Sintesi dei principali teoremi

(Analisi 1)

YouActuary

Argomenti

Premessa

Tratteremo funzioni con una sola variabile!

- Nuove notazioni
- Teor. singola successione
- Teor. più successioni
- Teor. continuità per un singolo pt x_0
- Teor. continuità su un intervallo
- Teor. derivabilità per un singolo pt x_0
- Teor. derivabilità per un intervallo (da capire)
- Teor. integrabilità (solo intervalli)

nb omessi: Teor. sui limiti, tecniche e formule di derivazione ed integrazione

Nuove notazioni per punti

I_{x_0}	intorno del pt x_0
f_{x_0}	funzione $f(\cdot)$ definita sul pt x_0
$f_{x_0} > 0$	significa$f(x_0) > 0$, funzione positiva nel pt x_0
$f_{x_0} < 0$	significa$f(x_0) < 0$, funzione negativa nel pt x_0
$f_{x_0} = 0$	significa$f(x_0) = 0$, funzione nulla nel pt x_0
$f_{\mathrm{cresc}\ \mathrm{x}_0}$	significa funzione crescente (derivata nel pt > 0)
$f_{\mathrm{decresc}\ \mathrm{x}_0}$	significa funzione decrescente (derivata nel pt < 0)
$\cancel{\max(f_{x_0})}$	(inutile) il massimo della funzione $f(\cdot)$ nel pt x_0 è $f(x_0)$
$\sup_{]\,[} f$	estremo superiore della funzione f sull'intervallo $]\,[$
F.C. $_{x_0}$	generica funzione continua nel pt x_0
f'_{x_0}	funzione $f(\cdot)$ derivabile nel pt x_0
$f'_{x_0} = 0$	funzione $f(\cdot)$ con derivata nulla nel pt x_0
$(g(f_{x_0}))'$	derivata della funzione composta $g'(f(x_0)) \cdot g'(x_0)$
$\cancel{f_{\int x_0}}$	(non ha senso l'integrale in un pt x_0)

Nuove notazioni per intervalli

I_{x_0}	intorno del pt x_0
$]\,[,\ \ [\,]$	intervallo limitato aperto, limitato chiuso
$]\,],\ \ [\,[$	intervallo limitato aperto a sx, limitato aperto a dx
$[-\infty, \cdot[$	intervallo illimitato aperto a, intervallo illimitato aperto a sx
$-\infty, +\infty[$	intervallo illimitato aperto a dx e sx
$f_{]\,[}$	funzione $f(\cdot)$ definita sull'intervallo $]\,[$
$f_{[\,]}$	funzione $f(\cdot)$ definita sull'intervallo $[\,]$
$f_{]\,[} > 0$	significa $f(x) > 0\, \forall x \in]\,[$, funzione positiva sull'intervallo $]\,[$
$f_{]\,[} < 0$	significa $f(x) < 0\, \forall x \in]\,[$, funzione negativa sull'intervallo $]\,[$
$f_{]\,[} = 0$	significa $f(x) = 0\, \forall x \in]\,[$, funzione nulla sull'intervallo $]\,[$
$f_{\text{cresc}\,]\,[}$	significa funzione crescente: $f(x_1) < f(x_2)$ con $x_1 < x_2$
$f_{\text{decresc}\,]\,[}$	significa funzione decrescente: $f(x_1) > f(x_2)$ con $x_1 < x_2$

Nuove notazioni per intervalli

f_{mon}	funzione monotona
$f_{\,\mathrm{limitata}}$	funzione limitata
$\max(f_{\,]\,[})$	il massimo della funzione $f(\cdot)$ sull'intervallo $]\,[$
$\mathrm{F.C.}_{]\,[}$	generica funzione continua sull'intervallo $]\,[$
$f'_{]\,[}$	funzione $f(\cdot)$ derivabile nell'intervallo $]\,[$
$f'_{]\,[} = 0$	derivata funzione $f(x) = 0\,\forall x \in]\,[$
$(g(f_{\,]\,[}))'$	derivata della funzione composta $g'(f(]\,[)) \cdot g'x\forall x \in]\,[$
$f_{\int_{]\,[}}$	funzione integrabile sull'intervallo aperto $]\,[$

Una sola successione

ipotesi	teor	tesi
a_n succ. convergente al limite $l \neq 0$	3.4 della permanenza del segno	segno di a_n ed l è lo stesso
a_n succ. ammette limite	3.8	è limitata
a_n succ. monotona	3.16	ammette limite: finito se limitata. ∞ se illimitata: $\sup a_n$ se a_n crescente ∞ se illimitata: $\sup a_n$ se a_n crescente, e $\inf a_n$ se a_n decrescente
$\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$	3.17	se $l < 1 \rightarrow (a_n \rightarrow 0)$ se $l > 1$ (anche $+\infty$) $\rightarrow (a_n \rightarrow +\infty)$
a_n succ. convergente	3.21	a_n è infinitesima
a_n succ. a termini non negativi	3.22	$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k = \sup \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \right\}$
$a_n > 0 \, \forall n$	3.25 criterio del rapporto	se $\exists 0 \leq r < 1 \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \, \forall n \rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \leq \frac{a_1}{1-r}$ se $\exists 0 \leq r < 1 \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \, \forall n \rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge
$a_n \geq 0 \, \forall n$	3.26 criterio della radice	se $\exists 0 \leq r < 1 \mid \sqrt[n]{a_n} \leq r \, \forall n \rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \leq \frac{a_1}{1-r}$(converge) se $\exists 0 \leq r < 1 \mid \sqrt{a_n} \leq r \, \forall n \rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge
$a_n > 0 \, \forall n \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = R$	3.27 criterio del rapporto asintotico	se $R < 1 \rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se $R > 1$ (anche $+\infty$)$\rightarrow \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge
$a_n \geq 0 \, \forall n \, \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$	3.28 criterio della radice asintotico	se $R < 1 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se $R > 1$ incluso $(+\infty) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge
$a_n > 0$, decrescente e $\mid \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$	3.31 criterio di Leibnitz	se $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ converge

Più successioni

ipotesi	teor	tesi
3 succ. a_n, b_n, c_n , $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n$ | $\lim_{n \to +\infty} a_n = l = \lim_{n \to +\infty} c_n$	3.6 del confronto	$\lim_{n \to +\infty} b_n$ (converge)
$a_n \leq b_n \forall n$	3.10 del confronto	$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \to \lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty \to \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$
$a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$	3.11	$a_n + b_n \to l_1 + l_2$, $a_b \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$ Se $b_n \neq 0$ $\forall n$ e $l_2 \neq 0$ $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$
$a_n \mid \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, b_n limitata	3.12	$\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n = 0$
$a_n \to +\infty, b_n \to l$ (finito $0 + \infty$) $a_n \to -\infty, b_n \to l$ (finito $0 - \infty$) $a_n \to +\infty,\ b_n \to l(> 0 + \infty)$ $a_n \to +\infty,\ b_n \to l(< 0 - \infty)$ $a_n \to \pm\infty$ $a_n \to 0,\ a_n > 0$ $a_n \to 0,\ a_n > 0$	3.13	$a_n + b_n \to +\infty$ $a_n + b_n \to -\infty$ $a_n \cdot b_n \to +\infty$ $a_n \cdot b_n \to -\infty$ $1/a_n \to 0$ $1/a_n \to +\infty$ $1/a_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty, b_n$ (infer. limitata) $a_n \to -\infty, b_n$ (super. limitata) $a_n \to +\infty$ $b_n \leq \delta < 0$ $a_n \to +\infty$ $b_n \leq \delta < 0$	3.14	$a_n + b_n \to +\infty$ $a_n + b_n \to -\infty$ $a_n \cdot b_n \to +\infty$ $a_n \cdot b_n \to -\infty$

ipotesi		teor		tesi	
se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge se $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge		3.20		$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ $\sum_{k=1}^{+\infty} c(a_k) = c\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge	
$0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n$		3.23 del confronto fra serie		se $\sum_{k=0}^{+\infty}(b_k)$ converge, $\rightarrow$ $\rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge: $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}(b_k) < +\infty$ se $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k)$ diverge, $\rightarrow$ $\rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge	
$a_n, b_n \vert \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l(\neq 0)$		3.24 del cfr. asintotico fra serie		$\sum_{k=0}^{+\infty}(b_k)$ converge $\leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge	
$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k)$ converge assol. (serie è axx conv se serie dei val.axx. associata è conv.)		3.30		$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k)$ converge e vale che $\vert\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\vert \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\vert a_k\vert$	

Schema continuità (punto x_0)

hip I funz		teor		tesi	
funzioni razionali, potenza, esponenziali, logaritmi trigonometriche et arcsin, arccos, arctan , val. ass.		4.21		F.C. su propio dominio	
f F.C.$_{]x_1,x_2[}$, $f'_{]x_1,x_2[}$		4.11		$f^{-1}_{]y_1,y_2[}$ F.C.	
F.C.$_{[\,]}$		4.32 Weierstrass		$f_{]\,[}$ limitata, $\exists$ max e min assoluti	
F.C.$_{[a,b]}\vert f(a)\cdot f(b)<0$		4.29 degli zeri		$\exists x_0\vert f_{x_0}=0$	
F.C.$_{[\,]}$ f F.C., g F.C.		4.30		assume tutti valori di [ ] $(f+g)$, $(f-g)$, $(f\cdot g)$, $(\frac{f}{g})$, $(f\circ g)$ F.C.	
f F.C, $f_{iniettiva}$				f^{-1} F.C.	

Schema continuità (per intervalli)

hip I funz		teor		tesi	
funzioni razionali, potenza, esponenziali, logaritmi trigonometriche et arcsin, arccos, arctan , val. ass.		4.21		F.C. su propio dominio	
F.C.$_{]x_1,x_2[}$, $f'_{]x_1,x_2[}$		4.11		$f^{-1}_{]y_1,y_2[}$ F.C.	
F.C.$_{[\,]}$		4.32 Weierstrass		$f_{][}$ limitata, $\exists$ max e min assoluti	
F.C.$_{[a,b]}\vert f(a)\cdot f(b)<0$		4.29 degli zeri		$\exists x_0 \vert f_{x_0}=0$	
F.C.$_{[\,]}$		4.30		assume tutti valori di [ ]	

Continuità e monotonia

hip I funz		teor		tesi	
f_{mon} strett. cresc		4.2		f invertibile	
f_{mon} strett. decresc				f invertibile	
$f_{]a,b[}$ e f_{mon}		4.20		$\exists$ sempre (finiti o ∞):	
				se f_{cresc} $\lim\limits_{x \to a^+} f = \inf_{]a,b[} f$	
				se f_{cresc} $\lim\limits_{x \to b^-} f = \sup_{]a,b[} f$	
				se $f_{decresc}$ $\lim\limits_{x \to a^+} f = \sup_{]a,b[} f$	
				se $f_{decresc}$ $\lim\limits_{x \to b^-} f = \inf_{]a,b[} f$	

Schema derivabilità (per x_0)

ipotesi		teor		tesi	
f'_{x_0}		5.2		f F.C.$_{x_0}$	
$\max(f_{]\,[})$				se $\exists f'_{x_0} \to f'_{x_0} = 0$	

Schema derivabilità (per intervalli)

hip I funz	teor	tesi
$f'_{]\,[}$, $f_{\mathrm{cresc}\,]\,[}$ $f'_{]\,[}$, $f_{\mathrm{decresc}\,]\,[}$	5.6 5.6	$f'_{]\,[} \geq 0$ $f'_{]\,[} \leq 0$
F.C.$_{]a,b[}$, $f'_{a,b]}$	5.9 teor Lagrange	$\epsilon \in]a,b[\,\lvert f'(\epsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
F.C.$_{[a,b]}$, $f'_{]a,b[}\,\lvert f(a) = f(b)$	5.10 teor Rolle	$\epsilon \in]a,b[\,\lvert f'(\epsilon) = 0$
F.C.$_{[\,]}$, $f'_{],[}$, $f'_{x]\,[} = 0$	5.11	f cost.
F.C.$_{[\,]}$, $f'_{]\,[}$	5.12	$f'_{]\,[} > 0\,(< 0) \to f_{cresc.\ stret.\,]\,[}\,(f_{decresc.\ stret.\,]\,[})$ $f'_{]\,[} \geq 0\,(\leq 0) \to f_{cresc.\,]\,[}\,(f_{decresc.\,]\,[})$
$f'_{[a,b]}, f''_{[a,b]}\ F.C._{(a \leftarrow \mathrm{da}\ )(\mathrm{oppure}\ da\ sx \to b)}$	5.15 generaliz. Lagrange	$\exists \epsilon \lvert f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\epsilon)}{2}(b-a)^2$
$f'_{[a,b]}, f''_{[a,b]}\ F.C._{(a \leftarrow \mathrm{da}\ )(\mathrm{oppure}\ da\ sx \to b)}$	5.16 corollario	$\exists x_0 \lvert f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$
$f^{(n)}_{[a,b]}$, F.C.$^{(n)}_{[a,b]}$	5.18 Formula di Taylor (resto Lagrange)	$\exists \epsilon \in [a,b] \lvert f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(\epsilon)}{n!}(b-a)^n$
$f^{(n)}_{[\,]}$, F.C.$^{(n)}_{[\,]}$	5.19 Formula di Taylor (resto Peano) all'ordine n	$\exists x_0 \in]a,b[\,\lvert f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$
$f''_{]\,[}$, F.C.$''_{]\,[}$, (< 0)	5.21	se $f''_{x_0} > 0 \to f$ è convessa in x_0 se $f''_{x_0} < 0 \to f$ è concava in x_0
$f''_{]\,[}$, F.C.$''_{]\,[}$	5.23	se $x_0 \in]\,[$ è pt di fesso $\to f''(x_0) = 0$
$f''_{]\,[}$, F.C.$''_{]\,[}$, $f''_{x_0} = 0,\ f''_{I_{x_0\,sx}} < 0 \mathrm{\ e\ } f''_{I_{x_0}} > 0$ (oppure $f''_{]\,[}$, F.C.$''_{]\,[}$, $f''_{x_0} = 0,\ f''_{I_{x_0\,sx}} > 0 \mathrm{\ e\ } f''_{I} < 0$)	5.24	x_0 è pt di flesso

Integrabilità (solo intervalli)

hip I funz	hip II funz	teor		tesi	
$f_{\int_{[\ ]}}$	$g_{\int_{[\ ]}}$	6.9		$\int_{]\,[}(f+g)=\int_{]\,[}f+\int_{]\,[}g$ $\int_{]\,[}\lambda f=\lambda\int_{]\,[}f$	
$f_{\int_{[\ ]}}$	$g_{\int_{[\ ]}}$	6.10		se $f\leq g\rightarrow\int_{]\,[}f\leq\int_{]\,[}g$ se $f\leq g\rightarrow\left\lvert\int_{]\,[}f\right\rvert\leq\int_{]\,[}\lvert f\rvert$	
F.C.$_{]\,[}$, $f_{\int_{\vert_{[\mathrm{sx}\cdot]}}}$ e $f_{\int_{[\cdot]}}$		6.11		$\int_{]\,[}f=\int_{]\mathrm{sx}\cdot[}f+\int_{]\cdot\mathrm{dx}[}f$	
F.C.$_{[a,b]}$		6.13 media integrale		$\exists c\mid\int_{]\,[}f=(b-a)\cdot f(c)$	
$f_{[]}=g_{[]}$ (a - di n° finito pt.)		6.14		$\int_{[]}f\leftrightarrow\int_{[]}g$. Se si $\rightarrow\int_{[]}f=\int_{[]}g$	
$f_{[]}$ $f_{\text{mon et limitata}}$		6.15		$f_{\int_{[\ ]}}$	
$f_{\text{F.C.}}$		6.16		$F(x)=\int_{]a,x[}fdt$, $(F(x))'_{[]}=f_{[]}$	
$f_{[]}$ F.C.	G primitiva di f	6.17 corollario		$\int_{[]}fdt=G(b)-G(a)$	
$f_{[a,b]}F.C._{[a,b]}$	$\phi F.C._{]\alpha,\beta[},\phi'_{]\alpha,\beta[},\phi:]\alpha.\ \beta[\rightarrow]a,b[$	6.18 cambiamento di variabile		$\int_{]\,[}fdt=\int_{\phi^{-1}(b),\phi^{-1}(a)}f(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt$	
$f_{\int_{[,\infty[}}$	$g_{\int_{[,\infty[}}$	7.3		$\int_{[,\infty[}(f+g)=\int_{[,\infty[}f+\int_{[,\infty[}g$ $\lambda\int_{[,\infty[}f=\int_{[,\infty[}\lambda f$	
$f_{\int_{[a,\infty[}}$		7.4		$\int_{[a,\infty[}=\int_{[a,c[}f+\int_{]c,\infty[}f$ (2 pdv)	
$f_{\int_{[a,+\infty]}}$	$g_{\int_{[a,+\infty]}}$, $0\leq f\leq g\forall x>a$	7.5 del confronto		se $g_{\int_{[a,\infty]}}\rightarrow\int_{[a,\infty[}f\leq\int_{[a,\infty[}g$ se invece $\int_{[,\infty[}f=+\infty\rightarrow\int_{[,\infty[}g=+\infty$	
$f_{]a,+\infty[}$ $f_{\int_{]a,b[}}$, $f>0$	$g_{]a,+\infty[}$, $g_{\int_{]a,b[}}$, $g>0$, $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\frac{f}{g}=l>0$	7.6 cfr asintotico		$f_{\int_{[a,\infty[}}\leftrightarrow g_{\int_{[a,\infty[}}$	

$f_{\text{decresc }]0,+\infty[}$, $f \geq 0$		7.7		$f_{\int_{[0,\infty[}}$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$ converge a $f_{\int_{[0,\infty[}}$ inoltre $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{[0,+\infty[} f \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$	
$f_{\text{assol} \int_{[a,+\infty[}}$		7.9		$\left\lvert \int_{]a,+\infty[} f \right\rvert \leq \int_{]a,+\infty[} \lvert f \rvert$	
$f_{[a,b[}$ F.C.	estensibile in b: $(\forall x \in [a,b[\ f_{[[} =)\tilde{f}_{[]}$ F.C.	7.12		$\int_{[[} f = \int_{[[} \tilde{f}$	
$f_{\int_{[[}}$	$g_{\int_{[[}}$	7.13		$\int_{[[}(f+g) = \int_{[[} f + \int_{[[} g$ $\int_{[[} \lambda f = \lambda \int_{[[} f$	
$f_{\int_{[a,b[}}$, $a < c < b$		7.14		$\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c[} f + \int_{[c,b[} f$ (2 pdv)	
$f_{\int_{[a,l_{b-\epsilon}]}} > 0$	$g_{\int_{[a,l_{b-\epsilon}]}} > 0 \mid \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$	7.16		$f_{\int_{[a,b[}} \leftrightarrow g_{\int_{[a,b[}}$	
$f_{\text{ass} \int_{[[}}$		7.18		$\left\lvert \int_{[[} f \right\rvert \leq \int_{[[} \lvert f \rvert$	

Grazie per l'attenzione