Matematica Finanziaria

Gino Favero, Annamaria Olivieri

Università degli Studi di Parma, Dipartimento di Economia
gino.favero@unipr.it, annamaria.olivieri@unipr.it

A.A. 2012/2013

Che cos'è la Matematica finanziaria?

Molto grossolanamente, si possono identificare due "spiriti":

- Dati alcuni parametri (es.: "tasso legale di interesse"), si rendono **confrontabili** somme di denaro in epoche diverse.
  – Esempio: meglio 100 € ora o 105 € fra un anno? Be', se posso investire al 10%... Ma se posso investire al 3%...
- Dati flussi di capitali (es.: mutui, titoli obbligazionari, ...) si cerca di **valutarli** in modo rapido ed efficace.
  – Esempio: mi prestano 100 € e ne rivogliono 105 fra un anno. Oppure: mi prestano 200 € e ne rivogliono 209 fra un anno. Che cosa mi conviene fare?

Contenuti del corso

Ci occuperemo degli aspetti fondamentali di entrambi gli "spiriti".

- **Vocabolario fondamentale**: operazioni finanziarie, tipi di operazioni, tasso di interesse e di sconto, intensità...
- Formazione degli interessi nel tempo: **leggi finanziarie**

Per la parte di confronto noti i parametri:

- Valutazione di **rendite**, piani di risparmio e ammortamento
- Valutazione di operazioni: **Valore attuale netto**

Per la parte di valutazione dei parametri dai dati:

- Valutazione di operazioni: **Tasso interno di rendimento**
- **Struttura per scadenze** dei tassi di interesse
- **Indici** temporali e di variabilità

Le imprese, e gli individui, sono esposti a vari rischi (finanziari) nella gestione del proprio patrimonio. Tratteremo brevemente la:

- gestione del rischio di tasso: **immunizzazione finanziaria**

Riferimenti

Sito web:

- `http://economia.unipr.it/docenti/olivieri`

Gli studenti CLAM/CLEA devono consultare anche le informazioni fornite sul sito del prof. Favero.

- `http://economia.unipr.it/docenti/favero`

Riferimenti bibliografici:

- M. D'Amico, E. Luciano, L. Peccati: *Calcolo finanziario. Temi di base e temi moderni*, Egea, 2011.
  - I testi degli anni scorsi (E. Castagnoli, L. Peccati: *La Matematica in azienda vol. 1 – Calcolo finanziario e applicazioni*, Egea, e G. Castellani, M. De Felice, F. Moriconi: *Manuale di Finanza. Vol. 1 – Tassi di interesse. Mutui e obbligazioni*, il Mulino, possono essere sufficienti, ma non costituiscono riferimento (... a che pagina...).
- **Lucidi** (online e Centro fotocopie; alla fine del corso, anche completi!)

"Esercizi", problemi, temi d'esame: *online*, o Centro fotocopie.

Per argomenti non trattati nel testo, **lucidi** (v. programma dettagliato).

N.B.: libro di **testo** e **lucidi** si integrano. Devono essere consultati **entrambi**, nessuno dei due è sufficiente da solo.

Disclaimer

Ad eccezione del testo di riferimento, acquistabile in libreria o consultabile nella Biblioteca di Economia, gli **unici canali ufficiali** tramite cui reperire il materiale da noi suggerito (lucidi del corso, problemi, testi degli esami passati) sono il **sito del corso** e il **Centro fotocopie** del Dipartimento (che è l'unico punto di vendita a ciò esplicitamente autorizzato).

NB: **non percepiamo compensi** su quanto distribuito dal Centro fotocopie.

Materiale diverso dal libro di testo eventualmente commercializzato in altre sedi non è stato da noi autorizzato (né da noi suggerito), quindi **non** ci assumiamo la responsabilitá di quanto in esso contenuto e **non daremo chiarimenti** in proposito.

Calendario, orari

Il calendario dettagliato delle lezioni è reperibile *online*

- CLEF/CLEM: `http://economia.unipr.it/docenti/olivieri`
- CLAM/CLEA: `http://economia.unipr.it/docenti/favero`

Eventuali **spostamenti** di aula o di orario saranno comunicati durante la lezione (ove possibile) e **nel sito** (sezione “avvisi”).

Nel sito è disponibile un programma di massima, lezione per lezione (suscettibile di aggiustamenti).

Ci saranno **sei appelli**: 18 dicembre, 8 gennaio, 4 febbraio, due a giugno/luglio, uno a settembre.

Orario di ricevimento: consultate il sito

- Eventuali cambiamenti compariranno nel sito.
- Prima di venire a ricevimento, **controllate il sito per eventuali avvisi di variazione.**

Modalità d'esame – 1

L'esame è **scritto**. Si compone di **tre problemi**, ciascuno suddiviso in **tre domande**, più "pratiche" le prime due, più "teorica" la terza. Le domande pratiche sono valutate da zero a tre punti, quelle teoriche da zero a quattro. **Fate due conti!**

È possibile usare la calcolatrice (tascabile!) e **basta** (no libri, no fogli ausiliari, no cellulare, no mascotte portafortuna, no parenti affezionati per sostegno morale, è duro da accettare ma è così).

Il tempo a disposizione è un'ora. Se siete preparati, è più che sufficiente. Se avete incertezze, è nettamente insufficiente.

Bisogna **iscriversi online**! Le liste sono aperte da 35 a 4 giorni prima. No iscrive, no dà esame (è duro da accettare ecc.). Presentarsi con il **libretto**.

Verbalizzazione **elettronica**. In particolare, dopo sette giorni, i voti positivi non rifiutati saranno **registrati**.

Modalità d'esame – 2

Le risposte dovranno essere **adeguatamente motivate** (dobbiamo **capire** che sapete). Trascrizioni di formule, oppure numeri senza svolgimento sono fonte di sospetto, non di gradimento.

Il procedimento è importante, ma anche il risultato lo è. Se venderete un mutuo da $100^{\cdot}000$ € in cambio di 12 rate da 27 €, quale sarà il probabile esito? Cercate di **farci l'occhio**!

Se siete iscritti ma decidete di non venire, per favore **cancellatevi dalla lista**: è inutile che prenotiamo dodici aule per sessanta studenti.

Per lo stesso motivo, non venite all'appello solo per **vedere il compito**: testo e soluzioni saranno *online* poco dopo la conclusione dell'esame.

Modalità d'esame – 3

In casi dubbi o in caso di elaborati non pienamente sufficienti, sarete **convocati** per l'orale: non sostenerlo, equivale a ritirarsi.

In tutti gli altri casi, l'esame si intende completato con la prova scritta.

Studenti CLAM/CLEA: per le modalità d'esame, consultate anche il sito del prof. Favero.

Modalità d'esame – 4

Siete caldamente invitati a evitare di:

- consegnare il compito se: non avete risposto a nulla, avete svolto solo la parte pratica dei problemi, avete risposto solo alle domande, avete svolto solo un esercizio, . . .
  Sapete qual è il punteggio massimo assegnato a parte pratica e domande: fate una sommaria autovalutazione prima di decidere se consegnare o ritirarvi;
- limitarvi a rispondere alle domande trascrivendo formule (v. sopra);
- limitarvi a indicare il risultato numerico degli esercizi, senza illustrarne il procedimento che avete seguito per la risoluzione (v. sopra).

Modalità d'esame – 5

Qualunque sia l'anno di immatricolazione:

- per tutti gli studenti, il programma d'esame è quello dell'anno corrente;
- gli studenti CLAM/CLEA devono sostenere l'esame con il prof. Favero;
- tutti gli altri studenti (CLEF/CLEM, CLEI/CLES e quadriennali) devono sostenere l'esame con la prof. Olivieri.

Per gli studenti di corsi di laurea quadriennali ci sono informazioni dettagliate (Internet) circa il programma e le modalità d'esame.

Nozioni di base

Operazione finanziaria: scambio di **somme** di denaro disponibili in **epoche** diverse

- lo scambio è regolato da un **contratto** (finanziario)
- ciascun importo è caratterizzato da **valuta** e **epoca**
- gli importi sono prefissati (es: $1\,000$ €) oppure determinabili in base a una regola pattuita (es: 100 € per un tasso di riferimento)

Esempi di operazioni finanziarie:

- c/c
  oggi: versamento iniziale; dopo un mese: prelevamento; dopo tre mesi: versamento; . . .
- acquisto di un BOT (Buono Ordinario del Tesoro)
  oggi: pagamento prezzo (investimento); a scadenza: incasso valore nominale (recupero investimento + interessi)

- sottoscrizione contratto di prestito (mutuo)
  oggi: importo a prestito; tra un mese, due mesi, . . . : rata (di ammortamento)
- sottoscrizione contratto di *leasing*
  oggi: valore del bene in *leasing* al netto del maxicanone; tra un mese, due mesi, . . . : canone

Rappresentazione di un'operazione finanziaria: **elenco** degli importi associati alle rispettive epoche

- il contratto deve specificare come misurare il tempo, come approssimare le grandezze da calcolare (quanti decimali nella specificazione dei tassi), ecc.

Notazione

S	$-R_1$	$-R_2$	$-R_3$
a_0	a_1	a_2	a_3
$10\,000$	$-3\,000$	$-3\,000$	$-5\,000$
1/1/2010	1/4/2010	1/7/2010	31/12/2010
t_0	t_1	t_2	t_3

Importi (con segno):
$a_0, a_1, \ldots, a_m$, oppure $x_0, x_1, \ldots, x_m$,
oppure $f_0, f_1, \ldots, f_m$, oppure
$S, -R_1, -R_2, \cdots - R_m$, oppure ...

Epoche (tempo trascorso da una data iniziale):
$t_0, t_1, \ldots, t_m$ (con $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m$).

Esempio: t_0 t_1 t_2 t_3

flussi in data 1/1/2010, 1/4/2010, 1/7/2010, 31/12/2010

t: tempo trascorso da un istante iniziale (es.: 1/1/2010);

tempo in mesi: $t_0 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $t_3 = 12$;
tempo in anni: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{12}{12} = 1$;

Operazione finanziaria: $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}/\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ oppure
$\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}/\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ oppure ... scadenzario

in forma compatta: $\mathbf{a}/\mathbf{t}$; $\mathbf{x}/\mathbf{t}$; ...

$\{10\,000, -3\,000, -3\,000, -5\,000\}/\{0, 0.25, 0.5, 1\}$

Rappresentazione grafica (Excel!)

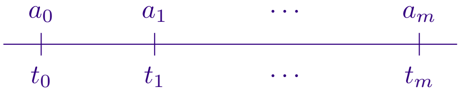
Tabella:

epoche	flussi
t_0	a_0
t_1	a_1
$\vdots$	$\vdots$
t_m	a_m

oppure

epoche	t_0	t_1	$\cdots$	t_m
flussi	a_0	a_1	$\cdots$	a_m

Asse dei tempi:



euro

anni (o mesi, . . .)

$$\begin{array}{ccccc} -1\,000 & 50 & 50 & \cdots & 1\,050 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & m \end{array}$$

Operazione di puro investimento

flusso iniziale in uscita (prezzo dell'investimento):
$-x_0 \leqslant 0$ (x_0 importo $\geqslant 0$)

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1\,000 & a_0 = -1\,000 \\ x_1 = 50 & a_1 = 50 \\ \vdots & \vdots \\ x_m = 1\,050 & a_m = 1\,050 \end{array}$$

flussi futuri in entrata (tipicamente equidistanti):
$\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_m}_{\mathbf{x}}$, con $x_1, \ldots, x_m$ importi tutti $\geqslant 0$

scadenzario (in ipotesi di pagamenti equidistanti):
$\{\underbrace{t_0}_{\substack{=0 \\ 0}}, \underbrace{t_0 + k}_{\substack{=k \\ 1}}, \ldots, \underbrace{t_0 + mk}_{\substack{=mk \\ m}}\}$

$$\begin{array}{ccc} 1\,800 & -1\,000 & -1\,000 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

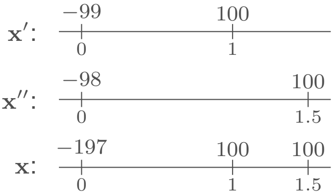
$$\begin{array}{r} S = x_0 = 1\,800 \\ R_1 = x_1 = 1\,000 \\ R_2 = x_2 = 1\,000 \end{array}$$

Operazione di puro finanziamento (o indebitamento)

flusso iniziale in entrata (importo preso a prestito):
$x_0 \geqslant 0$

flussi futuri in uscita (*rate d'ammortamento*, tipicamente equidistanti):
$\underbrace{-x_1, -x_2, \ldots, -x_m}_{-\mathbf{x}}$, con $x_1, \ldots, x_m$ importi tutti $\geqslant 0$

Somma di operazioni finanziarie



Date due operazioni finanziarie $\mathbf{x}'/\mathbf{t}'$, $\mathbf{x}''/\mathbf{t}''$

- Scadenzario **unione**: $\mathbf{t} = \mathbf{t}' \cup \mathbf{t}''$
- Operazione **somma**: $\mathbf{x}/\mathbf{t}$, dove $\mathbf{x}$ raccoglie i flussi delle due operazioni

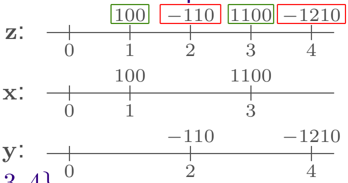
Esempio: $\mathbf{x}'/\mathbf{t}' = \{-99, 100\}/\{0, 1\}$, $\quad \mathbf{x}''/\mathbf{t}'' = \{-98, 100\}/\{0, 1.5\}$
$\mathbf{t} = \{0, 1, 1.5\}$ $\quad \mathbf{x} = \{-99 - 98, 100, 100\}$ $\quad$ (portafogli)

Scomposizione di operazioni finanziarie

Data un'operazione finanziaria $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$, con flussi in entrata e flussi in uscita, definita sullo scadenzario $\mathbf{t}$, può interessare scomporla in due operazioni:

- $\mathbf{x}/\mathbf{t}$, solo flussi in entrata (flusso degli *asset*)
- $\mathbf{y}/\mathbf{t}$, solo flussi in uscita (flusso delle *liability*)

$\Rightarrow$ $\mathbf{z}$: vettore di *asset-liability*



Esempio: $\mathbf{z}/\mathbf{t} = \{100, -110, 1\,100, -1\,210\}/\{1, 2, 3, 4\}$
asset: $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{100, 0, 1\,100, 0\}/\{1, 2, 3, 4\}$
liability: $\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{0, -1\,100, 0, -1\,210\}/\{1, 2, 3, 4\}$

Operazioni a pronti e operazioni a termine

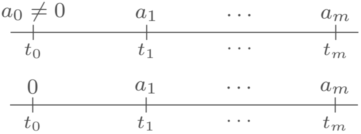
Le condizioni contrattuali sono pattuite all'epoca corrente, t_0

Operazione **a pronti** (o ***spot***):

all'epoca corrente c'è un flusso

Operazione **a termine** (o ***forward***):

il primo flusso è differito rispetto all'epoca corrente



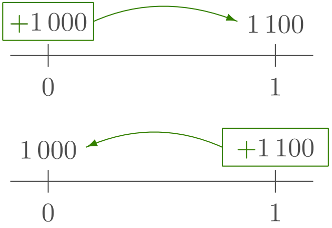
Operazioni certe e operazioni aleatorie

Operazione **certa**: importi e epoche sono noti alla stipulazione del contratto

Operazione **aleatoria**: alcuni importi e/o epoche non sono noti all'inizio dell'operazione, ma saranno determinati nel corso dell'operazione in funzione di assegnate variabili (es.: tasso di mercato, tasso d'inflazione, ...)

Operazioni su due date

Esempio:



(un flusso in entrata e uno in uscita)

Per l'**investitore**: operazione $\{-S, (S+I)\}/\{0,1\}$

posizione *long*, operazione di investimento o di **CAPITALIZZAZIONE**

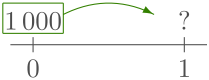
Per il **debitore**: operazione $\{S, -(S+I)\}/\{0,1\}$

posizione *short*, operazione di finanziamento o di **ATTUALIZZAZIONE**

Nota. Importi e epoche sono noti $\Rightarrow$ l'operazione è considerata **certa**.

In realtà, il flusso futuro è soggetto al rischio di *default* della controparte $\Rightarrow$ l'operazione è rappresentata in termini deterministici (in quanto si trascura il rischio di *default*)

Terminologia per le operazioni di **CAPITALIZZAZIONE**



Si fissa S e si calcola (in funzione delle condizioni contrattuali) $S + I$

- Importo corrente (in uscita): **capitale** (investito) $\quad S = 1\,000$
- Importo futuro (in entrata): **montante o valore** (finale)

$$M = S + I = 1\,100$$

- **Interesse** $=$ montante $-$ capitale $\quad I = M - S = 100$
- Montante per unità di capitale $f = \dfrac{M}{S} = \dfrac{S+I}{S}$: **fattore di montante**

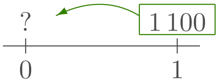
$$f = \frac{1\,100}{1\,000} = 1.1$$

- Interesse per unità di capitale $i = \dfrac{I}{S}$: **tasso di interesse**

$$i = \frac{100}{1\,000} = 0.1 = 10\%$$

Nota che $f = 1 + i$. Inoltre, da $i = \frac{I}{S}$ si ha $I = S \cdot i$ e, da $f = \frac{M}{S}$,
$M = S \cdot f = S \cdot (1 + i)$. $\quad M = 1\,000 \cdot 1.1 = 1\,100$

Terminologia per le operazioni di **ATTUALIZZAZIONE**



Ora, dato $S + I$ si vuole calcolare S

- Importo futuro (in uscita): **valore nominale** (o **alla scadenza**)

$$S + I = C = 1\,100$$

- Importo corrente (in entrata): **valore attuale** o **scontato** (finale)

$$S = A = 1\,000$$

- **Sconto** = valore nominale − valore attuale

$$D = M - S = 100$$

- Valore attuale per unità di valore nominale $v = \dfrac{A}{C} = \dfrac{S}{S+I}$: **fattore di sconto** (nel testo, anche φ)

$$v = \frac{1\,000}{1\,100} \simeq 0.91$$

- Sconto per unità di valore nominale $d = \dfrac{I}{S+I}$: **tasso di sconto**

$$i = \frac{100}{1100} \simeq 0.09091 = 9.091\%$$

Nota che $v = 1 - d$. Inoltre, da $d = \frac{I}{C}$ si ha $I = C \cdot d$ e, da $v = \frac{A}{C}$, $A = C \cdot v = C \cdot (1 - d)$. Ancora: $v = \frac{1}{f}$.

Da un punto di vista finanziario, S all'epoca $t = 0$ è **EQUIVALENTE** a $S + I$ all'epoca $t = 1$, sulla base delle condizioni contrattuali (Avremmo potuto etichettare l'epoca futura come epoca t: $t = 1$ anno, 2 anni, 18 mesi, ecc.)

Le clausole contrattuali di fatto specificano una **funzione valore** $W(t)$ che riflette il prezzo del tempo

Risulta: $W(0) = S = 1\,000 \quad ; \qquad W(1) = S + I = 1\,100$.

In termini di fattore di montante: $W(1) = W(0) \cdot f(1)$ $\qquad$ $\big($o $f(0,1)\big)$

in generale, per un'operazione di durata t anni: $W(t) = W(0) \cdot f(t)$

In termini di fattore di sconto: $W(0) = W(1) \cdot v(1)$ $\qquad$ $\big($o $v(0,1)\big)$

in generale, per un'operazione di durata t anni: $W(0) = W(t) \cdot v(t)$

Regime finanziario

REGIME + PARAMETRI = LEGGE

Procedura di calcolo che, in funzione del tempo e di alcuni parametri (da assegnare), dà il montante alla scadenza di un euro investito oggi o il valore scontato oggi di un euro futuro $f(t) = 1 + it$ (i: parametro)

Legge finanziaria

Funzione del tempo che, sulla base di assegnati parametri, consente di calcolare il montante alla scadenza di un euro investito oggi o il valore scontato oggi di un euro futuro $f(t) = 1 + 0.1t$ (0.1: valore del parametro)

Data la funzione valore $W(t)$, risulta definita una legge finanziaria, che può essere alternativamente espressa in termini di:

- fattore di montante: $f(t) = \dfrac{W(t)}{W(0)} \longrightarrow W(t) = W(0) \cdot f(t)$; $W(t_2) = W(t_1) \cdot f(t_1, t_2)$
- fattore di sconto: $v(t) = \dfrac{W(0)}{W(t)} \longrightarrow W(0) = W(t) \cdot v(t)$; $W(t_1) = W(t_2) \cdot v(t_1, t_2)$

Banalmente: $W(t) = \big(W(t) \cdot f(t)\big) \cdot v(t) \ \Rightarrow \ f(t) \cdot v(t) = 1$: **fattori coniugati**

$$f(t) = \frac{1}{v(t)}\ ; \qquad v(t) = \frac{1}{f(t)}$$

Tassi d'interesse e tassi di sconto sono i **parametri delle leggi finanziarie**

Tasso d'interesse: solitamente inteso come remunerazione del capitale investito (*rendimento*)

Siccome gli importi non sono deflazionati, si tratta di un *tasso nominale*

i tassi nominali sono sempre positivi

Al "netto" dell'inflazione, i tassi sono detti *reali*

i tassi reali possono essere negativi

Il tasso d'interesse esprime l'interesse per unità di capitale e per unità di tempo (annuale, semestrale, mensile...)

Il significato specifico del tasso d'interesse dipende dalla legge finanziaria (*tasso semplice*; *tasso composto*; v. più avanti)

Problema 1 *Esplicitare capitale, montante, tasso d'interesse relativi alle seguenti operazioni di acquisto BOT:* (Buoni Ordinari del Tesoro)

1. *BOT a tre mesi, prezzo corrente* 99.51*, valore nominale* 100
2. *BOT a un anno, prezzo corrente* 97.95*, valore nominale* 100

capitalizzazioni

Specificare qual è l'unità temporale del tasso d'interesse.

1. $$\begin{array}{ccc} -99.51 & & 100 \\ \hline 0 & & 3 \end{array}$$ (mesi)

$$W(0) = 99.51$$
$$W(3) = 100$$
$$I_{[0,3]} = 100 - 99.51 = 0.49$$
$$i = \frac{0.49}{99.51} \simeq 0.00492$$ **trimestrale**

2. $$\begin{array}{ccc} -97.95 & & 100 \\ \hline 0 & & 1 \end{array}$$ (anni)

$$W(0) = 97.95$$
$$W(1) = 100$$
$$I_{[0,1]} = 100 - 97.95 = 2.05$$
$$i = \frac{2.05}{97.95} \simeq 0.02093$$ annuo

(0.492% trimestrale e 2.0983% annuo: quale dei due è meglio?)

Le leggi finanziarie

Obiettivo: costruire formule che, in base a opportuni parametri, descrivano la funzione valore $W(t)$

Leggi finanziarie usuali "regimi"

Capitalizzazione (***fattori di montante***)	**Attualizzazione** (***fattori di sconto***)
Interessi semplici	Sconto semplice o razionale
Interessi composti	Sconto composto
Interessi (semplici) anticipati	Sconto commerciale

$\boxed{\text{La legge degli interessi semplici}}$

o legge lineare

Investimento dell'importo S all'epoca 0 $\Rightarrow$ valore iniziale: $W(0) = S$

L'aumento di valore in un generico anno è una percentuale i del valore iniziale: $\frac{W(t)-W(t-1)}{W(0)} = i \qquad \longrightarrow W(t) = W(t-1) + iS$

"clausola contrattuale"

Pertanto:

- epoca 0: $W(0) = S$
- epoca 1: $W(1) = W(0) + iS = S + iS = (1+i)S$
- epoca 2: $W(2) = W(1) + iS = (S + iS) + iS = (1+2i)S$
- $\dots$
- epoca t (t intero): $W(t) = \boxed{(1+ti)} \cdot S$

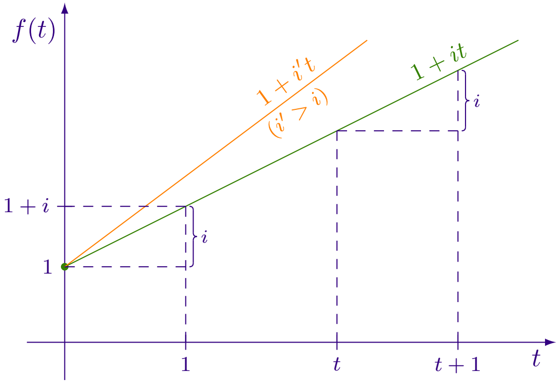
$\boxed{}$ = fattore di montante (funz. del tempo t)

$i_{[0,t]} = (1+ti) - 1 = ti$

Fattore di montante a interessi semplici, per un'operazione di durata t anni (t intero): $\boxed{f(t) = 1 + it}$

Notazione alternativa: $f(t_0, t_0 + t)$
(t_0: epoca iniziale; $t_0 + t$: epoca finale)

Solitamente $f(t) = 1 + it$ è definito per $t \geqslant 0$



- nota: $i > 0$
- $f(0) = 1$
  (spese "a parte")
- ricorda: $i_{[0,t]} = t \cdot i$

...lineare!

Caratteristica: interessi proporzionali al valore iniziale (capitale) e alla durata dell'impiego $\quad I = S \cdot i \cdot t \quad (= W(0) \cdot i \cdot t)$

Fattore di proporzionalità: $\boxed{i}$

- significato: denaro prodotto da un'unità di capitale nell'unità di tempo.
  $\Rightarrow$ **tasso d'interesse** (semplice)
  (annuo se la durata è in anni, mensile se la durata è in mesi, ecc.)
- solitamente: $i > 0 \Rightarrow$ garanzia d'interessi ($W(t)$ crescente)

Interesse annuo per euro accumulato a inizio anno ("a termine"):

$$i_t = i_{[t-1,t]} = \frac{W(t) - W(t-1)}{W(t-1)} = \frac{Si}{S\big(1 + (t-1)i\big)} = \frac{i}{1 + (t-1)i}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= i \\ i_2 &= i/(1+i) \\ &\vdots \\ i_t &= i/(1 + i\,(t-1)) \end{aligned}$$

decresc.!

Legge impiegata per contratti di breve periodo (un anno circa) e comunque con scadenza fissata

importante (vedremo)

Problema 2 *Si impiegano* $10\,000$ *euro a interessi semplici per* 3 *anni, tasso annuo d'interesse* 10%. *Calcolare:*

int. sempl.: $W(t) = W(0)(1 + it)$

$i = 10\%$ annuo

$t = 3$ anni

1. *montante;*
2. *interessi complessivi;*
3. *per ciascun anno, interesse annuo per euro accumulato a inizio anno.*

$(-)W(0)$ $\quad$ $W(3)$

$-10\,000 \xrightarrow{10\%} 13\,000$

$0 \quad\quad\quad 3$

1. $$W(3) = W(0) \cdot (1 + it) = \\ = 10\,000 \cdot (1 + 0.1 \cdot 3) = 13\,000$$

2. $$I = I_{[0,3]} = \begin{cases} W(3) - W(0) = 3\,000 \\ S \cdot i \cdot t = 10\,000 \cdot 0.1 \cdot 3 = 3\,000 \end{cases}$$

$$i = i_{[0,3]} = \begin{cases} I/S = 3\,000/10\,000 = 0.3 = 30\% \\ i \cdot t = 0.1 \cdot 3 = 0.3 = 30\% \end{cases}$$ (triennale)

3. $$i_{[t-1,t]} = \frac{W(t) - W(t-1)}{W(t-1)} = \frac{iS}{S \cdot \big(1 + (t-1)i\big)} = \frac{i}{1 + (t-1)i}$$

Ripartiamo da $W(t) = W(0) \cdot (1 + it) = 10\,000(1 + 0.1t)$.

$$10\,000 \xrightarrow{10\%} 11\,000 \xrightarrow{9.\overline{09}\%} 12\,000 \xrightarrow{8.\overline{3}\%} 13\,000$$

$$0 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 3$$

$$i_{[t-1,t]} = \frac{W(t) - W(t-1)}{W(t-1)} = \frac{iS}{S \cdot \big(1 + (t-1)i\big)} = \frac{i}{1 + (t-1)i}$$

$$i_1 = i_{[0,1]} = \frac{11\,000 - 10\,000}{10\,000} = \frac{1\,000}{10\,000} = 0.1 \qquad \left(= \tfrac{i}{1+0\cdot i}\right)$$

$$i_2 = i_{[1,2]} = \frac{12\,000 - 11\,000}{11\,000} = \frac{1\,000}{11\,000} \simeq 0.0909\ldots \qquad \left(= \tfrac{i}{1+i} = \tfrac{0.1}{1.1}\right)$$

$$i_3 = i_{[2,3]} = \frac{13\,000 - 12\,000}{12\,000} = \frac{1\,000}{12\,000} \simeq 0.0833\ldots \qquad \left(= \tfrac{i}{1+2i} = \tfrac{0.1}{1.2}\right)$$

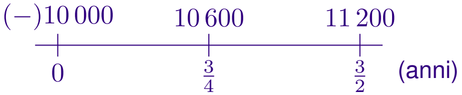
$$i_1 = \frac{1}{10} \qquad i_2 = \frac{1}{11} \qquad i_3 = \frac{1}{12} \qquad \ldots$$

Problema 3 *Si depositano* $10\,000$ *euro a interessi semplici per* 9 *mesi, tasso* 8% *annuo. Qual è l'importo disponibile alla scadenza? E se la scadenza fosse dopo* 18 *mesi?*

$i = 0.08$

$t_1 = 9$ mesi $= \frac{3}{4}$ anni

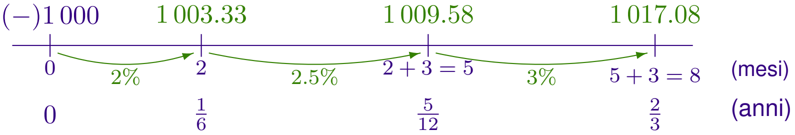
$t_2 = 18$ mesi $= \frac{3}{2}$ anni



$$W(3/4) = W(0)\cdot(1+it) = 10\,000\left(1+\tfrac{3}{4}\cdot 0.08\right) = \\ = 10\,000\cdot 1.06 = 10\,600$$

$$W(3/2) = W(0)\cdot(1+it) = 10\,000\left(1+\tfrac{3}{2}\cdot 0.08\right) = \\ = 10\,000\cdot 1.12 = 11\,200$$

Problema 4 *Si investono $1\,000$ euro per 8 mesi in regime di interessi semplici, a tasso variabile. Calcolare il montante alla scadenza supponendo che per i primi 2 mesi sia applicato il tasso annuo d'interesse del 2%, per i successivi 3 mesi il tasso annuo del 2.5% e per i rimanenti 3 mesi il tasso annuo del 3%.*



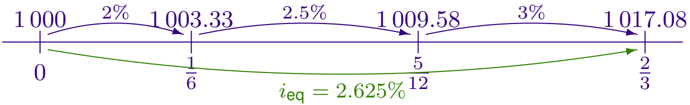
$$W(2/3) = S + I_{[0,\frac{1}{6}]} + I_{[\frac{1}{6},\frac{5}{12}]} + I_{[\frac{5}{12},\frac{2}{3}]}$$

$$I(t) = W(0) \cdot i \cdot t \qquad \longrightarrow \qquad I_{[a,b]} = S \cdot i_{[a,b]} \cdot (b-a)$$

$$I_{[0,\frac{1}{6}]} = 1\,000 \cdot 0.02 \cdot \tfrac{1}{6} = 3.3333\ldots \qquad W\left(\tfrac{1}{6}\right) = 1\,003.3333\ldots$$

$$I_{[\frac{1}{6},\frac{5}{12}]} = 1\,000 \cdot 0.025 \cdot \tfrac{1}{4} = 6.25 \qquad W\left(\tfrac{5}{12}\right) = 1\,009.5833\ldots$$

$$I_{[\frac{5}{12},\frac{2}{3}]} = 1\,000 \cdot 0.03 \cdot \tfrac{1}{4} = 7.5 \qquad W\left(\tfrac{2}{3}\right) = 1\,017.0833\ldots$$



$$W(2/3) = S + I_{[0,\frac{1}{6}]} + I_{[\frac{1}{6},\frac{5}{12}]} + I_{[\frac{5}{12},\frac{2}{3}]}$$
$$= 1\,000 \cdot \boxed{\left[1 + 0.02 \cdot \tfrac{1}{6} + 0.025 \cdot \tfrac{1}{4} + 0.03 \cdot \tfrac{1}{4}\right]}$$

fattore di montante a interessi semplici e a tasso variabile:
$f(t) = 1 + i_1 t_1 + i_2 t_2 + \cdots$

Nota. Volendo risolvere $W\left(\frac{2}{3}\right) = S \cdot \left(1 + i_{eq} \cdot \frac{2}{3}\right)$,

$$i_{eq} = \left[\frac{1\,017.0833}{1\,000} - 1\right] : \frac{2}{3} = 2.625\% =$$
$$= \frac{0.02 \cdot \frac{1}{6} + 0.025 \cdot \frac{1}{4} + 0.03 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

media pesata!

rendimento medio alla scadenza (regime degli interessi semplici)

Nota: soltanto in $t = \frac{2}{3}$ (per es., $W\left(\frac{5}{12}\right) \neq 1\,000 \cdot \left(1 + i_{eq} \cdot \frac{5}{12}\right) = 1\,010.9375$).

Problema 5 *Un BOT di valore nominale* $1\,000$*, scadenza a* 2 *mesi dall'emissione, è emesso al prezzo di* 998*. Dopo un mese dall'emissione, il prezzo corrente è* 999.20*. Calcolare il rendimento (lordo) alla scadenza per chi acquista il BOT all'emissione e per chi lo acquista dopo 1 mese (regime interessi semplici).*

-998	(999.20)	$1\,000$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

lordo: al lordo delle tasse

alla scadenza: supponendo di detenere il titolo fino alla scadenza

$I = S \cdot i \cdot t \qquad 2 = 998 \cdot i \cdot \frac{2}{12}$

tasso (annuo) di rendimento alla scadenza

$$i = \frac{2 \cdot 6}{998} \simeq 0.012\,02 = 1.202\%$$

Alla cessione: $I_{[0, \frac{1}{12}]} = S \cdot i_{[0, \frac{1}{12}]} \cdot t \qquad 1.20 = 998 \cdot i_{[0, \frac{1}{12}]} \cdot \frac{1}{12}$:

$$i_{[0, \frac{1}{12}]} = \frac{1.20 \cdot 12}{998} \simeq 0.014\,43 = 1.443\%$$

Per chi acquista il titolo:

$$\begin{array}{cc} -999.20 & 1\,000 \\ \hline 0 & \frac{1}{12} \end{array}$$

$I = S \cdot i' \cdot t \qquad\qquad 0.80 = 999.20 \cdot i' \cdot \frac{1}{12}$

$\uparrow$

tasso (annuo) di rendimento alla scadenza
dopo un mese dall'emissione

$$i = \frac{0.80 \cdot 12}{999.20} \simeq 0.009\,61 = 0.961\%$$

... e se volessimo fare in modo che $i_{[0,\frac{1}{12}]} = i_{[\frac{1}{12},\frac{2}{12}]}$?

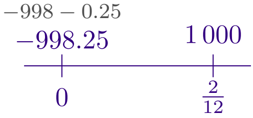
$\longrightarrow$ troveremmo naturalmente un prezzo di cessione **minore** di 999.20. Provate!
[prezzo 999, $i' = 1.201\%$ – intermedio tra 0.961% e 1.202%]

Problema 6 *Un BOT di valore nominale $1\,000$, scadenza a 2 mesi dall'emissione, è emesso al prezzo di 998. All'emissione è applicata una ritenuta fiscale pari al 12.5% degli interessi complessivi. Calcolare il rendimento netto alla scadenza (regime interessi semplici).*

Interessi complessivi: $1\,000 - 998 = 2$

Ritenuta fiscale: $2 \cdot 12.5\% = 0.25$

Esborso totale: $998 + 0.25 = 998.25$



$$M = S(1 + i_{\mathsf{N}} \cdot t) \qquad 1\,000 = 998.25 \cdot \left(1 + i_{\mathsf{N}} \cdot \frac{2}{12}\right)$$

$$\Rightarrow\ i_{\mathsf{N}} = \left(\frac{1\,000}{998.25} - 1\right) \cdot 6 \simeq 0.010\,52 = 1.052\%.$$

$\uparrow$

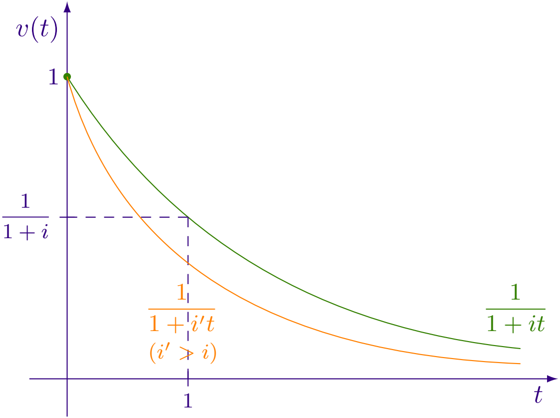
tasso (annuo) **netto**
di rendimento alla scadenza

Nota: $\dfrac{1\,000}{998.25} - 1 \simeq 0.175\%$ è il tasso netto **bimestrale**

Fattore di sconto a interessi semplici (*legge dello sconto semplice o razionale*): da $f(t) = 1 + it$, $v(t) = \frac{1}{f(t)} = \dfrac{1}{1+it}$.

Notazione alternativa: $v(t_0, t_0 + t) = \frac{1}{1+it}$ (t_0: data corrente; $t_0 + t$: data futura). Ulteriori notazioni: $\varphi(t) = \frac{1}{1+it}$, $\varphi(t_0, t_0 + t) = \frac{1}{1+it}$.

NB: il parametro i è un tasso d'interesse.



- $t = 0$: $v = 1$
- $t \to +\infty$: $v \to 0$

Problema 7 *Una cambiale di valore nominale $1\,000$, scadenza tra 3 mesi, è ceduta all'incasso. Calcolare il prezzo (di riscatto), impiegando il fattore di sconto semplice, tasso annuo d'interesse 10%. Ripetere, supponendo che la cambiale abbia scadenza tra 1 anno e, alternativamente, tra 2 anni.*

$$1\,000 = A(1+it) \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,000 \cdot \frac{1}{1+it}; \quad i = 0.1 \text{ annuo}$$

Tra 3 mesi: $$A = 1\,000 \cdot \frac{1}{1+0.1\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1\,000}{1.025} \simeq 975.61$$

Tra 1 anno: $$A = 1\,000 \cdot \frac{1}{1+0.1\cdot 1} = \frac{1\,000}{1.1} \simeq 909.09$$

Tra 2 anni: $$A = 1\,000 \cdot \frac{1}{1+0.1\cdot 2} = \frac{1\,000}{1.2} \simeq 833.33$$

La legge degli interessi composti

o legge esponenziale

Investimento dell'importo S all'epoca 0 $\Rightarrow$ valore iniziale: $W(0) = S$

L'aumento di valore in un generico anno è una percentuale i del valore accumulato all'inizio dell'anno: $\frac{W(t)-W(t-1)}{W(t-1)} = i$

"clausola contrattuale"

$$\longrightarrow W(t) = W(t-1) \cdot (1+i)$$

Pertanto:

- epoca 0: $W(0) = S$
- epoca 1: $W(1) = W(0) \cdot (1+i) = (1+i) \cdot S$
- epoca 2: $W(2) = W(1) \cdot (1+i) = (1+i)^2 \cdot S$
- $\dots$
- epoca t (t intero): $W(t) = \boxed{(1+i)^t} \cdot S$

$\boxed{}$ = fattore di montante (funz. del tempo t)

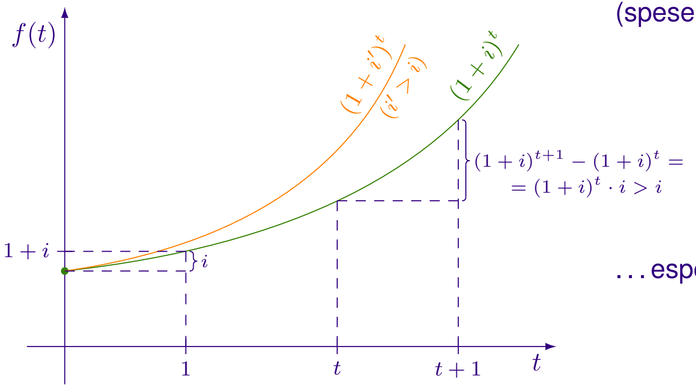
$i_{[0,t]} = (1+i)^t - 1$

Fattore di montante a interessi composti, per un'operazione di durata t anni (t intero): $\boxed{f(t) = (1+i)^t}$

Parametro i: tasso annuo (composto)

Solitamente $f(t) = (1+i)^t$ è definito per $t \geqslant 0$

- in genere $i > 0$
- $f(0) = 1$
(spese "a parte")

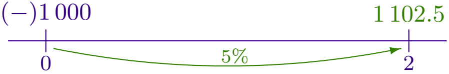


...esponenziale!

Problema 8 *Si investono $1\,000$ euro a interessi composti. Calcolare il montante dopo 2 anni supponendo alternativamente che:*

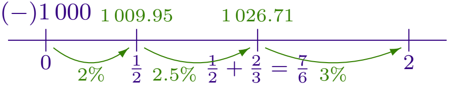
1. *il tasso annuo d'interesse sia il 5% per l'intero periodo;*
2. *il tasso annuo sia il 2% nei primi 6 mesi, il 2.5% nei successivi 8 mesi, il 3% nei rimanenti 10 mesi.*

1. $S = 1\,000$
   $t = 2$ (anni)
   $i = 0.05$



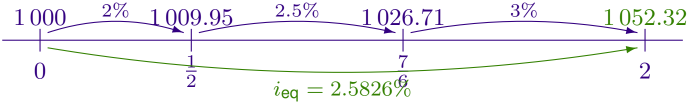
$$W(2) = W(0) \cdot (1+i)^t = 1\,000 \cdot 1.05^2 = 1\,102.5$$

2. $S = 1\,000$
   $t_1 = \frac{6}{12}$ $\qquad i_1 = 0.02$
   $t_2 - t_1 = \frac{8}{12}$ $\qquad i_2 = 0.025$
   $t_3 - t_2 = \frac{10}{12}$ $\qquad i_3 = 0.03$



$$W\left(\tfrac{1}{2}\right) = W(0) \cdot (1+i_1)^{t_1} = 1\,000 \cdot 1.02^{1/2} = 1\,009.95$$

$$W\left(\tfrac{7}{6}\right) = W\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot (1+i_2)^{t_2-t_1} = W\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdot 1.025^{2/3} = W(0) \cdot 1.02^{1/2} \cdot 1.025^{2/3} = 1\,026.71$$



$$W(2) = W\left(\tfrac{7}{6}\right) \cdot (1+i_3)^{t_3-t_2} = W\left(\tfrac{7}{6}\right) \cdot 1.03^{5/6}$$
$$= 1\,000 \cdot \boxed{1.02^{1/2} \cdot 1.025^{2/3} \cdot 1.03^{5/6}} = 1\,052.32$$

fattore di montante a interessi composti e a tasso variabile:
$f(t) = (1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{t_2}\cdots$

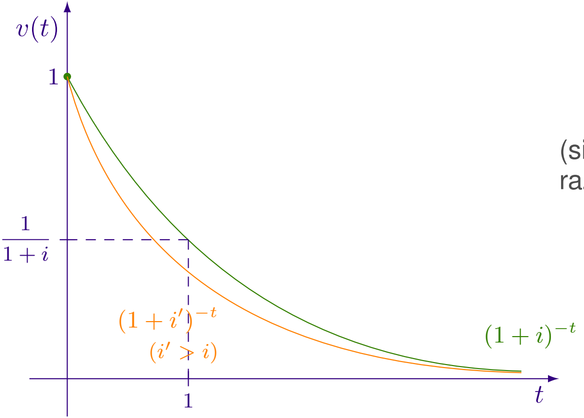
Nota. Volendo risolvere $W(2) = W(0)(1+i_{\text{eq}})^2$,

$$i_{\text{eq}} = \left[\frac{1\,052.32}{1\,000}\right]^{1/2} - 1 \simeq 2.5826\% =$$
$$= \left[1.02^{1/2} \cdot 1.025^{2/3} \cdot 1.03^{5/6}\right]^{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}} - 1$$

rendimento medio alla scadenza (regime degli interessi composti)

Nota: soltanto in $t = 2$ (per es., $W\left(\frac{7}{6}\right) \neq 1\,000 \cdot (1+i_{\text{eq}})^{7/6} \simeq 1\,030.19$).

Fattore di sconto a interessi composti (o *fattore di sconto composto*): da $f(t) = (1+i)^t$, $v(t) = \frac{1}{f(t)} = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t}$.



- $t = 0$: $v = 1$
- $t \to +\infty$: $v \to 0$

(simile alla legge dello sconto razionale, ma diversa!)

Problema 9 *Una cambiale di valore nominale $1\,000$, scadenza tra 3 mesi, è ceduta all'incasso. Calcolare il prezzo (di riscatto), impiegando il fattore di sconto composto, tasso annuo d'interesse 10%. Ripetere supponendo, alternativamente, che la cambiale abbia scadenza tra 1 anno e tra 2 anni. Confrontare con i risultati del Problema 7.*

$$1\,000 = A(1+i)^t \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,000 \cdot (1+i)^{-t}; \quad i = 0.1 \text{ annuo}$$

Tra 3 mesi: $$A = 1\,000 \cdot (1+0.1)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1\,000}{\sqrt[4]{1.1}} \simeq 976.45 \qquad (> 975.41)$$

sconto **minore**, **meno** interessi

Tra 1 anno: $$A = 1\,000 \cdot (1+0.1)^{-1} = \frac{1\,000}{1.1} \simeq 909.09$$

uguale agli interessi semplici (tasso **annuo**!)

Tra 2 anni: $$A = 1\,000 \cdot (1+0.1)^{-2} = \frac{1\,000}{1.21} \simeq 826.45 \qquad (< 833.33)$$

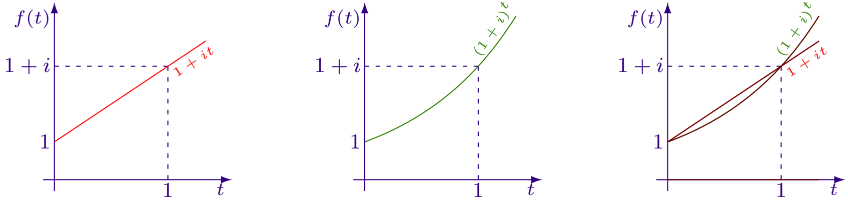
sconto **maggiore**, **più** interessi

Legge esponenziale e legge lineare

Operazione di **investimento** di durata t anni, $t \geqslant 0$ (non necessariamente intero)

Legge lineare: $f(t) = 1 + it$ (interessi semplici)

Legge esponenziale: $f(t) = (1+i)^t$ (interessi composti)



$$t < 1 : \quad 1 + it > (1+i)^t$$
$$t > 1 : \quad 1 + it < (1+i)^t$$

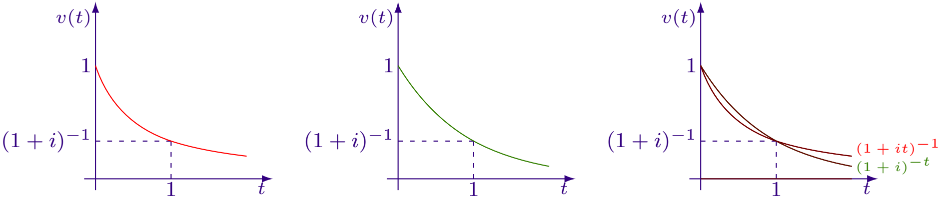
Quindi per gli investimenti conviene:

- durata **breve** ($t < 1$): interessi **semplici**
- durata **lunga** ($t > 1$): interessi **composti**

Operazione di **attualizzazione**, scadenza all'epoca $t \geqslant 0$ (non necessariamente intero)

Legge lineare: $v(t) = (1 + it)^{-1}$

Legge esponenziale: $v(t) = (1 + i)^{-t}$



$$
\begin{aligned}
t < 1: &\quad (1+it)^{-1} < (1+i)^{-t} \\
t > 1: &\quad (1+it)^{-1} < (1+i)^{-t}
\end{aligned}
$$

Quindi per le attualizzazioni conviene:

- durata **breve** ($t < 1$): interessi **composti**
- durata **lunga** ($t > 1$): interessi **semplici**

(Chiaro: se *ricevo* interessi... Se invece li *pago*...)

Problema 10 *Un BOT di valore nominale $1\,000$, scadenza a 2 mesi dall'emissione, è emesso al prezzo di 998. Calcolare il rendimento (lordo) alla scadenza in regime di interessi composti. Confrontare (e interpretare) con il rendimento ottenuto in regime di interessi semplici (Problema 5).*

- Interessi composti:

$$1\,000 = 998 \cdot (1 + i_{\mathsf{C}})^{1/6} \quad \longrightarrow \quad i_{\mathsf{C}} = \left(\frac{1\,000}{998}\right)^6 - 1 \simeq 1.208\%$$

tasso annuo (lordo di rendimento alla scadenza)

- Interessi semplici:

$$1\,000 = 998 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{6} \cdot i_{\mathsf{S}}\right) \quad \longrightarrow \quad i_{\mathsf{S}} = \left(\frac{1\,000}{998} - 1\right) \cdot 6 \simeq 1.202\%$$

Quindi, in regime di interessi composti, il rendimento alla scadenza risulta **maggiore**. Perché?

La durata dell'operazione è "**breve**" ($t < 1$). Quindi, $1 + it > (1 + i)^t$. Allora:

- a parità di **tasso**, gli interessi semplici sono più di quelli composti;
- a parità di **interessi** prodotti, dev'essere $i_S < i_C$!

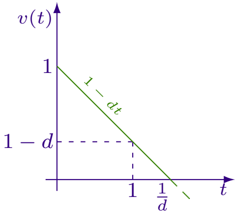
A riprova:

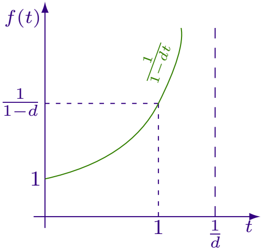
regime \ i	1.208%	1.202%
interessi composti	$1\,000$	999.99
interessi semplici	$1\,000.01$	$1\,000$

Sconto commerciale

Fattore di sconto, per un'operazione di anticipazione di durata t:
$v(t) = 1 - dt$. Parametro d: tasso di sconto

Fattore di montante (detto degli interessi – semplici – anticipati):
$f(t) = \frac{1}{v(t)} = \dfrac{1}{1 - dt}$, definito per $0 \leqslant t < \frac{1}{d}$.





Applicazioni: contratti di finanziamento di breve durata, sconto di cambiali.

Nota. Da $\begin{matrix} M = C(1+i) \\ C = M(1-d) \end{matrix}$ si trova $1 - d = \frac{1}{1+i}$, cioè $\boxed{d = \dfrac{i}{1+i}}$ (equivalenti).

Per esempio: $i = 25\% \sim d = 20\%$.

Problema 11 *Una cambiale di valore nominale $1\,000$, scadenza tra 3 mesi, è ceduta all'incasso. Calcolare il prezzo (di riscatto) con legge dello sconto commerciale, tasso annuo di sconto $\frac{10}{1.1}$%. Ripetere, supponendo che la cambiale abbia scadenza tra 1 anno e tra 2 anni. Confrontare con i risultati dei Problemi 7 e 9.*

$A = 1\,000(1 - dt)$ NB: $\frac{0.1}{1.1} = \frac{i}{1+i}$, equivalente a $i = 10\%$.

Tra 3 mesi: $$A = 1\,000 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{0.1}{1.1}\right) = 1\,000 \cdot \frac{4.3}{4.4} \simeq 977.27$$

(> 976.45)

ancora **meno** interessi che con l'esponenziale

Tra 1 anno: $$A = 1\,000 \cdot \left(1 - 1 \cdot \frac{0.1}{1.1}\right) = 1\,000 \cdot \frac{1}{1.1} \simeq 909.09$$

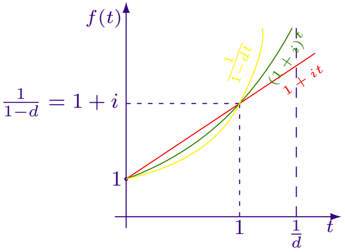
uguale agli interessi semplici e composti (equivalente!)

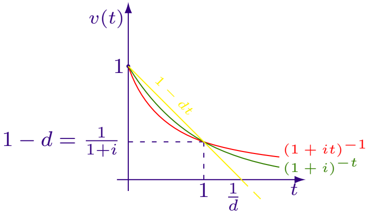
Tra 2 anni: $$A = 1\,000 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{0.1}{1.1}\right) = 1\,000 \cdot \frac{0.9}{1.1} \simeq 818.18 \qquad (< 826.45)$$

ancora **più** interessi che con l'esponenziale

Confronto leggi "usuali"

$$d = \frac{i}{1+i}, \quad i = \frac{d}{1-d}$$





Se $t < 1$: $\dfrac{1}{1-dt} < (1+i)^t < \boxed{1+it}$

$\boxed{1-dt} > (1+i)^{-t} > \dfrac{1}{1+it}$

miglior investimento

miglior attualizzazione

Se $t > 1$: $1+it < (1+i)^t < \boxed{\dfrac{1}{1-dt}}$

$\boxed{\dfrac{1}{1+it}} > (1+i)^{-t} > 1-dt$

... ma non capita mai...

Tasso d'interesse e tasso di sconto

Riferimento a un'operazione di durata 1 anno

Tasso d'interesse: interesse dell'anno, per euro investito

$$i = \frac{W(1) - W(0)}{W(0)}$$

Tasso di sconto: interesse dell'anno, per euro a fine anno

$$d = \frac{W(1) - W(0)}{W(1)} = \frac{W(1) - W(0)}{W(0)} \cdot \frac{W(0)}{W(1)} = i \cdot v$$

Dunque: tasso di sconto $=$ tasso di interesse **anticipato**

Contratti con clausola di capitalizzazione degli interessi

Adottata per contratti con durata non prefissata o con possibilità di risoluzione del contratto. Tipica dei c/c

ANATOCISMO
($\tau\omega\chi\iota\sigma\mu\grave{o}\varsigma =$ usura)

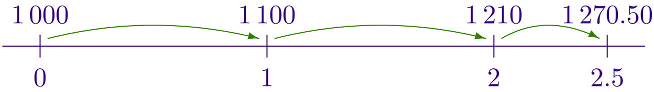
Capitalizzazione degli interessi

Si fissa un periodo di riferimento (l'anno, il semestre, il trimestre, ecc.)

All'interno di ciascun periodo si calcolano gli **interessi semplici** relativamente a tale periodo

Nel periodo successivo, il capitale in relazione al quale sono calcolati gli interessi (semplici) include anche gli interessi maturati in precedenza (gli interessi sono "**capitalizzati**")

Esempio *Si investono* $1\,000$ *euro e si pattuisce la capitalizzazione degli interessi al termine di ogni anno. Calcolare il montante dopo* 2.5 *anni al tasso annuo d'interesse del* 10%.



$$W(0) = 1\,000$$

$$W(1) = 1\,000 \cdot (1 + 0.1) = 1\,100$$

$$W(2) = 1\,100 \cdot (1 + 0.1) = 1\,210$$

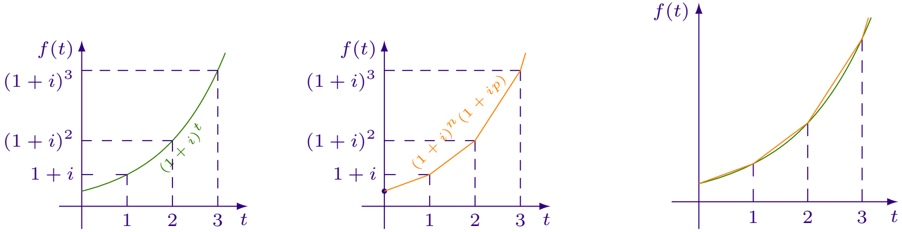
$$\begin{aligned} W(2.5) &= 1\,210 \cdot (1 + 0.1 \cdot 0.5) = 1\,210 \cdot 1.05 = 1\,270.50 \\ &= 1\,000 \cdot \boxed{1.1^2 \cdot (1 + 0.1 \cdot 0.5)} \end{aligned}$$

fattore di montante a interessi semplici con clausola di ricapitalizzazione degli interessi

(o a interessi composti con convenzione lineare)

Fattore di montante

- periodo di riferimento: anno
- durata dell'operazione: $t = n + p$ anni, con n numero intero di anni e p frazione d'anno (es.: $t = 2.5 \rightarrow n = 2, p = 0.5$)
- fattore di montante a **interessi composti con convenzione lineare**: $f(n+p) = (1+i)^n\ (1+ip)$
- spesso approssimato con il fattore di montante a **interessi composti con convenzione esponenziale** (o **fattore di montante esponenziale**): $f(t) = (1+i)^t$



La convenzione lineare ha rilievo nella valutazione di c/c. Nel seguito: **convenzione esponenziale** (salva indicazione diversa)

Problema 12 *Si depositano $10\,000$ euro a interessi composti, tasso 8% annuo, capitalizzazione degli interessi alla fine dell'anno. Calcolare il montante dopo 9 mesi e dopo 1.5 anni in base alla convenzione esponenziale e alla convenzione lineare.*

$S = 10\,000$, $i = 0.08$ annuo

1. $t = \frac{9}{12}$: $\quad n = 0$, $p = \frac{9}{12}$

   CE: $W\left(\frac{9}{12}\right) = 10\,000(1+0.08)^{9/12} \simeq 10\,594.19$

   CL: $W\left(\frac{9}{12}\right) = 10\,000\left(1+0.08\cdot\frac{9}{12}\right) = 10\,600$

2. $t = 1.5$: $\quad n = 1$, $p = 0.5$

   CE: $W(1.5) = 10\,000(1+0.08)^{1.5} \simeq 11\,223.69$

   CL: $$\begin{aligned} W(1.5) &= 10\,000\cdot 1.08\cdot(1+0.08\cdot 0.5) \\ &= 10\,000\cdot 1.08\cdot 1.04 = 11\,232 \end{aligned}$$

Tassi equivalenti

Confronto tra operazioni relative a intervalli temporali diversi $\Rightarrow$ i relativi tassi d'interesse non sono necessariamente confrontabili

Esempio.

- Operazione A: $\{-1, 1.01\}/\{0.5, 0.75\}$

  $\Rightarrow$ tasso d'interesse $i_{\mathsf{A}} = \dfrac{0.01}{1} = 1\%$ **trimestrale**

- Operazione B: $\{-100, 102\}/\{0.2, 0.7\}$

  $\Rightarrow$ tasso d'interesse $i_{\mathsf{B}} = \dfrac{2}{100} = 2\%$ **semestrale**

Obiettivo: rendere confrontabili i tassi trasformandoli in tassi relativi alla stessa unità temporale (es.: anno)

Legge di riferimento: **esponenziale** $\quad f(t) = (1+i)^t$

Operazione di durata **un anno**

- tempo in anni $\longrightarrow$ durata: $t = 1$

  tasso (annuo): i

  funzione valore: $W(1) = 1 + i$

- tempo in semestri $\longrightarrow$
  durata: $t' = 2$
  tasso (semestrale): i_2 (2 semestri in un anno)
  funzione valore: $W'(2) = (1 + i_2)^2$
- condizione di equivalenza: $W(1) = W'(2) \Rightarrow 1 + i = (1 + i_2)^2$

  $\Rightarrow$ tasso annuo equivalente al tasso semestrale: $i = (1 + i_2)^2 - 1$

  $\Rightarrow$ tasso semestrale equivalente al tasso annuo: $i_2 = (1 + i)^{1/2} - 1$

In generale:

$$k = \begin{cases} 2 & \text{semestri} \\ 4 & \text{trimestri} \\ 12 & \text{mesi...} \end{cases}$$

- tasso annuo: i
- tasso periodale: i_k (k periodi nell'anno)
- condizione di equivalenza: $(1 + i) = (1 + i_k)^k$

  $\Rightarrow$ $i = (1 + i_k)^k - 1$

  $\Rightarrow$ $i_k = (1 + i)^{1/k} - 1$

Per un periodo di t anni $= tk$ periodi:
$(1 + i)^t = (1 + i_k)^{tk} \Leftrightarrow (1 + i) = (1 + i_k)^k$

Nell'esempio:

op. A:	$i_A = i_4 = 0.01$	$i = (1 + i_4)^4 - 1 = 0.04064$
op. B:	$i_B = i_2 = 0.02$	$i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0.0404$

Legge lineare (per t anni $= tk$ periodi)

- su base annua: $W(t) = W(0)(1 + it)$
- su base periodale: $W'(t') = W(0)(1 + i_k t') = W(0)(1 + i_k \cdot tk)$

Equivalenza: $1 + it = 1 + i_k tk$

- tasso annuo equivalente al tasso periodale: $i = i_k \cdot k$
- tasso periodale equivalente al tasso annuo: $i_k = i/k$

Legge esponenziale: tasso annuo nominale, tasso annuo effettivo

Se il tempo è misurato in frazioni d'anno (k periodi nell'anno),

- $i = (1 + i_k)^k - 1$: tasso annuo effettivo (TAE) $\longrightarrow$ legge exp.
- $j_k = k \times i_k$: tasso annuo nominale (TAN), convertibile k volte nell'anno $\longrightarrow$ approx lin.

Problema 13 *Dato il tasso annuo effettivo d'interesse $i = 10\%$ (legge esponenziale), calcolare i tassi semestrale, trimestrale e mensile a esso equivalenti e i corrispondenti tassi annui nominali.*

$$i_2 = 1.1^{1/2} - 1 \simeq 4.8809\% \qquad j_2 = 2 \cdot i_2 \simeq 9.7618\%$$
$$i_4 = 1.1^{1/4} - 1 \simeq 2.4114\% \qquad j_4 = 4 \cdot i_4 \simeq 9.6455\%$$
$$i_{12} = 1.1^{1/12} - 1 \simeq 0.7974\% \qquad j_{12} = 12 \cdot i_{12} \simeq 9.5688\%$$

Nota. Il TAE è comunque il 10%

Tasso d'interesse reale

o deflazionato

Operazione $\{-S, X\}/\{0, 1\}$

Problema: il potere d'acquisto di 1 euro varia nel corso dell'anno

$p(t)$: indice dei prezzi $\Rightarrow$ tasso d'inflazione nell'anno: $f = \dfrac{p(1)}{p(0)} - 1$

potere di acquisto di 1 euro a fine anno: $1/(1+f)$

potere di acquisto di X euro a fine anno: $X/(1+f)$

Su base nominale: $X = S(1+i)$, con i tasso d'interesse nominale

Tenuto conto del potere d'acquisto: $$\frac{S(1+i)}{1+f} = \frac{X}{1+f} = S(1+i^*)$$

Fattore di montante reale: $$1+i^* = \frac{1+i}{1+f}$$

Tasso d'interesse reale: $$i^* = \frac{1+i}{1+f} - 1 = \frac{i-f}{1+f}$$

Nota. All'inizio dell'anno i può essere garantito, mentre i^* non è noto, non essendo noto f. $i = 5\%$, $f = 2\%$: $i^* = \frac{0.03}{1.02} = 2.941\%$. Ma se $f = 0.03$: $i^* = \dfrac{0.02}{1.03} = 1.941\%$.

Tasso d'interesse in valuta estera

es.: USD, $\$$, vs. EUR, €

Operazione in valuta estera: $\{-S^*, X^*\}/\{0,1\}$

L'importo X^* è fissato: $X^* = S^*(1+i^*)$ con i^* tasso in $\$$

$p(t)$: tasso di cambio (all'epoca t: 1 euro $= p(t)$ unità di valuta estera)

Equivalente in euro dei flussi dell'operazione:

- $S = S^*/p(0)$
- $X = X^*/p(1)$

$X = S(1+i)$ con i tasso in €

X può essere espresso alternativamente come:

$$\frac{X^*}{p(1)} = \frac{S^*}{p(0)} \cdot (1+i) \qquad \longrightarrow \qquad S^*(1+i^*) = X^* = S^* \cdot \frac{p(1)}{p(0)} \cdot (1+i)$$

Relazione tra "montanti":

$$1 + i^* = \frac{p(1)}{p(0)} \cdot (1+i) \qquad \longrightarrow \qquad i = \frac{p(0)}{p(1)}\,(1+i^*) - 1$$

con $\frac{p(0)}{p(1)}$ non noto $\Rightarrow$ i aleatorio, a causa del rischio di cambio

Intensità istantanea (*short rate*)

Riferimento: investimento di durata un anno, legge esponenziale

A parità di tasso annuo nominale, una maggior frequenza di capitalizzazione degli interessi determina una più forte formazione di interessi

N.B.: nominale $\rightsquigarrow$ lineare!

Esempio: tasso annuo (nominale) 5%; fattore di montante in ipotesi di capitalizzazione degli interessi su base:

annuale:	$i = i_1 = j_1 = 0.05$		$\rightarrow \quad f = 1.05$
semestrale:	$j_2 = 0.05$	$\rightarrow \quad i_2 = 0.025$	$\rightarrow \quad f = 1.025^2 = 1.050625$
trimestrale:	$j_4 = 0.05$	$\rightarrow \quad i_4 = 0.0125$	$\rightarrow \quad f = 1.0125^4 = 1.050945$
mensile:	$j_{12} = 0.05$	$\rightarrow \quad i_{12} = \dfrac{0.05}{12}$	$\rightarrow \quad f = \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} \simeq 1.051162$
giornaliera:	$j_{365} = 0.05$	$\rightarrow \quad i_{365} = \dfrac{0.05}{365}$	$\rightarrow \quad f = \left(1 + \frac{0.05}{365}\right)^{365} \simeq 1.051267$

Si dimostra che

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{\delta}{k}\right)^k = \mathrm{e}^\delta$$

Nell'esempio, $\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{0.05}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{0.05} \simeq 1.051271$.

Il parametro δ rappresenta il tasso annuo nominale in un regime di capitalizzazione istantanea degli interessi $\Rightarrow$ **intensità istantanea d'interesse** "$\delta = j_\infty$"

Tasso annuo i equivalente all'intensità istantanea d'interesse δ:

$$\mathrm{e}^\delta = \text{fattore di montante per un anno} = 1+i$$

$1+i=\mathrm{e}^\delta$:

$$i = \mathrm{e}^\delta - 1$$
$$\delta = \log(1+i)$$

Per esempio, $\delta = 0.05 \ \rightarrow\ i \simeq 0.051271$; $\quad i = 0.05 \ \rightarrow\ \delta \simeq 0.048790$.

Legge esponenziale con parametro il tasso e con parametro l'intensità istantanea

$t = 1$: $\quad f(t) = 1 + i = \mathrm{e}^{\delta}$

t qualunque: $\quad f(t) = (1 + i)^t = \boxed{\mathrm{e}^{\delta t}}$

fattore di montante a interessi composti con parametro l'intensità istantanea

Doppio vantaggio: è esponenziale (vedremo), ma parametro e tempo si moltiplicano direttamente (conversione!)

In generale, data la funzione valore $W(t)$, se $W(t)$ è derivabile, si definisce **intensità istantanea** (d'interesse o di sconto) la quantità

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta W(t)}{h \times W(t)} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta W(t)}{h \times W(t+h)} \\ &= \frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log W(t)\end{aligned}$$

Per esempio:

- $W(t) = W(0)(1+it)$ (legge lineare): $\delta(t) = \dfrac{W(0)\cdot i}{W(0)(1+it)} = \dfrac{i}{1+it}$
- $W(t) = W(0)(1+i)^t$ (legge esponenziale):

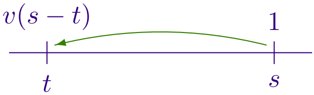
$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log W(0) + t\log(1+i)) = \log(1+i) = \delta$$

Da ciò discende la seguente espressione alternativa per la funzione $W(t)$ nota la funzione $\delta(t)$:

$$W(t) = W(0)\, e^{\int_0^t \delta(s)\, ds}$$

Nel caso della funzione $W(t) = (1+i)^t$, l'intensità istantanea d'interesse è costante, pari a $\delta = \ln(1+i)$, e pertanto $W(t) = e^{\delta t}$

Scindibilità delle leggi finanziarie

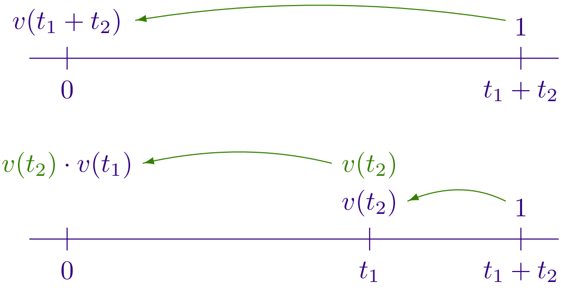


Definizione: data la legge finanziaria $v(t)$, comunque assegnati t_1, t_2, se

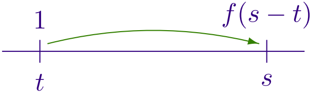
$$v(t_1 + t_2) = v(t_1) \cdot v(t_2)$$

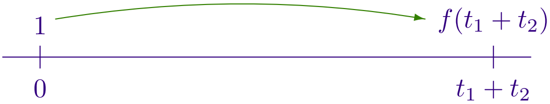
allora la legge $v(t)$ è **scindibile**

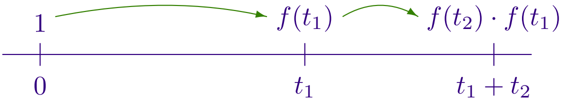
Interpretazione



La scindibilità può essere esaminata anche in termini di fattore di montante $f(t)$.







La condizione in termini di fattore di montante è

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) \cdot f(t_2)$$

"Invariante per ricapitalizzazione"

Verifica della scindibilità per la **legge lineare** (in termini di fattore di montante $f(t)$) $\quad f(t) = 1 + it$

$$f(t_1 + t_2) = 1 + i(t_1 + t_2) = 1 + it_1 + it_2$$

$$f(t_1)f(t_2) = (1 + it_1)(1 + it_2) = 1 + it_1 + it_2 + \underline{i^2 t_1 t_2}_{\substack{\vee \\ 0}}$$

$\longrightarrow$ non scindibile

Motivo: si capitalizzano gli interessi (se si interrompe!)

Verifica per la **legge esponenziale** $\quad f(t) = (1 + i)^t$

$$f(t_1 + t_2) = (1 + i)^{t_1 + t_2}$$

$$f(t_1)f(t_2) = (1 + i)^{t_1} \cdot (1 + i)^{t_2} = (1 + i)^{t_1 + t_2}$$

$\longrightarrow$ scindibile

Vantaggio derivante dall'impiego di leggi scindibili:

- semplificazione di calcolo (v. calcolo valori attuali e montanti di rendite)
- condizione di efficienza del mercato (v. arbitraggio)

Esempio: valore tra 2 anni di $1\,000$ disponibili tra 3 anni $(i = 5\%)$

exp: $W(2) = 1\,000 \cdot (1+i)^{-1} \simeq 952.38$

lin: $W(2) = 1\,000 \cdot \dfrac{1}{1+i} \simeq 952.38$

exp:
$$\begin{aligned} W(2) &= W(0) \cdot (1+i)^2 = 1\,000 \cdot (1+i)^{-3} \cdot (1+i)^2 \\ &= 1\,000 \cdot (1+i)^{-1} \simeq 952.38 \end{aligned}$$

lin:
$$\begin{aligned} W(2) &= W(0) \cdot (1+2i) = 1\,000 \cdot \frac{1}{1+3i} \cdot (1+2i) \\ &= 1\,000 \cdot \frac{1+2i}{1+3i} \simeq 956.52 \neq 952.38 \end{aligned}$$

N.B.: la legge exp è l'**unica** scindibile a una variabile. In generale, dev'essere $f(s,t) = \dfrac{f(t)}{f(s)}$ ("montante di proseguimento") e, se derivabile, $= \mathrm{e}^{\int_s^t \delta(x)\,\mathrm{d}x}$.

Arbitraggio

Strategia d'investimento che garantisce un flusso positivo senza generare o richiedere flussi negativi (*free lunch*, guadagno certo)

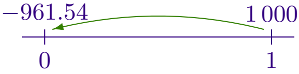
(*strategia d'investimento*: insieme di azioni di acquisto e vendita)

Molte **valutazioni finanziarie** sono basate sull'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio

Esempio (banale) di arbitraggio

Operazione 1: acquisto di uno ZCB di v.n. $1\,000$, scadenza tra 1 anno, rendimento alla scadenza (cioè tasso d'interesse) 4%

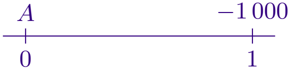
$$W(0) = \frac{1\,000}{1.04} \simeq 961.54$$



(posizione "long")

Operazione 2: operazione “pronti contro termine”. A fronte del pagamento di $1\,000$ tra un anno, oggi si riceve un’anticipazione A

(posizione “short”)



Strategia d’investimento: op. 1 + op. 2

- se $A > 961.54 \Rightarrow$ guadagno immediato certo
- se $A < 961.54 \Rightarrow$ perdita (guadagno per la controparte)
- se $A = 961.54 \Rightarrow$ condizione di equilibrio

Di fatto, si verificano opportunità di arbitraggio se titoli con gli **stessi flussi** futuri hanno **prezzi diversi**

Conseguenza: operazione 1 e 2 devono essere regolate dalla stessa funzione valore $W(t)$ stessi flussi futuri: $\{1\,000\}/\{1\}$

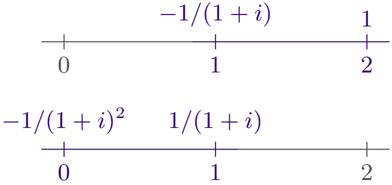
Opportunità di arbitraggio in presenza di leggi non scindibili

Legge lineare: $v(t) = (1 + it)^{-1}$

Op. 1: vendita all'epoca $t_0 = 0$ di uno ZCB con scad. $t_2 = 2$ e v.n. 1

Op. 2:

- acquisto all'epoca $t_1 = 1$ di uno ZCB di v.n. 1 e scad. $t_2 = 2$
- acquisto all'epoca $t_0 = 0$ di uno ZCB di v.n. $v(1) = \frac{1}{1+i}$ e scad. $t_1 = 1$



Saldo:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{1+2i} - \frac{1}{(1+i)^2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{1+2i} - \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{(1+2i+i^2)-(1+2i)}{(1+2i)(1+i)^2} = \frac{1}{(1+2i)(1+i)^2} > 0.$$

Per sfruttare l'opportunità di arbitraggio, sono necessarie alcune condizioni:

- assenza di rischio di default
- possibilità di vendite allo scoperto
- assenza di oneri accessori
- invarianza del parametro della legge finanziaria
  (prezzo op. a termine fissato oggi)

Leggi non scindibili: usualmente per contratti di breve durata, in cui non sono ammesse alterazioni (es: scadenza fissata, non necessariamente rinnovabili alle stesse condizioni, ...)

Problema 14 *In un mercato finanziario, il prezzo degli ZCB è calcolato con la legge finanziaria degli interessi semplici, tasso annuo d'interesse 2%. Ipotizzando l'assenza di rischio di default, la possibilità di vendite allo scoperto, l'assenza di oneri accessori e la possibilità di acquistare gli ZCB in qualunque taglio, verificare che è possibile realizzare un arbitraggio non rischioso con uno ZCB con scadenza 3 anni, uno ZCB con scadenza 2 anni e uno ZCB con scadenza 1 anno.*

Prezzi degli ZCB $\equiv$ fattori di sconto:

$$v(1) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.02} \simeq 0.980\,392$$

$$v(2) = \frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1.04} \simeq 0.961\,538$$

$$v(3) = \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{1.06} \simeq 0.943\,396$$

Condizione di scindibilità:

$$v(1) \cdot v(2) \simeq 0.942\,685 \neq v(3)$$

Strategia di arbitraggio:

- vendo ZCB (0,3):

importo	$0.943\,396$	-1
t	0	3

- compro ZCB (1,3):

importo		$-0.961\,538$	1
t	0	1	3

- compro $0.961\,538$ unità di ZCB (0,1):

importo	$-0.942\,685$	$0.961\,538$	
t	0	1	3

■ saldo:

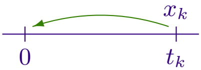
importo	$0.000\,711$	0	0
t	0	1	3

1. provare “interrompendo” in 2 invece che in 1;
2. provare con la legge esponenziale: il fenomeno scompare

Valore di un'operazione finanziaria (con legge esponenziale)

Operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, con $t_1 \geq 0$

Legge finanziaria: $f(t) = (1+i)^t = e^{\delta t}$



Valore all'epoca 0 del flusso x_k: $W(0; x_k) = x_k \cdot (1+i)^{-t_k}$

…chi decide i?

Valore attuale dell'operazione finanziaria all'epoca 0:

$$W(0; \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} W(0; x_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-t_k} =: G(i) \ (=: DCF(i)).$$

Poiché i flussi x_k possono essere sia in entrata sia in uscita, $W(0; \mathbf{x})$ è detto **VALORE ATTUALE NETTO** (**VAN**) dell'operazione finanziaria (o **NET PRESENT VALUE** – **NPV** – o **DISCOUNTED CASH FLOW** – **DCF**)

Valore dell'operazione a un istante $t > 0$:

$$\begin{aligned} W(t; \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{t-t_k} = (1+i)^t \cdot \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-t_k} = \\ &= W(0; \mathbf{x}) \cdot (1+i)^t \end{aligned}$$

… scindibilità!

Se $W(t; \mathbf{x}) = 0$, l'operazione è detta **equa** al tempo t

Esempio Operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-98, 5, 5, 105\}/\{0, 1, 2, 3\}$

-98	5	5	105
0	1	2	3

$$\begin{aligned} W(0;\mathbf{x}) &= -98 + 5(1+i)^{-1} + 5(1+i)^{-2} + 105(1+i)^{-3} \\ W(2;\mathbf{x}) &= -98(1+i)^{2} + 5(1+i) + 5 + 105(1+i)^{-1} = \\ &= W(0;\mathbf{x}) \cdot (1+i)^2 \end{aligned}$$

NB: $W(2;\mathbf{x}) = \underbrace{-98(1+i)^2 + 5(1+i) + 5}_{\substack{\text{montante flussi passati} \\ \text{(“reinvestimenti”)}}} + \underbrace{105(1+i)^{-1}}_{\substack{\text{prezzo “equo” flussi} \\ \text{futuri (“disinvestimenti”)}}}$

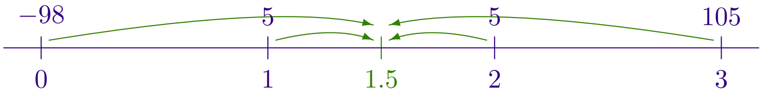
In generale,

$$W(t;\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{k:t_k \leqslant t} x_k (1+i)^{t-t_k}}_{\substack{M(t;\mathbf{x}) \\ \text{montante / reinvest.}}} + \underbrace{\sum_{k:t_k > t} x_k (1+i)^{-(t_k - t)}}_{\substack{V(t;\mathbf{x}) \\ \text{prezzo / disinvest.}}}$$

Ci sono rischi associati sia ai reinvestimenti, sia ai disinvestimenti: **rischio di tasso** (v. più avanti)

Problema 15 *Considerare l'operazione di investimento* $\{-98, 5, 5, 105\}/\{0, 1, 2, 3\}$. *Impiegare la legge dell'interesse composto.*

1. *Fissare* $i = 3\%$*: calcolare il valore dell'investimento all'epoca* 1.5 *e scomporlo in valore dei reinvestimenti e valore dei disinvestimenti.*
2. *Ripetere, fissando* $i = 4\%$.
3. *Ripetere, fissando* $i = 2\%$.



$$W(1.5, \mathbf{x}; i) = \underbrace{-98(1+i)^{1.5} + 5(1+i)^{0.5}}_{\text{reinvestimenti}} + \underbrace{5(1+i)^{-0.5} + 105(1+i)^{-1.5}}_{\text{disinvestimenti}}$$

$$W(1.5, \mathbf{x}; i) = \underbrace{-98(1+i)^{1.5} + 5(1+i)^{0.5}}_{\text{reinvestimenti}} + \underbrace{5(1+i)^{-0.5} + 105(1+i)^{-1.5}}_{\text{disinvestimenti}}$$

1. $$\begin{aligned} W(1.5; \mathbf{x}; 0.03) &= -98 \cdot 1.03^{1.5} + 5 \cdot 1.03^{0.5} + 5 \cdot 1.03^{-0.5} + 105 \cdot 1.03^{-1.5} \simeq \\ &\simeq -102.4429 + \underline{5.0744} + \underline{4.9266 + 100.4462} = \\ &= -102.4429 + \underline{5.0744} + \underline{105.3728} \qquad = 8.0044 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} W(1.5; \mathbf{x}; 0.04) &= -98 \cdot 1.04^{1.5} + 5 \cdot 1.04^{0.5} + 5 \cdot 1.04^{-0.5} + 105 \cdot 1.04^{-1.5} \simeq \\ &\simeq -103.9384 + \underline{5.0990} + \underline{4.9029 + 99.0009} = \\ &= -103.9384 + \underline{5.0990} + \underline{103.9038} \qquad = 5.0644 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} W(1.5; \mathbf{x}; 0.02) &= -98 \cdot 1.02^{1.5} + 5 \cdot 1.02^{0.5} + 5 \cdot 1.02^{-0.5} + 105 \cdot 1.02^{-1.5} \simeq \\ &\simeq -100.9547 + \underline{5.0498} + \underline{4.9507 + 101.9270} = \\ &= -100.9547 + \underline{5.0498} + \underline{106.8777} \qquad = 10.9728 \end{aligned}$$

Si nota che, se i aumenta: **guadagno** sui reinvestimenti, **perdo** sui disinvestimenti (e viceversa se i diminuisce)

Definizioni e convenzioni

Rendita: sequenza di pagamenti (detti **RATE**) in entrata (o in uscita), il cui prezzo è corrisposto entro il primo pagamento (se è corrisposto)

Notazione: flusso delle rate $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ o anche $\mathbf{r} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}/\{1, 2, \ldots, m\}$ (equidistanti)

Nel seguito:

- istante di stipulazione del contratto: epoca 0
- data di inizio della rendita: $t_0 \geqslant 0$
- rendite annue: tempo espresso in anni e $t_2 = t_1 + 1$, $t_3 = t_2 + 1 = t_1 + 2$, $\ldots$, $t_m = t_1 + (m-1)$ (NB: può essere $t_1 \neq t_0$)
- durata: numero di rate $= m$
- **legge esponenziale**: $f(t) = (1+i)^t$, $v(t) = (1+i)^{-t}$

Terminologia

- Rendite **immediate**: $t_0 = 0$

  Rendite **differite**: $t_0 = n$

- Rendite **anticipate**: $t_1 = t_0$

  Rendite **posticipate**: $t_1 = t_0 + 1$

- Rendite **temporanee**: m finito

  Rendite **perpetue**: m non fissato (cioè infinito)

  esempi di rendite perpetue: titoli obbligazionari irredimibili, dividendi di un’azienda, rendita catastale

Nel seguito, formule semplificate di valutazione di rendite a rata costante

Valore attuale di una rendita a rata costante

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{m-1} = \frac{1-q^m}{1-q}$$

Rate: $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = R$

Rendita posticipata, immediata: $t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ \ldots,\ t_m = m$

$*$	R	R		R	R
0	1	2	$\cdots$	$m-1$	m

$$q = (1+i)^{-1}$$

$$\begin{aligned} W(0;\mathbf{r}) &= R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-m} \\ &= R(1+i)^{-1}\left[1 + (1+i)^{-1} + \cdots + (1+i)^{-(m-1)}\right] \\ &= R(1+i)^{-1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-m}}{1-(1+i)^{-1}} = R \cdot \boxed{\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}} =: R \cdot a_{\overline{m}|i} \end{aligned}$$

- $\boxed{a_{\overline{m}|i}} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{i}$
- lettura: a (posticipato) **figurato** m al tasso i
- significato: valore attuale di una rendita di rata unitaria calcolato un anno prima del primo versamento

Se la **rendita** (posticipata) è **perpetua**

$$W(0;\mathbf{r}) = R \cdot \lim_{m\to+\infty} a_{\overline{m}|\,i} = R \cdot \lim_{m\to+\infty} \frac{1-(1+i)^m}{i}$$
$$= R \cdot \boxed{\frac{1}{i}} =: R \cdot a_{\overline{\infty}|\,i}$$

- $\boxed{a_{\overline{\infty}|\,i}} = \frac{1}{i}$: valore attuale di una rendita perpetua di rata unitaria calcolato un anno prima del primo versamento

Rendita anticipata, immediata: $t_1 = t_0 = 0, \ldots, t_m = m-1$

$Ra_{\overline{m}|\,i}$	R	R	R		R	
-1	0	1	2	$\cdots$	$m-1$	m

$$
\begin{aligned}
W(0;\mathbf{r}) &= R + R(1+i)^{-1} + \cdots + R(1+i)^{-(m-1)} \\
&= R\big[1 + (1+i)^{-1} + \cdots + (1+i)^{-(m-1)}\big] \\
&= R \cdot \boxed{\frac{1-(1+i)^{-m}}{1-(1+i)^{-1}}} =: R \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|\,i}
\end{aligned}
$$

scindibilità!

- $\boxed{\ddot{a}_{\overline{m}|\,i}} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{1-(1+i)^{-1}}$

N.B.: $\boxed{\ddot{a}_{\overline{m}|\,i} = a_{\overline{m}|\,i} \cdot (1+i)}$

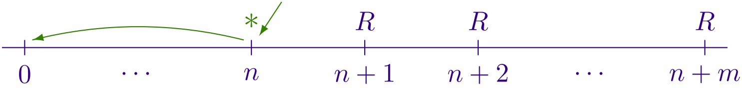
- lettura: a **anticipato** figurato m al tasso i
- significato: valore attuale di una rendita di rata unitaria calcolato all'atto del primo versamento

Se la **rendita anticipata** è **perpetua**

$$
W(0;\mathbf{r}) = R \cdot \lim_{m\to+\infty} \ddot{a}_{\overline{m}|\,i} = R \cdot \frac{1}{1-(1+i)^{-1}} = R \cdot \frac{1+i}{i} = R \cdot \boxed{\frac{1}{d}}
$$

- $\boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty}|\,i}} = \frac{1}{d}$: valore attuale di una rendita perpetua di rata unitaria calcolato all'atto del primo versamento

Rendita (posticipata) **differita** n **anni**: $t_0 = n$, $t_1 = n+1$, $\ldots$



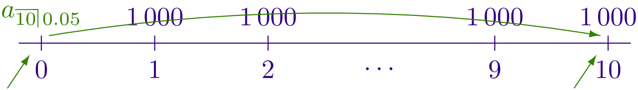
$$W(0, \mathbf{r}) = (1+i)^{-n} \cdot R \cdot a_{\overline{m}|i}$$

(provate con la legge lineare...)

Rendite frazionate

- unità temporale: frazione d'anno
- stesse formule di prima, ma con durata pari al numero delle rate e tasso periodale

Problema 16 *Data una rendita annua con* 10 *rate, ciascuna di* $1\,000$*, la prima all'epoca* 1*, calcolarne il valore attuale all'epoca* 0 *e il montante all'epoca* 10*, tasso annuo d'interesse* 5%*.*



$$W(0) = R \cdot a_{\overline{m}|i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^m}{i} = 1\,000 \cdot \frac{1-1.05^{-10}}{0.05} \simeq 7\,721.73$$

$$W(10) = W(0) \cdot (1+i)^{10} \simeq 12\,577.89$$

Nota. $R(1+i)^9 + R(1+i)^8 + \cdots + R(1+i) + R \simeq 12\,577.89$!

Per casa. Con gli altri regimi, non funziona:

$$d = \frac{1}{1+i} \simeq 4.7619\%$$

legge	$\sum$ val.att.	$\sum$ montanti	mont. vv.aa.
lineare	$7\,944.95$	$12\,250.0$	$11\,917.42$
sc.comm.*	$7\,380.95$	$13\,135.11$	$14\,090.91$

Problema 17 *Data una rendita di durata 10 anni, rate semestrali posticipate, ciascuna di $1\,000$, calcolarne il valore attuale all'epoca 0 e all'atto del primo versamento, tasso annuo (effettivo) d'interesse 5%.*

Rendita: $R = 1\,000$; $(1+i_2)^2 = 1+i \;\Rightarrow\; i_2 = (1+i)^{1/2} - 1 \simeq 2.4695\%$; $m = 20$.

	$1\,000$	$1\,000$		$1\,000$	$1\,000$	
0	1	2	$\cdots$	19	20	(semestri)

$$W(0) = R \cdot a_{\overline{m}|i} = R \cdot \frac{1-(1+i_2)^{-m}}{i_2} =$$
$$= 1\,000 \cdot \frac{1 - 1.024695^{-20}}{0.024695} \simeq 15\,634.16$$

Nota: $1.024695^{-20} =$
$= (1.05^{-1/2})^{-20} =$
$= 1.05^{-10}$

$$W(1) = R \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|i} = W(0) \cdot (1+i_2) \simeq 16\,020.25$$

- e se fosse stato **nominale**? Ancora più facile: $i_2 = i : 2 = 2.5\%$!

Applicazione: **analisi fondamentale**

Ipotesi del modello: il valore di un'impresa (o delle sue azioni) è pari al valore attuale dei dividendi futuri

Caso 1: dividendi $r_1, r_2, \ldots$ tra $1, 2, \ldots$ anni

$$W(0) = r_1(1+i)^{-1} + r_2(1+i)^{-2} + \cdots$$

Caso 2: dividendi costanti r alla fine di ogni anno

$$W(0) = r \cdot a_{\overline{\infty|}i} = r \cdot \frac{1}{i}$$

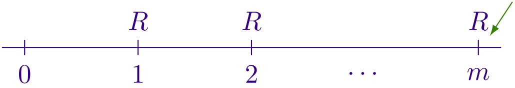
Caso 3: dividendi crescenti a tasso g ($g < i$): r_1, $r_2 = r_1(1+g)$, $r_3 = r_2(1+g) = r_1(1+g)^2, \ldots$

$$\begin{aligned} W(0) &= r_1(1+i)^{-1} + r_1(1+g)(1+i)^{-2} + r_1(1+g)^2(1+i)^{-3} + \cdots = \\ &= r_1(1+i)^{-1} \cdot \left[1 + \frac{1+g}{1+i} + \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^2 + \cdots\right] = \\ &= r_1(1+i)^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+i}} = r_1(1+i)^{-1} \cdot \frac{1+i}{i-g} = \\ &= r_1 \cdot \frac{1}{i-g} \end{aligned}$$

FORMULA DI GORDON

Montante (valore alla scadenza) di una rendita a rata costante

Rendita posticipata



$$W(m;\mathbf{r}) = Ra_{\overline{m|}\,i} \cdot (1+i)^m = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-m}}{i} \cdot (1+i)^m =$$

$$= R \cdot \boxed{\frac{(1+i)^m - 1}{i}} = R \cdot s_{\overline{m|}\,i}$$

- $\boxed{s_{\overline{m|}\,i}} = \frac{(1+i)^m-1}{i}$
- lettura: s (posticipato) figurato m al tasso i
- significato: montante di una rendita di rata unitaria calcolato all'atto dell'ultimo versamento

Rendita anticipata

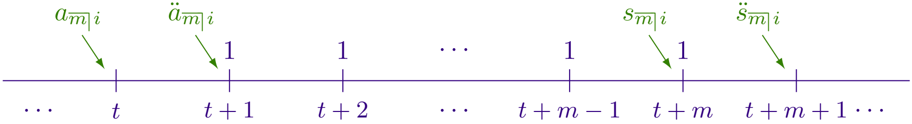
$$W(m;\mathbf{r}) = R s_{\overline{m}|i} \cdot (1+i) = R \cdot \frac{(1+i)^m - 1}{i} \cdot (1+i) =$$

$$= R \cdot \boxed{\frac{(1+i)^{m+1} - (1+i)}{i}} = R \cdot \ddot{s}_{\overline{m}|i}$$

- $\boxed{\ddot{s}_{\overline{m}|i}} = \frac{(1+i)^m - 1}{i}\,(1+i) = \frac{(1+i)^{m+1} - (1+i)}{i}$
- lettura: s anticipato figurato m al tasso i
- significato: montante di una rendita di rata unitaria calcolato un anno dopo l'ultimo versamento

Coefficienti di valutazione delle rendite

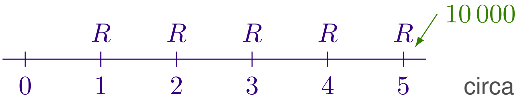
Riferimento: rendita di m **rate**, ciascuna di **importo unitario**, la prima al tempo $t+1$.



$a_{\overline{m}|i}$: epoca precedente al primo versamento
$\ddot{a}_{\overline{m}|i}$: epoca del primo versamento
$s_{\overline{m}|i}$: epoca dell'ultimo versamento
$\ddot{s}_{\overline{m}|i}$: epoca successiva all'ultimo versamento

… e se la prima rata fosse stata all'epoca t? Facile!

Problema 18 *Si intende costituire la somma di* $10\,000$ *euro in* 5 *anni, con versamenti annui posticipati costanti, tasso annuo* 4%*. Determinare l'importo dei versamenti.*



circa $2\,000$!

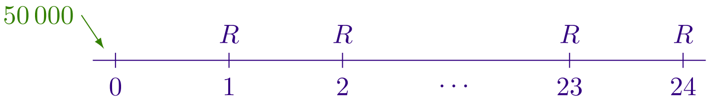
$$R = 1\,000, \quad m = 5, \quad i = 0.04; \qquad s_{\overline{m}|\,i} = \frac{1.04^5 - 1}{0.04} \simeq 5.4163$$

$$10\,000 = R \cdot s_{\overline{m}|\,i} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad R = \frac{10\,000}{s_{\overline{m}|\,i}} = \frac{10\,000 \cdot 0.04}{1.04^5 - 1} \simeq 1\,846.27$$

(v. Problema 16, Lucido 89)

Problema 19 *Si acquista un impianto del costo di* $50\,000$ *euro, corrispondendo* 24 *rate mensili costanti, la prima tra un mese, tasso annuo nominale (convertibile mensilmente)* 14.4%*. Calcolare l'importo dei versamenti.*



circa $2\,000$!

$$m = 24; \qquad j_{12} = 14.4\% \quad \rightarrow \quad i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = 1.2\%$$

$$50\,000 = R \cdot a_{\overline{m}|i_{12}} = R \cdot a_{\overline{24}|0.012} \quad \longrightarrow$$

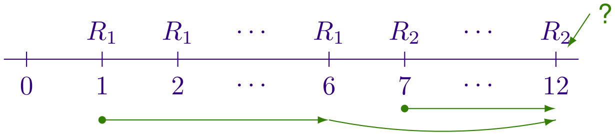
$$\longrightarrow \quad R = \frac{50\,000}{a_{\overline{24}|0.012}} = \frac{50\,000 \cdot 0.012}{1 - 1.012^{-24}} \simeq 2\,410.10$$

Problema 20 *Programma di investimento della durata di 12 anni, versamenti posticipati annuali pari a $2\,500$ euro per i primi 6 anni, $3\,000$ euro successivamente. Calcolare il capitale accumulato alla scadenza:*

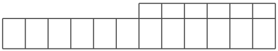
totale: $33\,000$

1. *tasso annuo pari al 5% nel corso dell'intera durata;*
2. *tasso annuo pari al 4.5% nei primi 8 anni, al 5.5% successivamente.*

$R_1 = 2\,500$
$R_2 = 3\,000$

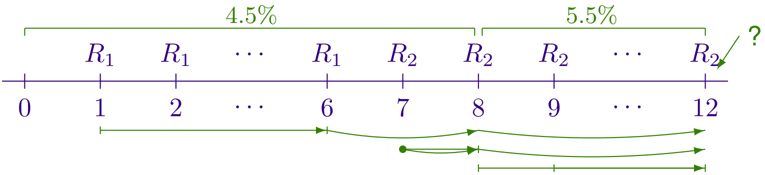


1.
$$W(12) = \begin{cases} R_1 \cdot s_{\overline{6}|0.05} \cdot 1.05^6 + R_2 \cdot s_{\overline{6}|0.05} \\ R_1 \cdot s_{\overline{12}|0.05} + (R_2 - R_1) \cdot s_{\overline{6}|0.05} \end{cases} =$$



$$= \begin{cases} \left(2\,500 \cdot 1.05^6 + 3\,000\right) \cdot \dfrac{1.05^6 - 1}{0.05} \\[2ex] 2\,500 \cdot \dfrac{1.05^{12} - 1}{0.05} + 500 \cdot \dfrac{1.05^6 - 1}{0.05} \end{cases} =$$

$$\simeq 43\,193.77$$

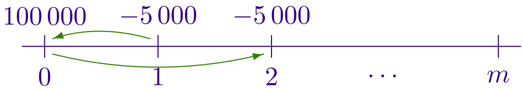


2
$$
\begin{aligned}
W(12) = {} & R_1 \cdot s_{\overline{6}|0.045} \cdot 1.045^2 \cdot 1.055^4 + \\
& + R_2 \cdot s_{\overline{2}|0.045} \cdot 1.055^4 + R_2 \cdot s_{\overline{4}|0.055} = \\
= {} & 43\,343.98
\end{aligned}
$$

N.B.: anche $R_1 \cdot s_{\overline{6}|0.045} \cdot 1.045^2 \cdot 1.055^4 + R_2 \cdot 1.045 \cdot 1.055^4 + R_2 \cdot s_{\overline{5}|0.055}$.

Problema 21 *Si depositano $100\,000$ euro su un c/c bancario, tasso 2% annuo. Si programmano prelevamenti di $5\,000$ euro alla fine di ogni anno. Dopo quanti anni il saldo si azzera? In alternativa, se non si intende esaurire il capitale, quale importo costante si potrà prelevare in ciascun anno?*

W esponenziale!



$$100\,000 = 5\,000 \cdot a_{\overline{m}|i} = \frac{5000}{0.02} \cdot (1 - 1.02^{-m}) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1 - 1.02^{-m} = 0.4 \quad \rightarrow \quad 1.02^{-m} = 0.6 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad m = -\log_{1.02} 0.6 = -\frac{\ln 0.6}{\ln 1.02} \simeq 25.795.$$

Importo residuo epoca 26: $100\,000 \cdot 1.02^{26} - 5\,000 \cdot \ddot{s}_{\overline{25}|0.02} = 3\,978.28$.

Se non si intende esaurire il capitale $\rightarrow$ rendita perpetua

$$100\,000 = R \cdot a_{\overline{\infty}|0.02} \qquad \Rightarrow \qquad R = 100\,000 \cdot 0.02 = 2\,000$$

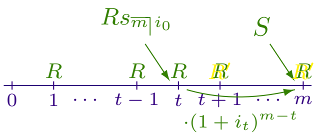
Applicazione della valutazione di rendite:

Piani di risparmio (o costituzione di capitale)

Obiettivo: valutazione dell'importo che si ritiene di poter accumulare (costituire) mediante una sequenza programmata di versamenti

Problema: le condizioni future di investimento non sono note $\Rightarrow$ per stabilire la sequenza di versamenti, si ragiona come se le condizioni correnti d'investimento dovessero conservarsi immutate. Quando cambiano le condizioni d'investimento, si modificano i versamenti (in modo opportuno)

Esempio *Costituzione dell'importo S con m versamenti posticipati.*



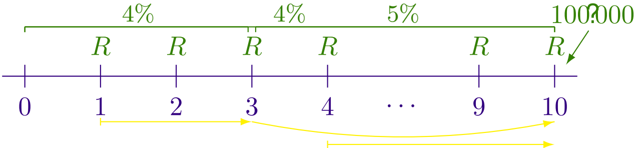
- All'epoca 0 il tasso corrente è i_0:
  - importo dei versamenti: R t.c. $S = Rs_{\overline{m}|i_0}$.
- All'epoca t il tasso cambia e diventa pari a i_t:
  - capitale (fondo) già accumulato: $F_t = Rs_{\overline{t}|i_0}$
  - versamenti futuri (a parità di importo alla scadenza): R' t.c.
    $S = F_t(1+i_t)^{m-t} + R's_{\overline{m-t}|i_t}$

Problema 22 *Si intende costituire la somma di $100\,000$ euro in 10 anni, remunerazione corrente 4% annua, con versamenti annuali posticipati costanti.*

1. *Calcolare l'importo dei versamenti.*

Dopo tre anni, il rendimento aumenta al 5%. Calcolare:

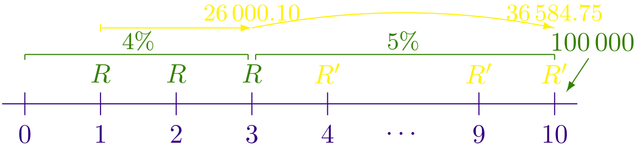
2. *il capitale accumulato alla scadenza, a parità di importo dei versamenti successivi all'epoca 3;*
3. *l'importo dei versamenti successivi per rispettare l'obiettivo iniziale.*



1. $100\,000 = R \cdot s_{\overline{10|}0.04} \qquad \longrightarrow \qquad R = \dfrac{100\,000 \cdot 0.04}{1.04^{10} - 1} \simeq 8\,329.09$

2. $W(10) = R \cdot s_{\overline{3|}0.04} \cdot 1.05^7 + R \cdot s_{\overline{7|}0.05} \simeq 104\,400.31$

($> 100\,000$, naturalmente)



3. Già accumulato: $R \cdot s_{\overline{3}|0.04} = 26\,000.10$, che all'epoca 10 (al tasso del 5%) diventeranno $26\,000.10 \cdot 1.05^7 \simeq 36\,584.75$.

Deve perciò essere:

$$R' \cdot s_{\overline{7}|0.05} = 100\,000 - R \cdot s_{\overline{3}|0.04} \cdot 1.05^7 = 63\,415.25$$

quindi $R' = \dfrac{63\,415.25 \cdot 0.05}{1.05^7 - 1} \simeq 7\,788.65$.

($< 8\,329.09$, naturalmente)

Problema 23 *Un 50enne acquista una pensione che gli consentirà di percepire $12\,000$ euro all'anno frazionati su base mensile ($1\,000$ euro al mese, all'inizio di ogni mese) a partire dall'età 65. Effettua a tale scopo versamenti mensili posticipati, al tasso annuo effettivo del 6%. Determinare l'importo dei versamenti mensili (supponendo che la pensione abbia durata 20 anni e che sia valutata al tasso annuo effettivo del 6%).*

La pensione inizierà tra 15 anni $= 180$ mesi e durerà 20 anni, cioè 240 rate:

	$1\,000$	$1\,000$	$1\,000$		$1\,000$	$1\,000$
mesi	180	181	182	$\cdots$	418	419
rate	(1)	(2)	(3)		(239)	(240)

I versamenti inizieranno tra un mese e finiranno tra 180:

		R	R		R	R
mesi	0	1	2	$\cdots$	179	180

Tasso $i = 0.06 \quad \rightarrow \quad i_{12} = 1.06^{1/12} - 1 \simeq 0.00486755$

Iniziamo valutando la pensione:

$$\begin{array}{cccccc} 1\,000 & 1\,000 & 1\,000 & & 1\,000 & 1\,000 \\ \hline 180 & 181 & 182 & \cdots & 418 & 419 \end{array}$$

$$W(180) = 1\,000 \cdot \ddot{a}_{\overline{240}|i_{12}} = 1\,000 \cdot \frac{1 - 1.00486755^{-240}}{0.00486755} \cdot 1.00486755 \simeq 142\,072.50$$

Calcoliamo la rata:

$$\begin{array}{rcccccc} & & R & R & & R & R \\ \hline \text{mesi} & 0 & 1 & 2 & \cdots & 179 & 180 \end{array}$$

da $W(180) = R \cdot s_{\overline{180}|i_{12}}$,

$$R = \frac{W(180)}{s_{\overline{180}|i_{12}}} = 1\,000 \cdot \frac{1 - (1 + i_{12})^{-240}}{i_{12}} \cdot (1 + i_{12}) \cdot \frac{i_{12}}{(1 + i_{12})^{180} - 1} =$$

$$= 1\,000 \cdot \frac{1 - 1.06^{-20}}{1.06^{15} - 1} \cdot 1.00486755 \simeq 495.18$$

(NB: $(1 + i_{12})^{-240} = 1.06^{-20}$; $(1 + i_{12})^{180} = 1.06^{15}$)

(Se sembrasse poco: al 6%, 495.18 oggi $\equiv 1\,180.97$ tra 14 anni e 11 mesi)

Altra applicazione: **restituzione di prestiti (o ammortamenti)**

Operazione di prestito:

- all'epoca 0: erogazione del **prestito** S;
- alle epoche $1, 2, \ldots, m$ (per esempio, anni): versamento delle **rate** (**di ammortamento**) $R_1, R_2, \ldots, R_m$.

Ciascuna rata R_t remunera gli interessi dell'anno (**quota di interessi** I_t) e restituisce una parte dell'importo preso in prestito (**quota di capitale** C_t, oppure K_t):

$$R_t = C_t + I_t \ .$$

La scomposizione della rata è giustificata da motivi contabili (rata: uscita di cassa; quota interessi: costo; quota capitale: riduzione debito) e legali (a fini di tassazione, contenzioso, ecc.)

Vincolo sulle quote capitale C_t:

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_m = \sum_{t=1}^{m} C_t$$

(**condizione di chiusura elementare**)

Debito residuo (cioè, debito corrente) all'epoca t: D_t

- all'epoca 0: $\qquad D_0 = S$
- all'epoca m: $\qquad D_m = 0$
- all'epoca $t = 1, 2, \ldots, m$:

$$D_t = D_{t-1} - C_t = D_{t-2} - C_{t-1} - C_t = \ldots =$$
$$= S - \sum_{j=1}^{t} C_j = \sum_{j=t+1}^{m} C_j$$

Quota interesse I_t all'epoca t:

$$I_t = D_{t-1} \cdot i_t,$$

dove i_t è il tasso d'interesse relativo al periodo $[t-1, t]$.

Piano di ammortamento: tabella in cui si registrano i flussi dell'operazione di prestito e il debito residuo

epoca t	quota capitale C_t	quota interessi I_t	rata R_t	debito residuo D_t
0	–	–	–	S
1	$R_1 - I_1$	$S \cdot i_1$	R_1	$S - C_1$
2	$R_2 - I_2$	$D_1 \cdot i_2$	R_2	$D_1 - C_2$ $= S - C_1 - C_2$
3	$R_3 - I_3$	$D_2 \cdot i_3$	R_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$R_m - I_m = D_{m-1}$	$D_{m-1} \cdot i_m$	R_m	0

Nota: $R_m = D_{m-1}(1 + i_m)$.

Equazione ricorrente per il debito residuo, in funzione delle rate:
$D_t = D_{t-1} - C_t$

sommiamo / sottraiamo I_t:
$$\begin{aligned} D_t &= D_{t-1} + I_t - (C_t + I_t) = \\ &= D_{t-1}(1 + i_t) - R_t \end{aligned}$$

Altra equazione ricorrente: $D_t = D_{t-1}(1 + i_t) - R_t$

Poniamo $i_t = i$. Riordinando: $D_{t-1} = D_t(1 + i)^{-1} + R_t(1 + i)^{-1}$

ma vale anche $D_t = D_{t+1}(1 + i)^{-1} + R_{t+1}(1 + i)^{-1}$,

pertanto:

$$\begin{aligned} D_{t-1} &= D_{t+1}(1 + i)^{-2} + R_{t+1}(1 + i)^{-2} + R_t(1 + i)^{-1} = \cdots = \\ &= R_t(1 + i)^{-1} + R_{t+1}(1 + i)^{-2} + \cdots + R_m(1 + i)^{-(m-t+1)} \end{aligned}$$

(il debito residuo è pari al valore attuale delle rate future). In particolare,

$$S = R_1(1 + i)^{-1} + R_2(1 + i)^{-2} + \cdots + R_m(1 + i)^{-m}:$$

condizione di chiusura iniziale (alternativa a quella elementare).

Problema 24 *Un prestito di $1\,000$ euro è erogato all'epoca 0 e deve essere restituito in 5 anni, con versamenti annuali comprensivi di quote capitali costanti; tasso annuo d'interesse (costante) 5%. Redigere il piano di ammortamento.*

Ammortamento italiano

epoca t	quota capitale C_t	quota interessi I_t	rata R_t	debito residuo D_t
0	–	–	–	$1\,000$
1	200	50	250	800
2	200	40	240	600
3	200	30	230	400
4	200	20	220	200
5	200	10	210	0

$S = 1\,000$, $m = 5$; cond.ch.elem.: $S = mC \;\Rightarrow\; C = \dfrac{S}{m} = 200$.

Per casa: controllare la condizione di chiusura iniziale.

Problema 25 *Ripetere, supponendo ora che i versamenti annuali debbano essere costanti.*

Ammortamento francese

epoca t	quota capitale C_t	quota interessi I_t	rata R_t	debito residuo D_t
0	–	–	–	$1\,000$
1	180.97	50	230.97	819.03
2	190.02	40.95	230.97	629.00
3	199.52	31.45	230.97	429.48
4	209.50	21.47	230.97	219.98
5	219.98	11.00	230.97	0

$S = 1\,000$, $m = 5$; cond.ch.iniz.: $S = Ra_{\overline{m|}i} \;\Rightarrow\; R = \dfrac{1\,000}{a_{\overline{5|}0.05}} \simeq 230.97$.

(La condizione di chiusura elementare è già stata verificata!)

Calcoliamo l'importo totale pagato nei due schemi.

Nel Problema 24:

$$R_1 + R_2 + \cdots + R_5 = 250 + 240 + \cdots + 210 = 1\,150.$$

Nel Problema 25:

$$5 \cdot R = 5 \cdot 230.97 = 1\,154.86.$$

NB: i due schemi di finanziamento sono finanziariamente equivalenti. Infatti, dalla condizione di chiusura iniziale:

$$\begin{aligned} 1\,000 &= 230.97 \cdot a_{\overline{5|}0.05} \\ &= 230.97 \cdot 1.05^{-1} + 230.97 \cdot 1.05^{-2} + \cdots + 230.97 \cdot 1.05^{-5}, \end{aligned}$$

$$1\,000 = 250 \cdot 1.05^{-1} + 240 \cdot 1.05^{-2} + \cdots + 210 \cdot 1.05^{-5}.$$

Problema 26 *Ripetere, supponendo ora che i versamenti annuali corrispondano le sole quote interessi, mentre l'importo del prestito è interamente restituito alla scadenza.*

epoca t	quota capitale C_t	quota interessi I_t	rata R_t	debito residuo D_t
0	–	–	–	$1\,000$
1	0	50	50	$1\,000$
2	0	50	50	$1\,000$
3	0	50	50	$1\,000$
4	0	50	50	$1\,000$
5	$1\,000$	50	$1\,050$	0

$S = 1\,000$, $m = 5$; sole quote interessi: $C_t = 0$ $(t = 1, \ldots, 4)$

(Per casa: controllare la condizione di chiusura iniziale)

Problema 27 *Ripetere, supponendo ora che i versamenti annuali siano tutti nulli, eccetto l'ultimo.*

epoca t	quota capitale C_t	quota interessi I_t	rata R_t	debito residuo D_t
0	$-$	$-$	$-$	$1\,000$
1	-50	50	0	$1\,050$
2	-52.50	52.50	0	$1\,102.50$
3	-55.13	55.13	0	$1\,157.63$
4	-57.88	57.88	0	$1\,215.51$
5	$1\,215.51$	60.78	$1\,276.28$	0

$S = 1\,000$, $m = 5$; $0 = R_t = C_t + I_t \;\Rightarrow\; C_t = -I_t$: se i versamenti sono nulli (o insufficienti), il debito **aumenta**!

(Per casa: controllare le condizioni di chiusura)

Scelte particolari degli elementi del piano

- Ammortamento italiano: $C_1 = C_2 = \cdots = C_m = \frac{S}{m}$ (prob. 24, luc. 109)
- Ammortamento francese: $R_1 = R_2 = \cdots = R_m = R$ (prob. 25, luc. 110)
- Titolo obbligazionario: $C_1 = C_2 = \cdots = C_{m-1} = 0$, $C_m = S$ (prob. 26, luc. 112)
  - le quote interessi sono dette *cedole*: $I_t = S \cdot i_t$ ($I_t = Si$, con tasso costante)
  - S è detto *valore facciale* o *valore nominale* del titolo
  - le cedole sono solitamente annuali o semestrali
  - il tasso i è un tasso *periodale* (tasso annuo se la cedola è annua, tasso semestrale se la cedola è semestrale)
  - corso *tel quel*: prezzo corrente del titolo
    il titolo si dice quotato alla pari (sopra la pari / sotto la pari) se il prezzo corrente è uguale (maggiore / minore) al valore facciale
- Titolo a cedola nulla (TCN) o *Zero Coupon Bond* (ZCB):
  $R_1 = R_2 = \cdots = R_{m-1} = 0$, $R_m > 0$ (prob. 27, luc. 113)
  - ultima rata: restituzione prestito $+$ interessi per l'intera durata
  - l'ultima rata è solitamente detta il *valore nominale* del titolo

Ammortamenti a **tasso fisso** e a **tasso variabile**

Tasso fisso: alla stipulazione si fissa $i_t = i$ per ogni anno t
(i: *tasso del piano*)

Tasso variabile: alla stipulazione si fissa i_1 e si stabilisce un criterio per determinare (di anno in anno) i_2, i_3, ..., i_m in relazione alle condizioni di mercato
($i_2, i_3, \ldots$: *tassi "indicizzati"*)

se i tassi sono indicizzati, la sequenza di rate è *aleatoria*

Nel seguito: tasso fisso, salvo quando specificato

Relazioni principali per il piano di rimborso a **quote capitale costanti** (ammortamento di tipo **italiano**)

- Quota capitale: $C_t = \dfrac{S}{m} = C$
- Debito residuo: $D_t = S - t \cdot \frac{S}{m} = S \cdot \dfrac{m-t}{m}$ $\quad (= (m-t)C)$
- Quota interessi: $I_t = D_{t-1} i = s \cdot \frac{m-t+1}{m} \cdot i$;

  se il piano è a tasso variabile: $I_t = D_{t-1} i_t$
- Rata: $R_t = \dfrac{S}{m} + I_t$

Problema 28 *Un prestito di* $100\,000$ *euro deve essere restituito in* 10 *anni, con pagamenti annuali a fine anno, tasso del piano* 10% *annuo. Calcolare* C_5, D_4, I_5 *sapendo che l'ammortamento è costruito con quote capitale costanti.*

$$S = 100\,000, \qquad m = 10, \qquad i = 0.1$$

$$C_5 = C = \frac{S}{m} = 10\,000$$

unico posto dove
è comparso i!

$$D_4 = S \cdot \frac{10-4}{10} = 60\,000; \qquad I_5 = D_4 i = 6\,000$$

Relazioni principali per il piano di rimborso a **rate costanti** (ammortamento di tipo **francese** o **progressivo**)

- Rata tale da soddisfare la condizione di chiusura iniziale

  Se il piano è a tasso fisso, la rata è determinata con il tasso del piano

  Se il piano è a tasso variabile, le clausole contrattuali devono specificare le condizioni per il calcolo (di i_t e) della rata

Caso di tasso fisso:

- Condizione di chiusura iniziale:

$$S = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-m} = R \cdot a_{\overline{m}|i}$$

- Debito residuo:

$$D_t = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-(m-t)} = R \cdot a_{\overline{m-t}|i}$$

Problema 29 *Un prestito di* $100\,000$ *euro deve essere restituito in* 10 *anni, con pagamenti annui costanti a fine anno, tasso del piano* 10%*. Calcolare* R*,* D_4*,* I_5 *e* C_5*.*

$S = 100\,000$, $m = 10$, $i = 0.1$ costante, ammort. francese

$$R = \frac{S}{a_{\overline{10|}0.1}} = \frac{100\,000 \cdot 0.1}{1 - 1.1^{-10}} \simeq 16\,274.54$$

$$D_4 = R \cdot a_{\overline{6|}0.1} = 100\,000 \cdot \frac{1 - 1.1^{-6}}{1 - 1.1^{-10}} \simeq 70\,879.86$$

$$I_5 = D_4 \cdot i \simeq 7\,087.99$$

$$C_5 = R - I_5 \simeq 9\,186.55$$

Osservazione sull'ammortamento francese

All'epoca t: $\quad R = C_t + I_t$

All'epoca $t+1$: $\quad R = C_{t+1} + I_{t+1}$

Di conseguenza:

$$C_t + I_t = C_{t+1} + I_{t+1}$$

$$C_t + D_{t-1}i = C_{t+1} + D_t i$$

$$C_t + D_{t-1}i = C_{t+1} + \big(D_{t-1} - C_t\big)i$$

$$C_t = C_{t+1} - C_t i$$

e si ottiene $C_{t+1} = C_t(1+i)$

Nell'ammortamento francese le quote di capitale crescono in progressione geometrica (scorciatoia per il calcolo: $C_t = C_1(1+i)^t$)

Problema 30 *Un prestito di $100\,000$ euro deve essere restituito in 10 anni con rate mensili costanti posticipate, tasso annuo nominale 6%. Calcolare R e redigere le prime tre righe del piano di ammortamento.*

$$S = 100\,000, \qquad m = 10 \cdot 12 = 120, \qquad i_{12} = \frac{0.06}{12} = 0.005$$

$$R = \frac{S}{a_{\overline{m}|i_{12}}} = \frac{100\,000 \cdot 0.005}{1 - 1.005^{-120}} \simeq 1\,110.21$$

(no sempl.: nominale)

t	C_t	I_t	R_t	D_t
0	$-$	$-$	$-$	$100\,000$
1	610.21	500	$1\,110.21$	$99\,389.79$
$\cdot 1.005$				
2	613.26	496.95	$1\,110.21$	$98\,776.54$
$\cdot 1.005$				
3	616.32	493.88	$1\,110.21$	$98\,160.22$

(Tre righe!) Nota: $98\,160.22 = R \cdot a_{\overline{117}|0.005} = 100\,000 \cdot \frac{1-1.005^{-117}}{1-1.005^{-120}}$; quote capitale in progressione geometrica

Preammortamento: con le prime rate si corrispondono **solo gli interessi**. Successivamente le rate includono anche la quota capitale.

Problema 31 *Un contratto di prestito di* $100\,000$ *euro ha durata* 8 *anni, di cui* 3 *di preammortamento. Il tasso di debito è il* 6% *annuo, lo schema di riferimento è quello francese, le rate sono annuali.*

1. *Calcolare la sequenza delle rate.*
2. *Compilare le prime quattro righe del piano di ammortamento.*

S	Si	Si	Si	R	$\cdots$	R
0	1	2	3	4	$\cdots$	8

$$S = 100\,000; \qquad i = 0.06; \qquad m = 8 - 4 + 1 = 5$$

Dovrà essere $R = D_3 : a_{\overline{5}|0.06}$ (le rate dalla 4 alla 8 ripagano quanto dovuto all'epoca 3). Visto che $R_1 = Si = D_0 i = I_1$, sarà $C_1 = 0$, quindi $D_1 = D_0 = S$. Allo stesso modo, $D_2 = D_1$ e $D_3 = D_2$, cioè $D_3 = S$:

$$R = \frac{S}{a_{\overline{5}|0.06}} = \frac{100\,000 \cdot 0.06}{1 - 1.06^{-5}} \simeq 23\,739.64$$

t	C_t	I_t	R_t	D_t
0	–	–	–	100 000
1	0	6 000	6 000	100 000
2	0	6 000	6 000	100 000
3	0	6 000	6 000	100 000
4	17 739.64	6 000	23 739.64	82 260.36

Per casa: concludere e verificare che $C_5 = 1.06 \cdot C_4$, ...

Schemi con tasso variabile: il tasso fissato alla stipulazione del contratto può essere modificato sulla base di specifiche clausole contrattuali. Possibili strutture:

- Per ammortamento italiano:

  a Rata = quota capitale costante + quota interesse al tasso corrente, i_t (i_t: tasso nell'anno $(t-1, t)$):

  $$R_t = \frac{S}{m} + D_{t-1} i_t$$

- Per ammortamento francese:

  b Rata inizialmente calcolata costante. Alle quote capitale a essa relative si aggiunge la quota interesse al tasso corrente:

  rata iniziale: $R_1 = S : a_{\overline{m}|i_1}$

  quota capitale: $C_1 = R - S i_1, \quad C_t = (1+i_1)^{t-1} C_1$ ($t = 2, \ldots, m$)

  rata al tempo t: $R_t = C_t + D_{t-1} I_t$

  (Simile al precedente: restano le stesse C_t, cambiano solo le I_t. Si può applicare anche a altri tipi di ammortamento)

- **c** Rata ricalcolata a ogni variazione di tasso come se da quel momento dovesse rimanere costante (e il tasso non dovesse più essere modificato):

  rata iniziale: $R_1 = S : a_{\overline{m|}\, i_1}$

  rata al tempo t: $R_t = D_t : a_{\overline{m-t+1|}\, i_t}$

  (Solitamente il più comune per i mutui a tasso variabile)

- **d** Rata costante per tutta la durata. L'aumento (riduzione) di tasso determina un aumento (riduzione) del numero di rate

  (c.d. "mutuo a rata fissa")

(Deve essere specificato nel contratto)

Problema 32 *Un prestito di $100\,000$ euro deve essere restituito in 4 anni con versamenti annui posticipati, a tasso variabile. A ogni variazione di tasso, la rata viene ricalcolata come se dovesse rimanere costante.*

1. *Calcolare l'importo iniziale della rata, tasso iniziale 7% annuo.*
2. *Redigere la prima riga del piano di ammortamento.*
3. *All'epoca 1, il tasso è posto pari al 7.5% annuo. Determinare il nuovo importo della rata.*

1. $S = 100\,000, \quad m = 4, \quad i_1 = 0.07$

$$R = S : a_{\overline{4}|0.07} = \frac{100\,000 \cdot 0.07}{1 - 1.07^{-4}} \simeq 29\,522.81$$

2.

t	C_t	I_t	R_t	D_t	i_t
0	–	–	–	$100\,000$	
1	$22\,522.81$	$7\,000$	$29\,522.81$	$77\,477.19$	0.07

3. $S' = D_1 = 77\,477.19, \quad m = 3, \quad i_2 = 0.075$

$$R' = S' : a_{\overline{3}|0.075} = \frac{77\,477.19 \cdot 0.075}{1 - 1.075^{-3}} \simeq 29\,792.89$$

t	C_t	I_t	R_t	D_t	i_t
0	–	–	–	100 000	
1	22 522.81	7 000	29 522.81	77 477.19	0.07
2	23 982.10	5 810.79	29 792.89	53 495.09	0.075
2			29 792.89		0.075

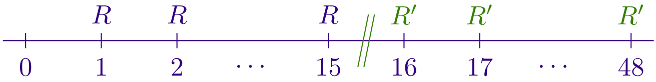
Per casa: concludere. Nota: non è più $C_2 = C_1 \cdot (1 + i)$, anzi: per durate lunghe e aumenti consistenti di tasso, può risultare addirittura $C_{t+1} < C_t$.

Problema 33 *Un prestito di* $100\,000$ *euro deve essere restituito in* 4 *anni con versamenti mensili posticipati, a tasso variabile. A ogni variazione di tasso, la rata viene ricalcolata come se dovesse rimanere costante.*

1. *Calcolare l'importo iniziale della rata, tasso iniziale* 14.4% *annuo nominale.*
2. *Dopo il quindicesimo versamento, il tasso è posto pari all'*1.4% *mensile (effettivo). Determinare il nuovo importo della rata.*

1. $S = 100\,000, \qquad m = 4 \cdot 12 = 48, \qquad i_{12} = \dfrac{0.144}{12} = 0.012.$

$$R = S : a_{\overline{48}|0.012} = \frac{100\,000 \cdot 0.012}{1 - 1.012^{-48}} \simeq 2\,752.76$$



2. $m' = 48 - 15 = 33, \quad S' = D_{15} = R \cdot a_{\overline{33}|0.012} \simeq 76\,646.70, \quad i' = 0.014.$

$$R' = S' : a_{\overline{33}|0.014} = \frac{76\,646.70 \cdot 0.014}{1 - 1.014^{-33}} \simeq 2\,840.17$$

occhio: D_{15} si calcola con il *vecchio* tasso!

Problema 34 *Con i dati dell'esercizio precedente, supporre che a ogni variazione di tasso la rata sia ricalcolata mantenendo le quote capitale del piano iniziale. Calcolare* R'_{16}.

Richiamiamo i dati: $R \simeq 2\,752.76$, $i_{12} = 0.012$, $i'_{12} = 0.014$. Abbiamo anche già calcolato $D_{15} \simeq 74\,646.70$

$$R_{16} = C_{16} + I_{16} = C_{16} + D_{15} \cdot i_{12} \quad \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \quad C_{16} = R - D_{15} \cdot 0.012 \simeq 2\,752.76 - 895.76 = 1\,856.99$$

$$R'_{16} = C_{16} + I'_{16} = C_{16} + D_{15} \cdot i'_{12} \simeq$$
$$\simeq 1\,856.99 + 1\,045.05 = 2\,902.05$$

Scorciatoia: $R'_{16} = R_{16} + D_{15} \cdot \big[0.014 - 0.012\big]$

Problema 35 *Un prestito di $100\,000$ euro deve essere restituito con versamenti annuali costanti (posticipati). Il tasso è variabile, ma la rata deve restare invariata (in caso di variazione del tasso, viene modificata la durata). Il tasso iniziale è pari all'8% annuo. La durata iniziale di riferimento è 3 anni. Alla fine del primo anno il tasso viene aumentato all'8.5% annuo. Redigere il piano di ammortamento.*

$$S = 100\,000, \qquad m = 3, \qquad i = 0.08$$

$$R = S : a_{\overline{3}|0.08} \simeq \frac{100\,000 \cdot 0.08}{1 - 1.08^{-3}} \simeq 38\,803.15$$

t	C_t	I_t	R_t	D_t	i_t
0	–	–	–	100 000	
1	30 803.15	8 000	38 803.15	69 196.85	0.08
2	32 921.64	5 881.72	38 803.15	36 275.01	0.085
3	35 719.98	3 083.28	38 803.15	555.04	0.085
4	555.04	47.18	602.22	0	0.085

In generale, il minimo tra D_{t-1} e $R - D_{t-1}i$

Problema 36 *Un prestito di* $100\,000$ € *deve essere restituito in 4 anni, con versamenti annuali, a tasso variabile. Supporre alternativamente che:*

- **a** *a ogni variazione del tasso, la rata sia ricalcolata in modo da rimanere costante alle nuove condizioni di tasso;*
- **b** *le quote capitale restino quelle del piano iniziale, mentre la quota interessi è calcolata al tasso corrente;*
- **c** *le rate devono restare costanti, mentre può variare la durata di restituzione del prestito.*

Compilare il piano di ammortamento nelle tre ipotesi, adottando i seguenti valori per il tasso d'interesse: $i_1 = 7\%$ *nel primo anno,* $i_2 = i_3 = 7.5\%$ *nel secondo e terzo anno,* $i_4 = 7\%$ *nel quarto anno.*

Confrontare l'andamento delle rate nei tre schemi.

Caso **a**: rata ricalcolata per essere costante alle nuove condizioni di tasso.

t	C_t	I_t	R_t	D_t	i_t
0	–	–	–	100 000	0.07
1	22 522.81	7 000.00	29 522.81	77 477.19	0.075
2	23 982.11	5 810.79	29 792.89	53 495.08	0.075
3	25 780.76	4 012.13	29 792.89	27 714.32	0.07
4	27 714.32	1 940.00	29.654.32	0	

NB: la rata **non** ritorna al livello iniziale, nemmeno quando il tasso torna al livello iniziale. Perché? (Ci sono più interessi da pagare!)

Caso **b**: sono ricalcolate solo le quote di interesse.

t	C_t	I_t	R_t	D_t	i_t
0	–	–	–	$100\,000$	0.07
1	$22\,522.81$	$7\,000.00$	$29\,522.81$	$77\,477.19$	0.075
2	$24\,099.41$	$5\,810.79$	$29\,910.20$	$53\,377.78$	0.075
3	$25\,786.37$	$4\,003.33$	$29\,789.70$	$27\,591.41$	0.07
4	$27\,591.41$	$1\,931.40$	$29\,522.81$	0	

NB: quando il tasso ritorna al livello iniziale, anche la rata ritorna al livello iniziale, perché…

Caso **c**: la rata resta costante, può variare la durata.

t	C_t	I_t	R_t	D_t	i_t
0	$-$	$-$	$-$	$100\,000$	0.07
1	$22\,522.81$	$7\,000.00$	$29\,522.81$	$77\,477.19$	0.075
2	$23\,712.02$	$5\,810.79$	$29\,522.81$	$53\,765.17$	0.075
3	$25\,490.42$	$4\,032.39$	$29\,522.81$	$28\,274.94$	0.07
4	$27\,543.58$	$1\,979.23$	$29\,522.81$	731.16	0.07
5	731.16	51.18	782.34	0	

NB: anche quando le rate coincidono con quelle di altri schemi (vedi, in particolare, il caso b.), cambia la scomposizione in quota di capitale e quota di interessi. Perché?

Problema 37 *Un prestito di $25\,000$ euro deve essere restituito in 5 anni con versamenti semestrali posticipati costanti, al tasso annuo del 9%.*

1. *Determinare l'importo dei versamenti.*
2. *Subito dopo il sesto versamento, il debitore chiede di sospendere i versamenti per un anno. Determinare l'importo dei versamenti successivi, supponendo che il creditore non modifichi scadenza e tasso d'interesse, né applichi penali.*

1. $S = 25\,000, \qquad m = 10, \qquad i_2 = 1.09^{1/2} - 1 \simeq 0.04403$

$$R = S : a_{\overline{10|}\,i_2} = \frac{25\,000 \cdot 0.04403}{1 - 1.09^{-5}} \simeq 3\,144.43$$

2. $$D_6 = R \cdot a_{\overline{10-6|}\,i_2} = \frac{R \cdot 1 - 1.04403^{-4}}{0.04403} = S \cdot \frac{1 - 1.09^{-2}}{1 - 1.09^{-5}} \simeq 11\,306.36$$

Sapendo che $D_6 = 11\,306.36$:

t	C_t	I_t	R_t	D_t
6	$\cdots$	$\cdots$	3 144.43	11 306.36
7	−497.83	497.83	0	11 804.18
8	−519.75	519.75	0	12 323.93
9	6 029.23	542.63	6 571.85	6 294.69
10	6 294.69	277.16	6 571.85	0

$\cdot 1.04403$ $\cdot 1.04403$ $\cdot 1.09$

$$R' = \frac{D_8}{a_{\overline{2}|\,i_2}} = \frac{12\,323.93 \cdot 0.04403}{1 - 1.09^{-1}} \simeq 6\,571.85$$

Se invece la scadenza fosse stata prorogata di un anno (2 rate)? Beh: $R'' = D_8 : a_{\overline{4}|\,i_2} = \ldots = R \cdot 1.09$!

Leasing: Problema 38

Un contratto di leasing è caratterizzato da:

- *valore di fornitura (all'epoca 0): $1\,000$;* $S = 1\,000$
- 18 *canoni mensili posticipati, di cui gli ultimi 3 corrisposti all'epoca 0 (maxicanone);* $m = 18$
- *tasso annuo nominale 12%;* $i_{12} = 0.01$
- *durata: 18 mesi (pari al numero di canoni);*
- *prezzo di riscatto (alla scadenza): 3% del valore di fornitura.*

Calcolare l'importo dei canoni mensili e del maxicanone iniziale.

entrate:	$1\,000$							
uscite:	$3C$	C	C		C	C	C	C 30
	0	1	2	$\cdots$	15	16	17	18

$$1\,000 = 3C + C \cdot a_{\overline{15}|0.01} + 30 \cdot 1.01^{-18} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad C = \frac{1\,000 - 30 \cdot 1.01^{-18}}{3 + a_{\overline{15}|0.01}} \simeq 57.81 \qquad (3C \simeq 173.42)$$

Valore attuale netto (o *Discounted Cash Flow*)

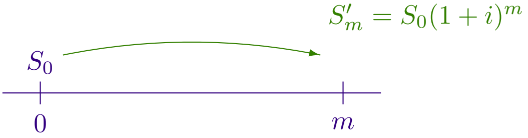
Strumento di valutazione di un'operazione finanziaria

Riferimento: operatore che usualmente investe a tasso i e che dispone all'epoca 0 di un patrimonio S_0

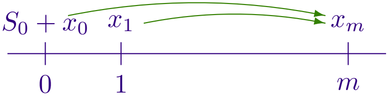
Problema: qual è l'informazione data da $W(0; \mathbf{x})$?

Data un'operazione finanziaria di (puro) investimento $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}/\{0, 1, \ldots, m\}$, confronto tra patrimonio alla scadenza dell'operazione e patrimonio alla stessa data se si rinuncia all'operazione

Patrimonio alla scadenza **rinunciando** all'operazione:



Patrimonio alla scadenza **facendo** l'operazione:



$$S''_m = (S_0 + x_0)(1+i)^m + \\ + x_1(1+i)^{m-1} + \\ + \cdots + x_m$$

Esempio: $i = 5\%$, $S_0 = 10\,000$, operazione $\{-1\,000, 500, 600\}/\{0, 1, 2\}$

Patrimonio accumulato:

Epoca t	No operazione	Sì operazione	Saldo
0	$10\,000$	$9\,000$	$-1\,000$
1	$10\,000 \cdot 1.05 =$ $10\,500$	$9\,000 \cdot 1.05 + 500 =$ $9\,950$	$-1\,000 \cdot 1.05 + 500 =$ -550
2	$10\,500 \cdot 1.05 =$ $11\,025$	$9\,950 \cdot 1.05 + 600 =$ $11\,047.50$	$-550 \cdot 1.05 + 600 =$ 22.50

In generale, il patrimonio accumulato alla scadenza è:

- non facendo l'operazione: $S'_m = S_0(1+i)^m$
- facendo l'operazione: $S''_m = S_0(1+i)^m + \sum_{t=0}^m x_t(1+i)^{m-t}$

Il patrimonio **aggiuntivo** alla scadenza (**capitale creato**) è perciò:

$$S''_m - S'_m = \sum_{t=0}^m x_t(1+i)^{m-t} = W(m;\mathbf{x})$$

valore all'epoca 0: $W(0;\mathbf{x}) = \sum_{t=0}^m x_t(1+i)^{-t} \Rightarrow$ **VAN**: valore attuale del capitale creato (in breve: **valore creato**)

Pertanto il VAN esprime il valore (attuale all'epoca 0) creato dall'operazione:

- $W(0;\mathbf{x}) > 0$: **creazione** di valore
- $W(0;\mathbf{x}) < 0$: **distruzione** di valore

Nell'esempio si è fatto riferimento a un'operazione di puro investimento. In generale, il VAN può essere calcolato per un'operazione qualsiasi e conserva il significato di valore creato dall'operazione

Il valore numerico del VAN **dipende dal tasso** (parametro "sensibile" del modello) **Notazione:** VAN $= G(i)$ (oppure: $DCF(i)$)

Esempio. Operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-1\,000, 500, 600\}/\{0, 1, 2\}$:

- VAN al tasso 5%: $G(0.05) = 20.41 > 0$
- VAN al tasso 10%: $G(0.1) = -49.59 < 0$

Scelta del tasso

- rendimento di investimenti (costo di finanziamenti) alternativi ("costo opportunità del capitale")
- per finanziamenti: costo massimo accettato
  per investimenti: rendimento minimo richiesto
- se i flussi non sono certi (per es., esprimono previsioni), il tasso i include un "premio" per il rischio
- i tassi possono essere variabili (valore attuale netto *generalizzato*)

Tra più operazioni, si sceglie quella con il VAN più **alto**

Problema 39 *Confrontare i progetti:*

- **a** *investimento di* $75\,000$ *euro all'epoca* 0*, entrate di* $37\,500$ *euro dopo* 1 *anno e di* $52\,500$ *euro dopo* 2 *anni;*
- **b** *investimento di* $75\,000$ *euro all'epoca* 0*, entrate di* $52\,500$ *euro dopo* 1 *anno e di* $37\,500$ *dopo* 2 *anni,*

in base al criterio del VAN, tasso annuo 8%.

a

$$\begin{array}{ccc} -75\,000 & 37\,500 & 52\,500 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$G_a(0.08) = -75\,000 + 37\,500 \cdot 1.08^{-1} + 52\,500 \cdot 1.08^{-2} \simeq 4\,732.51$$

b

$$\begin{array}{ccc} -75\,000 & 52\,500 & 37\,500 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$G_b(0.08) = -75\,000 + 52\,500 \cdot 1.08^{-1} + 37\,500 \cdot 1.08^{-2} \simeq 5\,761.32$$

Entrambi creano valore. Il secondo è preferibile al primo (naturalmente!)

Problema 40 *Scegliere la migliore forma di investimento tra*

- **a** *ZCB a* 1 *anno, prezzo corrente* 92.50*, valore nominale* 100*;*
- **b** *obbligazione con durata residua* 3 *anni, cedole semestrali al tasso cedolare del* 6%*, valore di rimborso e valore nominale* 100*, prezzo corrente* 100

per un operatore che usualmente investe al tasso annuo del 5% *e che oggi dispone di un capitale di* $1\,000$*.*

- **a**

-92.50	100
0	1

$$G_a(0.05) = -92.50 + 100 \cdot 1.05^{-1} \simeq 2.74$$

Con il capitale disponibile si possono acquistare $\dfrac{1\,000}{92.50} \simeq 10.81$ unità:

$$10.81 \cdot G_a(0.05) = -1\,000 + 1\,081.08 \cdot 1.05^{-1} \simeq 29.60$$

- **a** Durata residua 3 anni, valore di rimborso e nominale 100, cedole semestrali al tasso cedolare del $6\% = 3\%$ semestrale effettivo

-100	3	3	3	3	3	100
0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

  Il tasso semestrale equivalente al 5% annuo è $i_2 = 1.05^{1/2} - 1 \simeq 2.47\%$

  $$G_b(0.05) = -100 + 3 \cdot a_{\overline{6|}\, i_2} + 100 \cdot 1.05^{-2} \simeq 2.93 > 2.74$$

  Con il capitale disponibile si possono acquistare $\dfrac{1\,000}{100} = 10$ unità:

  $$10 \cdot G_b(0.05) \simeq 29.25 < 29.60$$

Quindi: se è disponibile una sola unità dei due titoli, è preferibile il secondo; se invece i titoli sono “ripetibili” (e “frazionabili”), è preferibile investire nel primo.

Tasso interno di rendimento

Strumento di valutazione di un'operazione finanziaria

Definizione Data l'operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}/\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, si definisce **TASSO INTERNO DI RENDIMENTO – TIR** (o **INTERNAL RATE OF RETURN – IRR**) di $\mathbf{x}$ il tasso i^*, se esiste unico, tale che

$$W(t_0; \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{“equa”}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_0 + x_1\,(1+i^*)^{-(t_1-t_0)} + \cdots + x_m\,(1+i^*)^{-(t_m-t_0)} = 0$$

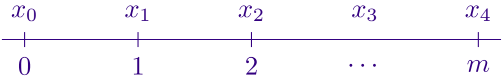
NB: se $W(t_0; \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow W(t; \mathbf{x}) = 0$ per ogni t. In particolare, $W(0; \mathbf{x}) = 0$ (cioè: $G(i) = 0$)

Modo usuale di definire il TIR:

tasso i^*, se esiste unico, tale che $G(i^*) = 0$

o “il tasso che annulla il VAN, se unico”. N.B.: non sempre esiste o è unico!

Calcolo del TIR



L'operazione finanziaria può sempre essere ridefinita in modo che lo scadenzario sia $\mathbf{t} = \{0, 1, \ldots, m\}$

Il VAN è allora un polinomio di grado m:
$G(i) = x_0 + x_1(1+i)^{-1} + \cdots + x_m(1+i)^{-m}$

Calcolo del TIR $\Rightarrow$ calcolo degli zeri dell'equazione algebrica $G(i) = 0$, cioè:
$x_0 + x_1\,(1+i)^{-1} + \cdots + x_m\,(1+i)^{-m} = 0$;
sostituzione $y = (1+i)^{-1} \quad \rightarrow \quad x_0 + x_1 y + \cdots + x_m y^m = 0$

Risultati possibili

- esiste una, sola, soluzione reale (e positiva) $\Rightarrow$ TIR
- non esistono soluzioni reali (o sono tutte negative)
- esistono più soluzioni

Esistenza e unicità della soluzione: garantite se la sequenza $x_0, x_1, \ldots, x_m$ **cambia segno una sola volta**; per esempio:

- operazione di puro investimento: $x_0 < 0,\ x_1, x_2, \ldots, x_m > 0$ (TIR $\Rightarrow$ esprime un utile)
- operazione di puro finanziamento: $x_0 > 0,\ x_1, x_2, \ldots, x_m < 0$ (TIR $\Rightarrow$ esprime un costo)

Calcolo del TIR: salvi casi particolari, risoluzione numerica
(non in programma, salvi i casi particolari che seguono)

1. Un caso particolare: operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-P, 0, \ldots, 0, C\}\{0, 1, \ldots, m-1, m\}$ (ZCB)

$$-P + C(1+i)^{-m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+i)^{-m} = \frac{P}{C}$$

$$\Leftrightarrow \quad i = \left(\frac{P}{C}\right)^{-1/m} - 1 = \left(\frac{C}{P}\right)^{1/m} - 1$$

(rendimento alla scadenza dello ZCB, o tasso annuo equivalente)

2. Un altro caso particolare: operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, x_1, x_2\}/\{0, 1, 2\}$

$$x_0 + x_1(1+i)^{-1} + x_2(1+i)^{-2} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Posto $y = (1+i)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \overset{c}{x_0} + \overset{b}{x_1} y + \overset{a}{x_2} y^2 = 0$

$$y = \frac{-x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4x_0x_2}}{2x_2} \qquad \begin{array}{l} \nearrow \quad \frac{-|x_1| + \sqrt{x_1^2 - 4x_0x_2}}{2|x_2|} \\ \searrow \quad \text{n.a.} \end{array}$$

TIR: $i^* = y^{-1} - 1$

N.B.1: anche direttamente, $x_0(1+i)^2 + x_1(1+i) + x_2 = 0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad x_0 i^2 + (2x_0 + x_1)i + (x_0 + x_1 + x_2) = 0 \ldots$$

N.B.2: provate con

$$\begin{array}{ccc} 1\,000 & -2\,180 & 1\,188 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Risultano due soluzioni: $i_1^* = 0.08$ e $i_2^* = 0.1 \quad \Rightarrow \quad$ niente TIR.

3. Un altro caso particolare: titolo obbligazionario $\{-P, Ci, \ldots, Ci, Ci + C\}/\{0, 1, \ldots, m-1, m\}$

$$\begin{array}{cccccc} -P & Ci & Ci & & Ci & Ci+C \\ \hline 0 & 1 & 2 & \cdots & m-1 & m \end{array}$$

$$i^* \quad \begin{cases} > i & \text{se } P < C \quad \text{quotato sotto la pari} \\ = i & \text{se } P = C \quad \text{quotato alla pari} \\ < i & \text{se } P > C \quad \text{quotato sopra la pari} \end{cases}$$

Problema 41 *Calcolare il TIR delle seguenti operazioni:*

1. *ZCB di prezzo corrente* 98*, v.n.* 100*, scadenza* 2 *anni;*
2. $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-1\,000, 500, 600\}/\{0, 1, 2\}$

1.
$$\begin{array}{cc} -98 & 100 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \qquad 0 = -98 + 100 \cdot (1+i)^{-2}$$

$$i = \left(\frac{100}{98}\right)^{1/2} - 1 \simeq 0.01015 = 1.015\%$$

2

$-1\,000$	500	600
0	1	2

$$-1\,000 + 500(1+i)^{-1} + 600(1+i)^{-2} = 0$$

$$\longrightarrow \quad y = (1+i)^{-1}$$

$$600y^2 + 500y - 1\,000 = 0$$

$$y = \frac{-500 \pm \sqrt{500^2 + 4 \cdot 600 \cdot 1\,000}}{2 \cdot 600} \simeq \begin{cases} 0.93990 \\ -1.7732 < 0 \end{cases}$$

$$i^* = \frac{1}{0.93990} - 1 \simeq 0.06394 = 6.394\%$$

N.B.: $1\,000(1+i)^2 - 500(1+i) - 600 = 0$

$$1\,000i^2 + 1\,500i - 100 = 0$$

$$i^* = \frac{-1\,500 \pm \sqrt{1\,500^2 - 400\,000}}{2\,000} \simeq \begin{cases} 0.06394 \\ -1.5639 < 0 \end{cases}$$

(ma anche con la sostituzione $z = 1 + i$: risultano $z_1^* = 1.06394$ e $z_2^* < 0$)

Problema 42 *Verificare se il TIR dei seguenti titoli obbligazionari con cedola è uguale al tasso cedolare:*

1. *prezzo* 100, *v.n.* 100, *cedola annua* 5, *scadenza epoca* 10;
2. *prezzo* 98, *v.n.* 100, *cedola* 4, *scadenza epoca* 5.

1.

-100	5		5	$100+5$
0	1	$\cdots$	9	10

$$\text{Tasso cedolare} = \frac{\text{cedola}}{\text{valore nominale}} = \frac{5}{100} = 0.05$$

$$\begin{aligned} G(0.05) &= -100 + 5 \cdot 1.05^{-1} + \cdots + 5 \cdot 1.05^{-9} + 105 \cdot 1.05^{-10} = \\ &= -100 + 5 \cdot a_{\overline{10|}0.05} + 100 \cdot 1.05^{-10} = 0 \end{aligned}$$

Sì: il TIR coincide con il tasso cedolare (eh, be': è quotato alla pari. . .)

2.

-98	4		4	$100+4$
0	1	$\cdots$	4	5

Tasso cedolare $= \dfrac{4}{100} = 0.04$

$$G(0.04) = -98 + 4 \cdot 1.04^{-1} + \cdots + 4 \cdot 1.04^{-4} + 104 \cdot 1.05^{-5} =$$
$$= -98 + 4 \cdot a_{\overline{5}|0.04} + 100 \cdot 1.04^{-5} = 2 \neq 0$$

$\boxed{\textbf{No:}}$ il TIR non coincide con il tasso cedolare (il VAN non si annulla). Però il TIR deve esistere (un solo cambiamento di segno) e deve essere **maggiore** di 0.04 (è quotato sotto la pari)

TIR e VAN: andamento del VAN rispetto al tasso d'interesse

VAN: $G(i) = \sum_{t=0}^{m} x_t (1+i)^{-t}$

$\Rightarrow$ funzione del tasso

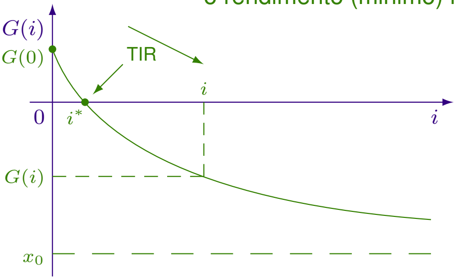
Operazione di puro investimento

- $i = 0$: $G(0) = \sum_{t=0}^{m} x_t =$ saldo di cassa (utile monetario dell'operazione); tipicamente $G(0) > 0$ (o non investo)
- al crescere di i: $G(i)$ decrescente
- $i \to +\infty$: $\lim_{i\to\infty} G(i) = x_0 < 0$

i: tasso di attualizzazione
o tasso di valutazione
o costo opportunità
o rendimento (minimo) richiesto

$i < i^* \ \Rightarrow \ G(i) > 0$

$i > i^* \ \Rightarrow \ G(i) < 0$



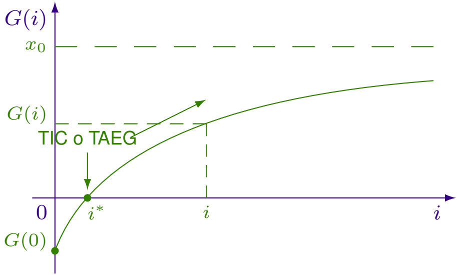
Operazione di puro finanziamento

- $i = 0$: $G(0) = \sum_{t=0}^{m} x_t =$ saldo di cassa; tipicamente $G(0) < 0$ (perdita monetaria dell'operazione) (o non ricevo il prestito)
- al crescere di i: $G(i)$ crescente
- $i \to +\infty$: $\lim_{i\to\infty} G(i) = x_0 > 0$

i: rendimento alternativo
o costo (massimo) accettato

$i < i^* \;\Rightarrow\; G(i) < 0$

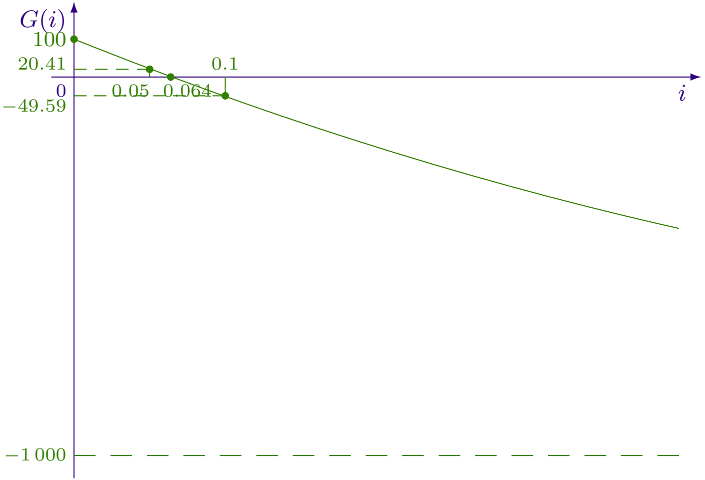
$i > i^* \;\Rightarrow\; G(i) > 0$



Tra più operazioni, si sceglie quella con il TIR più conveniente, cioè il più **alto** per gli investimenti e il più **basso** per i finanziamenti

Esempio. Operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-1\,000, 500, 600\}/\{0, 1, 2\}$.

Il saldo di cassa è $G(0) = -1\,000 + 500 + 600 = 100$ e $x_0 = -1\,000$. Abbiamo già visto che $G(0.05) = 20.41$ e $G(0.1) = -49.59$ (luc. 140) e, inoltre, che il TIR è $i^* \simeq 0.06394$ (Problema 41, luc. 148).



Problema 43 *Confrontare i progetti del Problema 39 (luc. 141):*

- **a** *investimento di* $75\,000$ *euro all'epoca* 0*, entrate di* $37\,500$ *euro dopo* 1 *anno e di* $52\,500$ *euro dopo* 2 *anni;*
- **b** *investimento di* $75\,000$ *euro all'epoca* 0*, entrate di* $52\,500$ *euro dopo* 1 *anno e di* $37\,500$ *dopo* 2 *anni,*

in base al criterio del TIR.

a

$-75\,000$	$37\,500$	$52\,500$
0	1	2

$$-75\,000 + 37\,500 \cdot (1+i)^{-1} + 52\,500 \cdot (1+i)^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i^* \simeq 12.3212\%$$

b

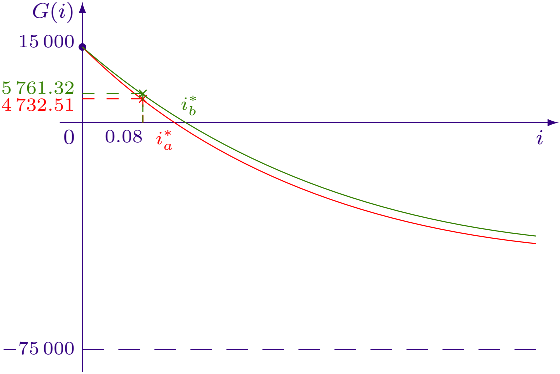
$-75\,000$	$52\,500$	$37\,500$
0	1	2

$$-75\,000 + 52\,500 \cdot (1+i)^{-1} + 37\,500 \cdot (1+i)^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i^* \simeq 13.8987\%$$

Da $G_a(0.08) \simeq 4\,732.51 > 0$ e $G_b(0.08) = 5\,761.32 > 0$ ci aspettavamo già che $i_a^*, i_b^* > 0.08$ e potevamo azzardare $i_a^* < i_b^*$.

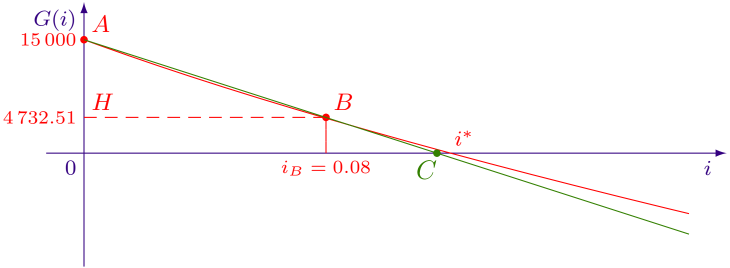
VAN in funzione del tasso di valutazione (segue Problema 43)

- Entrambe le operazioni: $x_0 = -75\,000$, $G(0) = 15\,000$
- Operazione *a*: $G_a(0.08) = 4\,732.51$
- Operazione *b*: $G_b(0.08) = 5\,761.32$



Valutazione approssimata del TIR

Con i dati dell'operazione *a* nel Problema 39 (luc. 141): $G(0) = 15\,000$ (punto A), $G(0.08) \simeq 4\,732.51$ (punto B). Vogliamo stimare il TIR i^*.



Tracciamo la (semi)retta da A a B e chiamiamo C la sua intersezione con l'asse i. Equazione retta che passa per i punti A $((0, G(0)))$ e B $((0.08, G(0.08)))$: $y = G(0) + \frac{G(0.08)-G(0)}{0.08} \cdot i = 15\,000 + \frac{4\,732.51-15\,000}{0.08} \cdot i$

Cerchiamo il valore i_C tale che $y = 0$:

$i_C = \frac{G(0) \cdot i_B}{G(0)-G(i_B)} = \frac{15\,000 \cdot 0.08}{15\,000-4\,732.51} \simeq 11.68\%$

i_Cè una buona prima approssimazione (per difetto) di $i^* \simeq 12.32\%$.

Problema 44 *Valutare le forme di investimento del Problema 40 (luc. 142):*

- **a** *ZCB a* 1 *anno, prezzo corrente* 92.50*, valore nominale* 100*;*
- **b** *obbligazione con durata residua* 3 *anni, cedole semestrali al tasso cedolare del* 6%*, valore di rimborso e valore nominale* 100*, prezzo corrente* 100

secondo il criterio del TIR.

a

-92.50	100
0	1

$$-92.50 + 100 \cdot (1+i)^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_a^* \simeq 8.1081\%$$

b

-100	3	3	3	3	3	103
0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

Valutato alla pari $\quad \Rightarrow \quad i_{2,b}^* = 3\% \quad \Rightarrow \quad i_b^* = 1.03^2 - 1 = 6.09\%$

Il criterio del TIR segnala subito che il primo “rende” più del secondo.

TAEG

Tasso Annuo Effettivo Globale $\Rightarrow$ misura del costo totale del credito in un'operazione di finanziamento

Nel caso di prestiti monetari: **ISC** (Indicatore Sintetico di Costo)

Definizione: **TIR** (su base annua) dell'operazione di finanziamento, inclusi gli oneri accessori

Problema 45 *Contratto di leasing di durata triennale: valore di fornitura* $20\,000$ *euro, maxicanone pari al* 20% *del valore di fornitura, canoni trimestrali posticipati tali che quelli del primo anno siano del* 40% *più elevati dei successivi, prezzo di riscatto* 5% *del valore di fornitura, tasso annuo effettivo* 9%*.*

1. *Calcolare l'importo dei canoni.*
2. *Impostare l'equazione per determinare il TAEG per il locatario, sapendo che le spese iniziali ammontano a* 100 *euro, mentre le spese di incasso (canoni e prezzo di riscatto) sono pari a* 5 *euro.*

1. $S = 20\,000, \qquad m = 3 \cdot 4 = 12, \qquad i_4 = 1.09^{1/4} - 1 \simeq 2.1778\%$

$$\begin{array}{cccccccc} 4\,000 & 1.4C & \cdots & 1.4C & C & \cdots & C & C+1\,000 \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 4 & 5 & \cdots & 11 & 12 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 20\,000 &= 4\,000 + 1.4C \cdot a_{\overline{4}|i_4} + C \cdot a_{\overline{8}|i_4}(1+i_4)^{-4} + 1\,000 \cdot (1+i_4)^{-12} \\ &= 4\,000 + 0.4C \cdot a_{\overline{4}|i_4} + C \cdot a_{\overline{12}|i_4} + 1\,000 \cdot 1.09^{-3} \end{aligned}$$

È un'equazione nell'incognita C:

$$C = \frac{20\,000 - 4\,000 - 1\,000 \cdot 1.09^{-3}}{0.4a_{\overline{4}|i_4} + a_{\overline{12}|i_4}} \simeq 1\,271.39$$

da cui $0.4C \simeq 508.56$ e $1.4C \simeq 1\,779.94$. (Importo totale dei versamenti $= 22\,290.88$)

Se gli esborsi fossero questi, il TAEG sarebbe naturalmente il 9%.

2. Aggiungendo le spese:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
4\,100 & 1.4C+5 & \cdots & 1.4C+5 & C+5 & \cdots & C+5 & C+1005 \\
\hline
0 & 1 & \cdots & 4 & 5 & \cdots & 11 & 12
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
G(i) &= 20\,000 - 4\,100 - 0.4C \cdot a_{\overline{4}|\,i_4} + (C+5) \cdot a_{\overline{12}|\,i_4} + \\
&\qquad - 1\,000 \cdot (1+i)^{-3} \\
&= 15\,900 - 508.56 \cdot \frac{1-(1+i_4)^{-4}}{i_4} - 1\,276.39 \cdot \frac{1-(1+i_4)^{-12}}{i_4} + \\
&\qquad - 1\,000 \cdot (1+i)^{-3} \\
&= 15\,900 - 508.56 \cdot \frac{1-(1+i)^{-1}}{(1+i)^{1/4}-1} - 1\,276.39 \cdot \frac{1-(1+i)^{-3}}{(1+i)^{1/4}-1} + \\
&\qquad - 1\,000 \cdot (1+i)^{-3}
\end{aligned}
$$

Il TAEG è definito dall'equazione $G(i) = 0$ (un cambiamento di segno!)

- $G(0.09) = \ -100 - 5 \cdot a_{\overline{12}|\,i_4} \simeq -152.30 < 0$, quindi $i^* > 0.09$.
- Metodi numerici (non in programma): $i^* \simeq 0.09688$ ($i_4^* \simeq 0.02339$)

Ruolo dell'orizzonte temporale nel calcolo di VAN e TIR

Calcolo del VAN: richiede l'assegnazione del tasso di valutazione

Calcolo del TIR: procedimento algebrico $\Rightarrow$ nessuna variabile di scelta

VAN: esprime un valore creato (rispetto a un target)

TIR: misura del rendimento / costo dell'operazione, a prescindere dal contesto

Ipotesi implicite relativamente all'orizzonte temporale

- Operazione A: $\{-1\,000, 1\,100\}/\{0, 1\}$
- Operazione B: $\{-1\,000, 1\,210\}/\{0, 2\}$
- VAN:

$$G_A(i) = -1\,000 + 1\,100 \cdot (1+i)^{-1}$$
$$G_B(i) = -1\,000 + 1\,210 \cdot (1+i)^{-2}$$

es: $G_A(0.05) = 47.62$; $G_B(0.05) = 97.51$.

- TIR:

$$i_A^* = \frac{1\,100}{1\,000} - 1 = 10\%$$
$$i_B^* = \Big(\frac{1\,210}{1\,000}\Big)^{1/2} - 1 = 10\%$$

Ipotesi: l'operatore intende investire per due anni

- Op. B: soddisfa tale requisito
- Op. A: richiede un reinvestimento all'epoca 1
  $\Rightarrow$ op. A′: $\{-1\,000, 1\,100 - 1\,100, 1\,100(1+i)\}/\{0,1,2\}$

- VAN op. A′:
$$G_{A'} = -1\,000 + \frac{1\,100(1+i)}{(1+i)^2} = -1\,000 + \frac{1\,100}{1+i} = G_A(i)$$

- TIR op. A′:
$$i_{A'}^* = \Big(\frac{1\,100(1+i)}{1\,000}\Big)^{1/2} - 1 \qquad \neq i_A^* \text{ se } i \neq i_A^*!$$

Per ottenere un risultato indipendente dall'orizzonte temporale, occorre accettare la seguente ipotesi: reinvestimenti e disinvestimenti avvengono al tasso di valutazione

- i nel caso del VAN $\Rightarrow$ ipotesi in genere accettabile
- i^* nel caso del TIR $\Rightarrow$ ipotesi non realistica (possibili distorsioni)

Valutazione di un'operazione d'investimento finanziata con mix di capitale

Operazione finanziaria $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}/\{0, 1, \ldots, m\}$ con $x_0 < 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_m > 0$

Patrimonio disponibile all'epoca 0: S_0

- se $S_0 \geq |x_0| \Rightarrow$ valutazione in base a TIR o VAN
- se $S_0 < |x_0| \Rightarrow$ ricorso a prestito per importo $D_0 = |x_0| - S_0$
  $\longrightarrow$ quale valutazione dell'operazione complessiva?

Notazione / abbreviazioni

- Capitale proprio (CP), capitale di terzi (CT), capitale investito (CI)
- Rendimento richiesto sul capitale proprio: i
- Tasso di interesse sul capitale di terzi: i_{CT}
  (o i_{deb}: interesse sul "debito")

Esempio

$-1\,000$	500	600
0	1	2

- operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-1\,000, 500, 600\}/\{0, 1, 2\}$
- patrimonio iniziale: $S_0 = 600$
- ricorso a un finanziamento a tasso 10% con restituzione globale dopo un anno; costo opportunità del capitale: 5%

  CI $= 1\,000$, CP $= 600$, CT $= 400$; $i = 5\%$, $i_{\text{CT}} = 10\%$

Impostazioni:

- VAN(G) dei flussi dell'operazione, con tasso il **COSTO MEDIO DEL CAPITALE** (**CMC**) $\Rightarrow$ aggiustamento del tasso
- VAN dei **flussi di capitale proprio**, al tasso i (costo opportunità del capitale) $\Rightarrow$ aggiustamento dei flussi

VAN(G) con tasso di valutazione il CMC WACC

	0	rendimento	1	rendimento	2
CI	$1\,000$	$\boxed{7\%}$	?	$\boxed{5\%}$	
CT	400	10%	0	10%	
CP	600	5%	?	5%	

$$\text{CMC}_1 = \frac{600 \cdot 5\% + 400 \cdot 10\%}{600 + 400} = 7\%, \qquad \text{CMC}_2 = 5\%!$$

VAN:

$$\begin{aligned} G(\text{CMC}) &= -1\,000 + 500(1+\text{CMC}_1)^{-1} + 600(1+\text{CMC}_2)^{-1}(1+\text{CMC}_1)^{-1} \\ &= -1\,000 + \frac{500}{1.07} + \frac{600}{1.07 \cdot 1.05} \simeq 1.34 \end{aligned}$$

(bah)

Aspetti critici

Il calcolo del CMC richiede di stabilire, a ogni epoca, la parte di CI finanziata con CT

- il CT è noto a ogni epoca (debito residuo!)
- qual è il CI?
  - $\rightarrow$ all'epoca 0: $1\,000$
  - $\rightarrow$ all'epoca 2: 0
  - $\rightarrow$ all'epoca 1: ?

Il rendimento i richiesto sul CP è un "tasso attivo", il tasso i_{CT} di indebitamento è un tasso passivo

$\rightarrow$ è razionale farne una media?

L'indice CMC è semplice da capire, ma di difficile implementazione in un orizzonte pluriennale (rischio di scelte approssimate)

VAN dei flussi di CP

	0	1	2
flussi netti (di CP)	-600	60	600
flussi di CT	400	-440	
flussi op. (di CI)	$-1\,000$	500	600

VAN (sul CP):

$$\Gamma(i) = -600 + 60(1+i)^{-1} + 600(1+i)^{-2}$$

è il valore in 0 del capitale aggiuntivo che si renderà disponibile alla scadenza (valore creato)

$$\Gamma(0.05) \simeq 1.36$$

ricordando che $G(0.05) \simeq 20.41$: il capitale di terzi costa più del capitale proprio $\Rightarrow$ minore creazione di valore (ma comunque si crea valore)

In generale: **VAN dei flussi di CP**

operazione di investimento: $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}/\{0, 1, \ldots, m\}$
(flussi di CI)

flussi di finanziamento per l'operazione: $\mathbf{f}/\mathbf{t} = \{f_0, f_1, \ldots, f_m\}/\{0, 1, \ldots, m\}$
per esempio: $f_0 = D_0, f_1 = -R_1, \ldots, f_m = -R_m$ (flussi di CT)

rendimento richiesto sul CP: i

VAN dei flussi netti:

$$\Gamma(i) = \sum_{t=0}^{m} (\overbrace{x_t + f_t}^{\text{flussi CP}}) \cdot (1+i)^{-t} = G(i) + \overbrace{\sum_{t=0}^{m} f_t (1+i)^{-t}}^{\substack{\text{VAN ``prestito''} \\ \gtreqless 0 \text{ se } i_{\text{CT}} \lesseqgtr i}}$$

è anche detto **ADJUSTED PRESENT VALUE (APV)**

Leva finanziaria: può risultare $\Gamma(i) > G(i) \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{m} f_t \, (1+i)^{-t} > 0$
$\Rightarrow$ l'indebitamento crea valore

solitamente, l'effetto leva è misurato in termini di indicatori contabili (ROE, ROI, ...)

Problema 46 *Un commerciante riceve in data odierna uno stock di articoli, di prezzo totale $1\,000$. Possibilità di pagamento:*

- **a** *oggi in contanti con riduzione del 10% del prezzo;*
- **b** *dopo un anno a prezzo intero.*

Valutare la modalità di pagamento più conveniente in base al VAN, tasso annuo 8%, supponendo:

1. *che abbia mezzi propri disponibili in ogni caso;*
2. *che disporrà di mezzi propri solo tra un anno, ma può richiedere un prestito con restituzione globale all'epoca 1, al tasso di interesse del 10%.*

1 **a**

	$1\,000-900$	0
epoca	0	1

$$G_a(0.08)=100$$

b

	$1\,000$	$-1\,000$
epoca	0	1

$$G_b(0.08)=1\,000-\frac{1\,000}{1.08}\simeq 74.07$$

Quindi è preferibile pagare oggi in contanti.

2. **a**

	0	1
CP	$1\,000$	-990
CT	900	-990
CI	$1\,000-900$	0

$$G_a(0.08) \simeq 100$$

$$\Gamma_a(0.08) = 1\,000 - \frac{990}{1.08} \simeq 83.33$$

b

0	1
$1\,000$	$-1\,000$

$$\Gamma_b(0.08) = G_b(0.08) \simeq 74.07$$

Quindi è preferibile ricorrere al prestito per pagare oggi in contanti (anche se $i < i_{\mathsf{CT}}$, un tasso di sconto del 10% corrisponde a un tasso di interesse $i' = \frac{d}{1-d} = \frac{1}{9} \simeq 11.1111\% > i_{\mathsf{CT}}$)

Problema 47 *Un investimento di $10\,000$ euro all'epoca 0 darà origine a flussi in entrata pari a $4\,000$ euro e a flussi in uscita pari a $1\,000$ euro alla fine di ogni anno per i prossimi 5 anni.*

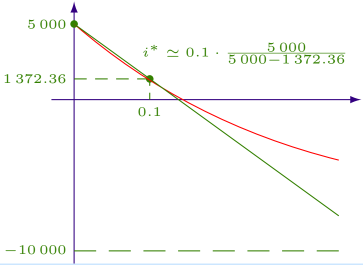
1. *Calcolare il VAN del progetto al tasso annuo d'interesse del 10%.*
2. *Calcolare il VAN sui flussi di capitale proprio nell'ipotesi che il capitale proprio disponibile all'epoca 0 sia $5\,000$ euro e che sia possibile ricorrere a un finanziamento da restituire in 5 anni con rate annue costanti, tasso annuo di interesse 9%.*
3. *Come al punto precedente, con tasso annuo di interesse 12%.*

1.

$-10\,000$	$3\,000$	$3\,000$	$3\,000$	$3\,000$	$3\,000$
0	1	2	3	4	5

$$G(0.1) = -10\,000 + 3\,000 \cdot a_{\overline{5}|0.1}$$
$$\simeq 1\,372.36 \ (>0)$$
$$\Rightarrow i^* > 10\%.$$

Stima $\simeq 13.78\%$ (15.238%)



2. $R = 5\,000 : a_{\overline{5}|0.09} \simeq 1\,285.46$

	0	1	2	$\cdots$	5
CP	$-5\,000$	$1\,714.54$	$1\,714.54$		$1\,714.54$
CT	$5\,000$	$-1\,285.46$	$-1\,285.46$		$-1\,285.46$
CI	$-10\,000$	$3\,000$	$3\,000$		$3\,000$

$G(0.1) \simeq 1\,372.36$

$\Gamma(0.1) = \; -5\,000 + 1\,714.54 \cdot a_{\overline{5}|0.1} \simeq 1\,499.45$

($G_{\text{CT}}(0.1) = 5\,000 - 1\,285.36 \cdot a_{\overline{5}|0.1} \simeq 127.09$:
$i_{CT} < i \quad \Rightarrow$ il prestito crea valore)

3. $R' = 5\,000 : a_{\overline{5}|0.12} \simeq 1\,387.05$ $\qquad 3\,000 - R' = 1\,612.95$

$G(0.1) \simeq 1\,372.36$

$\Gamma'(0.1) = \, -5\,000 + 1\,612.95 \cdot a_{\overline{5}|0.1} \simeq 1\,114.35$

($G_{\mathsf{CT}}(0.1) = 5\,000 - 1\,387.05 \cdot a_{\overline{5}|0.1} \simeq -258.01$:

$i_{CT} > i \quad \Rightarrow$ il prestito distrugge valore)

(ma rende possibile l'operazione, che è ancora vantaggiosa: $\Gamma'(0.1) > 0$)

Problema 48 *Un'attrezzatura di valore pari a $10\,000$ può essere finanziata con leasing o con mutuo.*

- **a** *Leasing: durata 2 anni, 24 canoni mensili, prezzo di riscatto 3% del valore di fornitura, maxicanone dato dagli ultimi tre canoni, tasso contrattuale 8% annuo effettivo, i primi 5 canoni sono del 50% più elevati dei successivi.*
- **b** *Mutuo: 18 versamenti mensili costanti, tasso annuo effettivo 8%.*

Valutare quale soluzione è preferibile, in base al criterio del VAN, tasso annuo (effettivo) 7%.

Prima di tutto, il tasso di valutazione: $i = 0.07 \quad \Rightarrow \quad i_{12} - 1.07^{1/12} - 1 \simeq 0.5654\%$

I finanziamenti sono all'8% annuo effettivo $\quad \Rightarrow \quad i_{12}^{\mathsf{CT}} = 1.08^{1/12} - 1 \simeq 0.6434\%$

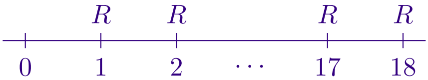
a

$3C$	$1.5C$		$1.5C$	C		C	0	0	300
0	1	$\cdots$	5	6	$\cdots$	21	22	23	24

$$10\,000 = 3C + 0.5C \cdot a_{\overline{5}|\, i_{12}^{\mathsf{CT}}} + C \cdot a_{\overline{21}|\, i_{12}^{\mathsf{CT}}} + 300 \cdot 1.08^{-2} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad C \simeq 389.14$$

b



$R = 10\,000 : a_{\overline{18}|i_{12}^{\mathsf{CT}}} \simeq 590.13$

$G_a(0.07) = 10\,000 - 3C - 0.5C \cdot a_{\overline{5}|i_{12}} - C \cdot a_{\overline{21}|i_{12}} - 300 \cdot 1.07^{-2} \simeq -70.99$

$G_b(0.07) = 10\,000 - R \cdot a_{\overline{18}|i_{12}} \simeq -72.65$

Entrambe distruggono valore ($i_{\mathsf{CT}} > i$).

Conviene il *leasing* (versamenti complessivi: $10\,612.20$ € per il *leasing* contro $10\,622.34$ € con il mutuo; nei primi 18 mesi, con il *leasing* escono solo $9\,144.78$ €)

VAN e EVA

VAN: valore creato da un'operazione finanziaria (o da un'impresa!) nell'intiera durata $(0, m)$

Obiettivo: attribuire il valore creato ai singoli anni.

EVA®: valore creato dall'operazione (o impresa) in un anno

EVA = Utile operativo (NOPAT) − costo del capitale (CI · CMC)

Riferimento: operazione di puro investimento finanziata interamente con CP

Esempio: $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-1\,000, 500, 600\}/\{0, 1, 2\}$

VAN al 5%: $G(0.05) = -1\,000 + 500 \cdot 1.05^{-1} + 600 \cdot 1.05^{-2} = 20.41$

Saldo di cassa (utile monetario): $-1\,000 + 500 + 600 = 100$

→ relativo all'intervallo $(0, 2)$.

Come **dividiamo** l'utile tra i due anni (come lo "**contabilizziamo**")?

Ci possono essere vincoli di natura contabile, fiscale, ecc..

In ogni caso: utile 1° anno: u_1; utile 2° anno: $u_2 = 100 - u_1$

Esempio: $u_1 = 50$, $u_2 = 50$

Bilancio $1°$ anno:

Costo iniziale	$-1\,000$	← c. inv. epoca 0
Ricavo epoca 1	500	
Rimanenza finale	550	→ c. inv. epoca 1
Utile u_1	50	

Bilancio $2°$ anno:

Rimanenza iniziale	-550	← c. inv. epoca 1
Ricavo epoca 1	600	
Rimanenza finale	0	(eh, be')
Utile u_1	50	

Struttura generale:

Rimanenza iniziale (in $t-1$)	$-w_{t-1}$
Ricavo epoca t	$+x_t$
Rimanenza finale (in t)	$+w_t$
Utile u_t	$= -w_{t-1} + x_t + w_t = x_t - (w_{t-1} - w_t)$

Significato delle quantità

Ricavo epoca t: flusso x_t

Rimanenza epoca t: capitale ancora investito nell'operazione (*outstanding capital*), w_t

- per $t = 0$: $w_0 = -x_0$
- per $t = m$: $w_m = 0$
- per $0 < t < m$: da $u_t = -w_{t-1} + x_t + w_t \;\Rightarrow$
  $$\Rightarrow\; w_t = w_{t-1} - x_t + u_t = w_{t-1} - (x_t - u_t)$$

Valore creato in ciascun anno

- $1°$ anno, cioè periodo $(0, 1)$: $\text{EVA}_1 = u_1 - w_0\, i = 50 - 1\,000 \times 0.05 = 0$ (riferito finanziariamente all'epoca 1)
- $2°$ anno, cioè periodo $(1, 2)$: $\text{EVA}_2 = u_2 - w_1\, i = 50 - 550 \times 0.05 = 22.50$ (riferito finanziariamente all'epoca 2)

Valore attuale degli EVA:

$$0 \cdot 1.05^{-1} + 22.50 \cdot 1.05^{-2} = 20.41 = G(0.05) \text{ (VAN)}$$

Altro esempio con i dati di prima: $u_1 = 40,\ u_2 = 60 \qquad (i = 0.05)$

Outstanding capital: $w_0 = 1\,000, \qquad w_2 = 0;$
$w_1 = 1\,000 - 500 + 40 = 540$

$$EVA_1 = u_1 - w_0 i = 40 - 50 = -10$$
$$EVA_2 = u_2 - w_1 i = 60 - 27 = 33$$

Valore attuale degli EVA:

$$-10 \cdot 1.05^2 + 33 \cdot 1.05^{-2} \simeq 20.41 = G(0.05) \text{ (VAN)}$$

In generale

- saldo di cassa (utile monetario totale): $\sum_{t=0}^{m} x_t$
- utili annuali: u_t, con il vincolo $\sum_{t=1}^{m} u_t = \sum_{t=0}^{m} x_t$
- outstanding capital: $w_t = w_{t-1} - x_t + u_t$

- EVA: $\text{EVA}_t = u_t - w_{t-1} i$
- EVA scontato all'epoca 0: $g_t(i) = \text{EVA}_t (1+i)^{-t}$

Si dimostra: $G(i) = \sum_{t=1}^{m} g_t(i) \Rightarrow g_t(i)$: contributo periodale al VAN

L'attribuzione di utile a un anno può essere fatta assegnando il **tasso di rendimento** di quell'anno

Esempio: rendimento costante $\Rightarrow$ TIR

- $u_t = w_{t-1} i^*$ $\qquad \left(i^* = \dfrac{u_t}{w_{t-1}} \right)$
- $w_t = w_{t-1} + u_t - x_t = w_{t-1}(1 + i^*) - x_t$
- $\text{EVA}_t = u_t - w_{t-1} i = w_{t-1}(i^* - i)$
- $g_t(i) = w_{t-1}(i^* - i)(1 + i)^{-t}$

Esempio: rendimento variabile

- $u_t = w_{t-1} i_t^*$ $\qquad \left(i_t^* = \dfrac{u_t}{w_{t-1}} \right)$,
  con il vincolo $\sum_{t=1}^{m} u_t = \sum_{t=0}^{m} x_t \Rightarrow i_m^* = \dots$
- $w_t = w_{t-1}(1 + i_t^*) - x_t$
- $\text{EVA}_t = w_{t-1}(i_t^* - i)$
- $g_t(i) = w_{t-1} \, (i_t^* - i) \, (1 + i)^{-t}$

In ogni caso, rimane $G(i) = \sum_{t=1}^{m} g_t(i)$

Problema 49 *Operazione di investimento con esborso iniziale di $5\,000$ euro e flussi in entrata di $2\,800$ euro e $3\,200$ euro rispettivamente dopo 1 e 2 anni.*

1. *Calcolare il VAN del progetto, al tasso annuo del 10%.*
2. *Calcolare gli EVA e i contributi periodali al VAN, attribuendo utili a ciascun anno in modo proporzionale al TIR.*
3. *Come al punto (2), ma assegnando utili annui costanti.*
4. *Come al punto (2), ma assumendo un tasso interno di rendimento per il primo anno pari all'11%.*

$-5\,000$	$2\,800$	$3\,200$
0	1	2

1. $G(0.1) = -5\,000 + 2\,800 \cdot 1.1^{-1} + 3\,200 \cdot 1.1^{-2} \simeq 190.09 > 0$

   (il TIR sarà quindi $> 10\%$; stima $\simeq 12.5\%$)

2. TIR: $\overset{25}{5\,000}(1+i)^2 - \overset{14}{2\,800}(1+i) - \overset{16}{3\,200} = 0$

$$1 + i^* = \frac{7 + \sqrt{49 + 400}}{25} \simeq 1.12758 \qquad i^* \simeq 12.758\%$$

2

$-5\,000$	$2\,800$	$3\,200$
0	1	2

$i = 10\%, \qquad G(0.1) \simeq 190.09$

$i^* \simeq 12.758\%$

utili e *outst. cap.*

$$w_0 = 5\,000 \qquad u_1 = 5\,000 \cdot i^* \simeq 637.92$$

$$w_1 = 5\,000 - 2\,800 + 637.92 \simeq 2\,837.92$$

$$u_2 = 2\,837.92 \cdot i^* \simeq 362.08$$

$$w_2 = 2\,837.92 - 3\,200 + 362.08 = 0$$

N.B.: $x_0 + x_1 + x_2 = 1\,000 = u_1 + u_2$

$$\text{EVA}_1 = w_0(i^* - i) = u_1 - 500 \simeq 137.92$$

$$\text{EVA}_2 = w_1(i^* - i) = u_2 - 283.79 \simeq 78.28$$

$$g_1 = \text{EVA}_1 \cdot 1.1^{-1} \simeq 125.38$$

$$g_2 = \text{EVA}_2 \cdot 1.1^{-2} \simeq 64.70$$

$$g_1 + g_2 = 190.08 = \text{VAN}$$

3. $$\begin{array}{ccc} -5\,000 & 2\,800 & 3\,200 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$i = 10\%, \qquad G(0.1) \simeq 190.09$

$i^* \simeq 12.758\%$

$$u_1 = u_2 = \frac{1\,000}{2} = 500$$

$$w_1 = 5\,000 + 2\,800 - 500 = 2\,700$$

$$w_2 = 2\,700 + 3\,200 - 500 = 0$$

$$\mathsf{EVA}_1 = u_1 - w_0 i = 500 - 500 = 0$$

$$\mathsf{EVA}_2 = u_2 - w_1 i = 500 - 270 = 230$$

$$g_1 = \mathsf{EVA}_1 \cdot 1.1^{-1} = 0$$

$$g_2 = \mathsf{EVA}_2 \cdot 1.1^{-2} \simeq 190.08 = \mathsf{VAN}$$

4. Timeline: $-5\,000$ at time 0, $2\,800$ at time 1, $3\,200$ at time 2.

$i = 10\%,\quad G(0.1) \simeq 190.09$

$i_1^* = 11\%$

$w_0 = 5\,000 \qquad u_1 = 5\,000 \cdot i_1^* = 550$

$w_1 = 5\,000 - 2\,800 + 550 = 2\,750$

$u_2 = 1\,000 - u_1 = 450$

$w_2 = 2\,750 - 3\,200 + 450 = 0$

N.B.: $i_2^* = u_2/w_1 = 450/2\,750 \simeq 16.36\%$

$\mathsf{EVA}_1 = 550 - 500 = 50$

$\mathsf{EVA}_2 = 450 - 275 = 175$

$g_1 = \mathsf{EVA}_1 \cdot 1.1^{-1} \simeq 45.45$

$g_2 = \mathsf{EVA}_2 \cdot 1.1^{-2} \simeq 144.63$

$g_1 + g_2 = 190.08 = \mathsf{VAN}$

VAN e EVA in presenza di CT

Utile totale dell'operazione di investimento: $\sum_{t=0}^{m} x_t$

Utili annuali: u_t t.c. $\sum_{t=1}^{m} u_t = \sum_{t=0}^{m} x_t$

Outstanding capital:

- calcolati come nel caso precedente: $w_t = w_{t-1} - x_t + u_t$
- rappresentano il capitale investito nell'operazione all'epoca t
- scomposizione: $w_t = \underbrace{D_t}_{\text{CT}} + \underbrace{w_t - D_t}_{\text{CP}}$

Possibile espressione dell'utile annuo: $u_t = w_{t-1}\, i_t^* \quad \Rightarrow \quad i_t^* = u_t / w_{t-1}$

costo CP: $(w_{t-1} - D_{t-1})i$

costo CT: $I_t = D_{t-1} i_{\text{CT}}$

costo CI: $(w_{t-1} - D_{t-1})i + D_{t-1} i_{\text{CT}} = w_{t-1}\text{CMC}_t \Rightarrow \text{CMC}_t = \cdots$

valore creato in un anno: $\text{EVA}_t = w_{t-1} i_t^* - w_{t-1} \cdot \text{CMC}_t = w_{t-1}(i_t^* - \text{CMC}_t)$

contributi periodali al VAN sul CP: $\gamma_t(i) = \text{EVA}_t (1+i)^{-t}$

VAN sul capitale proprio: $\Gamma(i) = \sum_{t=1}^{m} \gamma_t(i) = \sum_{t=1}^{m} \text{EVA}_t (1+i)^{-t}$

Problema 50 *Con i dati dell'esercizio precedente, supporre che il capitale disponibile all'epoca* 0 *sia* $2\,000$ *€ e che sia possibile ricorrere a un prestito di durata biennale, da restituire con rate annue costanti, tasso annuo di interesse* 8.5%*. Calcolare il VAN sul capitale proprio e la sua scomposizione in contributi periodali (outstanding capital in base al TIR).*

	0	1	2
fl. CP	$-2\,000$	$1\,106.15$	$1\,506.15$
fl. CT	$3\,000$	$-R$	$-R$
fl. CI	$-5\,000$	$2\,800$	$3\,200$

$$R = 3\,000 : a_{\overline{2}|0.085} \simeq 1\,693.85$$

$$\Gamma(0.1) = -2\,000 + 1\,106.15 \cdot 1.1^{-1} + 1\,506.15 \cdot 1.1^{-2} \simeq 250.34 > 0$$

Già visto (Problema 49, luc. 183) che $G(0.01) = 190.08$: il prestito crea valore ($8.5\% = i_{\text{CT}} < i = 10\%$)

Dati utili per la decomposizione:

$$D_1 = 1\,693.85 \cdot a_{\overline{1}|0.085} = 1\,693.85 \cdot 1.085^{-1} \simeq 1\,561.15;$$

$u_1 \simeq 637.92$, $u_2 \simeq 362.08$, $w_1 \simeq 2\,837.92$ (Problema 49, luc. 184)

$$\mathsf{CMC}_1 = \big((w_0 - D_0)i + D_0 i_{\mathsf{CT}}\big) : w_0 = $$
$$= \big(2\,000 \cdot 0.1 + 3\,000 \cdot 0.085\big) : 5\,000 = 0.091$$

$$\mathsf{CMC}_2 = \big((w_1 - D_1)i + D_1 i_{\mathsf{CT}}\big) : w_1 = $$
$$= \big((2\,837.92 - 1\,561.15) \cdot 0.1 + 1\,561.15 \cdot 0.085\big) : 2\,837.92 \simeq 0.0917$$

$$\mathsf{EVA}_1 = u_1 - w_0 \cdot \mathsf{CMC}_1 = 637.92 - 5\,000 \cdot 0.091 \simeq 182.92$$

$$\mathsf{EVA}_2 = u_2 - w_1 \cdot \mathsf{CMC}_2 = 362.08 - 2\,837.92 \cdot 0.0917 \simeq 101.70$$

(ma anche sostituendo il CMC:

$$\mathsf{EVA}_t = u_t - \big((w_{t-1} - D_{t-1})i + D_{t-1} i_{\mathsf{CT}}\big) = w_{t-1}(i^* - i) + D_{t-1}(i - i_{\mathsf{CT}})$$

o direttamente $\mathsf{EVA}_t = w_{t-1}(i^* - \mathsf{CMC}_t)$)

$$\gamma_1 = \mathsf{EVA}_1 \cdot 1.1^{-1} \simeq 166.29$$
$$\gamma_2 = \mathsf{EVA}_2 \cdot 1.1^{-2} \simeq 84.05$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 250.34 = \Gamma(0.1)$$

Funzione valore e prezzi di mercato

Riferimento: prezzi sul mercato **secondario** dei titoli obbligazionari *default-free*

- ZCB: $\{-P, C\}/\{0, m\}$
- titoli con cedola (certa): $\{-P, I, I, \ldots, I + C\}/\{0, 1, 2, \ldots, m\}$

Ipotesi sul funzionamento del mercato

Mercato perfetto:

- assenza di **attriti** (assenza di costi di transazione, assenza di imposizione fiscale, titoli infinitamente divisibili, possibilità di vendite allo scoperto – *short sales*)
- **competitività** (gli agenti sono massimizzatori del profitto e price taker)
- assenza di rischio di insolvenza

Principio di coerenza nella formazione dei prezzi: **assenza di opportunità di arbitraggio**

L'operazione finanziaria $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}/\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ è un **ARBITRAGGIO NON RISCHIOSO** se $\mathbf{x}$ non contiene flussi di segno opposto

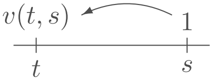
- arbitraggio **immediato**: $x_0 > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$
- arbitraggio **a scadenza** (o **differito**): $x_0 = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$ con $x_t > 0$ per qualche t.

Assenza di opportunità sistematiche di arbitraggio: eventuali opportunità di profitti certi (cioè senza rischio) sono temporanee (sono riassorbite dal mercato mediante la contrattazione)

La **legge del prezzo unico**

due contratti con lo stesso *pay-off* (cioè flussi) devono avere lo stesso prezzo (altrimenti consentono arbitraggi)

Titoli a cedola nulla unitari (ZCB)



Epoca corrente: t

Titolo di rif.: ZCB con valore nominale 1, scadenza epoca s, $s \geq t$

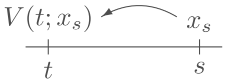
Prezzo in t dello ZCB con v.n. unitario e scadenza epoca s: $v(t,s)$, $t \leq s$
(notazione alternativa: $B(t,s)$)

- interpretazione: $v(t,s) \rightarrow$ fattore di sconto
- è detto **PREZZO A PRONTI** (o ***spot price***)
  (in $t \equiv$ epoca corrente)

Proprietà (vincoli) del prezzo

- positività: $v(t,s) > 0$
- valore unitario in assenza di differimento: $v(s,s) = 1$
- postulato di impazienza: $v(t,s) < 1$ per $t < s$
- decrescenza rispetto alla scadenza (postulato di rendimento del denaro):
  $v(t,s') > v(t,s'')$ se $s' < s''$

Titoli a cedola nulla non unitari

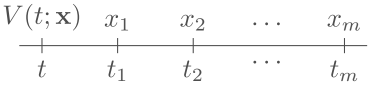


ZCB con v.n. x_s all'epoca s

Prezzo corrente: $V(t;x_s)$, $t \leq s$

- il titolo è "replicabile" con x_s ZCB unitari $\Rightarrow$ deve risultare: $V(t;x_s) = x_s \cdot v(t,s)$ (proporzionalità rispetto all'importo)

Portafogli di ZCB con diversa scadenza *E* titoli obbligazionari



Titolo con flussi (futuri, non tutti nulli)
$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$

Prezzo all'epoca t: $V(t;\mathbf{x})$

- il titolo è replicabile con x_1 ZCB unitari scad. in t_1, x_2 ZCB unitari scad. t_2, ... $\Rightarrow$ deve risultare

$$V(t;\mathbf{x}) = x_1 \cdot v(t,t_1) + x_2 \cdot v(t,t_2) + \cdots + x_m \cdot v(t,t_m)$$

(linearità del prezzo rispetto all'importo) ...è il VAN! (G)

Problema 51 *In un mercato sono disponibili ZCB unitari a 1, 2 e 3 anni, con prezzi rispettivamente pari a 0.95694, 0.91136, 0.86384. Dato un titolo obbligazionario con durata residua 3 anni, cedole annue, tasso cedolare 10%, valore nominale $1\,000$*

1. *calcolarne il prezzo coerente con i prezzi degli ZCB;*
2. *verificare la presenza di opportunità di arbitraggio se il prezzo del titolo è $P = 1\,100$ e costruire un portafogli di arbitraggio.*

1. $v(0,1) = 0.95694$
   $v(0,2) = 0.91136$
   $v(0,3) = 0.86384$

$$\begin{aligned} V(0, \mathbf{x}) &= 100 \cdot v(0,1) + 100 \cdot v(0,2) + 1\,100 \cdot v(0,3) \\ &= 100 \cdot 0.95694 + 100 \cdot 0.91136 + 1\,100 \cdot 0.86384 \\ &= 1\,137.05 \end{aligned}$$

2. Se $P = 1\,100 < 1\,137.05 = V(0;\mathbf{x})$, conviene **comprare** il titolo obbligazionario e vendere il portafogli di zcb che lo replica (ricordiamo: $v(0,1) = 0.95694$, $v(0,2) = 0.91136$, $v(0,3) = 0.86384$)

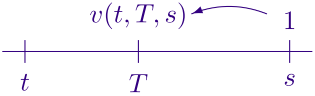
Operazione	Flussi			
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
acq. titolo obbl.	$-1\,100$	100	100	$1\,100$
vendo scop. $1\,100$ zcb 3a	950.22			$-1\,100$
vendo scop. 100 zcb 2a	91.136		-100	
vendo scop. 100 zcb 1a	95.694	-100		
	37.05	//	//	//

dove $37.05 = 1\,137.05 - 1\,100$: **arbitraggio immediato**.

Contratti a termine (o forward)

Contratto a termine (o forward): al tempo t si fissa il prezzo da corrispondere in T ($T > t$) per ricevere un dato oggetto

PREZZO A TERMINE (o **PREZZO FORWARD**) di uno ZCB unitario: prezzo fissato all'epoca t, da corrispondere all'epoca T (differimento) per ricevere 1 euro all'epoca s (scadenza), $t \leq T \leq s$: $v(t, T, s)$

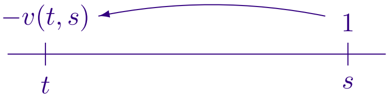


Banalmente, se $T = t \Rightarrow v(t, t, s) = v(t, s)$

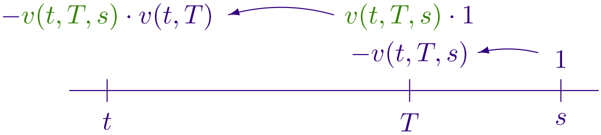
Relazione tra prezzi a pronti e prezzi a termine

All'epoca t, si vuole acquistare la disponibilità di 1 euro all'epoca s

I modo: acq. un contratto a pronti.



II modo: acq. un contratto a termine con differimento T e scad $s + v(t,T,s)$ contratti a pronti con scad. in T



Per evitare arbitraggi: $\boxed{v(t,s) = v(t,T) \times v(t,T,s)}$

$\Rightarrow$ **CONDIZIONE DI NON ARBITRAGGIO SUI PREZZI**

Conseguenza: la legge finanziaria alla base dei prezzi $v(t,s)$ deve essere **scindibile** $\Rightarrow$ legge esponenziale

Risulta: $v(t,T,s) = \frac{v(t,s)}{v(t,T)}$ $\Rightarrow$ prezzi a termine **IMPLICITI** nei tassi a pronti

Proprietà

- positività: $v(t,T,s) > 0$ per $t \le T \le s$
- differimento pari alla scadenza: $v(t,s,s) = 1$ per $t \le s$
- decrescenza rispetto alla scadenza: $v(t,T,s') > v(t,T,s'')$ se $s' < s''$
- crescenza rispetto all'epoca di differimento: $v(t,T',s) < v(t,T'',s)$ se $T' < T''$

Problema 52 *In un mercato strutturato su 3 anni sono disponibili ZCB unitari a 1, 2 e 3 anni, con prezzo rispettivamente pari a 0.95694, 0.91136, 0.86384. Calcolare i prezzi a termine impliciti.*

$$v(0,1) = 0.95694$$
$$v(0,2) = 0.91136$$
$$v(0,3) = 0.86384$$

$$v(0,1,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1)} = \frac{0.91136}{0.95694} \simeq 0.95237$$

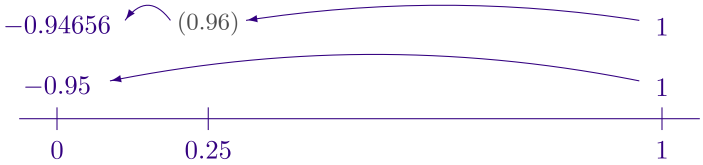
$$v(0,1,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,1)} = \frac{0.86384}{0.95694} \simeq 0.90271$$

$$v(0,2,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,2)} = \frac{0.86384}{0.91136} \simeq 0.94786$$

Problema 53 *In* $t = 0$ *sul mercato sono in vigore i prezzi* $v(0, 0.25) = 0.986$, $v(0, 1) = 0.95$, $v(0, 0.25, 1) = 0.96$. *Verificare la possibilità di arbitraggi e costruire un portafogli di arbitraggio.*

$$v(0, 0.25) \cdot v(0, 0.25, 1) = 0.986 \cdot 0.96 = 0.94656 < 0.95$$

Quindi è possibile un arbitraggio vendendo lo zcb a un anno



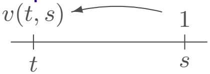
Portafogli di arbitraggio:

Operazione	Flussi		
	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 1$
vendo scop. 1 unità zcb 1 anno	$+0.95$		-1
acquisto 1 unità contratto termine		-0.96	1
acquisto 0.96 unità zcb 3 mesi	-0.94656	0.96	

Tassi a pronti e tassi a termine (o impliciti)

$$v(0,t) = (1+i)^{-t}$$

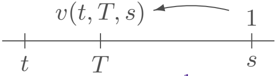
Assenza di opportunità di arbitraggio $\Rightarrow$ legge esponenziale



TASSO A PRONTI (o **TASSO SPOT**)

da $v(t,s) = (1+i(t,s))^{-(s-t)} \;\Rightarrow\; i(t,s) = v(t,s)^{-\frac{1}{s-t}} - 1$
(notazione alternativa per il tasso a pronti: $y(t,s)$)

- rappresenta il rendimento alla scadenza dello ZCB unitario



TASSO A TERMINE (o **TASSO FORWARD**)

da $v(t,T,s) = (1+i(t,T,s))^{-(s-T)} \;\Rightarrow\; i(t,T,s) = v(t,T,s)^{-\frac{1}{s-T}} - 1$
(notazione alternativa per il tasso a termine: $f(T,s)$)

Relazione tra tassi a pronti e tassi a termine

- dalla condizione di non arbitraggio sui prezzi

$$v(t,s) = v(t,T) \cdot v(t,T,s),$$

  sostituendo si ottiene

$$\big(1+i(t,s)\big)^{-(s-t)} = \big(1+i(t,T)\big)^{-(t-T)} \cdot \big(1+i(t,T,s)\big)^{-(s-T)}.$$

Si possono ottenere anche le seguenti espressioni (alternative):

$$
\begin{aligned}
i(t,T,s) &= \left(\frac{(1+i(t,s))^{-(s-t)}}{(1+i(t,T))^{-(T-t)}}\right)^{-1/(s-T)} - 1 \\
&= \left(\frac{v(t,s)}{v(t,T)}\right)^{-1/(s-T)} - 1 \\
&= \left(\frac{v(t,T)}{v(t,s)}\right)^{1/(s-T)} - 1 \\
&= \left(\frac{(1+i(t,s))^{(s-t)}}{(1+i(t,T))^{(T-t)}}\right)^{1/(s-T)} - 1.
\end{aligned}
$$

Problema 54 *In un mercato strutturato su 3 anni, sono disponibili ZCB unitari a 1, 2 e 3 anni, con prezzi rispettivamente pari a 0.95694, 0.91136, 0.86384. Calcolare i tassi a pronti e i tassi a termine.*

$$v(0,1) = 0.95694 \qquad v(0,1,2) = \tfrac{v(0,2)}{v(0,1)} = 0.95327$$

$$v(0,2) = 0.91136 \qquad v(0,1,3) = \tfrac{v(0,3)}{v(0,1)} = 0.90271$$

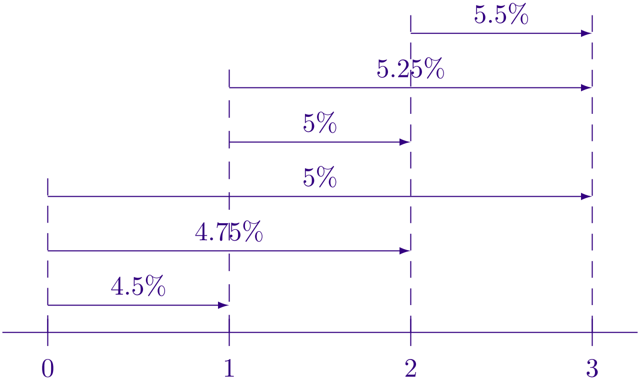
$$v(0,3) = 0.86384 \qquad v(0,2,3) = \tfrac{v(0,3)}{v(0,2)} = 0.94786$$

$$i(0,1) = \frac{1}{v(0,1)} - 1 = 4.5\% \qquad i(0,1,2) = \frac{1}{v(0,1,2)} - 1 = 5\%$$

$$i(0,2) = \left[\frac{1}{v(0,2)}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 4.75\% \qquad i(0,1,3) = \left[\frac{1}{v(0,1,2)}\right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 5.25\%$$

$$i(0,3) = \left[\frac{1}{v(0,3)}\right]^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 5\% \qquad i(0,2,3) = \frac{1}{v(0,2,3)} - 1 = 5.5\%$$

Tassi annui: abbiamo trovato $i(0,1) = 4.5\%$, $i(0,2) \simeq 4.75\%$, $i(0,3) \simeq 5\%$, $i(0,1,2) = 5\%$, $i(0,1,3) \simeq 5.25\%$, $i(0,2,3) = 5.5\%$.

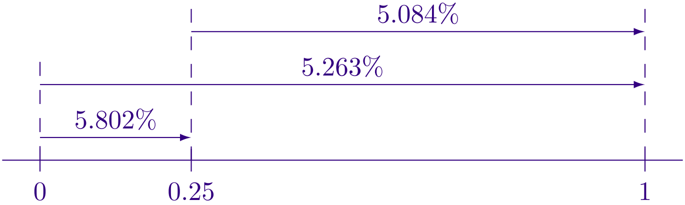


Problema 55 *In $t = 0$, nel mercato sono in vigore i prezzi $v(0, 0.25) = 0.986$, $v(0, 1) = 0.95$, $v(0, 0.25, 1) = 0.9634888$. Ricavare i corrispondenti tassi a pronti e a termine.*

$$v(0, 0.25) = 0.986 \qquad i(0, 0.25) = \left[\frac{1}{0.986}\right]^4 - 1 \simeq 5.802\%$$

$$v(0, 1) = 0.95 \qquad i(0, 1) = \frac{1}{0.95} - 1 \simeq 5.263\%$$

$$v(0.25, 1) = 0.96349 \qquad i(0.25, 1) = \left[\frac{1}{0.96349}\right]^{\frac{4}{3}} - 1 \simeq 5.084\%$$



La struttura per scadenze a pronti

All'epoca t il mercato sia strutturato su m periodi, con scadenzario $t_k = t + k$, $k = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow$ scadenzario del mercato $\mathbf{t} = \{t+1, t+2, \ldots, t+m\}$

STRUTTURA PER SCADENZE DEI PREZZI A PRONTI:
insieme $\{v(t,s),\ s = t+1, t+2, \ldots, t+m\}$

- detta anche **struttura a termine** (*term structure*)
- date le ipotesi sul *rating* dei titoli, detta anche **struttura *default-free***
- data l'assenza di opportunità di arbitraggio, il **prezzo** in t di un titolo con flussi $\mathbf{z}/\mathbf{t} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}/\mathbf{t}$ dev'essere:

$$V(t;\mathbf{z}) = z_1 v(t,t_1) + z_2 v(t,t_2) + \cdots + z_m v(t,t_m).$$

STRUTTURA PER SCADENZE DEI TASSI D'INTERESSE:
insieme $\{i(t,s),\ s = t+1, t+2, \ldots, t+m\}$.

Problema 56 *In $t = 0$, il mercato sia strutturato su tre anni e siano osservati i prezzi:* $V(0; x_1) = 95$, $V(0; x_2) = 18$, $V(0; x_3) = 42$, *essendo* $x_1 = 100$, $x_2 = 20$, $x_3 = 50$. *Costruire la struttura dei prezzi e dei tassi a pronti.*

$$\begin{array}{cc} -95 & 100 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \qquad v(0,1) = \frac{95}{100} = 0.95$$

$$\begin{array}{cc} -18 & 20 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \qquad v(0,2) = \frac{18}{20} = 0.9$$

$$\begin{array}{cc} -42 & 50 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad v(0,3) = \frac{42}{50} = 0.84$$

$$i(0,1) = \tfrac{1}{0.95} - 1 \simeq 5.263\%$$

$$i(0,2) = \left[\tfrac{1}{0.9}\right]^{1/2} - 1 \simeq 5.409\%$$

$$i(0,3) = \left[\tfrac{1}{0.84}\right]^{1/3} - 1 \simeq 5.984\%$$

Problema 57 *Nella tabella sono riportati i prezzi a pronti di ZCB unitari osservati in $t = 0$ su un mercato strutturato su 6 semestri. Calcolare i corrispondenti tassi a pronti, su base semestrale e su base annua.*

s (semestri)	$v(0, s)$	$i_2(0, s)$ (semestri)	$i(0, \frac{s}{2})$ (anni)
1	0.980021	0.02039	0.04119
2	0.957333	0.02204	0.04457
3	0.934753	0.02275	0.04601
4	0.919159	0.02130	0.04305
5	0.906323	0.01987	0.04013
6	0.889286	0.01975	0.03989

$$i_2(0,1) = v(0,1)^{-1} - 1, \qquad \ldots, \qquad i_2(0,5) = v(0,5)^{-1/5} - 1, \ldots.$$

$$i(0,0.5) = v(0,1)^{-2} - 1, \qquad \ldots, \qquad i_2(0,2.5) = v(0,2.5)^{-2/5} - 1, \ldots.$$

Nota: naturalmente $1 + i\left(0, \frac{s}{2}\right) = \left(1 + i_2(0, s)\right)^2$!

Le strutture per scadenze implicite

Data $\{v(t,s),\ s = t+1, t+2, \ldots, t+m\}$, la **STRUTTURA DEI PREZZI IMPLICITI** è l'insieme

$$\{v(t,T,s),\ s = t+1, t+2, \ldots, t+m,\ T = t+1, t+2, \ldots, s-1\},$$

con $v(t,T,s) = \frac{v(t,s)}{v(t,T)}$.

La **STRUTTURA DEI TASSI IMPLICITI** è

$$\{i(t,T,s),\ s = t+1, t+2, \ldots, t+m,\ T = t+1, t+2, \ldots, s-1\}.$$

La struttura per scadenze in termini di intensità

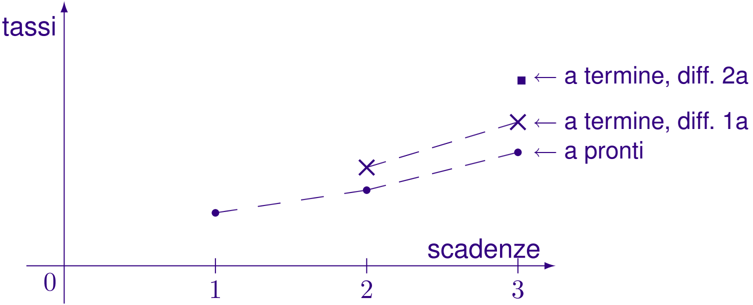
Dato $\delta(t,s) = \ln(1 + i(t,s))$, è sempre possibile esprimere la struttura per scadenza in termini di **intensità istantanea** d'interesse

Problema 58 *Con i dati dell'Esercizio 56, costruire i prezzi e i tassi a termine impliciti. Confrontare i tassi a termine con i tassi a pronti e spiegare perché risulta* $i(0,1,2) > i(0,2)$.

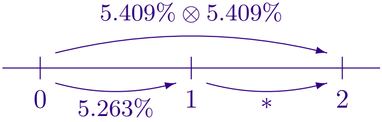
$$v(0,1,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1)} = \frac{0.9}{0.95} \simeq 0.94737$$
$$v(0,1,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,1)} = \frac{0.84}{0.95} \simeq 0.88421$$
$$v(0,2,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,2)} = \frac{0.84}{0.9} \simeq 0.93333$$

$$i(0,1,2) = v(0,1,2)^{-1} - 1 \simeq 0.05556$$
$$i(0,1,3) = v(0,1,3)^{-1/2} - 1 \simeq 0.06346$$
$$i(0,2,3) = v(0,2,3)^{-1} - 1 \simeq 0.07143$$

Abbiamo $i(0,1) \simeq 5.263\%$, $i(0,2) \simeq 5.409\%$, $i(0,3) \simeq 5.984\%$ (Esercizio 56) e $i(0,1,2) \simeq 5.556\%$, $i(0,1,3) \simeq 6.346\%$, $i(0,2,3) \simeq 7.143\%$ (lucido precedente).



Perché?



Per assenza di arbitraggi, **deve** essere $* > 5.409\%$!

Andamento dei tassi a pronti: può risultare

- $i(t, t+1) < i(t, t+2) < \ldots \Rightarrow$ **STRUTTURA CRESCENTE**
- $i(t, t+1) > i(t, t+2) > \ldots \Rightarrow$ **STRUTTURA DECRESCENTE**
- $i(t, t+1) = i(t, t+2) = \ldots \Rightarrow$ **STRUTTURA PIATTA**
- tassi crescenti fino a una certa scadenza, poi decrescenti $\Rightarrow$ **STRUTTURA GOBBA** (o **HUMPED**)

Relazione tra tassi a pronti e tassi a termine

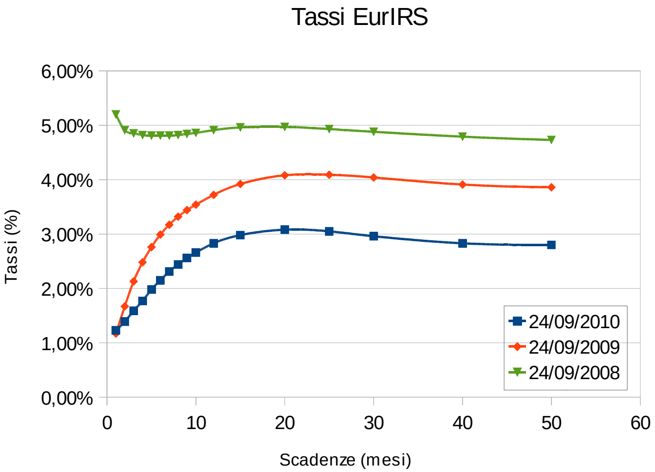
- se $i(t, t+1) < i(t, t+2)$, allora $i(t, t+1, t+2) > i(t, t+2)$. Infatti:

$>1!$

$$\begin{aligned} 1 + i(t, t+1, t+2) &= \frac{[1 + i(t, t+2)]^2}{1 + i(t, t+1)} = \\ &= \left[\frac{1 + i(t, t+2)}{1 + i(t, t+1)}\right] \cdot \big(1 + i(t, t+2)\big) > 1 + i(t, t+2). \end{aligned}$$

Curva Eurirs (*Euro Interest Rate Swap*, considerati *risk free*)

Tassi $i(0,t)$ al 24/9/2008, al 24/9/2009, al 24/9/2010.



Mercato completo: all'epoca t sono disponibili titoli per ogni scadenza

Se non ci sono ZCB per ogni scadenza, ma sono comunque disponibili titoli con cedola per le varie scadenze, il mercato è comunque completo e si può ricavare **tutta** la struttura per scadenze

Problema 59 *In $t = 0$, un mercato è strutturato su 4 anni. Sono noti i prezzi a pronti $v(0,1) = 0.95493$, $v(0,2) = 0.91067$, $v(0,3) = 0.86772$. Il prezzo di un titolo obbligazionario di durata residua 4 anni, cedole annue pari a 100, valore nominale $1\,000$, è $1\,150$. Ricavare il prezzo a pronti a 4 anni.*

$-1\,150$	100	100	100	$100 + 1\,000$
0	1	2	3	4

Equilibrio: il prezzo del TO dev'essere il **valore attuale** dei flussi scontati con fattori di sconto i prezzi a pronti.

$$
\begin{aligned}
1\,150 &= 100 \cdot v(0,1) + 100 \cdot v(0,2) + 100 \cdot v(0,3) + 1\,100 \cdot v(0,4) \\
&= 95.443 + 91.067 + 86.772 + 1\,100 \cdot v(0,4)
\end{aligned}
$$

$$
v(0,4) = \frac{1\,150 - 95.443 - 91.067 - 86.772}{1\,100} \simeq 0.79697
$$

Rendimento alla scadenza di un titolo obbligazionario (*yield to maturity*):
tasso i^* t.c. prezzo corrente $=$ valore attuale flussi futuri $\longleftarrow$ **TIR!**

Titolo di prezzo corrente (all'epoca $t = 0$) P e flussi futuri
$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{1, 2, \ldots, m\}$

- equazione che definisce il rendimento alla scadenza:

$$P = x_1(1+i)^{-1} + x_2(1+i)^{-2} + \cdots + x_m(1+i)^{-m}$$

  ... che cosa ci ricorda?
- soluzione numerica [non in programma]

In assenza di opportunità di arbitraggio, deve anche risultare

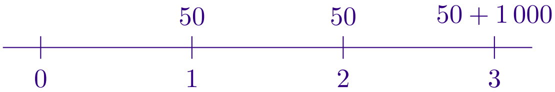
$$\begin{aligned} P &= x_1 \cdot v(0,1) + x_2 \cdot v(0,2) + \cdots + x_m \cdot v(0,m) \\ &= x_1\big(1+i(0,1)\big)^{-1} + x_2\big(1+i(0,2)\big)^{-2} + \cdots + x_m\big(1+i(0,m)\big)^{-m} \end{aligned}$$

quindi i^* è una **media** (opportunamente definita) dei tassi a pronti

Problema 60 *Dati i prezzi a pronti $v(0,1) = 0.95666$, $v(0,2) = 0.91713$, $v(0,3) = 0.87806$ e un titolo obbligazionario di durata residua 3 anni, cedole annue al tasso cedolare del 5%, valore nominale $1\,000$,*

1. *calcolare il prezzo corrente (di non arbitraggio) del titolo obbligazionario;*
2. *scrivere l'equazione del rendimento alla scadenza del titolo e indicare il range in cui assume valore;*
3. *verificare la possibilità di arbitraggio se il prezzo corrente del titolo è pari a $1\,200$ (costruire il portafogli di arbitraggio).*

1.



$$
\begin{aligned}
P &= 50 \cdot v(0,1) + 50 \cdot v(0,2) + 1\,050 \cdot v(0,3) \\
&= 50 \cdot 0.95666 + 50 \cdot 0.91713 + 1\,050 \cdot 0.87806 \\
&= 1\,015.65 \qquad (= V(0, \mathbf{x}), \text{“prezzo di equilibrio”})
\end{aligned}
$$

N.B.: $P > C$ (“sopra la pari”) $\implies$ $i^* < 5\%$

2. Il **rendimento alla scadenza** è l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$1015.65 = 50(1+i)^{-1} + 50(1+i)^{-2} + 1\,050(1+i)^{-3}$$

I **tassi a pronti** sono:

$i(0,1) = 0.95666^{-1} - 1 = 4.530\%$
$i(0,2) = 0.91713^{-1/2} - 1 = 4.420\%$
$i(0,3) = 0.87806^{-1/3} - 1 = 4.430\%$

quindi $4.42\% < i^* < 4.53\%$
anzi, $i^* \approx 4.43\%$ $(1050 \gg 50!)$
si trova $i^* \simeq 4.431\%$

3. Se il prezzo è 1200, conviene **vendere** il titolo:

Operazione	Flussi			
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
vendo TO	$1\,200$	-50	-50	$-1\,050$
acq. $1\,050$ zcb 3a	$-1\,050 \cdot v(0,3)$			$1\,050$
acq. 50 zcb 2a	$-50 \cdot v(0,2)$		50	
acq. 50 zcb 1a	$-50 \cdot v(0,1)$	50		
	184.35	//	//	//

$1200 - 1\,015.65 = 184.35 > 0$: **arbitraggio immediato**.

Problema 61 *In un mercato strutturato su 5 periodi (anni) i tassi a pronti con scadenza da 1 a 4 anni sono rispettivamente 3%, 3.3%, 3.7%, 4.2%.*

1. *Calcolare i prezzi a pronti con scadenza da 1 a 4 anni, il tasso forward per impieghi differiti 1 anno e scadenza all'epoca 2, il prezzo forward per impieghi da 1 a 4 anni.*
2. *Dato un titolo obbligazionario con vita residua 5 anni, cedole annue pari a 100 ciascuna, valore di rimborso $1\,000$, prezzo corrente $1\,290$, calcolare il tasso a pronti a 5 anni.*
3. *Mostrare che se sul mercato fosse disponibile uno ZCB a 5 anni con prezzo 0.82 sarebbe possibile realizzare un arbitraggio.*

1. $$\begin{aligned} v(0,1) &= \big(1+i(0,1)\big)^{-1} = 1.03^{-1} = 0.97087 \\ v(0,2) &= \big(1+i(0,2)\big)^{-2} = 1.033^{-2} = 0.93713 \\ v(0,3) &= \big(1+i(0,3)\big)^{-3} = 1.037^{-1} = 0.89673 \\ v(0,4) &= \big(1+i(0,4)\big)^{-4} = 1.042^{-1} = 0.84826 \end{aligned}$$

$$i(0,1,2) = \left[\frac{v(0,2)}{v(0,1)}\right]^{-1} - 1 = 0.036$$

$$v(0,1,4) = \frac{v(0,4)}{v(0,1)} = 0.87371$$

2.

$-1\,290$	100	100	100	100	$100 + 1\,000$
0	1	2	3	4	5

$$1290 = 100 \cdot v(0,1) + 100 \cdot v(0,2) + 100 \cdot v(0,3) + 100 \cdot v(0,4) + 1\,100 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{incognita}}}{v(0,5)}$$

$$\begin{aligned} v(0,5) &= \frac{1\,290 - 100 \cdot v(0,1) - 100 \cdot v(0,2) - 100 \cdot v(0,3) - 100 \cdot v(0,4)}{1\,100} \\ &= 0.84056 \end{aligned}$$

$$i(0,5) = v(0,5)^{-1/5} - 1 = 0.03534$$

3. Siccome prezzo effettivo $= 0.82 \neq 0.84060 =$ prezzo calcolato con TO, **sono possibili arbitraggi**

$0.82 < 0.84060 \quad \Rightarrow \quad$ conviene comprare il bond e **vendere il TO**

Portafogli di arbitraggio:

Operazione	Flussi					
	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
vendo TO	$1\,290$	-100	-100	-100	-100	$-1\,100$
acq. $1\,100$ zcb 5a	-902					$1\,100$
acq. 100 zcb 4a	-84.826				100	
acq. 100 zcb 3a	-89.673			100		
acq. 100 zcb 2a	-93.713		100			
acq. 100 zcb 1a	-97.087	100				
	22.611	//	//	//	//	//

Problema 62 *In un mercato sono trattati ZCB di valore nominale* $1\,000$ *a* 6, 12 *e* 18 *mesi ai prezzi* 987.73, 973.24, 955.93.

1. *Calcolare i tassi annui a pronti.*
2. *Calcolare il prezzo di non arbitraggio di un titolo obbligazionario con cedole semestrali pari a* 50 *ciascuna (la prima tra* 6 *mesi), durata residua* 1.5 *anni, valore di rimborso* $1\,025$. *Scriverne l'equazione del rendimento alla scadenza.*

1. I **prezzi e i tassi a pronti** (tempo in anni) sono:

$$v(0,0.5)=\frac{987.73}{1\,000}=0.98773\,;\quad i(0,0.5)=\left[\frac{1\,000}{987.73}\right]^2-1\simeq 2.5\%$$

$$v(0,1)=\frac{973.24}{1\,000}=0.97324\,;\quad i(0,1)=\frac{1\,000}{973.24}-1\simeq 2.75\%$$

$$v(0,1.5)=\frac{955.93}{1\,000}=0.95593\,;\quad i(0,1.5)=\left[\frac{1\,000}{955.93}\right]^{\frac{2}{3}}-1\simeq 3.05\%\,.$$

$$
\begin{array}{cccc}
-V(0;\mathbf{x}) & 50 & 50 & 1\,075 \\
\hline
0 & 0.5 & 1 & 1.5
\end{array}
$$

$$v(0,0.5) = 0.98773\ (2.5\%); \qquad v(0,1) = 0.97324\ (2.75\%);$$
$$v(0,1.5) = 0.95593\ (3.05\%).$$

2. Il **prezzo di non arbitraggio** del titolo è

$$V(0;\mathbf{x}) = 50 \cdot v(0,0.5) + 50 \cdot v(0,1) + 1\,075 \cdot v(0,1.5) = 1\,125.67.$$

L'equazione del suo **rendimento alla scadenza** è

$$1125.67 = 50 \cdot (1+i)^{-1/2} + 50 \cdot (1+i)^{-1} + 1075 \cdot (1+i)^{-3/2} :$$

risulterà un **unico** i^* compreso tra 2.5% e 3.05%; ci aspettiamo di trovare $i^* \approx 3.05\%$ (perché $1075 \gg 50$). In effetti, numericamente si trova $i^* \simeq 3.033\%$.

Problema 63 *Un titolo obbligazionario di valore nominale 100, vita residua 4 anni, cedole annue al tasso cedolare del 9%, ha attualmente rendimento alla scadenza pari all'8% annuo. Calcolare il prezzo del titolo. Dopo 6 mesi, il prezzo è 105. Il rendimento alla scadenza del titolo è aumentato o diminuito?*

$-P$	9	9	9	109
0	1	2	3	4

Se il rendimento alla scadenza è dell'8% annuo, dev'essere

$$P = 9 \cdot 1.08^{-1} + 9 \cdot 1.08^{-2} + 9 \cdot 1.08^{-3} + 109 \cdot 1.08^{-4} \simeq 103.31.$$

(-103.31)	-105	9	9	9	109
0	0.5	1	2	3	4

Per rispondere alla seconda domanda, ci sono due modi.

1. Se il rendimento rimanesse dell'8% annuo, dovrebbe essere

$$V(0.5, \mathbf{x}) = 9 \cdot 1.08^{-0.5} + 9 \cdot 1.08^{-1.5} + 9 \cdot 1.08^{-2.5} + 109 \cdot 1.08^{-3.5} \simeq 107.37$$

(ma ancora più semplice: $103.31 \cdot 1.08^{0.5} = 107.37$!). Dal momento che $105 < 107.37$, il rendimento alla scadenza è **aumentato**.

2. Il VAN al tasso dell'8% del titolo con il nuovo prezzo risulta:

$$G(0.08) = -105 + 9 \cdot 1.08^{-0.5} + 9 \cdot 1.08^{-1.5} + 9 \cdot 1.08^{-2.5} + 109 \cdot 1.08^{-3.5} = 2.37;$$

Il fatto che il VAN sia positivo segnala che il rendimento a scadenza è **maggiore** di 0.08.

Indici temporali e di variabilità

Indici temporali di un flusso di pagamenti

	x_1	$\cdots$	x_m	(>0)
t	t_1	$\cdots$	t_m	

Titolo $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

Obiettivo: costruire una **sintesi** delle scadenze (cioè del **profilo temporale** dei flussi)

SCADENZA (***maturity***): t_m.

VITA RESIDUA (***time to maturity***): $t_m - t$.

- nessuna informazione né sulle scadenze intermedie né sulla struttura finanziaria

	100	100
0	1	2

$$\bar{t} = \frac{1 \cdot 100 + 2 \cdot 100}{100 + 100} = 1.5$$

	100	$1\,100$
0	1	2

$$\bar{t} = \frac{1 \cdot 100 + 2 \cdot 1\,100}{100 + 1\,100} \simeq 1.917$$

DURATA MEDIA ARITMETICA: media aritmetica ponderata delle **durate residue** con pesi i **flussi**.

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{m} x_k} \qquad (< t_m - t, \text{ naturalmente})$$

- tiene conto delle **scadenze intermedie**, ma **non** della **struttura finanziaria**

DURATION (**durata media finanziaria**)

- struttura dei **prezzi a pronti**: $\{v(t, t_k)\}$
- *duration* $=$ media aritmetica ponderata delle durate residue con pesi i flussi **scontati**

$$D(t; \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) \cdot x_k \cdot v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t, t_k)} \qquad (< \bar{t})$$

- N.B.: il denominatore $\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t, t_k)$ è proprio il **prezzo** $V(t; \mathbf{x})$ **di equilibrio**, o di **non arbitraggio**, del titolo $\mathbf{x}/\mathbf{t}$.

Esempio. Titolo obbligazionario

	300	500
0	1	2

Supponiamo $v(0,t) = 1.1^{-t}$ ("struttura piatta", $i(0,t) = 10\%$ per ogni t).

- **scadenza**: $t_m = 2$;
- **vita residua**: $t_m - t_0 = 2 - 0 = 2$;
- **durata media aritmetica**: $\bar{t} = \dfrac{1 \cdot 300 + 2 \cdot 500}{300 + 500} = 1.625$ (anni);
- ***duration***: $D(0;\mathbf{x}) = \dfrac{1 \cdot 300 \cdot 1.1^{-1} + 2 \cdot 500 \cdot 1.1^{-2}}{300 \cdot 1.1^{-1} + 500 \cdot 1.1^{-2}} \simeq 1.602$.

Nota: $300 \cdot 1.1^{-1} + 500 \cdot 1.1^{-2} = 685.95 = V(t;\mathbf{x})$.

Il valore della *duration* dipende da:

- **importi**;
- **durate residue**;
- **fattore di sconto**.

Nel caso di uno ZCB, $D =$ vita residua (non dipende dal fattore di sconto).

Se i flussi intermedi sono modesti rispetto al valore finale, $D \simeq$ vita residua (***deep discount bond***).

Se $D <$ vita residua, il fattore di sconto è una variabile **sensibile**.

Se la struttura per scadenze è **piatta** (tassi a pronti costanti), D è detta ***flat yield duration***.

A volte si **sostituisce** alla struttura per scadenze il rendimento alla scadenza (che dipende dalla struttura per scadenze). Si ottiene così un'**approssimazione** (soddisfacente, nel caso di *deep discount bond*) del reale valore della *duration*.

Problema 64 *In un mercato sia in vigore, al tempo* $t = 0$*, la struttura per scadenza dei tassi* $\{0.049958, 0.048646, 0.047336, 0.046028, 0.044721\}$ *(tempo in anni).*

1. *Calcolare le duration del titolo con flussi* $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{6, 6, 6, 6, 106\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e del titolo con flussi* $\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{1, 1, 1, 1, 101\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}$*.*
2. *Per il titolo con flussi* $\mathbf{x}/\mathbf{t}$*, scrivere l'equazione del rendimento alla scadenza.*
3. *Per il titolo con flussi* $\mathbf{x}/\mathbf{t}$*, calcolare la duration con il rendimento alla scadenza, sapendo che questo è* 4.501%*.*

1.
$$D(0; \mathbf{x}) = \frac{1 \cdot 6 \cdot 1.049958^{-1} + 2 \cdot 6 \cdot 1.048646^{-2} + \cdots + 5 \cdot 106 \cdot 1.044721^{-5}}{6 \cdot 1.049958^{-1} + 6 \cdot 1.048646^{-2} + \cdots + 106 \cdot 1.044721^{-5}} = 4.487$$

$$(V(0; \mathbf{x}) = 106.579)$$

$$D(0; \mathbf{y}) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1.049958^{-1} + 2 \cdot 1 \cdot 1.048646^{-2} + \cdots + 5 \cdot 101 \cdot 1.044721^{-5}}{1 \cdot 1.049958^{-1} + 1 \cdot 1.048646^{-2} + \cdots + 101 \cdot 1.044721^{-5}} = 4.892 \ (\simeq 5!)$$

$$(V(0; \mathbf{y}) = 84.7233)$$

2. L'equazione del rendimento alla scadenza è

$$106.579 = 6 \cdot a_{\overline{5}|i} + 100(1+i)^{-5}$$

(o $106.579 = 6(1+i)^{-1} + 6(1+i)^{-2} + \cdots + 6(1+i)^{-4} + 106(1+i)^{-5}$).

Ci aspettiamo $4.4721\% < i^* < 4.9958\%$ e, anzi, $i^* \approx 4.4721\%$ (infatti risulta 4.501%).

3. La *flat yield duration* è

$$\begin{aligned} D &= \frac{1 \cdot 6 \cdot 1.04501^{-1} + 2 \cdot 6 \cdot 1.04501^{-2} + \cdots + 5 \cdot 106 \cdot 1.04501^{-5}}{6 \cdot 1.04501^{-1} + 6 \cdot 1.04501^{-2} + \cdots + 106 \cdot 1.04501^{-5}} \\ &= \frac{1 \cdot 6 \cdot 1.04501^{-1} + 2 \cdot 6 \cdot 1.04501^{-2} + \cdots + 5 \cdot 106 \cdot 1.04501^{-5}}{106.579} \\ &= 4.4841 \qquad\qquad (\approx 4.487). \end{aligned}$$

Problema 65 *Si consideri in $t=0$ un titolo obbligazionario con cedola $I=5$ euro, valore di rimborso $C=100$ euro, durata residua 4 anni.*

1. *Se ne calcoli la flat yield duration a un tasso del 5% annuo.*
2. *Supponendo che il prezzo del titolo sia 90, calcolare la duration con il TIR del titolo, sapendo che è pari all'8.0206% annuo.*

	5	5	5	105
0	1	2	3	4

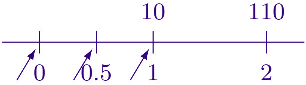
1. $$D = \frac{1 \cdot 5 \cdot 1.05^{-1} + \cdots + 3 \cdot 5 \cdot 1.05^{-3} + 4 \cdot 105 \cdot 1.05^{-4}}{100 \quad \text{(!)}} = 3.723$$
2. $$D = \frac{1 \cdot 5 \cdot 1.080206^{-1} + \cdots + 4 \cdot 105 \cdot 1.080206^{-4}}{90 \quad \text{(!!)}} = 3.706$$

[Nota: tasso maggiore $\Rightarrow$ minor peso ai flussi futuri $\Rightarrow$ ...]

A parità di tasso di attualizzazione, *duration* all'epoca s rispetto alla *duration* calcolata all'epoca t:

- se $s < t_1 \Rightarrow D(s;\mathbf{x}) = D(t;\mathbf{x}) - (s-t)$
  (lo spostamento in avanti lascia inalterati i flussi considerati
- se $s \geq t_1 \Rightarrow D(s;\mathbf{x}) \neq D(t;\mathbf{x}) - (s-t)$
  (lo spostamento in avanti **modifica** la struttura dei flussi futuri)

Problema 66 *Dato un titolo obbligazionario con vita residua* 2 *anni, cedole annue pari a* 10*, valore di rimborso* 100*, calcolarne la duration alle epoche* 0*,* 0.5*,* 1 *al tasso del* 5%*.*



$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{1 \cdot 10 \cdot 1.05^{-1} + 2 \cdot 110 \cdot 1.05^{-2}}{10 \cdot 1.05^{-1} + 110 \cdot 1.05^{-2}} = 1.913;$$

$$D(0.5;\mathbf{x}) = \frac{0.5 \cdot 10 \cdot 1.05^{-0.5} + 1.5 \cdot 110 \cdot 1.05^{-1.5}}{10 \cdot 1.05^{-0.5} + 110 \cdot 1.05^{-1.5}} = $$
$$= \frac{0.5 \cdot 10 \cdot 1.05^{-1} + 1.5 \cdot 110 \cdot 1.05^{-2}}{10 \cdot 1.05^{-1} + 110 \cdot 1.05^{-2}} = 1.413 = D(0;\mathbf{x}) - 0.5;$$

$$D(1;\mathbf{x}) = 1 \qquad \left(= \frac{1 \cdot 110 \cdot 1.05^{-1}}{110 \cdot 1.05^{-1}} \; ! \right).$$

Duration del 2° ordine (o momento del 2° ordine)

$$D^{(2)}(t;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)^2\ x_k\ v(t,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k\ v(t,t_k)}$$

- è una misura di **dispersione temporale**
- la *duration* $D(t;\mathbf{x})$ è anche detta **momento del 1° ordine**
- è un tempo al quadrato

Problema 67 *Si calcoli la duration di 2° ordine del titolo considerato nell'esercizio 65.*

	5	5	5	105
0	1	2	3	4

$$D^{(2)}(0;\mathbf{x}) = \frac{1^2 \cdot 5 \cdot 1.05^{-1} + \cdots + 3^2 \cdot 5 \cdot 1.05^{-3} + 4^2 \cdot 105 \cdot 1.05^{-4}}{100}$$

$= 14.44$ "anni al quadrato".

Duration di portafogli

Due titoli obbligazionari, $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ e $\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, acquistati rispettivamente nelle quantità n_x, n_y.

Flussi del portafogli: $\mathbf{z}/\mathbf{t}$, dove

$$\mathbf{z} = \{n_x x_1 + n_y y_1, n_x x_2 + n_y y_2, \ldots, n_x x_m + n_y y_m\}.$$

Prezzi dei due titoli:

$$V(t; \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot v(t, t_k), \qquad V(t; \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{m} y_k \cdot v(t, t_k).$$

Prezzo del **portafogli**:

$$V(t; \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{m} \big[n_x x_k + n_y y_k\big] v(t, t_k) = n_x V(t, \mathbf{x}) + n_y V(t, \mathbf{y}).$$

Duration dei due titoli:

$$D(t;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)\cdot x_k \cdot v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{x})},$$

$$D(t;\mathbf{y}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)\cdot y_k \cdot v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{y})}.$$

Duration del **portafogli**:

$$\begin{aligned}
D(t;\mathbf{z}) &= \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - t)\big[n_x x_k + n_y y_k\big]v(t,t_k)}{V(t;\mathbf{z})} \\
&= \frac{n_x \cdot \sum_{k=1}^{m}\big[(t_k - t)x_k v(t,t_k)\big] + n_y \cdot \sum_{k=1}^{m}\big[(t_k - t)y_k v(t,t_k)\big]}{n_x V(t,\mathbf{x}) + n_y V(t,\mathbf{y})} \\
&= \frac{n_x \cdot V(t;\mathbf{x})D(t;\mathbf{x}) + n_y \cdot V(t;\mathbf{y})D(t;\mathbf{y})}{n_x V(t,\mathbf{x}) + n_y V(t,\mathbf{y})} \\
&= \frac{n_x \cdot V(t;\mathbf{x})}{V(t,\mathbf{z})}\cdot D(t;\mathbf{x}) + \frac{n_y \cdot V(t;\mathbf{y})}{V(t,\mathbf{z})}\cdot D(t;\mathbf{y})
\end{aligned}$$

(**frazione di ricchezza** investita in ciascun titolo).

Morale: la ***duration*** del portafogli è una **media aritmetica ponderata** delle *duration*, con pesi i **prezzi (complessivi)**:

$$D(t;\mathbf{z}) = D(t;\mathbf{x})\,\frac{n_x\,V(t;\mathbf{x})}{V(t;\mathbf{z})} + D(t;\mathbf{y})\,\frac{n_y\,V(t;\mathbf{y})}{V(t;\mathbf{z})}.$$

La ***duration*** **del secondo ordine** del portafogli è

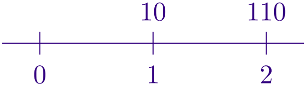
$$D^{(2)}(t;\mathbf{z}) = D^{(2)}(t;\mathbf{x})\,\frac{n_x\,V(t;\mathbf{x})}{V(t;\mathbf{z})} + D^{(2)}(t;\mathbf{y})\,\frac{n_y\,V(t;\mathbf{y})}{V(t;\mathbf{z})}$$

(passaggi analoghi al caso della *duration*).

$\boxed{\textbf{Problema 68}}$ *Dati uno ZCB con scadenza* 2 *anni e valore nominale* 100 *e un titolo obbligazionario con durata residua* 2 *anni, cedole annue* 10*, valore di rimborso* 100*, calcolare al tasso del* 5% *la duration di un portafogli costituito da* 10 *unità di ZCB e* 5 *unità di titolo obbligazionario.*

$V(0;\mathbf{x}) = 100 \cdot 1.05^{-2} = 90.70;$

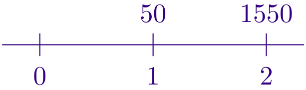
$D(0;\mathbf{x}) = 2.$



$V(0;\mathbf{y}) = 10 \cdot 1.05^{-1} + 110 \cdot 1.05^{-2} = 109.30;$

$$D(0;\mathbf{y}) = \frac{1 \cdot 10 \cdot 1.05^{-1} + 2 \cdot 110 \cdot 1.05^{-2}}{109.30} = 1.9129.$$

$\mathbf{z} = 10\mathbf{x} + 5\mathbf{y}$



- **a** $V(0; \mathbf{z}) = 50 \cdot 1.05^{-1} + 1550 \cdot 1.05^{-2} = 1\,453.51;$

  $$D(0; \mathbf{z}) = \frac{1 \cdot 50 \cdot 1.05^{-1} + 2 \cdot 1550 \cdot 1.05^{-2}}{1\,453.51} \simeq 1.967.$$

- **b** $V(0; \mathbf{z}) = n_x V(0; \mathbf{x}) + n_y V(0; \mathbf{y}) = 10 \cdot 90.70 + 5 \cdot 109.30 = 1\,453.51,$

  dei quali $10 \cdot 90.70 = 907.03$ investiti in $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ e $5 \cdot 109.30 = 546.49$ in $\mathbf{x}/\mathbf{t}$:

  $$\frac{907.03}{1\,453.51} \simeq 0.624\,025, \qquad \frac{546.49}{1\,453.51} \simeq 0.375\,975.$$

  Allora

  $$D(0; \mathbf{z}) = 0.624\,025 \cdot 2 + 0.375\,975 \cdot 1.9129 \simeq 1.967.$$

Problema 69 *Sono disponibili i seguenti titoli:*

- **a** *ZCB di valore nominale* 100*, scadenza a* 6*,* 12*,* 18 *e* 24 *mesi, prezzi rispettivi* 96.90*,* 93.90*,* 90.99 *e* 88.20*;*
- **b** *titolo obbligazionario di valore nominale* $1\,000$*, durata residua* 2 *anni, cedole semestrali al tasso cedolare (annuo) del* 6%*, rimborso alla pari.*

Calcolare la duration del portafogli costituito da 5 *unità di ZCB a* 1 *anno e da* 2 *unità di titolo obbligazionario. Per aumentare la duration, quale dei due titoli occorre acquistare in maggiore quantità?*

Sia $\mathbf{x}$ lo ZCB: $V(0;\mathbf{x}) = 93.90$, $D(0;\mathbf{x}) = 1$.

$$\begin{aligned} V(0;\mathbf{y}) &= 30 \cdot 0.9690 + 30 \cdot 0.9390 + 30 \cdot 0.9099 + 1\,030 \cdot 0.8820 \\ &= 992.997 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(0;\mathbf{y}) &= \tfrac{0.5 \cdot 30 \cdot 0.9690 + 1 \cdot 30 \cdot 0.9390 + 1.5 \cdot 30 \cdot 0.9099 + 2 \cdot 1\,030 \cdot 0.8820}{992.997} \\ &= 1.914. \end{aligned}$$

$n_x = 5$, $n_y = 2$.

$$V(0;\mathbf{z}) = 5 \cdot 93.90 + 2 \cdot 992.97 = 2\,445.49$$

$$D(0;\mathbf{z}) = \frac{5 \cdot 93.90}{2\,445.49} \cdot 1 + \frac{2 \cdot 992.97}{2\,445.49} \cdot 1.914 = 1.739$$

Per aumentare D, occorre diminuire n_x e aumentare n_y, così da dare un peso maggiore alla *duration* di $\mathbf{y}$.

[Provate vendendo $\mathbf{x}$ allo scoperto!]

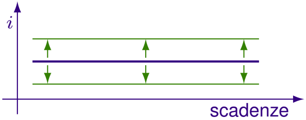
Analisi della variabilità del valore di un flusso di pagamenti

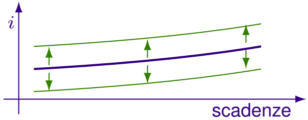
Consideriamo una **struttura piatta** dei tassi: $v(t,s) = (1+i)^{-(s-t)} = e^{-\delta(s-t)}$, con $\delta = \ln(1+i)$.

Riferimento: operazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, con flussi tutti dello **stesso segno**

Obiettivo: come cambia $V(t;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-(t_k - t)}$ se i cambia?

- anche struttura non piatta, pensando i il rendimento alla scadenza del titolo.
- in generale, l'analisi riguarda variazioni del tipo "shift additivo" della curva dei tassi





- Prezzo in $t = 0$ dei flussi $\mathbf{x}/\mathbf{t}$ come funzione del tasso:

$$V(i) := V(0;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k \, (1+i)^{-t_k}$$

Proprietà di $V(i)$

$$V(i) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-t_k}$$

$V(i) > 0;$ $\qquad V(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k;$ $\qquad \lim_{i\to\infty} V(i) = 0$ ($t_1 > 0$!)

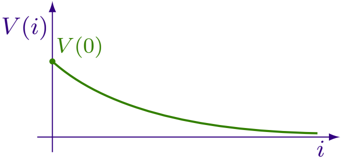
Tasso di **variazione** al variare di i (derivata prima):

$$V'(i) = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot (-t_k) \cdot (1+i)^{-t_k-1} = -(1+i)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k} < 0.$$

Derivata seconda:

$$V''(i) = \sum_{k=1}^{m} (-t_k)(-t_k-1) \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k-2} = (1+i)^{-2} \cdot \sum_{k=1}^{m} t_k(t_k+1) \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}.$$

$\Rightarrow V(i)$ è **decrescente** e **convessa**



Variazione relativa: tasso di variazione per unità di valore iniziale

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = \frac{-(1+i)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{m} t_k \cdot x_k \cdot (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot (1+i)^{-t_k}} = -\frac{D(0;\mathbf{x})}{1+i}.$$

Modified duration: $D^*(0;\mathbf{x}) = \dfrac{D(0;\mathbf{x})}{1+i}$. Così,

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -D^*(0;\mathbf{x}).$$

Dalla *duration* $\Rightarrow$ informazioni sul tasso di **variazione del prezzo** del titolo al variare di i (a duration più elevate corrisponde **maggiore sensibilità** del prezzo alla variazione del tasso).

Problema 70 *Dati i titoli A di flussi* $\{100, 100, 1\,100\}/\{1, 2, 3\}$ *e B di flussi* $\{150, 200, 500\}/\{0.5, 1.5, 3\}$ *e sapendo che il tasso corrente di mercato è il* 4% *(per tutte le scadenze), stabilire quale titolo è più sensibile a variazioni di tasso.*

$$D(0; A) = \frac{1 \cdot 100 \cdot 1.04^{-1} + 2 \cdot 100 \cdot 1.04^{-2} + 3 \cdot 1\,100 \cdot 1.04^{-3}}{100 \cdot 1.04^{-1} + 100 \cdot 1.04^{-2} + 1\,100 \cdot 1.04^{-3}} = 2.756$$

$$D(0; B) = \frac{0.5 \cdot 150 \cdot 1.04^{-0.5} + 1.5 \cdot 200 \cdot 1.04^{-1.5} + 3 \cdot 500 \cdot 1.04^{-3}}{150 \cdot 1.04^{-0.5} + 200 \cdot 1.04^{-1.5} + 500 \cdot 1.04^{-3}} = 2.166$$

È $D(0; A) > D(0; B)$, quindi A è più sensibile di B.

Calcolo approssimato della variazione del prezzo

Dalla variazione relativa:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -D^*(0; \mathbf{x}) \qquad \Longrightarrow \qquad V'(i) = -D^*(0; \mathbf{x})V(i).$$

In termini approssimativi:

$$V'(i) \simeq \frac{\Delta V(i)}{\Delta i} \quad \Longrightarrow \quad \Delta V(i) \simeq V'(i) \times \Delta i$$

Pertanto:

$$\Delta V(i) \simeq -D^*(0; \mathbf{x}) \times V(i) \times \Delta i,$$

o anche

$$V(i + \Delta i) \simeq V(i) - D^*(0; \mathbf{x}) \times V(i) \times \Delta i$$

$\boxed{\textit{Nel } \textbf{Problema 70}}$ *calcolare in modo approssimato il prezzo se il tasso diminuisce di 1 punto percentuale.*

Erano $D(0;A) = 2.756$ e $D(0;B) = 2.166$. Poi,

$$V_A(0.04) = 100 \cdot 1.04^{-1} + 100 \cdot 1.04^{-2} + 1\,100 \cdot 1.04^{-3} = 1\,166.51;$$
$$V_B(0.04) = 150 \cdot 1.04^{-0.5} + 200 \cdot 1.04^{-1.5} + 500 \cdot 1.04^{-3} = 780.16.$$

$$\begin{aligned} V_A(0.03) &\simeq V_A(0.04) - D^*(0;A) \cdot V_A(0.04) \cdot (0.03 - 0.04) \\ &= 1\,166.51 - 2.756 \cdot 1.04^{-1} \cdot 1\,166.51 \cdot (-0.01) = 1\,197.42 \end{aligned}$$

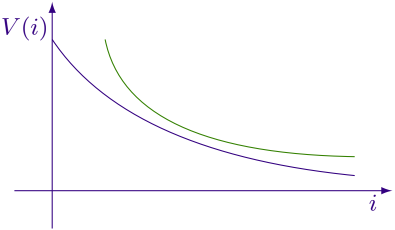
$[V_A(0.03) = 1\,198.00; \qquad \Delta = 31.09$, errore $1.87\%]$

$$\begin{aligned} V_B(0.03) &\simeq V_B(0.04) - D^*(0;B) \cdot V_B(0.04) \cdot (0.03 - 0.04) \\ &= 780.16 - 2.166 \cdot 1.04^{-1} \cdot 780.16 \cdot (-0.01) = 796.40 \end{aligned}$$

$[V_B(0.03) = 796.70; \qquad \Delta = 16.25$, errore $1.85\%]$

CONVEXITY

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = (1+i)^{-2} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k(t_k+1)x_k(1+i)^{-t_k}}{V(i)}$$
$$= (1+i)^{-2} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k^2+t_k)x_k(1+i)^{-t_k}}{V(i)}$$
$$= (1+i)^{-2}\left[D^{(2)}(0;\mathbf{x}) + D(0;\mathbf{x})\right].$$



Problema 71 *Dato il titolo con flussi* $\{5, 5, 5, 105\}/\{1, 2, 3, 4\}$ *e impiegando il tasso annuo del* 5%*, calcolare la variazione relativa e la convexity del prezzo del titolo. Calcolare il valore approssimato del prezzo del titolo se il tasso aumenta di* 1 *punto percentuale.*

	5	5	5	105
0	1	2	3	4

$$V(0.05) = 100$$

$$D(0; \mathbf{x}) = \frac{1 \cdot 5 \cdot 1.05^{-1} + 2 \cdot 5 \cdot 1.05^{-2} + 3 \cdot 5 \cdot 1.05^{-3} + 4 \cdot 105 \cdot 1.05^{-4}}{100} \simeq 3.723$$

$$D^{(2)}(0; \mathbf{x}) = \frac{1^2 \cdot 5 \cdot 1.05^{-1} + 2^2 \cdot 5 \cdot 1.05^{-2} + 3^2 \cdot 5 \cdot 1.05^{-3} + 4^2 \cdot 105 \cdot 1.05^{-4}}{100} \simeq 14.44$$

$$V(0.05) = 100, \qquad D(0;\mathbf{x}) \simeq 3.723, \qquad D^{(2)}(0;\mathbf{x}) \simeq 14.44.$$

- Variazione relativa:

$$\frac{V'(i)}{V(i)} = -D^*(0;\mathbf{x}) = -\frac{3.723}{1.05} \simeq -3.546.$$

- *Convexity*:

$$\frac{V''(i)}{V(i)} = \frac{D^{(2)}(0;\mathbf{x}) + D(0;\mathbf{x})}{(1+i)^2} = \frac{14.44 + 3.723}{1.05^2} \simeq 16.474.$$

- Se il tasso aumenta da 0.05 a 0.06,

$$V(0.06) \approx 100 - 3.546 \cdot 100 \cdot 0.01 = 96.454.$$

Usando anche la *convexity*, si trova $V(0.06) \approx 100 - 3.546 \cdot 100 \cdot 0.01 +$ $+ \frac{1}{2} \cdot 16.474 \cdot 100 \cdot 0.01^2 = 96.536$, essendo $V(0.06) \simeq 96.535$.

Problema 72 *Si ponga $t = 0$. Sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, \ldots, 30\}$, si considerino i tre flussi $\mathbf{a} = \{a_5 = 164.92, a_k = 0$ per $k \neq 5\}$, $\mathbf{b} = \{b_1 = 56.32, b_9 = 120.73, b_k = 0$ per $k \neq 1, 9\}$ e $\mathbf{c} = \{c_1 = 97.10, c_{30} = 246.52, c_k = 0$ per $k \neq 1, 30\}$. Fissato $i = 0.1$, calcolare la variazione relativa e la convexity dei tre titoli. Rappresentare graficamente l'andamento del prezzo dei tre titoli al variare del tasso i.*

Risulta:

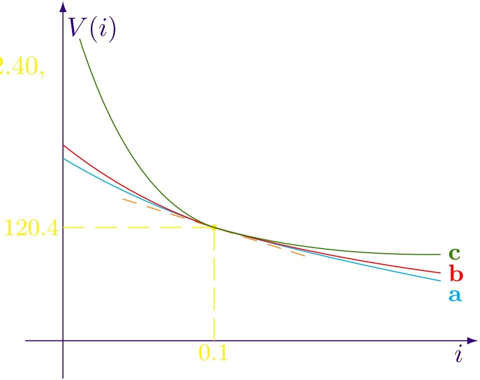
$$V_{\mathbf{a}}(0.1) = V_{\mathbf{b}}(0.1) = V_{\mathbf{c}}(0.1) = 102.40,$$

$$D(0; \mathbf{a}) = D(0; \mathbf{b}) = D(0; \mathbf{c}) = 5;$$

$$D^{(2)}(0; \mathbf{a}) = 25,$$

$$D^{(2)}(0; \mathbf{b}) = 41,$$

$$D^{(2)}(0; \mathbf{c}) = 125.03.$$



Per la cronaca:

Da $D(0;\mathbf{a}) = D(0;\mathbf{b}) = D(0;\mathbf{c}) = 5$ si trova la variazione relativa:

$$D^*(0;\mathbf{a}) = D^*(0;\mathbf{b}) = D^*(0;\mathbf{c}) = 5 \cdot 1.1^{-1} \simeq 4.545;$$

Per quanto riguarda la *convexity*:

	$D^{(2)}$	$D^{(2)} + D$	$\dfrac{D^{(2)} + D}{(1+i)^2}$
$\mathbf{a}$	25	30	24.793
$\mathbf{b}$	41	46	38.017
$\mathbf{c}$	125.03	130.03	107.463

Principi di immunizzazione (classica)

Riferimento a un mercato con **struttura per scadenze piatta**

Oggetto: **analisi di un portafogli** con *asset* e *liability*.

- **Scadenzario** $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$
- ***Asset***: $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}/\mathbf{t}$ (tutti i flussi positivi)
- ***Liability***: $\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}/\mathbf{t}$ (tutti positivi, ma in uscita)
- Posizione **netta**: $\mathbf{z}/\mathbf{t} = [\mathbf{x} - \mathbf{y}]/\mathbf{t} = \{x_1 - y_1, \ldots, x_m - y_m\}/\mathbf{t}$

NB: i flussi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (e quindi $\mathbf{z}$) sono considerati di **importo certo**

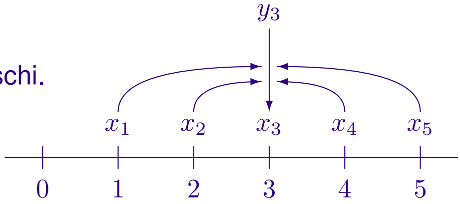
Problema: dato $\mathbf{y}$ (uscite programmate), devo **scegliere** $\mathbf{x}$ in modo che sia garantito che la posizione netta abbia **valore non negativo** $\Rightarrow$ devo scegliere gli *asset*.

- la scelta viene fatta all'**epoca corrente** t, in cui il tasso di mercato è i, in modo che $V(t; \mathbf{x}) \geq V(t; \mathbf{y})$
- scelto $\mathbf{x}$, se cambia il tasso, è ancora **garantito** che il valore della posizione netta sia non negativo?

L'**immunizzazione finanziaria** è una tecnica di costruzione (e di gestione) degli *asset* che **garantisce la copertura** delle *liability*, anche a fronte di una **variazione del tasso**.

Se $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow$ "*perfect matching*":

- $\mathbf{z} = \{0, 0, \ldots, 0\} \Rightarrow$ non ci sono rischi.



Se $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \ldots$

- esempio: epoca corrente $t = 0$;
- liability $\mathbf{y}/\mathbf{t} = \{0, 0, y_3, 0, 0\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- asset $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}/\{1, 2, 3, 4, 5\}$ con $x_k > 0$ per ogni k;
- per ottenere y_3 all'epoca 3 si dovrà:
  - **reinvestire** i flussi x_1, x_2 fino all'epoca 3 $\Rightarrow$ a quali condizioni?
  - all'epoca 3 **vendere** i flussi x_4, x_5 $\Rightarrow$ a quali condizioni?

Se, rispetto alle condizioni correnti

- il tasso aumenta $\Rightarrow$ guadagno su reinvestimenti, perdita su disinvestimenti
- il tasso diminuisce $\Rightarrow$ perdita su reinvestimenti, guadagno su disinvestimenti

Rischio di tasso

È costituito da due componenti:

- rischio di **reimpiego**
- rischio di **disinvestimento** (o di prezzo)

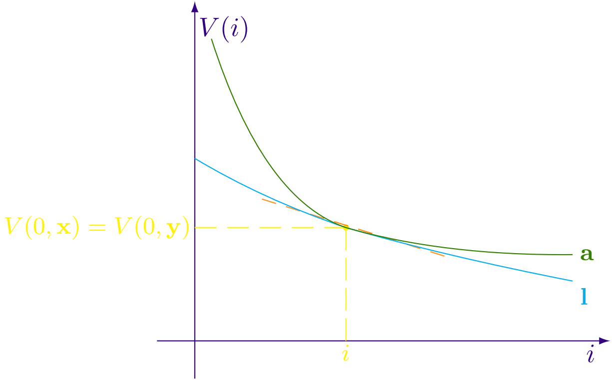
In ogni caso, se varia il tasso, su una componente si guadagna e sull'altra si perde.

Non essendo noto se e come varia il tasso, si deve cercare di **compensare** i due effetti ($\Rightarrow$ **IMMUNIZZARE**).

Si dimostra che **IL PORTAFOGLI È IMMUNIZZATO** se all'epoca corrente (epoca 0) e alle condizioni correnti di mercato (tasso i):

- **valore** asset $=$ valore liability: $V(0;\mathbf{x}) = V(0;\mathbf{y})$;
- ***duration*** asset $=$ *duration* liability: $D(0;\mathbf{x}) = D(0;\mathbf{y})$;
- ***duration* di 2° ordine** asset $>$ *duration* di 2° ordine liability: $D^{(2)}(0;\mathbf{x}) > D^{(2)}(0;\mathbf{y})$.

Se valgono queste condizioni, in caso di variazione del tasso, il valore degli asset resta $\geq$ di quello delle liability: $V(0;\mathbf{x}) \geq V(0;\mathbf{y})$ per ogni i.

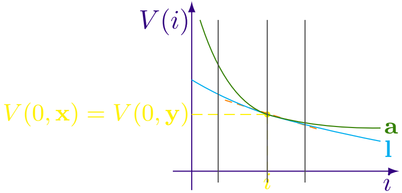


Interpretazione dei vincoli

- Valore corrente di asset e liability, come funzione del tasso: $V_x(i), V_y(i)$ $\Rightarrow$ stesso valore: $V_x(i) = V_y(i)$ (vincolo di bilancio);
- variabilità asset: $D^*(0;\mathbf{x})$; liability: $D^*(0;\mathbf{y})$ $\Rightarrow$ stessa variabilità;
- *convexity*: funzione di $D^{(2)}(0;\mathbf{x})$ per gli asset, di $D^{(2)}(0;\mathbf{y})$ per le liability $\Rightarrow$ valore degli asset **più convesso** del valore delle liability.

Conseguenza:

- al tasso corrente: $V_x(i) = V_y(i)$;
- se il tasso varia e passa al livello i': $V_x(i') \geq V_y(i')$.



Costruzione di un investimento immunizzato

- problema simile alla scelta di asset a fronte di **un'unica uscita** futura
- la **duration** del portafogli deve coincidere con l'orizzonte temporale di detenzione dello stesso
- fissato l'importo da investire, $V(0;\mathbf{x})$, c'è la garanzia che $V(D(0;\mathbf{x});\mathbf{x}) \geq V(0;\mathbf{x})\,(1+i)^{D(0;\mathbf{x})}$
  ($\Rightarrow i$ diventa un **rendimento minimo garantito**)

Asset-liability management (ALM)

- gestione integrata attivo-passivo
- l'immunizzazione ne costituisce una tecnica; immunizzare il portafogli significa **garantire la copertura** delle uscite

Nota: la condizione di immunizzazione **non si conserva** fino alla scadenza

- occorre ribilanciare il portafogli (strategia dinamica):
  - in caso di variazione di tassi
  - dopo ogni incasso

Problema 73 *Un investitore impiega $10\,000$ euro, acquistando ZCB con scadenza a 1 e a 2 anni. Gli ZCB hanno valore nominale $1\,000$; il tasso di mercato (uguale per tutte le scadenze) è pari al 2% annuo. L'investitore intende far sì che l'investimento sia immunizzato su un orizzonte di 1.5 anni.*

1. *Calcolare quante unità di ZCB a 1 anno e quante di ZCB a 2 anni devono essere acquistate per realizzare l'obiettivo.*
2. *Supporre che, subito dopo aver eseguito l'investimento (per esempio, il giorno successivo), il tasso di mercato scenda all'1.5%. Qual è il valore corrente dell'investimento?*
3. *Supporre che, subito dopo aver eseguito l'investimento, il tasso di mercato aumenti al 2.5%. Qual è il valore corrente dell'investimento?*

1. a 1 anno: $V(0;\mathbf{x}) = 1\,000 \cdot 1.02^{-1} = 980.39,\qquad D(0;\mathbf{x}) = 1;$
   a 2 anni: $V(0;\mathbf{y}) = 1\,000 \cdot 1.02^{-2} = 961.17,\qquad D(0;\mathbf{y}) = 2.$

$$\begin{cases} \overbrace{n_x \cdot V(0;\mathbf{x})}^{W_x} + \overbrace{n_y \cdot V(0;\mathbf{y})}^{W_y} = 10\,000 \\ \dfrac{n_x \cdot V(0;\mathbf{x})}{10\,000}\, D(0;\mathbf{x}) + \dfrac{n_y \cdot V(0;\mathbf{y})}{10\,000}\, D(0;\mathbf{y}) = 1.5 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha_x = \dfrac{W_x}{W} \\ \alpha_y = \dfrac{W_y}{W} \end{array}$$

Il sistema diventa così

$$\begin{cases}\alpha_x + \ \ \alpha_y = 1 \\ \alpha_x + 2\alpha_y = 1.5\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_x = \alpha_y = 0.5 \quad (W_x = W_y = 5\,000)$$

$$n_x = \frac{5\,000}{980.39} \simeq 5.1; \qquad n_y = \frac{5\,000}{916.17} \simeq 5.202.$$

Naturalmente, $V(1.5; \mathbf{z}) = 10\,000 \cdot 1.02^{1.5} = 10\,301.49$.

2. $$\begin{aligned} V(0; \mathbf{z}) &= 5.1 \cdot 1\,000 \cdot 1.015^{-1} + 5.202 \cdot 1\,000 \cdot 1.015^{-2} \\ &\simeq 10\,074.01; \end{aligned}$$

$$V(1.5; \mathbf{z}) = 10\,074.01 \cdot 1.015^{1.5} \simeq 10\,301.5261.$$

3. $$\begin{aligned} V(0; \mathbf{z}) &= 5.1 \cdot 1\,000 \cdot 1.025^{-1} + 5.202 \cdot 1\,000 \cdot 1.025^{-2} \\ &\simeq 9\,926.95; \end{aligned}$$

$$V(1.5; \mathbf{z}) = 9\,926.95 \cdot 1.025^{1.5} \simeq 10\,301.5258.$$

[Aumenta in ogni caso: *convexity* > 0. . . . Per casa: provare con $i = 1\%$ e 3%.]

Problema 74 *Un'azienda deve disporre di $50\,000$ euro tra 2 anni e può investire oggi in ZCB a 1 e 3 anni (gli ZCB hanno valore nominale 100). La struttura dei tassi è piatta; il tasso corrente di mercato è il 2.5%. Calcolare quante unità deve acquistare l'azienda di ciascun ZCB in modo da garantirsi il valore di $50\,000$ euro tra 2 anni anche in ipotesi di variazione del tasso di mercato.*

Per ottenere $W(2) = 50\,000$, occorre $W(0) = 50\,000 \cdot 1.025^{-2} \simeq 47\,590.72$ oggi. Prezzi e *duration* dei due ZCB sono:

a 1 anno: $V(0;\mathbf{x}) = 100 \cdot 1.025^{-1} = 97.56,\qquad D(0;\mathbf{x}) = 1;$

a 3 anni: $V(0;\mathbf{y}) = 100 \cdot 1.025^{-3} = 92.86,\qquad D(0;\mathbf{y}) = 3.$

Poiché $2 = \frac{1}{2}\,D(0;\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,D(0;\mathbf{y})$, dev'essere $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$, cioè $W_x = W_y = W(0) : 2 = 23\,795.36$:

$$n_x = \frac{23\,795.36}{97.56} \simeq 243.90; \qquad n_y = \frac{23\,795.36}{92.86} \simeq 256.25.$$

Portafogli: $n_x = 243.90$ unità di ZCB a 1a e $n_y = 256.25$ unità di ZCB a 3a.

Controllo. Se $i \to 3.5\%$:

$$V(0;\mathbf{z}) = 243.90 \cdot 100 \cdot 1.035^{-1} + 256.25 \cdot 100 \cdot 1.035^{-3} \simeq 46\,677.73;$$
$$V(2;\mathbf{z}) = 46\,677.73 \cdot 1.035^2 \simeq 50\,002.36.$$

Se invece $i \to 1.5\%$,

$$V(0;\mathbf{z}) = 243.90 \cdot 100 \cdot 1.015^{-1} + 256.25 \cdot 100 \cdot 1.015^{-3} \simeq 48\,535.42;$$
$$V(2;\mathbf{z}) = 48\,535.42 \cdot 1.015^2 \simeq 50\,002.40.$$

Problema 75 *Si investono oggi $20\,000$ euro, acquistando ZCB di valore nominale unitario con scadenza a 1 e 3 anni. Il tasso di mercato (uguale per tutte le scadenze) è il 2% annuo.*

1. *Calcolare quante unità di ZCB a 1 anno e quante unità di ZCB a 3 anni occorre acquistare se si intende immunizzare l'investimento su un orizzonte di 18 mesi.*
2. *Ripetere, supponendo che si intenda immunizzare l'investimento su un orizzonte di 2 anni. Perché, rispetto al punto precedente, si deve acquistare una quantità maggiore di ZCB a 3 anni?*

Prezzi e *duration* dei due ZCB sono:

a 1 anno: $V(0;\mathbf{x}) = 1 \cdot 1.02^{-1} = 0.980\,392, \qquad D(0;\mathbf{x}) = 1;$

a 3 anni: $V(0;\mathbf{y}) = 1 \cdot 1.02^{-3} = 0.942\,322, \qquad D(0;\mathbf{y}) = 3.$

1. Dev'essere (NB: 18 mesi $= 1.5$ anni)

$$\begin{cases} \alpha_x + \alpha_y = 1 \\ \alpha_x + 3\alpha_y = 1.5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha_x = \frac{3}{4},\ \alpha_y = \frac{1}{4}: \qquad \begin{array}{l} W_x = 15\,000 \\ W_y = \ \ 5\,000 \end{array}$$

Da $W_x = 15\,000$, $W_y = \ \ 5\,000$ si trova:

$$n_x = \frac{15\,000}{0.980\,392} = 15\,300; \qquad n_y = \frac{5\,000}{0.942\,322} = 5\,306.04.$$

2. Se si vuole immunizzare l'investimento su due anni, dev'essere

$$\begin{cases} \alpha_x + \ \ \alpha_y = 1 \\ \alpha_x + 3\alpha_y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{2}, \quad W_x = W_y = 10\,000,$$

$$n_x = \frac{10\,000}{0.980\,392} = 10\,200; \qquad n_y = \frac{10\,000}{0.942\,322} = 10\,612.08.$$

È aumentato il numero di unità acquistate del secondo titolo perché, per aumentare la *duration* del portafogli, occorre aumentare la proporzione di valore investito nel titolo con la *duration* maggiore.

Problema 76 *Si acquistano ZCB con scadenza a 2 anni e 4 anni, in modo da disporre di $20\,000$ euro tra 3 anni. Gli ZCB hanno valore nominale $1\,000$; il tasso annuo a pronti è il 2% per tutte le scadenze.*

1. *Stabilire quante unità acquistare di ZCB a 2 anni e quante di ZCB a 4 anni, in modo che l'investimento sia immunizzato.*
2. *Supporre che non ci siano variazioni di tasso. Verificare se dopo 1 anno l'investimento è ancora immunizzato.*
3. *Supporre ancora che non ci siano variazioni di tasso. Verificare se dopo 2 anni l'investimento è ancora immunizzato.*
4. *Supporre ora che all'epoca 1 ci sia una variazione di tasso: il tasso a pronti per tutte le scadenze aumenta al 2.5% annuo. Verificare se l'investimento è ancora immunizzato.*

Per ottenere $W(3) = 20\,000$, occorre $W(0) = 20\,000 \cdot 1.02^{-3} \simeq 18\,846.45$ oggi.

1. Prezzi e *duration* dei due ZCB sono:

$$\begin{array}{lll} \text{a } 2 \text{ anni:} & V(0;\mathbf{x}) = 1\,000 \cdot 1.02^{-2} = 961.17, & D(0;\mathbf{x}) = 2; \\ \text{a } 4 \text{ anni:} & V(0;\mathbf{y}) = 1\,000 \cdot 1.02^{-4} = 923.85, & D(0;\mathbf{y}) = 4. \end{array}$$

Da $3 = \frac{1}{2}\, D(0;\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\, D(0;\mathbf{y})$ segue $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$.

Se $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$, dev'essere $W_x = W_y = W(0) : 2 = 9\,423.22$ e

$$n_x = \frac{9\,423.22}{961.17} \simeq 9.804; \qquad n_y = \frac{9\,423.22}{923.85} = 10.2.$$

[A voi il controllo: portate il tasso all'1% e al 3%...]

2. Dopo un anno, si ha:

$$V(1;\mathbf{x}) = 1\,000 \cdot 1.02^{-1} = 980.39, \qquad D(1;\mathbf{x}) = 1;$$
$$V(1;\mathbf{y}) = 1\,000 \cdot 1.02^{-3} = 942.32, \qquad D(1;\mathbf{y}) = 3.$$

$$V(1;\mathbf{z}) = 9.804 \cdot 980.39 + 10.2 \cdot 942.32 \simeq 19\,223.38$$
$$(W(1) = 18\,846.45 \cdot 1.02 \simeq 19\,223.38).$$

Si ha pure $D(1,\mathbf{z}) = 2$ (è ancora $W_x = W_y$; oppure, sia $D(0;\mathbf{x})$ sia $D(0;\mathbf{y})$ diminuiscono di 1) $\Rightarrow$ ancora immunizzato.

3. Dopo due anni, non è più sul mercato il primo titolo (che è giunto alla scadenza). Allora risulta $D(2;\mathbf{z}) = D(2;\mathbf{y}) = 2 \neq 1 \Rightarrow$ non più immunizzato (e non è possibile immunizzarlo). Però...

4. Se il tasso aumenta al 2.5%,

$$V'(1;\mathbf{x}) = 1\,000 \cdot 1.025^{-1} \simeq 975.61, \qquad D'(1;\mathbf{x}) = 1;$$
$$V'(1;\mathbf{y}) = 1\,000 \cdot 1.025^{-3} \simeq 928.60, \qquad D'(1;\mathbf{y}) = 3.$$

$$W_x = 9.804 \cdot 975.61 \simeq 9\,564.80, \qquad \alpha_x \simeq 0.5024;$$
$$W_y = 10.2 \cdot 928.60 \simeq 9\,471.71, \qquad \alpha_y \simeq 0.4976.$$

Risulta allora $D(1;\mathbf{z}) = 0.5024 + 3 \cdot 0.4976 \simeq 1.9951 < 2$ e l'investimento non è più immunizzato. È facile “reimmunizzarlo”: dev'essere

$$W'(1) = 20\,000 \cdot 1.025^{-2} \simeq 19\,036.29; \qquad W'(1) : 2 \simeq 9\,518.14.$$

e perciò

$$n'_x = \frac{9\,518.14}{975.61} \simeq 9.756; \qquad n'_y = \frac{9\,518.14}{928.60} = 10.25,$$

quindi occorre vendere 0.048 unità di $\mathbf{x}$ e acquistare 0.05 unità di $\mathbf{y}$ (il che fa incassare $0.048 \cdot 975.61 \simeq 46.66$ e sborsare $0.05 \cdot 928.60 \simeq 46.43$).

Nota che $(9\,546.80 + 9\,471.71)1.025^2 \simeq 19\,036.51 \cdot 1.025^2 \simeq 20\,000.24$.

Buone feste e buon 2013

. . . e in bocca al lupo per l’esame!