Regole derivate

$\mathrm{D}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$\mathrm{D}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\mathrm{D}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)^2}$
$\mathrm{D}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
$\mathrm{D}[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$
$\mathrm{D}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

Derivate fondamentali

$D_x e^x = e^x$
$D_x \sin(x) = \cos(x)$
$D_x \cos(x) = -\sin(x)$
$D_x \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$D_x \cot(x) = -\csc^2(x)$

$D_x \sin^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$
$D_x \cos^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1, 1]$
$D_x \tan^{-1} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
$D_x \sec^{-1} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
$D_x \ln(x) = \frac{1}{x}$

Integrali

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
$\int e^x dx = e^x + c$
$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + c$

$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + c$
$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + c$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} dx = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + c$
$\int \frac{1}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$
$\int ln(x) dx = (xln(x)) - x + c$

Integrazione per sostituzione
Sia $u = f(x)$ (può essere più di una variabile).
Determina: $du = \frac{f(x)}{dx} dx$ e risoli per dx.
Poi, se l'integrale è definito, sostituisci i confini per $u = f(x)$ per ciascun confine

Risolvi l'integrale usando u.

Integrazione per parti
$\int u dv = uv - \int v du$

Sezione Identità trigonometriche

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \pm \sin(x)\sin(y)$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
$\tan^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$

Calculo 3 Concetti

Coordinate cartesiane 3D

dati due punti:
(x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2),
Distanza fra di loro :
$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
Pt medio:
$(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$
Sfera di centro (h,k,m) and radius r:
$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-m)^2 = r^2$

Vettori

Vettore: $\vec{u}$
Vettore unitario: $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$
Norma: $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Prodotto scalare
$\vec{u} \cdot \vec{v}$
produce uno Scalare
(geometricamente, il prodotto scalare è il vettore proiezione)
$\vec{u} =< u_1, u_2, u_3 >$
$\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$
se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ significa che i due vettori sono Perpendicolari, θ è l'angolo compreso fra loro.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos(\theta)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
NOTE:
$\hat{u} \cdot \hat{v} = \cos(\theta)$
$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ quando $\perp$
Angolo fra $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
$\theta = \cos^{-1}(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||})$
Proiezione di $\vec{u}$ su $\vec{v}$:
$pr_{\vec{v}}\vec{u} = (\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2})\vec{v}$

Prodotto vettoriale
$\vec{u} \times \vec{v}$
Produce un Vettore
(Geometricamente, il prodotto vettoriale = l'area del paralellogramma di dimensioni $||\vec{u}||$ e $||\vec{v}||$)
$\vec{u} =< u_1, u_2, u_3 >$
$\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ significa che i vettori sono paralleli

Linee e Piani

Equazione del Piano
(x_0, y_0, z_0) è un punto sul piano e $< A, B, C >$ è un vettore normale

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
$< A, B, C > \cdot < x - x_0, y - y_0, z - z_0 >= 0$

$Ax + By + Cz = D$ dove
$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

Equazione di una linea
Una linea richiede un Vettore Direzionale $\vec{u} =< u_1, u_2, u_3 >$ e un punto (x_1, y_1, z_1) poi, le parametrizzazioni di una linea possono essere:
$x = u_1 t + x_1$
$y = u_2 t + y_1$
$z = u_3 t + z_1$

Distanza di un Punto da un Piano
la distanza di un punto (x_0, y_0, z_0) da un piano Ax+By+Cz=D la posso esprimere attraverso la formula:
$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Legami fra teoremi

Differenziabilità, derivabilità e continuità
TDT: se esiste intorno di un pt in cui $f(x, y)$ ha derivate parziali continue nel pt, allora $f(x, y)$ differenziabile nel pt.
- Se $f(x, y)$ differenziabile nel pt, allora $f(x, y)$ continua nel pt. (no viceversa)
- Se $f(x, y)$ differenziabile nel pt, allora $f(x, y)$ parzialmente derivabile nel pt. (no viceversa)
- no legami fra derivate parziali e continuità

Teor Schwarz
Se $f(x, y)$ definita in almeno un intorno del pt e sono definite e continue nel pt le derivate parziali prime, allora le derivate parziali seconde $f_{xy} = f_{yx}$

Titoletto
bla bla bla

Massimi e Minimi controlla struttura

• Trovare estremi relativi di funzioni definite su insiemi aperti, derivabili ovunque

• Trovare estremi assoluti di funzioni continue e derivabili ovunque, definite su insiemi chiusi e limitati. Si risolve in 3 passi:

a) cerco pt di max/min interni (via annullamento delle derivate prime)

b) cerco pt di max/min sulla frontiera (via sostituzione o ML)

c) calcolo il valore della funzione in tutti i pt trovati in a) e b). Fra questi pt ci sono certamente i pt di max e min assoluto, che ∃ per teor. Weierstrass

• Trovare estremi relativi di funzione con vincolo

- si risolve via sostituzione. I ML non bastano, danno condizioni solo necessarie

Risultati per punti interni
- c. necess: derivate parziali nel pt siano nulle

Utile su D aperto
- c. suff: se $f(x,y)$ ammette derivate parziali prime e seconde continue in un intorno del pt e vale la c. necess., allora:
a) c. suff. per cui pt sia pt minimo relativo interno è che $\begin{cases} f_{xx}(pt) > 0 \\ |H(pt)| > 0 \end{cases}$
a') c. suff. per cui pt sia pt massimo relativo interno è che $\begin{cases} f_{xx}(pt) < 0 \\ |H(pt)| > 0 \end{cases}$ -
non concludo nulla se $|H(pt)| \geq 0$
- un pt NON è pt di ottimo se $|H(pt)| < 0$

Max e min su frontiera del dominio
min/max su $D \cap \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$
I)metodo di sostituzione: se riesco esplicito $g(x,y) = 0$ risp x o y ottenendo problema di max/min in una var soltanto
II)metodo dei moltiplicatori di Lagrange: fornisce cond. necess. per punti di ottimo sul vincolo $g(x,y)$ vedi Moltiplicatori di Lagrange

Punti Interni
1. Calcola le Derivate Parziali rispetto a x e y (f_x e f_y) (Puoi usare il gradiente)
2. Poni le derivate uguali a 0 e risolvi il sistema di equazioni rispetto x e y
3. Inserisci nell'equazione originaria in z. Usa Test delle Derivate Seconde per sapere se i punti sono massimi o minimi locali, o sella

Test delle Derivate Seconde Parziali
1. Trova tutti i punti (x,y) per cui $\nabla f(x,y) = \vec{0}$
2. Sia $D = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$
SE (a) D > 0 ET $f_{xx} < 0$, f(x,y) è massimo locale
(b) D > 0 ET $f_{xx}(x,y) > 0$ f(x,y) è minimo locale
(c) D < 0, (x,y,f(x,y)) è un punto di sella
(d) D = 0, test inconclusivo
3. Determina se ciascun punto sul confine fornisce un min o max. Tipicamente, dobbiamo parametrizzare il confine per ridurlo ad un problema di min/max di Analisi 1.

Quanto segue si applica solo se viene fornito un confine
1. Controlla i punti d'angolo
2. Controlla ciascuna linea (0 ≤ x ≤ 5 darebbe x=0 e x=5)
Sulle Equazioni Limitate, questo è il massimo/ minimo globale ... il test delle derivate seconde non è necessario.

Moltiplicatori di Lagrange

Data una funzione f(x,y) con il vincolo g(x,y), risolvi il seguente sistema di equazioni per trovare i punti di massimo e di minimo sul vincolo (NOTA: potrebbe essere necessario trovare anche punti interni):
$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \quad (\text{o } k \text{ se è dato}) \end{cases}$
Aggiungi eventuali pt singolari di $g(x,y)$ per cui $g(x,y) = 0$

Teor risparmia tempo su ML
Se $f(x,y) = h(r(x,y))$, con $u = r(x,y)$ e se $h'(u) > 0$, allora i pt di massimo della $f(x,y)$ sono gli stessi di quelli della $g(x,y)$. Lo stesso per i pt di minimo.

Integrali Doppi

Rispetto all'asse xy, se prendiamo un integrale,
$\int\int dydx$ sta tagliando in rettangoli verticali,
$\int\int dxdy$ sta tagliando in rettangoli orizzontali

Coordinate Polari
Quando usiamo coordinate polari,
$dA = rdrd\theta$

Area di superficie di una curva

Sia z = f(x,y) continua su S (a regione chiusa in dominio 2D)
L'area di superficie della z = f(x,y) su S è:
$SA = \int\int_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$

Metodo Jacobiano

$\int\int_G f(g(u,v), h(u,v))|J(u,v)|dudv = \int\int_R f(x,y)dxdy$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Line Integrals

C given by $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$
$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))ds$
where $ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt$
or $\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx$
or $\sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}dy$
To evaluate a Line Integral,
· get a paramaterized version of the line (usually in terms of t, though in exclusive terms of x or y is ok)
· evaluate for the derivatives needed (usually dy, dx, and/or dt)
· plug in to original equation to get in terms of the independant variable
· solve integral

Independence of Path

Fund Thm of Line Integrals
C is curve given by $\vec{r}(t), t \in [a,b]$; $\vec{r}\prime(t)$ exists. If $f(\vec{r})$ is continuously differentiable on an open set containing C, then $\int_c \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$

Equivalent Conditions
$\vec{F}(\vec{r})$ continuous on open connected set D. Then,
$(a)\vec{F} = \nabla f$ for some fn f. (if $\vec{F}$ is conservative)
$\Leftrightarrow (b) \int_c \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} is indep. of path in D$
$\Leftrightarrow (c) \int_c \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ for all closed paths in D.

Conservation Theorem
$\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ continuously differentiable on open, simply connected set D.
$\vec{F}$ conservative $\Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$
(in 2D $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ iff $M_y = N_x$)

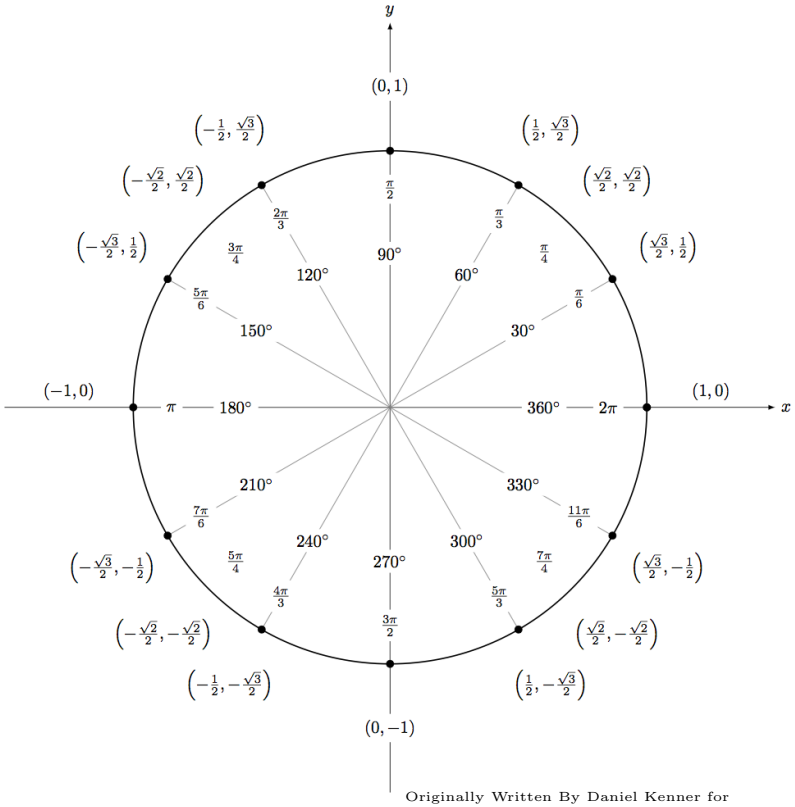
prova a caso

C given by $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$
$\int_c f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))ds$
where $ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt$
or $\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx$
or $\sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}dy$
To evaluate a Line Integral,
· get a paramaterized version of the line
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole parole ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole

Circonferenza unitaria

ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole ultime parole ultime parole
ultime parole ultime ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime
parole ultime parole ultime parole ultime

(cos, sin)



Originally Written By Daniel Kenner for MATH 2210 at the University of Utah.
Source code available at
https://github.com/keytotime/Calc3_CheatSheet
Later modified and customized by Luca Buratto