNIZZATO. Ma in pratica l'intensità cambia, infatti questo discorso vale per cambiamenti "piccoli"

Si suppone di avere degli Attivi: preso $0 \leq T \leq t_m$



Si vuole SMOBILIZZARE tutto ad una certa epoca $T \Rightarrow$ VOGLIO AVERE TUTTI I SOLDI IN T

La duration può anche essere vista come il tempo ottimo di smobilizzo degli attivi. Tutto quello che percepisco prima di T lo reinvesto fino a T e tutto quello che ho ancora da incassare in T lo vendo (lo cedo ad una altra parte). Quindi reinvestire gli importi precedenti a T e disinvestire tutti gli altri importi che seguono T. Immaginiamo di essere in 0 e di conoscere T (già dall'epoca 0), in 0 quindi si fanno i conti di quanto si riceverà in T ma con l'intensità δ_0 prevalente alla epoca 0, perché non si conosce l'intensità alla quale si reimpiegheranno i fondi man mano che si incassano né si conosce l'intensità alla quale si rivendono

$$W_T^A(\delta_0) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\delta_0(T-t_j)} = \underbrace{\sum_{j:t_j \leq T} A_j e^{\delta_0(T-t_j)}}_{\text{Montante}} + \underbrace{\sum_{j:t_j > T} A_j e^{-\delta_0(t_j-T)}}_{\text{Fabbisogno (valore residuo)}}$$

facendo i conti nell'ipotesi in cui l'intensità rimanga δ_0

$W_T^A(\delta_0)$: Saldo dell'operazione in T

tutte queste valutazioni sono fatte con l'intensità prevalente in 0 (zero). Però le intensità con le quali reinvesto o vendo possono cambiare. Si suppone che sia δ la intensità al tempo T (cambiata):

se δ aumenta ($\uparrow$) il 1° termine $\uparrow$

se δ diminuisce ($\downarrow$) il 1° termine $\downarrow$

RISCHIO DI REIMPIEGO (reinvestimento degli importi esigibili prima di T)

Se $\delta \uparrow$ il 2° termine $\downarrow$
Se $\delta \downarrow$ il 2° termine $\uparrow$ } RISCHIO DI PREZZO: la variazione della intensità si ripercuote sul prezzo di vendita degli attivi ancora a disposizione.

Questi 2 effetti che sono contrapposti si compensano perché se uno dei 2 termini aumenta l'altro diminuisce (e viceversa). Idealmente si vorrebbe fare in modo che qualunque sia la variazione di tasso rispetto a δ_0:

$W_T^A(\delta) \geq W_T^A(\delta_0)$ ovvero il saldo dell'operazione in T NON DIMINUISCA se l'intensità passa da δ_0 a δ.

Che collegamento c'è tra il valore del portafoglio in 0 e il saldo W?:

$V^A(\delta_0) = W_0^A(\delta_0) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\delta_0 t_j}$ Il valore del portafoglio in 0 è il saldo W calcolato con l'intensità δ_0 in 0 (zero) (e non in T)

$$D^A(\delta_0) = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_j A_j e^{-\delta_0 t_j}}{V^A(\delta_0)}$$

Voglio vedere il saldo W in T come funzione di δ stavolta e non di δ_0

$$W_T^A(\delta) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\delta(T-t_j)}$$

01:07

$$W_T'^A(\delta) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\delta(T-t_j)}(T-t_j)$$

$$W_T''^A(\delta) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\delta(T-t_j)}(T-t_j)^2 \; ; \quad W_T''^A(\delta) > 0$$ se ci sono almeno 2 attivi

$\Rightarrow W_T^A$ convessa globalmente — Se esiste un punto in δ in cui la derivata prima si annulla quel punto diventa punto di minimo

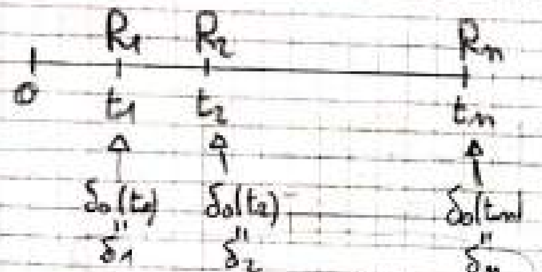
$$W_T'^A(\delta_0) = \sum_{j=1}^{m} A_j e^{\delta_0(T-t_j)}(T-t_j) = e^{\delta_0 T}\left(T\sum_{j=1}^{m} A_j e^{-\delta_0 t_j} - \sum_{j=1} t_j A_j e^{-\delta_0 t_j}\right) = 0$$

La derivata prima di questa funzione si annulla in corrispondenza di δ_0 facendo valere la condizione scritta sopra se si sceglie come epoca di smobilizzo (T) proprio la duration $D^A(\delta_0)$

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{m} t_j A_j e^{-\delta_0 t_j}}{V^A(\delta_0)} = D^A(\delta_0)$$

La duration può essere vista come tempo OTTIMO di smobilizzo degli attivi

01:14



In generale quando la struttura per scadenza dei tassi non è piatta

$\delta_0(t_1), \delta_0(t_2), \ldots, \delta_0(t_m)$ sono i tassi a pronti prevalenti all'epoca 0 in funzione delle scadenze $t_1, t_2, \ldots, t_m$

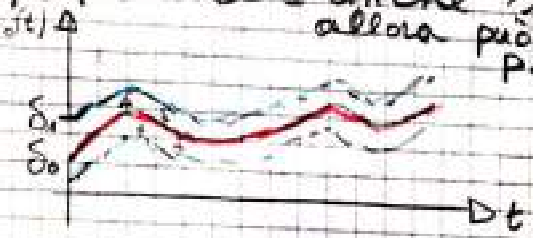
Mentre prima avevamo ipotizzato una struttura piatta e $\delta_0 = \delta_0(t_1) = \delta_0(t_2) = \cdots = \delta_0(t_m)$

nuove notazioni: $\delta_j = \delta_0(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m$

Il valore del portafoglio in 0 (zero) è una funzione di m variabili

$$V(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta_j t_j}$$ ogni rata viene SCONTATA con l'intensità della rispettiva scadenza

Ipotesi semplificatrice: anche se l'intensità può cambiare allora può cambiare nella stessa misura per tutte le scadenze



"Shift paralleli" della curva dei tassi. Se la intensità cambia allora cambia nella STESSA MISURA per tutte le scadenze

I tassi potrebbero subire uno shock, però se c'è uno shock di fatto c'è una variazione e questa variazione è la stessa per tutte le scadenze e quindi la curva dei tassi si sposta o verso l'alto o verso il basso nella stessa misura $\Delta\delta$. Questa ipotesi si può accogliere nel breve periodo

$$\varphi(\Delta\delta) = V(\delta_1+\Delta\delta, \delta_2+\Delta\delta, \dots, \delta_m+\Delta\delta) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-(\delta_j+\Delta\delta)t_j}$$

$$V(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \varphi(0) \qquad \varphi'(\Delta\delta) = -\sum_{j=1}^{m} R_j e^{-(\delta_j+\Delta\delta)t_j} t_j < 0$$

La funzione φ è:
- decrescente
- convessa

$$\varphi''(\Delta\delta) = +\sum_{j=1}^{m} R_j e^{-(\delta_j+\Delta\delta)t_j} t_j^2 > 0$$

$$\varphi'(0) = -\sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta_j t_j} t_j$$

$$\varphi''(0) = \sum_{j=1}^{m} R_j e^{-\delta_j t_j} t_j^2$$

$\$D^{FW} = -\varphi'(0)$: Dollar Duration di Fisher-Weil

$D^{FW} = -\dfrac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}$: Duration di Fisher-Weil

$\$C^{FW} = \varphi''(0)$, $C^{FW} = \dfrac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}$

Dollar Convexity e Convexity di Fisher-Weil

$$\Delta V \simeq -\$D^{FW} \cdot \Delta\delta \quad ; \quad \frac{\Delta V}{V} \simeq -D^{FW} \cdot \Delta\delta$$

$$\Delta V \simeq -\$D^{FW} \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2}\$C^{FW}(\Delta\delta)^2 ; \quad \frac{\Delta V}{V} \simeq -D^{FW} \cdot \Delta\delta + \frac{1}{2} C^{FW}(\Delta\delta)^2$$

La DURATION e la CONVEXITY di Fisher-Weil si possono anche vedere come medie delle scadenze t_j e t_j^2 con pesi opportuni

$$D^{FW} = \sum_{j=1}^{m} t_j W_j$$

$$C^{FW} = \sum_{j=1}^{m} t_j^2 W_j \qquad \text{dove } W_j = \frac{R_j e^{-\delta_j t_j}}{\sum_{k=1}^{m} R_k e^{-\delta_k t_k}}$$

Valgono quasi tutte le proprietà definite nelle pag. precedenti con l'unica differenza che stavolta c'è δ_j anziché δ

4 DICEMBRE 2018: in che senso "andare per tentativi" per risolvere un sistema:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_K = B \\ D_1 \frac{X_1}{B} + D_2 \frac{X_2}{B} + \cdots + D_K \frac{X_K}{B} = \bar{D} \end{cases}$$

Scegliamo una base composta da 2 titoli e lasciamo liberi di variare gli altri $K-2$ titoli. I 2 titoli scelti devono avere duration diverse tra loro. Per esempio si potrebbe prendere un titolo con duration minore di $\bar{D}$ e un altro titolo con duration maggiore di $\bar{D}$ (pag. 96). Si fissano dei valori arbitrari per $X_3, X_4, \ldots, X_K$ e per $D_3, D_4, \ldots, D_K$.

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = B - X_3 - X_4 - \cdots - X_K \\ D_1 \frac{X_1}{B} + D_2 \frac{X_2}{B} = \bar{D} - D_3 \frac{X_3}{B} - D_4 \frac{X_4}{B} - \cdots - D_K \frac{X_K}{B} \end{cases}$$

I valori fissati non sono completamente arbitrari se si vogliono soluzioni tutte positive (o non negative), quindi i valori che noi fissiamo alle variabili DEVONO essere TUTTI maggiori o uguali a 0 (zero). Se li mettessimo tutti uguali a 0 (zero) si otterrebbe un portafoglio con soli 2 titoli. Una condizione necessaria è che $(B - X_3 - X_4 - \cdots - X_K) > 0$ ma anche $\left(\bar{D} - D_3 \frac{X_3}{B} - D_4 \frac{X_4}{B} - \cdots - D_K \frac{X_K}{B}\right) > 0$ dopo di che si può andare anche per tentativi su come scegliere i 2 titoli come base

---

Valgono quasi tutte le proprietà definite a suo tempo per la DURATION e la CONVEXITY ad eccezione di quella dello shift delle date, perché se si spostano le date in avanti o all'indietro non si può dire stavolta che la duration si sposta della stessa quantità perché se si spostano le date si devono usare anche delle intensità diverse per attualizzare gli importi (δ_j), perché la struttura per scadenza non è piatta.

$$\varphi(\Delta\delta) = V(\delta_1 + \Delta\delta, \ldots, \delta_m + \Delta\delta) = \varphi^A(\Delta\delta) - \varphi^L(\Delta\delta)$$

Valore del portafoglio = Valore degli attivi + Valore dei passivi

Vincolo: $\min_j \delta_j + \Delta\delta > 0 \Rightarrow \Delta\delta > -\min_j \delta_j$

poiché se non si pone questo vincolo $\Delta\delta$ può essere negativo e porterebbe a variazioni negative di tasso ed anche di portafoglio

$$\varphi(0) = V(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \varphi^A(0) - \varphi^L(0)$$

VALORE INIZIALE DEL PORTAFOGLIO

Si vuole che 0 sia un minimo locale della funzione φ, quindi deve esistere un intorno di 0 tale che se si prende $\Delta\delta$ sufficientemente in valore assoluto $\ldots \Rightarrow \varphi(\Delta\delta) \geq \varphi(0)$

Condizioni sufficienti per l'immunizzazione locale: $\begin{cases} \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(0) > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(0) > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D_A^{FW} \varphi^A(0) = D_L^{FW} \varphi^L(0) \\ C_A^{FW} \varphi^A(0) > C_L^{FW} \varphi^L(0) \end{cases}$$

00:12

Corollario: equilibrio di bilancio, cioè $\varphi^A(0) = \varphi^L(0)$ (>0).

valore attivi = valore passivi

$$\begin{cases} D_A^{FW} = D_L^{FW} \\ C_A^{FW} > C_L^{FW} \end{cases}$$

Ulteriore Corollario: Se c'è un unico passivo L esigibile in T, ci si trova in equilibrio di bilancio e ci sono almeno 2 attivi

$\Rightarrow$ la condizione sulla convexity è automaticamente soddisfatta quindi $D_A^{FW} = D_L^{FW}$ poiché $D_L^{FW} = T$ $C_L^{FW} = T^2$

media di un unico numero

101 Si può passare a calcolare la dispersione delle varie scadenze attorno alla duration al quadrato (varianza con pesi W_j) e anche qui si vede

che la dispersione risulta maggiore o uguale a 0 ed è 0 se e solo se si ha la media di un unico numero. La dispersione era stata ottenuta come $C - D^2$. Quindi se si hanno almeno 2 attivi $C > D^2$ quindi si ha una cosa del genere:

$\begin{cases} D_A^{FW} = T = D_L^{FW} \\ C_A^{FW} > T^2 = C_L^{FW} \end{cases}$. infine per il Teorema di Fisher-Weil:

Se si ritrova un unico passivo di importo L esigibile in T e si ci trova in equilibrio di bilancio allora

$D_A^{FW} = D_L^{FW}$ è condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE per l'IMMUNIZZAZIONE GLOBALE

Condizione necessaria perché: l'immunizzazione globale vuol dire che in 0 è punto di minimo assoluto per la funzione Ψ, quindi se zero è punto di minimo assoluto ed anche punto di minimo relativo, condizione necessaria è l'annullamento della derivata, e la derivata è la differenza tra le duration di attivi e passivi.

Condizione sufficiente:

L'unico attivo deve essere esigibile alla stessa data dell'unico passivo e inoltre attivo deve coincidere con passivo

Supponiamo che $T = t_j$

$$\Psi(x) = \frac{\varphi^A(x)}{\varphi^L(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} A_j e^{-(\delta_j + x)t_j}}{L e^{-(\delta_j + x)T}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{m} A_j e^{(\delta_j + x)T - (\delta_j + x)t_j}$$

~~Scrivere tutta la dimostrazione~~

IMMUNIZZAZIONE DETERMINISTICA

100:38

IMMUNIZZAZIONE SEMI-DETERMINISTICA

TEORIA DELL'IMMUNIZZAZIONE STOCASTICA

De Felice - Moriconi: La teoria dell'immunizzazione finanziaria

oppure Morrison