

Processi Stocastici

Definizione intuitiva: un processo stocastico è un insieme ordinato di variabili casuali, indicizzate dal parametro t , spesso detto tempo.

Definizione rigorosa: dati uno *spazio di probabilità* (Ω, \mathcal{F}, P) e uno *spazio parametrico* T , un processo stocastico è una funzione $X(t, \omega)$ finita a valori reali che, per ogni $t \in T$, è una funzione misurabile di $\omega \in \Omega$ (cioè una variabile casuale).

Tipi di Processi Stocastici

1. *Processi discreti a parametro discreto* (es.: numero di giorni di pioggia per mese a Milano)
2. *Processi discreti a parametro continuo* (es.: numero di particelle emesse da una sostanza radioattiva e registrate su modulo continuo da un contatore Geiger)
3. *Processi continui a parametro discreto* (es.: temperatura corporea ad intervalli prefissati)
4. *Processi continui a parametro continuo* (es.: tracciato di un sismografo)

Famiglia delle ripartizioni finite

Un processo stocastico (a parametro discreto) è caratterizzato dalla sua famiglia delle ripartizioni finite, cioè dalla conoscenza di tutte le possibili funzioni di ripartizione

$$F(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k)$$

per ogni valore di k e insieme di indici $\{t_1, \dots, t_k\}$.

Serie storiche e processi stocastici

D'ora in poi considereremo ogni serie storica una parte finita di una realizzazione di un processo stocastico.

Avremo a disposizione uno solo tra i possibili infiniti tracciati che il processo può generare.

Siamo abituati a lavorare con campioni di diverse estrazioni di una medesima variabile casuale, ora abbiamo a disposizione, per ogni $t \in T$ una sola realizzazione.

Si potrà fare inferenza sulle future realizzazioni del processo solo stabilendo alcune proprietà del processo ed ipotizzando una forma particolare di dipendenza temporale, per mezzo della quale dare forma ad un modello statistico per il processo.

Stazionarietà

Forte: un p.s. $\{X_t\}$ si dice *stazionario in senso forte* se

$$F(X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_k} < x_k) = F(X_{t_1+h} < x_1, \dots, X_{t_k+h} < x_k)$$

$$\forall \{t_1, \dots, t_k\} \in T^k, \forall k, h \in \mathbb{Z}.$$

Debole: un p.s. $\{X_t\}$ si dice *stazionario in senso debole* o *in covarianza* se

1. $E(X_t) = \mu \quad \forall t \in T,$
2. $E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty \quad \forall t \in T,$
3. $E[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)] = \gamma(h) \quad \forall t \in T \quad \forall h \in \mathbb{N}$

$\gamma(h)$ è detta funzione di autocovarianza.

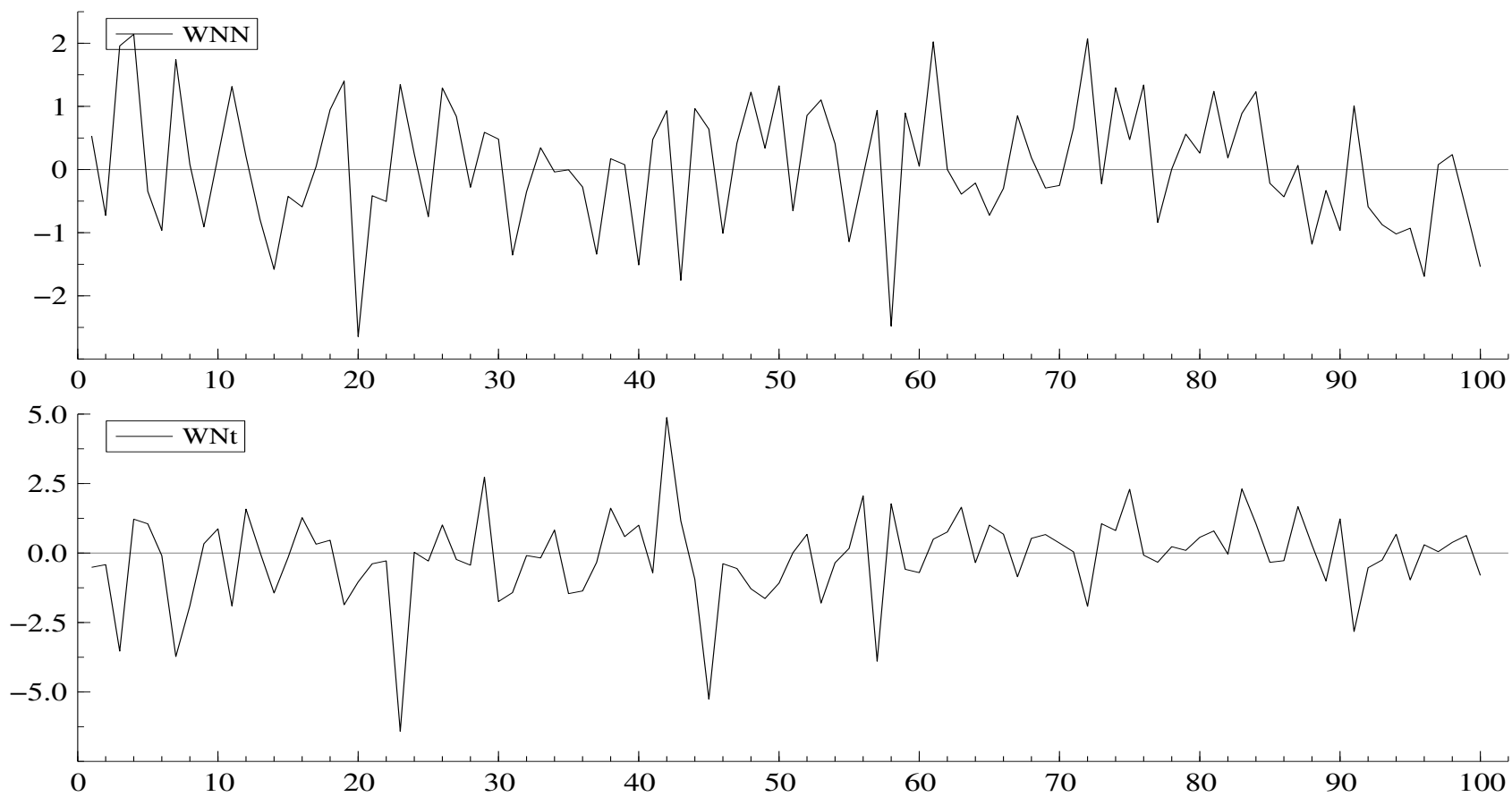
II Processo White Noise

Il processo $\{a_t\}$ si dice *white noise*, e si indica con $a_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ se

$$1. \quad E(X_t) = 0 \quad \forall t \in T,$$

$$2. \quad E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty \quad \forall t \in T,$$

$$3. \quad E[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)] = \gamma(h) = 0 \quad \forall t \in T \quad \forall h \in \mathbb{N}$$



L'invertibilità

Un p.s. si dice invertibile se può essere scritto in funzione dei suoi valori passati sommati ad un WN:

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) + a_t.$$

Le realizzazioni di a_t possono essere quindi ottenute per mezzo di

$$a_t = X_t - f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots).$$

L'ergodicità

Un p.s. è ergodico rispetto ad una funzione momento $E(\nu(X_t))$ se la media temporale di tale funzione $\nu(X_t)$ converge in probabilità alla funzione momento $E(\nu(X_t))$:

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=0}^n \nu(X_t) = E(\nu(X_t)).$$

Una condizione sufficiente per l'ergodicità in media è che

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^n |\gamma(k)| = 0.$$

Una condizione sufficiente per l'ergodicità in covarianza è che

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^n \gamma(k)^2 = 0.$$

Operatore ritardo B & co.

- $BX_t = X_{t-1}$,
 $BBX_t = BX_{t-1} = X_{t-2}$,
in generale $B^k X_t = X_{t-k}$.
- Operatore anticipo $F = B^{-1}$: $F^k X_t = B^{-k} X_t = X_{t+k}$.
- Operatore differenza $\Delta = (1 - B)$: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.
- Operatore differenza stagionale $\Delta_s = (1 - B^s)$: $\Delta_s X_t = (X_t - X_{t-s})$.
- Operatori ritardo polinomiali $\alpha_m(B) = 1 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_m B^m$.
L'algebra degli operatori polinomiali $C(B)$ è isomorfa all'algebra delle funzioni polinomiali $C(x)$, entrambe definite sul campo \mathbb{R} dei numeri reali.
Per esempio valgono: $(1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + B^3 + \dots$,
 $\exp(B) = 1 + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots$

Teorema di Wold

Ogni processo (debolmente) stazionario X_t a valor medio μ può univocamente decomorsi come:

$$X_t = Z_t + V_t \quad \text{Cov}(Z_t, V_t) = 0$$

essendo

$$V_t = \mu + \sum_{j=1}^{\infty} [\alpha_j \sin(\omega_j t) + \beta_j \cos(\omega_j t)] \quad 0 \leq \omega_j \leq \pi$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2 < \infty, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Ancora sul teorema di Wold

- V_t è una componente deterministica, nel senso che note α_j , β_j , μ e ω_j è prevedibile senza errore.
- Z_t è una componente stocastica, nel senso che noti i parametri ψ_j , è possibile solo fare affermazioni probabilistiche sul suo futuro.
- Z_t si dice processo media mobile di ordine infinito, benché i pesi ψ_j non sommino a 1.
- È possibile scrivere Z_t come polinomio di ordine infinito in B : $Z_t = \psi_\infty(B)a_t$.
- Non è possibile fare inferenza sugli infiniti parametri ψ_j di Z_t (ci vorrebbero serie di lunghezza infinita), è quindi necessario approssimare Z_t con una para¹²

metrizzazione più parsimoniosa. Una buona approssimazione di un polinomio di ordine molto grande può essere ottenuta utilizzando il rapporto di due polinomi di ordine inferiore:

$$\psi_{\infty}(B) \approx \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}.$$

- Il processo che deriva dalla riparametrizzazione mostrata si dice *autoregressivo-media mobile* (ARMA):

$$Y_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t.$$

Lo studio dei processi ARMA occuperà buona parte del corso.