IL MODELLO DELLA TEORIA COLLETTIVA DEL RISCHIO

Abbiamo trattato i problemi dei caricamenti dei premi, delle ritenzioni nella riassicurazione, del capitale di solvibilità guardando ad un orizzonte temporale **monoperiodale**, usando il **criterio dell'utilità attesa**.

Il modello classico della **Teoria collettiva del rischio** consente di studiare tali problemi con riferimento ad un **orizzonte temporale più ampio**. Le scelte tra politiche gestionali sono effettuate con il **criterio della probabilità di rovina**.

Il modello

Con riferimento ad un portafoglio di rischi "analoghi", sia $R > 0$, la dotazione di capitale allocato per la gestione del portafoglio.

Ricordiamo che l'esigenza di avere un capitale allocato ad un portafoglio assicurativo è di tipo economico ed è imposta dai requisiti di solvibilità.

Si considera la gestione del portafoglio in tempo continuo, indicando con 0 l'istante di valutazione.

Siano

- $P(t)$ i premi netti incassati in $[0, t]$,
- $S(t)$ i risarcimenti per i sinistri avvenuti in $[0, t]$,
- $R(t) = R + P(t) - S(t)$.

Interessa studiare il processo

$$\{R(t), t \geq 0\},$$

detto processo del *surplus* o del fondo o del risultato tecnico o **processo di rischio**.

Si introduce una prima ipotesi sul processo dei premi, si assume che $P(t)$ sia proporzionale alla durata dell'intervallo $[0, t]$: $P(t) = ct$, $c > 0$. Si ha quindi

$$R(t) = R + ct - S(t).$$

Poiché
$$P(t) - P(s) = c(t - s),$$

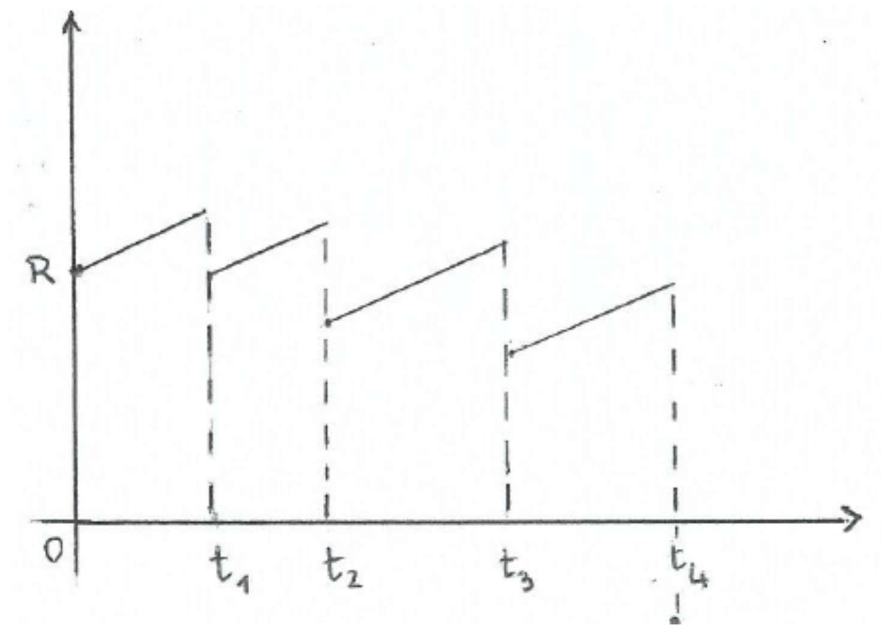
c rappresenta l'ammontare dei premi incassati in ogni intervallo unitario.

Si noti che l'ipotesi $P(t) = ct$ è molto forte, il processo dei premi è deterministico; inoltre, vista la stazionarietà, non si tiene conto di effetti quali, ad esempio, l'inflazione o la variazione del volume d'affari. Una giustificazione sarà data in seguito.

Nello processo $\{R(t), t \geq 0\}$ si tiene conto solo dei premi e dei risarcimenti, il modello è molto semplificato rispetto ad una situazione realistica, si ignorano fattori quali

- le spese,
- processo di liquidazione dei sinistri e relativo accantonamento delle riserve,
- i rendimenti prodotti dagli investimenti e i relativi costi,
- pagamenti di dividendi agli azionisti,
- immissioni di capitale.

Esempio. Una possibile realizzazione iniziale del processo $R(t) = R + ct - S(t)$, $t \geq 0$,



In t_1, t_2, t_3, t_4 si verificano sinistri che comportano pagamenti pari ai salti della funzione, negli intervalli tra tali istanti il *surplus* cresce linearmente con segmenti di pendenza c. La determinazione di $R(t_4)$ è negativa: la dotazione iniziale di capitale più gli introiti derivanti dai premi non sono sufficienti per risarcire i sinistri che si sono verificati in $[0, t_4]$. Si dice che in t_4 si è verificata la "**rovina**". ■

Dato il processo $\{R(t), t \geq 0\}$, se il fondo in un istante diventa negativo, si dice che in tale istante si verifica la **rovina del portafoglio**. In realtà, non è propriamente la rovina, vi è esigenza di rifinanziare il portafoglio per le gestioni future. Tuttavia, la **probabilità di rovina** è un'utile misura di rischiosità per la gestione del portafoglio.

Descrizione dell'evento "rovina".

Per quanto detto, è l'evento definito dalla proposizione "esiste $t \geq 0$ tale che $R(t) < 0$" ovvero

$$\bigvee_{t \geq 0}(R(t) < 0) = \bigvee_{t \geq 0}(R + ct - S(t) < 0).$$

Vediamo un altro modo per definire l'evento. Sia

$$T = inf\{t \geq 0 \mid R(t) < 0\}.$$

Più in dettaglio, dato $\omega \in \mathbb{P}$, dove $\mathbb{P}$ è la partizione sulla quale è definito il processo $\{R(t), t \geq 0\}$, e la corrispondente realizzazione del processo $(R(t, \omega), t \geq 0)$, si considera l'insieme dei t in corrispondenza dei quali il fondo è negativo

$$\{t \geq 0 \mid R(t, \omega) < 0\}.$$

L’insieme $\{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\}$ può essere

- $\neq \phi$, allora, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, inferiormente limitato, esiste l’estremo inferiore: $inf\{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} \in \mathbb{R}$,
- $= \phi$, poiché si pone $inf\,\phi = +\infty$, si ha $inf\{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} = +\infty$.

Dunque, T è un ente aleatorio,

$$T: \mathbb{P} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

tale che

$$\omega \in \mathbb{P} \to T(\omega) = inf\{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} \begin{cases} \in \mathbb{R} & \{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} \neq \phi \\ = +\infty & \{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} = \phi \end{cases}$$

Notiamo che

- $\{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} \neq \phi$ esiste un istante in cui la traiettoria è negativa: c’è la rovina,
- $\{t \geq 0 \mid R(t,\omega) < 0\} = \phi$ la traiettoria è non negativa in ogni istante: non c’è la rovina.

T è detto **istante della rovina** (***ruin time***). L’evento rovina può dunque essere definito da

$$T < +\infty.$$

Probabilità di rovina

E' detta **probabilità asintotica di rovina** (**in tempo continuo**), a partire dal capitale iniziale R,

$$\psi(R) = Pr(\vee_{t\geq 0}(R(t) < 0)) = Pr(T < +\infty).$$

In pratica, è più verosimile che il *surplus* sia monitorato non nel continuo, ma ad intervalli regolari di tempo ed inoltre che si guardi ad orizzonti temporali limitati. E' di interesse la seguente nozione.

E' detta **probabilità di rovina nell'intervallo limitato** $[0, \tau]$, **in tempo discreto**, a partire dal capitale iniziale R,

$$\overline{\psi}(R, \tau) = Pr\left(\vee_{\substack{0\leq t\leq \tau \\ t\in\mathbb{N}}}(R(t) < 0)\right).$$

Si considerano anche le seguenti nozioni.

E’ detta **probabilità di rovina nell’intervallo limitato** $[0, \tau]$, **in tempo continuo**, a partire dal capitale iniziale R,

$$\psi(R, \tau) = Pr\left(\bigvee_{0 \le t \le \tau} (R(t) < 0)\right).$$

E’ detta **probabilità asintotica di rovina**, **in tempo discreto**, a partire dal capitale iniziale R,

$$\overline{\psi}(R) = Pr\left(\bigvee_{\substack{t=0 \\ t \in \mathbb{N}}}^{+\infty} (R(t) < 0)\right).$$

Tra le precedenti probabilità sussistono alcune relazioni. Posto,

Continuo   Discreto

Asintotico

$$A(R) = \bigvee_{t\geq 0}(R(t) < 0), \qquad B(R) = \bigvee_{\substack{t=0 \\ t\in\mathbb{N}}}^{+\infty}(R(t) < 0),$$

Limitato

$$A(R,\tau) = \bigvee_{0\leq t\leq \tau}(R(t) < 0), \qquad B(R,\tau) = \bigvee_{\substack{0\leq t\leq \tau \\ t\in\mathbb{N}}}(R(t) < 0),$$

si ha

$$B(R,\tau) \to A(R,\tau) \to A(R) \qquad \text{e} \qquad B(R,\tau) \to B(R) \to A(R).$$

Allora

$$\overline{\psi}(R,\tau) \leq \psi(R,\tau) \leq \psi(R) \qquad \text{e} \qquad \overline{\psi}(R,\tau) \leq \overline{\psi}(R) \leq \psi(R).$$

La probabilità asintotica di rovina, in tempo continuo, $\psi(R)$, è una limitazione superiore delle altre. Studiamo tale probabilità.

La probabilità asintotica di rovina

$$\psi(R) = Pr(\vee_{t\geq 0}(R(t) < 0)) = Pr(\vee_{t\geq 0}(R + ct - S(t) < 0)),$$

dipende da

- R il capitale iniziale,
- c l'importo dei premi incassati in ogni intervallo unitario,
- $\{S(t), t \geq 0\}$ detto **processo del risarcimento cumulato**.

In una **impostazione di tipo collettivo**, si pone

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h,$$

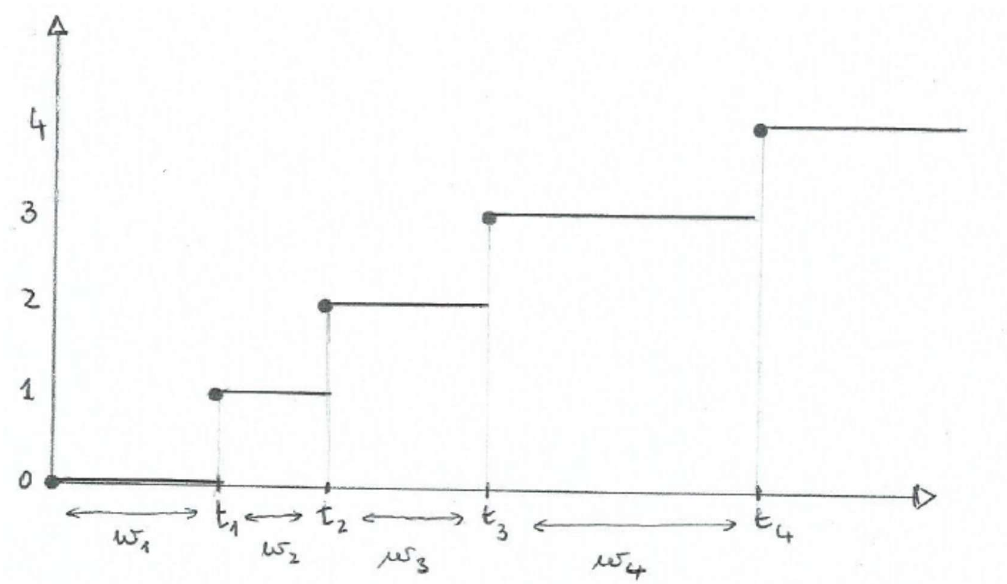
dove

- $N(t)$ è il numero di sinistri che colpiscono il portafoglio in $[0, t]$,
- Y_h è l'importo del risarcimento per il sinistro *h*-esimo, con $Y_h = 0$ se il sinistro non si verifica, $Y_h = y$, se il sinistro si verifica e il risarcimento è $y \geq 0$,

e con la convenzione $S(t) = 0$, se $N(t) = 0$.

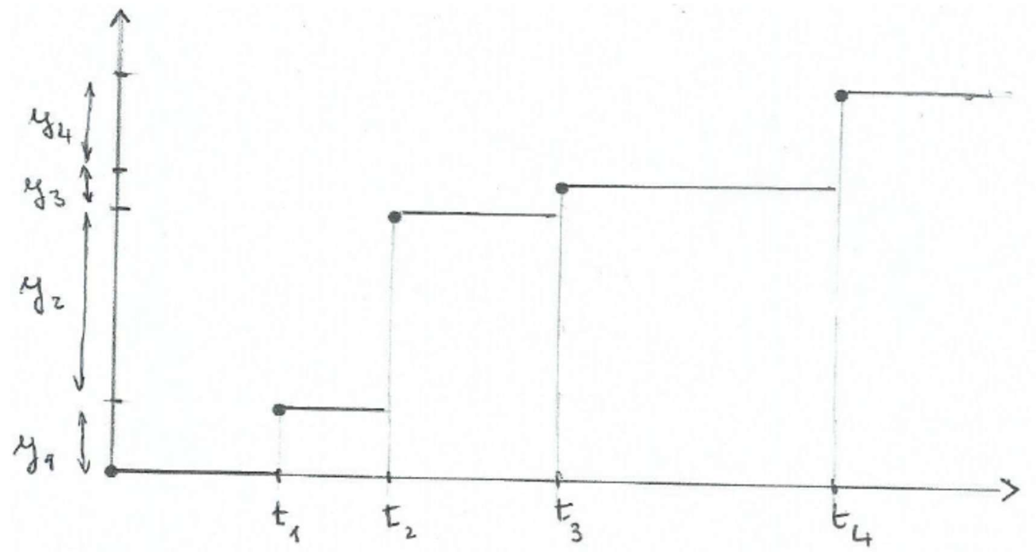
Il processo $\{S(t), t \geq 0\}$ del risarcimento cumulato, dipende dal **processo di arrivo dei sinistri** $\{N(t), t \geq 0\}$ e dal **processo dei risarcimenti per sinistro** $\{Y_1, Y_2, \dots\}$.

Una possibile realizzazione iniziale del processo $\{N(t), t \geq 0\}$



$N(\cdot, \omega)$ è una funzione costante a tratti, con salti in corrispondenza degli istanti $t_1, t_2, \dots$ di arrivo dei sinistri.

Una possibile realizzazione iniziale del processo $\{S(t), t \geq 0\}$



$S(\cdot, \omega)$ è una funzione costante a tratti, con salti in corrispondenza degli istanti $t_1, t_2, \ldots$ di arrivo dei sinistri, di entità pari ai corrispondenti risarcimenti.

Richiami. Distribuzione composta.

Dato $$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

se si assume che

- per ogni $n > 0$, $Y_1|N = n, \dots, Y_n|N = n$ siano iid,
- la funzione di ripartizione di $Y_i|N = n$, $i \leq n$, non dipenda da n,

allora, la funzione di ripartizione di $Y_i|N = n$, $i \leq n$, non dipende né da i né da n, è indicata con F_Y e può essere interpretata come **la funzione di ripartizione del risarcimento per un sinistro nell'ipotesi che il sinistro si verifichi**, di $Y_i|N \geq i$, per ogni i. Per tale distribuzione si indicano con $E(Y)$ il valore atteso, $E(Y^k)$ il momento *k*-esimo, $var(Y)$ la varianza, $m_Y(\cdot)$ la funzione generatrice dei momenti.

La distribuzione di probabilità di $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, è detta **distribuzione composta** ed è assegnata se si assegnano

- la distribuzione di probabilità di N, $Pr(N = n)$, $n = 0,1, \dots$,
- la funzione di ripartizione F_Y.

In particolare, se $N \sim P(\lambda)$, la distribuzione è detta Poisson composta(λ, F_Y).

Distribuzione composta

$$E(X) = E(N)E(Y),$$

$$var(X) = E(N)var(Y) + var(N)E(Y)^2,$$

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)\, F_Y^{*(n)}(x),$$

$$m_X(t) = m_N(\log m_Y(t)),$$

Poisson composta

$$E(X) = \lambda E(Y),$$

$$var(X) = \lambda E(Y^2),$$

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} F_Y^{*(n)}(x),$$

$$m_X(t) = e^{\lambda(m_Y(t)-1)}.$$

■

Fino a slide 28

Ipotesi probabilistiche del modello

$$\{S(t), t \geq 0\}, \qquad \text{con } S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

Si assume che

(1) $\{N(t), t \geq 0\}$ sia un processo di Poisson con intensità λ, $H = (N(t) = n)$

(2) $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ sia tale che, per ogni $n > 0$, per ogni evento H logicamente dipendente dal processo di arrivo dei sinistri che implichi che i sinistri di indici $1, 2, \ldots, n$ si sono verificati,

- $Y_1|H, Y_2|H, \ldots, Y_n|H$ siano iid,
- la legge di $Y_i|H$, $i \leq n$, non dipenda (oltre che da i) da n e da H.

Indichiamo con F_Y la funzione di ripartizione di $Y_i|H$, che è interpretabile come la **funzione di ripartizione del risarcimento per un sinistro nell'ipotesi che il sinistro si verifichi**. Per tale distribuzione indichiamo con

$\mu = E(Y)$ il valore atteso, $\qquad \mu_k = E(Y^k)$ il momento *k*-esimo,

$var(Y)$ la varianza, $\qquad m_Y(\cdot)$ la funzione generatrice dei momenti.

Si noti che le ipotesi probabilistiche introducono ulteriori semplificazioni al modello: la sinistrosità "non si modifica" nel tempo.

Il processo del risarcimento cumulato

Vediamo le conseguenze delle ipotesi (1) e (2) sul processo $\{S(t), t \geq 0\}$.

(*) Per ogni $t \geq 0$, $S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$ ha distribuzione Poisson composta $(\lambda t, F_Y)$.

Infatti,

evt. H logic. dip.

- per la (1), $N(t) \sim P(\lambda t)$,
- per la (2), per ogni $n > 0$, $Y_1|N(t) = n, \ldots, Y_n|N(t) = n$ sono iid con funzione di ripartizione F_Y che non dipende da n.

Si ha allora

$$E(S(t)) = \lambda t E(Y) = \lambda t \mu,$$

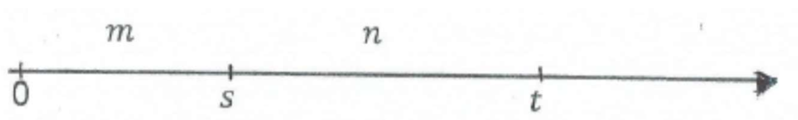
$$var(S(t)) = \lambda t E(Y^2) = \lambda t \mu_2,$$

$$F_{S(t)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F_Y^{*(n)}(x). \qquad \blacksquare$$

(**) Il processo $\{S(t), t \geq 0\}$ è ad incrementi stazionari.

Infatti, siano $s < t$, ai fini di valutare $Pr(S(t) - S(s) \leq x)$, posto

$$H(m,n) = (N(s) = m \wedge N(t) - N(s) = n),$$



introduciamo la seguente partizione di Ω: $\{H(m,n),\ \ m,n = 0,1,\dots\}$.

Dalle proprietà della probabilità e delle serie doppie, si ha

$$\begin{aligned} Pr(S(t) - S(s) \leq x) &= \sum_{m,n}^{0,+\infty} Pr\big(H(m,n)\big) Pr\big(S(t) - S(s) \leq x | H(m,n)\big) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} Pr\big(H(m,n)\big) Pr\big(S(t) - S(s) \leq x | H(m,n)\big)\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} Pr\big(H(m,n)\big) Pr\big(S(t) - S(s) \leq x | H(m,n)\big)\Big) \end{aligned}$$

Dalle ipotesi segue

- $Pr\big(H(m,n)\big) = Pr(N(s) = m)\Pr(N(t) - N(s) = n)$, per (1).

- $S(t) - S(s) \leq x|H(m,n) = \left(\sum_{h=1}^{N(t)} Y_h - \sum_{h=1}^{N(s)} Y_h \leq x\right)|H(m,n)$

$$= (\sum_{h=1}^{m+n} Y_h - \sum_{h=1}^{m} Y_h \leq x)|H(m,n)$$

$$= \sum_{h=m+1}^{m+n} Y_h \leq x|H(m,n),$$

dove $Y_{m+1}|\, H(m,n), \dots, Y_{m+n}|\, H(m,n)$ iid con funzione di ripartizione F_Y, per (2). Segue

$$Pr\big(\sum_{h=m+1}^{m+n} Y_h \leq x|H(m,n)\big) = F_Y^{*(n)}(x),$$

il valore in x della convoluzione *n*-esima della F_Y.

Allora,

$$Pr(S(t)-S(s)\le x)=\sum_{m,n}^{0,+\infty} Pr\big(H(m,n)\big)Pr\big(S(t)-S(s)\le x|H(m,n)\big)$$

$$=\sum_{m,n}^{0,+\infty} Pr(N(s)=m)Pr(N(t)-N(s)=n)F_Y^{*(n)}(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} Pr(N(s)=m)Pr(N(t)-N(s)=n)F_Y^{*(n)}(x)\Big)$$

(ricordare $\sum_n ba_n = b\sum_n a_n$)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N(t)-N(s)=n)F_Y^{*(n)}(x)\quad \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} Pr(N(s)=m)}_{=1}$$

somma delle probabilità degli eventi di una partizione di Ω

Segue

$$Pr(S(t)-S(s)\le x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{Pr(N(t)-N(s)=n)}_{\text{dipende da } t-s \text{ per } (1)}F_Y^{*(n)}(x),$$

$\longrightarrow N(t)\sim Pois(\lambda t)\longrightarrow$ incrementi stazionari

il secondo membro dipende da $t-s$, non da t,s separatamente. Si ha dunque stazionarietà degli incrementi.

Inoltre, poiché $N(t)-N(s)\sim P(\lambda(t-s))$, il secondo membro è il valore in x della funzione di ripartizione della distribuzione Poisson composta $(\lambda(t-s),F_Y)$. ■

Dimostrazione saltata per ora Vai a slide 26

(***) Il processo $\{S(t), t \geq 0\}$ è ad incrementi indipendenti.

Fissati $n \geq 2$, $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$, proviamo che gli incrementi del processo

$$S(t_1) - S(s_1), \qquad S(t_2) - S(s_2), \dots, \qquad S(t_n) - S(s_n)$$

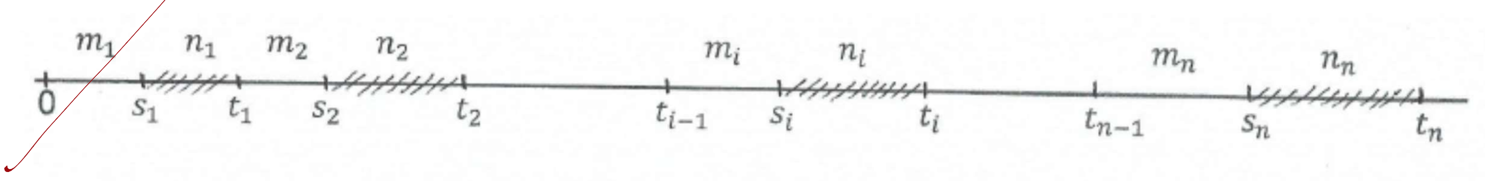
sono stocasticamente indipendenti, mostrando che la loro funzione di ripartizione congiunta è prodotto delle marginali.

Fissati $x_1, \dots, x_n$, ai fini di valutare

$$Pr(S(t_1) - S(s_1) \leq x_1, \dots, S(t_i) - S(s_i) \leq x_i, \dots, S(t_n) - S(s_n) \leq x_n),$$

poniamo $H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)$ l'evento

$$N(s_1) = m_1 \wedge N(t_1) - N(s_1) = n_1 \wedge \dots \wedge N(s_n) - N(t_{n-1}) = m_n \wedge N(t_n) - N(s_n) = n_n,$$



Introduciamo la seguente partizione di Ω

$$\{H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n), \ \ m_i, n_i = 0,1, \dots, i = 1, \dots, n\}.$$

Per le proprietà della probabilità e delle serie multiple, si ha

$$Pr(\wedge_{i=1}^{n}(S(t_i) - S(s_i) \le x_i))$$

$$= \sum_{m_1,n_1,\dots,m_n,n_n}^{0,+\infty} Pr\big(H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)\big) Pr\big(\wedge_{i=1}^{n}(S(t_i) - S(s_i) \le x_i) \,|H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)\big).$$

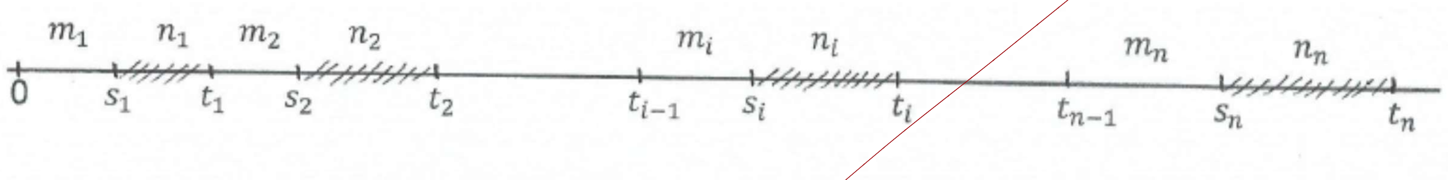
Dalle ipotesi segue

- $Pr\big(H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)\big) = Pr(N(s_1) = m_1) Pr(N(t_1) - N(s_1) = n_1) \times \cdots$
  $$\times\, Pr(N(t_{n-1}) - N(s_n) = m_n) Pr(N(t_n) - N(s_n) = n_n),$$

  per (1).

- Consideriamo il numero aleatorio $S(t_i) - S(s_i)|H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)$.

  Poniamo $m^{(i)} = m_1 + n_1 + \dots + m_i$: il numero di sinistri in $[0, s_i]$, nell'ipotesi $H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)$.



Si ha

$$S(t_i) - S(s_i)|H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n) = \left(\sum_{h=1}^{N(t_i)} Y_h - \sum_{h=1}^{N(s_i)} Y_h\right)|H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)$$

$$= \left(\sum_{h=1}^{m^{(i)}+n_i} Y_h - \sum_{h=1}^{m^{(i)}} Y_h\right)|H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n)$$

$$= \sum_{h=m^{(i)}+1}^{m^{(i)}+n_i} Y_h \,|H(m_1, n_1, \dots, m_n, n_n).$$

Pertanto, $S(t_i) - S(s_i) | H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n)$ è somma dei risarcimenti per i sinistri che si sono verificati nell'intervallo $]s_i, t_i]$

$$Y_{m^{(i)}+1} \Big| H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n), \ldots, Y_{m^{(i)}+n_i} \Big| H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n).$$

Tali numeri aleatori sono un sottoinsieme dell'insieme dei seguenti numeri aleatori

$$Y_1 \Big| H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n), \ldots, Y_{m^{(n)}+n_n} \Big| H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n),$$

che, per (2), sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, i sottoinsiemi

$$Y_{m^{(i)}+1} \Big| H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n), \ldots, Y_{m^{(i)}+n_i} \Big| H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sono a due a due disgiunti. Segue che

$$S(t_1) - S(s_1) | H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n), \ldots, S(t_n) - S(s_n) | H(m_1, n_1, \ldots, m_n, n_n)$$

sono stocasticamente indipendenti.

Allora,

$$Pr\left(\wedge_{i=1}^{n}(S(t_i)-S(s_i)\leq x_i)\,|H(m_1,n_1,\dots,m_n,n_n)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} Pr\left((S(t_i)-S(s_i)\leq x_i)|H(m_1,n_1,\dots,m_n,n_n)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} Pr\left(\sum_{h=m^{(i)}+1}^{m^{(i)}+n_i} Y_h\leq x_i|H(m_1,n_1,\dots,m_n,n_n)\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n} F_Y^{*(n_i)}(x_i),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, da (2),

$$Y_{m^{(i)}+1}\Big|\,H(m_1,n_1,\dots,m_n,n_n),\dots,Y_{m^{(i)}+n_i}\Big|\,H(m_1,n_1,\dots,m_n,n_n)$$

sono iid con funzione di ripartizione F_Y.

In conclusione,

$$Pr(\wedge_{i=1}^{n}(S(t_i) - S(s_i) \leq x_i))$$

$$= \sum_{m_1,n_1,\ldots,m_n,n_n}^{0,+\infty} Pr\big(H(m_1,n_1,\ldots,m_n,n_n)\big) Pr\big(\wedge_{i=1}^{n}(S(t_i) - S(s_i) \leq x_i)\,|H(m_1,n_1,\ldots,m_n,n_n)\big)$$

$$= \sum_{m_1,n_1,\ldots,m_n,n_n}^{0,+\infty} \Big[Pr(N(s_1) = m_1)Pr(N(t_1) - N(s_1) = n_1)F_Y^{*(n_1)}(x_1) \times \ldots$$

$$\times\, Pr(N(t_{n-1}) - N(s_n) = m_n)Pr(N(t_n) - N(s_n) = n_n)F_Y^{*(n_n)}(x_n)\Big]$$

$$= \underbrace{\sum_{m_1=0}^{+\infty} Pr(N(s_1) = m_1)}_{\substack{=1 \\ \text{somma delle probabilità degli} \\ \text{eventi di una partizione di } \Omega}} \sum_{n_1=0}^{+\infty} Pr(N(t_1) - N(s_1) = n_1)\, F_Y^{*(n_1)}(x_1) \times \ldots$$

$$\times \underbrace{\sum_{m_n=0}^{+\infty} Pr(N(s_n) - N(t_{n-1}) = m_n)}_{\substack{=1 \\ \text{somma delle probabilità degli} \\ \text{eventi di una partizione di } \Omega}} \sum_{n_n=0}^{+\infty} Pr(N(t_n) - N(s_n) = n_n)\, F_Y^{*(n_n)}(x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{n_i=0}^{+\infty} Pr(N(t_i) - N(s_i) = n_i)\, F_Y^{*(n_i)}(x_i)\right]}_{\substack{\text{valore in } x_i \text{ della funzione di ripartizione} \\ \text{della Poisson composta } (\lambda(t_i - s_i), F_Y)}} = \prod_{i=1}^{n} Pr(S(t_i) - S(s_i) \leq x_i). \quad \blacksquare$$

Incrementi:
– Stazionari
– Indipendenti

Il processo $\{S(t), t \geq 0\}$, poiché soddisfa (*), (**), (***), è un **processo Poisson composto** (λ, F_Y).

↳ $S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$ distrib. Poisson Composta $(\lambda t, F_Y)$

Osservazione 1. Analogamente a quanto osservato per la distribuzione Poisson composta, il processo Poisson composto può essere definito, formalmente, con le seguenti ipotesi. Siano

- $\{N'(t), t \geq 0\}$ un processo di Poisson con intensità λ,
- $\{Y_1', Y_2', \dots\}$ un processo di numeri aleatori iid, indipendente dal processo $\{N'(t), t \geq 0\}$, Y_i' con funzione di ripartizione F_Y.

Posto

$$S'(t) = \sum_{h=1}^{N'(t)} Y_h',$$

il processo $\{S'(t), t \geq 0\}$ ha la stessa legge del processo $\{S(t), t \geq 0\}$ con la descrizione fatta sopra e le ipotesi probabilistiche (1), (2).

Osservazione 2. Per il processo $\{S(t), t \geq 0\}$, se $s < t$, poiché

$$S(t) - S(s) \sim \text{Poisson composta } (\lambda(t-s), F_Y),$$

si ha

$$E(S(t) - S(s)) = \lambda(t-s)\mu,$$
$$var\big(S(t) - S(s)\big) = \lambda(t-s)\mu_2.$$

In particolare, il risarcimento in ogni intervallo unitario, $S(t+1) - S(t) \sim$Poisson composta (λ, F_Y) con

$$E(S(t+1) - S(t)) = \lambda\mu,$$
$$var\big(S(t+1) - S(t)\big) = \lambda\mu_2.$$

Osservazione 3. Riprendiamo l'ipotesi del modello relativa ai premi: $P(t) = ct, c > 0$.

Il risarcimento aleatorio a carico dell'assicuratore l'intervallo $[0, t]$ è $S(t)$. A fronte di tale impegno l'assicuratore deve fissare il monte premi $P(t)$. Applicando

- il principio di equità

  $P(t) = E\big(S(t)\big) = \lambda t\mu = \lambda\mu t = ct,$ con $c = \lambda\mu,$

- il principio della speranza matematica

  $P(t) = E\big(S(t)\big)(1 + \theta) = \lambda t\mu(1 + \theta) = \lambda\mu(1 + \theta)t = ct,$ con $c = \lambda\mu(1 + \theta),$

- il principio della varianza

  $P(t) = E\big(S(t)\big) + \beta var\big(S(t)\big) = \lambda t\mu + \beta\lambda t\mu_2 = (\lambda\mu + \beta\lambda\mu_2)t = ct,$ con $c = \lambda\mu + \beta\lambda\mu_2$.

Nei tre casi, si ha dunque $P(t) = ct$.

Si noti che la condizione di presenza di caricamento di sicurezza nei premi,

$$P(t) - P(s) > E(S(t) - S(s))$$

equivale alla

$$c > \lambda\mu.$$

Il coefficiente di aggiustamento

obiettivo

Introduciamo una nozione che consente di ottenere una limitazione superiore per la probabilità di rovina che generalmente non è ottenibile esplicitamente.

Con riferimento al processo $\{R(t), t \geq 0\}$ nelle ipotesi del modello, si considerano le seguenti ulteriori ipotesi.

(a) Si assume che nella $P(t) = ct$ si abbia

$$c = \lambda\mu(1+\theta), \text{ con } \theta > 0:$$

presenza di caricamento di sicurezza e premi calcolati con il principio della speranza matematica. Il parametro θ è il **coefficiente di caricamento di sicurezza** (*relative security loading*).

(b) La distribuzione del risarcimento per sinistro sia dotata di funzione generatrice dei momenti: esiste un intorno I_0 di 0, tale che

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} dF_Y(y) = E(e^{tY}) \in \mathbb{R}, \quad \text{per ogni } t \in I_0.$$

Sia $[0, \gamma[$ il più grande intervallo $\subset \mathbb{R}_+$ nel quale $m_Y(t) < +\infty$: $\gamma = sup\{t > 0 | m_Y(t) \in \mathbb{R}\}$.

↳ Gamma

Ricordiamo che

- non sono dotate di funzione generatrice dei momenti le distribuzioni a "coda pesante", es. Pareto; tali distribuzioni sono ora escluse dal modello,
- se F_Y ha supporto limitato, $m_Y(t) \in \mathbb{R}$, per ogni $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma = +\infty$,
- se F_Y è la funzione di ripartizione della $gamma(\alpha, \rho)$, $m_Y(t) = \left(\frac{\rho}{\rho - t}\right)^{\alpha}, t < \rho \Rightarrow \gamma = \rho$,
- se F_Y è la funzione di ripartizione della $EXP(\rho)$, $m_Y(t) = \frac{\rho}{\rho - t}, t < \rho \Rightarrow \gamma = \rho$.

(c) Si abbia $\lim_{t \to \gamma^-} [\lambda m_Y(t) - (\lambda + ct)] = +\infty$.

La condizione comporta che $\lim_{t \to \gamma^-} m_Y(t) = +\infty$. Si noti che $m_Y(t)$, $0 \leq t < \gamma$, ha valori reali ed è monotona crescente, mentre $m_Y(t) = +\infty$, $t \geq \gamma$: si vogliono escludere distribuzioni per le quali il limite di $m_Y(t)$, per $t \to \gamma^-$, sia finito.

Proposizione. Considerato il processo $\{R(t), t \geq 0\}$ nelle ipotesi del modello della Teoria collettiva del rischio, con le ipotesi aggiuntive (a), (b), (c), l'equazione (in t)

$$\lambda + ct = \lambda m_Y(t), \qquad t \in [0, \gamma[, \tag{♦}$$

ammette una ed una sola radice positiva: esiste unico $\alpha > 0$ tale che $\lambda + c\alpha = \lambda m_Y(\alpha)$.
Tale soluzione è detta **coefficiente di aggiustamento**.

La precedente equazione non si presta ad una interpretazione, la motivazione per considerarla è dovuta al fatto che la sua unica radice positiva, quando esiste, può essere utilizzata per ottenere una limitazione superiore per la probabilità di rovina. Sussiste infatti il seguente teorema.

Teorema (**Disuguaglianza di Lundberg**). Considerato il processo $\{R(t), t \geq 0\}$ nelle ipotesi del modello della Teoria collettiva del rischio, con le ipotesi aggiuntive (a), (b), (c), indicati con R il capitale iniziale e con α il coefficiente di aggiustamento, si ha

$$\psi(R) \leq e^{-\alpha R}.$$

↳ Sarebbe la prob. di rovina

Dim. della Proposizione. Osserviamo che, poiché si ha $m_Y(0) = 1$, $t = 0$ è soluzione dell'equazione. Proviamo l'esistenza della radice positiva. Poniamo, per $t \in [0, \gamma[$,

$$g_1(t) = \lambda + ct = \lambda + \lambda\mu(1+\theta)t,$$

$$g_2(t) = \lambda m_Y(t)$$

Studiamo la g_2, si ha

- $g_2(0) = \lambda m_Y(0) = \lambda$,
- è derivabile in 0, con $g_2'(0) = \lambda m_Y'(0) = \lambda E(Y) = \lambda\mu$,
- è strettamente convessa, segue dalla convessità della funzione esponenziale, dalla monotonia e linearità dell'integrale; fissati $t_1, t_2 \in [0, \gamma[, 0 < \delta < 1, \bar{\delta} = 1 - \delta$, per ogni y

  $$e^{(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) y} = e^{\delta(t_1 y) + \bar{\delta}(t_2 y)} < \delta e^{t_1 y} + \bar{\delta} e^{t_2 y}$$

  e

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) y}\, dF_Y(y)}_{m_Y(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2)} < \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\delta e^{t_1 y} + \bar{\delta} e^{t_2 y}\right) dF_Y(y) = \delta \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 y} dF_Y(y)}_{m_Y(t_1)} + \bar{\delta} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_2 y} dF_Y(y)}_{m_Y(t_2)}$$

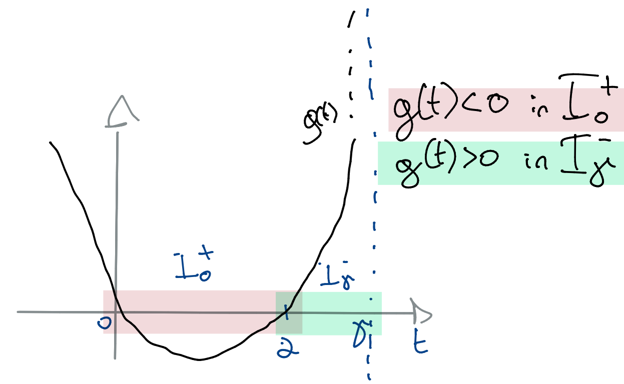
- è continua, segue dalla convessità in $]0, \gamma[$ (una funzione convessa in un intervallo aperto è continua) e dalla continuità in 0.

Consideriamo la funzione

$$g(t) = g_2(t) - g_1(t) = \lambda m_Y(t) - (\lambda + ct),$$

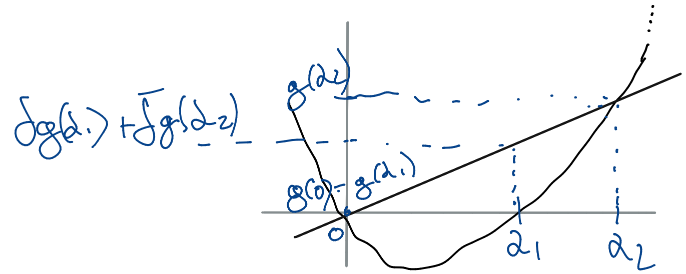
si ha

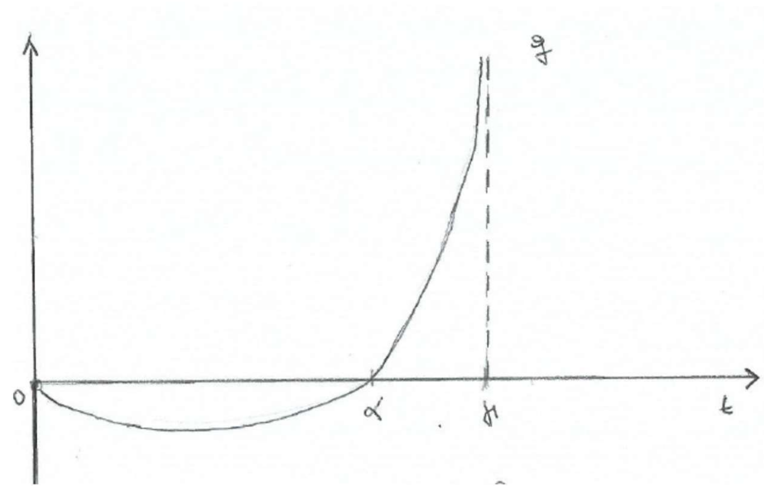
- $g(0) = \lambda - \lambda = 0,$
- $g'(0) = \lambda\mu - c < 0,$ per (a), allora g è decrescente in 0 ovvero esiste un intorno destro di 0, I_0^+, tale che $g(t) < g(0)$, per ogni $t \in I_0^+$,
- g è strettamente convessa e continua,
- $\lim_{t\to\gamma^-} g(t) = \lim_{t\to\gamma^-} [\lambda m_Y(t) - (\lambda + ct)] = +\infty$, per (c).

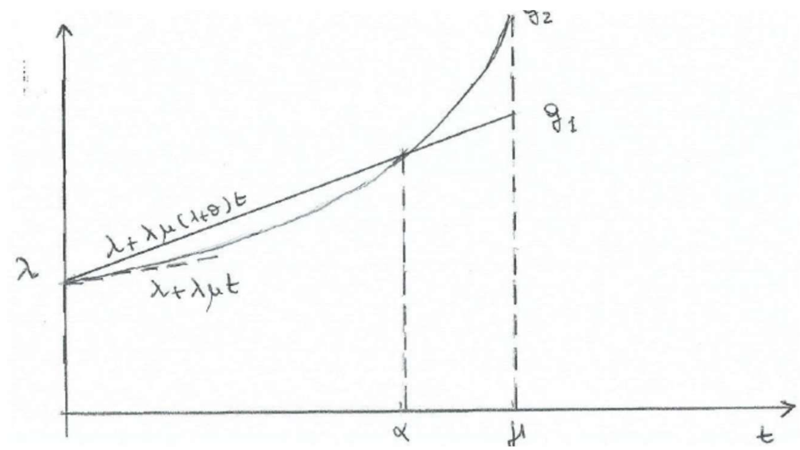


Segue che

- esiste $\alpha > 0$ tale che $g(\alpha) = 0$, dal Teorema di connessione: g è definita in un intervallo, continua, negativa in un intorno destro di 0 e positiva in un intorno sinistro di γ,
- la radice positiva è unica, segue dalla convessità: per assurdo, esistano $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, tali che $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = 0$; esiste $0 < \delta < 1$ tale che $\alpha_1 = \delta 0 + \bar{\delta}\alpha_2$, allora, per la convessità della g, $g(\alpha_1) < \delta g(0) + \bar{\delta} g(\alpha_2) = 0$ si giunge ad una contraddizione. $\boxed{\blacksquare}$




g
0
α
μ
t


g2
g1
λ+λμ(1+θ)t
λ
λ+λμt
α
μ
t

Osservazione 1. Da un'analisi grafica, notiamo che assegnati $\lambda, m_Y(\cdot)$, e dunque μ, α cresce al crescere di θ e α tende a zero al tendere a zero di θ.

Infatti, il grafico della funzione $g_2(\cdot)$ non varia, mentre la retta grafico della $g_1(\cdot)$ ha pendenza crescente al crescere di θ e dunque α, che è l'ascissa del secondo punto intersezione dei due grafici, cresce; per θ tendente a zero la retta tende alla tangente della $g_2(\cdot)$ in 0 e α tende a zero.

Osservazione 2. Nell'equazione che definisce il coefficiente di aggiustamento, compaiono $\lambda = E(N(t+1) - N(t))$, $c = P(t+1) - P(t)$, $m_Y(\cdot)$. In realtà però α, per l'ipotesi (a), non dipende da λ. Infatti, l'equazione è equivalente alla

$$\cancel{\lambda} + \cancel{\lambda}\mu(1+\theta)t = \cancel{\lambda}m_Y(t) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \mu(1+\theta)t = m_Y(t), \qquad t \in [0, \gamma[.$$

Pertanto, il coefficiente di aggiustamento dipende dal coefficiente di caricamento dei premi θ e dalla distribuzione del risarcimento per sinistro.

Esempio. La distribuzione del risarcimento per sinistro sia della $EXP(\rho)$, dunque $E(Y) = \mu = \frac{1}{\rho}$ e $m_Y(t) = \frac{\rho}{\rho - t}$, $t < \rho$.

L'equazione per ottenere il coefficiente di aggiustamento è

$\frac{1}{\rho}$

$$\lambda + \lambda\mu(1+\theta)t = \lambda\frac{\rho}{\rho - t} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \mu(1+\theta)t = \frac{\rho}{\rho - t}, \qquad t < \rho$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - \left(\rho - \frac{\rho}{1+\theta}\right)t = 0.$$

La soluzione positiva è

$$\alpha = \rho\frac{\theta}{1+\theta} = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}. \qquad \blacksquare$$

$\lambda + ct = m_Y(t)$

In generale, l'equazione (♦) non può essere risolta esplicitamente, si può approssimare la soluzione con procedimento numerico.

Sussiste il seguente teorema sulla probabilità asintotica di rovina.

Teorema. Considerato il processo $\{R(t), t \geq 0\}$ nelle ipotesi del modello della Teoria collettiva del rischio, con le ipotesi aggiuntive (a), (b), (c), indicati con R il capitale iniziale e con α il coefficiente di aggiustamento, si ha

$$\psi(R) = \frac{e^{-\alpha R}}{E\left[e^{-\alpha\, R(T)} | T < +\infty\right]},$$

dove T è l'istante della rovina, $T = inf\{t \geq 0 \mid R(t) < 0\}$.

Osservazione 1. Si ottiene formalmente la probabilità di rovina, ma l'espressione a secondo membro si può calcolare solo in casi molto particolari. Ad esempio, si prova che se $F_Y \sim EXP(\rho)$, allora $\psi(R) = \frac{e^{-\alpha R}}{1+\theta}$, dove, come abbiamo visto, $\alpha = \rho \frac{\theta}{1+\theta} = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}$.

Osservazione 2. Esigenza di introdurre un caricamento di sicurezza nei premi. Siano fissati R, λ e la distribuzione del risarcimento per sinistro. Consideriamo la

$$\psi(R) = \frac{e^{-\alpha\, R}}{E[e^{-\alpha\, R(T)}|T < +\infty]}.$$

Notiamo che per $\alpha \to 0$,

- il numeratore $e^{-\alpha\, R} \to 1$,
- il denominatore $E\left[e^{-\alpha\, R(T)}|T < +\infty\right] \to 1$. Infatti, $E\left[e^{-\alpha\, R(T)}|T < +\infty\right]$ è il valore in $-\alpha$ della funzione generatrice dei momenti di $R(T)|T < +\infty$ e, per una distribuzione dotata di funzione generatrice dei momenti, tale funzione è continua in 0 e, poiché vale 1 in zero, il limite in 0 è 1.

Pertanto, per $\alpha \to 0$, la probabilità di rovina tende a 1.

Abbiamo osservato che per $\theta \to 0$, si ha $\alpha \to 0$. Allora, **per $\boldsymbol{\theta} \to \mathbf{0}$, la probabilità di rovina tende a 1, qualunque sia la dotazione iniziale di capitale $\boldsymbol{R}$.**

Ci sono altri teoremi che forniscono un'espressione per la probabilità di rovina. Tale probabilità è però ottenibile operativamente solo in casi molto particolari.

E' allora utile disporre della disuguaglianza di Lundberg, che fornisce una limitazione superiore per la probabilità di rovina:

$$\psi(R) \leq e^{-\alpha R}.$$

Notiamo che la limitazione dipende dal capitale iniziale R e dal coefficiente di aggiustamento α che a sua volta dipende dal coefficiente di caricamento di sicurezza θ e da F_Y: su tali elementi si può agire per controllare la limitazione e di conseguenza la probabilità di rovina. In particolare,

- fissato R, $e^{-\alpha R} \downarrow$ se $\alpha \uparrow$,
- fissato α, $e^{-\alpha R} \downarrow$ se $R \uparrow$.

Applicazioni del modello

(1) Siano fissati F_Y e θ, e dunque α. Sia p_0 il livello di probabilità di rovina che rende accettabile per l'assicuratore (o per un regolatore) gestire il portafoglio. Ci chiediamo quale sia un livello di **dotazione di capitale $\boldsymbol{R}$** che consente di avere probabilità di rovina $\leq p_0$.

Se $e^{-\alpha R} \leq p_0$, dalla disuguaglianza di Lundberg, $\psi(R) \leq p_0$. Riesce

$$e^{-\alpha R} \leq p_0 \quad \Leftrightarrow \quad R \geq -\frac{\log p_0}{\alpha}.$$

Ad esempio, se $F_Y \sim EXP(\rho)$, $\mu = \frac{1}{\rho} = 4˙000$ e $\theta = 0.10$, si ha $\alpha = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)} = 2.27273 \times 10^{-5}$; con $p_0 = 0.005$, il capitale $R = -\frac{\log p_0}{\alpha} = 233˙126$ consente di raggiungere l'obiettivo.

Notiamo che agire su R si può entro certi limiti: allocare capitale ha un costo per gli azionisti, ha dunque effetto sulla capacità dell'impresa di creare valore. ■

(2) Siano fissati F_Y e R. Sia p_0 il livello di probabilità di rovina che rende accettabile gestire il portafoglio. Ci chiediamo quale sia un valore per il **coefficiente di caricamento dei premi $\boldsymbol{\theta}$** che consente di avere probabilità di rovina $\leq p_0$.

Se $e^{-\alpha R} \leq p_0$, dalla disuguaglianza di Lundberg, $\psi(R) \leq p_0$. Riesce

$$e^{-\alpha R} \leq p_0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq -\frac{\log p_0}{R}.$$

In particolare, se $\alpha = -\frac{\log p_0}{R}$ si raggiunge l'obiettivo. Si ha

$t = \alpha = -\frac{\log p_0}{R}$

$$\alpha = -\frac{\log p_0}{R} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \mu(1+\theta)\left(-\frac{\log p_0}{R}\right) = m_Y\left(-\frac{\log p_0}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{R\left[m_Y\left(-\frac{\log p_0}{R}\right) - 1\right]}{-\mu \log p_0} - 1.$$

Notiamo che agire su θ si può entro certi limiti: l'azione ha effetto sui premi, è dunque soggetta a vincoli di mercato. ∎

(3) Siano fissati F_Y, θ, R. C'è un'altra azione che consente di controllare la probabilità di rovina: la **riassicurazione**. Vediamo quale è l'effetto di alcune coperture riassicurative sul coefficiente di aggiustamento.

Riprendiamo il processo del risarcimento cumulato

$$\{S(t), t \geq 0\}, \qquad \text{con } S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

Nell'impostazione di tipo collettivo, per definire una copertura riassicurativa, introduciamo una funzione $\gamma(\cdot)$, con $0 < \gamma(y) \leq y$ per ogni y, tale che

- $\gamma(Y_h)$ indichi la **parte conservata** del risarcimento per il sinistro *h*-esimo,
- $Y_h - \gamma(Y_h)$ indichi la **parte ceduta** al riassicuratore (assumiamo portata illimitata).

Poniamo

- $S_{ced}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} \gamma(Y_h)$ l'impegno conservato dalla cedente in $[0, t]$,
- $S_{riass}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} (Y_h - \gamma(Y_h))$ l'impegno del riassicuratore in $[0, t]$.

Si noti che rientrano nella precedente descrizione

– **riassicurazione proporzionale *quota share***, nella quale

$$\gamma(Y_h) = aY_h, \qquad Y_h - \gamma(Y_h) = (1-a)Y_h \ , \quad 0 < a \leq 1,$$

$$S_{ced}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} aY_h = aS(t), \qquad S_{riass}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} (1-a)Y_h = (1-a)S(t),$$

– **riassicurazione *excess of loss***, nella quale

$$\gamma(Y_h) = min(Y_h, L), \qquad Y_h - \gamma(Y_h) = max(0, Y_h - L), \quad L > 0,$$

$$S_{ced}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} min(Y_h, L), \qquad S_{riass}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} max(0, Y_h - L),$$

In relazione all'impegno originario della cedente, il processo di rischio è $\{R(t), t \geq 0\}$, con

$$R(t) = R + ct - S(t), \quad S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h, \quad c = \lambda\mu(1+\theta), \theta > 0.$$

L'equazione che fornisce il coefficiente di aggiustamento α è

$$\lambda + ct = \lambda m_Y(t).$$

Studiamo il processo di rischio per il portafoglio coperto dalla riassicurazione.

Il processo del risarcimento cumulato è ora $\{S_{ced}(t), t \geq 0\}$ che dipende dal **processo di arrivo dei sinistri** $\{N(t), t \geq 0\}$ e dal **processo dei risarcimenti conservati per sinistro** $\{\gamma(Y_1), \gamma(Y_2), \dots\}$.

Dalle ipotesi (1), (2) per i processi sottostanti al processo $\{S(t), t \geq 0\}$, segue che analoghe ipotesi sussistono per i processi sottostanti a $\{S_{ced}(t), t \geq 0\}$ $\Rightarrow$

$\{S_{ced}(t), t \geq 0\}$ è un **processo Poisson composto** $(\lambda, F_{\gamma(Y)})$, dove $F_{\gamma(Y)}$ indica la comune funzione di ripartizione del risarcimento conservato per un sinistro che si verifichi.

Indichiamo con $E[\gamma(Y)]$ il valore atteso e con $m_{\gamma(Y)}$ la funzione generatrice dei momenti della $F_{\gamma(Y)}$, riesce

$$E[\gamma(Y)] = \int_0^{+\infty} \gamma(y) dF_Y(y), \qquad m_{\gamma(Y)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\gamma(y)} dF_Y(y).$$

Si ha

$$E[S_{ced}(t) - S_{ced}(s)] = \lambda(t-s)E[\gamma(Y)].$$

Analoghe considerazioni valgono per il processo $\{S_{riass}(t), t \geq 0\}$ che dipende dal **processo di arrivo dei sinistri** $\{N(t), t \geq 0\}$ e dal **processo dei risarcimenti ceduti per sinistro** $\{Y_1 - \gamma(Y_1), Y_2 - \gamma(Y_2), \dots\}$.

$\{S_{riass}(t), t \geq 0\}$ è un **processo Poisson composto** $(\lambda, F_{Y-\gamma(Y)})$, dove $F_{Y-\gamma(Y)}$ indica la comune funzione di ripartizione del risarcimento ceduto per un sinistro che si verifichi.

Indichiamo con $E[Y - \gamma(Y)]$ il valore atteso della $F_{Y-\gamma(Y)}$, riesce

$$E[Y - \gamma(Y)] = \int_0^{+\infty} (y - \gamma(y)) dF_Y(y).$$

Si ha

$$E[S_{riass}(t) - S_{riass}(s)] = \lambda(t - s)E[Y - \gamma(Y)].$$

Il ricorso alla copertura riassicurativa ha un costo per la cedente, rappresentato dai premi di riassicurazione.

Si assume che $P_r(t) = c_r t$, con c_r i premi incassati in un intervallo unitario dati da

$$c_r = (1+\theta_r)E[S_{riass}(t+1) - S_{riass}(t)] = (1+\theta_r)\lambda E[Y - \gamma(Y)],\ \theta_r > 0,$$

i premi di riassicurazione sono calcolati con il criterio della speranza matematica, con coefficiente di caricamento di sicurezza θ_r.

Il processo di rischio per il portafoglio della cedente, coperto dalla riassicurazione è $\{R_{ced}(t), t \geq 0\}$, con

$$R_{ced}(t) = R + (c - c_r)t - S_{ced}(t).$$

Dobbiamo considerare il vincolo che, in ogni intervallo, i premi al netto dei premi al riassicuratore introducano un caricamento rispetto al risarcimento atteso conservato, altrimenti la rovina per il portafoglio conservato è quasi certa:

$$(c - c_r)(t - s) > E[S_{ced}(t) - S_{ced}(s)] \quad \Leftrightarrow \quad c - c_r > \lambda E[\gamma(Y)].$$

L'equazione che fornisce il coefficiente di aggiustamento α_r è

$$\lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\gamma(Y)}(t).$$

Il caso della **riassicurazione quota share:**

$$\gamma(Y_h) = aY_h, \qquad\qquad Y_h - \gamma(Y_h) = (1-a)Y_h\ , \qquad 0 < a \leq 1.$$

Si ha

$$E[\gamma(Y)] = E(aY) = aE(Y) = a\mu,$$

$$E[Y - \gamma(Y)] = E\big((1-a)Y\big) = (1-a)E(Y) = (1-a)\mu,$$

$$m_{\gamma(Y)}(t) = m_{aY}(t) = m_Y(at).$$

Pertanto

$$c_r = (1+\theta_r)\lambda E[Y - \gamma(Y)] = (1+\theta_r)(1-a)\lambda\mu, \qquad \theta_r > 0;$$

il vincolo

$$c - c_r > \lambda E[\gamma(Y)] \quad \Leftrightarrow \quad (1+\theta)\lambda\mu - (1+\theta_r)(1-a)\lambda\mu > a\lambda\mu \quad \Leftrightarrow \quad a > 1 - \frac{\theta}{\theta_r};$$

l'equazione per ottenere il coefficiente di aggiustamento

$$\lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\gamma(Y)}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda + [(1+\theta) - (1+\theta_r)(1-a)]\lambda\mu t = \lambda m_Y(at).$$

Esempio. Determinare il coefficiente di aggiustamento del portafoglio coperto dalla riassicurazione, in funzione della quota di ritenzione, nell'ipotesi che $F_Y \sim EXP(\rho)$, $\mu = \frac{1}{\rho}$ e $\theta = \theta_r$.

Il vincolo $a > 1 - \frac{\theta}{\theta_r}$ equivale a $a > 0$.

L'equazione per ottenere il coefficiente di aggiustamento

$$\lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\gamma(Y)}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda + [(1+\theta) - (1+\theta_r)(1-a)]\lambda\mu t = \lambda m_Y(at)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda + (1+\theta)a\lambda\mu t = \lambda \frac{\rho}{\rho - at}, \qquad t < \frac{\rho}{a}.$$

Si ottiene

$$\alpha_r = \frac{\theta}{a\mu(1+\theta)}.$$

Per $a < 1$,

$$\alpha_r = \frac{\theta}{a\mu(1+\theta)} > \frac{\theta}{\mu(1+\theta)} = \alpha \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha_r R} < e^{-\alpha R}.$$

Il coefficiente α_r è decrescente al crescere della quota di ritenzione a.

Il caso della **riassicurazione excess of loss:**

$$\gamma(Y_h) = min(Y_h, L), \qquad\qquad Y_h - \gamma(Y_h) = max(0, Y_h - L), \qquad L > 0,$$

Si ha

$$E[\gamma(Y)] = E[min(Y, L)] = \int_0^L \bar{F}_Y(y)dy, \quad \text{con } \bar{F}_Y(y) = 1 - F_Y(y),$$

$$E[Y - \gamma(Y)] = E[max(0, Y - L)] = \int_L^{+\infty} \bar{F}_Y(y)dy,$$

$$m_{\gamma(Y)}(t) = \int_{-\infty}^L e^{ty}dF_Y(y) + \int_L^{+\infty} e^{tL}dF_Y(y) = \int_{-\infty}^L e^{ty}dF_Y(y) + e^{tL}\bar{F}_Y(L).$$

Pertanto

$$c_r = (1 + \theta_r)\lambda E[Y - \gamma(Y)] = (1 + \theta_r)\lambda \int_L^{+\infty} \bar{F}_Y(y)dy, \qquad \theta_r > 0;$$

il vincolo

$$c - c_r > \lambda E[\gamma(Y)] \quad \Leftrightarrow \quad (1 + \theta)\lambda\mu - (1 + \theta_r)\lambda \int_L^{+\infty} \bar{F}_Y(y)dy > \lambda \int_0^L \bar{F}_Y(y)dy;$$

l'equazione per ottenere il coefficiente di aggiustamento

$$\lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\gamma(Y)}(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda + \left[(1 + \theta)\lambda\mu - (1 + \theta_r)\lambda \int_L^{+\infty} \bar{F}_Y(y)dy\right]t = \lambda\left[\int_{-\infty}^L e^{ty}dF_Y(y) + e^{tL}\bar{F}_Y(L)\right].$$

■

IL MODELLO UNIPERIODALE, INDIVIDUALE DELLA TEORIA DEL RISCHIO

Con riferimento ad un portafoglio di rischi “analoghi” ed “indipendenti”, si considera la gestione in un intervallo uniperiodale, diciamo un anno, un esercizio.

Sia $R > 0$ la dotazione di capitale allocato per la gestione del portafoglio.

Nell’impostazione individuale, in 0, sia n il numero delle polizze e siano

- $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ i premi netti incassati,
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ il risarcimento aleatorio,
- $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$ il guadagno aleatorio, $G_i = P_i - X_i$.

Per le ipotesi sulla collettività, si assume che

$X_i,\ i = 1, \dots, n$, siano iid,

$P_i = E(X_i) + m_i$, con $m_i > 0$ il caricamento di sicurezza, siano tutti uguali al variare di i.

Allora i guadagni $G_i = P_i - X_i,\ \ ,\ i = 1, \dots, n,$ sono iid. Poniamo $E(G) = \sum_{i=1}^{n} E(G_i) = m$, $var(G) = \sum_{i=1}^{n} var(G_i) = \sigma^2$.

Si considera il seguente fondo alla fine dell'esercizio

$$R + P - X = R + G.$$

La **rovina nell'esercizio** è definita dall'evento

$$(R + P - X < 0) = (R + G < 0) = (G < -R)$$

Interessa valutare la **probabilità di rovina nell'esercizio.**

$$Pr(R + P - X < 0) = Pr(G < -R).$$

TLC

Richiami. Teorema di Lindeberg-Lévy. Siano $W_1, W_2, \ldots$ iid con varianza finita. Posto $S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ e $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$, la successione S_n^*, $n = 1,2, \ldots$, converge in legge (in distribuzione) alla normale standard $N(0,1)$.

Il teorema è spesso utilizzato in pratica per approssimare la funzione di ripartizione di S_n^*, per n è "sufficientemente" elevato, mediante la funzione di ripartizione $\phi(\cdot)$ della $N(0,1)$: $F_{S_n^*}(x) \cong \phi(x)$. ■

Poiché i guadagni G_i, , $i = 1, \dots, n$, sono iid, se n è “sufficientemente” elevato, si può approssimare la distribuzione di $\frac{G-m}{\sigma}$ con la $N(0,1)$. Allora, per la probabilità di rovina si ha

$$Pr(G < -R) = Pr\left(\frac{G-m}{\sigma} < -\frac{R+m}{\sigma}\right) \cong \phi\left(-\frac{R+m}{\sigma}\right).$$

Dati R, m, σ, si può calcolare

$$I = \frac{R+m}{\sigma},$$

che è detto **indice di stabilità relativa del portafoglio**, e quindi $\phi(-I)$.

Notiamo che al crescere di I si riduce la probabilità di rovina. Per rendere adeguatamente elevato I si può agire su

- R il capitale allocato,
- m il guadagno atteso somma dei caricamenti di sicurezza,
- σ^2 la varianza del guadagno.

Si può ricorrere alle azioni commentate nel modello della Teoria collettiva del rischio, agire: sul capitale allocato, sui premi. La riduzione di varianza si può ottenere ricorrendo alla riassicurazione.

Ad esempio, con una riassicurazione quota share di quota di ritenzione $a < 1$, il guadagno del portafoglio coperto è

$$G_{ced} = P - P_r - aX,$$

dove P_r indica il premio pagato al riassicuratore, sia $P_r = E[(1-a)X] = (1-a)P$.

Si ha

$$var(G_{ced}) = a^2 var(G) < var(G).$$

Si noti però che, in generale, la riassicurazione comporta anche una riduzione del guadagno atteso, che ha effetto sul numeratore dell'indice di stabilità relativa.

Come il modello della Teoria collettiva del rischio, il modello uniperiodale, individuale che abbiamo visto presenta ipotesi fortemente semplificatrici. Per entrambi i modelli sono state introdotte versioni più generali, con ipotesi meno restrittive.

Alcuni riferimenti

T. Mikosch (2004), *Non-life insurance mathematics. An introduction with stochastic processes*, Springer

R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit (2001), *Modern actuarial risk theory Using* R, (prima e seconda edizione), Kluwer

M. Denuit, A. Charpentier (2004), *Mathèmatique de l'assurance non-vie*, Economica

S.A. Klugman, H.H. Panjer, G.E. Willmot (1998), *Loss models. From data to decisions*, Wiley (prima edizione e seguenti)

N.L. Bowers, H.V. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C. J. Nesbitt (1986), *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries