Tema 28/11/2008 — SOLUZIONE (CENNI)

1) Il CE richiesto è dato dalla soluzione del sistema

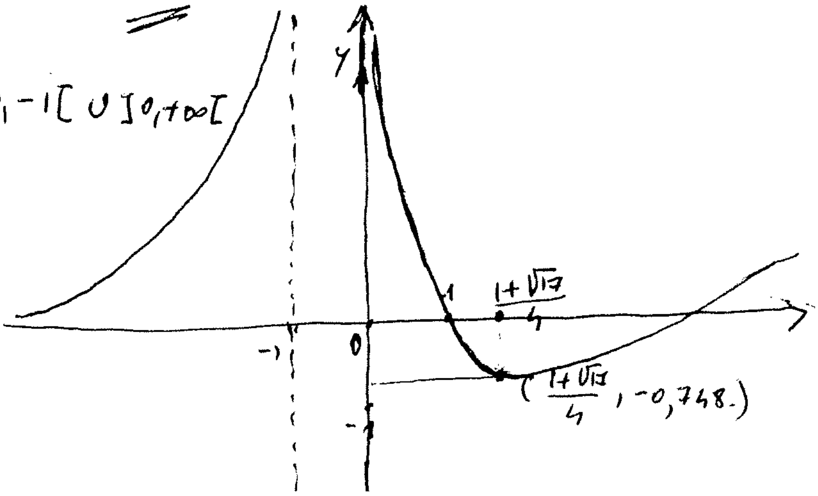
$$\begin{cases} ((2x)^x-1)(1-x)(3-2x-\sqrt{x}) \geq 0 \\ (1-x)(3-2x-\sqrt{x}) \neq 0 \\ x>0 \quad (\text{occorre che sia } x \geq 0 \text{ in } \sqrt{x},\ x>0 \text{ in } (2x)^x = e^{x\ln(2x)}) \end{cases}$$

La soluzione è $CE = \{x : x \geq \frac{1}{2},\ x \neq 1\}$

2) a) $$\lim_{x\to 2^-} \frac{\arccos(x-1)}{\sqrt{16-x^4}} \overset{F.I.\ \frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 2^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-4x^3}{\sqrt{16-x^4}}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{16-x^4}}{\underbrace{2x^3}_{\to\frac{1}{16}}\sqrt{2x-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{16}\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{(4+x^2)(2+x)\cancel{(2-x)}}{x\cdot\cancel{(2-x)}}} = \frac{1}{4}$$

3) Il grafico di $f(x)$ sul $CE =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ è, in base alle informazioni richieste, compatibile con quello a fianco.



4)

Tema 14/1/2004 SOLUZIONE (CENNI) - 1

1) a)

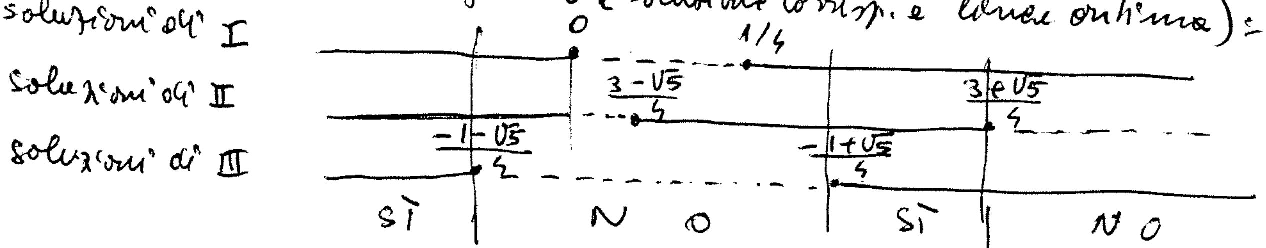
b) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\operatorname{sen} x + \cos x)}{x}} \underset{\text{TLFC}}{=} e$,

essendo $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x + \cos x)}{x} \underset{H}{\overset{\text{FI } \frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \dfrac{\overset{\to 1}{\cos x - \operatorname{sen} x}}{\underset{\to 1}{\operatorname{sen} x + \cos x}} = 1$

2) a) Equivale al sistema di disequaz.

$$\begin{cases} 2 - \frac{1}{2x} > 0 & \text{I} \\ 2x - 1 < 2 - \frac{1}{2x} & \text{II} \\ 2x - 1 > -\left(2 - \frac{1}{2x}\right) & \text{III} \end{cases}$$

Determinate le soluzioni di I, II, III [OMESSO], si arriva allo schema conclusivo seguente (soluzione corrisp. a linea continua):



soluzione disequazione: $x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, (oppure) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} < x < \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 3x} = \lim_{x\to 0} \left[\dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2} \cdot \dfrac{(3x)^2}{\operatorname{sen}^2 3x} \cdot \dfrac{4}{9} \right] = \ldots$

.. [LIMITI NOTEVOLI] ... $= \dfrac{2}{9}$

4) Si risolve con la sostituzione $e^x + 1 = u$. ($I = \int e^x \cdot \operatorname{arctg}(e^x+1)\, dx = \ldots = \int \operatorname{arctg} u \, du = \ldots$)

Tema 19/1/2004 SOLUZIONE (CENNI) - (2)

2) Data $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{x}{x-1}}$,

- campo esist.: $\mathbb{R} - \{1\}$
- $\lim_{x\to 1+} (x-1)\, e^{\frac{x}{x-1}} \overset{F.I.\, 0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 1+} \left[\frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \overset{\nearrow 1}{x} \right] \underset{\substack{TLFC\\u\to+\infty}}{=} \lim \frac{e^u}{u} = +\infty$

essendo $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{x-1} = +\infty$, $u = \frac{x}{x-1}$

$\lim_{x\to 1-} (x-1)\, e^{\overset{\to -\infty}{\frac{x}{x-1}}} = 0-$; $\lim_{x\to -\infty} (x-1)\, \underset{\downarrow e}{e^{\frac{x}{x-1}}} = -\infty$

- $D\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right) = e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} < 0$. Ciò premesso,

$f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} - (x-1)\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2} = \dots = e^{\frac{x}{x-1}}\, \frac{x-2}{x-1} \geq 0$ sse $\frac{x-2}{x-1} \geq 0$

segno f'

$x-2 \geq 0$ (da 2)

$x-1 > 0$ (da 1)

	1		2	
+		−		+
↗		↘		↗

→ f è crescente in $]-\infty, 1[$ e in $]2, +\infty[$

decrescente in $]1, 2[$

$x = 2$: pto di min. rel. ($\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$, $f(2) = e^2$)

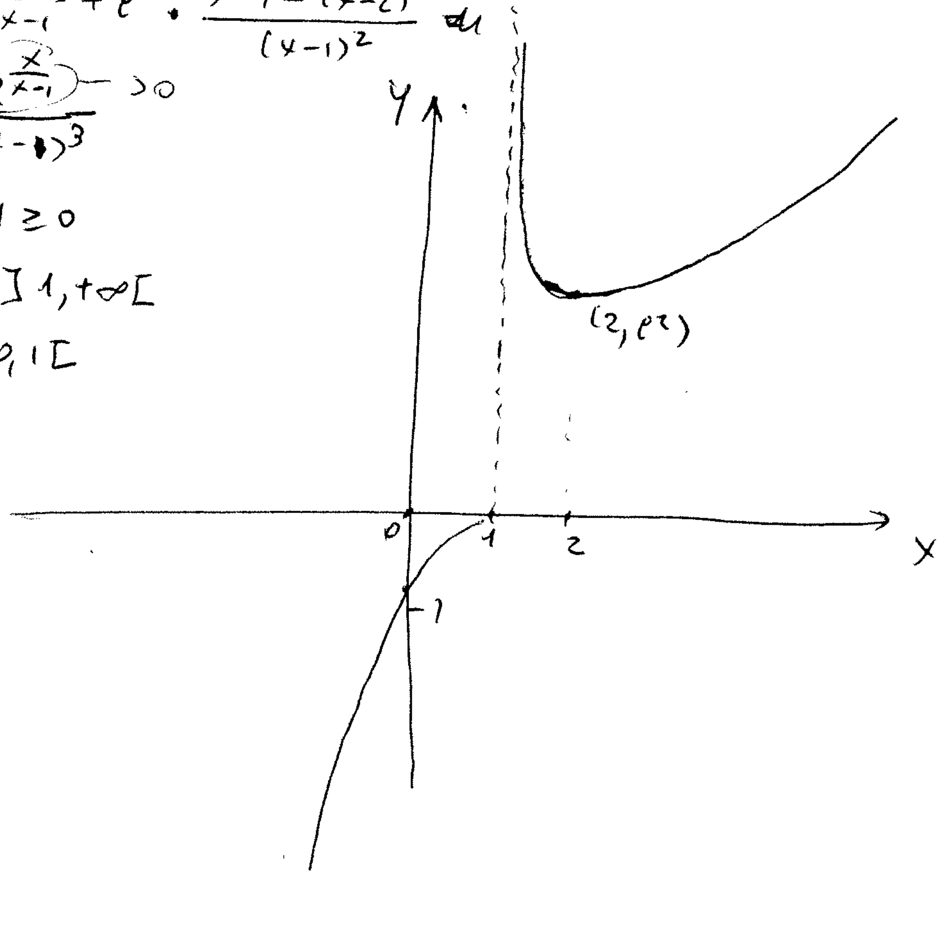
- $f''(x) = -\frac{e^{\frac{x}{x-1}}}{(x-1)^2}\, \frac{x-2}{x-1} + e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x-1-(x-2)}{(x-1)^2}$ ~~di~~

$= \dots = \frac{\overset{>0}{e^{\frac{x}{x-1}}}}{(x-1)^3}$

→ $f''(x) \geq 0$ sse $x-1 \geq 0$

f è convessa su $]1, +\infty[$

concava su $]-\infty, 1[$



Tema 18/9/2012 — SOLUZIONE (CBNN1)

[redacted] Il CE è individuato dalle

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{e+2ex} > 0 \\ \ln\frac{1}{e} = -1 \le \ln \dfrac{x-2}{e+2ex} \le 1 = \ln e \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-2}{e+2ex} > 0 \quad (\mathrm{I}) \\ \dfrac{1}{e} \le \dfrac{x-2}{e+2ex} \le 1 \quad (\mathrm{II}) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x-2}{e+2ex} \le e \quad (1) \\ \dfrac{x-2}{e+2ex} \ge \dfrac{1}{e} \quad (2) \end{cases};$$

nota: (I) è implicata da (II)

- Sol. di (1): $x \le -\dfrac{2+e^2}{2e^2-1}$, $x > -\frac{1}{2}$
- Sol. di (2): $-3 \le x < -\frac{1}{2}$
- Soluzione sistema: il CE è dato da $x \in \left[-3, -\dfrac{2+e^2}{2e^2-1}\right]$

[redacted] $\binom{8}{6} \cdot \binom{12}{3} = \dots = 6.160$

[redacted]
$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\right) =$$
FI $(+\infty)-(+\infty)$, essendo $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$ FI $\frac{0}{0}$ $\displaystyle = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)+1}{2x} = +\infty$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{(1+x)\ln(1+x) - x}{x^2} \overset{\text{FI } \frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x) + \cancel{1} - \cancel{1}}{2x} = \frac{1}{2}+$$

via H. o come limite notevole

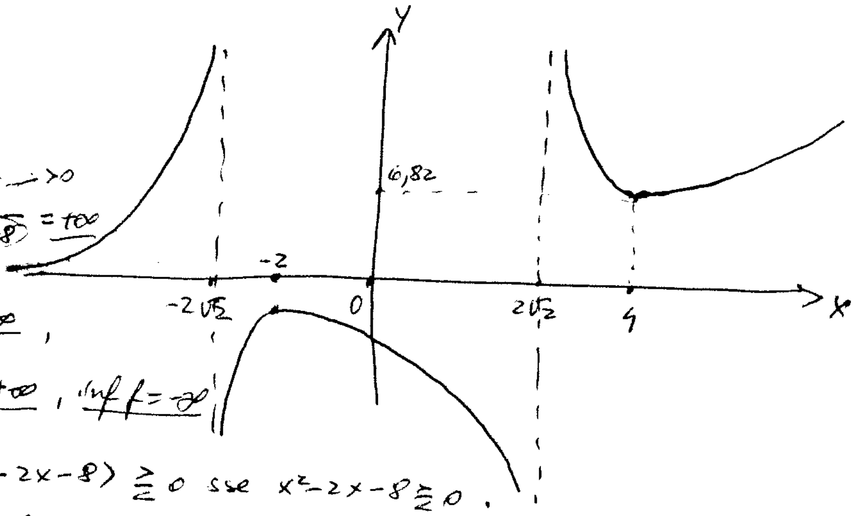
[redacted] $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-8}$

- CE: $\mathbb{R} - \{\pm 2\sqrt{2}\}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-8} \underset{PS}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-8} = 0+$; $\displaystyle\lim_{x\to 2\sqrt{2}+} \frac{e^x}{x^2-8} = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to 2\sqrt{2}-} \frac{e^x}{x^2-8} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to -2\sqrt{2}+} \frac{e^x}{x^2-8} = -\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to -2\sqrt{2}-} \frac{e^x}{x^2-8} = +\infty$. $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$



- $f'(x) = \dots = \dfrac{e^x}{(x^2-8)^2}(x^2-2x-8) \gtreqless 0$ sse $x^2-2x-8 \gtreqless 0$.

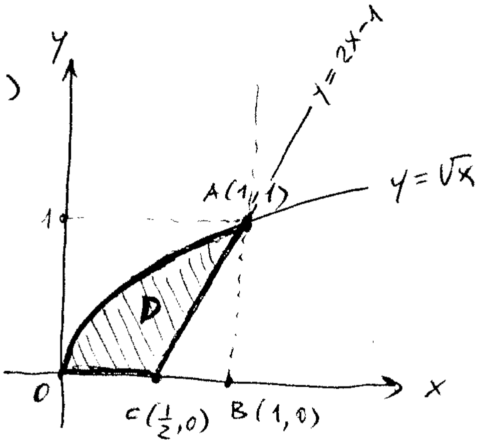
> 0 sul CE

segno f'

$-\infty$ … $-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$ … -2	-2 … $2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$ … 4	4 … $+\infty$
+ ↗	+ ↗	− ↘	− ↘	+ ↗

$\rightarrow$
- f cresc. in $]-\infty, -2\sqrt{2}[$, in $]-2\sqrt{2}, -2[$ e $]4, +\infty[$
- f decr. in $]-2, 2\sqrt{2}[$ e in $]2\sqrt{2}, 4[$
- $x = -2$ pto di max. rel., $(f(-2) \simeq -0{,}03)$
- $x = 4$ pto di min. rel. $(f(4) \simeq 6{,}82)$

[redacted] a)



$$\text{Area}(D) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \text{Area}(\triangle ABC) = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 - 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \dots = \frac{5}{12}$$

b) $$I = \iint_D y\,dx\,dy = \int_0^1 y\,dy \int_{y^2}^1 dx = \int_0^1 y(1-y^2)\,dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Tema 22/1/2002 — SOLUZIONE (CENNI) (1)

1) Cerco il campo di esistenza di $f(x)$, dev'essere $\begin{cases} \ln \dfrac{x-1}{x^2+2x-3} \geq 0 & \mathrm{I} \\ \dfrac{x-1}{x^2+2x-3} > 0 & \mathrm{II} \end{cases}$,

e poiché la I equivale a $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3} \geq 1$, è sufficiente studiare quest'ultima disequazione, essendo la II implicata da essa. Si ottiene $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3} \geq 1$ sse .... sse $\dfrac{-x^2-x+2}{x^2+2x-3} \geq 0$, e si verifica facilmente [CALCOLI OMESSI] che si perviene alla soluzione: $x \in \,]-3,-2]$

Per gli estremi assoluti, calcoliamo $f'(x)$, anzi, osserviamo che basta calcolare (propr. funzioni composte)$^{(\bullet)}$ $h'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\right) = \dots = \dfrac{1}{x+3}$.

Quindi f è decrescente su $]-3,-2]$, non ha ~~estremi~~ pti di estremo relativo interni, mentre $x=-2$ è pto di minimo relativo (e anche assoluto; fra l'altro, $f(-2)=0$, e $f(x)\geq 0$, $\forall x$).

$\nexists$ max. assol.; per il teor. sul lim. delle funzioni monotone,

$$\sup f = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{\ln \frac{x-1}{\underbrace{x^2+2x-3}_{\to 0^-}}} = +\infty .$$

2) a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{x^2}\ln\frac{x^2}{1+x}\right) = \lim_{u\to 0^+}\frac{\overbrace{\ln u}^{\to -\infty}}{\underbrace{u}_{\to 0^+}} = -\infty$$

TLFC, $\dfrac{x^2}{1+x} = u$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x^2}^{\to 0^+}}{\underbrace{1+x}_{\to 1}} = 0^+$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos x + x^2\sqrt{x}} \overset{FI\,\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos x} = \lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{1-u} \overset{FI\,\frac{0}{0}}{=}$$

PS, $\mathrm{ord}_0(x^2\sqrt{x}) > \mathrm{ord}_0(1-\cos x) = 2$

TLFC, $\cos x = u$

TLFC, $w = u-1$

$$= \lim_{w\to 0}\frac{\ln(1+w)}{-w} = -1$$

limite notevole $\left(\displaystyle\lim_{w\to 0}\frac{\ln(1+w)}{w} = 1\right)$

$(\bullet)$ $f(x) = k(h(x))$, $k(y) = \ln y$ ha $k'(y) > 0$, $\forall y$

Tema 22/1/2002 SOLUZIONE (CENNI) (2)

[redacted] $f(x) = \ln\sqrt{x-1} + \operatorname{arcsen}(1-x)$

- CE: è dato dalle soluz. del sistema $\begin{cases} x-1>0 \\ -1 \le 1-x \le 1 \end{cases}$, ... CE: $x \in]1,2]$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\ln\underbrace{\sqrt{x-1}}_{\to 0^+ \ (Fc)} + \underbrace{\operatorname{arcsen}(1-x)}_{(Fc)\to 0}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \underset{Fc}{=} f(2) = -\frac{\pi}{2}$

- $f'(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{\sqrt{x(2-x)} - 2(x-1)}{\underbrace{2(x-1)\sqrt{1-1-x^2+2x}}_{>0 \text{ sul CE}}} < 0$ sse

sse $\sqrt{x(x-2)} < 2(x-1) \iff \begin{cases} x(2-x)\ge 0 \to \text{vera sul CE} \\ 2(x-1)>0 \to \quad " \quad " \\ 4(x-1)^2 > x(2-x) \end{cases}$, da cui si ottiene

.... $f'(x)<0$ sse $x > 1+\frac{\sqrt5}{5}$

$\to$ $x = 1+\frac{\sqrt5}{5}$ è pto di max. rel. ($f(1+\frac{\sqrt5}{5}) \simeq -0{,}34$) e assoluto

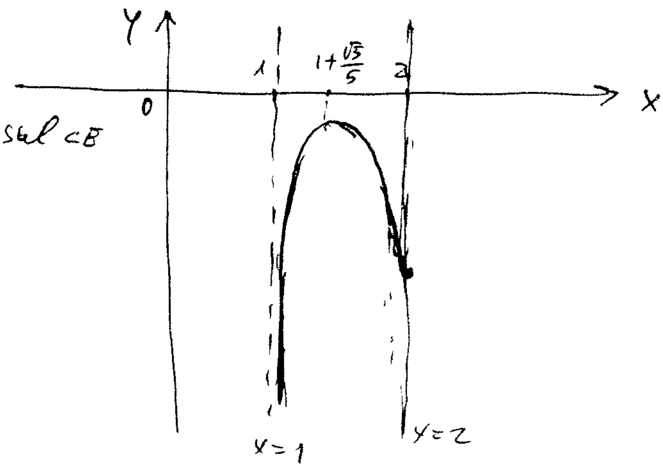
$x=2$ è pto di min. rel. ($\nexists$ min. assol., $\inf f = -\infty$)

f è crescente su $]1, 1+\frac{\sqrt5}{5}[$, decresc. su $]1+\frac{\sqrt5}{5}, 2[$.

- $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac12(x-1)^{-1} - (1-(1-x)^2)^{-\frac12}\right)$

$= \dots = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{x-1}{\sqrt{(1-(1-x)^2)^3}} < 0$ sul CE

$\to$ f è concava su $]1,2]$



[redacted] $J = \int x^2 \cdot \cos^2 x^3\, dx = \frac13 \int \cos^3 u\, du = \dots = \frac{\operatorname{sen} x^3 \cdot \cos^2 x^2}{9} + \frac{2}{9}\operatorname{sen} x^3 \ (+c)$

posto $x^3 = u$, $du = 3x^2 dx$

$J_3 = \int \cos^3 u\, du$ si calcola per ricorrenza