PROCESSI DI ARRIVO DEI SINISTRI

PROCESSI STOCASTICI (Cenni)

Un **processo stocastico** è una famiglia indiciata di numeri aleatori (variabili aleatorie), indicata con $\{X(t), t \in T\}$ o con $\{X_t, t \in T\}$, dove t è un **indice,** anche detto parametro, e T è l'**insieme degli indici del processo**.

Nei problemi che trattiamo si ha $T \subset \mathbb{R}$ e, spesso, t è un indice temporale: un istante o un periodo di tempo.

Il processo $\{X(t), t \in T\}$ è detto

- **a parametro continuo** (a tempo continuo) se l'insieme T ha la cardinalità del continuo, ad es. T è un intervallo: $T = [t_1, t_2]$, $T = [0, +\infty[$,
- **a parametro discreto** (a tempo discreto) se l'insieme T è finito o numerabile, ad es. $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, $T = \{0,1, \dots\}$.

Osservazione. I numeri aleatori del processo $\{X(t), t \in T\}$ sono definiti in una medesima partizione $\mathbb{P}$ dell'evento certo.

- Fissato $t \in T$, il numero aleatorio $X(t)$ è definito da un'applicazione

  $$X(t,\cdot): \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

  tale che

  $$\omega \in \mathbb{P} \rightarrow X(t,\omega) \in \mathbb{R}$$

  L'insieme $\{X(t,\omega), \omega \in \mathbb{P}\}$ è l'**insieme delle determinazioni possibili del numero aleatorio** $X(t)$.

- Fissato $\omega \in \mathbb{P}$, $X(\cdot,\omega)$ è una funzione definita sull'insieme T

  $$X(\cdot,\omega): T \rightarrow \mathbb{R}.$$

  I valori della funzione $(X(t,\omega), t \in T)$ costituiscono una **realizzazione** o **storia** o **traiettoria del processo**.

Richiami.

Dato un numero aleatorio X, la sua valutazione probabilistica è assegnata assegnando la **funzione di ripartizione**

$$F_X(x) = Pr(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La F_X è tale che

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$, perché è una probabilità,
- è monotona non decrescente, perché se $x_1 < x_2$ allora $(X \leq x_1) \to (X \leq x_2)$, e quindi $Pr(X \leq x_1) \leq Pr(X \leq x_2)$,
- è continua a destra,
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$

perché usiamo probabilità σ −additive.

Per le ultime tre ricordiamo che si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} Pr \underbrace{\left(X \le x_0 + \frac{1}{n}\right)}_{\substack{\text{famiglia di eventi,} \\ \text{monotona non crescente}}} = Pr\left(\wedge_{n \ge 1}\left(X \le x_0 + \frac{1}{n}\right)\right) = Pr(X \le x_0)$$

$$= F_X(x_0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = \lim_{n \to +\infty} Pr \underbrace{(X \le -n)}_{\substack{\text{famiglia di eventi,} \\ \text{monotona non crescente}}} = Pr(\wedge_{n \ge 0}(X \le -n)) = Pr(\cancel{\phi}) = 0$$

$$\emptyset$$

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim_{n \to +\infty} Pr \underbrace{(X \le n)}_{\substack{\text{famiglia di eventi,} \\ \text{monotona non decrescente}}} = Pr(\vee_{n \ge 0}(X \le n)) = Pr(\Omega) = 1$$

Assegnata la F_X, si ha

$$Pr(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \quad Pr(X > a) = 1 - F_X(a), \ldots$$

Più in generale, rimangono assegnate le

$$Pr(X \in B),\ B \in \mathcal{B},\ \mathcal{B} \text{ boreliani di } \mathbb{R},$$

ovvero F_X caratterizza la **legge del numero aleatorio**.

Si noti che

- se $(X \leq x) = \phi$, allora $F_X(x) = 0$,
- se $(X \leq x) = \Omega$, allora $F_X(x) = 1$,
- se $(X \leq x) = (X \leq y)$, allora $F_X(x) = F_X(y)$.

Data una coppia di numeri aleatori (X,Y), la sua valutazione probabilistica è assegnata assegnando la **funzione di ripartizione congiunta**

$$F_{X,Y}(x,y) = Pr(X \leq x \wedge Y \leq y) = Pr(X \leq x, Y \leq y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

La $F_{X,Y}$ è tale che

- $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$,
- le restrizioni $F_{X,Y}(\cdot, y)$, $F_{X,Y}(x,\cdot)$ sono monotone non decrescenti e continue a destra,
- $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim_{x,y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$,
- per ogni $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, si ha $F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) + F_{X,Y}(x_1,y_1) \geq 0$, perché

  $$F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) + F_{X,Y}(x_1,y_1) = Pr((X,Y) \in R),$$

  dove $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$.

Assegnata la $F_{X,Y}$, rimangono assegnate le $Pr((X,Y) \in B)$, $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ boreliani di $\mathbb{R}^2$ ovvero $F_{X,Y}$ caratterizza la **legge della coppia aleatoria**.

Inoltre, assegnata la $F_{X,Y}$ rimangono assegnate le **funzioni di ripartizione marginali** F_X, F_Y

$$\lim_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{n\to+\infty} F_{X,Y}(n,y) = \lim_{n\to+\infty} Pr\,\underbrace{(X \le n \wedge Y \le y)}_{\substack{\text{famiglia di eventi,}\\ \text{monotona non decrescente}}} = Pr(\vee_{n\ge 0}(X \le n \wedge Y \le y))$$

$$= Pr(Y \le y) = F_Y(y)$$

$$\lim_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = Pr(X \le x) = F_X(x)$$

Nota. Se si assume che X, Y siano stocasticamente indipendenti, allora $Pr(X \le x \wedge Y \le y) = Pr(X \le x)Pr(Y \le y)$, segue $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$: assegnate le marginali, rimane determinata la funzione di ripartizione congiunta.

La nozione di funzione di ripartizione congiunta si estende al caso multidimensionale.

Dato un vettore aleatorio $(X_1, \dots, X_n)$, la sua valutazione probabilistica è assegnata assegnando la **funzione di ripartizione congiunta *n*-dimensionale**

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La $F_{X_1,\dots,X_n}$ è tale che

- $0 \leq F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) \leq 1$,
- $F_{X_1,\dots,X_n}$ è monotona non decrescente e continua a destra rispetto a ciascuno dei suoi argomenti,
- $\lim_{x_k \to -\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$, per $k = 1, \dots, n$, $\lim_{x_1,\dots,x_n \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = 1$,
- per ogni $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$, con $a_k \leq b_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$, si ha

  $$\Delta_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

  dove $\Delta_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \Delta_{a_1}^{b_1} \dots \Delta_{a_n}^{b_n} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$, con

  $$\Delta_{a_k}^{b_k} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ - F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

L'ultima proprietà segue dalla condizione

$$Pr\big((X_1, \dots, X_n) \in (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]\big) \geq 0$$

Assegnata la $F_{X_1,\dots,X_n}$, rimangono assegnate le $Pr((X_1, \dots, X_n) \in B)$, $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ boreliani di $\mathbb{R}^n$ ovvero $F_{X_1,\dots,X_n}$ caratterizza la **legge del vettore aleatorio**.

Si ha inoltre,

$$\lim_{x_{k+1},\dots,x_n \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = F_{X_1,\dots,X_k}(x_1, \dots, x_k),$$

dove $F_{X_1,\dots,X_k}$ è la **funzione di ripartizione marginale** di $(X_1, \dots, X_k)$.

In modo analogo, assegnata la $F_{X_1,\dots,X_n}$, rimangono assegnate le funzioni di ripartizione marginali unidimensionali F_{X_k}, bidimensionali F_{X_h,X_k}, …, (*n*-1)-dimensionali $F_{X_{k_1},\dots,X_{k_{n-1}}}$. ■

Dato un processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$, la sua valutazione probabilistica è assegnata assegnando una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni, costituita da **tutte le funzioni di ripartizione congiunte di vettori aleatori di variabili del processo, con un numero finito di componenti**.

Si ha cioè che $F \in \mathcal{F}$ se e solo se esistono $n > 0$, $t_1, \dots, t_n \in T$, tali che $F = F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}$, con $F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}$ funzione di ripartizione congiunta di $(X(t_1), \dots, X(t_n))$.

La famiglia $\mathcal{F}$ caratterizza la **legge del processo stocastico**.

Assegnare la legge di un processo stocastico comporta di specificare una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$, che devono rispettare condizioni di compatibilità:

(a) ogni funzione della famiglia deve essere una funzione di ripartizione, es. $F_{X(t_1),\dots,X(t_n)} \in \mathcal{F}$ deve soddisfare le condizioni di una funzione di ripartizione *n*-dimensionale,

(b) se $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ è una permutazione di $(1, \dots, n)$, allora $F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X(t_{\tau_1}),\dots,X(t_{\tau_n})}(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_n})$, es. $F_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(t_2),X(t_1)}(x_2, x_1)$,

(c) $\lim_{x_n \to +\infty} F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X(t_1),\dots,X(t_{n-1})}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Notiamo che, in generale, è molto complesso assegnare la famiglia $\mathcal{F}$. In ipotesi particolari è sufficiente un minore livello di specificazione.

Esempi.

1) Il processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ è un **processo di numeri aleatori stocasticamente indipendenti** se per ogni $n \geq 2$, per ogni $t_1, \dots, t_n \in T$

$X(t_1), \dots, X(t_n)$ sono stocasticamente indipendenti

$$\Leftrightarrow$$

per ogni $i = 1, \dots, n,$ $X(t_i) =^d X(t_i)|H,$

per ogni evento H $(H \neq \phi)$ che porta informazioni su $X(t_j),\ j = 1, \dots, n, j \neq i$:

$$H = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(X(t_j) \in A_j\right), \text{ essendo } A_j \subset \mathbb{R} .$$

Per assegnare la legge del processo basta assegnare le funzioni di ripartizione marginali unidimensionali.

2) Se il processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ è un **processo di numeri aleatori stocasticamente indipendenti, identicamente distribuiti** (iid), per assegnare la legge del processo basta assegnare la comune funzione di ripartizione di ciascuno dei numeri aleatori del processo.

3) Se

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \quad Y_i = \varphi(Z_i),$$

ha **distribuzione composta**, la legge del processo $\{N, Z_1, Z_2, \dots\}$ è assegnata assegnando la distribuzione di probabilità di N, $Pr(N = n), n = 0,1, \dots$ e la funzione di ripartizione F_Y del risarcimento per un sinistro nell'ipotesi che il sinistro si verifichi che, a sua volta, dipende dalla funzione di ripartizione F_Z del danno per un sinistro che si verifichi. ∎

Se tutti i numeri aleatori del processo $\{X(t), t \in T\}$ assumono determinazioni in un insieme E finito o numerabile, la legge del processo è determinata assegnando la **famiglia delle funzioni di probabilità**:

$$Pr(X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n), \text{ per ogni } n > 0,\ t_1, \dots, t_n \in T, \text{ con } t_1 < \dots < t_n,\ i_1, \dots, i_n \in E.$$

Sia $T \subset \mathbb{R}$, un intervallo.

Dato un processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ e $s, t \in T, s < t$, la differenza $X(t) - X(s)$ è detta **incremento del processo** relativa all'intervallo $]s, t]$.

Il processo $\{X(t), t \in T\}$ è detto **ad incrementi indipendenti** se per ogni $n \geq 2$, per ogni $s_1, t_1, \dots, s_n, t_n \in T$, con $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$, gli incrementi del processo

$X(t_1) - X(s_1),\ X(t_2) - X(s_2), \dots ,\ X(t_n) - X(s_n)$ sono stocasticamente indipendenti

ovvero se per ogni numero finito di **incrementi relativi ad intervalli a due a due disgiunti**, la distribuzione di probabilità di uno degli incrementi non è influenzata da informazioni relative ai valori degli incrementi relativi agli altri intervalli:

per ogni $i = 1, \dots, n,$ $\quad X(t_i) - X(s_i) =^d (X(t_i) - X(s_i))|H,$

per ogni evento H $(H \neq \phi)$ che porta informazioni su $X(t_j) - X(s_j),\ j = 1, \dots, n, j \neq i$:

$H = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(X(t_j) - X(s_j) \in A_j\right)$, essendo $A_j \subset \mathbb{R}$.

Il processo $\{X(t), t \in T\}$ è detto **ad incrementi stazionari** se per ogni $s, t \in T, s < t$, la distribuzione di probabilità dell'incremento $X(t) - X(s)$ dipende dalla differenza $t - s$, non da s, t separatamente.

La proprietà comporta che la distribuzione di probabilità di incrementi relativi ad intervalli di uguale ampiezza è la medesima:

$$X(t+h) - X(t) \;=^{d} X(\tau+h) - X(\tau)\,.$$

Nel seguito useremo la seguente notazione:

- $\{X(t), t \in T\}$ per processi a parametro continuo,
- $\{X_t, t \in T\}$ per processi a parametro discreto.

Il processo a parametro continuo $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di conta** se

$N(t)$ è il numero di manifestazioni di un dato fenomeno,
detto **numero di arrivi**, nell'intervallo $[0, t]$.

Si ha dunque

- per ogni t, $N(t) \geq 0$ e $N(t)$ è un numero aleatorio con determinazioni naturali,
- per ogni s, t, con $s < t$, $N(s) \leq N(t)$ e $N(t) - N(s)$ è il numero di arrivi nell'intervallo $]s, t]$.

In particolare, se $N(t)$ è il numero di sinistri che colpiscono una fissata polizza o un fissato portafoglio di polizze nell'intervallo $[0, t]$: $\{N(t), t \geq 0\}$ è un **processo di arrivo di sinistri**.

Consideriamo alcuni modelli probabilistici per un processo di arrivo dei sinistri.

PROCESSO DI POISSON

Un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di Poisson di intensità** λ, $\lambda > 0$, se

(I) il processo è ad incrementi indipendenti: per ogni $n \geq 2$, per ogni $s_1, t_1, \dots, s_n, t_n \geq 0$, con $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$, gli incrementi del processo

$N(t_1) - N(s_1), N(t_2) - N(s_2), \dots, N(t_n) - N(s_n)$ sono stocasticamente indipendenti,

(II) per ogni $t \geq 0$ e $\Delta t > 0$, $Pr(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$,

dove $o(\Delta t)$ indica una funzione infinitesima di ordine superiore a Δt, per $\Delta t \to 0^+$: $\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$,

(III) per ogni $t \geq 0$ e $\Delta t > 0$, $Pr(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$,

(IV) $Pr(N(0) = 0) = 1$.

Notiamo che, dagli assiomi, segue

$$Pr(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t). \quad (*)$$

Osservazione.

- La condizione (II) si può esprimere con

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \lambda. \qquad (**)$$

Da (II) $\Rightarrow \frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1)}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow$ (**)

Da (**), posto $\alpha(\Delta t) = \frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1)}{\Delta t} - \lambda$, segue $\alpha(\Delta t) \to 0$.

Allora $\qquad Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t,$

dove $\alpha(\Delta t)\Delta t = o(\Delta t) \Rightarrow$ (II)

- La condizione (III) si può esprimere con

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2)}{\Delta t} = 0.$$

III) L'evt si verifica una sola volta in un istante di tempo

Teorema (a). Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo di Poisson di intensità λ. Allora, per ogni $t \geq 0$, si ha $Pr(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0,1, \ldots$.

Pertanto in un processo di Poisson, le marginali unidimensionali sono distribuzioni di Poisson: per ogni $t > 0$, $N(t) \sim P(\lambda t) \Rightarrow E\big(N(t)\big) = var(N(t)) = \lambda t$.

Fino a slide 18

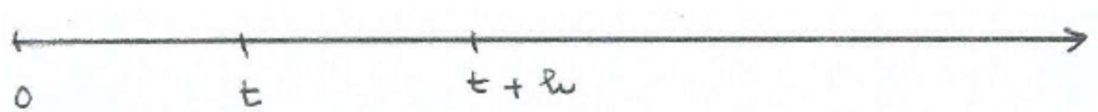
Dim. Fissato $n \geq 0$, poniamo $P_n(t) = Pr(N(t) = n)$, vista come funzione di t, $t \geq 0$, e proviamo che $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $t \geq 0$.

La prova è ottenuta nei seguenti passi.

(1) Proviamo che $P_0(t) = Pr(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

(1.1) Fissato $t \geq 0$, proviamo che P_0 è derivabile a destra in t.

Per $h > 0$, si ha



$P_0(t+h) = Pr(N(t+h)=0) = Pr(N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0)$ per l'uguaglianza tra i due eventi

$= Pr(N(t)=0)Pr(N(t+h)-N(t)=0)$ per (I)

$= P_0(t)(1-\lambda h + o(h)).$ per (*)

Segue

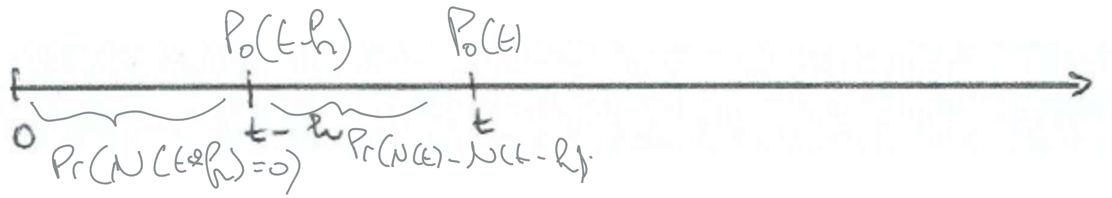
$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = P_0(t)\frac{-\lambda h + o(h)}{h} = P_0(t)\left(-\lambda + \frac{o(h)}{h}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & h \to 0^+ \\ P_0(t) & -\lambda & 0 & & \end{array}$$

Esiste allora finito il limite del primo membro per $h \to 0^+$ ed è uguale a $-\lambda P_0(t)$: la funzione P_0 è derivabile a destra in t, con derivata destra $-\lambda P_0(t)$.

(1.2) Fissato $t > 0$, proviamo che P_0 è derivabile a sinistra in t.

Per $h > 0$, si ha



$P_0(t) = Pr(N(t) = 0) = Pr(N(t-h) = 0, N(t) - N(t-h) = 0)$, per l'uguaglianza tra i due eventi

$= Pr(N(t-h) = 0) Pr(N(t) - N(t-h) = 0)$ per (I)

$= P_0(t-h)(1 - \lambda h + o(h))$ per (*).

Dalla

$$P_0(t) = P_0(t-h)(1-\lambda h + o(h)), \quad (\blacklozenge)$$

si ha che

$$\lim_{h\to 0^+} P_0(t-h) = P_0(t).$$

Infatti, da (♦) segue

$$P_0(t-h) = P_0(t)\,\frac{1}{1-\lambda h + o(h)}$$

Si noti che, per $h \to 0^+$, $1-\lambda h + o(h) \to 1$, pertanto esiste un intorno destro di 0 in cui il denominatore del secondo membro è positivo, inoltre il secondo membro tende a $P_0(t)$.

Ancora da (♦), si ha

$$\frac{P_0(t)-P_0(t-h)}{h} = \underset{\substack{\downarrow \\ P_0(t)}}{P_0(t-h)}\;\underset{\substack{\downarrow \\ -\lambda}}{\frac{-\lambda h + o(h)}{h}} \qquad h \to 0^+$$

Esiste allora finito il limite del primo membro per $h \to 0^+$ ed è uguale a $-\lambda P_0(t)$: la funzione P_0 è derivabile a sinistra in t, con derivata sinistra $-\lambda P_0(t)$.

Poiché le derivate destra e sinistra sono uguali, allora P_0 è derivabile in t, con derivata $-\lambda P_0(t)$.

Per l'arbitrarietà di in t, segue

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \quad \text{per } t \geq 0.$$

Si ottiene un'equazione differenziale lineare omogenea in P_0.

(1.3) Risolviamo l'equazione che è equivalente alla

$$P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0, \quad \text{per } t \geq 0.$$

Consideriamo una primitiva di λ: λt, e moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $e^{\lambda t}$

↳ qualcosa che derivandolo ottengo λ

$$P_0'(t)e^{\lambda t} + \lambda P_0(t)e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[P_0(t)e^{\lambda t}\right] = 0.$$

La funzione $P_0(t)e^{\lambda t}$ è una primitiva della funzione nulla. Poiché la funzione è definita in un intervallo, tutte e sole le primitive sono le costanti: $P_0(t)e^{\lambda t} = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Segue

$$P_0(t) = ce^{-\lambda t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché, dalla (IV), $P_0(0) = Pr(N(0) = 0) = 1$, si ha che la soluzione cercata è tale che $c = 1$, quindi

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad \text{per } t \geq 0.$$

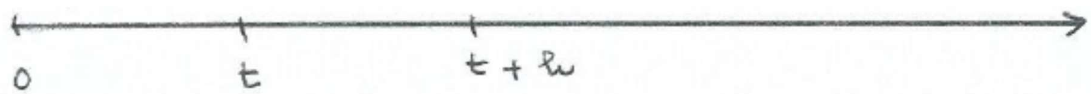
(2) Proviamo che, per ogni $n \geq 1$, $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $t \geq 0$.

(2.1) Fissiamo $n \geq 1$. Fissato $t \geq 0$, proviamo che P_n è derivabile a destra in t.

Consideriamo, per $h > 0$,

$$P_n(t + h) = Pr(N(t + h) = n).$$

Notiamo che



$$\begin{aligned}(N(t+h) = n) &= (N(t+h) = n) \wedge \Omega \\ &= (N(t+h) = n) \wedge [N(t+h) - N(t) = 0 \vee N(t+h) - N(t) = 1 \vee N(t+h) - N(t) \geq 2] \\ &= (N(t) = n \wedge N(t+h) - N(t) = 0) \ \vee (N(t) = n - 1 \wedge N(t+h) - N(t) = 1) \\ &\quad \vee (N(t+h) = n \wedge N(t+h) - N(t) \geq 2).\end{aligned}$$

↳ Non posso scrivere $N(t) = n-2$

Posto $A = (N(t+h) = n \wedge N(t+h) - N(t) \geq 2)$, riesce

$$P_n(t+h) = Pr(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0)$$
$$+ Pr(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) + Pr(A)$$

$$= P_n(t)(1 - \lambda h + o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + Pr(A),$$ per (I), (*), (II).

Segue che

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = P_n(t)\left(-\lambda + \frac{o(h)}{h}\right) + P_{n-1}(t)\left(\lambda + \frac{o(h)}{h}\right) + \frac{Pr(A)}{h}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \quad h \to 0^+ \\ P_n(t) & -\lambda & P_{n-1}(t) & \lambda & 0 \end{array}$$

Per l'ultimo addendo, si noti che

$$A = (N(t+h) = n \wedge N(t+h) - N(t) \geq 2) \quad \rightarrow \quad N(t+h) - N(t) \geq 2,$$

pertanto

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{0}{h} & \leq & \frac{Pr(A)}{h} & \leq & \frac{Pr(N(t+h)-N(t) \geq 2)}{h} & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & h \to 0^+ \\ 0 & & & & 0 \quad \text{per (III)} & & \\ & & \downarrow & & & & \text{per Teorema del confronto} \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Esiste allora finito il limite del rapporto incrementale destro di P_n in t: la funzione P_n è derivabile a destra in t, con derivata destra $-\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$.

(2.2) Fissiamo $n \geq 1$. Fissato $t > 0$, P_n è derivabile a sinistra in t, con derivata sinistra $-\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$.

La prova è analoga a quella del punto (1.2).

Poiché le derivate destra e sinistra sono uguali, allora P_n è derivabile in t, con derivata $-\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$.

Per l'arbitrarietà di t e n,segue

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad \text{per } t \geq 0,\ n \geq 1.$$

Si ottiene un sistema di equazioni detto **sistema di Kolmogorov**.

Il sistema è equivalente a

$$[P_n'(t) + \lambda P_n(t)]e^{\lambda t} = \lambda P_{n-1}(t)e^{\lambda t}, \quad \text{per } t \geq 0,\ n \geq 1,$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right] = \lambda P_{n-1}(t)e^{\lambda t}, \quad \text{per } t \geq 0,\ n \geq 1. \quad (***)$$

(2.3) Proviamo che la famiglia di funzioni $\left(P_n(t)\right)_{n\geq 1}$, soluzione del sistema (***), essendo $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, è tale che $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, $t \geq 0$. La prova è fatta per induzione su n.

- Base: E’ vero che $P_1(t) = e^{-\lambda t}\lambda t$. Infatti, dal sistema (***), per $n = 1$,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right] = \lambda P_0(t)e^{\lambda t} = \lambda.$$

  Segue

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c \Leftrightarrow P_1(t) = e^{-\lambda t}[\lambda t + c], \quad c \in \mathbb{R}.$$

  Dalla condizione $P_1(0) = Pr(N(0) = 1) = 0$, per (IV), segue che $c = 0$.

- Passo induttivo: sia $P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$. Sostituendo in (***), si ha

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right] = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} = \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

  Una primitiva della funzione a ultimo membro è $\frac{1}{(n-1)!}\frac{(\lambda t)^n}{n}$, pertanto

$$e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + c \Leftrightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} + c\right], \quad c \in \mathbb{R}.$$

  Essendo $n \geq 1$, dalla condizione $P_n(0) = Pr(N(0) = n) = 0$, per (IV), segue che $c = 0$ e dunque $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Allora la proposizione è vera, per ogni $n \geq 1$.

$\blacksquare$

Teorema (b). Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo di Poisson di intensità λ. Il processo è ad incrementi stazionari.

Sussiste il seguente teorema dal quale segue il Teorema (b).

Teorema (c). Sia $\boldsymbol{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ un processo di Poisson di intensità λ. Per ogni $\tau > 0$, posto

$$N^{(\tau)}(t) = N(\tau + t) - N(\tau),$$

$\boldsymbol{N}^{(\tau)} = \{N^{(\tau)}(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson di intensità λ.

Dim. Fissiamo $\tau > 0$. Si ha

- ogni incremento del processo $\boldsymbol{N}^{(\tau)}$ è un incremento del processo $\boldsymbol{N}$: per $s < t$,

$$N^{(\tau)}(t) - N^{(\tau)}(s) = [N(\tau + t) - N(\tau)] - [N(\tau + s) - N(\tau)] = N(\tau + t) - N(\tau + s);$$

- incrementi del processo $\boldsymbol{N}^{(\tau)}$ relativi ad intervalli disgiunti sono incrementi del processo $\boldsymbol{N}$ relativi ad intervalli disgiunti: siano $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$, si ha

$$N^{(\tau)}(t_1) - N^{(\tau)}(s_1) = N(\tau + t_1) - N(\tau + s_1),$$
$$N^{(\tau)}(t_2) - N^{(\tau)}(s_2) = N(\tau + t_2) - N(\tau + s_2),$$

con $\tau + s_1 < \tau + t_1 \leq \tau + s_2 < \tau + t_2$. $\rightarrow$ Quindi vale la def. del processo di Poisson

Segue allora

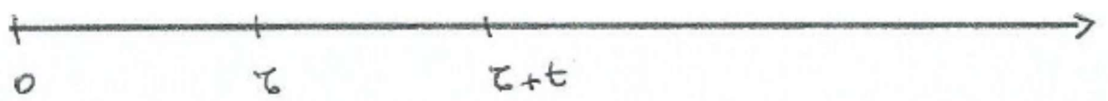
(I) $\boldsymbol{N}^{(\tau)}$ è ad incrementi indipendenti,

(II) $Pr\big(N^{(\tau)}(t+\Delta t) - N^{(\tau)}(t) = 1\big) = Pr(N(\tau+t+\Delta t) - N(\tau+t) = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$,

(III) $Pr\big(N^{(\tau)}(t+\Delta t) - N^{(\tau)}(t) \geq 2\big) = Pr(N(\tau+t+\Delta t) - N(\tau+t) \geq 2) = o(\Delta t)$,

(IV) $Pr\big(N^{(\tau)}(0) = 0\big) = 1$. ■

Dal Teorema (c), intuitivamente: in un processo di Poisson, da qualunque istante $\tau > 0$ si inizi a guardare, il processo che si osserva è <u>probabilisticamente</u> equivalente a quello che si ha a partire da $\tau = 0$.



Conseguenza. Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo di Poisson di intensità λ. Fissato $\tau > 0$, poiché $\boldsymbol{N}^{(\tau)} = \{N^{(\tau)}(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson di intensità λ, per il Teorema (a) applicato a tale processo, si ha, per ogni $t > 0$,

$$N^{(\tau)}(t) \sim P(\lambda t) \Leftrightarrow N(\tau + t) - N(\tau) \sim P(\lambda t):$$

la distribuzione dell'incremento $N(\tau + t) - N(\tau)$ del processo $\boldsymbol{N}$ dipende solo dall'ampiezza dell'intervallo.

Considerati $s < t$, posto $\tau = s$, si ha $t = \tau + (t - s)$ e

$$N(t) - N(s) = N(\tau + (t - s)) - N(\tau) \sim P(\lambda(t - s)).$$

Segue il Teorema (b).

Legge del processo

Dagli assiomi, segue la legge del processo. Fissato $n > 0$, fissati $t_1, \dots, t_n \geq 0$, con $t_1 < \cdots < t_n$, fissati $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, con $i_1 \leq \cdots \leq i_n$, si ha

$$
\begin{aligned}
&Pr(N(t_1) = i_1, \dots, N(t_n) = i_n) \\
&\quad = Pr(N(t_1) = i_1) Pr(N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1) \cdots Pr(N(t_n) - N(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1}) \\
&\quad\quad = e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{i_2 - i_1}}{(i_2 - i_1)!} \dots e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{i_n - i_{n-1}}}{(i_n - i_{n-1})!}.
\end{aligned}
$$

Si è detto che riesce

$$
\begin{aligned}
&N(t) \sim P(\lambda t) \Rightarrow E\big(N(t)\big) = var(N(t)) = \lambda t, \\
&N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t - s)).
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
N(t+1) - N(t) \sim P(\lambda),\ E\big(N(t+1) - N(t)\big) = \lambda:
$$

λ è il **numero atteso di arrivi in ogni intervallo di ampiezza unitaria.**

Processi dei tempi di arrivo

Quando si considera un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$ è naturale introdurre i seguenti due processi.

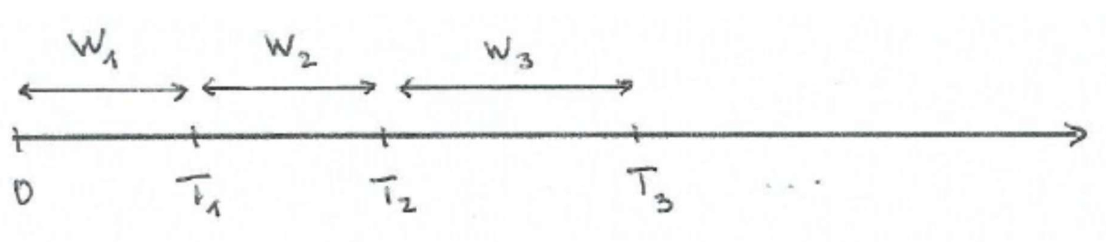
- Sia T_n l'istante in cui si verifica il *n*-esimo arrivo ovvero il "tempo di attesa per l'arrivo *n*-esimo".

Posto $T_0 = 0$,

$$\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$$

è detto **processo dei tempi di arrivo**.

- Sia W_n il "tempo di attesa tra gli arrivi (*n*-1)-esimo ed *n*-esimo",



$$\{W_1, W_2, \dots\}$$

è detto **processo dei tempi di interarrivo**.

Vi sono relazioni logiche tra i tre processi. Si ha

- $W_1 = T_1, \qquad W_n = T_n - T_{n-1},$
- $T_n = W_1 + \cdots + W_n,$
- $(N(t) = 0) = (t < T_1) = (t < W_1),$

  $(N(t) = n) = (T_n \leq t \wedge T_{n+1} > t) = (T_n \leq t < T_{n+1})$

  $= (W_1 + \cdots + W_n \leq t < W_1 + \cdots + W_n + W_{n+1})$, per $n \geq 1$,
- $N(t) = card\,\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$, dove $card\ \phi = 0$.

Richiami. $X \sim EXP(\rho)$ si ha: $f_X(x) = \rho e^{-\rho x}, x > 0, \quad F_X(x) = 1 - e^{-\rho x}, x \geq 0,$

$$E(X) = \frac{1}{\rho}, \quad var(X) = \frac{1}{\rho^2}, \quad m_X(t) = \frac{\rho}{\rho - t}, \ t < \rho. \qquad \blacksquare$$

Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson di intensità λ. Proviamo che $W_1 = T_1 \sim EXP(\lambda)$.

Fissato $t \geq 0$,consideriamo

$$F_{W_1}(t) = Pr(W_1 \leq t) = Pr(T_1 \leq t) = 1 - Pr(T_1 > t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uguaglianza tra eventi}}}{=} 1 - Pr(N(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Si prova il seguente teorema.

Teorema. Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson di intensità λ. Il processo dei tempi di interarrivo $\{W_1, W_2, \dots\}$ è un processo di numeri aleatori iid, con

$$W_n \sim EXP(\lambda).$$

Si ha dunque $E(W_n) = \frac{1}{\lambda}$: λ è il reciproco del tempo medio di attesa tra un arrivo ed il successivo.

Dal precedente teorema si può ottenere la distribuzione di $T_n = W_1 + \cdots + W_n$:

$$m_{T_n}(t) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} m_{W_i}(t)}_{\substack{\uparrow \\ W_1, \dots, W_n \\ \text{indipendenti}}} = \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n}_{\substack{\uparrow \\ W_i \sim EXP(\lambda)}}, \quad t < \lambda$$

$m_{W_i} = E[e^{t_i}]$

$=$

$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) = \frac{\lambda-t+t}{\lambda-t} = 1 + \frac{t}{\lambda-t}$

Poiché $\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t < \lambda$, è la funzione generatrice dei momenti della distribuzione $gamma(n, \lambda)$ ovvero della distribuzione $Erlangiana(n, \lambda)$, tale è la distribuzione di T_n.

I) Incrementi indipendenti
II) $Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$
III) $Pr(N(t+\Delta t)\cdot N(t)\geq 2)=0$
IV) $Pr(N(0)=0)=1$

Nota. Il processo di Poisson può essere definito con diversi sistemi assiomatici. Un'altra definizione, equivalente a (A): (I)÷(IV), è la seguente. slide 17

(B) Un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di Poisson di intensità** λ, $\lambda > 0$, se

(B1) il processo è ad incrementi indipendenti, = A1)

(B2) per ogni $s < t$, $N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t - s))$,

(B3) $Pr(N(0) = 0) = 1$. = A4)

Proviamo che (A) ⇔ (B)

(A) ⇒ (B): (I) ≡ (B1); (IV) ≡ (B3); abbiamo provato che (A) ⇒ (B2).

(B) ⇒ (A):

Proviamo che sussiste (II). Per (B2), fissati $t \geq 0$ e $\Delta t > 0$, $N(t + \Delta t) - N(t) \sim P(\lambda\Delta t)$, allora

$$\frac{Pr(N(t + \Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \frac{e^{-\lambda\Delta t}\lambda\Delta t}{\Delta t} = \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda}}{\lambda}\, \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^{-\lambda\Delta t}} \to \lambda \qquad \Delta t \to 0^+$$

Proviamo che sussiste (III). Si ha

$$
\begin{aligned}
Pr(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2) &= 1-Pr(N(t+\Delta t)-N(t)\leq 1)\\
&= 1-Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=0)-Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1)\\
&= 1-e^{-\lambda\Delta t}-e^{-\lambda\Delta t}\lambda\Delta t \text{ , per (B2).}
\end{aligned}
$$

$\lim_{z\to 0} \frac{e^{z}-1}{z}=1$

Allora

$$
\frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)}{\Delta t}=\frac{1-\ e^{-\lambda\Delta t}}{\Delta t}-\lambda\, e^{-\lambda\Delta t}=\underset{\lambda}{\underset{\downarrow}{\lambda}}\,\underset{1}{\underset{\downarrow}{\frac{e^{-\lambda\Delta t}-1}{-\lambda\Delta t}}}-\underset{\lambda}{\underset{\downarrow}{\lambda\, e^{-\lambda\Delta t}}}\rightarrow 0 \qquad \Delta t\rightarrow 0^{+}
$$

Problemi. Ci chiediamo se il processo di Poisson è adeguato per descrivere il processo di arrivo di sinistri per una polizza o per un portafoglio di polizze.

- Indipendenza degli incrementi. Spesso ci sono fattori che inducono a non ritenere accettabile l'ipotesi di indipendenza stocastica tra gli incrementi di un processo di arrivo dei sinistri: ad es. in presenza di sistemi di tariffazione basata sull'esperienza, si ritiene che informazioni sulla sinistrosità pregressa possano essere influenti sulla valutazione della sinistrosità futura; incidenza di sinistri in presenza di condizioni di contagio.

- Stazionarietà degli incrementi. Presenza di fenomeni di stagionalità, presenza di trend o cicli, sono fattori che non rendono accettabile l'ipotesi di stazionarietà.

- Distribuzione degli incrementi. La distribuzione di Poisson è tale che il valore atteso è uguale alla varianza, ma spesso i dati sui numeri di sinistri evidenziano sovradispersione rispetto alla distribuzione di Poisson.

PROCESSI DI POISSON NON OMOGENEI (NON STAZIONARI)

Un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di Poisson non omogeneo con funzione di intensità** $\lambda(\cdot)$, con $\lambda(\cdot) > 0$ e integrabile in ogni intervallo limitato (non costante), se

(A'): (I), (II'), (III), (IV),

dove (I), (III), (IV) sono le corrispondenti proprietà che definiscono un processo di Poisson e

(II') per ogni $t \geq 0$ e $\Delta t > 0$, $Pr(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

Si prova che, posto

λt

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau,$$

↳ Nell'omogeneo $\mu(t) = \int_0^t \lambda \, d\tau = [\lambda \tau]_0^t = \lambda t$

per ogni $s < t$, si ha

$$Pr(N(t) - N(s) = n) = e^{-(\mu(t)-\mu(s))} \frac{(\mu(t) - \mu(s))^n}{n!}, n = 0,1, \dots.$$

Dunque l'incremento $N(t) - N(s)$ ha distribuzione di Poisson di parametro $\mu(t) - \mu(s)$, la distribuzione dipende da s, t, non da $t - s$: il processo non è ad incrementi stazionari.

↳ Però è a incrementi indipendenti per (I)

Si noti che la funzione $\mu(t) = \int_0^t \lambda(\tau)d\tau$ è definita in $[0, +\infty[$ e soddisfa le seguenti proprietà:

- $\mu(0) = 0$,
- $\mu(t) > 0$, per $t > 0$,
- è crescente,
- è assolutamente continua.

E' detta **funzione del valore atteso**, poiché si ha $\mu(t) = E(N(t))$.

Come per il processo di Poisson, il processo di Poisson non omogeneo può essere definito con altri sistemi assiomatici. In particolare,

(B') Un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di Poisson non omogeneo con funzione del valore atteso $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$**, se

(B1') il processo è ad incrementi indipendenti,

(B2') $\mu(\cdot)$ è definita in $[0, +\infty[$ ed è tale che: $\mu(0) = 0$, $\mu(t) > 0$, per $t > 0$, crescente, assolutamente continua e per ogni $s < t$, $N(t) - N(s) \sim P(\mu(t) - \mu(s))$,

(B3') $Pr(N(0) = 0) = 1$.

Collegamenti tra processi di Poisson omogenei e non omogenei

Proposizione. Siano $\boldsymbol{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson (omogeneo) con intensità λ e $\mu(\cdot)$ una funzione definita in $[0, +\infty[$ tale che: $\mu(0) = 0$, $\mu(t) > 0$, per $t > 0$, crescente, assolutamente continua. Posto

$$\widetilde{N}(t) = N(\mu(t)),$$

il processo $\widetilde{\boldsymbol{N}} = \{\widetilde{N}(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson non omogeneo con funzione del valore atteso $\lambda\mu(\cdot)$.

Dim. Osserviamo che, essendo $\mu(t) \geq 0$, per $t \geq 0$, il numero aleatorio $\widetilde{N}(t) = N(\mu(t))$ è ben definito per ogni $t \geq 0$. Inoltre, la funzione $\lambda\mu(\cdot)$ soddisfa le proprietà di una funzione del valore atteso.

Osserviamo ancora che

- ogni incremento del processo $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ è un incremento del processo $\boldsymbol{N}$: per $s < t$,

$$\widetilde{N}(t) - \widetilde{N}(s) = N\big(\mu(t)\big) - N\big(\mu(s)\big),$$

  dove $\mu(s) < \mu(t)$;

- incrementi del processo $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ relativi ad intervalli disgiunti sono incrementi del processo $\boldsymbol{N}$ relativi ad intervalli disgiunti: siano $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$, si ha

$$\widetilde{N}(t_1) - \widetilde{N}(s_1) = N(\mu(t_1)) - N(\mu(s_1)),$$
$$\widetilde{N}(t_2) - \widetilde{N}(s_2) = N(\mu(t_2)) - N(\mu(s_2)),$$

  con $\mu(s_1) < \mu(t_1) \leq \mu(s_2) < \mu(t_2)$.

Allora, poiché il processo $\boldsymbol{N}$ soddisfa (B), $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ soddisfa (B') con funzione del valore atteso $\lambda\mu(\cdot)$. Infatti, si ha

(B1') $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ è ad incrementi indipendenti, per (B1),

(B2') per $s < t$,

$$\widetilde{N}(t) - \widetilde{N}(s) = N\big(\mu(t)\big) - N\big(\mu(s)\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per (B2)}}}{\sim} P(\lambda(\mu(t) - \mu(s))) \equiv P(\lambda\mu(t) - \lambda\mu(s)),$$

(B3') riesce $\widetilde{N}(0) = N(\mu(0)) = N(0)$. Allora $Pr\big(\widetilde{N}(0) = 0\big) = Pr(N(0) = 0) = 1$, per (B3). ■

Proposizione. Sia $\widetilde{\boldsymbol{N}} = \{\widetilde{N}(t), t \geq 0\}$ un processo di Poisson non omogeneo con funzione del valore atteso $\lambda\mu(\cdot)$, tale che $\lambda > 0$ e $\lim_{t\to+\infty} \mu(t) = +\infty$. Posto

$$N(t) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(t)),$$

il processo $\boldsymbol{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson con intensità λ.

Dim. Osserviamo che, per ogni $t \geq 0$, esiste $\mu^{-1}(t)$ e $\mu^{-1}(t) \geq 0$, dunque il numero aleatorio $N(t) = \widetilde{N}\left(\mu^{-1}(t)\right)$ è ben definito per ogni $t \geq 0$. Infatti, la funzione $\mu(\cdot): [0, +\infty[\to [0, +\infty[$

- è definita sull'intervallo $I = [0, +\infty[$ ed è continua, $\inf \mu(I) = \min \mu(I) = 0$, $\sup \mu(I) = +\infty$, allora per il Teorema di connessione, $\mu(I) = [0, +\infty[$: è suriettiva,
- è iniettiva perché crescente,

allora esiste

$$\mu^{-1}: [0, +\infty[\ \to \ [0, +\infty[.$$

Osserviamo ancora che

- ogni incremento del processo $\boldsymbol{N}$ è un incremento del processo $\widetilde{\boldsymbol{N}}$: per $s < t$,

  $$N(t) - N(s) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(t)) - \widetilde{N}(\mu^{-1}(s)),$$

  dove $\mu^{-1}(s) < \mu^{-1}(t)$, perché anche μ^{-1} è crescente,

- incrementi del processo $\boldsymbol{N}$ relativi ad intervalli disgiunti sono incrementi del processo $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ relativi ad intervalli disgiunti: siano $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$, si ha

$$N(t_1) - N(s_1) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(t_1)) - \widetilde{N}(\mu^{-1}(s_1)),$$
$$N(t_2) - N(s_2) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(t_2)) - \widetilde{N}(\mu^{-1}(s_2)),$$

  con $\mu^{-1}(s_1) < \mu^{-1}(t_1) \leq \mu^{-1}(s_2) < \mu^{-1}(t_2)$.

Allora, poiché il processo $\widetilde{\boldsymbol{N}}$ soddisfa (B'), il processo $\boldsymbol{N}$ soddisfa (B). Infatti, si ha

(B1) $\boldsymbol{N}$ è ad incrementi indipendenti, per (B1'),

(B2) per $s < t$,

$$N(t) - N(s) = \widetilde{N}\big(\underbrace{\mu^{-1}(t)}_{T}\big) - \widetilde{N}\big(\underbrace{\mu^{-1}(s)}_{S}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per (B2')}}}{\sim} P(\underbrace{\lambda\mu(T)}_{\lambda t} - \underbrace{\lambda\mu(S)}_{\lambda s}) \equiv P(\lambda(t-s)),$$

(B3) riesce $N(0) = \widetilde{N}(\mu^{-1}(0)) = \widetilde{N}(0)$. Allora $Pr(N(0) = 0) = Pr\big(\widetilde{N}(0) = 0\big) = 1$, per (B3'). ■

Le due proposizioni consentono, in molti casi di interesse applicativo, di passare da un processo di Poisson non omogeneo ad uno omogeneo, e viceversa, mediante una **trasformazione deterministica del tempo**.

Nei problemi assicurativi, usualmente, è più ragionevole assumere che i processi di arrivo dei sinistri siano di tipo non stazionario. Da quanto visto, a partire da un processo di Poisson non omogeneo è possibile effettuare una opportuna trasformazione del tempo (*tempo operativo*) rendendo il processo omogeneo.

PROCESSI MISTURE DI POISSONIANI

obiettivo Per rimuovere la condizione di indipendenza degli incrementi, conservando la stazionarietà, si può considerare la seguente generalizzazione dei processi di Poisson.

Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo di conta. Si fa dipendere la valutazione probabilistica da un parametro aleatorio $\Lambda > 0$, con le seguenti ipotesi:

(a) per ogni $x > 0$ determinazione possibile di Λ, si assume che $\{N(t)|\Lambda = x\,, t \geq 0\}$ sia un processo di Poisson di intensità x,

(b) si assume assegnata la distribuzione del parametro aleatorio Λ (la funzione di ripartizione F_Λ o la funzione di densità f_Λ o la funzione di probabilità nel caso discreto).

Dalle ipotesi, rimane determinata la legge del processo $\{N(t), t \geq 0\}$.

Es. E, H due v.a. che si distribuiscono come Pois e Λ è la v.a. che le misture

Siano E, H eventi logicamente dipendenti dal processo, ad es. $N(t) = n$, $N(t_1) = i_1 \wedge \ldots \wedge N(t_n) = i_n$. Consideriamo i seguenti casi

i. Λ finito con determinazioni $x_1, \ldots, x_n$. Per la proprietà di disintegrabilità della probabilità, si ha

$$Pr(E) = \sum_{i=1}^{n} Pr(\Lambda = x_i)\, Pr(E|\Lambda = x_i),$$

$$Pr(E|H) = \sum_{i=1}^{n} Pr(\Lambda = x_i|H)\, Pr(E|H \wedge \Lambda = x_i),$$

dove

$$Pr(\Lambda = x_i|H) = \frac{Pr(\Lambda = x_i)\, Pr(H|\Lambda = x_i)}{Pr(H)} = \frac{Pr(\Lambda = x_i)\, Pr(H|\Lambda = x_i)}{\sum_{j=1}^{n} Pr(\Lambda = x_j)\, Pr(H|\Lambda = x_j)}$$

↑
Teorema di Bayes

Allora, se $E, H, E|H$ sono eventi tali che siano date le probabilità $Pr(E|\Lambda = x_i)$, $Pr(H|\Lambda = x_i)$, $Pr(E|H \wedge \Lambda = x_i)$ nei processi di Poisson condizionati, rimangono determinate le $Pr(E)$, $Pr(E|H)$ e tali probabilità sono ottenute come combinazioni convesse o misture di probabilità in processi di Poisson.

ii. Λ con funzione di ripartizione F_Λ. Per la proprietà di disintegrabilità della probabilità, si ha

$$Pr(E) = \int_0^{+\infty} Pr(E|\Lambda = x)dF_\Lambda(x),$$

$$Pr(E|H) = \int_0^{+\infty} Pr(E|H \wedge \Lambda = x)dF_{\Lambda|H}(x).$$

Le valutazioni sono misture di probabilità in processi di Poisson. Se Λ finito, si ricade nel caso i.; se F_Λ è dotata di densità f_Λ, si ha

$$Pr(E) = \int_0^{+\infty} Pr(E|\Lambda = x)f_\Lambda(x)dx,$$

$$Pr(E|H) = \int_0^{+\infty} Pr(E|H \wedge \Lambda = x)f_{\Lambda|H}(x)dx,$$

dove

$$f_{\Lambda|H}(x) = \frac{f_\Lambda(x)\, Pr(H|\Lambda = x)}{Pr(H)} = \frac{f_\Lambda(x)\, Pr(H|\Lambda = x)}{\int_0^{+\infty} Pr(H|\Lambda = x)f_\Lambda(x)dx}.$$

↑
Teorema di Bayes

Un processo $\{N(t), t \geq 0\}$ per il quale la valutazione probabilistica sia assegnata mediante le (a), (b) è detto **processo mistura di poissoniani con misturante la legge di Λ.**

Osservazione. Come già detto in precedenza, se $Pr(\Lambda = x) = 0$, nella definizione classica della probabilità, $Pr(E|\Lambda = x)$ non è definita. Si può tuttavia interpretare la proprietà di disintegrabilità ricorrendo alla nozione di speranza matematica condizionata ad una σ-algebra o alla funzione di regressione.

Osservazione. I modelli misture di poissoniani sono spesso utilizzati per descrivere la sinistrosità in una collettività di rischi analoghi rispetto a caratteristiche osservabili, ma nella quale ci sia **eterogeneità** residua nella sinistrosità degli assicurati, **dovuta a fattori non osservabili**.

Per un fissato assicurato, si suppone che, se fosse noto il suo profilo di rischio, si assegnerebbe al processo di arrivo dei sinistri un processo di Poisson. Poiché l'eterogeneità è causata da fattori non osservabili, il profilo di rischio dell'assicurato non è noto ed è modellato tramite il parametro aleatorio Λ che è detto **parametro aleatorio di rischio** o **di eterogeneità**.

Non indipendenti

I processi misture di poissoniani sono **ad incrementi stazionari**. Infatti, fissati $s < t$, si ha

$$Pr(N(t) - N(s) = n) = \int_0^{+\infty} Pr(N(t) - N(s) = n | \Lambda = x) dF_\Lambda(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x(t-s)} \frac{[x(t-s)]^n}{n!} dF_\Lambda(x),$$

dove la quantità a ultimo membro dipende da $t - s$, non da t, s separatamente.

Esempio. Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo mistura di poissoniani con misturante $\Lambda \sim gamma(\alpha, \rho)$.

Si ha

fuori dall'integrale

$$
\begin{aligned}
&Pr(N(t) - N(s) = n) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x(t-s)} \frac{[x(t-s)]^n}{n!} f_\Lambda(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(t-s)} \frac{[x(t-s)]^n}{n!} \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\rho x}\, dx \\
&= \frac{\rho^\alpha (t-s)^n}{\Gamma(\alpha) n!} \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{\alpha+n-1} e^{-(\rho+(t-s))x}}_{\text{nucleo } gamma(\alpha+n, \rho+(t-s))} dx \\
&= \frac{\rho^\alpha (t-s)^n}{\Gamma(\alpha) n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\rho+(t-s))^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) n!} \left(\frac{\rho}{\rho+(t-s)}\right)^\alpha \left(\frac{t-s}{\rho+(t-s)}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Pertanto,

$$N(t) - N(s) \sim BN\left(\alpha, \frac{\rho}{\rho+(t-s)}\right).$$

In particolare,

$$N(t+1) - N(t) \sim BN\left(\alpha, \frac{\rho}{\rho+1}\right),$$

con $E\big(N(t+1) - N(t)\big) = \alpha \frac{\frac{1}{\rho+1}}{\frac{\rho}{\rho+1}} = \frac{\alpha}{\rho}$, $\quad var\big(N(t+1) - N(t)\big) = \alpha \frac{\frac{1}{\rho+1}}{\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^2} = \frac{\alpha}{\rho}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$. ■

I processi misture di poissoniani **non sono ad incrementi indipendenti**. Ad esempio, per $s < t$,

$$Pr(N(t) - N(s) = n|N(s) = m) = \int_0^{+\infty} Pr(N(t) - N(s) = n|N(s) = m \wedge \Lambda = x) dF_{\Lambda|N(s)=m}(x)$$

↓ indipendenza degli incrementi nei processi di Poisson

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{Pr(N(t) - N(s) = n|\ \Lambda = x)}_{\text{non dipende da } m}\, d\, \underbrace{F_{\Lambda|N(s)=m}(x)}_{\text{dipende da } m}.$$

Esempio. Sia Λ finito con determinazioni x_1, x_2, $Pr(\Lambda = x_i) = p_i$, $p_i > 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Si ha

$$Pr(N(t) - N(s) = n | N(s) = m)$$
$$= \sum_{i=1}^{2} Pr(\Lambda = x_i | N(s) = m)\, Pr(N(t) - N(s) = n | N(s) = m \wedge \Lambda = x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{2} Pr(\Lambda = x_i | N(s) = m)\, Pr(N(t) - N(s) = n |\, \Lambda = x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{2} Pr(\Lambda = x_i | N(s) = m) e^{-x_i(t-s)} \frac{[x_i(t-s)]^n}{n!},$$

dove

$$Pr(\Lambda = x_i | N(s) = m) = \frac{Pr(\Lambda = x_i)\, Pr(N(s) = m | \Lambda = x_i)}{Pr(N(s) = m)} = \frac{p_i e^{-x_i s} \frac{[x_i s]^m}{m!}}{\sum_{j=1}^{2} p_j e^{-x_j s} \frac{[x_j s]^m}{m!}}.$$

Calcolare con $p_i = 1/2$, $x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}06$, $s = 1$, $t = 2$, $n = 0$, per $m = 0$ e $m = 1$. ■

Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo mistura di poissoniani con misturante $\varLambda \sim F_{\varLambda}$, sia $E(\varLambda) = \lambda$. Si ha

- $E(N(t)|\varLambda = x) = xt$,
- $E\big(N(t)\big) = \int_0^{+\infty} E(N(t)|\varLambda = x) dF_{\varLambda}(x) = \int_0^{+\infty} xt dF_{\varLambda}(x) = t \int_0^{+\infty} x dF_{\varLambda}(x) = \lambda t$,
- $E\big(N(1)\big) = E(N(t+1) - N(t)) = \lambda$: λ è il numero atteso annuo di sinistri,
- $E\big(N(t) - N(s)\big) = \lambda(t - s), s < t$.

Posto

$$U = \frac{\varLambda}{E(\varLambda)} = \frac{\varLambda}{\lambda},$$

si ha

- $E(U) = 1$,
- $\varLambda = \lambda U$: il parametro aleatorio $\varLambda$ è prodotto del numero atteso annuo di sinistri λ e di un parametro aleatorio U, di valore atteso unitario, che descrive le fluttuazioni aleatorie intorno a λ,
- $(U = u) = (\varLambda = \lambda u)$, per ogni u.

Spesso i processi misture di poissoniani sono assegnati con misturante di speranza matematica unitaria.

Si assume che il parametro aleatorio, che indichiamo con U, sia tale che $E(U) = 1$ e

(a) per ogni $u > 0$ determinazione possibile di U, $\{N(t)|U = u\,, t \geq 0\}$ sia un processo di Poisson di intensità λu, $\lambda > 0$,

(b) assegnata la distribuzione del parametro aleatorio U (la funzione di ripartizione F_U o la funzione di densità f_U o la funzione di probabilità nel caso discreto).

Il parametro λ è il numero atteso annuo di sinistri:

$$E\big(N(t)\big) = \int_0^{+\infty} E(N(t)|U = u)dF_U(u) = \int_0^{+\infty} \lambda ut\; dF_U(u) = \lambda t E(U) = \lambda t.$$

Esempio. Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo mistura di poissoniani con misturante $U \sim gamma(\alpha, \alpha)$. Si ha

$$Pr(N(t+1) - N(t) = n) = \int_0^{+\infty} Pr(N(t+1) - N(t) = n | U = u) dF_U(u)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} f_U(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u} du$$

$$= \frac{\alpha^\alpha \lambda^n}{\Gamma(\alpha) n!} \int_0^{+\infty} \underbrace{u^{\alpha+n-1} e^{-(\alpha+\lambda)u}}_{\text{nucleo } gamma(\alpha+n, \alpha+\lambda)} du$$

$$= \frac{\alpha^\alpha \lambda^n}{\Gamma(\alpha) n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\alpha+\lambda)^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha) n!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^\alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^n.$$

Pertanto, $$N(t+1) - N(t) \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right),$$

con $$E\big(N(t+1) - N(t)\big) = \alpha \frac{\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}}{\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}} = \lambda, \qquad var\big(N(t+1) - N(t)\big) = \alpha \frac{\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^2} = \lambda + \alpha^{-1}\lambda^2.$$

Più in generale, $$N(t) - N(s) \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda(t-s)}\right).$$