Appunti di

MATEMATICA FINANZIARIA

I MODULO

MATEMATICA FINANZIARIA

Introduzione

Oggetto della matematica finanziaria è lo studio degli strumenti quantitativi finalizzati alla valutazione delle operazioni finanziarie.

def operazione finanziaria Un'operazione finanziaria è lo scambio nel tempo di importi monetari esigibili su scadenze diverse.
Un'operazione finanziaria si definisce *certa* quando sia il vettore $\underline{x}$ che il vettore $\underline{t}$ hanno profilo deterministico.
Si definisce *aleatoria* quando almeno uno dei due vettori è non predeterminato.

Le operazioni finanziarie sono oggetto di uno scambio sul mercato che può essere:

primario: mercato di collocamento o immissione di titoli obbligazionari ed azionari, a cui possono accedervi solo operatori istituzionali autorizzati

secondario: mercato dello scambio continuo di strumenti finanziari, successivamente alla loro immissione

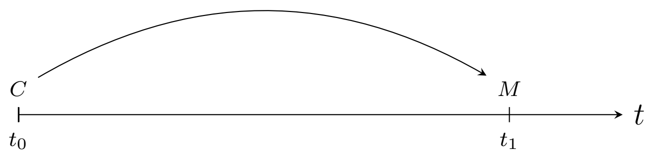
Sia il mercato primario che il mercato secondario si suddividono in tre comparti:

- Monetario: è un mercato liquido dove vengono scambiati titoli di natura obbligazionaria con durata non superiore ad un anno
- Obbligazionario: è un mercato dove vengono scambiati strumenti finanziari di natura obbligazionaria, essendo le obbligazioni titoli di debito
- Azionario: vengono scambiati titoli di partecipazione al capitale di rischio

Questi tre mercati hanno un grado di rischio crescente, tale rischio che sarebbe di volatilità nel tasso di interesse, dipende dalla liquidità e dalla scadenza.

Definizioni fondamentali

1.1 Interesse e montante



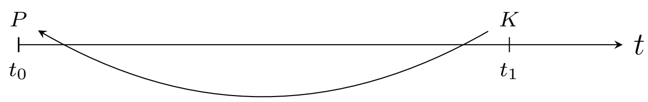
In una operazione di investimento un soggetto rinuncia al tempo iniziale t_0 alla disponibilità di un capitale C, per essere remunerato in un tempo successivo t_1 con una somma M.
La differenza fra montante prodotto e capitale impiegato è l'interesse $I = M - C$.
Il rapporto fra l'interesse generato ed il capitale impiegato è il tasso di interesse, in base al quale l'operazione si è svolta: $i = \frac{I}{C}$.
Il rapporto fra il montante ed il capitale iniziale si indica con r ed è il fattore di capitalizzazione: $r = \frac{M}{C}$.

$$\begin{aligned} C, M &: C \text{ capitale in } t_0,\ M \text{ capitale in } t_1 \\ I &: (\text{interesse})\ I = M - C \\ i &: (\text{tasso di interesse})\ i = \frac{I}{C} \\ r &: (\text{fattore di capitalizzazione})\ r = \frac{M}{C} \end{aligned}$$

- relazione fra C ed M: $M = C(1 + i)$

Mettendo insieme le formule troviamo la relazione fra tasso di interesse e fattore di capitalizzazione: $M = C\ I$ poichè $I = iC$ allora $M = C + I\,C$ mettendo in evidenza si ottiene $M = C(1 + i)$. Poichè avevamo detto che $M = C\,r$, sostituendo si ha $C\,r = C(1 + 1)$ da cui $r = 1 + i$.

1.2 Sconto e valore attuale



In una operazione di finanziamento, un soggetto rinuncia ad un capitale K disponibile in un tempo futuro per entrarne anticipatamente in possesso.
Lo sconto è la differenza tra il capitale K disponibile alla scadenza t_1 e la somma P disponibile immediatamente, cioè in t_0.
$D = K - P$, con P valore attuale del capitale K, quindi $P = K - D$.
Il rapporto tra sconto e capitale a scadenza è il tasso di sconto $d = \frac{D}{K}$ da cui $D = K\,d$.
Il rapporto fra il valore attuale ed il capitale a scadenza è detto fattore di attualizzazione (o di anticipazione) $v = \frac{P}{K}$ quindi $P = K\,v$.

P, K : P capitale in t_0, K capitale in t_1

D : (sconto) $D = K - P$

d : (tasso di sconto) $d = \dfrac{D}{K}$

v : (fattore di attualizzazione) $v = \dfrac{P}{K}$

- relaz. fra K e P: $K = P(1-d)$

Mettendo insieme le formule troviamo la relazione fra d e v: $P = K - D$ poichè $D = k\,d$, allora $P = K - K\,d$. Mettendo in evidenza si ottiene $P = K(1-d)$ poichè avevamo detto che $P = K\,v$ sostituendo si ha $K\,v = K(1-d)$ da cui $v = 1 - d$.
Poichè c'è equivalenza fra le operazioni di investimento e di finanziamento, nel senso che una stessa operazione può essere vista come investimento o finanziamento a seconda del lato in cui ci poniamo, possiamo trovare le relazioni fra le quattro grandezze fondamentali:

	i	r	d	v
i=	i	$r-1$	$\frac{d}{1-d}$	$\frac{1-v}{v}$
r=	$i+1$	r	$\frac{1}{1-d}$	$\frac{1}{v}$
d=	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{r-1}{r}$	d	$1-v$
v=	$\frac{1}{1+i}$	$\frac{1}{r}$	$1-d$	v

dim. relazioni della tabella

- $i \to d$: $i = \frac{I}{C}$ e $d = \frac{D}{K}$ poichè I, D rappresentano la stessa cosa da 2 pdv diversi li considero uguali: $i \cdot C = I$ e $d \cdot K = D$, impongo $I = D$: $i \cdot C = d \cdot K$ da cui $i = d \cdot \frac{K}{C}$. Poichè vogliamo esprimere i in funzione di d sostituiamo $C \to P$: $i = d \cdot \frac{K}{P}$: siccome $P = K - D = K(1-d)$, $i = d \cdot \frac{K}{K(1-d)} = \frac{d}{1-d}$

- $d \to i$: $d = \frac{D}{K}$, sostituisco $D \to I$ e $K \to M$ ottenendo $d = \frac{I}{M} = \frac{C \cdot i}{C \cdot i + C} = \frac{C \cdot i}{C(1+i} = \frac{i}{1+i}$
- $d \to r$: $d = \frac{D}{K} = \frac{I}{M} = \frac{M-C}{M} = 1 - \frac{C}{M} = 1 - \frac{C}{M} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r-1}{r}$
- $r \to d$: $r = \frac{M}{C} = \frac{K}{P} = \frac{K}{K-D} = \frac{K}{K-K \cdot d} = \frac{K}{K(1-d)} = \frac{1}{1-d}$
- $v \to r$: $v = \frac{P}{K} = \frac{1}{r}$
- $r \to v$: $r = \frac{M}{C} = \frac{K}{P} = \frac{1}{v}$
- $v \to i$: $i = \frac{I}{C} = \frac{D}{P} = \frac{K-P}{P} = \frac{K}{P} - 1 = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1-v}{v}$
- $i \to v$: $v = \frac{P}{K}$, dalla $i = \frac{D}{P}$ ottengo $P = \frac{D}{i}$ che sostiuisco nella prima eq.: $v = \frac{D}{i} \cdot \frac{1}{K} = (\frac{K-P}{K} \cdot \frac{1}{i}) = (1 - \frac{P}{K} \cdot \frac{1}{i}) = \frac{1-v}{i}$. Allora vale che $v \cdot i = 1 - v$, $v \cdot i = 1 - v$, $v(1+i) = 1$ da cui $v = \frac{1}{1+i}$

Queste grandezze fondamentali sono periodali, nel senso che si riferiscono all'unità di tempo, comunque sia misurato (anni, giorni, mesi). Nel seguente capitolo vedremo quali cambiamenti si vengono a creare in corrispondenza dei diversi valori di tempo. Si parlerà in proposito di *regimi finanziari*.

I principali regimi finanziari

In tutto il primo modulo ipotizzeremo che le azioni dipendano solo dalla variabile temporale, supponendo dato il tasso di interesse.

2.1 Regime finanziario dell'interesse semplice

E' quello nel quale l'interesse prodotto da una operazione di investimento è direttamente proporzionale al capitale investito e alla durata dell'operazione.

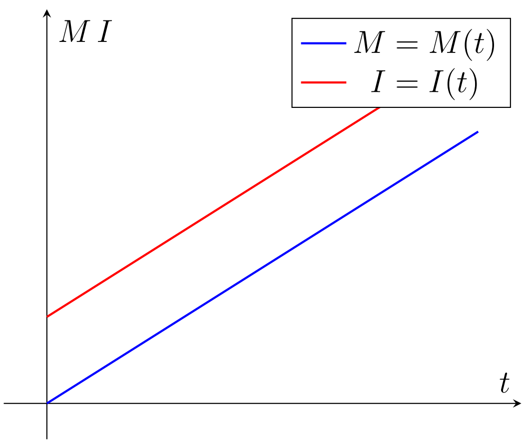
interesse $I(t) = i \cdot C \cdot t$

tasso di interesse $i(t) = i \cdot t$

montante $M(t) = C(1 + i \cdot t)$

fattore capitalizz. $r(t) = 1 + i \cdot t$

Nel regime dell'interesse semplice, l'interesse e il montante hanno un andamento lineare rispetto al tempo.



Le due semirette sono parallele poiché hanno lo stesso coefficiente angolare $i\,C$. La loro pendenza cresce al crescere di i e/o C. Per $i = 0$ le semirette diventano parallele all'asse delle ascisse. Per $i < 0$ diventano inclinate negativamente.

Il tasso di sconto sarà $d(t) = \dfrac{i(t)}{1 + i(t)} = \dfrac{it}{1 + it}$ poiché $i = \dfrac{d}{1 - d}$ possiamo scrivere $d(t) = \dfrac{dt}{1 + (t-1)d}$.

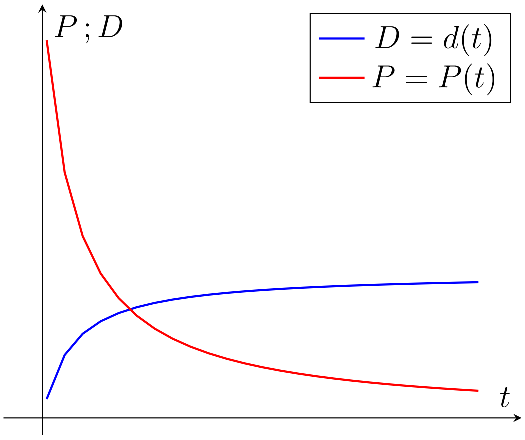
Inoltre lo sconto sarà $D(t) = K\,d(t) = \dfrac{K\,d\,t}{1 + \ (t-1)\,d} = \dfrac{d\,i\,t}{1 + i\,t}$.

Per quanto riguarda il fattore di attualizzazione abbiamo $v(t) = 1 - d(t) = 1 - \frac{d\,t}{1+(t-1)d} = 1 - \frac{i\,t}{1+i\,t}$

$P(t) = K\,v(t) = K(1-d(t)) = K\left(1 - \frac{d\,t}{1+(t-1)d}\right) = \frac{K[1+(t-1)d] - k\,d\,t}{1+(t-1)d} = \frac{K + K(t-1)d - K\,d\,t}{1+(t-1)d} = \frac{d(1-d)}{1+(t-1)d}$.

Sostituendo invece la formula in cui compare il tasso di interesse
$P(t) = k(1-d(t)) = k(1 - \frac{i\,t}{1+i\,t}) = \frac{k + k\,i\,t - k\,i\,t}{1+i\,t} = \frac{k}{1+i\,t}$

Nel regime dell'interesse semplice sconto e valore attuale non sono funzioni lineari, ma quozienti di funzioni lineari.



Lo sconto è un segmento di iperbole equilatera passante per l'origine e avente la retta $y = k$ come asintoto.
Il valore attuale è un segmento di iperbole equilatera che esce dal punto k e tende a 0 quando y aumenta gli archi di iperbole si incurvano.

Proprietà importanti in questo regime sono:

- additività rispetto al tempo: $I(i, t_1 + t_2) = I(i, t_1) + I(i, t_2)$
- additività rispetto al tasso: $I(i_1 + i_2, t) = I(i_1, t) + I(i_2, t)$

2.1.1 Tassi equivalenti

Un tasso equivalente è un tasso proporzionale al tasso effettivo annuo di interesse i secondo il fattore di proporzionalità k.

$$i_k = k \cdot i$$

Al cambiare delle unità di misura del tempo cambia la determinazione del tasso di interesse da inserire. Tassi periodali descriventi la stessa legge, ma con riferimento a diverse unità di misura del tempo, vengono detti *tassi equivalenti*.

Ad esempio:

$i_{semestrale} = i_{annuale} \cdot \frac{1}{2}$

$i_{annuale} = i_{trimestrale} \cdot 4$

Esempio:

1 $C = 820$, dobbiamo capitalizzarlo ad un tasso semestrale del 3% per 8 anni:
$\rightarrow t = 16, M = 820(1 + 0,03)^16 = 1315,86$

2 $C = 640$, dobbiamo capitalizzarlo ad un tasso trimestrale $2,25\%$ per 8 anni:
$\rightarrow t = 32, M = 640(1 + 0,0225)^{32} = 1304,386$

3 $C = 590$, tasso annuo nominale convertibile trimestralmente 6% per 5 anni e 6 mesi:
$\rightarrow$ dal tasso annuo nominale j_4 si ottiene $i_4 = \frac{j_4}{4} = 0,015$ da cui esprimendo il tempo in trimestri $t = 22$, si ottiene $M = 818,66$

Nella pratica il regime finanziario dell'interesse semplice trova applicazione per periodi molto brevi. Infatti l'operatore ha convenienza ad abbreviare al massimo la durata del suo investimento per riscuotere gli interessi maturati ed aggiungerli al capitale iniziale mettendoli a loro volta a frutto (capitalizzazione degli interessi). Si è così introdotto il regime dell'interesse composto.

2.2 Regime finanziario dell'interesse composto

E' quello in cui gli interessi prodotti vengono resi fruttiferi automaticamente. Supponiamo che l'unità di capitale inizialmente investita finisca per produrre nell'unità di tempo, l'ammontare di interesse $r(1) = 1 + i$. Se l'investimento prosegue alle stesse condizioni nel secondo periodo avremo $r(2) = r(1) \cdot (1 + i) = (1 + i)^2$. Generalizzando $r(t) = (1 + i)^t$ e $i(t) = r(t) - 1 = (1 + i)^t - 1$.
Le leggi di formazione del montante e dell'interesse risultano:

interesse $I(t) = C[(1 + i1)^t - 1]$

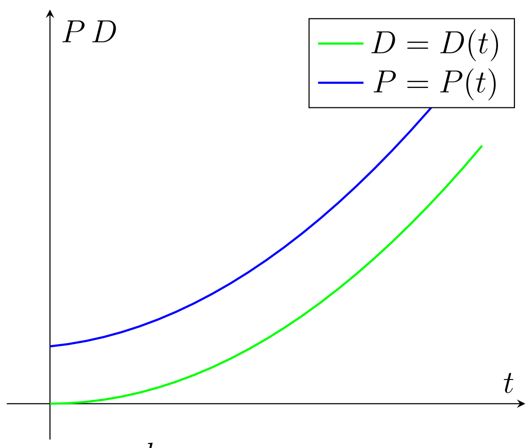
tasso di interesse $i(t) = (1 + t)^t - 1$

montante $M(t) = C(1 + i)^t$

fattore capitalizz. $r(t) = (1 + i)^t$

In questo regime un'operazione intermediaria di capitalizzazione degli interessi maturati resta priva di conseguenze $(1 + i)^t = (1 + i)^s(1 + i)^{t-s}$.

I grafici delle funzioni montante e interesse sono curve esponenziali. A valori di i crescenti, corrispondono curve più rapidamente crescenti.



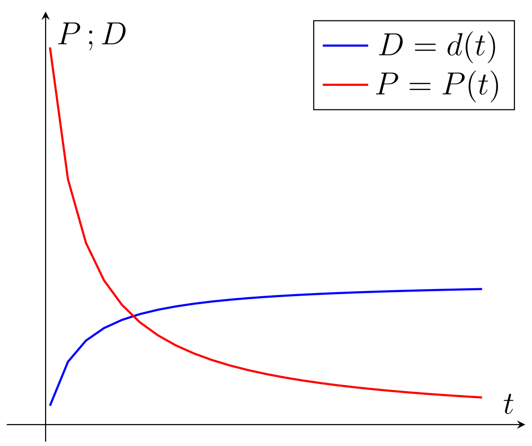
$P(t) = \dfrac{k}{1 + i\,t}$

$D(t) = \dfrac{d\,i\,t}{1 + i\,t}$

Per quanto riguarda il tasso di sconto avremo:
$d(t) = 1 - (1 + i)^{-t} = 1 - (1 - d\,t)^t$
$D(t) = k(1 - (1 + i)^{-t}) = k[1 - (1 - d)^t]$

Per quanto riguarda il fattore di anticipazione avremo:
$v(t) = (1 + i)^{-t} = (1 - d)^t$
$P(t) = k(1 - d)^t = k(1 + i)^{-t}$

I relativi grafici sono gli stessi di quelli visti nel caso d'interesse semplice:



2.2.1 Tassi equivalenti

La formula è

$$i_{\frac{1}{m}} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

dove $\frac{1}{m}$ = un emmesimo di anno ed i=tasso annuale.

Esplicitando per i la stessa formula è:

$$i = (1 + i_{\frac{1}{m}})^m - 1$$

Da questo tasso è possibile ricavare tutti gli altri, comunque precisando:

$$v_{\frac{1}{m}} = (1+i)^{-\frac{1}{m}} = (1+i_{\frac{1}{m}})^{-1} = (1-d)^{\frac{1}{m}}$$

$$d_{\frac{1}{m}} = 1-(1-i_{\frac{1}{m}})^{-1} = 1-(1-d)^{\frac{1}{m}}$$

Per il regime composto si introducono anche due nuovi tassi:

- Tasso nominale annuo di interesse convertibile m volte all'anno

- Tasso istantaneo

Il tasso nominale annuo di interesse

Consideriamo il caso in cui C sia investito in regime finanziario dell'interesse composto al tasso annuo i, ma l'interesse via via prodotto venga corrisposto all'investitore con una prefissata periodicità (m volte l'anno). Per ogni m-esimo di anno, l'interesse maturato è via via staccato sarà $C\,i_{\frac{1}{m}}$. In capo ad un anno l'investitore si trova ad aver riscosso, su ogni unità di capitale m rate di $i_{\frac{1}{m}}$ ciascuna. La somma aritmetica di queste quantità prende il nome di *tasso nominale annuo d'interesse convertibile m volte all'anno* ($J(m)$)

$$J(m) = m \cdot i_{\frac{1}{m}}$$

il quale, espresso con il tasso annuale, sarà

$$J(m) = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

Le cui formule inverse di queste relazioni sono rispettivamente

$$i_{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\,J(m)$$

$$i = \left(1+\frac{J(m)}{m}\right)^m - 1$$

Nb_1 : $J(m) < i, \forall m > 1$
Nb_1 : per m=1, $J(m) = i$; per $i = 0$, $J(m) = 0$

Il tasso istantaneo

Il tasso istantaneo (o *tasso nominale annuo di interesse convertibile infinite volte l'anno*) si trova facendo tendere m all'infinito:

$$\lim_{m\to\infty} J(m) = \log(1+i) \stackrel{\Delta}{=} \delta$$

$J(\infty) = \lim_{m\to+\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}{\frac{1}{m}} = \frac{0}{0} =^{(th.DeHopital)} \lim_{\frac{1}{m}\to 0} \frac{-\frac{1}{m}(1+i)^{\frac{1}{m}}\,\ln(1+i)}{\frac{1}{m^2}} = \ln(1+i) \stackrel{\Delta}{=} \delta$
Esplicitando la formula inversa determiniamo i:

$$i = e^{\delta} - 1$$

Al tendere di m all'infinito le rate costanti ed equintervallate si trasformano in un flusso continuo ed uniforme di capitale, durante tutto l'anno, per l'ammontare complessivo, nominale δ. Sapendo che $i = e^{\delta} - 1$, possiamo ricavarci le funzioni fondamentali in funzione di δ:

- $r(t) = e^{\delta\, t}$
- $v(t) = e^{-\delta\, t}$
- $d(t) = 1 - e^{-\delta\, t}$
- $i(t) = e^{\delta\, t} - 1$

Se il tempo non è espresso in anni bisognerà fare delle modifiche: $\delta_{\frac{1}{k}} = \log(1 + i_{\frac{1}{k}}) = \log(1 + i)^{\frac{1}{k}} = \dfrac{1}{k} \cdot \delta$

Simmetricamente a quanto fatto per i tassi di interesse, possiamo trovare:

- il tasso nominale di sconto convertibile m volte all'anno $\sigma(m)$
  $\sigma(m) = m\, d_{\frac{1}{m}} = m[1 - (1 - d)^{\frac{1}{m}}]$
- il tasso istantaneo di sconto, facendo tendere m all'infinito
  $\delta = \lim_{m\to\infty} \sigma(m) = -\ln(1 - d)$. Poiché $1 - d = (1 + i)^{-1}$ allora $\delta = \ln(1 + i) = \ln(1 - d)^{-1} = -\ln(1 - d) = \sigma$

Il tasso istantaneo di interesse e di sconto coincidono!

2.3 La capitalizzazione mista

Si può dimostrare che a parità di tasso $i > 0$, per un investimento di durata inferiore all'anno il regime dell'interesse semplice è più conveniente; mentre per capitalizzazioni di durata superiore ad un anno, è più conveniente quello dell'interesse composto.
Nei rapporto di c/c bancario c'è la capitalizzazione mista. Gli interessi sui depositi sono calcolati con RFIS e accreditati alla fine di ogni anno solare. Supponiamo che il capitale giaccia per t anni, composto da uno spezzone iniziale di $f < 1$ anni necessario per arrivare alla data del primo accredito, da un numero M di anni e da uno spezzone $f' < 1$ dalla data dell'ultimo accredito fino a quella del prelievo finale. Se i resta costante $(1 + if)(1 + i)^n(1 + if')$ è il montante generato per una unità di capitale. Il regime dell'interesse composto puro porterebbe a $(1+i)^t = (1+i)^{f+n+f'} = (1+i)^f(1+i)^n(1+i)^{f'}$.
Poiché $(1+i)^f < (1+if)$ e $(1+i)^{f'} < (1+if')$, l'interesse composto puro genererebbe un montante minore di quello a capitalizzazione mista.

Proprietà di scindibilità dei regimi finanziari

Un regime finanziario si dice scindibile se comunque scelte 3 scadenze x, y, z tra loro consecutive, il montante finanziario di un'operazione messa in atto tra la scadenza x e la scadenza z può essere fattorizzato nel montante finanziario tra le scadenze x e y ed il montante finanziario tra le scadenze y e z.
$r(x, z) = r(x, y)r(y, z)$ capitalizzazione
$v(x, z) = v(x, y)v(y, z)$ attualizzazione
Si dimostra che il RFIS non è scindibile, mentre il RFIC lo è.

dim. interesse semplice $r(t) = 1+it$ scindiamo il tempo per cui $t = t_1+t_2$. Se fosse scindibile, dovremo avere che $r(t) = r(t_1)r(t_2) = (1+it_1)(1+it_2) = 1+it_1+it_2+i^2t_1t_2 > 1+it = 1+it_1+it_2$. Vediamo che la quantità risultate è diversa da $r(t)$ per cui il RFIS non è scindibile.

dim. interesse composto $r(t) = (1 + i)^t$ scindiamo il tempo per cui $t = t_1 + t_2$, $r(t_1)r(t_2) = (1+i)^{t_1}(1+i)^{t_2} = (1+i)^{t_1+t_2} = (1+i)^t$. Grazie alla proprietà delle potenze abbiamo dimostrato che il RFIC è scindibile.

La scindibilità è la proprietà in forza della quale sul mercato non è possibile l'arbitraggio (investire su un intervallo t equivale a fare un'operazione di roll-over).

3.1 Valore capitale di un flusso di importi

Dato un flusso di importi definito dalla coppia di vettori x, T, si definisce valore capitale di un flusso di importi l'importo monetario esigibile ad una prefissata scadenza equivalente finanziariamente all'intero flusso, nel senso che è equo ricevere l'importo del valore capitale per pagare l'intero flusso o, viceversa, pagare l'importo per ricevere l'intero flusso.
Una volta fissato il flusso x, deve essere fissata l'epoca di valutazione ed anche il regime finanziario. In proposito, se $\bar{t}$ è l'epoca di valutazione abbiamo tre diversi valori capitali:

1) $\bar{t} \leq t_1$ l'epoca di valutazione è anteriore alla prima scadenza del flusso.
   Il valore capitale è dato dalla somma dei valori attuali all'epoca e di tutte le poste con scadenza successiva all'epoca di valutazione. $W(\bar{t}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k v(\bar{t}, t_k)$.

$-W(\bar{t}, \underline{x})$ è l'importo che siamo disposti a scambiare in $\bar{t}$ per l'intero flusso. In questo caso, il valore capitale coincide col valore attuale del flusso d importi.

2) $\bar{t} \geq t_n$ l'epoca di valutazione è successiva all'ultima scadenza del flusso $W(\bar{t}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k r(t_k, \bar{t})$. Il valore del capitale è dato dalla somma dei montanti finanziari delle poste del flusso montanti finanziari calcolati all'epoca di valutazione.

3) $\bar{t} = t_j$ l'epoca di valutazione è interna allo scadenzario del flusso. $W(\bar{t}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{J} x_k r(t_k, \bar{t}) + \sum_{k=J+1}^{m} x_k v(t_k, \bar{t})$

Se siamo in un RF scindibile, allora i $W(\bar{t}, \underline{x})$ sono tutti uguali. Prendiamo il caso in cui $\bar{t} \leq t_1$, per passare da un RF scindibile a due variabili ad un Rf scindibile ad una variabile.
$W(\bar{t}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k v(\bar{t}, t_k)$ e $v(t, s) = (1+i)^{-(s-t)} = \frac{1}{(1+i)^{s-t}}$

Rendite

Si chiama rendita una successione di capitali da riscuotere (o da pagare) a scadenze determinate. Le rate della rendita sono i singoli capitali esigibili (o dovuti) alle diverse scadenze. Fisseremo la nostra attenzione sulle rendite certe, quelle per cui le rate sono a priori fissate nel numero, nell'ammontare e nelle epoche di pagamento.

Se $t_0 \geq 0$ è la data di inizio della rendita e $t_1 \geq 0$ è la data di pagamento della prima rata, nel caso in cui $t_0 = t_1$ si parla di rendita anticipata, se $t_1 \leq t_0$ la rendita è posticipata.
Nel caso in cui $t_0 = 0$ avremo una rendita immediata, se $t_0 = n$ avremo una rendita differita di n anni.
Una rendita temporanee è formata da un numero finito di rate; una rendita perpetua è una rendita di durata infinita.

4.1 Rendite a rata costante

4.1.1 Rendita immediata posticipata di durata n anni

Il valore attuale di questa rendita è dato dalla somma dei valori attuali delle singole rate, per semplicità consideriamo l'importo della rata unitario

$$a_{n\rceil i} = v + v^2 + v^3 + ... + v^n$$

questa è una progressione geometrica di ragione v con n termini e primo termine pari a v. La formula della progressione geometrica di ragione v è $s_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}$, con s_n somma dei termini, a_0 primo termine della progressione, n numero dei termini per cui possiamo scrivere

$$a_{n\rceil i} = v\frac{1 - v^n}{1 - v}$$

ponendo $v = \frac{1}{1+i}$ avremo anche

$$a_{n\rceil i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Naturalmente se il valore della rata non fosse stato costante, il valore della rendita sarebbe stato

$$Ra_{n\rceil i} = Rv\frac{1 - v^n}{1 - v}$$

Il montante di questa rendita sarà dato dalla somma dei montati delle singole rate

$$s_{n\rceil i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i) + 1$$

Questa è una progressione numerica di n termini di ragione $(1+i)$ con primo termine pari a 1, per cui possiamo scrivere

$$s_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Sfruttando la scindibilità dell'interesse composto, possiamo vedere il montante di questa rendita come il valore attuale della rendita stessa capitalizzata per l'intera durata della rendita

$$s_{n\rceil i} = (1+i)^n a_{n\rceil i}$$

4.1.2 Rendita immediata anticipata di durata n anni

In questo caso la rata viene pagata subito

$$\ddot{a}_{n\rceil i} = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1}$$

da cui

$$\ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

In proposito si possono fare due osservazioni:
- ricordando che $a_{n\rceil i} = \frac{1-v^n}{1-v}$, sostituendo possiamo scrivere $\ddot{a}_{n\rceil i} = 1 + a_{n-1\rceil i}$
- il montante sarà:
$\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^2 + (1+i)$
$\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$

Anche in questo caso, sfruttando la scindibilità, possiamo scrivere che $\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i)^n \ddot{a}_{n\rceil i}$.
Ricordando che $s_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$, possiamo scrivere $\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i)s_{n\rceil i}$.
Si osservi inoltre che il montante di n rate anticipate uguaglia quello di $n+1$ posticipate meno l'ultima $\ddot{s}_{n\rceil i} = s_{n+1\rceil i} - 1$.

Una rendita perpetua può considerarsi come il limite di una temporanea quando si faccia tendere il numero delle rate all'infinito. Per tali tipi di rendite, non è possibile considerare il montante ma solo il valore attuale.

- valore attuale di una rendita perpetua posticipata $a_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to+\infty} a_{n\rceil i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ poiché $e^{-\infty} = 0$, allora $a_{\infty\rceil 1} = \frac{1}{i}$
- valore attuale di una rendita perpetua anticipata $\ddot{a}_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to+\infty}(1+i)a_{n\rceil i} = (1+i)a_{\infty\rceil i} = (1+i)\frac{1}{i} = \frac{1}{i} + 1$

Nel caso di rendite con data di inizio differita di k anni rispetto al tempo zero, il calcolo del valore attuale si effettua scontando per la lunghezza del periodo di differimento il valore attuale della corrispondente rendita immediata, ovvero moltiplicando per v^k.

4.1.3 Rendita temporanea differita posticipata

${}_{k|}a_{n\rceil i} = v^{k+1} + v^{k+2} + ... + v^{k+n} = v^k(v + v^2 + ... + v^n) = v^k a_{n\rceil i}$, sempre nel caso in cui la rata R=1

4.1.4 Rendita temporanea differita anticipata

${}_{k|}\ddot{a}_{n\rceil i} = v^k + v^{k+1} + ... + v^{k+n-1} = v^k(1 + v + ... + v^{n-1}) = v^k \ddot{a}_{n\rceil i}$, sempre nel caso in cui la rata R=1.

Come nel caso delle rendite immediate, posso scrivere:
$\ddot{a}_{n\rceil i} = (1+i)_{k|}a_{n\rceil i} = v^k(1+i)a_{n\rceil i} = v^{k-1}a_{n\rceil i}$
Per quanto riguarda i montanti:
nel caso di rendita posticipata avrà ${}_{k|}s_{n\rceil i} = (1+i)^{k+n}{}_{k|}a_{n\rceil i}$ da cui ${}_{k|}s_{n\rceil i} = (1+i)^n a_{n\rceil i}$
nel caso di rendita anticipata avrà ${}_{k|}\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i)^{k+n}{}_{k|}\ddot{a}_{n\rceil i}$ da cui ${}_{k|}\ddot{s}_{n\rceil i}(1+i)^n \ddot{a}_{n\rceil i}$

(controllare entrambe pg 6)

4.1.5 Rendite con rata frazionata

Rendita frazionata posticipata

Si tratta di una rendita di periodo $\frac{1}{m}$ di anno e rata anch'essa pari a $\frac{1}{m}$. Utilizzando il tasso $i_{\frac{1}{m}}$ relativo al periodo considerato ed il fattore di attualizzazione $v_{\frac{1}{m}}$ associato, il valore attuale si calcola tenendo conto del fatto che le rate sono ora di numero $n \cdot m$, e che ciascuna di esse non è più unitaria ma è di ammontare $\frac{1}{n}$.

(controllare formule)

$a^{(m)}_{m\rceil i} = \frac{1}{m} v_{\frac{1}{m}} \frac{1-v^{n\cdot m}_{\frac{1}{m}}}{1-v_{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}\frac{1-(v_{\frac{1}{m}})^{n\cdot m}}{i_{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}\frac{1-(1+i_{\frac{1}{m}})^{-n\cdot m}}{\frac{1}{m}}$ allora ricordando che $i_{\frac{1}{m}} = (1+i)^m - 1$, si ottiene a partire dalle terza formula l'espressione del valore attuale in funzione però del tasso annuo i $a^{(m)}_{m\rceil i} = \frac{1}{m}\frac{1-\{[1+(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]^{-n\cdot m}\}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1} = \frac{1}{n}\frac{1-(1+i)^{-m}}{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1}$. Ricordando inoltre che $J(m) = m \cdot i_{\frac{1}{m}} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$ si ha $a^{(m)}_{m\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{J(m)}$. Se moltiplichiamo e dividiamo per i otteniamo $a^{(m)}_{m\rceil i} = \frac{i}{J(m)}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ poiché $a_{n\rceil i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ allora $a^{(m)}_{m\rceil i} = \frac{i}{J(m)}a_{n\rceil i}$. Tale formula collega il valore attuale di una rendita frazionata a quello di una rendita unitaria corrispondente, tramite il fattore $\frac{1}{J(m)}$ che prende il nome di fattore di correzione.
Per quanto riguarda il montante sfruttiamo innanzitutto la proprietà di scindibilità dell'interesse composto e scriviamo $s^{(n)}_{n\rceil i} = (1+i)^m a^{(m)}_{m\rceil i}$ possiamo peraltro scrivere $s^{(m)}_{m\rceil i} = \frac{i}{J(m)}s_{m\rceil i}$

Rendita frazionata anticipata

Possiamo facilmente ricavare queste formule dal caso della rendita frazionata posticipata $\ddot{a}^{m}_{n\rceil i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} a^{(m)}_{n\rceil i}$
$\ddot{s}^{(m)}_{n\rceil i} = (1+i)^{\frac{1}{m}} s^{(m)}_{m\rceil i}$ da cui $\ddot{s}^{(m)}_{n\rceil i} = (1+i)^n \ddot{a}^{(m)}_{n\rceil i}$

Vediamo brevemente il caso di rendite frazionate perpetue e poi quello delle differite perpetue. Come prima è possibile calcolare solo il valore attuale:

- rendita perpetua frazionata posticipata $a^{(m)}_{\infty\rceil i} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{\infty\rceil i} = \lim_{m\to\infty}(\frac{i}{J(m)}a_{m\rceil i}) = \frac{i}{J(m)}\frac{1}{i} = \frac{1}{J(m)}$

- rendita perpetua frazionata anticipata $\ddot{a}^{(m)}_{\infty\rceil i} = \frac{1}{m} + a^{(m)}_{\infty\rceil i} = \frac{1}{m} + \frac{1}{J(m)}$

- rendita perpetua posticipata differita di k anni ${}_{k|}a_{\infty\rceil i} = v^k a_{\infty\rceil i} = \frac{v^k}{i}$

- rendita perpetua anticipata differita di k anni ${}_{k|}\ddot{a}_{\infty\rceil i} = v^k(\frac{1}{i}+1) = v^k(\frac{1}{i}+1) = \frac{v^k}{i} + v^k$

4.2 Rendite a rata variabile

I casi notevoli di rendite finanziare a rata variabile sono rendita a rata variabile in progressione geometrica e rendita a rata variabile in progressione aritmetica.

Piani di ammortamento

Un piano di ammortamento è un insieme di regole attraverso le quali è realizzato il processo di rimborso di un'operazione di finanziamento. Le grandezze fondamentali sono:

m numero delle rate

C importo finalizzato alla stipulazione del contratto di finanziamento

i tasso effettivo uniperiodale di interesse (tasso di remunerazione del piano)

I interessi $I_0 = i \cdot D^r_{J-1}$

D^{r} debito residuo

R rata $R_J = I_J + C_J \, \forall J$

E debito estinto $E_J = C - D^r_J \, \forall J$

La correttezza del piano è verificata attraverso il rispetto delle:

- regole di apertura (alla data di stipulazione del contratto di finanziamento) $D^r_o = C \rightarrow E_0 = 0$.
- regole di chiusura (alla data di conclusione del contratto) $D^r_m = 0 \rightarrow E_m = C$

Vediamo ora che cos'è il debito residuo e quali modi abbiamo per calcolarlo.

5.1 Debito residuo

Supponiamo di essere alla scadenza h, dunque abbiamo già corrisposto le h rate. Possiamo calcolare il debito residuo in due modi:
1) prospettiva: ci si riferisce alle scadenze successive ad h
2) retrospettiva: ci si riferisce alle scadenze antecedenti, includendo h

1) utilizzando la via prospettiva bisogna fare una distinzione:

   - se si conosce il vettore delle rate $\underline{R}$
     $D^r_h = \sum_{k=h+1}^{m} R_k(1+i)^{-(k-h)}$ il debito residuo sarà la somma dei valori attuali delle rate con scadenza successiva ad h, calcolati al tasso i

- se si conosce il vettore delle quote capitali $\underline{C}$
  $D_h^r = C - \sum_{k=1}^{h} C_k$ il debito residuo sarà la somma delle quote capitali che verranno rimborsate nelle scadenze successive ad h, quindi da $h+1$ ad m

2) anche in questo caso bisogna fare una distinzione

   - se si conosce il vettore delle rate $\underline{R}$
     $D_h^r = C(1+i)^h - \sum_{k=1}^{h} R_k(1+i)^{h-k}$ il debito residuo è la differenza fra il montante in h dell'importo finanziato e la somma dei montanti, sempre in h, delle prime h rate
   - se si conosce il vettore delle quote capitali $\underline{C}$
     $D_h^r = C - \sum_{k=1}^{h} C_k$ il debito residuo è la differenza tra capitale finanziato e la somma delle quote capitali corrisposte con le rate pagate sino ad h

Di solito si usa il metodo prospettivo.

Ma torniamo ora ai piani di ammortamento

5.2 Preammortamento

In un piano di ammortamento si definisce *periodo di preammortamento* l'intervallo di tempo che intercorre tra l'erogazione del finanziamento e la prima scadenza del piano su cui avviene il rimborso della prima quota capitale.
In genere, per questo periodo, al creditore vengono corrisposti solo interessi che sono determinati sull'intero ammontare del prestito.

5.3 Distinzione dei piani di ammortamento

- piano di ammortamento tipo 1: (unica soluzione a scadenza) prevede la restituzione del capitale e la corresponsione degli interessi in un'unica soluzione alla scadenza del piano di ammortamento. Fino al periodo $m-1$ non accade nulla, tutto accade in m

- piano di ammortamento tipo 2: C (a scadenza) + I rateale. Prevede la restituzione del capitale in un'unica soluzione alla scadenza e la liquidazione degli interessi su ciascuna scadenza.

- piano di ammortamento tipo 3: prevede la progressiva restituzione del capitale. In genere ogni scadenza presente elementi dei 5 vettori: $\underline{C}, \underline{I}, \underline{R}, \underline{D^r}, \underline{E}$.

  piano di ammortamento a rata costante (francese)

  piano di ammortamento a quote capitali costanti (uniforme o italiano)

  piano di ammortamento americano

5.3.1 Piano di ammortamento a rata costante (francese)

Il vettore delle rate è costituito da m elementi tutti uguali fra loro $R_J = R =$ costante$\forall J$. Per calcolare il valore di tale rata costante parto dalla condizione di apertura $D_0^r = C$ sfruttando la definizione prospettiva nel calcolo del debito residuo scrivo $R \cdot a_{m\rceil i} = C \rightarrow R = \frac{C}{a_{m\rceil i}}$.
Nb. Le rate vengono pagate posticipatamente

Determinata la rata, possiamo scrivere facilmente il D^r ad una generica scadenza h secondo l'approccio prospettivo $D_h^r = R \cdot a_{m-h\rceil i}$.
Trovare il generico elemento della quota interessi è semplice $I_h = i \cdot D_{h-1}^r \rightarrow I_h = i \cdot R \cdot a_{m-h\rceil i}$.

Vediamo ora come determinare il vettore delle quote capitali: possiamo scrivere che $C_m = D_{m-1}^r \rightarrow C_m = R \cdot v$.
Ma come determinare le altre quote capitali? Prendiamo una generica scadenza s. Siccome le rate sono costanti $R_s = R_{s+1}$. Scomponiamo la rata nelle sue 2 componenti $R_s = i \cdot D_{s-1}^r + C_s$ da cui $R_{s+1} = i \cdot D_s^r + C_{s+1}$ ottenendo $i \cdot D_{s-1}^r + C_s = i \cdot D_s^r + C_{s+1}$. Usando l'approccio prospettivo del debito residuo si ha $i(C_s + C_{s+1} + ... + C_n) + C_s = i(C_s + C_{s+1} + C_{s+2} + ... + C_n) + C_{s+1}$. Fatte le opportune semplificazioni avremo $i \cdot C_s + C_s = C_{s+1}$ $C_s(1+i) = C_{s+1}$ cioè $(1+i) = \frac{C_s}{C_{s+1}} \forall s$.

Vediamo dunque che le quote capitali aumentano secondo una progressione geometrica di ragione $(1+i)$ possiamo allora scrivere il vettore delle quote capitali partendo dall'ultima $\subseteq$: $\{R \cdot v^m + R \cdot v^{m-1}, ..., R \cdot v\}$.
Ultima osservazione da fare su questo tipo di piano di ammortamento è che con l'aumentare del tempo, sebbene la rata resti costante e le sue componenti variano: le quote capitali crescono, di conseguenza la quota interessi diminuisce.

5.3.2 Piano di ammortamento a quote capitali costanti (uniforme o italiano)

Il vettore delle quote capitali è costituito da m elementi tutti uguali tra loro di ammontare $\frac{C}{m}$. per ogni scadenza, dunque, si recupera una parte costante di capitale. Il debito residuo alla scadenza generica sarà $D_m^r = \frac{C}{m}(m-h)$ Nb. è pagata alla h-esima rata.
La quota interessi sarà $I_h = i \cdot D_{m-1}^r$ da cui $I_h = i \cdot \frac{C}{m}(m-h+1)$.
La rata sarà $R_h = I_h + \frac{C}{n}$ da cui, $R_h = i\frac{C}{m}(m-h+1) + \frac{C}{m}$

5.3.3 Piano di ammortamento americano (o a due tassi di interesse)

In questo tipo di piano di ammortamento il finanziamento è restituito attivando un piano di ammortamento di tipo 2 (pagamento interessi periodico e capitale interamente pagato a scadenza). Tuttavia il capitale C viene costituito versando, presso un terzo,

somme su cui si misura un tasso i_2 detto di accumulazione. Solitamente $i_1 > i_2$.
Da questa dinamica deriva che le quote interessi sono tutte uguali e calcolate su tutto il capitale al tasso i_1.
Allo stesso tempo, per evitare di pagare la somma C in m, il debitore fa un'operazione di accumulo di capitali presso un deposito che riconosce un tasso i_2. La quota Q da versare nel fondo affinché si abbiamo in m C , è $C = Q \cdot s_{m\rceil i_2}$ (controllare se è 1 o 2 il pedice) da cui $Q = \frac{C}{s_{m\rceil i_2}}$.
Quindi in ogni periodo, la rata da pagare da parte del debitore è $R_{i_1,i_2} = i_1 \cdot C + Q$.
Il debito residuo, all'epoca h, è dato dal capitale da restituire e da quanto accumulato nel deposito $D_h^r = C - Q \cdot s_{h\rceil i_2}$.

Il valore effettivo di un prestito

I finanziamenti visti finora sono prestiti indivisi, in quanto Si tratta di un contratto tra un unico debitore ed un unico creditore (i prestiti divisi sono quelli nei quali interviene un intermediario finanziario). Anche per i prestiti indivisi, però, può esserci cessione, ovvero l'operazione per cui il creditore cede il diritto di ricevere la restituzione del debito ad un altro soggetto. per il debitore non si modella nulla.
La cessione del credito viene valutata tra il venditore del credito ed il prenditore dello stesso secondo regole che loro stessi fissano.
Si fissa, inoltre, la valutazione del prestito, fatta secondo un tasso effettivo uniperiodale preso a riferimento per la valutazione (J).
Si introducono tre concetti nella valutazione del prestito:
- valore effettivo del prestito
- nuda proprietà
- usufrutto

Si definisce valore effettivo del prestito $A(t;J) = \sum_{k=t+1}^{m} R_k(1+J)^{-(k-t)}$

6.1 Valore effettivo di un prestito

All'epoca t secondo il tasso effettivo J, la somma dei valori attuali in t delle rate con scadenza successiva a tutti, calcolato il valore attuale al tasso J. Quindi il valore effettivo del prestito rappresenterà il campione equivalente alla successione delle rate dovute ancora all'epoca t.
Grazie alla relazione esistente tra rata, quota capitale e quota interesse $R_t = C_t + I_t$ si possono introdurre due concetti:

- nuda proprietà $K(t;J)$ è la somma dei valori attuali delle quote capitali con scadenza successiva all'epoca di valutazione $K(t;J) = \sum_{k=t+1}^{m} C_k(1+J)^{-(k-t)}$
- usufrutto $V(t;J)$ è la somma dei valori attuali delle quote interessi, con scadenza successiva all'epoca di valutazione $V(t;J) = \sum_{k=t+1}^{m} I_k(1+J)^{-(k-t)}$

Per cui si può scrivere che $A(t;J) = K(t;J) + V(t;J)$ A questo punto è utile definire la relazione tra D^r ed il valore effettivo del prestito, entrambi calcolati alla medesima scadenza. Entrambi poggiano sul calcolo prospettivo del valore capitale. Tuttavia il D^r viene calcolato con il tasso i, mentre il $A(t;J)$ al tasso J.
Fissata l'epoca in t, Si possono allora avere tre situazioni:

- $A(t;J) > D_t^r \rightarrow J < i$

- $A(t;J) < D_t^r \rightarrow J > i$
- $A(t;J) = D_t^r \rightarrow J = i$

Tali reazioni si capiscono osservando l'andamento della funzione valore attuale al variare del tasso d'interesse. Essa ha un comportamento monotono strettamente decrescente al crescere del tasso i.La concavità verso l'alto se i aumenta, valore attuale diminuisce. La scelta del tasso J viene fatta d'accordo tra le parti in ragione dei molti fattori, come la qualità del debitore, il comportamento del mercato, ecc.

Principali operazioni di investimento

Prima di affrontare la valutazione delle operazioni finanziarie vediamo quali sono le principali operazioni di investimento:

PIPO $\underline{x} : \{-x_0, x_m\}$, $\underline{t} : \{t_0, t_m\}$ (point input, point output)

CIPO $\underline{x} : \{-x_0, -x_1, ..., -x_m\}$, $\underline{t} : \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ (continous input, point output)

PICO $\underline{x} : \{-x_0, x_1, ..., x_m\}$, $\underline{t} : \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ (point input, continous output)

Quindi dall'ottica di chi fa l'investimento, la maggior parte delle operazioni può essere ricondotta a questi tre tipi.

Vediamo ora i due più importanti criteri di scelta: il criterio del *risultato economico attualizzato* (REA) e del *tasso interno di rendimento* (TIR)

7.1 Criterio del risultato economico autorizzato (REA)

Nella nostra trattazione considereremo operazioni pico per comodità si pongono intervalli uniperiodali.
Si definisce risultato economico attualizzato dell'operazione di investimento x il guadagno attualizzato sottostante all'operazione di investimento, calcolato usando un tasso strategico di valutazione ($\bar{i}$). In pratica dovremo considerare la differenza tra ricavi e costi, che vanno attualizzati per bene in quanto calcolati a tempi diversi.
La considerazione viene fatta al tempo della stipulazione del contratto. Il REA, in sostanza, indica la creazione di valore successiva all'operazione di investimento, ovvero di quanto cresce, in termini attuali, il capitale iniziale disponibile all'investitore al momento della stipulazione del contratto. Quindi molto dipende da $\bar{i}$, che viene scelto in modo soggettivo.
Il REA può essere usato sia per valutare singoli progetti che più progetti. Un singolo progetto x è conveniente, indifferente o non conveniente se, per un fissato valore di $\bar{i}$, il REA del flusso risulta maggiore uguale o minore a 0.
Nel caso più generale di due progetti, il progetto A è conveniente, equivalente o non conveniente al progetto B se e solo se $\text{REA}_\text{A} >=< \text{REA}_\text{B}$. Ai fini di questo confronto devono essere rispettate le c.d. *regole di coerenza*:

1) il confronto fra REA deve essere fatto usando lo stesso tasso di strategico di valutazione $\bar{i}$

2) omogeneità rispetto al capitale assorbito: i due progetti devono assorbire lo stesso capitale di investimento (e dunque i due progetti devono essere resi omogenei rispetto al capitale iniziale disponibile)

3) omogeneità rispetto alla durata: i due progetti devono avere la stessa durata partendo da una situazione di non omogeneità, si possono rendere i due progetti omogenei tra loro mediante l'introduzione di operazioni di finanziamento o di investimento integrale.

Per capire meglio vediamo questo caso: $C = 60$ $x_A = \{-50, 60, 20\}$, $x_B = \{-75, 0, 110\}$, $I = \{0, 1, 2\}$, voglio confrontare X_A con X_B.
Il capitale disponibile 60, che non è omogeneo non è con $x_A(50)$, nè con $x_B(75)$. Per rendere omogenei i due progetti,costruisco operazioni integrative:
$x'_A = \{-10, 0, 10(1+i_{investimento})^2\}$ $x'_B = \{-15, 0, 15(1+i_{finanziamento})^2\}$ Per x_A costruisco un'operazione integrativa di investimento, perché a fronte di un capitale disponibile di 60, ho usato sono 50. Investo 10 e alla fine avrà $10(1 * i_I)^2$.
Per x_B, invece offrendo un finanziamento, perché rispetto ad un capitale disponibile di 60, in questo 75, dunque devo finanziare il 15 di differenza. Prendo in t_0 15, ed in t_2 darà $(1 + i_F)^2$.
Fatto ciò costruisco le operazioni unioni
$\{x_A + x_{A'}\} = \{-60, 60, [20 + 10(1 + i_I)^2]\}$
$\{x_B + x_{B'}\} = \{-60, 0, [110 - 15(1 + i_F)^2]\}$
A questo punto si può operare il confronto con il REA. Può accadere, però,che ci sia disomogeneità rispetto alla durata. In questo caso, per l'operazione che termina prima devo prendere il capitale e restituirlo per gli anni necessari a rendere l'operazione omogenea con l'altra.
Il criterio del REA può essere usato anche per valutare operazioni di finanziamento. Cambiano solo i segni del vettore $\underline{x}$. In questo caso, però, il criterio prende il nome di *costo economico attualizzato (CEA)* .
Al criterio del REA si possono sollevare tre critiche principali:

1) il tasso strategico J impiegato nel calcolo dei valori attuali e soggettivo, ciò comporta che tassi diversi portino a conclusioni diverse

2) il calcolo del REA implica che per tutta la durata del progetto il tasso J rimarrà lo stesso, cosa alquanto irreale nel mondo vero

3) le previsioni possono venire smentita dalla realtà

7.2 Il criterio del tasso interno di rendimento (TIR)

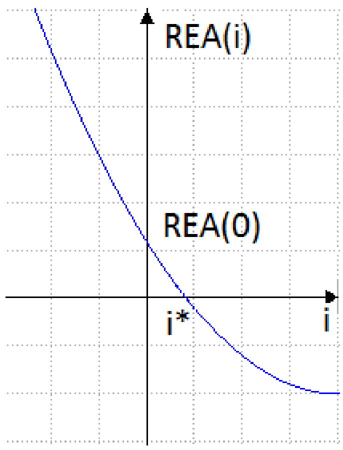
Sebbene il criterio del TIR risenta del problema dell'impossibilità a mantenere lo stesso tasso per tutta la durata del progetto, esso consente di eliminare la soggettività che era alla base del REA. Il TIR, infatti, non è un importo ma un tasso. Concettualmente è la radice, se esiste ed è l'unica, dell'equazione del REA, ovvero è quel passo che annulla l'equazione del REA.
$REA(i*) = 0 \rightarrow REA(i^*) = -x_0 + \sum_{k=1}^{m} x_k(1 + i^*)^{-k} = 0$

i^*. Quel passo che eguaglia il valore attuale dei costi col valore attuale dei ricavi, per cui la loro differenza è pari a zero.
Affinché il TIR ci sia o possa essere l'unico devono essere rispettate le *condizioni di Nostrom*

7.2.1 Condizioni di Norstrom

- $-x_0 < 0$ Bisogna avere un'uscita di cassa, non necessariamente all'istante 0
- $-x_0 + \sum_{k=1}^{m} x_k > 0$ la somma dei ricavi deve essere maggiore dei costi
(NB. La somma dei ricavi attualizzati)
- $S_k > 0$ per $k = 2, 3, ..., m$

Deve esserci, dunque,Un unico cambiamento di segno. Leggendo il flusso di cassa vediamo graficamente queste condizioni di Norstrom Nel punto $i = -1$ la funzione del



REA non è definita visto che $\frac{1}{(1+i)^k}$ per $i = -1, \frac{1}{0} = " + \infty"$. Quindi il REA ha un punto di discontinuità in -1.
Vediamo se ci sono asintoti orizzontali $\lim_{i\to\infty} REA(i) = -x_0$ in $-x_0$ c'è.
La seconda condizione di Norstrom va nella parte positiva, il punto corrisponde a REA(0) quindi la funzione deve passare per quel punto. Tuttavia, dopo tale punto, la funzione potrebbe avere andamento sinusoidale, comportando l'esistenza di vari TIR. Intervie allora la terza condizione. A questo punto sembra il caso di ordinare la preferibilità. Abbiamo che:

$A \succ B$ se TIR(A)>TIR(B)

$A \prec B$ se TIR(A)<TIR(B)

$A \sim B$ se TIR(A)=TIR(B)

Per operazioni di finanziamento è più giusto parlare di tasso interno di costo invece che di TIR. Naturalmente, in caso di finanziamento, i segni di trasferibilità vanno invertiti.

E' utile notare che un piano di ammortamento qualsiasi ha un TIR, ed è proprio il tasso di remunerazione del prestito (i). Infattiti un piano di ammortamento rispetta le condizioni $A = \sum_{k=1}^{m} R_k(1+i)^{-k} \to 0 = \sum_{k=1}^{m} R_k(1+i)^{-k} - A$
In generale, quando usiamo un unico tasso che attualizza tutte le poste, quello è un TIR. Cosa diversa è quando si ha un tasso di interesse che varia al variare del tempo (cosa che vedremo in seguito) li.
Vediamo cosa accade quando scriviamo il REA con il fattore di attualizzazione $REA(i^*) = -x_0 + \sum_{k=1}^{m} x_k(1+i^*)^{-k} = -x_0 + \sum_{k=1}^{m} xv^k = -x_0 + x_1v^1 + x_2v^2 + ... + x_mv^m = 0$
Questo è un polinomio di grado m. Per calcolare il TIR dobbiamo allora risolvere un'equazione di nè grado per determinare il TIR, allora uso il *metodo delle secanti.* Graficamente prendo a caso due tassi, i_1 e i_2 e determino i rispettivi REA. Il metodo

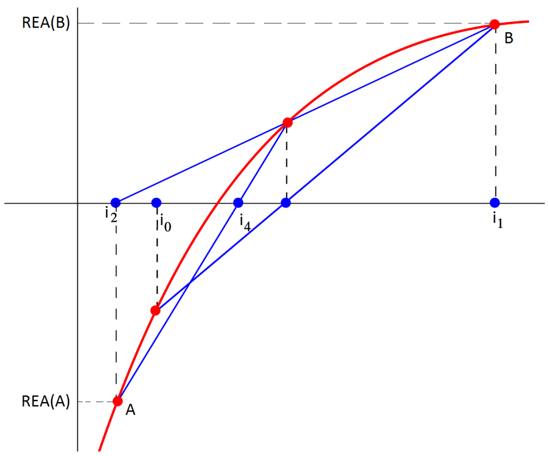


Figura 7.1: Coefficiente di conversione stabilito al tempo r

delle secanti impone di tracciare una retta passante per i punti A e B. Tale retta ha un punto di contatto con l'asse i, che è i_3, molto vicino a i^*. Se non fossimo soddisfatti dell'approssimazione, costruisco un'altra retta, che sarà più vicina alla i^*.

Matematicamente uso l'equazione delle retta passante per due punti: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ che col REA diventa

$$\frac{REA(i^*) - REA(i_1))}{REA(i_2) - REA(i_1)} = \frac{i^* - i_1}{i_2 - i_1}$$

i^* è la nostra incognita
i_1 e i_2 li pongo io e calcolare REA(i_1), REA(i_2) è facile via definizione REA(i^*)= 0
Scelto l'intervallo $i_2 - i_1$, trovo il punto i_3 che è vicino a i^*. Se i_3 non va bene e voglio un'approssimazione migliore, riapplico la formula inserendo REA(i_3) al posto di REA(i_1) o REA(i_2). A seconda del discostamento maggiore tuttavia comunque tenendo la sostituzione approssimo sempre meglio che prima.

II MODULO

MATEMATICA FINANZIARIA

Il mercato non è più deterministico

Il mercato non è più deterministico, nel senso che il tasso di pane del tempo.

Contratti a pronti Contratti a pronti: La variabile v viene ad essere funzione di due variabili:

$$v(t,s) < 1 \rightarrow t < s$$

$$v(t,s) > 0 \rightarrow t \leq s$$

$t =$ Momento in cui osservo, ma anche in epoca di negoziazione

$s =$ Scadenza dell'operazione, ovvero il momento in cui l'operazione paga il valore nominale (capitale più interessi)

$v(t,s) =$ Prezzo in t di uno ZCB Che paga in uno una unità di conto, e anche il detto prezzo a pronti, ovvero il prezzo pagato in t Per lo scambio immediato in t contro un euro

Contratti a termine Quelli in cui la data di regolazione e successiva alla data di osservazione del mercato. Le variabili indipendenti sono ora tre $v(t,T,s)$ con $t < T < s$

$t =$ data di osservazione del mercato, ma è anche la data cui viene fissato il prezzo da corrispondere, su questo contratto, a termine alla fine data di regolazione

$T =$ data di regolazione, ovvero quella in cui viene pagato il prezzo per questo titolo

$s =$ scadenza di questo contratto ZCB

In questo secondo modulo studieremo la teoria dell'immunizzazione finanziaria, che consente di minimizzare il rischio di tasso di interesse. Considereremmo un mercato strutturato da contratti elementari (come ZCB), che vengono scambiati a pronti e a termine.

8.1 La funzione valore

8.1.1 La funzione valore in un contratto pronti

$v(t,s), t \leq s$ è il valore tempo ti di una unità di conto esigibile al tempo s. Si parlerà di contratto a fronte, visto che $t = T$. Analizzando l'operazione dal punto di vista del creditore, in t Egli stipula dell'operazione di investimento $\{-v(t,s); 1\}$. Il debitore,

effettuerà l'operazione di finanziamento $\{+v(t,s);-1\}$.
Se non consideriamo fissate le date t ed s il valore $v(t,s)$ può essere pensato come funzione di due variabili. $t \leq s$ è necessario affinché $v(t,s)$ abbia senso. Al variare di t ed s. La funzione valore $v(t,s)$ dovrà rispettare molte proprietà che ne garantiscono la significatività e la consistenza economico-finanziaria.

1) $v(t,s) \geq 0, t < s$ infatti non si può avere un euro ad un costo nullo o negativo

2) $v(s,s) = 1$ è una spontanea condizione a scadenza

3) $v(t,s') > v(t,s''), t \geq s' \geq s''$ fissato t, v deve essere una funzione decrescente di s. Questa proprietà di monotonia è conseguenza del postulato di rendimento del denaro (il costo di differire la scadenza di un debito è positivo).
Peraltro, deve essere $v(t,s) < 1, t < s$ (postulato di impazienza)

8.1.2 La funzione valore in un contratto termine

Una importante generalizzazione delle definizioni precedenti si ottiene se si ipotizza che il periodo di scambio abbia inizio in un istante T successivo all'istante t di stipula del contratto, secondo lo schema tipico delle operazioni a termine.
$v(t,T,s), t \geq T \geq s$ valore in T, pattuito in t, di 1? esigibile in s.In termini formali, il creditore stipula in t, sull'orizzonte temporale $[T,s]$.
L'operazione di investimento termine è

$$\{0, -v(t,T,s), +1\}$$

Il debitore, invece, sulle stesse date sottoscrive l'operazione di finanziamento termine

$$\{0, v(t,T,s), -1\}$$

Anche la funzione valore $v(t,T,s)$ dovrà soddisfare, al variare di t, T, ed s alcune proprietà che ne garantiscono la significatività finanziaria:

1) $v(t,T,s) > 0, t \leq T \leq s$ non si può avere 1€ ad un costo nullo

2) $v(t,s,s) = 1, t \leq s$ è normale

3) $v(t,T,s'') < v(t,T,s'), t \leq T \leq s' \leq s''$ questa proprietà di *decrescenza rispetto alla scadenza dell'orizzonte di scambio*, è diretta conseguenza del postulato di rendimento del denaro

4) $v(t,T',s) < v(t,T'',s), t \leq T' < T'' \leq s$ questa proprietà, detta *crescenza rispetto all'apertura dell'orizzonte di scambio*, e anche essa diretta conseguenza del postulato di rendimento del denaro

5) $w(t;x_s) = x_s \cdot v(t,s)$ con $w =$ valore del portafoglio.
In condizioni di assenza di arbitraggio, il valore di un contratto pronti che paga x_s unità di conto alla scadenza s è pari al prodotto fra x_0 e il valore unitario di un contratto a pronti che paga 1€ in s.

Incontriamo così le ipotesi caratteristiche del mercato.

8.2 Le ipotesi caratteristiche del mercato

Consideriamo dei mercati perfetti, perfetti significa che tutta l'offerta aggregata di strumenti finanziari e completamente soddisfatta dalla domanda aggregata.

1) non frizionalità
   Non ci sono costi di transazione, né gravami fiscali. I titoli sono infinitamente divisibili, nel senso che non ci sono limitazioni nelle quantità minime e massime di titoli trattati, sono poi consentite vendite allo scoperto. Cioè è possibile vendere titoli che non si posseggono. Non c'è il rischio di insolvenza

2) competitività
   Gli agenti sono massimizza attori del profitto e *price taker*, Cioè le loro transazioni non possono influenzare il profilo dei titoli. Peraltro, deve esserci simmetria informativa, così che tutti hanno le stesse aspettative sulla futura evoluzione del mercato

3) assenza di arbitraggio
   Non si possono conseguire margini da arbitraggi non rischiosi. Questa proprietà si ottiene definendo il concetto di arbitraggio.
   Consideriamo quest'operazione finanziaria di importi non tutti nulli, con $t =$ istante corrente:
   $\underline{x} = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$
   $\underline{t} = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$
   Diremo che x/t è un arbitraggio se il flusso non contiene pagamenti di segno opposto. è dunque una transazione che garantisce ad una delle due parti contraenti un flusso di pagamenti certamente non negativi, con almeno un pagamento strettamente positivo: si incassa almeno una volta con certezza senza pagare. L'importo $c = -x_0$ più essere interpretato come il costo in t del flusso residuo $\bar{x_0} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$.
   Da questo punto di vista si distinguono usualmente due forme di arbitraggio:

   A) è costituita dall'acquisto, ad un costo nullo o negativo, di un flusso di pagamenti futuri tutti non negativi, con almeno un pagamento strettamente positivo $c \geq 0$; $x_m \geq 0$ $k = 1, 2, ..., m$; $\exists J : x_J > 0$

   B) è costituita dall'acquisto di un flusso di pagamenti futuri tutti non negativi ad un costo negativo $c < 0$, $x_k \geq 0$ $k = 1, 2, ..., m$

   Assumeremo che sul mercato sia e esclusa la possibilità di effettuare arbitraggi, nel senso che è impossibile realizzare profitti senza assumersi un po' di rischio.

8.3 Titoli a cedola nulla unitari

Proprietà:

$v(t, s) > 0$, $t \leq s$

$v(s, s,) = 1$

$v(t, s) < 1$, $t < s \rightarrow$ postulato di impazienza

Teorema di decrescenza:

$$v(t, s') > v(t, s'') \, , \, t \leq s' \leq s''$$

in condizioni di assenza di arbitraggio la funzione valore è strettamente decrescente, fissato t, all'aumentare di s. Ciò significa che $v(t, s'') < v(t, s')$, $s' < s''$

Quindi nonostante i prezzi dei titoli possono formarsi liberamente in base ai meccanismi economico finanziari, questa proprietà (decrescente, fissato t, all'aumentare di s) derivante direttamente dalle ipotesi di mercato adottate, deve sussistere. Per la sua dimostrazione ci si serve anche del postulato di impazienza: $v(t, s) < 1$, $t < s$, che però non è ricavato come conseguenza necessaria dalle ipotesi sul mercato la proprietà è nota come teorema di decrescenza rispetto alla scadenza.

Dim.
(x assurdo) se $v(t, s') < v(t, s'')$ allora

	t	s'	s"
A	$-v(t, s')$	1	0
B	$v(t, s'')$	10	-1
C	0	$-v(s', s'')$	1
$=$	$v(t, s'') - v(t, s')$	$1 - v(s', s'')$	0

(a parole) supponiamo che $v(t, s'') < v(t, s')$ sia falso e che dunque sia vero $v(t, s'') \geq v(t, s')$, $t \leq s' < s''$.
Se sul mercato si presentasse questa situazione, un operatore razionale costruirebbe un portafoglio con tre strategie:

B vende allo scoperto (quindi riceve) $v(t, s'')$.

Con questo valore acquista A, pagando $-v(t, s')$. Tale pagamento è possibile grazie al fatto che supponiamo $v(t, s') < v(t, s'')$ in t. Dunque consegue un margine $v(t, s'') - v(t, s')$, che però non basta per pagare 1 in s''.

Con l'unità di conto e riceve in s' effettua l'operazione C: paga $-v(s', s'')$ in s'' e riceve 1 in s'', grazie a cui va in pari in s''. Peraltro, in s' consegue un'ulteriore ricavo pari a $1 - v(s', s'')$. Infatti, per il postulato di impazienza, abbiamo che $-v(s', s'') < 0$
.

Quindi se sul mercato non fosse vero che $v(t, s') > v(t, s'')$ $s' < s''$ l'operatore razionale (che massimizza il profitto) potrebbe effettuare un arbitraggio, in quanto più guadagnare senza rischiare capitale proprio. Si deve dunque accettare l'ipotesi del teorema. C.v.d.

8.4 Titoli accedono annulla non unitari

Proprietà:

$w(t;x_s)$, $t \leq s$ prezzo a pronti in t di un titolo ZCB che garantisce in s l'importo non unitario x_s

Teorema di indipendenza dell'importo

$$w(t;x_0) = x_s \cdot v(t,s)$$

dim.
(x assurdo) se $w(t;x_s) < x_s \cdot v(t,s)$

	t	s'
A	$-w(t;x_s)$	x_s
B	$x_0 \cdot v(t,s)$	$-x_s$
=	$x_0 \cdot v(t,s) - w(t;x_s)$	0

In condizioni di assenza di arbitraggio, il prezzo in t di uno ZCB che paga x_1 unità di conto in s è proporzionale al prezzo a pronti di uno ZCB unitario secondo un fattore di proporzionalità uguale all'importo x_1:

$$w(t;x_s) = x_s \cdot v(t,s)$$

dim x assurdo

Supponiamo che sul mercato viga la seguente relazione $w(t;x_s) < x_s \cdot v(t,s)$.
L'operatore razionale effettuerebbe una strategia B con cui si finanzia vendendo allo scoperto $x_s \cdot v(t,s)$in t, con cui avrà una perdita $-x_s$ alla scadenza s.
Grazie al fatto che $w(t,x_0) < x_s v(t,s)$ effettua la strategia A. Investe $-w(t,x_0)$ e avrà in s un ricavo di x_s che gli consentirà di coprire la perdita derivante dall'operazione B in s.
Peraltro in t otterrò un compenso di $x_s v(t,x_s) - w(t,x_s)$. Quindi se sul mercato non fosse vero che $w(t;x_s) = x_s v(t,s)$ si potrebbero fare operazioni di arbitraggio.

8.5 Portafoglio di ZCB (con diversa scadenza)

Consideriamo il titolo che garantisce il flusso di importi $\underline{x} = \{x_0, x_1, .., x_m\}, \underline{t} = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ con $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_m$

Teorema di linearità del prezzo $w(t,\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t,t_m)$
dim.
(x assurdo) se $w(t,\underline{x}) < \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t,t_m)$
In condizioni di assenza di arbitraggio, il prezzo in di di un portafoglio finanziario rappresentato dalla coppia di vettori $\underline{x}$, $\underline{t}$, è uguale alla combinazione lineare dei prezzi

	t	t_1	t_2	$\cdots$	t_m
A	$-w(t,\underline{x})$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
B_1	$x_1 \cdot v_1$	$-x_1$	0	$\cdots$	0
B_2	$x_2 \cdot v_2$	0	x_2	$\cdots$	x_m
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
B_m	$x_m \cdot v_m$	0	x_2	$\cdots$	$-x_m$
=	$\sum_{k=1}^{m}(x_k \cdot v_k) - w(t,\underline{x})$	0	0	$\cdots$	0

a pronti di ZCB tipo unitari e con scadenze (del portafoglio) e con coefficienti (della combinazione lineare) i valori nominali delle poste del portafoglio. $w(t,\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t,t_k)$.
L'operatore razionale effettuerà bene tutta la serie di strategie B $(B_1, B_2, ..., B_m)$ di vendita hanno scoperto che gli garantirebbero in t l'importo $\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v_k$, con il quale potrebbe acquistare un portafoglio $w(t,\underline{x})$ che coprirebbe tutti i costi del finanziamento alle diverse scadenze. Ciò sarebbe possibile visto che $w(t,\underline{x}) < \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t,t_m)$. Peraltro in t Avrebbe un ricavo di $\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t,t_m) - w(t,\underline{x})$. Si avrebbe così un arbitraggio, dobbiamo allora accettare che $\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t,t_m) = w(t,\underline{x})$

8.6 Contratti a termine

Proprietà:

$v(t,T,s)$, $t \leq T \leq s$

$v(t,T,s) = v(t,s)$ con $t \leq s$

Teorema dei prezzi impliciti $v(t,s) = v(t,T) \cdot v(t,T,s)$ con $t \leq T \leq s$
dim.
(x assurdo) se $v(t,s) > v(t,T) \cdot v(t,T,s)$
In condizioni di assenza di arbitraggio, il prezzo a pronti in t di uno ZCB unitario con

	t	T	s
A	$v(t,s)$	0	1
B	$-v(t,T) \cdot v(t,T,s)$	$v(t,T,s)$	0
C	0	$-v(t,T,s)$	1

scadenza in s è replicato dal prezzo a termine di un contratto con data di regolazione in T e scadenza in s che restituisce un nominale pari a $v(t,T)$.
Questo teorema è la rilettura del teorema della inscindibilità, rivisto nella logica del comportamento del mercato finanziario $v(t,s) = v(t,T) \cdot v(t,T,s)$. Ottengo un margine. Ciò contrasta con la condizione fondamentale di assenza di arbitraggio, per cui rifiuto questa ipotesi ed accetto quella del teorema.

Le strutture per scadenza di un mercato

Nella nostra trattazione considereremo, innanzitutto, un mercato due periodi, che semplifica la spiegazione in quanto sono presenti solo due scadenze (t_1, t_2).
Consideriamo dapprima la struttura affronti poi quella termine è, infine, generalizzeremo per m periodi.

9.1 Struttura a pronti di un mercato due periodi

Consideriamo due ZCB con scadenze t_1 e t_2 e nominale x_1 e x_2. Il loro prezzo, osservato in t, per il teorema dell'indipendenza dall'importo è

$$w(t, x_1) = x_1 \cdot v(t, t_1)$$

$$w(t, x_2) = x_2 \cdot v(t, t_2)$$

Siccome sappiamo che $v = \frac{1}{1+i}$, possiamo trovarci la struttura a fonti dei tassi di interesse caratteristica al tempo t (nel futuro la struttura per scadenza probabilmente cambierà)

$$w(t, x_1) = x_1[1 + i(t, t_1)]^-(t_1 - t)$$

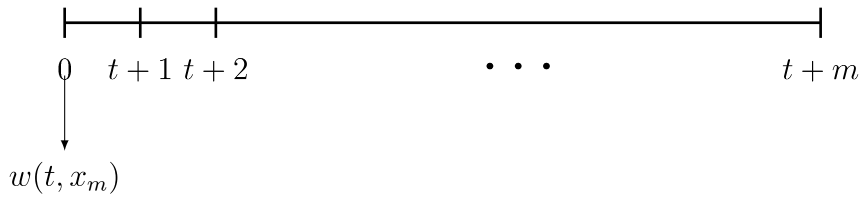
$$w(t, x_2) = x_2[1 + i(t, t_2)]^-(t_2 - t)$$

$i(t, t_1)$ è il tasso che remunera solo operazioni che vanno da t a t_1. Esso è differente da $i(t, t_2)$.

9.2 Struttura a termine di un mercato a due periodi

L'operazione x_2 include anche l'intervallo $t_1 - t$, però per la logica del tasso pronti c'è un unico passo che va da t a t_2. Se avessi un'operazione che va da t a t_2 e paga in $_1$, Come si trova il segmento da t_1 a t_2, con $t \leq t_1 \leq t_2$?
Sfrutto il teorema dei prezzi impliciti che dice che esiste un legame che stabilisce un equilibrio finanziario fra operazioni pronti ed operazioni a termine. Tale equilibrio è: $v(t, t_2) = v(t, t_1, t_2) \cdot v(t, t_1)$.
Esprimendo tutto con i tassi di interesse, abbiamo:
$[1 + i(t, t_2)]^{-(t_2 - t)} = [1 + i(t, t_1, t_2)]^{-(t_2 - t_1)} \cdot [1 + i(t, t_1)]^{-(t_1 - t)}$ da cui
$i(t, t_1, t_2) = \left\{ \frac{[i+i(t,t_2)]^{(t_2-t)}}{[1+i(t,t_1)]^{(t_1-t)}} \right\}^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1$

9.3 Struttura per scadenza del mercato in m periodi

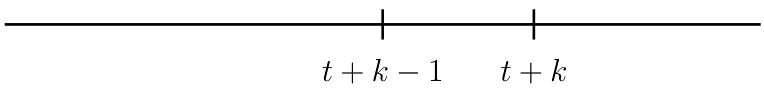


In ciascuno degli istanti $t+1, t+2, ..., t+m$ vi è l'importo $x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_{t+m}$.

9.3.1 Tassi a pronti

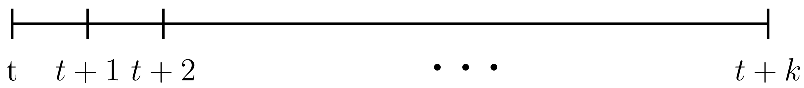
Per quanto riguarda i tassi pronti $w(t, x_k) = x_k v(t, t_k) \rightarrow v(t, t_k) = \frac{w(t, x_k)}{x_k}$.
Sappiamo che $v(t, t_k) = [1+i(t, t_k)]^{-(t_k - t)}$, ma siccome $t_k = t+k$, sostituendo otteniamo $v(t, t_k) = [1+i(t, t_k)]^{-(t+k-t)} = [1+i(t, t_k)]^{-k}$ da tale formula ricaviamo $i(t, t_k)$ che è $i(t, t_k) = [v(t, t_k)]^{\frac{1}{k}} - 1 = [\frac{x_k}{w(t, t_k)}]^{\frac{1}{k}} - 1$, dove $w(t, t_k)$ è il capitale inizialmente investito x_k il montante alla scadenza k.

9.3.2 Tassi a termine



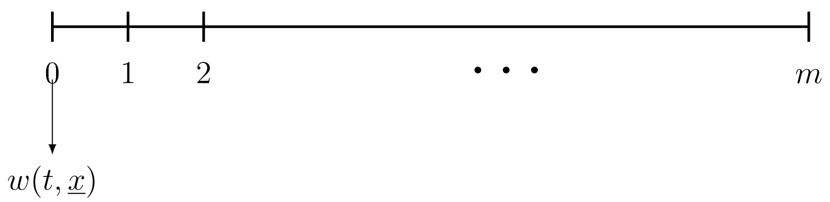
$i(t, t+k-1, t+k) = [v(t, t+k-1) \cdot v(t, t+k)] - 1$
$i(t, t+k-1, t+k) = [1+i(t, t+k)] \cdot [\frac{1+i(t, t+k)}{1+i(t, t+k-1)}]^{k-1} - 1$

9.3.3 Relazione fra tassi a pronti e a termine



$[1+i(t, t_k)]^k = \prod_{j=1}^{k} [1 + i(t, t+j-1, t+j)]$ se all'inizio abbiamo 1 euro, per vedere quanto vale in k uso la formula $[i+i(0, k)]^k$.
Se facessi un'operzione di rolling, dovrei scrivere la formula con il tasso a termine $[i+i(0, 0, 1)]$, che mi consente di portare il capitale dall'istante 0 a 1. Per andare poi da 1 a 2 userò oò tasso a termine $[1+i(0, 1, 2)]$.
Il montante al tempo 20 sarà: $[1+i(0, 0, 1)] \cdot [1+i(0, 1, 2)]$ continuando ho $[1+i(0, 0, 1)] \cdot [1+i(0, 1, 2)] \cdot \dots \cdot [1+i(0, k-1, k)]$. Da sottolineare che l'oeprazione è vista dall'istante 0.
Osservazione: $[1+i(0, 0, 1)] \cdot [1+i(0, 1, 2)] = [1+i(0, 2)]^2$, generalizzando avrò $[1+i(0, k)]^k = [1+i(0, k-1)]^{k-1} \cdot [1+i(0, k-1, k)]$.

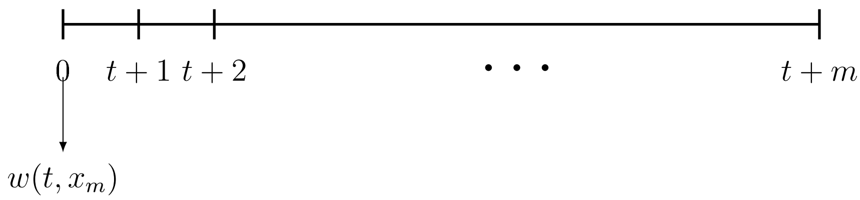
Nel caso in cui si paghino cedole



$w(t,\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \prod_{j=1}^{k}[1+i(t,t+j-1,t+j)]^{-1}$.
Per il teorema dell'indipendenza dall'importo scriviamo
$w(t,\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(0,k) = \sum_{k=1}^{m} x_k[1+i(0,k)^{-k}]$
$[1+i(0,k)]^{-k}$ è riscritto come $\prod_{j=1}^{k}[1+i(t,t+j-1,t+j)]^{-1}$

Indice temporali di un flusso di importi

Si possono trarre informazioni su un flusso di importi usando strumenti atti a trarre informazioni dal tempo.



In ciascuno degli istanti $t+1, t+2, ..., t+m$ vi è l'importo $x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_{t+m}$.

10.1 Vita scadenza

E' $t_m - t$
Questo indicatore ha 2 problemi:

Non dice nulla di quanto è il flusso di importi, ovvero non riesce a legare importi e tempi (tale problema viene superato con la vita media)

Non si tengono conto di informazioni di mercato nel senso che operazioni differenti fatte sul mercato possono avere tassi differenti a seconda del tempo (taleproblema ce l'ha la vita media, ma è superato dalla duration)

10.2 Vita media

$d = \sum_{k=1}^{m}(t_k - t) \cdot \frac{x_m}{\sum_{k=1}^{m} x_k}$, dove $\frac{x_m}{\sum_{k=1}^{m} x_k}$ sono i pesi della media.

Ad esempio $\underline{x}/\underline{t} = \{(100, 1), (1000, 2)\}$ $d = (1-0)\frac{10}{1010}(2-0)\frac{1000}{110}$ il risultato della media si avvicina al tempo 2

10.3 Duration

(o durata media finanziaria) è $\frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)}$
I pesi non sono più dati dalle poste, ma dal valore attuale delle singole poste normaliz-

zati. Ricordando che $w(t,x_k) = x_k v(t,t_k)$ possiamo scrivere $D(t,\underline{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k-t)w(t,x_k)}{\sum_{k=1}^{m} w(t,x_k)}$.

La duration è anche un indice di rischiosità di volatilità dei tassi di interesse. E' utile per confrontare operazioni con lo stesso tir. Supponiamo di avere due operazioni finanziarie con lo steso tir: A e B. L'operazione A è un Bullet bond mentre B è uno ZCB. La duration di A, ad occhio, sta fra 1 e 2, mentre quella di B è precisamente in 2 (visto che la duration di uno ZCB è sempre a scadenza). Una duration più bassaindica che il flussa è meno rischioso di B, in caso di volatilità dei tassi di interesse.

Duration con struttura piatta dei tassi di interesse $i(t,s) = i$ costante $D(t,\underline{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k-t)x_k(1+i)^{-(t_k-t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k}$

10.4 Convexity o indice di complessità

(o indice di dispersione) $D^{(2)}(t,\underline{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k-t)^2 x_k v(t,t_k)}{\sum_{K=1}^{m} x_k v(t,t_k)}$ è un indice ancora più sofisticato. L'unica differenza rispetto alla duration è che la scadenza è al quadrato

10.5 Reddito di periodo di un flusso di importi calcolato da generica epoca h

Si definisce reddito di periodo calcolato ad una certa epoca H, $t < H < t_m$, la somma di due componenti $R(\bar{x},H) = R' + R''$.
1) reddito da reinvestimento $\sum_{t_k \le h} \frac{x_{t_k}}{v(t_k,H)} = x_{t_k}[1+t(t_k,H)]^2$
2) reddito da smobilizzo $R'' = \sum_{t_k > h} x_k v(H,t_k) = x_{t_k}[1+i(H,t_k)]$

Tale reddito dipende dunque da 2 grandezze: la struttura a pronti dei tassi di interesse e l'epoca H.
Per semplicità supponiamo una struttura per scadenza costante dei tassi $i(0,t_k) = \bar{i}$
Vediamo cosa succede in H al variare di $\bar{i}$

$$\text{se } \bar{i}\uparrow, R'\uparrow, R''\downarrow$$

$$\text{se } \bar{i}\downarrow, R'\downarrow, R''\uparrow$$

Dunque l'effetto complessivo del reddito di periodo dipenderà da H. Più H è vicino alla data iniziale più avrà effetto R", visto che saranno maggiori le poste che attualizzerò che quelle che capitalizzerò.
Per cui, come detto, il rendimento è
$R(\bar{x},H) = \sum_{t_k \le H} \frac{x_k}{v(t,H)} + \sum_{t_k > H} x_k v(H,t_k)$.
QUesta formula mostra il reddito periodale. Se volessi sapere il tasso (rendimento periodale) devo usare la formula $i^*(t,H) = \frac{R(\bar{x},H) - w(\bar{x},t)}{w(\bar{x},t)}$ ossia $\frac{reddito - prezzoint}{prezzoint}$.
Da notare che il tasso è espresso su base H-esimo per farlo diventare su base unitaria userò le formule dei tassi equivalenti $i^* = [1+i^*(t,H)]^{\frac{1}{H-t}}$ dove t=0

Immunizzazione finanziaria

È una metodologia che stabilisce le regole affinché un intermediario finanziario, che in un istante t si trova in una situazione di equilibrio finanziario, mantenga l'equilibrio finanziario anche in istanti di tempo successivi, a seguito di perturbazioni della struttura di scadenza dei tassi.
In sostanza, l'immunizzazione finanziaria garantisce la solvibilità di un intermediario finanziario. La situazione di un intermediario finanziario è data da flussi di poste attive e passive. Consideriamo un generico flusso di poste attive $\bar{x}$ e un generico flusso di poste passive $\bar{y}$, definite su uno scadenzario T:
$\bar{x} = \{x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_m\}$ $\bar{y} = \{y_1, y_2, ..., y_k, ..., y_m\}$ $t = \{t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_m\}$
All'istante t tipo di valutazione, questo portafoglio finanziario è in equilibrio se il valore attuale delle poste attive calcolato in t è uguale al valore attuale delle poste passive $w(t, \bar{x}) = w(t, \bar{y})$ vincolo di bilancio.
in un istante t^+ successivo a t, con il cambiamento della struttura su scadenza dei tassi di interesse, l'intermediario è in una situazione positiva se $w(t^*, \bar{x}) \geq w(t^*, \bar{y})$ cioè $w(t^*, \bar{x}) - w(t^*, \bar{y}) \geq 0$

Situazione di perfect matching tra poste attive e passive sia quando, per ogni scadenza, abbiamo che le poste dell'attivo e del passivo sono visibili allo stesso momento, con $x_k \geq y_k$.
È chiaro che in una situazione di perfect matching, la solvibilità rimarrà nel tempo anche se cambia la struttura per scadenza dei tassi di interesse. Nel perfect matching non c'è rischio di volatilità del tasso di interesse. Questa è la situazione migliore, ma è difficile che si verifichi. Nell'immunizzazione agisce proprio in situazioni che non sono di perfect matching.
Tuttavia, per poter usufruire dell'immunizzazione finanziaria occorre prevedere le strutture per scadenza dei tassi di interesse. In condizioni di certezza, dati tre istanti di tempo, abbiamo che: $i(t, s) = i(0, T, s)$ con $t < T < s$
Però la realtà non è questa, visto che al variare del tempo varia anche nella struttura dei tassi. Nella nostra trattazione ipotizzeremo la struttura per scadenza evolva nel tempo con shift (spostamenti) additivi, che possono essere sia positivi che negativi. Ciò vuol dire che se io nell'istante 0 ho letto una certa struttura per scadenza, se in $t + 1$ c'è uno shift, la nuova struttura per scadenza viene traslata parallelamente (in alto $\rightarrow$ shift positivo o in basso $\rightarrow$ shift negativo) senza che la forma cambi.
Bisogna sottolineare che gli shift additivi non sono l'unica soluzione possibile. Quindi lo shift additivo è una variabile aleatoria di segno è ampiezza aleatori, che provocherà degli spostamenti paralleli della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Tradizio-

nalmente l'immunizzazione finanziaria è studiata nella capitalizzazione continua, per cui se $\delta(t,s)$ è l'intensità istantanea di interesse letta i in t, dopo lo shift additivo letto in t^+ sarà $\delta(t^+,s) = \delta(t,s) + k(t,t^+)$ dove k è una var. al. di cui non sappiamo nè il segno nè la grandezza.

11.1 teorema di Fisher-Weil

Ha lo scopo di dettare le condizioni di immunizzazione per un flusso di attività a copertura di un'unica passività L esigibile in un istante di tempo H.
$\bar{x} : \{x_1, x_2, ..., x_m\}$
$t : \{t_1, t_2, ..., t_m\}$
L
$t < H < t_n$
Dato questo flusso di cassa attivo, è l'unica passività, è letta nell'istante t di valutazione l'intensità istantanea di interesse rappresentativa della struttura per scadenza dei tassi di, se in t il valore dell'attivo è uguale a quello del passivo e se in t^+, successivo a t, avviene uno shift additivo tale che $\delta(t^+,s) = \delta(t,s) + \tilde{y}$, allora condizione necessaria e sufficiente affinché il portafoglio attivo-passivo sia immobilizzato, ovvero che $w(t^+,\bar{x}) \geq w(t',L)$, E che la duration calcolata in t dell'attivo sia uguale alla duration calcolata in t del passivo.
$D()T,\bar{x}) = D(t,L)$ vincolo della duration
Poiché la duration è un indice temporale che ci dice quando, in media, si concentreranno Tutti i pagamenti del titolo, vediamo che questa condizione cerca di approssimare la situazione di perfect matching.
Interpretiamo la duration come un indice di sensibilità alle variazioni del tasso di interesse, allora in questo caso possiamo interpretare in coloriture come l'uguaglianza fra la sensibilità a variazioni da tasso di interesse delle attività e delle passività.
Da un altro punto di vista, se vedo la passività in modo fittizio, nel senso che la vedo come un limite al di sotto del quale non voglio andare, posso Interpretare il teorema di fisher-weil per costruirmi un portafoglio di attività con target di rendimento minimo garantito.

Supponiamo che sul mercato ci siano solo 2 ZCB, uno con valore nominale x_1 scadenza in t_1; l'altro con valore nominale x_2 e scandenza t_2. Noi vogliamo vedere quanti titoli del primo ZCB e quanti del secondo dobbiamo acquistare affinché il portafoglio, con passività L, sia immunizzato da shift additivi. Possiamo riscrivere i vincoli di bilancio e di shift in questo modo
$\alpha_1 x_1 v(t,t_1) + \alpha_2 x_2 v(t,t_2) = L \cdot v(t,H)$
$D(t,x_1)\alpha_1 x_1 v(t,t_1) + D(t,x_2)\alpha_2 x_2 v(t,t_2) = D(t,L)$
dove $\alpha_1 x_1 v(t,t_1) + \alpha_2 x_2 v(t,t_2) \to w(t, \text{portafoglio})$.
Spieghiamo cosa c'è scritto nel vincolo di duration:
il valore attuale della duration del titolo 1, preso in quantità α_1, più il valore attuale della duration del titolo 2, preso in quantità α_2, diviso il valore attuale della somma dei due titoli, deve essere uguale alla duration della passività.

Poiché, come già detto, la duration di uno ZCB è la vita a scadenza, possiamo riscrivere la formula come $\frac{t_1\alpha_1 v(t,t_1)+t_2\alpha_2 x_2 v(t,t_2)}{\alpha_1 x_1 v(t,t_1)+\alpha_2 x_2 v(t,t_2)} = H$
Sottolineo che questo può essere scritto solo nel caso in cui nell'attivo si abbiano ZCB. Con il vincolo di bilancio e di duration si ha un sistema di due equazioni in due. Risolvendo, abbiamo α_1 e α_2.

Come detto, un'altra interpretazione di questo teorema è quella di costruire un portafoglio attivo per un target minimo. Se abbiamo programmato un reddito minimo a una certa scadenza, finché quella reddito sia tale a seguito di shift additivi, devo scegliere come istante di smobilizzo la duration, che dunque, in questo teorema, rappresenta il tempo di smobilizzo ottimo del portafoglio. Ciò significa che se smobilizzo il portafoglio dell'attivo nell'istante della duration, per qualsiasi scostamento della struttura per scadenza dei tassi di interesse, il rendimento periodali non sarà inferiore a quello programmato in t.
Ciò, però, vale solo nel caso di shift additivi, che quindi mi fanno mantenere la condizione di equilibrio (di solito, infatti, chi vuole solvibilità non mira a tale reddito, ma a rimanere in equilibrio)

11.2 Teorema di Reddington

Detta le condizioni di immunizzazione per un portafoglio costituito da flussi attivi multipli e flussi passivi multipli (dunque non avremo più una sola uscita di cassa, ma ne avremo varie).
Nel teorema di reddington, peraltro, si ipotizzano shift additivi di ampiezza non finita ma infinitesima.
Ciò fa sì che le condizioni del teorema di fisher-weil siano necessarie, ma non sufficienti (avremo una condizione ulteriore).
$\bar{x} : \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ flusso attivo
$\bar{y} : \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ flusso passivo
$\bar{t} : \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ scadenzario
Letta in t l'intensità istantanea di interesse $\delta(t, s)$, Affinché sussista la condizione di immunizzazione nell'istante t in cui si era verificato uno shift additivo di ampiezza infinitesima, avremmo ancora un vincolo di bilancio e di duration, ma anche la duration di secondo ordine del flusso $\bar{x}$ deve essere maggiore o uguale al Brescia il secondo ordine del flusso $\bar{y}$. Quindi le tre condizioni sono:

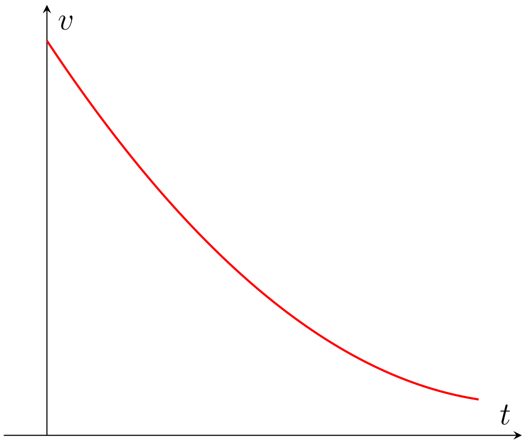
$$w(t, \bar{x}) = w(t, \bar{y})$$

$$D(t, \bar{x}) = D(t, \bar{y})$$

$$D^2(t, \bar{x}) \geq D^2(t, \bar{y})$$

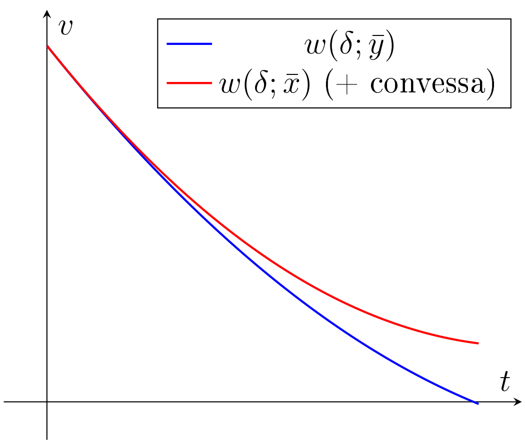
Dove per duration di secondo ordine (o momento secondo) si intende $D^2(t, \bar{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k^2 x_k [1+i(o,t_k)^{-t_k}]}{\sum_{k=1}^{m} x_k [1+i(0,t_k)]^{-t_k}}$
che indica che la dispersione del flusso attivo deve essere maggiore a quella del flusso passivo. A queste tre condizioni possiamo dare anche un'interpretazione geometrica: le

duration di primo secondo ordine possono essere viste come le derivate prima e seconda delle funzioni valore. L'andamento della funzione è questo:



$\delta(t,s) = \delta \; w(t,\bar{x}) = \sum_{K=1}^{m} x_k \cdot e^{-\delta k}$ con $e^{-\delta k}$
$w'(\delta) = -\sum_{k=1}^{m} k x_k e^{-\delta_k}$ derivata I° infatti è < 0, cioè decrescente
$w''(\delta) = \sum_{k=1}^{m} k^2 x_k e^{-\delta_k}$ derivata del II° infatti è $> 0, cioconcavitversoilalto$
$w'(\delta)$ è il numeratore della duration del primo ordine
$w''(\delta)$ è il numeratore della duration del secondo ordine

Quindi il vincolo di bilnacio e di duration ci dicono che nel punto δ le due curve dei valori attuali devono avere un punto di tangenza uguale (in A). L'altra condizione dice che la derivata seconda dell' attivo deve essere $\geq$ (più incurvata) della derivata seconda del passivo.
Quindi se il vincolo di duration di secondo ordine e un vincolo di uguaglianza stretta mi trovo in A (pareggio).
Se invece il flusso attivo a dispersione maggiore del flusso passivo, o dei profitti certi, dati dalla parte tratteggiata. Anche questo vale solo per shift additivi (nella realtà ci sono anche shift passivi).
Chi fa tesoreria è interessato alla solvibilità, quindi minimizza il vincolo di duration di secondo ordine (sempre rispetto alle altre due condizioni).
Il driver, invece, è interessato ai profitti e massimizzare il vincolo di secondo ordine.



Appendice

Dimostrazioni del II modulo

A.1 La funzione valore

$v(t, T, s)$ con $(t \leq T \leq s)$ è il valore in T, pattuito in t, di una unità du cinto esigibile in s.
Al variare di t,T ed s, la funzione valore $v(t, T, s)$ Dovrà soddisfare alcune proprietà che ne garantiscono la significatività finanziaria.

1) $v(t, T, s) > 0$ Non si può avere un euro ad un costo nullo
2) $v(t, s, s) = 1$ È una spontanea condizione a scadenza
3) $v(t, T, s') > v(t, T, s')$ con $t \leq T \leq s' < s''$ Questa proprietà, a detta di decrescenza rispetto alla scadenza dell'orizzonte di scambio è diretta conseguenza del postulato di rendimento del denaro (il costo di differire la scadenza di un debito è positivo)
4) $v(t, T', s') \leq v(t, T'', s)$ con $t \leq T' < T'' \leq s$ Questa proprietà dell'età di crescenza rispetto all'apertura dell'orizzonte di scambio e anch'essa diretta conseguenza del postulato di rendimento del denaro
5) $w(t, x_s) = x_s v(t, s)$ In condizioni di assenza di arbitraggio, il valore di un contratto a pronti che paga x_s Unità di conto in s e pari al prodotto tra x_s e il valore unitario di un contratto appronti che paga un euro in s

A.2 Le ipotesi caratteristiche del mercato

1) Non frizionalità: Non ci sono costi di transazione, né gravami fiscali, sono consentite vendite allo scoperto, non ci sono limiti né rischio di insolvenza
2) Competitività: gli agenti sono massimi attori del profitto e price taker
3) Assenza di arbitraggio: Non si possono conseguire margini dagli arbitraggi non rischiosi.
   Consideriamo questa operazione finanziaria di importi non tutti nulli, indichiamo con t l'istante corrente:

x $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$

t $\{t_0, t_1, ..., t_m\}$

x/t È un arbitraggio se il flusso di X non contiene pagamenti di segno opposto. È dunque una transazione che garantisce ad una delle due parti contraenti un flusso di pagamenti certamente non negativi con almeno un pagamento strettamente positivo. L'importo $C = x_0$ è il costo in tPicco del flusso residuo. Distinguiamo due arbitraggi:

1) Aquisto, ad un costo nullo o negativo di un flusso di pagamenti futuri tutti non negativi con almeno un pagamento strettamente positivo $c \geq 0; x_k \leq 0, k = 1, 2, ..., m$, $\exists \delta : x_\delta > 0$
2) Aquisto, ad un costo negativo, di un flusso di pagamenti futuri tutti non negativi $c < 0, x_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., m$

A.3 Teorema di decrescenza

Titoli a cedola nulla unilateri:

proprietà:

teorema di decrescenza: $v(t, s') > v(t, s'')$ con $t \leq s \leq s''$
dim. x assurdo

	t	s'	s''
A	$-v(t, s')$	1	0
B	$v(t, s'')$	0	-1
C	0	$-v(s', s'')$	1

In condizioni di assenza di arbitraggio, è $v(t, s') > v(t, s'')$. Dimostro per assurdo, se fosse vero $v(t, s') \geq v(t, s'')$ un 'operatore che max farebbe l'operazione B di vendita allo scoperto. Con $v(t, s'')$ acquista $-v(t, s')$ che per l'ipotesi assurda è minore di $v(t, s'')$ (aoperazione A) con il 1 che riceve in s' fa l'operazione C, con cui copre il debito in s''.
A conti fatti, l'arbitraggista fa un margine in t e s'. In s', infatti il postulato di impazienza dice che $-v(1, s'') < 0$, per cui $1 - v(s', s'') > 0$.

A.4 Teorema di indipendenza dall'importo

Titoli a cedola nulla non unitari

proprietà: $w(t, x_1)$ prezzo a pronti di uno ZCB che garatisce in s x_0

teorema di indipendenza dall'importo: $w(t, x_s) = x_s v(t, s)$
dim. x assurdo
se $w(t, x_s) < x_s v(t, s)$
In assenza di arbitraggio $w(t, x_1) = x_s v(t, s)$ dimostro per assirdo: se fosse vero $w(t, x_s) < x_s v(t, s)$ farei B. Poiché $w(t, x_s) < x_s v(t, s)$ potrei fare A. A conti fatti senza rischiare capitale proprio si ottiene in t un compenso di $x_s v(t, x_0) = w(t, x_s)$

	t	s
A	$-w(t, x_s)$	x_s
B	$x_s \cdot v(t, s)$	$-x_s$
C	$x_s \cdot v(t, s) - w(t, x_s)$	0

A.5 Teorema di linearità del prezzo

Portafoglio di ZCB (con diversa scadenza)

proprietà: considerando il titolo che garantisce il flusso di importi

$$\underline{x}\{x_1, x_2, ..., x_m\}$$
$$\underline{t}\{t_1, t_2, ..., t_m\}$$

teorema di linearità del prezzo: $w(t, \underline{x}) \sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)$

dim. per assurdo
$w(t, \underline{x}) \sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)$

	t	t_1	t_2	$\cdots$	t_m
A	$-w(t, \underline{x})$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
B_1	$x_1 \cdot v_1$	$-x_1$	0	$\cdots$	0
B_2	$x_2 \cdot v_2$	0	x_2	$\cdots$	x_m
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
B_m	$x_m \cdot v_m$	0	x_2	$\cdots$	$-x_m$
=	$\sum_{k=1}^{m}(x_k \cdot v_k) - w(t, \underline{x})$	0	0	$\cdots$	0

In condizioni di assenza di arbitraggio $w(t, \underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)$. DImostro per assurdo. Se fosse vero $w(t, \underline{x}) < \sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)$, potrei fare le operazioni $B_1, B_2, ..., B_m$ di vendita allo scoperto che garantirebbero in t l'import $\sum_{k=1}^{m} x_k v_k$. Con cui, dagta l'ipotesi assurda potrei acquistare l'operazione A, che coprirebbe tutti i costi alle diverse scadenze. Peraltro in t conseguirò un ricavo

A.6 Teorema dei prezzi impliciti

Contratti a termine

proprietà:
$V(T, t, S)$
$V(T, t, s) = v(t, s)$

teorema dei prezzi impliciti $v(t, s) = v(t, T) \cdot v(t, T, s)$ dim. x assurdo
Se $v(t, s) > v(t, T) \cdot v(t, T, s)$

	t	T	s
A	$v(t, s')$	0	-1
B	$-v(t, T)v(t, T, s)$	$v(t, T, s)$	0
C	0	$-v(t, T, s)$	1
$=$	$v(t, s') - v(t, T)v(t, T, s)$	0	0

In condizioni di assenza di arbitraggio $v(t, s') = v(t, T)v(t, T, s)$.
Dimostro per assurdo: se fosse vero $v(t, s) > v(t, T)v(t, T, s)$ fare l'operazione A di vendita allo scoperto. Con tale ammontare potrei acquistare B, vista l'ipotesi assurda. Con il $v(t, T, s)$ che ricevo in T dall'operazione B effettuo l'operazione C, che mi consente di coprire il debito in s derivante dall'operazione A. Peraltro int, ottengo il compenso $v(t, s') - v(t, T)v(t, T, s)$

A.7 Duration

$D(t, \underline{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)x_k v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t,t_k)}$
la duration è anche un indice che misura la rischiosità di volatilità dei tassi di interesse.
La duration di uno ZCB è sempre la vita a scadenza.
Duration di un portafoglio (usata nei teoremi di fisher-weil e reddington) $D(t, \bar{p}) = \frac{D(t,x_1)\alpha_1 x_1 v(t,t_1) + D(t,x_2)\alpha_2 x_2 v(t,t_2)}{\alpha_1 x_1 v(t,t_1) + \alpha_2 x_2 v(t,t_2)}$

$D^{(2)}(t, \underline{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)^2 x_k v(t,t_k)}{\sum_{K=1}^{m} x_k v(t,t_k)}$

A.8 Convexity

(o di dispersione, o anche indice di convessità) usato nel teorma di reddington (terza condizione)

A.9 Reddito di periodo di un flusso di importi calcolato la generica epoca h

Supponiamo di avere il seguente scadenzario $t = \{t_1, t_2, ..., H, ..., t_{m-1}, t_m\}$. Il reddito di periodo, calcolato alla generica scadenza H, è la somma di 2 componenti:

reddito da reinvestimento: $R' = \sum_{t_k \geq H} \frac{x_{t_k}}{v(t_k,H)} = \sum_{t_k > H} x_{t_k}[1 + i(t_k, H)]^{H-t_k}$

reddito da smobilizzo: $R'' = \sum_{t_k \geq H} x_{t_k} v(H, t_k) = \sum_{t_k \geq H} x_{t_k}[1 + i(H, t_k)]^{t_k - H}$

Quindi la formula
$R(\bar{x}) = \sum_{t_k \geq H} x_{t_k}[1 + i(t_k, H)]^{t_k-H} + \sum_{t_k \geq H} x_{t_k}[1 + i(H, t_k)]^{t_k-H}$ mostra il reddito periodale. Se volessi sapere il rendimento (tasse) periodale $i^*(t, H) = \frac{R(\bar{x},H-w(\bar{x},t)}{w(\bar{x},t)}$ da notare che il tasso è esppresso su base h-esima, per farlo diventare annuale, userò i tassi equivalenti

A.10 Teorema di Fisher-Weil

Detta le condizioni di immunizzazione per un flusso di attività a copertura di un'unica passività L, esigibile in un istante di tempo H. dato che questo flusso di cassa attivo è l'unica passività, e letta in e l'intensità istantanea di interesse rappresentativa della struttura per scadenza dei tassi.
Se

$w(t, \bar{x}) = w(t, t)$ il valore in t dell'attivo= valore in t del passivo

$\delta(t^+, s) = \delta(t, s) + \tilde{y}$ e se in $t^* > t$ avviene uno shift additivo, allora condizione necessaria e sufficiente affinché il portafoglio attivo e passivo sia immunizzato, ovvero che $w(t^*, \bar{x}) \geq w(t^*, t)$ è che
$D(t, \bar{x}) = D(t, t)$ vincolo di duration.
Questa condizione cerca di approssimare la situazione di oerfect matching.
Possiamo interpretare il teorema per costruire un portafoglio di attività con targhette di rendimento minimo garantito. Se sul mercato ci sono due ZCB per sapere quanto del primo e quanto del secondo titolo Devo acquistare affinché il portafoglio, con passività L, sia immunizzato da shift additivi, metto a sistema.

$Q_1 x_1 v(t, t_1) + x_2 v_2 v(t, t_2) = Lv(t, H)$
$D(t, L) = \frac{D(t,x_1)\alpha_1 x_1 V(T,T_1)+d(T,x_2)d_2 x_2 v(t,t_2)}{\alpha_1 x_1 v(t,t_1)+d_2 x_2 v(t,t_2)}$, dove $\alpha_1 x_1 v(t, t_1) + d_2 x_2 v(t, t_2)$ è w(t, portafoglio)

la duration ha la funzione di individuare il momento aottimo per lo smobilizzo.

A.11 Teorema di Reddington

Detta le condizioni di immunizzazione per un portafoglio costituito da flussi attivi flussi passivi multipli (non abbiamo +1 sono uscita). Un'altra differenza rispetto al teorema di fisher-weil, e che si ipotizzano shift additivi di ampiezza infinitesima, non più finita. Ciò fa sì che le condizioni del teorema fisher-weil siano necessarie, ma non sufficienti. Abbiamo una condizione ulteriore, che che la location di secondo ordine del flusso $\bar{x}$ deve essere maggiore o uguale all'adolescente di secondo ordine del flusso $\bar{y}$.
Quindi

1) $w(t, \bar{x}) = w(t, \bar{y})$

2) $\delta(t^+, s) = \delta(t^*, s) + infinitesima$

Condizione necessaria e sufficiente affinché sussista la condizione di immunizzazione nell'istante t^* è che:

1) $D(t, \bar{x}) = D(t, \bar{y})$

2) $D^2(t, \bar{x}) = D^2(t, \bar{y}) \rightarrow$ Dispersione del flusso attivo deve essere maggiore o uguale a quello del flusso passivo

dove $D(t, \bar{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)^2 x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)}$

Interpretazione geometrica delle tre condizioni Il vincolo di bilancio e di duration ci dice che nel punto δ le due curve dei valori attuali devono avere un punto di tangenza uguale (A).
L'altra condizione dice che la derivata seconda dell'attivo deve essere uguale o maggiore (più incurvata) della derivata seconda del passivo.
Infatti, prendendo la funzione valore, possiamo vedere che la sua derivata prima è il numeratore della duration Del secondo ordine.
Se il vincolo di Brescia di secondo ordine e un vincolo di uguaglianza, mi trovo in A (pareggio); se è maggiore del flusso passivo o profitti certi, nati dalla parte tratteggiata. Chi fa tesoreria ed è quindi interessato alla solvibilità, minimizza il vincolo di dure non di secondo ordine, mentre il trader interessato ai profitti, lo massimizza.