14/12/15

- **MODELLI VAR = AUTOREGRESSIVI VETTORIALI**

- La variabile dipendente non è una sola, ma un vettore di variabili. ⇒ Dobbiamo fare delle estensioni nelle def:

- PROC. STOC. VETTORIALE $\underset{m\times 1}{\underline{Y}_t} = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ \vdots \\ Y_{mt} \end{bmatrix}$

⇒ $E[\underline{Y}_t] = \underset{m\times 1}{\underline{\mu}_t}$ $\quad VAR[\underline{Y}_t] = \underset{m\times m}{\Sigma_t}$ $\quad COV(\underline{Y}_t, \underline{Y}_{t-h}) = \underset{m\times m}{\Gamma(t,t-h)}$

Sono funzioni vettoriali/matriciali al variare del tempo.

- ▲ PROC. VETTORIALE $(\underline{Y}_t)_t$ è STAZ IN COVARIANZA (cioè gli elementi sono staz. in cov) ⇒ $E[\underline{Y}_t] = \underline{\mu}_Y$ cost. nel tempo finito $\forall t$ ∧ $VAR[\underline{Y}_t] = \Sigma_Y$ cost. finita $\forall t$ ∧ $COV(\underline{Y}_t, \underline{Y}_{t-h}) = \Gamma(h)$ $\forall t$

OSS Σ_Y FINITA ⇒ $\Gamma(h)$ FINITA

OSS $\Gamma(0) = \Sigma_{\underline{Y}}$

OSS Nel caso univariato $\gamma(h) = \gamma(-h)$, ma qui ≠
$\Gamma(h) \neq \Gamma(-h)$, ma $\Gamma(h) = [\Gamma(-h)]^T$
⇒ cioè $\Gamma(h)$ ha stesse info di $\Gamma(-h)$ ⇒ possiamo considerare solo $\Gamma(h)$, $h \geq 0$

- OSS $\Sigma_{\underline{Y}}$ ha sulla diagonale $\sigma_{ii} = VAR(Y_{it})$ COSTANTI NEL TEMPO
fuori dalla diagonale $\sigma_{ij} = COV(Y_{i(t)}, Y_{j(t)})$
es $\sigma_{12} = COV(Y_{1t}, Y_{2t})$ ⇒ guardo $\Sigma_{\underline{Y}}$ per vedere se v.c. sono correlate per medesimo t.
⇒ Se voglio vedere invece correlazione nel tempo tra variabili devo guardare $\Gamma(h)$
OSS Caso particolare di $\Gamma(h)$ è $\Gamma(h=0) = \Sigma_Y$ ⇒
- guardando $\Gamma(h)$, $h \geq 0$ trovo tutto.

3/.

Th Se Y_t STAZ IN COV. $\Rightarrow Y_{it}$ STAZ IN COV.
(cioè tutte le sue componenti sono staz in cov)
$\Gamma(h) = [\gamma_{ij}(h)] \Rightarrow \gamma_{ii}(h) = cov(Y_{it}; Y_{i,t-h})$ = F. AUTOCOV. per il proc. Y_{it} che dipende solo da $h \Rightarrow$ C.V.D.

OSS Caso bivariato $\underset{2\times2}{\Gamma(h)} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{bmatrix} \rightarrow$ F.AUTOC. UNIVAR. DEL PROC. Y_{1t} e Y_{2t} UNIVARIATI

OSS $\Gamma(h)$ non è simmetrica.
$\gamma_{ij}(h) = cov(Y_{it}, Y_{j,t-h})$
$\gamma_{ji}(h) = cov(Y_{jt}, Y_{i,t-h})$ $\neq$ $\Big]\triangleq$ F. AUTOCOVARIANZA INCROCIATE perché relative a componenti $\neq$ del processo.
$\Rightarrow$ Ci dicono la struttura tra 2 V.A. $\neq$ nel tempo.

(es) Se consideriamo proc. vettoriale per curva di Phillips
$Y_{1t} = \Delta INFL\ t$ $\quad Y_{2t} = u_t$

$\rho_{ij}(h) \triangleq \dfrac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\underbrace{\gamma_{ii}(0)}_{VAR(Y_{it})} \cdot \underbrace{\gamma_{jj}(0)}_{VAR(Y_{jt})}}}$ = F. AUTOCORRELAZIONE INCROCIATA
$\in [-1, 1]$

Th SE OGNI COMPONENTE DEL VETTORE è STAZ. IN COV
$\not\Rightarrow$ non è detto che $\underline{Y}_t$ STAZ IN COV.

DIRE CHE PROC. VETTORIALE è STAZ IN COV DICE CHE LE SINGOLE COMPONENTI SONO STAZ. IN COV., MA ANCHE DI PIÙ CIOÈ PARLA ANCHE DI LEGAMI INCROCIATI $cov(Y_{it}, Y_{j,t-h}) = \gamma_{ij}(t, t-h) = \gamma_{ij}(h)$
cioè le f. autocov. incrociate non dipendono più da t, ma solo da h.

OSS $\gamma_{ij}(0) = \sigma_{ij}$

$$\hat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{T}\sum_{t=h+1}^{T}(y_{i,t} - \overset{\text{MEDIA CAMPIONARIA}}{\hat{\mu}_i})(y_{j,t-h} - \hat{\mu}_j)$$

STIMO CON MOMENTO CAMPIONARIO.

OSS Perché le stime siano consistenti vogliamo che il proc. sia ERGODICO.

$\Rightarrow$ Y_t STAZ. IN. COV. ED ERGODICO PER I PRIMI 2 MOMENTI DEL PROC. VETTORIALE.

$\Rightarrow \hat{\gamma}_{ij}(h) \xrightarrow[T\to+\infty]{P} \gamma_{ij}(h)$

OSS Stock-Watson non parla di ergodicità, ma di Asintotica Indipendenza che è condizione + forte $\not\Leftarrow\Rightarrow$ ERGODICITÀ.

- proc. DL(q) $\underline{W}_t \doteq (Y_t, X_t)^T$ CONGIUNTAMENTE STAZIONARIO $\Rightarrow$ $\underline{W}_t$ è STAZ IN COV.

OSS Proc. VAR sono generalizzazione di proc. AR.

PROC. DIFF MARTINGALA

$\underset{m\times 1}{\underline{\varepsilon}_t} \sim$ D.M. VETTORIALE $\Leftrightarrow$

1. $E[|\underline{\varepsilon}_t|]$ è FINITO
2. $E[\underline{\varepsilon}_t \mid I_{t-1}] = \underline{0}$

dove $I_{t-1} \subset I_t \doteq \{\underline{\varepsilon}_t, \underline{\varepsilon}_{t-1}, \ldots\}$ = passato del proc.

$\Rightarrow$ (A) $E[\underline{\varepsilon}_t] = 0$

Conseguenze (B) $E[\underline{\varepsilon}_t \cdot \underline{\varepsilon}_{t-h}^T] = [0] = \Gamma(t,h) = \Gamma(h) = \underset{\text{MATRICE NULLA}}{[0]}$ $\forall h>0$

OSS $\forall h>0$ $COV(\underline{\varepsilon}_t, \underline{\varepsilon}_{t-h}) = E[(\underline{\varepsilon}_t - \underset{(A)\,0}{E(\underline{\varepsilon}_t)})(\underline{\varepsilon}_{t-h} - \underset{(A)\,0}{E[\underline{\varepsilon}_{t-h}]})^T] =$
$E[\underline{\varepsilon}_t \cdot \underline{\varepsilon}_{t-h}^T] = \Gamma(t,h) = \Gamma(h) = [0]$ $\forall h>0$

OSS $\forall$ elemento del vettore $\underline{\varepsilon}_t$ non è correlato né con il suo passato, né con il passato degli altri elementi cioè $COV(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{j\,t-h}) = 0$ $\forall i,j$ $\forall h>0$.

OSS Non sappiamo nulla sulla varianza e sulla varianza condizionata, neanche se $\exists$ FINITA.

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow VAR(\underline{\varepsilon}_t) = \Sigma_t = ?$ $\quad VAR(\underline{\varepsilon}_t | I_{t-1}) = ?$

$\Rightarrow$ dobbiamo aggiungere altre HP.

OSS un proc. diff. di uncriminata potrebbe essere STAZ. o non STAZ a seconda di HP.

▲ PROC. WN VETTORIALE ≡ VWN (abbiamo anche info su VAR MARGINALE (ma non condizionata))

$\underline{\varepsilon}_t \sim VWN(0, \Sigma)$

$\Rightarrow E[\underline{\varepsilon}_t] = \underline{0} \quad \forall t$

$VAR[\underline{\varepsilon}_t] = \Sigma$ FINITA, $\forall t$

$\Rightarrow \Gamma(t,h) = \Gamma(h) = [0], \forall h > 0$

$COV(\underline{\varepsilon}_t, \varepsilon_{t-h})$

$\Rightarrow$ è STAZ. IN COV. (se è FINITA) / ABBIAMO INFO SU MOMENTI MARGINALI e NON COND.)

▲ $\underline{\varepsilon}_t \overset{IID}{\sim} (0, \Sigma)$ è + forte HP ed è sicuramente staz in cov. (se momenti finiti)

OSS In generale $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN$ sarà incorrelati, ma ~~IND~~.
($\neq$ IID.)

OSS $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma_{ij}(h) = 0 \quad , \gamma_{ii}(h) = 0 \quad \forall h > 0$

ma $\sigma_{ij} = COV(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) \neq 0$. (CORRELAZIONE SIMULTANEA)

$\Rightarrow$ IL PROC. $\underline{\varepsilon}_t$ non è corr. nel tempo e non è autocorrelato ma $\exists$ corr. allo stesso istante temporale

(OSS $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ tutte le componenti $\varepsilon_{it} \sim WN$)

$\Rightarrow \Sigma$ non è in generale DIAG. ($\exists$ corr. simultanea)

OSS AR(1): $\underset{1\times1}{y_t} = \underset{1\times1}{\delta} + \underset{1\times1}{\theta}\, \underset{1\times1}{y_{t-1}} + \underset{1\times1}{\varepsilon_t}$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$

$\Rightarrow$ STAZ. IN COV. ASINTOTICAMENTE SE (FF) $|\theta| < 1$

$\Rightarrow$ rappresentazione $MA(\infty)$ con $(\theta(L) \stackrel{*}{=} 1 - \theta L)$

$\Rightarrow y_t = \underbrace{\frac{\delta}{1-\theta}}_{=(\theta(1))^{-1}} + \underbrace{[\theta(L)]^{-1} \varepsilon_t}_{=\sum_{j=0}^{+\infty} \theta^j \varepsilon_{t-j}}$

$\Rightarrow E[y_t] = \frac{\delta}{1-\theta}$ $\quad VAR[Y_t] = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{1-\theta^2}$ $\quad COV(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma(h) = \sigma^2_\varepsilon \cdot \frac{\theta^h}{1-\theta^h}$

$\Rightarrow \rho(h) = \theta^h$

$\Rightarrow$ Generalizzo:

▲ VAR(1)

$\underset{m\times1}{\underline{Y}_t} = \underset{m\times1}{\underline{\delta}} + \underbrace{\underset{m\times m}{\Theta}\, \underset{m\times1}{\underline{y}_{t-1}}}_{m\times1} + \underline{\varepsilon}_t$, $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN(0, \Sigma)$

$(\Rightarrow \underline{\varepsilon}_t \rightarrow \boxed{VAR(1)} \rightarrow \underline{y}_t \sim VAR(1))$

Notazione matriciale del modello e sistema.

es) $m = 2$ $\quad \underline{y}_t = \underline{\delta} + \Theta\, \underline{y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t \Rightarrow$ (es x casa ed esame)

$\Rightarrow \begin{cases} y_{1t} = \delta_1 + \theta_{11} y_{1,t-1} + \theta_{12} \cdot y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ y_{2t} = \delta_2 + \theta_{21} y_{1,t-1} + \theta_{22} \cdot y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Notiamo che i regressori sono =

$\Rightarrow$ si può riscrivere con $\underline{X}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow y_{1t} = \underline{\beta}_1^T \cdot \underline{X}_t + \varepsilon_{1t}$

$y_{2t} = \beta$

OSS $\underline{Y}_t \sim VAR(1)$

$\Rightarrow$ NON È DUE MODELLI AR(1) per Y_{1t} e Y_{2t},

MA DICE DI PIÙ ENTRANO I RITARDI DELL'ALTRO

OSS SE Θ = MATRICE DIAG $\Rightarrow$ $\underline{Y}_t \sim VAR(1)$ è 2 MODELLI AR(1)

ma non in generale; obiettivo VAR è sfruttare passato altre (sq...)

15/12/15

MODELLO VAR(1): $\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Theta\, \underline{y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t$, $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN(\underline{0}, \Sigma)$

⇒ Se vogliamo usare il modello come modello di regressione multivariata

⇒ (HP) ① $E[\underline{\varepsilon}_t \mid \underline{y}_{t-1}, \underline{y}_{t-2}, \dots] = \underline{0}$

cioè il modello VAR(1) è correttamente specificato (considerato $\underline{y}_{t-1}$, gli altri $\underline{y}_{t-2}, \dots$ sono irrilevanti)

⇒ ① $E[\underline{\varepsilon}_t \mid F_{t-1}] = E[\underline{\varepsilon}_t \mid I_{t-1}] = \underline{0}$

dove $I_{t-1} = \{\underline{\varepsilon}_{t-1}, \dots\}$ $F_{t-1} = \{\underline{y}_{t-1}, \dots\}$

ma $I_{t-1} = F_{t-1}$ i due insiemi informativi sono equivalenti. ⇒ $\underline{\varepsilon}_t \sim$ D.M. VETTORIALE

① ⇒ Ⓐ $E[\underline{\varepsilon}_t] = 0$ Ⓑ $\Gamma(h) = 0$, $h > 0$ Ⓒ $E[\underline{y}_t \mid F_{t-1}] = \underline{\delta} + \Theta \underline{y}_{t-1}$

(HP) ② $VAR[\underline{\varepsilon}_t \mid F_{t-1}] = \Sigma \ \forall t$ (OMOSCHEDASTICITÀ CONDIZIONATA)

⇓

$VAR[\underline{\varepsilon}_t] = \Sigma$

(⇒ Ⓒ) ⇒ $VAR[\underline{y}_t \mid F_{t-1}] = \Sigma \ \forall t$

② ⇒ $VAR(\underline{\varepsilon}_t) = \Sigma$

⇒ $VAR(\underline{y}_t) \neq VAR(\underline{\varepsilon}_t)$

(① ∪ ②) ⇒ $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN(0, \Sigma)$ (vedo AR(1) analogo)

OSS Come AR(1) non è sempre staz., ma serve condizione legata all'invertibilità del polinomio VAR(p)

VAR(p): $\underline{y}_t = \underline{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \Theta_j\, \underline{y}_{t-j} + \underline{\varepsilon}_t$

(HP)

① $E[\underline{\varepsilon}_t \mid F_{t-1}] = \underline{0}$
$\qquad\quad\ \ \| $
$\qquad\quad\ I_{t-1}$

② $VAR[\underline{\varepsilon}_t \mid F_{t-1}] = \Sigma$, (OSS (HP) ② è indebolibile

(a) OMOSCHEDASTICITÀ solo MARGINALE, o (b) ETEROSCHEDASTICITÀ

(HP) STAZIONARIETÀ (come AR(p), ma generalizzato)

$\Rightarrow \underline{y}_t - \Theta_1 \underline{y}_{t-1} - \dots - \Theta_p \underline{y}_{t-p} = \dots$ ($= L y_t$, $= L^p y_t$)

$\Rightarrow \underset{\text{matrice identica}}{I} \cdot \underline{y}_t \doteq y_t$ ($\Rightarrow$ raccolgo, ma attenzione con l'ordine)

$(\underbrace{I - \Theta_1 L - \dots - \Theta_p L^p}_{\text{polinomio matriciale di ordine p nell'operatore ritardo L}}) \cdot \underline{y}_t \ := \Theta(L)$ = applicazione matriciale

$\Rightarrow$ Scrivo equazione caratteristica (non posso $\Theta(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $m \times m \neq 1 \times 1$ non ha senso $\Rightarrow$ trasf. matrice in scalare)

$\Rightarrow$ Passo al determinante:

$$\det[\underset{m \times m}{\Theta}(z)] = 0 \quad , z \in \mathbb{C}$$

m variabili, p ritardi $\Rightarrow m \cdot p$ radici

($\Rightarrow$ + CASA per VAR(1), $m = 2$ calcolo $\det[\Theta(z)] = 0$) "equazione caratteristica" CAR(p)

• Se le $m \cdot p$ radici $z_1, z_2, \dots, z_{m \cdot p}$ sono tutte in modulo $> 1 \Rightarrow \Theta(L)$ è INVERTIBILE.

$\Leftrightarrow$ PROC. $\underline{y}_t$ è STAZ ASINTOTICAMENTE IN COV.

$\Rightarrow$ Se $\Theta(L)$ è INVERTIBILE $\Rightarrow \exists$ RAPPRESENTAZIONE VMA$(+\infty)$ per $\underline{y}_t$ utile per calcolare valore atteso, matr. var/cov, F. AUTOCOV ...

$\Rightarrow \Theta(L) \cdot \underline{y}_t = \underset{\text{cost.}}{\underline{\delta}} + \underline{\varepsilon}_t \Rightarrow \underbrace{[\Theta(L)]^{-1} \Theta(L)}_{I \text{ per propr. polinomio inverso}} \underline{y}_t = \Theta(L)^{-1} \underline{\delta} + \Theta(L)^{-1} \cdot \underline{\varepsilon}_t$

$\Rightarrow \underline{y}_t = [\Theta(1)]^{-1} \underline{\delta} + [\Theta(L)]^{-1} \cdot \underline{\varepsilon}_t$

$$\left(\begin{array}{l} \text{con } \Theta(L) = I - \Theta_1 L - \dots - \Theta_p L^p \\ \Theta(1) = I - \Theta_1 - \dots - \Theta_p \\ \Theta(1)^{-1} = [I - \Theta_1 - \dots - \Theta_p]^{-1} \end{array} \right.$$

matrice inversa

$\Rightarrow E[\underline{y}_t] = [I - \Theta_1 - \dots - \Theta_p]^{-1} \cdot \underline{\delta} \doteq \underline{\mu}$

$\Rightarrow$ $\Theta(L)^{-1}$ = polinomio inverso bevinomiale inv.
$= \Psi_\infty(L)$ = polinomio matriciale AR di ordine ∞.

$\Rightarrow$ RAPPRESENTAZIONE VMA(∞) DI $\underline{y}_t$

$$\underline{y}_t = \underline{\mu} + \Psi_\infty(L) \cdot \underline{\varepsilon}_t$$

$$\left(\text{dove } \Psi_\infty(L) = \underset{\Psi_0}{I} + \overset{\text{matrici}}{\Psi_1 L + \Psi_2 L^2} + \dots \right)$$

$\Rightarrow$ VMA(∞)

$$\underline{y}_t = \underline{\mu} + \sum_{i=0}^{+\infty} \Psi_i \underline{\varepsilon}_{t-i} \quad \text{con } \Psi_0 = I \quad \text{è rappresentazione VMA}(+\infty)$$

IN FORMA CANONICA.

OSS $VAR(\underline{y}_t) = VAR\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \Psi_i \underline{\varepsilon}_{t-i}\right) \overset{IND}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} VAR(\Psi_i \underline{\varepsilon}_{t-i}) =$
$= \sum_{i=0}^{+\infty} \Psi_i \Sigma \Psi_i^T$

MATRICE COV. SIMILE (NON SERVONO FORMULA A MEMORIA)

OSS Analogamente ad AR(1) per VAR(1) $= \underline{y}_t = \underline{\delta} + \Theta \underline{y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t$ vero e

SI HA
$$\underline{y}_t \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ASS. BIN.}} \underline{\mu} + \sum_{s=0}^{+\infty} \Theta^s \underline{\varepsilon}_{t-s} = VMA(+\infty)$$

cioè i coef. $\Psi_i = \Theta^i$

$$\left(\text{dove } \Theta^n = \Theta\, \Theta^{n-1} \wedge \Theta^0 = I\right)$$

OSS COND STAZ IN COV. ASINT. $Det[\Theta(z)] = 0$

$\Rightarrow \Theta^i \xrightarrow[i \to +\infty]{} [0]$ = MATRICE NULLA (come è AR(p)).

$\Rightarrow$ asintoticamente il proc. non dipende dalla condizione iniziale.

$\Rightarrow$ VAR(1) : $\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Theta \underline{y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t$ STUDIO BENE

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \underline{y}_t \sim VMA(+\infty) \\ \underline{y}_t = (I - \Theta)^{-1} \underline{\delta} + \sum_{i=0}^{+\infty} \Theta^i \underline{\varepsilon}_{t-i} \end{array}}$

OSS $Y_t \sim VAR(1) \Rightarrow$

$VAR(Y_t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Theta^i \Sigma [\Theta^i]^T$

$COV[Y_t, Y_{t-h}] = \Gamma(h) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Theta^{i+h} \Sigma [\Theta^i]^T$ (NON STUDIO)

OSS $\underline{Y}_t \sim VAR(p) \Rightarrow COV(\underline{Y}_t, \underline{y}_{t-h}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \Psi_{i+h} \Sigma \Psi_i^T$

$\Rightarrow$ PROC. $\underline{y}_t$ CONVERGE IN M.Q. A VMA$(+\infty)$

SE VAR(p) STAZ. IN COV. AS. VAR(p): $\underline{y}_t \xrightarrow{M.Q.} \sum_{i=0}^{+\infty} \Psi_i \underline{\varepsilon}_{t-i}$

(cioè $E[(\underline{y}_t - \sum \Psi_i \underline{\varepsilon}_{t-i})^2] \to \underline{0}$)

OSS Scriviamo VAR(1) bivariato (m=2) : $\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Theta \underline{y}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t$

$\Rightarrow \begin{cases} y_{1t} = \delta_1 + \theta_{11} y_{1,t-1} + \theta_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ y_{2t} = \delta_2 + \theta_{21} y_{1,t-1} + \theta_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t} \end{cases}$

$\underline{y}_t = [y_{1t}, y_{2t}]^T$ è IL VETTORE DELLE VARIABILI ENDOGENE.

(OSS È MODELLO ARDL (1, 1) con notazione $y_{1t} \triangleq y_t$ e $y_{2,t} \triangleq x_t$)

$\Rightarrow$ 1ª equazione è $y_{1t} \sim$ ARDL (1, 1) con $x_{t-1} \triangleq y_{2,t-1}$

2ª EQUAZIONE è modello $y_{2t} \sim$ ARDL (1, 1) $\to y_{1,t-1}$

$\Rightarrow$ VAR(p) sono m modelli ARDL (p, m) SEPARATI

$\Rightarrow$ Potrei fare stime OLS separate equazione per equazione.

3/ STIMA MODELLO: VAR(1) SMP INCOV (ed ergodico)

Potrei stimare con OLS equazione per equazione (MODL) (perché (ee) ⇒ errori incorrelati con i regressori)

⇒ stimatori OLS distorti (perché regressori debolmente esogeni), ma consistenti & ASINTOT. NORMALE.

$\boxed{2° \text{ MODO}}$ POTREI STIMARE IL SISTEMA TUTTO INSIEME

⇒ STIMO OLS DI SISTEMA.

IDEA:

$$\underline{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{1,2} \\ \vdots \\ y_{1,T} \end{bmatrix} \quad \underset{\text{matrice regressori per la 1a equazione}}{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & y_{1,1} & y_{2,1} \\ 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \\ 1 & y_{1,(T-1)} & y_{2,T-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1,T} \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{2,2} \\ \vdots \\ y_{2,T} \end{bmatrix} \quad X_2 = X_1 \text{ = stessi regressori.}$$

$$\underline{\Pi}_1 \underset{\text{= coeff. 1a equa.}}{=} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \theta_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{y}_1 = X_1 \underline{\Pi}_1 + \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{y}_2 = X_1 \underline{\Pi}_2 + \underline{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

⇒ STIME OLS SEPARATE METODO 1:

$$\hat{\Pi}_1 = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T \underline{y}_1$$

$$\hat{\Pi}_2 = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T \underline{y}_2$$

• STIME OLS DI SISTEMA METODO 2

Pongo $\underline{y} \triangleq \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix}$ $M \triangleq \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 (X_1) \end{pmatrix}$ $\underline{\Pi} \triangleq \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{bmatrix}$ $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \underline{y} = M \cdot \underline{\Pi} + \underline{\varepsilon}$ = SISTEMA

⇒ OLS SU SISTEMA $\hat{\Pi} = (M^T M)^{-1} M^T \underline{y}$

$\underline{\hat{\Pi}} = (M^T M)^{-1} M^T \underline{y}$ sono stime OLS di sistema e sono distorte, consistenti e asintoticamente normali

• OSS Vantaggio del 2° metodo ottengo matrice VAR COV. non solo di $\hat{\Pi}_1$ e $\hat{\Pi}_2$, ma anche COV. (bivariata) delle colonne fra i due gruppi.

$$VAR(\hat{\Pi}) \text{ asint. normale} = \begin{bmatrix} VAR(\hat{\Pi}_1) & \neq 0 \\ (\neq 0) & VAR(\hat{\Pi}_2) \end{bmatrix}$$

Noti con il 2° metodo

OSS Se uno deve fare inferenza sui i parametri o della 1a eq. o della 2a ⇒ posso fare 1° metodo,

• ma se ad es. voglio testare vincolo tra Π_1 e Π_2 ⇒ devo usare 2° metodo. (es) $H_0: \theta_{1,2} = 0 \wedge \theta_{2,1} = 0$ cioè basta se è VAR(1) o VAR(2)

■ Th Le stime OLS di sistema $\hat{\Pi}$ coincidono con le stime OLS separate $[\hat{\Pi}_1^T, \hat{\Pi}_2^T]^T$

(ma stime di sistema mi da tutte COV)

(dim) perchè la matrice di sistema dei reg. è diagonale a blocchi (e contiene gli stessi blocchi) $X_1 = X_2$

• OSS Se regressori fossero $\neq$ $(X_1 \neq X_2)$ ⇒ ci sarebbe differenza stime. (es se VAR vincolato)

• PREVISIONE VAR(p) è come AR(p)

(es) VAR(1) (analogo VAR(p))

PREVISIONE STATICA: $\underset{\text{1 orizzonte}}{\underline{\hat{Y}}_{T+1|T}} = E[\underline{Y}_{T+1} | F_T] =$

$= \underline{\hat{\delta}} + \hat{\Theta} \cdot \underline{y}_T$

$\Rightarrow \underline{\hat{Y}}_{T+h|T+h-1} \stackrel{\wedge}{=} \underline{\hat{\delta}} + \hat{\Theta}\, \underline{y}_{T+h-1}$

111

3/

- PREVISORE DINAMICO:

$\hat{Y}_{T+h|T} = \hat{\delta} + \hat{\Theta}\, y_{T+h-1|T}$ ... itero partendo da

$\hat{Y}_{T+1|T} = \hat{\delta} + \hat{\Theta}\, Y_T$

$\hat{Y}_{T+2|T} = \hat{\delta} + \hat{\Theta}\, \hat{Y}_{T+1|T}$

- VAR(2).

$\Rightarrow \hat{Y}_{T+h|T} = \hat{\delta} + \hat{\Theta}_1 \underline{\hat{Y}}_{T+h-1|T} + \hat{\Theta}_2 \underline{\hat{Y}}_{T+h-2|T}$

$\Rightarrow$ se $T+h-2 \leq T \Rightarrow \hat{y}_{T+h-2|T} = \underline{Y}_{T+h-2}$ = dato reale

CORREZIONI ERRORI PROF. IERI:

(• $\underline{y}_t$ VAR(p) $t = 1, \dots, m-p$ — riflesso: STAZ IN COV. $\det(\Theta(z)) = 0 \quad |z_i| > 1$

$\Rightarrow \exists!\, \Theta(1)^{-1} = [I - \Theta_1 - \dots - \Theta_p]^{-1}$)

- ERRORE PROF. 1:

Se rappresentazione VMA(∞) (per semplificare) senza costante $E[\underline{y}_t] = 0$

$\Rightarrow \underline{y}_t \xrightarrow[t\to+\infty]{M.Q.} X_t \triangleq \sum_{j=0}^{+\infty} \Psi_j \underline{\varepsilon}_{t-j}$

Ma cosa vuol dire converge in M.Q. se sono vettori non faccio quadrato, ma uso matrice momenti secondi

$E[(\underline{y}_t - \underline{X}_t)(\underline{y}_t - \underline{x}_t)^T] \xrightarrow{t\to+\infty} [\underline{0}]$

MATRICE DEI MOMENTI 2° DELL'ERRORE DI APPROX

- ERRORE PROF. 2:

- Stima VAR(p) [nota pag 291]: Se stimiamo coef. VAR(p) senza coef. possiamo fare ottime OLS separate ad ogni sistema $\Rightarrow$ STIME SONO UGUALI SIA NEL CASO CI SIANO VINCOLI SIA NEL CASO DI NON VINCOLI

e stimatori sono tutti distorti, consistenti e asintoticamente normali (sulla asintotica Normalità)

$\Rightarrow$ Nel caso di VAR VINCOLATO $\exists$ UN ALTRO STIMATORE DI SISTEMA

che si chiama SUR, che è anche lui distorto, consistente, 17/12/15
asintoticamente $\sim N(\cdot)$ (sub ⓗ), ma più efficiente
degli OLS di sistema.
Se VAR è non vincolato $\Rightarrow SUR \equiv OLS$ (no + efficiente)

▲ SUR = Seemingly Unrelated Regression (REGRESSIONI APPARENTEMENTE NON COLLEGATE TRA LORO)

IDEA: Con Sur abbiamo + modelli di regressione con cui andiamo a spiegare + variabili (es) $\begin{cases} Y_{1t} = X_{1t}^T \beta_1 + u_{1t} \\ Y_{2t} = X_{2t}^T \beta_2 + u_{2t} \end{cases}$
con regressori $\neq$ (se sono uguali non c'è guadagno di efficienza).

- Sono due modelli $\neq \Rightarrow$ posso trattarli separatamente. SINGOLARMENTE
Ma se errori sono correlati tra di loro (come VAR) cioè $VAR\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \Sigma$ NON DIAGONALE

(es) Spiego produzione di aziende $\neq$, con capitale delle aziende $\neq$ ($\Rightarrow$ regressori $\neq$), ma errori correlati (es) aziende nello stesso settore

$\Rightarrow$ Sfruttare info $COV(u_{1t}, u_{2t}) \neq 0$

$\Rightarrow$ STIME SUR:

IDEA: 1° STEP) STIMO CON OLS (di sistema = o separati) STIME UGUALI
$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ (stimatore OLS è cmq consistente $\Rightarrow$ mi consente di stimare gli errori in modo consistente $\Rightarrow$ REGRESSIONI OLS per le due equazioni) che sono stime consistenti per gli errori:) $\hat{u}_{1t} = y_{1t} - X_{1t}^T \hat{\beta}_1$
$\hat{u}_{2t} = y_{2t} - X_{2t}^T \hat{\beta}_2$

$\Rightarrow$ da residui stimo in maniera consistente Σ
$\hat{\Sigma}$ = DEFINITA POSITIVA (sempre se divido per T e non T-k)
$\hat{\Sigma} = [\hat{\sigma}_{ij}]$ $m = 2$ con $\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{it} \hat{u}_{jt}$

$\Rightarrow$ 2° STEP) STIMO $\hat{\beta}_1$ $\hat{\beta}_2$ sfruttando $\hat{\Sigma}$ con metodo GLS: STIMATORE DEI MINIMI QUADRATI GENERALIZZATI.

⇒ In presenza di errori correlati tra di loro ⇒ è più efficiente.

GRETL:

STIMO: TIME SERIES → SCELTA DEI RITARDI DEL VAR →

⇒ Variabili endogene → {d_INFL, LHUR} ⇒ INCLUDI COSTANTE (Non trend lineare che noi abbiamo trattato)

⇒ VINCE SECONDO VARI CRITERI INFORMATIVI: VAR(2)

⇒ BISOGNA STIMARE ANCHE CHE RESIDUI WN (SE NO STIME INCONSISTENTI)

- ⇒ VAR(2) (per ricavare errori robusti (WHITE))
- TEST PORTMANTEAU SU H_0: RESIDUI NON AUTOCORR.
  ⇒ Accettiamo H_0: "errori WN")

(⇒ STIME MODELLO ARDL (2,2))

⇒ VEDO RISULTATI TEST UNIVARIATI SU SINGOLA EQUAZIONE (sono i test dei Modelli ARDL già visti)

- e TEST DI SISTEMA AGGIUNTIVI SU CORRETTA SPECIFICAZIONE VAR(P) (VAR(2) non vincolato)

$$\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Theta_1 \underline{y}_{t-1} + \Theta_2 \underline{y}_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{con } \Theta_2 = [\theta_{ij}^{(2)}]$$

H_0: VAR(1) vs H_1: VAR(2) ⇒ $\underset{2\times 2}{\Theta_2} = [0]$ ⇒ $\begin{cases} \theta_{11}^{(2)} = 0 \\ \theta_{12}^{(2)} = 0 \\ \theta_{21}^{(2)} = 0 \\ \theta_{22}^{(2)} = 0 \end{cases}$

⇒ TEST è $F_{4,+\infty}$ o $4 \cdot F_{4,+\infty} = \chi^2_4$

⇒ P-VALUE ≈ ZERO RIF. H_0 ⇒ VAR(2)

- Possiamo fare come per ARDL TEST "CAUSALITÀ" ALLA GRANGER qui in due versi.

Y_{2t} causa Y_{1t} nel senso di Granger (cioè è utile per spiegare Y_{1t} anche una volta già considerato il passato di Y_{1t})

⇒ TEST per GRANGER CAUSALITY (G-C)

⇒ H_0: NON G-C. ⇔ $\theta_{12}^{(1)} = 0 = \theta_{12}^{(2)}$

H_1: $y_{2t} \xrightarrow{GC} y_{1t}$

⇒ Test $F_{2,\infty}$ ($\sim F_{2,146}$)

• OSS Possiamo fare anche il contrario. $H_1: y_{1t} \xrightarrow{GC} y_{2t}$

⇒ $\Delta INFL_t \;\cancel{\xrightarrow{GC}}\; U_t$ ⇒ rifiuto G.C. al 5%

TEST RADICI INVERSE VAR(2) ⇒ $|z_i| > 1$ $i = 1,2,3,4$

⇒ RADICI INVERSE $\lambda_i = \frac{1}{z_i}$ $|\lambda_i| < 1$ $\forall i$

• GRETL PREVISIONE CON INTERVALLO DI CONFIDENZA

DINAMICHE, STATICHE

OSS $\hat{\underline{y}}_{T+h|T} \xrightarrow[h \to +\infty]{} \hat{\underline{\mu}} = (1 - \hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2)^{-1} \hat{\underline{\delta}}$

⇒ POTREI USARE INFO SU CONSUMI ed INVESTIMENTI PER PREVEDERE PIL

IMPULSE RESPONSE FUNCTION:

Il VAR viene usato per far previsioni o anche capire effetto shock.

es. AR(p) $\quad \delta = 0$

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} + \dots + \theta_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \text{ WN}$$

STAZ ASSUNT IN COV.

$\Rightarrow$ MA(∞) $\quad y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ ad $y_t = 1 \cdot \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2}, \dots$

$\Rightarrow$ SHOCK È VARIAZIONE INATTESA (NON SPIEGATA DAL MODELLO)

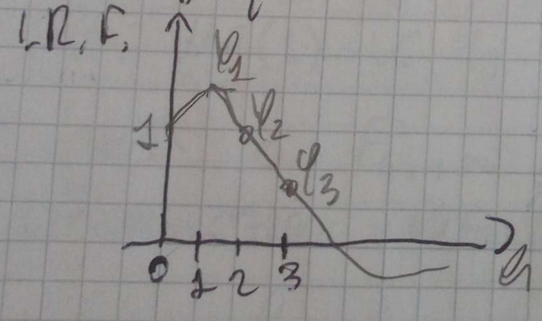
$\Rightarrow$ FACCIAMO MOLTIPLICATORI DINAMICI RISPETTO AGLI SHOCK

$$\boxed{\frac{\partial Y_t}{\partial \varepsilon_{t-h}} = m_h = \psi_h}$$

$\Rightarrow$ leggo i moltiplicatori nel senso che se c'è un impulso unitario in $t-h$ e prima e dopo niente $\Rightarrow$ delta varia di ψ_h

$\Rightarrow$ FACCIO IMPULSE RESPONSE FUNCTION:

cioè grafico dei coef. ψ_h nel tempo



es. AR(1)

$m_h = \theta^h \qquad |\theta| < 1$

$\Rightarrow$ I.R.F. È CORRELOGRAMMA $P(h)$

STIAMO FACENDO SEMPRE LE STESSE COSE.

$\Rightarrow$ IMPULSO HA EFFETTI SOLO TRANSITORI

(se no serve impulso costante nel tempo)

$\Rightarrow$ È INTERESSANTE VAR(p) per capire IRF, ma complicato

(es) VAR(1) $\Rightarrow \underline{y}_t - (\Phi)\, \underline{y}_{t-1} = \underline{\varepsilon}_t$ $\quad \underline{\delta} \overset{\text{non conta}}{=} 0$, STAZ IN COV

$\Rightarrow$ Poiché STAZ. IN COV. $\Rightarrow$ IMPULSI HANNO EFFETTI SOLO TRANSITORI (asintoticamente scompaiono).

VMA(∞) CANONICO $\underline{y}_t = I\, \underline{\varepsilon}_t + \overset{\doteq A_1}{\Psi_1}\, \varepsilon_{t-1} + \overset{\doteq A_2}{\Psi_2}\, \underline{\varepsilon}_{t-2} + \dots$
(A_1 notazione VERBEEK)

$(\Rightarrow A_h \overset{\text{not}}{=} \Psi_h = (\Phi)^h)$

OSS È possibile che un ε_{t-h} vari e gli altri no

$\Rightarrow$ esperimento è plausibile solo se errori non sono correlati nel tempo: $\varepsilon_t \sim WN$ (o di + (es) IID.)

$$\begin{cases} y_{1t} = 1 \cdot \varepsilon_{1t} + 0 \cdot \varepsilon_{2t} + a_{11}^{(1)}\, \varepsilon_{1,t-1} + a_{12}^{(1)}\, \varepsilon_{2t-1} + \\ y_{2t} = \underbrace{0 \cdot \varepsilon_{1t} + 1 \cdot \varepsilon_{2t}}_{I\, \underline{\varepsilon}_t \, = \, \underline{\varepsilon}_t} + \underbrace{a_{21}^{(1)} \cdot \varepsilon_{1,t-1} + a_{22}^{(1)}\, \varepsilon_{2,t-1} +}_{A_1 \cdot \underline{\varepsilon}_{t-1}} \end{cases}$$

dove $A_1 = [a_{ij}^{(1)}]$

$\Rightarrow$ TROVIAMO AL VARIARE DI h LE IRF.

$\dfrac{\partial y_{1t}}{\partial \varepsilon_{1,t-h}}$ (se $h=0 \Rightarrow 1$) IRF, $\dfrac{\partial y_{1t}}{\partial \varepsilon_{2,t-h}}$ ($= 0$ se $h=0$) IRF, $\dfrac{\partial y_{2t}}{\partial \varepsilon_{1,t-h}}$ ($=0$ se $h=0$) IRF, $\dfrac{\partial y_{2t}}{\partial \varepsilon_{2,t-h}}$ ($=1$ se $h=0$) IRF

OSS Sono derivate parziali $\Rightarrow$ varia solo uno gli altri fissi.

OSS le varie IRF. sono i coef dell'equazioni (matrici)

$\Rightarrow$ SE METTIAMO INSIEME IN UNA MATRICE I h MOLTIPLICATORI:

$$\begin{bmatrix} (\partial \overset{\text{DI VARIAZIONE}}{y_{1t}} / \partial \varepsilon_{1,t-h}) & (\partial y_{1t} / \partial \varepsilon_{2,t-h}) \\ (\partial \overset{\text{OCCUPAZIONE}}{y_{2t}} / \partial \varepsilon_{1,t-h}) & (\partial y_{t2} / \partial \varepsilon_{2,t-h}) \end{bmatrix} \doteq A_h$$

per $h = 0 \Rightarrow A_0 = I$

per $h = 1 \Rightarrow A_1$

⋮

OSS IN GRETL GRAFICI INPUT RESPONSE PERCENTO (COMBINATI)
⇒ tutti e 4 ⇒ ho i 4 grafici.

OSS Grafici non sono calcolati direttamente da shock ε_t-e_i, ma vengono trasf. in shock ortonormali.

12/1/16
Copiato Tomasi

(bisogna avere Σ_ε diagonale, cioè errori incorrelati)

oss Nei modelli AR con una sola variabile non abbiamo problemi di scala. Con i VAR (Multivariati) abbiamo $\neq$ variabili ($y_{1t}, y_{2t}, \dots$) per cui ci si aspetta che abbiano $\neq$ unità di misura ($\neq$ scala). $\Rightarrow$ la std delle variabili è $\neq$ essendo $\neq$ la scala.

$\Rightarrow$ Quando facciamo IRF $\Rightarrow$ $\Delta \varepsilon_{1,t-h} = +1 \rightarrow \Delta y_{1t} = a_{11}(h)$?

$\boxed{\Delta y_{1t} = a_{11}^{(h)} \cdot \Delta \varepsilon_{1,t-h}}$ Ma c'è il problema della scala delle variabili. Cosa vuol dire $=1$ in che scala?

- Si lavora con variazioni: $\Delta \varepsilon_{1,t-h} = 1 \cdot se(\varepsilon_{1,t-h})$

(Si prima ad $A_h = [a_{ij}^{(h)}]$ a una trasformazione che permetta di eliminare le differenze di scala)

Da IRF $\varepsilon_{1,t-h} \rightarrow y_{1t}$

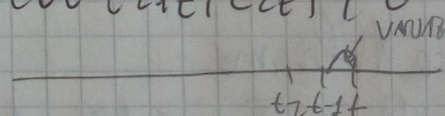
A IRF$(h) = \hat{a}_{11}^{(h)} \cdot \hat{se}(\varepsilon_{1,t-h})$

IRF $\varepsilon_{2,t-h} \rightarrow y_{1,t}$

IRF$(h) = \hat{a}_{12}^{(h)} \cdot \hat{se}(\varepsilon_{2t-h})$

- Di solito Σ_ε non è diagonale, cioè $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) \neq 0$

$$\frac{\partial y_{1t}}{\partial \varepsilon_{1,t-1}} = a_{11}^{(1)}$$



Supponiamo $\underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}$, $\Delta\varepsilon_1 = 0$, $\Delta\varepsilon_2 = 0$
(gli shock non variano mai, solo in $t-1$)
↳ ha senso se gli shock non sono correlati nel tempo, cioè se $cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$.

Ma è situazione poco realistica! Ci si aspetta che se varia $\varepsilon_{1t} \Rightarrow$ anche ε_{2t}. Questo mette in moto un meccanismo di variazioni, perché modello dinamico.

$\Delta \varepsilon_{1,t-1} = +1 \longrightarrow \Delta y_{1,t-1} \Rightarrow \Delta y_{1,t}$ che fa venire $a_{11}^{(1)}$

$\Delta \varepsilon_{2,t-1} \neq 0 \longrightarrow \Delta y_{2,t-1}$ che fa venire

N.B. Supporta stessa scala per non dover scrivere S.e.e. (-)

- Quindi se errori correlati le formule viste non vanno bene!
- Possiamo cercare di scrivere gli errori in modo da superare questo problema.

Dove se $\underset{m\times 1}{\underline{w}_t} \sim VWN(\underline{0}, I_m)$ $\underline{w}_t$ shock ortonormali, cioè ortogonali con varianze unitarie.

Dobbiamo passare da $\underline{\varepsilon}_t \sim VWN(\underline{0}, \Sigma_\varepsilon) \to \underline{w}_t \sim VWN(\underline{0}, I_m)$ (basterebbe richiedere Σ_ε diagonale, ma possiamo ipotesi più "potenti".)

Th Se Σ_ε è DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ P_{m\times m}$ INVERTIBILE TALE CHE $P\Sigma P^T = I_m$

Per cui utilizzando il teorema: $P\underline{\varepsilon}_t = \underline{w}_t \sim VWN(\underline{0}, I_m)$

Infatti $VAR[\underline{w}_t] = VAR[P\underline{\varepsilon}_t] = P\Sigma_\varepsilon P^T = I_m$

I $\underline{w}_t$ così trovati sono detti Shock strutturali.

$\Rightarrow$ Abbiamo

$$\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Sigma_{h=0}^{+\infty} A_h \cdot \underline{\varepsilon}_{t-h}$$

moltiplico per matrice identica I_m che posso scrivere $P^{-1} \cdot P$

$$\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Sigma_{h=0}^{+\infty} \underbrace{A_h P^{-1}}_{\Psi_h} \underbrace{P\underline{\varepsilon}_{t-h}}_{\underline{w}_{t-h}}$$

$$\underline{y}_t = \underline{\delta} + \Sigma_{h=0}^{+\infty} \Psi_h \cdot \underline{w}_{t-h}$$

I MOLTIPLICATORI SARANNO QUA DENTRO.

VMA(∞) rispetto a $\underline{w}_t$ (shock strutturali) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ non è rappresentazione canonica ($\Psi_0 = I P^{-1} = P^{-1} \neq A_0$)

$$\frac{\partial y_{1,t}}{\partial w_{j,t-a}} = \Psi_{ij}^{(a)}$$

- NOTA: Se gli errori non sono correlati non serve fare la trasformazione.
- Se moltiplico Ψ con errore ottengo varianza non uniforme (passaggio intermedio) → mi basta la la non correlazione
- Quello che conviene fare è stimare i modelli combinando tutti gli ordini possibili (nell'esempio sarebbero da fare 2)
- Se i grafici (IRF) vengono = al modello va bene, altrimenti abbiamo un problema di identificazione.
- Quello che si utilizza sono i modelli a equazioni simultanee (NON LI ABBIAMO VISTI). Passiamo da VaR a VaR strutturale (MODELLO AD EQ. SIMULTANEE)
- Siamo partiti da ε_t → a $\underline{w}_t = P\,\underline{\varepsilon}_t$

Scriviamo $\underline{y}_t \sim VAR(2)$ (senza costanti per velocizzare le scritture) $\underline{y}_t = \Phi_1 \underline{y}_{t-1} + \Phi_2 \underline{y}_{t-2} + \underline{\varepsilon}_t$

Prima avevamo visto la trasf in VMA(∞) ora vediamo in VAR.

$$P\,\underline{y}_t = P\,\Phi_1 \underline{y}_{t-1} + P\,\Phi_2\, \underline{y}_{t-2} + \underline{w}_t$$

⇒ VAR STRUTTURALE

$$P\,\underline{y}_t = \underset{\substack{\uparrow \\ P\Phi_1}}{\Gamma_1}\, \underline{y}_{t-1} + \underset{\substack{\uparrow \\ P\Phi_2}}{\Gamma_2}\, \underline{y}_{t-2} + \underset{\substack{\uparrow \\ WN(0, I_m)}}{\underline{w}_t}$$

è un MODELLO AD EQUAZIONI SIMULTANEE DINAMICO e LINEARE.

- Di solito (nella formula generale dei modelli ad eq. simultanee). P è scritto come B = MATRICE delle interdipendenze.
- La Matrice B porta simultanee interdipendenze ⇒ ⇒ simultanee causalità.

Caso $m=2$.

$$\begin{cases} b_{11} y_{1t} + b_{12} y_{2t} = \dots \\ b_{21} y_{1t} + b_{2t} = \dots \end{cases}$$

con $b_{11} \neq 0 \wedge b_{22} \neq 0$

$$\begin{cases} y_{1t} = -\frac{b_{12}}{b_{11}} y_{2t} + \dots (\dots) \frac{1}{b_{11}} \\ y_{2t} = -\frac{b_{21}}{b_{22}} y_{1t} + \dots (\dots) \cdot \frac{1}{b_{22}} \end{cases}$$

tutto il resto è diviso per b_{11}

- Si vede che c'è una simultanea causalità, ovvero interdipendenza tra y_{1t} e y_{2t}

$\Rightarrow$ La matrice P determina quindi la struttura di causalità (se P_{12} e $P_{21} = 0$ non c'è causalità)

- Andremo a vedere come è fatta quella introdotta dalla decomposizione di Cholesky $T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$

e quindi

$$\begin{cases} y_{1t} = 0 \cdot y_{2t} + \dots \\ y_{2t} = -\frac{t_{21}}{t_{22}} y_{1t} + \dots \end{cases}$$

y_{1t} non dipende da y_{2t}, ma y_{2t} dipende da y_{1t} (y_{2t} ha effetto causale su y_{1t})

- Si chiama CATENA CAUSALE RICORSIVA (Per capire il motivo è interessante osservare il caso con 3 variabili) con $n=3$ $\quad T=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$

$y_{1t} = 0 \cdot y_{2t} + 0 \cdot y_{3t} + \dots$ $\Rightarrow$ non dipende dalle altre v.

$y_{2t} = -\frac{t_{21}}{t_{22}} y_{1t} + 0 \cdot y_{3t} + \dots$ $\Rightarrow$ dipende solo dalla prima

$y_{3t} = -\frac{t_{31}}{t_{33}} y_{1t} + \left(-\frac{t_{32}}{t_{33}}\right) y_{2t} + \dots$ $\Rightarrow$ dipende dalla prima e 2a.

- Si chiama catena causale ricorsiva perché c'è questa dipendenza "a cascata" (più si scende più aumenta la dipendenza) $\hookrightarrow$ effetto causale.

- Per alcuni modelli va bene, per altri no.

OSS $\begin{matrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{matrix} \xrightarrow{T_I} \begin{cases} y_{1t} = 0 \cdot y_{2t} + \dots \\ y_{2t} = t \cdot y_{1t} + \dots \end{cases}$

ma

$\begin{matrix} y_{2t} \\ y_{1t} \end{matrix} \xrightarrow{T_{II}} \begin{cases} y_{2t} = 0 \cdot y_{1t} + \dots \\ y_{1t} = t \cdot y_{2t} + \dots \end{cases}$

Quale scelgo? si guarda da un punto di vista economico quale dipendenza ha più senso (bisogna avere altre info derivanti dalla teoria economica)
$\Rightarrow$ non è detto che avrà sempre senso economicamente (per cui non va sempre bene).