TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI

DANNI

1

TS-30-08-2013.

RICHIAMO PROCESSI STOCASTICI

DEF.

Dicesi PROCESSO STOCASTICO o PROCESSO ALEATORIO una famiglia di numeri aleatori che indichiamo

$\{X(t),\ t \in T\}$ oppure $\{X_t,\ t \in T\}$

es: $N(t)$ es: N_t

$Y(t)$ Y_t

dove t è un indice o un "parametro", $t \in T$ insieme di indici

$$T \subset \mathbb{R}$$

- se T ha la cardinalità del continuo il processo si dice a PARAMETRO CONTINUO

  es: $T = [t_1, t_2]$

  $T = [0; +\infty[$

- se T invece è finito o numerabile il processo si dice a PARAMETRO DISCRETO

  es: $T = \{t_1, \dots, t_m\}$

  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$

fissato $t \in T$, $X(t)$ è n.a.

$\mathbb{P}$ partizione dove sono definiti tutti i n.a. della famiglia

$X(t;\cdot) : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$

$\omega \in \mathbb{P} \to X(t;\omega) \in \mathbb{R}$

determinazione di $X(t)$ corrispondente ad un evento elementare ω

$\{X(t;\omega),\ \omega \in \mathbb{P}\}$ insieme delle determinazioni possibili del n.a. $X(t)$

fissato $\omega \in \mathbb{P}$

$X(\cdot,\omega) : T \to \mathbb{R}$

$t \in T \to X(t;\omega) \in \mathbb{R}$

$\{X(t;\omega),\ t \in T\}$ insieme delle traiettorie/realizzazioni del processo che hanno portato ad ω

VALUTAZIONE PROBABILISTICA

- X n.a.

$F_x(x) = P_r(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$ FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$

$x_1 \leq x_2 \qquad (X \leq x) \Rightarrow (X \leq x_2)$ famiglia monotona

- $0 \leq F_x(x) \leq 1 \quad \forall x$
- F_x monotona non decrescente → prodotto logico
- $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = P_r(\underbrace{\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} X \leq x}_{\phi \text{ evento impossibile}}) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_x(x) = P_r(\underbrace{\bigvee_{x \in \mathbb{R}} X \leq x}_{\Omega \text{ evento certo}}) = 1$ → somma logica.
- F_x continua a dx

$\lim_{x \to x_0^+} F_x(x) = F_x(x_0) \qquad P_r(\bigwedge_{x > x_0} X \leq x) = P_r(X \leq x_0)$

- $(X \leq x) = \phi \quad \Rightarrow F_x(x) = 0$
- $(X \leq x) = \Omega \quad \Rightarrow F_x(x) = 1$
- $x \neq y, \ (X \leq x) = (X \leq y) \quad \Rightarrow F_x(x) = F_x(y)$

$$\Rightarrow P_r(a < X < b) = F_x(b) - F_x(a)$$

- (X, Y) coppia di n.a.

$F_{x,y}(x, y) = P_r(X \leq x, \ Y \leq y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE CONGIUNTA

- $0 \leq F_{x,y}(x, y) \leq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- fissato $y \in \mathbb{R}$

$F_x(\cdot, y)$ è funz. monotona non decrescente continua a dx

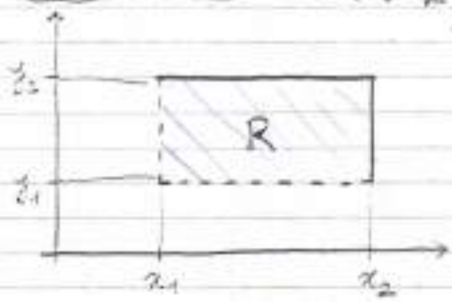
$\lim_{x \to -\infty} F_x(x, y) = 0$

- fissato $x \in \mathbb{R}$

$F_y(x, \cdot)$ è funz. monot. non decr. contin. dx, $\lim_{y \to -\infty} F_y(x, y) = 0$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F_{X,Y}(x,y) = Pr\Big(\underbrace{\bigvee_{x,y\in\mathbb{R}} (X\le x, Y\le y)}_{\to \text{ evento certo}}\Big) = 1$

- $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$



$Pr(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) =$

$= Pr(X\le x_2, Y\le y_2) - Pr(X\le x_1, Y\le y_2) - Pr(X\le x_2, Y\le y_1) + Pr(X\le x_1, Y\le y_1)$

$= F_{X,Y}(x_2,y_2) - F_{X,Y}(x_1,y_2) - F_{X,Y}(x_2,y_1) + F_{X,Y}(x_1,y_1)$

- $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = Pr\Big(\bigvee_{y\in\mathbb{R}} (X\le x, Y\le y)\Big) = Pr(X\le x) = F_X(x)$ FUNZIONE DI RIPARTIZIONE MARGINALE DI X

- $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{X,Y}(x,y) = Pr\Big(\bigvee_{x\in\mathbb{R}} (X\le x, Y\le y)\Big) = Pr(Y\le y) = F_Y(y)$ FUNZIONE DI RIPARTIZIONE MARGINALE DI Y

- $(X_1,\dots,X_n)$ n-upla di v.a.

$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = Pr(X_1\le x_1, X_2\le x_2,\dots, X_n\le x_n) \qquad x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$

- valgono le stesse considerazioni fatte per il caso bidimensionale

$Pr(\underbrace{X_1,\dots,X_n \in R}_{R \,\to\, \text{rettangolo di } \mathbb{R}^n}) \ge 0$

ASSEGNARE UNA VALUTAZIONE PROBABILISTICA AD UN PROCESSO STOCASTICO

LEGGE DEL PROCESSO STOCASTICO

$\{X(t),\ t\in T\}$

$\exists$ famiglia di funzioni LEGGE o LEGGE TEMPORALE DEL PROCESSO

insieme delle funzioni di ripartizione congiunte per ogni sottoinsieme finito di v.a. del processo

$\mathcal{F} = \{ F_{X(t_1),\dots,X(t_n)} \; ; \; t_1,\dots,t_n \in T \; ; \; n=1,2,\dots \}$

- $\forall n, \; \forall t_1,\dots,t_n$

  $F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}$ è <u>funz. di ripartiz. per</u> $(X(t_1),\dots,X(t_n))$

- $(\pi_1,\dots,\pi_n)$ permutazione di $(1,\dots,n)$

  $$F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,\dots,x_n) = F_{X(\pi_1),\dots,X(\pi_n)}(x_1,\dots,x_n)$$

- $$\lim_{x_n \to +\infty} F_{X(t_1),\dots,X(t_{n-1}),X(t_n)}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = F_{X(t_1),\dots,X(t_{n-1})}(x_1,\dots,x_{n-1})$$

se $X(t)$ $t\in T$ sono stocasticamente indipendenti
<u>presi</u> le $F_{X(t)}$ $t \in T$ marginali si possono costruire le congiunte

se $X(t)$ sono anche identicamente distribuite
il tutto è ancora più semplice

- X v.a. con determinazioni nel discreto $E \subset \mathbb{R}$

  $P_r(X=x) \quad x \in E$

  dalle prob. si costruisce la funz. di ripartiz.

- $\{X(t),\; t \in T\}$

  se le determinazioni $X(t) \in E = \{j_1, j_2, \dots\}$

  $P_r(X(t_1)=j_1,\dots,X(t_n)=j_n) \quad \forall n, \; \forall t_1 < \dots < t_n, \; \forall j_1,\dots,j_n \in E$

- sia $T \subset \mathbb{R}$, intervallo

  $\{X(t),\; t\in T\}$ <u>process a param. continuo</u>

DEF

"se per ogni scelta di un n° finito di incrementi del processo relativi ad intervalli disgiunti, tali incrementi sono v.a. stocasticamente indipendenti"

$s,t \in T, \quad s<t$

$X(t)-X(s)$ incremento del proc. in $]s,t]$ INDIPENDENZA STOCASTICA

Il processo è detto ad <u>INCREMENTI INDIPENDENTI</u> se

$\forall n>0, \; \forall s_1,t_1,\dots,s_n,t_n \in T$ t.c. $s_1<t_1 \le s_2 < t_2 \le \dots \le s_n < t_n$

$X(t_1)-X(s_1),\dots,X(t_n)-X(s_n)$ <u>sono v.a. stocasticamente indipendenti</u>

$s_1 \; t_1 \quad s_3 \; t_3$ gli incrementi relativi a gli intervalli s.i.

$X(t_1) - X(s_1), \dots, X(t_m) - X(s_m)$ stocast. indip.

H non altera la probabilità condizionata

$\forall i = 1, \dots, m \qquad X(t_i) - X(s_i) \overset{d}{=} X(t_i) - X(s_i) \mid H$

$\forall H$ t.c. $H = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ A_j \in R}} [X(t_j) - X(s_j) \in A_j]$

dove H è lo stato d'informazione cioè qualunque evento che ci può informare sugli altri incrementi del processo

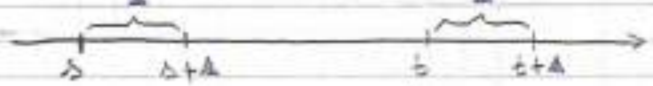
DEF

il processo è detto ad INCREMENTI STAZIONARI se

$\forall s, t \in T \quad s < t$

$X(t) - X(s)$ ha legge che dipende da $\underline{t-s}$ e non da $\underline{t, s \text{ separatamente}}$

la legge degli incrementi non dipende da dove arrivi ma dalla durata/ampiezza



$X(s+\Delta) - X(s) \overset{d}{=} X(t+\Delta) - X(t)$

$\boxed{\text{TS - 01-10-2013}}$ (4 ORE)

NOTAZIONE (molto)

$\{X(t),\ t \in T\}$ T continuo

$\{X_t,\ t \in T\}$ T discreto

DEF

un proc. stocastico $\{N(t),\ t \geq 0\}$ è detto PROCESSO DI CONTA se $N(t)$ conta il num. di manifestazioni di un fissato fenomeno (arrivi) nell'intervallo $[0, t]$

- $\forall t \geq 0 \quad N(t) \geq 0$
- $\forall t \geq 0 \quad N(t)$ ha determinazioni naturali $(0, 1, 2, \dots)$
- $\forall s, t \quad s < t, \quad N(s) \leq N(t)$
- $N(t) - N(s)$ = "num di arrivi nell'intervallo $]s, t]$

DEF: PROCESSO DI POISSON

un proc. di conta $\{N(t),\ t \geq 0\}$ è detto PROCESSO DI POISSON CON INTENSITÀ λ, $\lambda > 0$, se valgono le quattro seguenti proprietà:

Assiomi (I, II, III, IV)

I. il proc. è ad incrementi indipendenti

$\iff \forall n, \forall s_1 < t_1 \leq \dots \leq s_n < t_n$

$N(t_1) - N(s_1), \dots, N(t_n) - N(s_n)$ sono stocasticamente indipendenti

II. $\forall t \geq 0, \forall \Delta t > 0$

$$Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

"1 arrivo nell'intervallo"

$\hookrightarrow \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ infinitesimo di ordine superiore a Δt

III. $\forall t \geq 0, \forall \Delta t > 0$

$$Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

ASSIOMA DI ESCLUSIONE DEGLI EVENTI MULTIPLI

"2 o più arrivi nell'interv."

$\hookrightarrow$ bassa probabilità $\to \emptyset$

IV. $Pr(N(0) = 0) = 1$

$\hookrightarrow$ evento certo

OSS:

- II $\iff \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \lambda$

$\Rightarrow]$

$$\frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\lambda \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}}_{\downarrow\ \lambda} + \underbrace{\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}_{\downarrow\ 0} \quad \Delta t \to 0^+$$

$\to \lambda$

$\Leftarrow]$

poniamo $\alpha(\Delta t) = \frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} - \lambda$

$\lim_{\Delta t \to 0^+} \alpha(\Delta t) = 0$ funz. infinitesima per $\Delta t \to 0^+$

$$Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \alpha(\Delta t) \cdot \Delta t + \lambda \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\alpha(\Delta t)\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = 0$$

$$= \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

- III $\iff \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2)}{\Delta t} = 0$

TEOREMA

se $\{N(t),\ t\geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità λ $\Rightarrow$ $N(t) \sim Poi(\lambda t)$

cioè $Pr(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ $\quad n=0,1,\dots$

DIM:

fissato $n\geq 0$, posto $P_n(t) = Pr(N(t)=n)$ vista come funz. di t per $t\geq 0$

proviamo che $P_n(t) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$, $t\geq 0$

$P_0(t) = e^{-\lambda t}\cdot\dfrac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$

• $n=0$

$P_0(t) = Pr(N(t)=0)$ $\quad$ (da dim che $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ $t\geq 0$)

fissiamo $t\geq 0$

$\rightarrow$ verificare che P_0 è derivabile in t

fissiamo $h>0$

$P_0(t+h) = Pr(N(t+h)=0)$ $\quad$ $0 \quad t \quad t+h$

$[N(t+h)=0] = [N(t)=0 \wedge N(t+h)-N(t)=0]$ sent.

$\rightarrow P_0(t+h) = Pr(N(t)=0,\ N(t+h)-N(t)=0]$

$= Pr(N(t)=0)\, Pr(\underbrace{N(t+h)-N(t)=0}_{})$ (per l'indipendenza)

$= \neg[N(t+h)-N(t)\geq 1]$

$\neg\{[N(t+h)-N(t)=1] \vee [N(t+h)-N(t)\geq 2]$

$\Rightarrow Pr(N(t+h)-N(t)=0) = 1 - Pr(N(t+h)-N(t)=1) - Pr(N(t+h)-N(t)\geq 2)$

$= 1-(\lambda h + o(h)) - o(h)$

$= 1-\lambda h + o(h)$

$= P_0(t)(1-\lambda h + o(h))$ $\quad | \; P_0(t) - \lambda h P_0(t) + o(h) P_0(t)$

per l'assioma II° e III°

$\dfrac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = P_0(t)\left(-\dfrac{\lambda h}{h} + \dfrac{o(h)}{h}\right)$ $\quad \Big| \; \dfrac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = P_0(t)\left(\dfrac{-\lambda h}{h} + \dfrac{o(h)}{h}\right)$

$h\rightarrow 0^+$

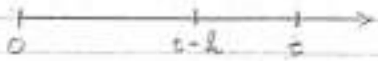
$P_0(t) \quad -\lambda \quad 0$

$-\lambda P_0(t)$ $\rightarrow$ $P_0(t)$ è una probabilità quindi $0\leq P \leq 1$

$\Rightarrow \exists$ finito $\lim_{h\rightarrow 0^+}\dfrac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t)$

$\Rightarrow P_0$ ammette derivata dx finita in t

$h>0$



$$P_0(t) = Pr(N(t)=0)$$
$$= Pr(N(t-h)=0,\ N(t)-N(t-h)=0)$$
$$\overset{!}{=} Pr(N(t-h)=0)\, Pr(N(t)-N(t-h)=0)$$
$$\overset{!}{=} P_0(t-h)\ (1-\lambda h+o(h))$$

Th. perm. segno
∃ intorno di zero in cui il segno è costante

$$\lim_{h\to0^+} (\underbrace{1}_{\downarrow\,1}-\underbrace{\lambda h}_{\downarrow\,0}+\underbrace{o(h)}_{\downarrow\,0}) = 1$$

$$\lim_{h\to0^+} P_0(t-h) = \lim_{h\to0^+} \underbrace{P_0(t)}_{\downarrow\,P_0(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\lambda h+o(h)}}_{\downarrow\,1} = P_0(t)$$

in un opportuno intorno di 0

la funz. è ct. a sx

$$\frac{P_0(t)-P_0(t-h)}{h} = \underbrace{P_0(t-h)}_{\downarrow\,P_0(t)}\underbrace{\left[-\frac{\lambda h}{h}+\frac{o(h)}{h}\right]}_{\downarrow\,-\lambda} \to -\lambda P_0(t) \qquad h\to0^+$$

$$\Rightarrow \exists \text{ finito } \lim_{h\to0^+}\frac{P_0(t)-P_0(t-h)}{h} = -\lambda P_0(t)$$

P_0 ammette derivata sx finita in t

$\boxed{\text{limiti dx e sx sono finiti e uguali} \Rightarrow P_0 \text{ è derivabile in } t}$

$\boxed{\text{La derivabilità implica la continuità}}$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \quad \forall t$$

$\Rightarrow P_0$ è continua

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\lambda \iff \frac{d}{dt}\left[\ln P_0(t)\right] = -\lambda$$

$\boxed{\text{è una primitiva di } -\lambda}$

$$\Rightarrow \ln P_0(t) = -\lambda t + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

ln è inversa di exp.

OCCHIO!
SI PUÒ DIVIDERE?
SÌ → VEDI (*) $P_0(t)>0$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}\,\underset{k}{e^{c}} = k\,e^{-\lambda t} \qquad t\geq0$$

$P_0(0) = P_r(N(0)=0) = 1$.

$$\Rightarrow 1 = P_0(0) = k\, e^{-\lambda 0}$$
$$= k \qquad \Rightarrow k=1$$
$$\boxed{\Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0}$$

(*) la funzione prende lo stesso segno del limite

$$\left.\begin{array}{l} P_0(0)=1 \\ P_0(\cdot) \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, I_0^+ : P_0(t) > 0 \quad (\text{Th. perm. segno funz. ct.})$$

quindi t.c. $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$A = \{ t \geq 0 \mid P_0(t) > 0 \} = \{ t \geq 0 \mid P_0(t) = e^{-\lambda t} \}$$

- $A \neq \emptyset$ (contiene I_0^+)
- A è intervallo

$$\left.\begin{array}{l} t_1, t_2 \in A \\ \alpha \in [0,1] \end{array}\right. \Rightarrow \alpha t_1 + (1-\alpha) t_2 \in A$$

$t_1 < t_2$

$N(t_2)=0 \Rightarrow N(t_1)=0$ $P_0(\cdot)$ è monotona non decresc. (vedi anche derivata positiva)

- $\boxed{A \text{ superiormente illimitato}}$: $A = [0; +\infty[$

per assurdo A superiormente limitato

$$\Rightarrow \exists\, T = \boxed{\sup A} \quad T \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \to T^-} P_0(t) = e^{-\lambda T}$$

$$\lim_{t \to T^+} P_0(t) = 0$$

$\boxed{\text{ASSURDO! } (P_0 \text{ è continua})}$

quindi non può essere superiormente limitato

- $n \geq 0$

(vogliamo dim che $P_n(t) = P_r(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad t \geq 0$

$n=0 \rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$

$n \geq 1 \rightarrow P_n(t) = P_r(N(t)=n) = \,? \qquad t \geq 0$

fissiamo $t \geq 0$, $h > 0$

$P_n(t+h) = P_r(N(t+h)=n)$

$$[N(t+h)=n] = [N(t+h)=n \wedge \Omega]$$

$$\Omega \to [N(t+h)-N(t)=0] \vee [N(t+h)-N(t)=1] \vee [N(t+h)-N(t)\geq 2]$$

eventi certo

$$= [N(t+h)=n \wedge N(t+h)-N(t)=0] \vee [N(t+h)=n \wedge N(t+h)-N(t)=1] \vee [N(t+h)=n \wedge N(t+h)-N(t)\geq 2]$$

$$= [N(t)=n \wedge N(t+h)-N(t)=0] \vee [N(t)=n-1 \wedge N(t+h)-N(t)=1] \vee E$$

$$P_n(t+h) = \ldots = Pr(N(t)=n,\ N(t+h)-N(t)=0) + Pr(N(t)=n-1,\ N(t+h)-N(t)=1) + Pr(E)$$

assioma I

$$= Pr(N(t)=n)\,Pr(N(t+h)-N(t)=0) + Pr(N(t)=n-1)\,Pr(N(t+h)-N(t)=1) + Pr(E)$$

$$= P_n(t)[1-\lambda h + o(h)] + P_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + Pr(E)$$

$\boxed{TS-07-10-2013}$ (6 ORE) 2ª sett

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = \underbrace{P_n(t)\left[-\frac{\lambda \cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{o(h)}{h}\right]}_{-\lambda P_n(t)} + \underbrace{P_{n-1}(t)\left[\frac{\lambda \cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{o(h)}{h}\right]}_{\lambda P_{n-1}(t)} + \frac{Pr(E)}{h}$$

$$P_n(t) \quad -\lambda \quad 0 \qquad P_{n-1}(t) \quad \lambda \quad 0 \qquad 0 \qquad h\to 0^+$$

$$E \Rightarrow [N(t+h)-N(t)\geq 2]$$

$$Pr(E) \leq Pr(N(t+h)-N(t)\geq 2) \overset{\text{III}}{=} o(h)$$

$\boxed{\text{th. confronto limiti}}$

$$0 \leq \frac{Pr(E)}{h} \leq \frac{o(h)}{h} \qquad 0 \quad 0 \qquad h\to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \frac{Pr(E)}{h} \to 0 \quad (h\to 0^+)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ finito } \lim_{h\to 0^+} \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$\Rightarrow P_n(\cdot)$ ammette derivata dx finita in t

analogamente si prova che $P_n(\cdot)$ ammette derivata sx finita in t di valore $-\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$

$\Rightarrow P_n(\cdot)$ è derivabile in t

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad \forall t\geq 0,\ \forall n\geq 1 \qquad (A)$$

$\boxed{\text{SISTEMA DI KOLMOGOROV}}$

$(P_n(\cdot))_{n\geq 1}$ definite su $[0;+\infty[$ t.c. $P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad \forall t \geq 0$

moltiplico x

1) $P_n'(t) + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) \quad / \cdot e^{\lambda t}$ ambo i membri

2) $e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = e^{\lambda t}[\lambda P_{n-1}(t)]$

3) $\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$ (B)

equivalente
(A) $\Leftrightarrow$ (B)

proviamo che la famiglia di funz. $(P_n(\cdot))_{n\geq 1}$ definite in $[0;+\infty[$ t.c. valga (B) essendo $P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$, è tale che

$$\boxed{P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad t \geq 0}$$

Dimostrazione per
INDUZIONE

base: $n=1$

$$\boxed{P_1(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t) \quad \text{da dim}}$$

con $n=1$ abbiamo dimostrato che
$$P_1(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda t}{1!}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_1(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_0(t)$$
$$= \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda$$

$$e^{\lambda t}P_1(t) = \lambda t + c \quad c \in \mathbb{R}$$
$$P_1(t) = e^{-\lambda t}[\lambda t + c]$$

funzione

$$P_1(0) = P_r(N(0) = 1) = 0 \quad \text{assioma } \underline{IV}$$
$$= e^{-\lambda \cdot 0}[0 t + c] = c$$
$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow P_1(t) = e^{-\lambda t}\lambda t$$ $\boxed{\text{la base è provata}}$

ipotesi induttiva: $P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$ supponiamo vera

$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t}P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n}$ è primitiva di $\frac{1}{(n-1)!}\lambda(\lambda t)^{n-1}$

$$\Rightarrow e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{1}{n!}(\lambda t)^n + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$P_n(t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{(\lambda t)^n}{n!} + c\right]$

$$P_n(0) = \Pr(N(0)=n) = 0 \quad \overset{\text{assioma}}{IV}$$
$$= c$$
$$\Rightarrow c = 0$$

$\Rightarrow P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ $\boxed{\text{passo induttivo provato}}$

abbiamo dimostrato che:

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di Poisson con intensità λ

$$\Rightarrow P_n(t) = \Pr(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

TEOREMA

$\{N(t), t\geq 0\}$ proc. di Poisson è un proc. ad incrementi stazionari
cioè presi s, t $s<t$ il v.a. $N(t)-N(s)$ ha legge che dipende da $\underline{t-s}$ e non da t, s separati.

TEOREMA

Sia (1) $\{N(t), t\geq 0\}$ proc. di Poisson di intensità λ
scelto $\tau > 0$, posto $N^{(\tau)}(t) = N(\tau+t) - N(\tau)$
il proc. (2) $\{N^{(\tau)}(t), t \geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità λ
cioè il nuovo processo risulta probabilisticamente equivalente a quello originario

DIM:
proviamo che (2) soddisfa gli assiomi I, II, III, IV

OSS:

$s<t$ $\quad N^{(\tau)}(t) - N^{(\tau)}(s) =$ incremento di (2) relativo a $]s,t]$

$$= N(\tau+t) - N(\tau) - [N(\tau+s) - N(\tau)]$$
$$= N(\tau+t) - N(\tau+s) \quad \text{incremento di (1) relativo a }]\tau+s, \tau+t]$$

- $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$

$\tau+s_1 < \tau+t_1 \leq \tau+s_2 < \tau+t_2 \leq \dots \leq \tau+s_n < \tau+t_n$

gli incrementi relativi ad interv. disgiunti di (2) sono anche incrementi relativi ad interv. disgiunti di (1)

$\Rightarrow$ (2) è proc. ad incrementi indipendenti

$\Rightarrow$ per (2) vale assioma I

• $Pr(N^{(\tau)}(t+\Delta t) - N^{(\tau)}(t) = 1) = Pr(N(\tau + t + \Delta t) - N(\tau + t) = 1)$

$\qquad = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$ per ass. II di (1)

$\Rightarrow$ (2) verifica ass. II

• $Pr(N^{(\tau)}(t+\Delta t) - N^{(\tau)}(t) \geq 2) = Pr(N(\tau + t + \Delta t) - N(\tau + t) \geq 2)$

$\qquad = o(\Delta t)$ per ass. III di (1)

$\Rightarrow$ (2) verifica ass. III

• $Pr(N^{(\tau)}(0) = 0) = Pr(\Omega) = 1$

$N^{(\tau)}(0) = 0$ certamente

$\Rightarrow$ (2) verifica ass. IV

$\Rightarrow$ (2) è proc. di Poisson con intensità λ

$\Rightarrow$ $N^{(\tau)}(t) \sim Poi(\lambda t)$ per il teorema visto in precedenza

$N(\tau + t) - N(\tau) \sim Poi(\lambda t)$

ha distrib. che dipende da t e non da τ

$\Rightarrow s < t \quad N(t) - N(s) \sim Poi(\lambda(t-s))$

---

esempio:

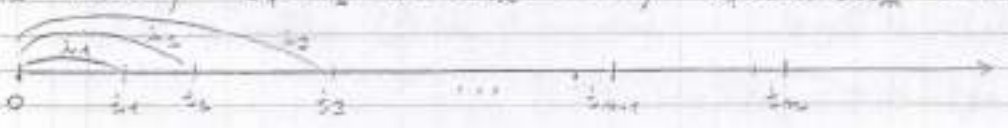
$N(t+1) - N(t) \sim Poi(\lambda)$

si può vedere λ come num. di arrivi in un intervallo di ampiezza unitaria

$E[N(t+1) - N(t)] = \lambda$

---

fissato $m > 0$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m \in \mathbb{R}$, $i_1 \leq \dots \leq i_m \in \mathbb{N}$



$Pr(N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_m) = i_m) =$

$= Pr(N(t_1) = i_1, N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = i_m - i_{m-1}) =$

$= Pr(N(t_1) = i_1)\, Pr(N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1) \dots Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = i_m - i_{m-1})$

$= e^{-\lambda t_1} \dfrac{(\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!} \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \dfrac{(\lambda(t_2 - t_1))^{(i_2 - i_1)}}{(i_2 - i_1)!} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda(t_m - t_{m-1})} \dfrac{(\lambda(t_m - t_{m-1}))^{(i_m - i_{m-1})}}{(i_m - i_{m-1})!}$

TEOREMA

Il proc. di Poisson è soddisfatta la proprietà markoviana, cioè:

fissati $m \in \mathbb{N}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m \in \mathbb{R}$, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{m-1} \in \mathbb{N}$

$$Pr\left(N(t_m) = j \mid N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_{m-1}) = i_{m-1} \right) =$$

$$= Pr\left(N(t_m) = j \mid N(t_{m-1}) = i_{m-1} \right)$$ conta solo l'info più recente

$\hookrightarrow$ dipende da i_{m-1}, j, $t_m - t_{m-1}$

DIM:

$$Pr\left(\underset{]t_{m-1}, t_m]}{N(t_m) - N(t_{m-1})} = j - i_{m-1} \mid \underbrace{N(t_1) = i_1, \dots, N(t_{m-1}) = i_{m-1}}_{\underset{[0,t_1]}{N(t_1) = i_1},\ \underset{]t_1,t_2]}{N(t_2 - t_1) = i_2 - i_1},\ \dots,\ \underset{]t_{m-2}, t_{m-1}]}{N(t_{m-1} - t_{m-2}) = i_{m-1} - i_{m-2}}} \right) =$$

$$= Pr\left(N(t_m) - N(t_{m-1}) = j - i_{m-1} \right)$$ per assioma I

$$Pr\left(N(t_m) = j \mid N(t_{m-1}) = i_{m-1} \right) = Pr\left(\underset{]t_{m-1}, t_m]}{N(t_m) - N(t_{m-1})} = j - i_{m-1} \mid \underset{[0, t_{m-1}]}{N(t_{m-1}) = i_{m-1}} \right)$$

$$= Pr\left(N(t_m) - N(t_{m-1}) = j - i_{m-1} \right)$$ per assioma I

$\Rightarrow$ segue la tesi

$\boxed{\text{TS - 03-10-2013}}$ (3 ore)

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di conta

T_n = "tempo di attesa per l'arrivo n-esimo"

$T_0 = 0$

$\{T_n, n \geq 0\}$ processo dei tempi di attesa

W_n = "tempo di attesa tra gli arrivi (n-1)-esimo e n-esimo"

$\{W_n, n \geq 1\}$ processo dei tempi di interarrivo

OSS:

$W_1 = T_1$

$T_n = W_1 + \dots + T_n \quad n \geq 1$

$N(t) = \text{card}\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\} = \text{card}\{n \geq 1 \mid W_1 + \dots + W_n \leq t\}$

$= \sum_{n \geq 1} |T_n \leq t|$ indicatori eventi

$N(t) = n \iff T_n \leq t \wedge T_{n+1} > t$

$\iff T_n \leq t < T_{n+1}$

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità 2

$F_{W_1}(t) = P_r(W_1 \leq t) \qquad t \geq 0$

$= P_r(T_1 \leq t)$

$= 1 - P_r(T_1 > t)$

$[T_1 > t] = [N(t) = 0]$

$P_r(N(t) = 0) = e^{-2t}$

$= 1 - e^{-2t}$

//

RICHIAMO

$X \sim \exp(\rho) \qquad \rho > 0$

$f_X(x) = \rho e^{-\rho x} \qquad x > 0$

$F_X(x) = 1 - e^{-\rho x} \qquad x \geq 0$

$E(X) = 1/\rho$

$Var(X) = 1/\rho^2$

$m_X(t) = \frac{\rho}{\rho - t} \qquad t < \rho$

//

$\Rightarrow W_1 = T_1 \sim \exp(2)$

TEOREMA

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di Poisson con int. 2

$\Rightarrow \{W_1, W_2, \dots\}$ i.i.d., $W_n \sim \exp(2) \quad n \geq 1$

$T_n = W_1 + \dots + W_n$

$$m_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{W_i}(t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \quad t<\lambda \qquad \text{è f.g.m. di una Gamma}(n,\lambda)$$

$$\Rightarrow T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

$$f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n}{\underbrace{\Gamma(n)}_{\to (n-1)!}} t^{n-1} e^{-\lambda t} \qquad t>0$$

è una distrib. Erlangiana (n, λ)
$(n \in \mathbb{N})$

$\{N(t),\ t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ

abbiamo visto che vale il sistema assiomatico

Ⓐ I, II, III, IV

ma non è l'unico modo per definire un proc. di Poisson con int. λ

esiste anche:

Ⓑ 1. = I

2. dati $s<t$, $N(t) - N(s) \sim \text{Poi}(\lambda(t-s))$

3. = IV

Ⓐ $\Leftrightarrow$ Ⓑ

DIM:

Ⓐ $\Rightarrow$ Ⓑ è banale

Ⓑ $\overset{?}{\Rightarrow}$ Ⓐ

II $\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) \quad \Delta t > 0$

$$\text{II} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \lambda$$

$N(t+\Delta t) - N(t) \sim \text{Poi}(\lambda \Delta t)$

$$\frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \underbrace{e^{-\lambda \Delta t} \cdot \frac{\lambda \Delta t}{\Delta t}}_{\xrightarrow{\Delta t \to 0^+} \lambda}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1)}{\Delta t} = \lambda \iff \text{II}$$

III $\quad Pr(N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2) = 1 - Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=0) - Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1)$

$$= 1 - e^{-\lambda \Delta t} - e^{-\lambda \Delta t}\lambda \Delta t$$

$$\frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)}{\Delta t} = \underbrace{\boxed{\frac{1-e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t}}}_{\lambda} - \underbrace{\boxed{\frac{e^{-\lambda \Delta t}\lambda \Delta t}{\Delta t}}}_{\lambda} \quad \Delta t \to 0^+$$

$$\lambda - \lambda \to 0$$

// $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\frac{1-e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} = \lambda \cdot \underbrace{\boxed{\frac{e^{-\lambda \Delta t}-1}{-\lambda \Delta t}}}_{\to 1 \ (\Delta t \to 0)}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)}{\Delta t} = 0 \iff \text{III}$$

e vale anche:

(C) sia $\{W_1, W_2, \dots\}$ un processo di v.a. i.i.d con $W_n \sim \exp(\lambda)$

posto $T_n = W_1 + \dots + W_n$ e $N(t) = \text{card}\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\}$

$\Rightarrow \{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson con intensità λ

(A) $\iff$ (B) $\iff$ (C)

DEF

sia $\{W_1, W_2, \dots\}$ proc. di v.a. i.i.d

posto $T_n = W_1 + \dots + W_n$ e $N(t) = \text{card}\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\}$

$\{N(t), t \geq 0\}$ è detto <u>PROCESSO DI RINNOVAMENTO</u> o <u>DEI RINNOVI</u>

$\{N(t), t \geq 0\}$ può essere visto come un processo di arrivo dei sinistri per:

- una polizza assicurativa
- un portafoglio di contratti assicurativi

tuttavia se consideriamo un processo di Poisson possono sorgere alcuni problemi dovuti alle ipotesi restrittive di questo processo:

- <u>indipendenza degli incrementi</u>: può non essere ragionevole (es: malattie infettive → contagi; incendi boschivi → stagione secca, ...)
- <u>stazionarietà</u>: altra ipotesi piuttosto forte (es: episodi di stagionalità nel breve periodo, freq. sinistri decrescente nel corso degli anni, ...)
- incrementi hanno distrib. di Poisson: la media e la varianza non sempre nella pratica coincidono

C'è un problema di sovra/sotto dispersione che viene catturato dalla binomiale negativa.

Risulta quindi necessario introdurre modelli analoghi a quello di Poisson in cui vengano <u>allentati</u> i vincoli di volta in volta

PROCESSO DI POISSON NON OMOGENEO

$\{N(t),\ t \geq 0\}$ proc. di conta

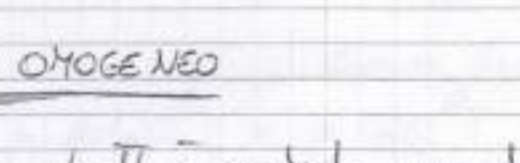
valgono I, III, IV e

la II è cambiata: era $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$

II': $\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$

$\lambda(\cdot)$ positiva e integrabile in ogni interv. lim.

il fattore di proporzionalità dipende da t



si prova che:

$s < t \quad N(t) - N(s) \sim Poi(\mu(t) - \mu(s))$

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$$

⇒ la legge di $N(t) - N(s)$ dipende da t, s

$$\mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \lambda(u)\, du$$

- $\lambda(\cdot)$ è detta <u>FUNZIONE DI INTENSITÀ DEL PROCESSO</u>
- $\mu(\cdot)$ " " <u>FUNZIONE DEL VALORE ATTESO DEL PROCESSO</u>

come dimostrazione:

fissati n, s, t $s<t$

$$P_n(s;t) = Pr(N(t)-N(s)=n)$$

$P_n(\cdot\,;t)$ viene studiata come funz. di s

OSS:

- se $\lambda(t)=\lambda$ $\forall t$ $\Rightarrow$ proc. di Poisson omogeneo
  $$\mu(t)=\lambda t$$
- se $\lambda(\cdot)$ non costante $\Rightarrow$ proc. di Poisson non omogeneo
- $\mu(0)=0$
- $t>0 \Rightarrow \mu(t)>0$
- $\mu(\cdot)$ strettamente crescente
  $$t_1<t_2 \qquad \int_0^{t_2}\lambda(u)\,du = \int_0^{t_1}\lambda(u)\,du + \int_{t_1}^{t_2}\lambda(u)\,du$$
- $\mu(\cdot)$ è continua (funz. integrale di una funz. integrabile)
- $\mu(\cdot)$ è derivabile se $\lambda(\cdot)$ è continua
  $$\mu'(t)=\lambda(t)$$

(A')

I, II', III, IV

(B')

1. = I

3. = IV

2' $\exists\ \mu(\cdot)$ funz. definita su $[0,+\infty[$ con $\mu(0)=0$, $\mu(t)>0$ $\forall t>0$,
$\mu(\cdot)$ strett. crescente, continua, assolutamente continua $\mu(t)=\int_0^t \lambda(u)\,du$
t.c. $N(t)-N(s) \sim Poi(\mu(t)-\mu(s))$ $s<t$

COLLEGAMENTI TRA PROC. DI POISSON OMOGENEI E NON OMOGENEI

sia $\{N(t),\ t\geq 0\}$ pr. di Poisson con intensità $\lambda=1$

sia $\mu(\cdot)$ funz. con caratteristiche della funz. valore atteso

poniamo $\tilde{N}(t) = N(\mu(t))$

$\Rightarrow \{\tilde{N}(t),\ t\geq 0\}$ è pr. di Poisson non omogeneo con funz. valore atteso $\mu(\cdot)$

OSS:

$s<t \qquad \tilde{N}(t)-\tilde{N}(s) = N(\mu(t)) - N(\mu(s))$

ogni incremento del processo $\{\tilde{N}(t), t\geq 0\}$ è anche incremento del proc. $\{N(t);\ t\geq 0\}$ cambia solo l'intervallo

Se consideriamo incrementi del proc. $\tilde{N}(t)$ relativi ad interv. disgiunti otteniamo incrementi relativi ad interv. disgiunti del proc. $N(t)$ (per monotonia)

$\Rightarrow$ il processo $\{\tilde{N}(t),\ t\geq 0\}$ è ad incrementi indipendenti

(se fisso un num. arbitrario finito di incrementi del proc. $\tilde{N}(t)$ su interv. disgiunti, posso vedere questi incrementi come incrementi del proc. $N(t)$ su interv. disgiunti che so essere indipendenti per assioma I.

$\Rightarrow$ vale 1.

$s<t$

$\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = N(\mu(t)) - N(\mu(s)) \sim Poi(\mu(t)-\mu(s)) \quad (\lambda=1)$

$\Rightarrow$ vale $2'$.

$\tilde{N}(0) = N(\mu(0)) = N(0)$

$Pr(\tilde{N}(0)=0) = Pr(N(0)=0) = 1$

$\Rightarrow$ vale 3.

TS-11-10-2013 (10 ore)

sia $\{\tilde{N}(t),\ t\geq 0\}$ proc. di Poisson non omogeneo con funz. valore atteso $\mu(\cdot)$

cioè μ definita su $[0;+\infty[$

$\mu(0)=0,\quad \mu(t)>0 \quad \forall t>0$

$\mu(\cdot)$ strett. crescente, ass. continua

$\lim_{t\to+\infty}\mu(t)=+\infty$

poniamo $N(t)=\tilde{N}(\mu^{-1}(t))$

$\Rightarrow \{N(t),\ t\geq 0\}$ è processo di Poisson con intensità $\lambda=1$

$\mu(\cdot): [0;+\infty[\ = I \longrightarrow \mu(I)$ ins. immagine

$\mu(\cdot)$ strett crescente $\Rightarrow \exists\ \mu^{-1}(\cdot): \mu(I)\longrightarrow [0;+\infty[$

↳ abbiamo garantito che $\mu(I)=[0;+\infty[$

$\left.\begin{array}{l}\mu(\cdot) \text{ è def su un interv.}\\ \mu(\cdot) \text{ è continua}\end{array}\right\}\Rightarrow \mu$ assume tutti i valori tra $\inf\mu(I)$ e $\sup\mu(I)$

$\left.\begin{array}{l}\inf\mu(I)=\min\mu(I)=0\\ \sup\mu(I)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \mu(I)=[0;+\infty[$

guardiamo all'assiomatica ⑤

→ provare : 1. incrementi indip.

2. $s<t \quad N(t)-N(s)\sim Poi(t-s) \quad (\lambda=1)$

3. $P_r(N(0)=0)=1$

se valgono $\Rightarrow \{N(t);\ t\geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità 1

noi abbiamo per $\{\tilde{N}(t),\ t\geq 0\}$

1. incr. indip.

2'. $s<t \quad \tilde{N}(t)-\tilde{N}(s)\sim Poi(\mu(t)-\mu(s))$

3. $P_r(\tilde{N}(0)=0)=1.$

OSS.

$N(t) - N(s)$ incr. del proc. ② $\{N(t),\ t \geq 0\}$ su $]s, t]$

$$N(t) - N(s) = \underbrace{\tilde{N}(\mu^{-1}(t)) - \tilde{N}(\mu^{-1}(s))}_{\text{incr. del proc. ① } \{\tilde{N}(t),\ t\geq 0\}} \quad \text{con } \mu^{-1}(s) < \mu^{-1}(t)$$

gli incr. del proc. ② relativi ad interv. disgiunti sono anche incr. del proc. ① relativi ad interv. disgiunti

$$s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots$$

$$\mu^{-1}(s_1) < \mu^{-1}(t_1) \leq \mu^{-1}(s_2) < \mu^{-1}(t_2) \leq \dots$$

il proc. ① è ad incr. indip. $\Rightarrow$ proc. ② soddisfa assioma 1.

$s<t \quad N(t) - N(s) = \tilde{N}(\mu^{-1}(t)) - \tilde{N}(\mu^{-1}(s)) = \tilde{N}(T) - \tilde{N}(S)$

per 2'. $\tilde{N}(T) - \tilde{N}(S) \sim Poi(\mu(T) - \mu(S))$

$$\mu(\mu^{-1}(t)) - \mu(\mu^{-1}(s))$$
$$t \quad - \quad s$$

$\Rightarrow N(t) - N(s) \sim Poi(t-s)$

vale 2. per proc. ②

$N(0) = \tilde{N}(\mu^{-1}(0)) = \tilde{N}(0)$

$Pr(N(0) = 0) = Pr(\tilde{N}(0) = 0) = 1$ per 3.

$\Rightarrow$ proc ② verifica 3.

È possibile passare da un proc. di Poisson omogeneo ad uno non omogeneo e viceversa tramite una trasformazione deterministica del tempo

PROCESSI MISTURE DI POISSONIANI

cade l'indip. stocastica degli incrementi

sia $\{N(t),\ t \geq 0\}$ proc. di conta

sia $\Lambda > 0$ parametro aleatorio (misura aleatoria di rischio / di eterogeneità)

- $\forall\ x$ determinazione possibile di Λ

$\{N(t) \mid \Lambda = x,\ t > 0\}$ è proc. di Poisson con intensità x

• è assegnata la distrib. di prob. di Λ $(F_\Lambda - f_\Lambda)$

$\Longrightarrow$ è assegnata la legge del processo $\{N(t),\ t\geq 0\}$

DIM:

E, H eventi logicamente dipendenti da $\{N(t),\ t\geq 0\}$

es: $E = [N(t) = n]$

$E = [N(t_1) = i_1, \dots, N(t_n) = i_n]$

(a) Λ con determinazioni $x_1, \dots, x_m$

$Pr(\Lambda = x_i) = p_i \quad i = 1, \dots, m$

$p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

$$Pr(E) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{Pr(\Lambda = x_i)}_{p_i} \underbrace{Pr(E \mid \Lambda = x_i)}_{\text{è prob. in un proc. di Poisson con intensità } x_i}$$

$\forall E$ logic. dip. riesco a trovare la prob. di E tramite combinazioni convesse/misture

$\Rightarrow$ trovo la legge del processo

$$Pr(E|H) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{Pr(\Lambda = x_i \mid H)}_{\frac{Pr(\Lambda = x_i)\, Pr(H \mid \Lambda = x_i)}{Pr(H)}} Pr(E \mid H \wedge \Lambda = x_i)$$

$$Pr(H) = \sum_{j=1}^{m} p_j\, Pr(H \mid \Lambda = x_j)$$

(b) $\Lambda \sim F_\Lambda$

$$Pr(E) = \int_0^{+\infty} \underbrace{Pr(E \mid \Lambda = x)}_{\text{prob. in un proc. di Poisson con intensità } x} dF_\Lambda(x)$$

se F_Λ è dotata di densità f_Λ

$$Pr(E) = \int_0^{+\infty} Pr(E \mid \Lambda = x)\, f_\Lambda(x)\, dx$$

$$Pr(E|H) = \int_0^{+\infty} Pr(E \mid H \wedge \Lambda = x)\, dF_{\Lambda|H}(x)$$

se $F_{\Lambda|H}$ ammette densità $f_{\Lambda|H}$

$$\cdot \ Pr(E|H) = \int_0^{+\infty} Pr(E|H \wedge \Lambda = x)\, \underbrace{f_{\Lambda|H}(x)}\, dx$$

$$= \frac{f_\Lambda(x)\, Pr(H|\Lambda = x)}{Pr(H)}$$

$$Pr(H) = \int_0^{+\infty} Pr(H|\Lambda=x)\, f_\Lambda(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ si può assegnare la legge del processo $\{N(t),\ t \geq 0\}$
tale processo è detto <u>PROCESSO MISTURA DI POISSONIANI CON MISTURANTE F_Λ</u>

[PROBLEMINO]

$N(t)|\ \Lambda = x \qquad Pr(\Lambda = x) = 0$ può creare disagio

$\rightarrow \{N(t)\ , t \geq 0\}$

$\Lambda > 0$ param. aleatorio

a $\{N(t),\ t \geq 0\}$ assegnamo $\mathcal{F}_x$ (legge di un proc. di Poisson con int. x) $\forall x$ determ. di Λ

E evento logic. dip. da $\{N(t),\ t \geq 0\}$

$\rightarrow Pr_x(E)$

es: $Pr_x(E) = e^{-xt} \frac{(xt)^n}{n!} \qquad$ se $E = [N(t) = n]$

$$Pr(E) = \int_0^{+\infty} Pr_x(E)\, dF_\Lambda(x)$$

TEOREMA

sia $\{N(t),\ t \geq 0\}$ processo mistura di poissoniani con misturante F_Λ
$\Rightarrow$ il proc. è ad incrementi stazionari

DIM:

$s < t \qquad Pr(N(t) - N(s) = n) = \int_0^{+\infty} Pr(N(t) - N(s)|\ \Lambda = x)\, dF_\Lambda(x)$

$$\Pr(N(t)-N(s) \mid \Lambda = x) = e^{-x(t-s)} \frac{(x(t-s))^m}{m!}$$ dipende da $t-s$, non da t, s

$\Rightarrow$ è proc. ad incrementi stazionari

in particolare

$$N(t+1)-N(t) \overset{d}{=} N(1)$$

es:

proc. mistura di poissoniani con misturante Gamma $(\alpha; \rho)$ (dotata di densità)

$$\Pr(N(t+1)-N(t) = m) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\Pr(N(t+1)-N(t) \mid \Lambda = x)}_{e^{-x}\frac{x^m}{m!}} \underbrace{f_{\Lambda}(x)}_{\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\rho x}} dx$$

Misture di Poisson con misturante Γ ci danno una funzione di densità binomiale negativa.

$$= \frac{\rho^{\alpha}}{m!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{(\alpha+m-1)} e^{-(\rho+1)x}}_{\text{nucleo di una Gamma } (\alpha+m,\ \rho+1)} dx$$

la costante di normalizzazione per la Gamma $(\alpha+m, \rho+1)$ è: $\frac{(\rho+1)^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m)}$ che è reciproco dell'integrale

$$= \frac{\rho^{\alpha}}{m!\,\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\rho+1)^{\alpha+m}} = \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\,\Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{\rho+1}\right)^{m}}_{\text{densità di una Binomiale negativa}}$$

// RICHIAMO

$N \sim \text{BinNeg.}(\alpha, p)$ $\quad \alpha > 0$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$

$$\Pr(N=m) = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\,\Gamma(\alpha)} p^{\alpha} q^{m}$$

$$E(N) = \alpha \cdot \frac{q}{p}$$

$$Var(N) = \alpha \cdot \frac{q}{p^2}$$

//

$$\Rightarrow N(t+1) - N(t) \sim \text{BinNeg}\left(\alpha; \frac{\rho}{\rho+1}\right)$$

$$E[N(t+1)-N(t)] = \alpha \cdot \frac{1}{\rho+1} \cdot \frac{\rho+1}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho}$$

$$Var[N(t+1)-N(t)] = \alpha \cdot \frac{1}{\rho+1} \cdot \frac{(\rho+1)^2}{\rho^2} = \frac{\alpha}{\rho}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

$s<t$

$$\begin{aligned}
Pr(N(t)-N(s)=n) &= \int_0^{+\infty} Pr(N(t)-N(s)=n \mid \Lambda = x)\, f_{\Lambda}(x)\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x(t-s)} \frac{(x(t-s))^n}{n!} \cdot \frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\rho x}\, dx \\
&= \frac{\rho^{\alpha}(t-s)^n}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+n-1}\, e^{-x(\rho+t-s)}\, dx \\
&= \frac{\rho^{\alpha}(t-s)^n}{n!\,\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)}{(\rho+t-s)^{\alpha+n}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\rho}{\rho+(t-s)}\right)^{\alpha} \left(\frac{t-s}{\rho+t-s}\right)^{n}
\end{aligned}$$

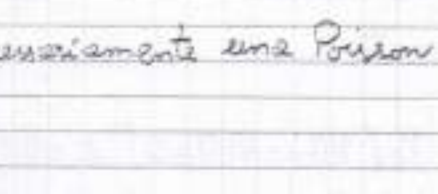
$\Rightarrow N(t)-N(s) \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{\rho}{\rho+(t-s)}\right)$

$\Rightarrow$ la distrib. degli incrementi non è necessariamente una Poisson

DIM: non indipendenza degli incrementi

es:

$s<t \quad Pr(N(t)-N(s)=n \mid N(s)=m) = ?$



$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{Pr(N(t)-N(s)=n \mid N(s)=m \wedge \Lambda = x)}_{Pr(N(t)-N(s)=n \mid \Lambda = x)}\, dF_{\Lambda \mid N(s)=m}$$

per indip. degli incrementi nei proc. di Poisson

$e^{-x(t-s)} \frac{(x(t-s))^n}{n!}$ non dipende da m

dipende da m

$\Rightarrow$ in generale tale prob. dipende da m es:

$$\Lambda = \begin{cases} x_1 & \text{con } p_1 \\ x_2 & \text{con } p_2 \end{cases} \qquad p_i \geq 0 \quad p_1 + p_2 = 1$$

$$Pr(N(t)-N(s)=m \mid N(s)=m) = \sum_{i=1}^{2} Pr(\Lambda = x_i \mid N(s)=m) \underbrace{Pr(N(t)-N(s)=m \mid N(s)=m \wedge \Lambda = x_i)}_{e^{-x_i(t-s)} \frac{(x_i(t-s))^m}{m!}}$$

non dip. da m

$$Pr(\Lambda = x_i \mid N(s)=m) = \frac{Pr(\Lambda=x_i)Pr(N(s)=m \mid \Lambda=x_i)}{\sum_{j=1}^{2} Pr(\Lambda=x_j)Pr(N(s)=m \mid \Lambda=x_j)}$$

$$= \frac{p_i \, e^{-x_i s} \frac{(x_i s)^m}{m!}}{\sum_{j=1}^{2} p_j \, e^{-x_j s} \frac{(x_j s)^m}{m!}} \quad \leftarrow \text{dipende da } m$$

VERIFICA

$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 = 0.1 \quad x_2 = 0.2$

$s=1 \quad t=2$

$m=0$

$$Pr(N(2)-N(1)=0 \mid \Lambda = 0.1) = e^{-0.1} \simeq 0.9048$$

$$Pr(N(2)-N(1)=0 \mid \Lambda = 0.2) = e^{-0.2} \simeq 0.8187$$

$$Pr(\Lambda=0.1 \mid N(1)=m) = \begin{cases} \frac{0.5\, e^{-0.1}}{0.5(e^{-0.1}+e^{-0.2})} \simeq \frac{0.9048}{1.7235} & m=0 \\ \frac{0.5\,(e^{-0.1}\cdot 0.1)}{0.5(e^{-0.1}\,0.1 + e^{-0.2}\,0.2)} \simeq \frac{0.0905}{0.2542} & m=1 \end{cases}$$

$$Pr(\Lambda=0.2 \mid N(1)=m) = \begin{cases} \frac{0.5\, e^{-0.2}}{0.5(e^{-0.1}+e^{-0.2})} \simeq \frac{0.8187}{1.7235} & m=0 \\ \frac{0.5\,(e^{-0.2}\cdot 0.2)}{0.5(e^{-0.1}\,0.1 + e^{-0.2}\,0.2)} \simeq \frac{0.1637}{0.2542} & m=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ da questi risultati si giunge a probabilità diverse, quindi l'incremento dipende dal valore di m

OSS:

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. mistura di poissoniani con mistura F_Λ

$\{N(t) \mid \Lambda = x, t \geq 0\}$ proc. di Poisson con int. x

$N(t) \mid \Lambda = x \sim Poi(xt)$

$E[N(t) \mid \Lambda = x] = xt$

- $E[N(t)] = \int_0^{+\infty} \underbrace{E(N(t) \mid \Lambda = x)}_{xt} \, dF_\Lambda(x)$

$= t \underbrace{\int_0^{+\infty} x \, dF_\Lambda(x)}_{E(\Lambda)} = \lambda t$ $\quad E(\Lambda) = \lambda$

$\lambda = E(N(1)) = E(N(t+1) - N(t))$

num atteso di arrivi in interv. unitari

$E[N(t) - N(s)] = \lambda(t-s)$

- $U = \frac{\Lambda}{E(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{\lambda} \Rightarrow \Lambda = \lambda U$

$E(U) = 1$

si preferisce non assegnare una intensità → si inserisce un param. di disturbo U con media unitaria

<u>Processo mistura di poissoniani con misturante di speranza matematica unitaria</u>

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di conta

~~U n.a. con $E(U) = 1$~~

$\forall u$ determinazione di U $\{N(t) \mid U = u, t \geq 0\}$ proc. di Poisson con int. λu, $\lambda > 0$

sia assegnata la legge F_U di U

$\lambda = E(N(t+1) - N(t))$

es)

misturante sia $U \sim Gamma(\alpha, \alpha)$

$E(U) = 1$

$Var(U) = \frac{1}{\alpha}$

$$P_r\left(N(t+1)-N(t)=m\right)=\int_0^{+\infty}\underbrace{P_r\left(N(t+1)-N(t)=m \mid U=u\right)}_{\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^m}{m!}}\;\underbrace{f_U(u)}_{\frac{\alpha^\alpha u^{\alpha-1}e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)}}\,du$$

$$=\frac{\alpha^\alpha}{m!\,\Gamma(\alpha)}\lambda^m\int_0^{+\infty}\underbrace{u^{\alpha+m-1}\,e^{-(\alpha+\lambda)u}}\,du$$

nucleo di una Gamma$(\alpha+m,\alpha+\lambda)$

$$\left[\frac{(\alpha+\lambda)^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m)}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\alpha^\alpha}{m!\,\Gamma(\alpha)}\lambda^m\cdot\frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\alpha+\lambda)^{\alpha+m}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^\alpha\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\right)^m$$

$$\Rightarrow N(t+1)-N(t)\sim \text{BinNeg}\left(\alpha,\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$$

$$E\left[N(t+1)-N(t)\right]=\alpha\cdot\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\cdot\frac{\alpha+\lambda}{\alpha}=\lambda$$

$$Var\left[N(t+1)-N(t)\right]=\alpha\cdot\frac{\lambda}{\alpha+\lambda}\cdot\frac{(\alpha+\lambda)^2}{\alpha^2}=\frac{\lambda(\alpha+\lambda)}{\alpha}=\lambda+\frac{\lambda^2}{\alpha}$$

$s<t$

$$P_r\left(N(t)-N(s)=m\right)=\int_0^{+\infty}P_r\left(N(t)-N(s)=m \mid U=u\right)f_U(u)\,du$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda u(t-s)}\frac{(\lambda u(t-s))^m}{m!}\;\frac{\alpha^\alpha u^{\alpha-1}e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)}\,du$$

$$=\frac{\alpha^\alpha}{m!\,\Gamma(\alpha)}(\lambda(t-s))^m\int_0^{+\infty}u^{\alpha+m-1}e^{-(\alpha+\lambda(t-s))u}\,du$$

$$=\frac{\alpha^\alpha}{m!\,\Gamma(\alpha)}(\lambda(t-s))^m\cdot\frac{\Gamma(\alpha+m)}{(\alpha+\lambda(t-s))^{\alpha+m}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\,\Gamma(\alpha)}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda(t-s)}\right)^\alpha\left(\frac{\lambda(t-s)}{\alpha+\lambda(t-s)}\right)^m$$

$$\Rightarrow N(t)-N(s)\sim \text{Bin Neg}\left(\alpha,\frac{\alpha}{\alpha+\lambda(t-s)}\right)$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- T. MIKOSCH (2004), "Non Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes", SPRINGER
- S.M. ROSS (1983), "Stochastic Processes", WILEY

TS - 14 - 10 - 2013 (12 ore) 3^ sett

MODELLO CLASSICO DELLA TEORIA COLLETTIVA DEL RISCHIO (1930 CRAMÉR - LUNDBERG)

Si considera la gestione dell'attività assicurativa su più periodi / esercizi

0

Si interviene su:

- caricamento dei premi
- dotazione iniziale di capitale
- gestione riassicurativa

Le decisioni vengono fatte sulla base del criterio della probabilità di rovina.

Consideriamo un portafoglio di rischi "analoghi"

0 istante iniziale

$R > 0$ dotazione iniziale di capitale (riserva iniziale)

ci poniamo in uno schema a tempo continuo

$P(t)$ monteprem incassato in $[0; t]$

$S(t)$ risarcimento totale in $[0; t]$

$R(t) = R + P(t) - S(t) \quad t \geq 0$ capitale in dotazione in t

$\{R(t),\ t \geq 0\}$ processo della riserva / surplus

si assume $P(t) = ct$, $c > 0$ num. certo

$$P(t+1) - P(t) = c \quad \forall t$$

$\rightarrow c$ monteprem incassato in ogni interv. unitario

Stiamo costruendo un modello molto semplice:

- non si considerano spese
- non si tiene conto della redditività prodotta da eventuali investimenti dei premi
- non si considerano dividendi o distribuzioni
- i sinistri vengono risarciti immediatamente
- il volume di affari è fisso nel tempo

...

$\{R(t) = R + ct - S(t),\ t \geq 0\}$ processo della riserva

possibili traiettorie del processo:

DEF: ROVINA

(a) $\bigvee_{t \geq 0} (R(t) < 0) = \bigvee_{t \geq 0} (R + ct - S(t) < 0)$

(b) $T = \inf \{ t \geq 0 \mid R(t) < 0 \}$

$\{R(t), t \geq 0\}$, $\mathbb{P}$

t fissato $\quad R(t, \cdot) : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \omega \longrightarrow R(t, \omega)$

fissato $\omega \in \mathbb{P}$

$\{t \geq 0,\ R(t;\omega)\}$ realizzazione / traiettoria del proc. corrispondente a ω

$\{t \geq 0 \mid R(t;\omega) < 0\}$ $= \emptyset$

$\neq \emptyset$, $\Rightarrow$ ins. inferiormente limitato

$\exists \inf \{t \geq 0 \mid R(t;\omega) < 0\}$

se $\emptyset$ si pone $\inf \emptyset = +\infty$

$A, B \subset \mathbb{R} \qquad A, B \neq \emptyset \rightarrow$ inf. limitati

$A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$

$\emptyset \subset B \quad \forall B \subset \mathbb{R}$ inf. lim. $\Rightarrow +\infty = \inf \emptyset \geq \inf B \quad \forall B$ inf. lim. $\subset \mathbb{R}$

$T = \inf \{ t \geq 0 \mid R(t) < 0 \}$ ISTANTE DELLA ROVINA = RUIN TIME

primo istante in cui il processo assume valore negativo

se $T < +\infty \Rightarrow$ ROVINA

DEF: PROBABILITÀ ASINTOTICA DI ROVINA / PROBABILITÀ DI ROVINA

• si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO CONTINUO, a partire dal capitale iniziale R:

$$\psi(R) = P_r\Big(\bigvee_{t \geq 0} (R(t)<0)\Big) = P_r(T<+\infty) \qquad \text{evento } A(R)$$

è un indicatore di rischiosità del portafoglio legato alla pura gestione tecnica nella pratica si guarda ad un orizzonte temporale ampio (es. 20 anni) ma non ad orizzonti temporali illimitati, e la verifica viene fatta in tempo discreto (es. ogni 3 o 6 mesi)

• si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (τ periodi), a TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R:

$$\bar{\psi}(R,\tau) = P_r\big(R(1)<0 \vee \dots \vee R(\tau)<0\big) = P_r\Big(\bigvee_{\substack{0\leq t\leq \tau \\ t\in\mathbb{N}}} (R(t)<0)\Big) \qquad \text{evento } B(R,\tau)$$

• si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (τ periodi) a TEMPO CONTINUO a partire da un capitale iniziale R:

$$\psi(R,\tau) = P_r\Big(\bigvee_{0\leq t\leq \tau} (R(t)<0)\Big) \qquad \text{evento } A(R,\tau)$$

• si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R:

$$\bar{\psi}(R) = P_r\Big(\bigvee_{\substack{t\geq 0 \\ t\in\mathbb{N}}} (R(t)<0)\Big) \qquad \text{evento } B(R)$$

Relazioni tra gli eventi:

$B(R,\tau) \Rightarrow A(R,\tau) \Rightarrow A(R)$	$B(R,\tau) \Rightarrow B(R) \Rightarrow A(R)$
$\bar{\psi}(R,\tau) \leq \psi(R,\tau) \leq \psi(R)$	$\bar{\psi}(R,\tau) \leq \bar{\psi}(R) \leq \psi(R)$

$\tau_1 < \tau_2$

$A(R,\tau_1) \Rightarrow A(R,\tau_2)$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \underbrace{Pr(A(R,\tau))}_{\psi(R,\tau)} = Pr\left(\bigvee_{\tau \geq 0} A(R,\tau)\right) = \underbrace{Pr(A(R))}_{\psi(R)}$$

Noi ci concentriamo sulla $\psi(R)$

$$\psi(R) = Pr\left(\bigvee_{t \geq 0} (R + ct - S(t) < 0)\right)$$

→ dipende da:
- R } num certi
- c
- $\{S(t), t \geq 0\}$ proc. aleatorio del risarcimento cumulat

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

$N(t)$ = num. sinistri che colpiscono il portafoglio in $[0,t]$

Y_h = risarcimento per il sinistro h-esimo

→ IMPOSTAZIONE DI TIPO COLLETTIVO

OSS:

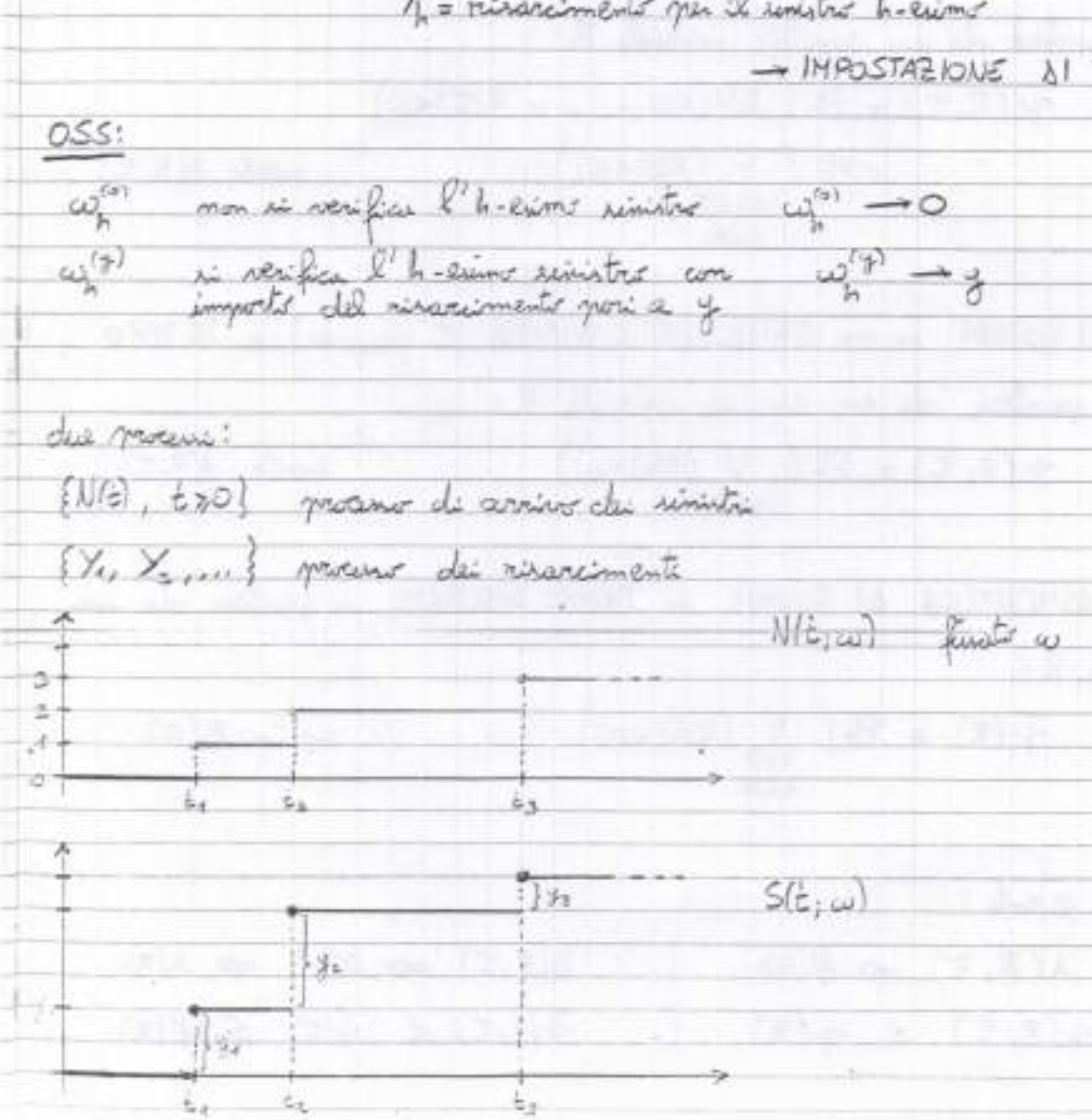
$\omega_h^{(0)}$ non si verifica l'h-esimo sinistro $\quad \omega_h^{(0)} \to 0$

$\omega_h^{(y)}$ si verifica l'h-esimo sinistro con importo del risarcimento pari a y $\quad \omega_h^{(y)} \to y$

due processi:

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di arrivo dei sinistri

$\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ processo dei risarcimenti



$\{N(t), t \geq 0\}$
$\{S(t), t \geq 0\}$ } PROCESSO DI RISCHIO

DEF: PROBABILITÀ ASINTOTICA DI ROVINA / PROBABILITÀ DI ROVINA

- si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO CONTINUO, a partire dal capitale iniziale R:

$$\psi(R) = P_r\left(\bigvee_{t\geq 0} (R(t)<0)\right) = P_r(T<+\infty) \qquad \text{evento } A(R)$$

è un indicatore di rischiosità del portafoglio legato alla pura gestione tecnica nella pratica si guarda ad un orizzonte temporale ampio (es. 20 anni) ma non ad orizzonti temporali illimitati, e la verifica viene fatta in tempo discreto (es. ogni 3 o 6 mesi)

- si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (τ periodi), a TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R:

$$\tilde{\psi}(R,\tau) = P_r\left(R(1)<0 \vee \dots \vee R(\tau)<0\right) = P_r\left(\bigvee_{\substack{0\leq t\leq \tau \\ t\in\mathbb{N}}} (R(t)<0)\right) \qquad \text{evento } B(R,\tau)$$

- si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (τ periodi) a TEMPO CONTINUO a partire da un capitale iniziale R:

$$\psi(R,\tau) = P_r\left(\bigvee_{0\leq t\leq \tau} (R(t)<0)\right) \qquad \text{evento } A(R,\tau)$$

- si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R:

$$\tilde{\psi}(R) = P_r\left(\bigvee_{\substack{t\geq 0 \\ t\in\mathbb{N}}} (R(t)<0)\right) \qquad \text{evento } B(R)$$

Relazioni tra gli eventi:

$B(R,\tau) \Rightarrow A(R,\tau) \Rightarrow A(R)$	$B(R,\tau) \Rightarrow B(R) \Rightarrow A(R)$
$\tilde{\psi}(R,\tau) \leq \psi(R,\tau) \leq \psi(R)$	$\tilde{\psi}(R,\tau) \leq \tilde{\psi}(R) \leq \psi(R)$

$\tau_1 < \tau_2$

$A(R,\tau_1) \Rightarrow A(R,\tau_2)$

IPOTESI PROBABILISTICHE.

$\{N(t),\ t\geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ

$\{Y_1, Y_2, \dots\}$ $\forall m, n \geq 0$

$\forall H$ evento logic. dip. da $\{N(t), t\geq 0\}$ che implichi che si sono verificati i sinistri di indice $m+1, \dots, m+n$

$Y_{m+1}|H, \dots, Y_{m+n}|H$ sono i.i.d con distrib. che non dipende da m, n, H

sia F_Y la funz. di ripartizione di tale distrib.

↳ interpretabile come la funz. di ripartiz. del risarcimento per un sinistro in ipotesi che il sinistro si sia verificato

OSS:

$X = \sum_{h=1}^{N} Y_h$ $\quad N \quad Y_h \quad \omega_h^{(x)} \to 0$

$\omega_h^{(y)} \to y$

$\forall n>0 \quad Y_1|N=n, \dots, Y_n|N=n \quad$ i.i.d

$Y_i | N=n$, $i\leq n$ ha legge che non dipende da n

$Y_i | N=n \sim F_Y$, $i\leq n$

$Y_i | N\geq i \sim F_Y$

IPOTESI ALTERNATIVE

$\{N(t),\ t\geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ

$\{Y_1', Y_2', \dots\}$ i.i.d e indip. da $\{N(t), t\geq 0\}$

$\sum_{h=1}^{N(t)} Y_h' \qquad \{S(t),\ t\geq 0\}$

formalmente si ottengono le stesse conclusioni probabilistiche ma le Y_i' non possono essere interpretate come risarcimenti

TS-15-10-2013 (14 ORE)

NOTAZIONE

$E(Y) = E(Y_i|H)$ con H evento che implica che l'i-esimo sinistro si è verificato

$Var(Y) = Var(Y_i|H)$ " H " " " " " " " "

$m_Y(t) = E(e^{tY}) < +\infty$

$E(Y^k) = E[(Y_i|H)^k]$

$E(Y) = \mu$

$E(Y^k) = \mu_k$

(*) $\forall t$ $S(t) \sim$ Poisson-composta $(\lambda t, F_Y)$

$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$

verificare che:

- (1') $\forall n > 0$ $Y_1|N(t)=n, \dots, Y_n|N(t)=n$ iid
- (2') $Y_h|N(t)=n$ $(h \leq n)$ ha legge che non dipende da n, funz di ripart. F_Y
- (3) $N(t) \sim Poi(\lambda t)$

(1) $[N(t)=n] = H$ evento che garantisce che si sono verificati n sinistri in $[0,t]$

evento logicamente dipendente da $\{N(t), t \geq 0\}$

$\Rightarrow Y_1|N(t)=n, \dots, Y_n|N(t)=n$ iid $\forall n$

(2) H garantisce che i sinistri si sono verificati

$\Rightarrow Y_1|H, \dots, Y_n|H$ iid con F_Y non dipendente da n

(3) $\{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson

$\Rightarrow N(t) \sim Poi(\lambda t)$

// RICHIAMO

$X = \sum_{h=1}^{N} Y_h$ distribuzione composta

$E(X) = E(N)E(Y)$

$Var(X) = E(N)Var(Y) + Var(N)E(Y)^2$

$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_r(N=n) F_Y^{*(n)}(x)$ — convoluzione n-esima valutata in x della funz. di ripartiz. della somma di n var. al. iid con funz. di ripartiz. F_Y //

$$E(S(t)) = E(N(t))\,E(Y) = \lambda t \cdot \mu = \lambda \mu t$$

$$\begin{aligned}Var(S(t)) &= E(N(t))\,Var(Y) + Var(N(t))\,E(Y)^2 \\ &= \lambda t\, Var(Y) + \lambda t\, E(Y)^2 = \lambda t \cdot \left(Var(Y) + E^2(Y)\right) = \lambda t\left(E(Y^2) - E^2(Y) + E^2(Y)\right) \\ &= \lambda t \cdot E(Y^2) = \lambda \mu_2 t\end{aligned}$$

$$F_{S(t)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{Pr(N(t)=n)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}\, F_Y^{*(n)}(x)$$

$$\begin{aligned}E(R(t)) &= E(R + ct - S(t)) \\ &= R + ct - E(S(t)) \\ &= R + ct - \lambda\mu t = R + (c - \lambda\mu)t\end{aligned}$$

se $c - \lambda\mu > 0$ la retta cresce al crescere di t

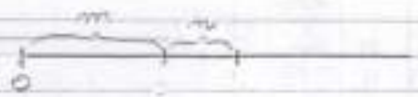
$$\begin{aligned}Var(R(t)) &= Var(R + ct - S(t)) \\ &= Var(S(t)) = \lambda \mu_2 t\end{aligned}$$

(**) $\{S(t),\ t \geq 0\}$ è processo ad incrementi stazionari

verificare che $\forall s,t \quad s<t \Rightarrow S(t)-S(s)$ ha legge che dipende da $t-s$

fissati $s<t$, $x>0$

$$F_{S(t)-S(s)}(x) = Pr(S(t)-S(s) \leq x)$$



$\{N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n,\ m,n \in \mathbb{N}\}$ è partizione di Ω

$$Pr(S(t)-S(s)\leq x) = \sum_{m,n}^{0,+\infty} Pr(N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n)\,Pr(S(t)-S(s)\leq x \mid N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n)$$

//RICHIAMO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$$\sum_{m,n}^{0,+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) \quad \text{se } a_{m,n} \geq 0$$

//

$$\Pr(N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n) = \Pr(N(s)=m)\,\Pr(N(t)-N(s)=n)$$

$$\Pr(S(t)-S(s) \le x \mid N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n) =$$

$$= \Pr\Big(\sum_{h=1}^{N(t)} Y_h - \sum_{h=1}^{N(s)} Y_h \le x \;\Big|\; N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n\Big)$$

$$= \Pr\Big(\sum_{h=1}^{m+n} Y_h - \sum_{h=1}^{m} Y_h \le x \;\Big|\; N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n\Big)$$

$$= \Pr\Big(\sum_{h=m+1}^{m+n} Y_h \le x \;\Big|\; \underbrace{N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n}_{\text{evento logic. dip. da } \{N(t),\ t\ge 0\}}\Big)$$

implica che si sono stati i risarcimenti $Y_{m+1}, \dots, Y_{m+n}$

$$= \Pr\big((Y_{m+1}|H) + \dots + (Y_{m+n}|H) \le x\big) = F_Y^{*(n)}(x)$$

$$\Pr(S(t)-S(s) \le x) = \sum_{m,n}^{0,+\infty} \Pr(N(s)=m)\Pr(N(t)-N(s)=n)\, F_Y^{*(n)}(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \Pr(N(s)=m)}_{\text{non dipende da } n} \cdot \Pr(N(t)-N(s)=n)\cdot F_Y^{*(n)}(x)\Big)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\Pr(N(s)=m) \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)=n)\, F_Y^{*(n)}(x)}_{\text{non dipende da } m}\Big)$$

$$= \Big[\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \Pr(N(s)=m)}_{\Pr\left(\bigvee_{m=0}^{+\infty}(N(s)=m)\right) = \Pr(\Omega) = 1}\Big]\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)=n)\, F_Y^{*(n)}(x)\Big]$$

$$\Rightarrow F_{S(t)-S(s)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)=n)\, F_Y^{*(n)}(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} F_Y^{*(n)}(x)$$

dipende da $(t-s)$, non da t, s

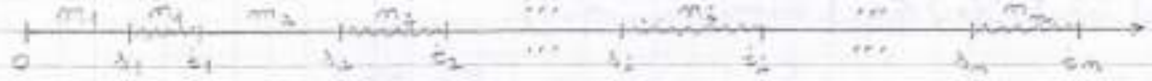
$\Rightarrow$ incrementi stazionari

$S(t)-S(s)$ ha distrib. Poisson-composta $(\lambda(t-s), F_Y)$

(***) $\{S(t),\ t\ge 0\}$ è processo ad incrementi indipendenti

fissato n, $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \dots \le s_n < t_n$

provare che $S(t_1)-S(s_1), \dots, S(t_i)-S(s_i), \dots, S(t_n)-S(s_n)$ sono v.a. stocasticamente indipendenti



verifichiamo che $F_{S(t_1)-S(s_1),\dots,S(t_m)-S(s_m)}(x_1,\dots,x_m) = \prod_{i=1}^{m} \underbrace{F_{S(t_i)-S(s_i)}}_{\sim \text{Poi-comp}(\lambda(t_i-s_i),\,F_Y)}(x_i)$

$[N(s_1)=m_1,\ N(t_1)-N(s_1)=n_1,\dots,N(t_i)-N(s_i)=n_i,\dots,N(t_m)-N(s_m)=n_m] =$

$= H(m_1,n_1,m_2,n_2,\dots,m_i,n_i,\dots,m_m,n_m)$

$\rightarrow \{H(m_1,n_1,\dots,m_m,n_m) : m_1,n_1,\dots,m_m,n_m \in \mathbb{N}\}$ è partizione di Ω

$$F_{S(t_1)-S(s_1),\dots,S(t_m)-S(s_m)}(x_1,\dots,x_m) = Pr(S(t_1)-S(s_1)\le x_1,\dots,S(t_m)-S(s_m)\le x_m)$$

$$= \sum_{m_1,n_1,\dots,n_m}^{0,+\infty} \underbrace{Pr(H(m_1,n_1,\dots,n_m))}_{①} \underbrace{Pr\left(\bigwedge_{i=1}^{m} (S(t_i)-S(s_i)\le x_i \mid H(m_1,n_1,\dots,n_m)\right)}_{②}$$

$① = \prod_{i=1}^{m} Pr(N(s_i)-N(t_{i-1})=m_i)\, Pr(N(t_i)-N(s_i)=n_i)$ con $t_0=0$

② considero $S(t_i)-S(s_i) \mid H(m_1,n_1,\dots,m_m,n_m) =$

$$= \sum_{h=1}^{N(t_i)} Y_h - \sum_{h=1}^{N(s_i)} Y_h \mid H(m_1,n_1,\dots,n_m)$$

$H \Rightarrow [N(s_i) = m^{(i)}]$ $\quad m^{(i)} = m_1+n_1+\dots+m_i$

$H \Rightarrow [N(t_i) = m^{(i)} + n_i]$

$$= \sum_{h=m^{(i)}+1}^{m^{(i)}+n_i} Y_h \mid H(m_1,n_1,\dots,n_m)$$

$S(t_1)-S(s_1)\mid H$, ... , $S(t_i)-S(s_i)\mid H$, ... , $S(t_m)-S(s_m)\mid H$

è funzione di $\qquad$ è funz. di $\qquad$ è funz. di

$Y_{m^{(1)}+1}\mid H,\dots,Y_{m^{(1)}+n_1}\mid H$; ... ; $Y_{m^{(i)}+1}\mid H,\dots,Y_{m^{(i)}+n_i}\mid H$, $Y_{m^{(m)}+1}\mid H,\dots,Y_{m^{(m)}+n_m}\mid H$

H implica che i sinistri si sono verificati

$\Rightarrow$ per ipotesi del modello i n.a. $Y_{m^{(1)}+1}\mid H,\dots,Y_{m^{(m)}+n_m}\mid H$ sono stocasticamente indip.

$\Rightarrow S(t_1)-S(s_1)\mid H,\dots,S(t_m)-S(s_m)\mid H$ sono stocasticamente indipendenti perché costruiti a partire da n.a. indipendenti di insiemi disgiunti

$$\Rightarrow ② = \prod_{i=1}^{m} Pr\big(S(t_i) - S(s_i) \le x_i \,\big|\, H(m_1, m_1', \dots, m_m) \big)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} Pr\big((Y_{n^{(i)}+1} | H) + \dots + (Y_{n^{(i)}+m_i} | H) \le x_i \big) = \prod_{i=1}^{m} F_Y^{*(m_i)}(x_i)$$

$\boxed{\text{TS-18-10-2013}}$ ASSENTE 16 ORE

da m_1' dipende solo questo — da m_1 dipende solo questo — così per gli altri m_i', m_i

$$F_{S(t_1)-S(s_1),\dots,S(t_m)-S(s_m)}(x_1,\dots,x_m) = \sum_{m_1', m_1, \dots, m_m}^{+\infty} \Big[Pr(N(s_1)=m_1')\, Pr(N(t_1)-N(s_1)=m_1) \cdot F_Y^{*(m_1)}(x_1) \cdot$$

$$\cdot\, Pr(N(s_2)-N(t_1)=m_2')\, Pr(N(t_2)-N(s_2)=m_2) \cdot F_Y^{*(m_2)}(x_2) \cdot$$

$$\cdot \dots \cdot Pr(N(s_m)-N(t_{m-1})=m_m')\, Pr(N(t_m)-N(s_m)=m_m)\, F_Y^{*(m_m)}(x_m) \Big] =$$

$$= \underbrace{\sum_{m_1'=0}^{+\infty} Pr(N(s_1)=m_1')}_{} \sum_{m_1=0}^{+\infty} Pr(N(t_1)-N(s_1)=m_1) \cdot F_Y^{*(m_1)}(x_1) \cdot$$

$$\cdot \sum_{m_2'=0}^{+\infty} Pr(N(s_2)-N(t_1)=m_2')\, Pr(N(t_2)-N(s_2)=m_2)\, F_Y^{*(m_2)}(x_2) \cdot$$

$$\cdot \dots \cdot \sum_{m_m'=0}^{+\infty} Pr(N(s_m)-N(t_{m-1})=m_m')\, Pr(N(t_m)-N(s_m)=m_m)\, F_Y^{*(m_m)}(x_m) =$$

è somma delle prob. di una partizione quindi vale 1
stesso discorso per le altre m_i'

$$= \prod_{i=1}^{m} \underbrace{\Big[\sum_{m_i=0}^{+\infty} Pr(\overbrace{N(t_i)-N(s_i)}^{N(t_i)-N(s_i) \sim Poi(\lambda(t_i-s_i))}=m_i)\, \boxed{F_Y^{*(m_i)}(x_i)} \Big]}_{}$$

convoluzione m_i-esima

è il valore in x_i della funz. di ripartiz. della distrib. Poi-comp. $(\lambda(t_i-s_i), F_Y)$, cioè della distrib. di $S(t_i)-S(s_i)$

$$\Rightarrow F_{S(t_1)-S(s_1),\dots,S(t_m)-S(s_m)}(x_1,\dots,x_m) = \prod_{i=1}^{m} F_{S(t_i)-S(s_i)}(x_i)$$

$\Rightarrow S(t_1)-S(s_1), \dots, S(t_m)-S(s_m)$ sono v.a. stoc. indip.

Il processo $\{S(t), t \ge 0\}$ è detto <u>PROCESSO POISSON COMPOSTO (λ, F_Y)</u> in quanto verifica (*), (**), (***).

Consideriamo un incremento annuo

$S(t+1) - S(t) \overset{d}{=} S(1) \sim$ Poi-comp. (λ, F_Y)

$\rightarrow E[S(t+1)-S(t)] = \lambda E(Y) = \lambda \mu$ risarcimento atteso per il portafoglio in un intervallo unitario

$Var[S(t+1)-S(t)] = \lambda E(Y^2) = \lambda \mu_2$

Considerando un incremento generico $S(t)-S(s)$

$E[S(t)-S(s)] = \lambda(t-s) E(Y) = \lambda\mu(t-s)$
$Var[S(t)-S(s)] = \lambda(t-s) E(Y^2) = \lambda\mu_2(t-s)$ } perché $S(t)-S(s) \sim$ Poi-comp $(\lambda(t-s), F_Y)$

OSS:

proviamo che l'ip. $P(t) = ct \quad c>0$, è giustificata

- principio di equità:

$$P(t) = E(S(t)) = \lambda t \mu = \lambda \mu t = ct \quad \text{con } c = \lambda \mu$$

calcolando i premi con il principio di equità si ha $P(t) = ct$, $c = \lambda\mu$

- criterio della speranza matematica

$$P(t) = E(S(t)) + \vartheta E(S(t)) = \lambda \mu t + \vartheta \lambda \mu t = \lambda\mu(1+\vartheta)t \stackrel{!}{=} ct \qquad c = \lambda\mu(1+\vartheta)$$

$\vartheta > 0$ coeff. di caricamento di sicurezza

- criterio della varianza

$$P(t) = E(S(t)) + \beta \operatorname{Var}(S(t)) = \lambda\mu t + \beta\lambda\mu_2 t = \lambda(\mu+\beta\mu_2)t \stackrel{!}{=} ct \qquad c = \lambda(\mu+\beta\mu_2)$$

$\beta > 0$ coeff. di caric. di sicurezza

essendo $P(t) = E(S(t))$

$$P(t) > E(S(t)) \iff c > \overline{\lambda\mu}$$

risarcimento atteso in ogni interv. unitario

In generale si ha un caricamento di sicurezza se $c > \lambda\mu$, cioè se i premi incassati in un intervallo unitario sono superiori al risarcimento atteso in ogni interv. unitario, e quindi:

$$P(t) - P(\lambda) > E[S(t) - S(\lambda)]$$

COEFFICIENTE DI AGGIUSTAMENTO

una considerazione:

$\psi(R) = \Pr\left(\bigvee_{t\geq 0} (R + ct - S(t) < 0)\right)$ non è possibile calcolarlo in forma chiusa

Il coefficiente di aggiustamento consente di ottenere una limitazione superiore per $\psi(R)$ probabilità asintotica di rovina.

nella TCR $\{R(t) = R_0 + ct - S(t),\ t \geq 0\}$

consideriamo le seguenti ulteriori ipotesi

(a) $c > \lambda\mu$ (c'è un caric. di sicur. rispetto al premio equo)

$c = \lambda\mu(1+\vartheta) \quad \vartheta > 0$ coeff. di caric. di sicur.

(b) F_Y sia dotata di fgm.

sia $\gamma = \sup\{t \geq 0 \mid m_Y(t) < +\infty\}$ $\rightarrow [0,\gamma[$ il max intervallo dove fgm è finita

// RICHIAMO

$X \geq 0$

$m_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx}\, dF_X(u) = E[e^{tX}] \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

$m_X(0) = 1$

si dice che la distrib. di X è dotata di fgm se:

$\exists\, I_0^+ : \forall t \in I_0^+ \quad m_X(t) < +\infty$ $\qquad I_0^+$ intervallo positivo di zero

(se la distrib. è dotata di fgm allora tutti i momenti esistono e sono finiti)

$\Rightarrow m_X(\cdot)$ è derivabile in un intorno di 0 e

$m_Y^{(n)}(0) = E(X^n) \quad n \in \mathbb{N}$ //

es:

$F_X \sim Gamma(\alpha, \rho)$ $\rightarrow m_Y(t) = \left(\frac{\rho}{\rho - \alpha}\right)^{\alpha}$ $\quad t < \rho$ $\quad \rightarrow$ l'interv. è $[0, \rho[$

$F_Y \sim exp(\rho)$ $\rightarrow m_Y(t) = \frac{\rho}{\rho - \alpha}$ $\quad t < \rho$ $\quad \rightarrow$ l'interv. è $[0, \rho[$

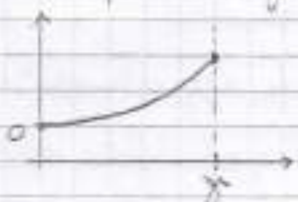
se abbiamo un v.a. a supporto limitato $\Rightarrow \gamma = +\infty$

(c) $\lim_{t \to \gamma^-} [\lambda m_Y(t) - (\lambda + ct)] = +\infty$

idea:
per avere il lim $= +\infty$ allora
$\lambda m_Y(t)$ deve avere lim $= +\infty$

$\rightarrow$ si escludono le fgm che tendono ad un num. finito in γ^- (ad es. la distrib. di Cauchy)

cioè non si prendono fgm del tipo:



Sotto queste ipotesi consideriamo la seguente <u>PROPOSIZIONE</u>

date le ip. TCR, (a), (b), (c)

l'equazione in t $\quad \lambda + ct = \lambda m_Y(t) \quad t \in [0, \gamma[$ ammette una ed una sola soluzione positiva

$\exists !\ \alpha > 0$ t.c. $\lambda + c\alpha = \lambda m_Y(\alpha)$

$\lambda + ct = \lambda m_Y(t) \quad t \in [0, \gamma[$ <u>EQUAZIONE AGGIUSTATA</u>

α, $\alpha > 0$ <u>COEFFICIENTE DI AGGIUSTAMENTO</u>

($t = 0$ è anche una soluz., ma stiamo garantendo che c'è anche una soluz. positiva)

<u>TEOREMA: DISUGUAGLIANZA DI LUNDBERG</u>

$\{R(t),\ t \geq 0\}$ TCR + (a), (b), (c)

$\Rightarrow \psi(R) \leq e^{-\alpha R}$ con α coeff. di aggiustamento $\quad \forall R > 0$

prob. asintotica di rovina

non dimostriamo il teorema, ma dimostriamo l'esistenza e l'unicità di α

DIM:

sia $g_1(t) = \lambda + ct$
$g_2(t) = \lambda m_Y(t)$ $\quad t \in [0, \gamma[$

studio $g_2(t)$:

- $g_2(0) = \lambda m_Y(0) = \lambda$
- g_2 è derivabile in 0, $g_2'(0) = \lambda m_Y'(0) = \lambda\mu$
- g_2 è strettamente convessa

$\forall t_1, t_2 \in [0, \gamma[\ ,\ \forall \delta \in]0,1[\ ,$ posto $\bar{\delta} = 1 - \delta$

$$\Rightarrow g_2(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) < \delta g_2(t_1) + \bar{\delta} g_2(t_2)$$

$$g(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) y}}_{m_Y(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2)} dF_Y(y)$$

$$e^{(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) y} = e^{\delta(t_1 y) + \bar{\delta}(t_2 y)} < \delta e^{t_1 y} + \bar{\delta} e^{t_2 y}$$

$\delta(t_1 y) + \bar{\delta}(t_2 y)$ è mistura di $t_1 y$ e $t_2 y$
e^x funz. strett. convessa

monotonia e linearità integr.

$$\longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) y} dF_Y(y) < \delta \int_0^{+\infty} e^{t_1 y} dF_Y(y) + \bar{\delta} \int_0^{+\infty} e^{t_2 y} dF_Y(y)$$

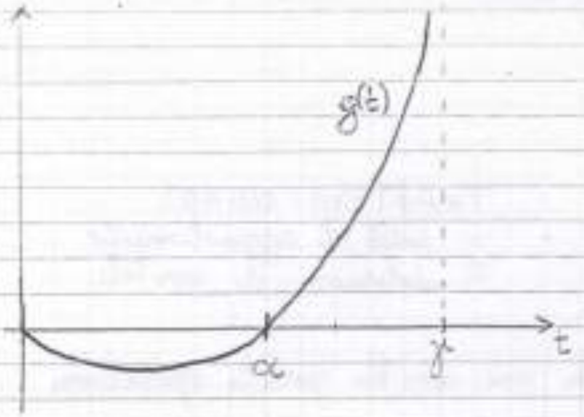
moltiplicato per $\lambda > 0$

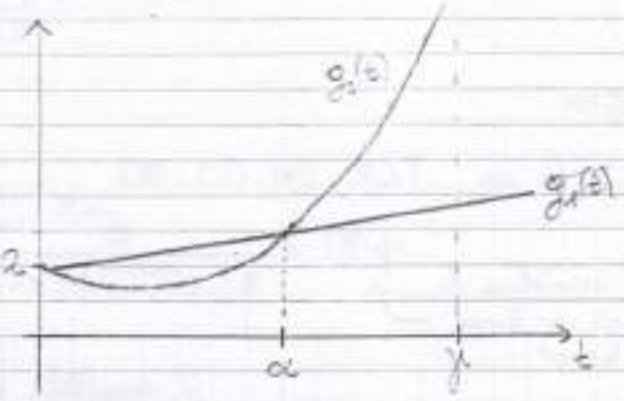
$$\lambda m_Y(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) < \delta \lambda m_Y(t_1) + \bar{\delta} \lambda m_Y(t_2)$$

$$\Rightarrow g_2(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) < \delta g_2(t_1) + \bar{\delta} g_2(t_2)$$

$\boxed{\text{TS - 21-10-2013}}$ (18 ore) 4^a sett

$g_1(t) = \lambda + ct$ $\quad g_2(t) = \lambda m_Y(t)$ $\quad g(t) = g_2(t) - g_1(t)$ $\quad t \in [0, \gamma[$





$\lambda + ct = \lambda m_Y(t)$

$\exists!\ \alpha > 0$ radice dell'eq.

$g_1(t) = \lambda + ct$

$c = \lambda\mu(1+\theta) \quad \theta > 0$

$g_2'(0) = \lambda\mu < c$

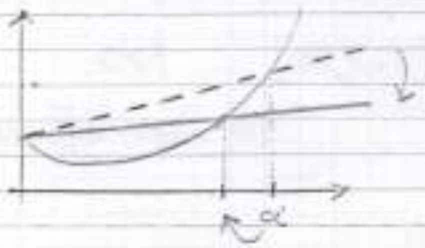
$\left.\begin{array}{l} \lambda = E[N(t+1) - N(t)] \\ c = P(t+1) - P(t) = \lambda\mu(1+\theta) \quad \theta > 0 \\ m_Y(\cdot) \leftrightarrow F_Y \quad \text{la valuta alternativa di } F_Y \end{array}\right\}$ α dipende da λ, θ, F_Y

$\lambda + ct = \lambda m_Y(t) \iff \lambda + \lambda\mu(1+\theta)t = \lambda m_Y(t)$

$1 + \mu(1+\theta)t = m_Y(t)$ $\rightarrow$ l'eq. dipende solo da θ, F_Y

fissati F_Y, λ (cioè fissato $g_2(t)$)

se θ diminuisce $\Rightarrow$ α decresce



$\alpha \to 0$ se $(\theta \to 0)$

Esempio:

$F_X \sim \exp(\rho)$

$E(X) = \mu = 1/\rho \qquad m_X(t) = \dfrac{\rho}{\rho - t} \quad t < \rho$

eq. aggiustamento: $1 + \dfrac{1}{\rho}(1+\theta)t = \dfrac{\rho}{\rho - t}$ $\longrightarrow t_1 = 0$

$t_2 = \rho\dfrac{\theta}{1+\theta} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\theta}{1+\theta} = \alpha$

$g(t)=0$ si può cercare tramite procedimento numerico con la tecnica di divisione

TEOREMA

valgano le ip. TCR, (a), (b), (c)

$$\psi(R) = \frac{e^{-\alpha R}}{E[e^{-\alpha R(T)} \mid T<+\infty]}$$

prob. asintotica di rovina in tempo continuo

$T=\inf\{t\geq 0 : R(t)<0\}$
α coeff di aggiustamento
R dotazione di capitale

Il risultato si trova ma non ha portata operativa

$$\lim_{\alpha\to 0} \psi(R) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\overbrace{e^{-\alpha R}}^{\to 1}}{\underbrace{E[e^{-\alpha R(T)} \mid T<+\infty]}_{\to 1}}$$

$$= m_{R(T)|T<+\infty}(-\alpha) \to m_{R(T)|T<+\infty}(0) = 1$$

$$= 1 \quad \forall R>0$$

$X = R(T)|T<+\infty$
$E[e^{-\alpha X}]$ valore in $-\alpha$ della fgm di X

$\vartheta \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$

$\Rightarrow \psi(R)=1 \quad \forall R>0$

Se i premi non sono caricati rispetto ai premi equi allora la prob asintotica di rovina è uguale a 1.

TEOREMA

TCR, (a), (b), (c)

$\Rightarrow \psi(R)$ soddisfa l'eq:

$$\psi'(R) = \frac{\lambda}{c}\psi(R) - \frac{\lambda}{c}\int_0^R \psi(R-y)\,dF_Y(y) - \frac{\lambda}{c}[1-F_Y(R)] \qquad R>0$$

(eq. integro-differenziale)

Questi risultati sono operativi nel caso $F_Y \sim exp(\rho)$

$$\psi(R) = \frac{1}{1+\vartheta} e^{-\alpha R}$$

Senza la distrib esponenziale non si arriva ad un risultato in forma chiusa.

DISEQUAZIONE DI LUNDBERG

$$\psi(R) \le e^{-\alpha R}$$

α coeff di aggiustamento (dipende da θ e F_X)

R dotazione di capitale

questa diseq. è utile se $e^{-\alpha R} < 1$.

più grande è α
e
più grande è R
$\Big\}$ → più piccola è la limitazione superiore

APPLICAZIONI

p_0 fissato, deve essere $\psi(R) \le p_0$ (es $p_0 = 0.01$)

- fissati F_X, R → si può lavorare solo su θ

$$\psi(R) \le \underbrace{e^{-\alpha R} \le p_0}$$
$$\Updownarrow$$
$$-\alpha R \le \ln p_0$$
$$-\alpha \le \frac{\ln p_0}{R}$$
$$\alpha \le -\frac{\ln p_0}{R}$$

si ha $\alpha \le -\frac{\ln p_0}{R}$ se risulta: $1+(1+\theta)\mu \cdot \left(-\frac{\ln p_0}{R}\right) = m_Y\left(-\frac{\ln p_0}{R}\right)$

$$\theta = \left[\left(m_Y\left(-\frac{\ln p_0}{R}\right)-1\right) \Big/ \left(-\mu\,\frac{\ln p_0}{R}\right)\right]-1$$

$$\Rightarrow \theta \ge \left[\left(m_Y\left(-\frac{\ln p_0}{R}\right)-1\right) \Big/ \left(-\mu\cdot\frac{\ln p_0}{R}\right)\right]-1$$

si può lavorare su θ entro i limiti impost dal mercato

- fissati F_X, θ → si può lavorare solo su R

$$\psi(R) \le e^{-\alpha R} \le p_0$$
$$-\alpha R \le \ln p_0$$
$$R \ge -\frac{\ln p_0}{\alpha}$$

si può lavorare su R entro i limiti imposti dagli azionisti

• fissati R, ϑ → si potrebbe agire solo su F_Y, ma come?

selezionare dei rischi che permettono di rientrare nel principio della prob. di rovina, ma ciò è estremamente limitativo

poniamo poi che il portafoglio sia già acquisito ⇒ F_Y è già fissato

$$\{R(t) = R + ct - S(t),\ t \geq 0\}$$

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

calcolo α da $\lambda + ct = \lambda m_Y(t)$ e trovo $e^{-\alpha R}$

l'unica cosa che resta è cercare una copertura riassicurativa.

EFFETTO DELLA RIASSICURAZIONE

consideriamo una copertura riassicurativa:

Y_h impegno originario della cedente

$y(Y_h)$ impegno al netto della riassicurazione $\quad 0 \leq y(y) \leq y \quad \forall y$

$S_{ced}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} y(Y_h)$ risarcimento totale a carico della cedente al netto dei contributi da parte del riassicuratore

$S_{riass}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} (Y_h - y(Y_h))$ contributi totali a carico del riassicuratore

es:

- RIASSICURAZIONE IN QUOTA

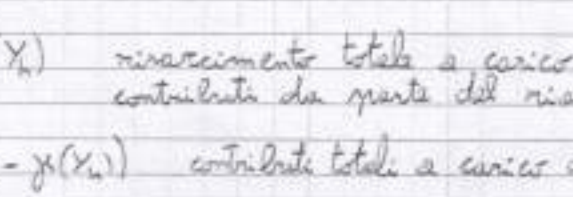
$0 \leq a \leq 1 \quad Y_h$

$y(Y_h) = aY_h$

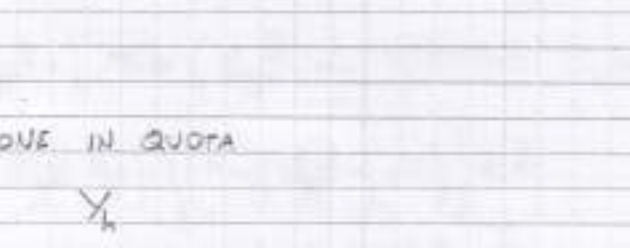
$Y_h - y(Y_h) = (1-a)Y_h$

- EXCESS OF LOSS (XL)

$L \geq 0$



$= \min(Y_h, L)$



$= \max(0, Y_h - L)$

$\{S(t),\ t \geq 0\}$: $\cdot\ \{N(t),\ t \geq 0\}$ proc. di Poisson con intensità λ

$\cdot\ \{Y_1, Y_2, \dots\}$ $\forall m, n, H$ $\quad Y_{m+1}|H, \dots, Y_{m+n}|H$ iid con F_Y non dip. da m, n, H

$\to$ è proc. Poisson-composto (λ, F_Y)

∘ considero $\{S_{ced}(t),\ t \geq 0\}$: $\cdot\ \{N(t),\ t \geq 0\}$ stesso proc. di prima

$\cdot\ \{\chi(Y_1), \chi(Y_2), \dots\}$ $\quad \chi(Y_{m+1})|H, \dots, \chi(Y_{m+n})|H$ iid con $F_{\chi(Y)}$ non dip. da m, n, H

$\to$ è proc. Poisson-composto $(\lambda, F_{\chi(Y)})$

$$E[S_{ced}(t+1) - S_{ced}(t)] = \lambda E[\chi(Y)]$$

$$E[\chi(Y)] = \int_0^{+\infty} \chi(y)\, dF_Y(y)$$

∘ considero $\{S_{riass}(t),\ t \geq 0\}$: $\cdot\ \{N(t),\ t \geq 0\}$

$\cdot\ \{Y_1 - \chi(Y_1), Y_2 - \chi(Y_2), \dots\}$ $\quad F_{Y-\chi(Y)}$ } in analogia al caso precedente

$\to$ è proc. Poisson-composto $(\lambda, F_{Y-\chi(Y)})$

$$E[S_{riass}(t+1) - S_{riass}(t)] = \lambda E[Y - \chi(Y)]$$

$P_{riass}(t)$ = montepremi pagato dalla cedente in $[0,t]$ al riassicuratore

$\stackrel{!}{=} c_r t$ $\quad c_r > 0$ premi pagati al riass. in un interv. unitario

$c_r = (1+\xi)\lambda E[Y - \chi(Y)]$ $\quad \xi > 0$ coefficiente di caricamento di sicurezza per il riassicuratore

$\{R_{ced}(t),\ t \geq 0\}$

$$R_{ced}(t) = R + ct - c_r t - S_{ced}(t)$$
$$\stackrel{!}{=} R + (c - c_r)t - S_{ced}(t)$$

ovviamente si ricorre alla riassicurazione se i premi al netto della riass. non mandano la prob. di rovina a 1

$c - c_r > E[S_{ced}(t+1) - S_{ced}(t)]$

$(1+\theta)\lambda\mu - (1+\xi)\lambda E[Y - \chi(Y)] > \lambda E[\chi(Y)]$

$\Rightarrow \lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\dots}(t)$

risolvendo troviamo α_{ced} radice dell' eq.

$$m_{\beta(Y)}(t) = E[e^{t\beta(Y)}] = \int_0^{+\infty} e^{t\beta(y)} dF_Y(y)$$

CASO RIASSICURAZIONE IN QUOTA

$$R_{ced}(t) = R + (c - c_r)t - S_{ced}(t)$$

$$c = (1+\vartheta)\lambda\mu \qquad \vartheta>0,\ \mu = E(Y)$$

$$c_r = (1+\xi)\lambda E[(1-a)Y]$$

$$= (1+\xi)\lambda(1-a)\mu$$

$$c - c_r > \lambda E[aY] = \lambda a\mu \qquad \text{vincolo}$$

$$(1+\vartheta)\lambda\mu - (1+\xi)(1-a)\lambda\mu > \lambda\mu$$

$$(1+\vartheta) - (1+\xi) > a - (1+\xi)a$$

$$\vartheta - \xi > -\xi a$$

$$a > 1 - \frac{\vartheta}{\xi}$$

se fosse $\vartheta = \xi$ il vincolo sarebbe $a>0$, ma non si può cedere tutto il rischio

$$\lambda + (c - c_r)t = \lambda \underbrace{m_{aY}(t)}_{m_Y(at)}$$

$\boxed{TS-22-10-2013}$ (20 min)

α_{ced} è radice positiva di: $\lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\beta(Y)}(t)$

$$\lambda + [(1+\vartheta)\lambda\mu - (1+\xi)\lambda(1-a)\mu]t = \lambda m_Y(at)$$

a:

$$F_Y \sim \exp(\rho) \qquad E(Y) = \mu = \frac{1}{\rho} \qquad m_Y(t) = \frac{\rho}{\rho - t} \quad t<\rho$$

sia $\vartheta = \xi \Rightarrow a>0$

$$\lambda + [(1+\vartheta)\lambda\mu - (1+\vartheta)(1-a)\lambda\mu]t = \lambda \frac{\rho}{\rho - at} \qquad at<\rho$$

$$\lambda + [(1+\vartheta)\lambda\mu(1-1+a)]t = \lambda\frac{\rho}{\rho - at} \quad /:\lambda \qquad \lambda>0$$

$$1 + (1+\vartheta)\mu a t = \frac{\rho}{\rho - at}$$

$$\rho - at + (1+\vartheta)\mu a t(\rho - at) = \rho$$

$$-at + (1+\vartheta)\mu t - (1+\vartheta)\mu^2 t^2 = 0 \qquad \mu = \frac{1}{\beta}$$

$$t_1 = 0$$

$$-1 + (1+\vartheta) - (1+\vartheta)\mu t = 0 \qquad \text{(ho diviso per } at,\ a>0)$$

$$\vartheta - (1+\vartheta)\mu t = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{a\mu} \cdot \frac{\vartheta}{1+\vartheta} = \alpha_{ced}$$

se $a=1$ la cedente trattiene tutto il rischio

$$\alpha_{ced} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\vartheta}{1+\vartheta} = \alpha$$

α_{ced} cresce al decrescere di a, quindi $e^{-\alpha_{ced} R}$ decresce

al diminuire della quota di ritenzione si abbassa la prob. asintotica di rovina

CASO EXCESS OF LOSS

$$L \geq 0 \text{ priorità} \qquad Y_h \begin{cases} \min(Y_h, L) = \chi(Y_h) & \text{cedente} \\ \max(0, Y_h - L) = Y_h - \chi(Y_h) & \text{riassicuratore} \end{cases}$$

$$E[\chi(Y)] = E[\min(Y,L)] = \int_0^L \bar{F}_Y(y)\,dy \qquad \bar{F}_Y = 1 - F_Y \text{ funzione delle code}$$

$$E[Y - \chi(Y)] = E[\max(0, Y-L)] = \int_L^{+\infty} \bar{F}_Y(y)\,dy$$

$$m_{\chi(Y)}(t) = E\left[e^{t\chi(Y)}\right] = \int_0^{+\infty} e^{t\chi(y)}\,dF_Y(y) = \int_0^L e^{ty}\,dF_Y(y) + \underbrace{\int_L^{+\infty} e^{tL}\,dF_Y(y)}_{e^{tL}(1-F_Y(L))}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- T. MIKOSCH (2004), "Non-Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes", SPRINGER.
- KAAS, altri (2001), "Modern Actuarial Risk Theory", KLUWER
- DENUIT, CHARPENTIER, "Mathématiques de l'Assurance Non-Vie", ECONOMICA (2004)
- KLUGMAN, altri (1998), "Loss Models: from Data to Decisions", WILEY

TARIFFAZIONE BASATA SULL'ESPERIENZA

Quando si ha un portafoglio di rischi si è soliti dividere tali rischi in più classi sulla base di alcune variabili e parametri, per poi assegnare ad ogni classe, detta CLASSE TARIFFARIA, un premio che tenga conto della classificazione elaborata. Tale procedura è detta TARIFFAZIONE e PERSONALIZZAZIONE A PRIORI, anche perché si guarda a caratteristiche comuni a tutti gli assicurati di una stessa classe senza tener conto delle diverse storie di essi.

In alcuni ambiti tale fase è seguita da una seconda procedura detta TARIFFAZIONE e PERSONALIZZAZIONE A POSTERIORI BASATA SULL'ESPERIENZA

Si fanno degli sconti sul premio agli assicurati che non provocano sinistri, mentre per quelli che causano sinistri viene aggravato l'importo del premio.

Ci si basa sul principio che la storia assicurativa dell'individuo rivela caratteristiche non osservabili a priori.

MERIT RATING o EXPERIENCE RATING

Si passa da un premio collettivo relativo alla classe ad un premio individuale maggiormente commisurato alla sinistrosità dell'individuo.

Ci sono tre possibili strade:

- APPROCCIO BAYESIANO
- TEORIA DELLA CREDIBILITÀ
- SISTEMI BONUS/MALUS

// RICHIAMO

$(\mathbb{P}, \mathcal{A}, P_r(\cdot))$ $\quad$ $\mathbb{P}$ partizione di Ω

$\mathcal{A}$ σ-algebra

$P_r(\cdot)$ misura di prob.

Y v.a. $\quad Y(\cdot): \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ misurabile

$\exists\ E(Y)$ finita

U v.a. $\quad U(\cdot): \mathbb{P} \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ misurabile

$\mathcal{X}$ → insieme immagine

$E(Y|U)$ speranza matematica di Y condizionata alla σ-algebra indotta da U

$E[E(Y|U)] = E(Y)$

OSS:

$Y,\ U$

$\forall u,\quad Y|U=u$ con legge assegnata

assegnata la legge di U

$$\Pr(Y \le y) = \int_{\mathcal{X}} \Pr(Y \le y \mid U=u)\, dF_U(x)$$

$$E(Y) = \int_{\mathcal{X}} E(Y \mid U=u)\, dF_U(x)$$

se è data una funzione di regressione $E[Y|U=\cdot]: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$\text{con } E(Y) = \int_{\mathcal{X}} E(Y \mid U=u)\, dF_U(u) = E[E(Y|U)]$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P} \arrow[r, "U(\cdot)"] & \mathcal{X} \arrow[r, "E(Y|U=\cdot)"] & \mathbb{R} \\ \omega \arrow[rr, bend right] & U(\omega)=u & E[Y|U=u] \end{tikzcd}$$

$\exists\ E(Y^2)$ finita $\rightarrow E(Y^2|U)$

poniamo $Var(Y|U) = E(Y^2|U) - E(Y|U)^2$

$$E[Var(Y|U)] = \underbrace{E[E(Y^2|U)]}_{E(Y^2)} - E[E(Y|U)^2]$$

$$Var[E(Y|U)] = E[E(Y|U)^2] - \underbrace{E[E(Y|U)]^2}_{E(Y)^2}$$

$$\rightarrow E[Var(Y|U)] + Var[E(Y|U)] = E(Y^2) - \cancel{E[E(Y|U)^2]} + \cancel{E[E(Y|U)^2]} - E(Y)^2 = Var(Y)$$

$$Var(Y) = E[Var(Y|U)] + Var[E(Y|U)]$$ FORMULA DI SCOMPOSIZIONE DELLA VARIANZA

APPROCCIO BAYESIANO ALLA PERSONALIZZAZIONE IN BASE ALL'ESPERIENZA

Consideriamo una collettività di rischi "analoghi" ed indipendenti

fissiamo l'assicurato i-esimo della collettività

$Y_{i1}, Y_{i2}, \dots$ processo stocastico a parametro discreto di n.a. di interesse

Y_{it} = valore al della grandezza di interesse per l'i-esimo soggetto nel periodo $[t-1, t]$

$$Y_{it} = \begin{cases} N_{it} & \text{num. sinistri nel periodo } t \\ X_{it} & \text{risarcimento tot. nel periodo } t \end{cases} \quad \text{per i-esimo assicurato}$$

U_i parametro al di rischio o componente di eterogeneità per i-esimo sogg. tiene conto del profilo di rischio dell'iesimo assicurato, non osservabile

- $\forall u$ determinazione di U_i è assegnata la legge $\mathcal{F}_{U_i}$ del processo $\{Y_{i1}|U_i=u\,;\ Y_{i2}|U_i=u\,;\ \dots\}$
- sia assegnata la legge di U_i (F_{U_i}, f_{U_i})

$\Rightarrow$ risulta assegnata la legge del proc. $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$

$$P_r(E) = \int P_r(E|U_i=u)\, dF_{U_i}(u)$$

- "analogia"

$\mathcal{F}_{U_i}$, F_{U_i}, f_{U_i} sono le medesime per ogni assicurato della collettività cioè il processo $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ ha la stessa legge (F_U, f_U) $\forall i$ e $\{Y_{i1}|U_i=u\} \overset{d}{=} \{Y_{j1}|U_j=u\}$ $\forall u$, con legge $\mathcal{F}_U$

- indipendenza

$\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ siano stocasticamente indipendenti $\forall i$

inoltre $\forall i$ $Y_{i1}|U_i=u$, $Y_{i2}|U_i=u, \dots$ siano stocasticamente indipendenti

per fare valutazioni sull'i-esimo assicurato posso disinteressarmi degli altri

→ fissiamo l'attenzione su un generico individuo della collettività (omettiamo l'indice i)

$Y_1, Y_2, \dots$

U

$\forall u$ $Y_1|U=u$, $Y_2|U=u, \dots$ sono stocasticamente indip. con legge assegnata

è assegnata la legge di U

$$F_{Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}}(y_1,\dots,y_n) = Pr(Y_{t_1} \le y_1, \dots, Y_{t_n} \le y_n)$$

$$= \int Pr(Y_{t_1} \le y_1, \dots, Y_{t_n} \le y_n \mid U=u)\, dF_U(u)$$

$$= \int \prod_{j=1}^{n} Pr(Y_{t_j} \le y_j)\, dF_U(u) \underset{\text{in generale}}{\neq} \prod_{j=1}^{n} \int Pr(Y_{t_j} \le y_j \mid U=u)\, dF_U(u)$$

da ciò si vede che gli $Y_1, Y_2, \dots$ non sono stocasticamente indipendenti

→ la storia individuale di sinistrosità è rilevante ai fini della valutazione probabilistica del processo di interesse

$\boxed{\text{TS-25-10-2013}}$ (22 ore)

$E(Y_{T+1})$ è il premio a priori / collettivo

se conoscessimo $U=u$ → $E(Y_{T+1} \mid U=u) = \mu_{T+1}(u)$ potremmo fare una valutazione più corretta che tiene conto dell'effettiva sinistrosità dell'assicurato

$\mu_{T+1}(u)$ premio individuale

tuttavia U non è mai osservabile

→ $E(Y_{T+1} \mid U) = \mu_{T+1}(U)$ premio individuale è aleatorio
c'è un condizionamento alla σ-algebra indotta da U

si potrebbe valutare il premio individuale in T+1 basandoci sull'esperienza dell'individuo in esame ottenendo quindi una stima di $E(Y_{T+1} \mid U)$

$$E(Y_{T+1}) \xrightarrow[Y_1,\dots,Y_T]{} \hat{E}(Y_{T+1} \mid U)$$

$E[Y_{T+1}] = E[E(Y_{T+1} \mid U)] = E[\mu_{T+1}(U)]$ premio a priori con F_U

sia $H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$ con $Pr(H_T) > 0$

$E[Y_{T+1} \mid H_T] = \int y\, dF_{Y_{T+1} \mid H_T}(y)$ speranza matematica a posteriori

$$= \int \underbrace{E(Y_{T+1} \mid H_T, U=u)}_{E(Y_{T+1} \mid U=u) = \mu_{T+1}(u)}\, dF_{U \mid H_T}(u) = E[\mu_{T+1}(U) \mid H_T]$$

premio a posteriori o bayesiano con $F_{U \mid H_T}$

se la distribuzione di U è dotata di densità f_U

$$E[Y_{T+1} | H_T] = \dots$$

$$\stackrel{!}{=} \int \mu_{T+1}(u) \underbrace{f_{U|H_T}(u)}_{= f_U(u) P_r(H_T | U = u) \, = \, P_r(H_T)} du$$

più in generale

$E(Y_{T+1} | Y_1, \dots, Y_T) = E(\mu_{T+1}(U) | Y_1, \dots, Y_T)$ stimatore bayesiano del premio individuale in $T+1$

se K è sotto σ-algebra di $\mathcal{H}$

$$E(X | K) = E[E(X | \mathcal{H}) | K]$$

$$E[Y_{T+1} | Y_1, \dots, Y_T] = E[\underbrace{E(Y_{T+1} | Y_1, \dots, Y_T, U)}_{= \mu_{T+1}(U) = E(Y_{T+1} | U) \text{ per indip. condizionata}} | Y_1, \dots, Y_T]$$

$\rightarrow E[\mu_{T+1}(U) | Y_1, \dots, Y_T] = \tilde{\mu}_{T+1}(U)$

// RICHIAMO

$Y_1, \dots, Y_T$ n.a. osservabili

X n.a. non osservabile

posso trovare una $g(Y_1, \dots, Y_T)$ stima di X con un "errore minimo"?

uso come misura dell'errore $E[(X - g(Y_1, \dots, Y_T))^2]$ perdita quadratica attesa

cerco quindi una funz. $g(\cdot)$ che minimizza la " " "

$\rightarrow$ trovo che $g(Y_1, \dots, Y_T) = E(X | Y_1, \dots, Y_T)$ //

$X = \mu_{T+1}(U)$

$$\Rightarrow E[\mu_{T+1}(U) | Y_1, \dots, Y_T] = \tilde{\mu}_{T+1}(U)$$

questo stimatore è la $g(Y_1, \dots, Y_T)$ che minimizza la perdita quadratica attesa

PROCESSO POISSON-GAMMA PER IL PROCESSO DI ARRIVO DEI SINISTRI

collettività rischi "analoghi" ed indipendenti

un rischio individuale

$N_1, N_2, \dots$ processo a parametro discreto, N_t num. di sinistri in $[t-1, t]$

U parametro aleatorio di rischio

- $\forall u$ determinazione di U $\quad N_1|U=u, N_2|U=u, \dots$ v.c. iid
- $\forall u \quad N_t|U=u \sim Poi(\lambda u) \quad \lambda>0$
- $U \sim Gamma(\alpha, \alpha) \quad \alpha>0$
- "analogia" $\rightarrow$ α, λ non dipendono dall'individuo in esame, cioè valgono le stesse conclusioni probabilistiche per ogni soggetto della collettività

<u>OSS:</u> <u>QUADRO GENERALE</u>

i, j 2 soggetti

$U_i \neq U_j$ ma $U_i \overset{d}{=} U_j$ a priori per ipotesi

$$E[Y_{i,t+1}] = E[\mu_{i,t+1}(U_i)] = E[\mu_{j,t+1}(U_j)] = E[Y_{j,t+1}]$$

osservo $H_{i\,t}$ $H_{j\,t}$

$\begin{matrix} Y_{i,t+1}|H_{i\,t} \\ Y_{j,t+1}|H_{j\,t} \end{matrix}$ dipendono da $\begin{matrix} U_i|H_{i\,t} \\ U_j|H_{j\,t} \end{matrix}$ ma $U_i|H_{i\,t} \overset{d}{\neq} U_j|H_{j\,t}$ a posteriori

---

$E(U)=1 \qquad Var(U)=\frac{1}{\alpha}$

$E(N_t|U=u)=\lambda u$ premio per l'anno t se si conoscesse $U=u$

$E(N_t|U)=\lambda U$ premio individuale aleatorio

$E(N_t)=E[E(N_t|U)]$

$\quad \overset{!}{=} E[\lambda U]=\lambda E(U)=\lambda$ premio collettivo in ogni anno

α è legato alla varianza di U

al crescere di α, la varianza di U decresce, cioè la collettività è "più omogenea", i premi individuali sono meno dispersi

al diminuire di α, la varianza di U cresce, cioè la collettività è "più eterogenea", i premi individuali sono più dispersi

$$Var(N_t) = E[\underbrace{Var(N_t|U)}_{\lambda U}] - Var[\underbrace{E(N_t|U)}_{\lambda U}]$$ (vedi formula scomposiz. Var)

$$= \lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha}$$

$N_t \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$ risultato "noto" in precedenza

PROCESSO POISSON - GAMMA (λ, α)

fissati: $T, m_1, \dots, m_T$

$$Pr(N_1 = m_1, \dots, N_T = m_T) = \int_0^{+\infty} \underbrace{Pr(N_1 = m_1, \dots, N_T = m_T \mid U = u)}_{\prod_{t=1}^{T} Pr(N_t = m_t \mid U = u)} \underbrace{dF_U(u)}_{f_U(u)\,du}$$

$$= \int_0^{+\infty} \prod_{t=1}^{T} \frac{e^{-\lambda u} (\lambda u)^{m_t}}{m_t!} f_U(u)\, du$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u T} \frac{(\lambda u)^{\sum_t m_t}}{\prod_t (m_t!)} \cdot \frac{\alpha^\alpha u^{\alpha-1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)} du$$

$$= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha) \prod_t (m_t!)} \lambda^{\sum_t m_t} \int_0^{+\infty} \underbrace{u^{\alpha + \sum_t m_t - 1} e^{-u(\alpha + \lambda T)}}_{\text{nucleo Gamma}\left(\alpha + \sum_t m_t,\ \alpha + \lambda T\right)} du$$

$$= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\lambda^{\sum_t m_t}}{\prod_t (m_t!)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \sum_t m_t)}{(\alpha + \lambda T)^{\alpha + \sum_t m_t}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \sum m_t)}{\Gamma(\alpha) \prod_t (m_t!)} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda T}\right)^\alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda T}\right)^{\sum_t m_t}$$

OSS:

- $$\prod_{t=1}^{T} Pr(N_t = m_t) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\Gamma(\alpha + m_t)}{\Gamma(\alpha) m_t!} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)^\alpha \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\right)^{m_t}$$

  $$N_t \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)$$

  $\Rightarrow$ in generale $Pr(N_1 = m_1, \dots, N_T = m_T) \neq \prod_{t=1}^{T} Pr(N_t = m_t)$

  $\Rightarrow \{N_t, t = 1, 2, \dots\}$ non è un processo di v.c. stocasticamente indipendenti

- considero $(i_1, \dots, i_T)$ permutazione di $(1, \dots, T)$

  trovo che $Pr(N_{i_1} = m_1, \dots, N_{i_T} = m_T) = Pr(N_1 = m_1, \dots, N_T = m_T)$

  $$\Rightarrow (N_{i_1}, \dots, N_{i_T}) \overset{d}{=} (N_1, \dots, N_T)$$

  $\Rightarrow \{N_t, t = 1, 2, \dots\}$ è un processo scambiabile valutare N_{T+1}

$E(N_{T+1}) = \lambda$ premio collettivo

$E(N_{T+1} \mid U) = \lambda U$ premio individuale

$H_T = (N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T)$

$$E(N_{T+1} \mid H_T) = \int_0^{+\infty} E(N_{T+1} \mid H_T, U = u)\, dF_{U|H_T}(u)$$

premio bayesiano a posteriori

$$= \int_0^{+\infty} E(N_{T+1} \mid U = u)\, dF_{U|H_T}(u)$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda u \, dF_{U|H_T}(u) = \lambda \int_0^{+\infty} u \, dF_{U|H_T}(u)$$

$$= \lambda E[U \mid H_T]$$

$$f_{U|H_T}(u) = \frac{f_U(u) \Pr(H_T \mid U = u)}{\Pr(H_T)} \propto f_U(u) \Pr(H_T \mid U = u)$$

$$f_U(u) \Pr(H_T \mid U = u) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha - 1} e^{-\alpha u} \cdot \frac{e^{-\lambda u T} (\lambda u)^{\sum_t n_t}}{\prod_t (n_t!)}$$

$$\propto u^{\alpha + \sum_t n_t - 1} \cdot e^{-(\alpha + \lambda T) u}$$ nucleo di una Gamma $(\alpha + \Sigma n_t, \alpha + \lambda T)$

$$\Rightarrow U \mid H_T \sim \text{Gamma}\left(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t, \alpha + \lambda T\right)$$

$$E[U \mid H_T] = \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t}{\alpha + \lambda T}$$

OSS:

$U \sim \text{Gamma}(\alpha, \alpha)$

$U \mid H_T \sim \text{Gamma}\left(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t, \alpha + \lambda T\right)$ è sempre una gamma ma con i parametri aggiornati

$$E(N_{T+1} \mid H_T) = \lambda \cdot \frac{\alpha + \sum_t n_t}{\alpha + \lambda T}$$ dipende da $\lambda, \alpha, T, \sum_{t=1}^{T} n_t$

$$= \lambda \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha + \lambda T}}_{1 - z_T} + \frac{\sum_t n_t}{T} \cdot \underbrace{\frac{\lambda T}{\alpha + \lambda T}}_{z_T}$$

il premio a posteriori può essere visto come una combinazione convessa di λ premio collettivo a priori e $\frac{\sum_t n_t}{T}$ numero medio annuo di sinistri osservato, stima grezza per il num. medio dell'anno T+1

→ è una particolare FORMULA DI CREDIBILITÀ

$1 - z_T$ decresce al crescere di T (a parità del resto)

$\Rightarrow z_T$ cresce al crescere di T : $z_T \xrightarrow{T \to \infty} 1$

via via che passa il tempo si dà peso sempre maggiore alla sintesi dell'esperienza individuale

z_T decresce al crescere di α (a parità del resto)

α "grande" → la collettività dei rischi è più omogenea e quindi si dà meno peso alla sintesi dell'esperienza individuale

α "piccolo" → la collettività dei rischi è più eterogenea e quindi si dà maggior peso alla sintesi dell'esperienza individuale

TS-28-10-2013 (24 ore) 5ª SETT

ASPETTO NEGATIVO

della storia individuale $(n_1, \dots, n_T)$ conta solo $\frac{\sum_{t=1}^{T} n_t}{T}$ riassunto

T-uple diverse portano allo stesso riassunto

es: $(1, 0, 0, \dots, 0)$
$(0, 0, 0, \dots, 1)$ due storie differenti, lo stesso riassunto → stesso premio

ciò è dovuto al fatto che il parametro di rischio Θ è supposto costante nel tempo (in altri modelli lo si fa variare)

$$C_{T+1}(H_T) = \frac{E(N_{T+1} \mid H_T)}{E(N_{T+1})}$$ COEFFICIENTE DI AGGIORNAMENTO o DI REVISIONE

$$\rightarrow E(N_{T+1} \mid H_T) = E(N_{T+1})\, C_{T+1}(H_T)$$

se $C_{T+1}(H_T) > 1$ → premio individuale maggiore del premio collettivo

se $C_{T+1}(H_T) < 1$ → " " minore " " "

$$C_{T+1}(H_T) = \frac{\alpha + \sum_t n_t}{\alpha + 2T}$$

$$C_{T+1}(H_T) > 1 \iff \alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t > \alpha + 2T$$

$$\sum_{t=1}^{T} n_t > 2T$$

$E(N_1 + \dots + N_T) = \sum_{t=1}^{T} E(N_t) = 2T$

num. sinistri osservati > num. atteso di sinistri considerati due individui i, j

$E(N_{i,T+1}) = E(N_{j,T+1}) = \lambda$ stesso premio a priori

$E[E(N_{i,T+1}|U_i)] = E[\lambda U_i]$

$E[E(N_{j,T+1}|U_j)] = E[\lambda U_j]$ $\quad U_i \overset{d}{=} U_j$

$H_{i,T} \quad E(N_{i,T+1}|H_{i,T}) = \lambda E(U_i|H_{i,T})$

$H_{j,T} \quad E(N_{j,T+1}|H_{j,T}) = \lambda E(U_j|H_{j,T})$ $\quad U_i|H_{i,T} \overset{d}{\neq} U_j|H_{j,T}$ differente premio a posteriori

in generale

esempio:

CLASSE 1: proc. Poisson-gamma (λ_1, α)

CLASSE 2: " " (λ_2, α) $\quad \lambda_1 < \lambda_2$

le riduzioni di premio per la classe 1 sono più piccole rispetto a quelle della classe 2, gli aggravi per la classe 1 sono più piccoli rispetto a quelli della classe 2

gli assicurati della classe 1 sono giudicati "buoni" → "se sbagliano pagano di più"

" " " " 2 " " "cattivi" → "se sbagli un pò me lo aspettavo"

ovviamente il premio a priori per la classe 1 è inferiore di quello della classe 2.

$N_{T+1} \sim BinNeg\left(\alpha; \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$

$N_{T+1}|H_T \sim BinNeg\left(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t, \frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right) \quad H_T = (N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T)$

$Pr(N_{T+1} = n|H_T) = \int Pr(N_{T+1} = n|H_T, U = u)\, dF_{U|H_T}(u)$

Nella pratica λ e α sono non noti $\Rightarrow$ in un'ottica bayesiana i parametri incogniti sono v.a. → considero Λ e A v.a.

$N_t | U = u, \Lambda = \lambda, A = \alpha, \dots \quad$ i.i.d

$N_t | U = u, \Lambda = \lambda, A = \alpha \sim Poi(\lambda u)$

$U | \Lambda = \lambda, A = \alpha \sim gamma(\alpha, \alpha)$

(Λ, A) con legge assegnata

nella pratica si utilizza un approccio bayesiano empirico

λ, α non noti ma "certi" (non sono v.a.)

$\hookrightarrow$ stimati dai dati

$$P_r(N_{T+1}=n \mid H_T) = \frac{P_r(N_{T+1}=n,\ H_T)}{P_r(H_T)}$$

$$P_r(N_{T+1}=n,\ H_T) = \int P_r(H_T,\ N_{T+1}=n \mid U=u)\, dF_U(u)$$

$1,\dots,n$

$$= \int \prod_{t=1}^{T} \frac{(\lambda u)^{n_t} e^{-\lambda u}}{n_t!} \cdot \frac{(\lambda u)^{n} e^{-\lambda u}}{n!} \cdot \frac{\alpha^{\alpha} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)}\, du$$

$$= \int \frac{(\lambda u)^{\sum n_t + n} e^{-\lambda u(T+1)}}{\prod_t (n_t!)\, n!} \cdot \frac{\alpha^{\alpha} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)}\, du$$

) iid

$$= \frac{\lambda^{\sum_t n_t + n}\ \alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \prod_t (n_t!)\, n!} \int u^{\alpha+\sum_t n_t + n - 1} e^{-u(\alpha+\lambda(T+1))}\, du$$

$$= \frac{\lambda^{\sum n_t + n}\ \alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha) \prod_t (n_t!)\, n!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t + n)}{(\alpha+\lambda(T+1))^{\alpha+\sum_t n_t + n}}$$

(λ, α)

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \sum n_t + n)}{\Gamma(\alpha) \prod_t (n_t!)\, n!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\sum_t n_t + n}$$

ZIONE DI
VEROSIMIGLIANZA

$$\frac{P_r(N_{T+1}=n,\ H_T)}{P_r(H_T)} = \frac{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t + n)}{\Gamma(\alpha) \prod_t (n_t!)\, n!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\sum n_t + n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \prod_t (n_t!)}{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t)} \cdot \left(\frac{\alpha+\lambda T}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha+\lambda T}{\lambda}\right)^{\sum n_t}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t + n)}{\Gamma(\alpha+\sum_{t=1}^{T} n_t)\, n!} \cdot \left(\frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\sum n_t} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{n}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t + n)}{\Gamma(\alpha+\sum_{t=1}^{T} n_t)\, n!} \cdot \left(\frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\alpha+\sum_t n_t} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{n}$$

$+\lambda T)\big)\big]$

$$\Rightarrow N_{T+1} \mid H_T \sim \text{BinNeg}\left(\alpha+\sum_t n_t,\ \frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)$$

considerati due individui i, j

$E(N_{i,T+1}) = E(N_{j,T+1}) = \lambda$ stesso premio a priori

$E[\,E(N_{i,T+1}|$

$E[\,E(N_{j,T+1}|$

$Pr(N_{T+1}=m|H_T) = \int Pr(N_{T+1}=m|H_T, U=u)\, dF_{U|H_T}(u) =$

$Pr(N_{T+1}=m|H_T, U=u) = Pr(N_{T+1}=m|U=u)$ indip. $N_t|U=u$ $t=1,2,\dots$

$U|H_T \sim gamma\left(\alpha+\sum_{t=1}^{T} n_t,\ \alpha+\lambda T\right)$ $N_t|U=u \sim Po(\lambda u$

$$= \int Pr(N_{T+1}=m|U=u)\, f_{U|H_T}(u)\, du$$

$$= \int \frac{(\lambda u)^m e^{-\lambda u}}{m!} \frac{(\alpha+\lambda T)^{\alpha+\sum_t n_t} u^{\alpha+\sum_t n_t-1} e^{-u(\alpha+\lambda T)}}{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t)}\, du$$

$$= \frac{\lambda^m(\alpha+\lambda T)^{\alpha+\sum_t n_t}}{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t)\, m!} \int \underbrace{u^{\alpha+\sum_t n_t+m-1} e^{-u(\alpha+\lambda(T+1))}}_{\text{nucleo di una gamma}(\alpha+\sum_t n_t+m,\ \alpha+\lambda(T+1))} du$$

$$= \frac{\lambda^m(\alpha+\lambda T)^{\alpha+\sum_t n_t}}{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t)\, m!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t+m)}{(\alpha+\lambda(T+1))^{\alpha+\sum_t n_t+m}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t+m)}{\Gamma(\alpha+\sum_t n_t)\, m!} \cdot \left(\frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{\alpha+\sum_t n_t} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)^{m}$$

$$\Longrightarrow N_{T+1}|H_T \sim BinNeg\left(\alpha+\sum_t n_t;\ \frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)$$

$H_{i,T}$ E

$H_{j,T}$ E

esempio:

CLASSE 1:

CLASSE 2:

le riduzioni

classe 2,

della classe 2

gli assicurati

〃 〃

ovviamente

$N_{T+1} \sim Bin$

$N_{T+1}|H_T \sim$

$Pr(N_{T+1}=m$

Nella pratica

incognite λ

$N_t|U=u$

$N_t|U=u,$

$U|\Lambda=\lambda,\ A=\alpha \sim gamma(\alpha,\alpha)$

(Λ, A) con legge assegnata

nella pratica si utilizza un approccio bayesiano empirico

λ, α non noti ma "certi" (non sono v.a.)

$\hookrightarrow$ stimati dai dati

STIMA DI (λ, α)

r rischi osservati per T anni

$N_{i,t}$ v.a. sinistri per l'anno t dell'i-esimo assicurato $\quad i=1,\dots,r$

U_i parametro al. di rischio per i-esimo assicurato

$n_{i,t}$ determinazione di $N_{i,t}$ osservata

- $(U_1, N_{11}, N_{12}, \dots), \dots, (U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots), \dots, (U_r, N_{r1}, N_{r2}, \dots)$ iid
- $(U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots)$

$$\left.\begin{array}{l} N_{i1}|U_i=u, N_{i2}|U_i=u, \dots \quad \text{iid} \\ N_{it}|U_i=u \sim Poi(\lambda u) \\ U_i \sim gamma(\alpha, \alpha) \end{array}\right\} (N_{i1}, N_{i2}, \dots) \sim \text{proc. Poisson-gamma } (\lambda, \alpha)$$

$$L(\lambda, \alpha) = \prod_{i=1}^{r} P_r(N_{i1}=n_{i1}, \dots, N_{iT}=n_{iT}; \lambda, \alpha)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{\Gamma(\alpha + \sum_t n_{it})}{\Gamma(\alpha) \prod_t (n_{it}!)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda T}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda T}\right)^{\sum_t n_{it}}$$

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA

notazione:

$n_i = \sum_{t=1}^{T} n_{it}$

$n = \sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{t=1}^{T} n_{it}$

$$\ell(\lambda, \alpha) \doteq \ln L(\lambda, \alpha)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[\ln \frac{\Gamma(\alpha+n_i)}{\Gamma(\alpha)} - \ln \prod_t (n_{it}!) + \alpha(\ln\alpha - \ln(\alpha+\lambda T)) + n_i(\ln\lambda - \ln(\alpha+\lambda T)) \right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda} \ell(\lambda, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \ell(\lambda, \alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda}(\lambda,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left[-\alpha\frac{1}{\alpha+\lambda T}T + m_i\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha+\lambda T}T\right)\right]$$

$$= \frac{-\alpha T}{\alpha+\lambda T}\cdot n + \frac{m}{\lambda} - \frac{1}{\alpha+\lambda T}\cdot Tm$$

$$\frac{-\alpha T}{\alpha+\lambda T}\cdot n + \frac{m}{\lambda} - \frac{Tm}{\alpha+\lambda T} = 0$$

$$\frac{-\alpha\lambda T n + m\alpha + \cancel{m\lambda T} - \cancel{Tm\lambda}}{\underbrace{\lambda(\alpha+\lambda T)}_{>0}} = 0 \iff -Tn\lambda + m = 0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{m}{T\cdot n}$$ FREQUENZA SINISTRI stimata sul portafoglio

<u>OSS:</u> (per trovare $\hat{\alpha}$)

$$\frac{\Gamma(\alpha+m_i)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+m_i-1)\dots\alpha\cdot\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}}$$

Questo modello permette di avere risultati relativamente semplici

$$\left.\begin{array}{l} N_i|U=u \sim Poi(\lambda u) \\ U\sim gamma(\alpha,\alpha)\end{array}\right\} \Rightarrow U|H_T \sim gamma\left(\alpha+\sum_{i=1}^{T} n_i\,;\ \alpha+\lambda T\right)$$

<u>ASPETTI NEGATIVI DELL'APPROCCIO BAYESIANO</u>

- bisogna assegnare la legge del processo $Y_1|U=u, Y_2|U=u, \dots$
  - " " " " di U

  → è necessaria una specificazione completa in termini probabilistici e questa è una richiesta molto forte
- trovare la legge di $U|H_T$ (a posteriori) può non essere così "facile"
- un cliente può avere grosse difficoltà a capire l'approccio bayesiano

  → problema commerciale

<u>APPROCCIO DELLA TEORIA DELLA CREDIBILITÀ ALLA PERSONALIZZAZIONE BASATA SULL'ESPERIENZA INDIVIDUALE</u>

Consideriamo una collettività di rischi "analoghi" ed indipendenti

fissiamo un particolare individuo della collettività (omettiamo indice i)

$Y_1, Y_2, \dots$ processo stocastico a parametro discreto di v.a. di interesse

per l'assicurato considerato

U parametro al. di rischio legato all'assicurato (tiene conto del suo profilo di rischio)

- $\forall u$ determinazione di U siano $Y_1|U=u, Y_2|U=u, \dots$ m.a. strettamente indip.
- $E(Y_{T+1}|U)$ premio individuale

considero una funzione del processo di osservazione piuttosto semplice, tipo
$$\alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t \quad \text{polinomio di 1° grado}$$
in modo da poter stimare al meglio possibile in questo senso il premio individuale $E(Y_{T+1}|U) = \mu_{T+1}(U)$

$\to$ minimizzare la perdita quadratica attesa:
$$\min_{\alpha_0,\dots,\alpha_T} E\left[\left(\mu_{T+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T}\alpha_t Y_t\right)^2\right]$$

pongo $Q(\alpha_0,\dots,\alpha_T) = E\left[\left(\mu_{T+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T}\alpha_t Y_t\right)^2\right]$
$$= \int \left(\mu_{T+1}(u) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T}\alpha_t y_t\right)^2 dF_{U,Y_1,\dots,Y_T}(u, y_1,\dots,y_T) \quad \text{integr. multiplo}$$

il modello probabilistico sia tale da soddisfare le condizioni di derivabilità sotto il segno di integrale
$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = \int 2\left(\mu_{T+1}(u) - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t y_t\right)(-1)\, dF_{U,Y_1,\dots,Y_T}(u, y_1,\dots,y_T)$$
$$= -2\, E\left[\mu_{T+1}(U) - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t Y_t\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 0 \iff \underline{E[\mu_{T+1}(U)]} - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t E(Y_t) = 0$$
$$E[E(Y_{T+1}|U)] = E(Y_{T+1})$$
$$E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T}\alpha_t E(Y_t)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_h} = \int 2\left(\mu_{T+1}(u) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T}\alpha_t y_t\right)(-y_h)\, dF_{U,Y_1,\dots,Y_T}(u, y_1,\dots,y_T) \qquad h=1,\dots,T$$
$$= -2\, E\left[\mu_{T+1}(U) Y_h - \alpha_0 Y_h - \sum_t \alpha_t Y_t Y_h\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_h} = 0 \iff \underline{E[\mu_{T+1}(U) Y_h]} = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_t \alpha_t E(Y_t Y_h) \qquad h=1,\dots,T$$
$$= E[E(\mu_{T+1}(U) Y_h|U)] = E[\mu_{T+1}(U)\, E(Y_h|U)]$$
$$= E[\underbrace{E(Y_{T+1}|U)\, E(Y_h|U)}_{E(Y_{T+1} Y_h|U)}] = E(Y_{T+1} Y_h) \quad \text{indip. } Y_t|U$$

$$E(Y_{T+1} Y_h) = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_{t=1}^{T}\alpha_t E(Y_t Y_h) \qquad h=1,\dots,T$$

$\boxed{\text{TS-29-10-2013}}$ (26 ore)

$$\begin{cases} E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_t \alpha_t E(Y_t) & / \cdot (-E(Y_h)) \text{ e sommo} \\ E(Y_{T+1} Y_h) = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_t \alpha_t E(Y_t Y_h) & h=1,\dots,T \end{cases}$$

$$E(Y_{T+1} Y_h) - E(Y_{T+1})E(Y_h) = \sum_t \alpha_t \left[E(Y_t Y_h) - E(Y_t)E(Y_h) \right]$$

$$Cov(Y_{T+1}, Y_h) = \sum_t \alpha_t Cov(Y_t, Y_h)$$

↓ sostituisco

$$\begin{cases} E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_t \alpha_t E(Y_t) \\ Cov(Y_{T+1}, Y_h) = \sum_t \alpha_t Cov(Y_t, Y_h) & h=1,\dots,T \end{cases}$$ SISTEMA NORMALE

→ trovo $(\alpha_0^*, \dots, \alpha_T^*)$ soluzione del sistema

$$\widetilde{\mu}_{T+1}(U)^{cred} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_t$$ STIMATORE INDIVIDUALE DI CREDIBILITÀ LINEARE DEL PREMIO INDIVIDUALE IN T+1

ci sono dei vantaggi rispetto all'approccio bayesiano:

- il sistema si risolve guardando ai momenti primo e secondo del processo $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ → è necessaria una specificazione decisamente minore e lo stimatore è funzione lineare di $Y_1, \dots, Y_T$
- $E\left[\widetilde{\mu}_{T+1}(U)^{cred}\right] = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* E(Y_t) \overset{!}{=} E[Y_{T+1}] = E[\mu_{T+1}(U)]$

  → lo stimatore è non distorto
- $Q_1(\alpha_0, \dots, \alpha_T) = E\left[\left(Y_{T+1} - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t\right)^2\right]$

  $Q_2(\alpha_0, \dots, \alpha_T) = E\left[\left(E(Y_{T+1} | Y_1, \dots, Y_T) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t\right)^2\right]$

  risulta che $(\alpha_0^*, \dots, \alpha_T^*) = \begin{cases} \underset{\alpha_0, \dots, \alpha_T}{\operatorname{argmin}} Q_1 \\ \underset{\alpha_0, \dots, \alpha_T}{\operatorname{argmin}} Q_2 \end{cases}$

$H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$

$$P_{T+1}^{cred}(H_T) = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* y_t$$

MODELLO DI BÜHLMANN (1967)

collettività di rischi

per l'i-esimo individuo: $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots$ processo dei n.a. di interesse

U_i parametro aleatorio di rischio

- $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$ iid al variare di i
- fissato i, $\forall u$ determinazione di U_i $Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots$ iid

$E[Y_{it}|U_i=u] = \mu(u)$

$Var[Y_{it}|U_i=u] = v(u)$

non c'è dipendenza né da t né da i

$\rightarrow \mu(\cdot)$ $v(\cdot)$ comuni a tutti i rischi della collettività

sono supporti finiti

consideriamo:

$E(Y_{it}) = E[E(Y_{it}|U_i)] = E[\mu(U_i)] \triangleq \mu$ premio a priori

$E[Var(Y_{it}|U_i)] = E[v(U_i)] \triangleq v$

$Var[E(Y_{it}|U_i)] = Var[\mu(U_i)] \triangleq a$ dispersione della distribuzione di probabilità del premio a priori $a>0$

collettività omogenea $\rightarrow$ a "piccolo"

" eterogenea $\rightarrow$ a "grande"

<u>OSS:</u>

$$Var(Y_{it}) = E[Var(Y_{it}|U_i)] + Var[E(Y_{it}|U_i)] \stackrel{!}{=} v + a$$

fissato un assicurato "campione" (omettiamo i)

- $E(Y_t) = \mu$ $t = 1, \dots, T+1$
- $Var(Y_t) = v + a$ $t = 1, \dots, T$
- $Cov(Y_t, Y_h) = ?$ $t \neq h$

$$Cov(Y_t, Y_h) = E(Y_t Y_h) - E(Y_t)E(Y_h)$$

$$E(Y_t Y_h) = E[E(Y_t Y_h|U)] \stackrel{!}{=} E[\underbrace{E(Y_t|U)}_{\mu(U)} \underbrace{E(Y_h|U)}_{\mu(U)}] = E[\mu^2(U)]$$

$$E(Y_t) = E[\mu(U)] = E(Y_h)$$

$$Cov(Y_t, Y_h) = E[\mu(U)^2] - (E[\mu(U)])^2 \qquad t \neq h$$
$$\stackrel{!}{=} Var[\mu(U)] = a$$

$$\rightarrow Cov(Y_t, Y_h) = a \qquad t \neq h$$

SISTEMA NORMALE

$$\begin{cases} \mu = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} (\alpha_t \mu) \\ a = \alpha_h (v + a) + \sum_{t \neq h} (\alpha_t a) \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$a = \alpha_h v + a \sum_t \alpha_t \quad / : a$$

$$\begin{cases} \sum_t \alpha_t = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ 1 = \alpha_h \cdot k + \sum_t \alpha_t \qquad k = \frac{v}{a} \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\alpha_h k = 1 - 1 + \frac{\alpha_0}{\mu} \iff \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu k}$$

$$\rightarrow \sum_{h=1}^{T} \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k} \cdot T$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k} T = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu k} \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\alpha_0 \left(\frac{T}{\mu k} + \frac{k}{\mu k} \right) = 1 \iff \alpha_0 = \mu \frac{k}{T+k}$$

$$\begin{cases} \alpha_0^* = \frac{\mu k}{T+k} \\ \alpha_h^* = \frac{\mu k}{T+k} \cdot \frac{1}{\mu k} = \frac{1}{T+k} \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\tilde{\mu}_{T+1}^{cred}(U) = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_t$$
$$= \mu \frac{k}{T+k} + \sum_{t=1}^{T} Y_t \cdot \frac{1}{T+k}$$
$$= \mu \underbrace{\frac{k}{T+k}}_{1 - z_T} + \underbrace{\frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{T}}_{\bar{Y}_T} \underbrace{\frac{T}{T+k}}_{z_T}$$

combinazione lineare convessa

premio a priori

stima grezza

espressione analoga all'approccio Bayesiano con modello Poisson-gamma

$H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$

$$P_{T+1}^{cred}(H_T) = \mu \cdot \frac{k}{T+k} + \bar{y}_T \underbrace{\frac{T}{T+k}}$$ → PESO O FATTORE DI CREDIBILITÀ

z_T dipende da T:

cresce al crescere di T $\qquad z_T \xrightarrow{T \to +\infty} 1$

z_T dipende da $k = \frac{v}{a}$:

se a cresce (più eterogeneità), k decresce e z_T cresce

OSS:

abbiamo trovato α_h^* tutti uguali, potevamo aspettarcelo?

$Y_1 | U = u,\ Y_2 | U = u, \dots$ i.i.d

$\Rightarrow \{Y_1, Y_2, \dots\}$ è processo scambiabile

$(Y_1, \dots, Y_T) \stackrel{d}{=} (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_T}) \qquad (i_1, \dots, i_T)$ permutazione di $(1, \dots, T)$

La teoria della credibilità è nata su base intuitiva

$P_{T+1}(H_T) \quad , \qquad H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$

due strade:
- μ guardare alla collettività penalizzando gli assicurati "bravi"
- $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ guardare al singolo individuo facendo cadere la mutualità

si è scelto di trovare una via di mezzo tramite mistura:

$$\mu(1 - z_T) + \frac{\sum y_t}{T} z_T \qquad z_T \in]0,1[$$

ma come scegliere z_T? sono stati sviluppati vari approcci

Bühlmann ha inquadrato il problema in un ottica bayesiana

per sviluppare il modello è necessario conoscere μ, v, a

→ li si stima dai dati

STIMA DEI PARAMETRI (μ, v, a)

n rischi osservati ciascuno per T anni

$(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$

$y_{i1}, y_{i2}, \dots \qquad i = 1, \dots, n$

$\cdot (U_1, Y_{11}, Y_{12}, \ldots), \ldots, (U_i, U_{i1}, U_{i2}, \ldots), \ldots, (U_n, U_{n1}, U_{n2}, \ldots)$ iid

fissato i

$Y_{i1} | U_i = u, \; Y_{i2} | U_i = u, \ldots$ iid

$E[Y_{it} | U_i = u] = \mu(u)$

$Var[Y_{it} | U_i = u] = v(u)$

// RICHIAMO

$W_1, \ldots, W_s$ iid

$E(W_i) \triangleq E(W)$

$Var(W_i) \triangleq Var(W)$

$\bar{W} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} W_i \qquad E(\bar{W}) = E(W)$

$S^2 = \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^{s} (W_i - \bar{W})^2 \qquad E(S^2) = Var(W)$ //

$\bar{Y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_{it} \qquad \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{Y}_i$

$= \frac{1}{n} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} Y_{it} \qquad E(\tilde{\mu}) = \mu$

$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{\mu}_i$

$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_{it}$

$\hat{\mu}$ è la stima di μ

TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI

DANNI

2

tintaUNITA

37

TS-07-11-2013 | ASSENTE (28 ORE) 5^A SETTIMANA

- $\tilde{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \right]$.

$$E(\tilde{v}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\left[E\left(\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \,\middle|\, U_i \right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{E\left[Var(Y_{it} | U_i) \right]}^{v} = v$$

// RICHIAMO

$Y_{i1}|U_i = u, \dots, Y_{iT}|U_i = u$ iid con speranza matematica e varianza finite

$\rightarrow \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (Y_{it}|U_i = u - \bar{Y}_i|U_i = u)^2$ è stimatore non distorto della comune varianza

$\Rightarrow E\left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (Y_{it}|U_i = u - \bar{Y}_i|U_i = u)^2 \right] = Var(Y_{i1}|U_i = u)$ //

$$\hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (y_{it} - \hat{\mu}_i)^2 \right]}_{\hat{\sigma}^2}$$

$\hat{v}$ è stima di v

- per il parametro a (varianza di valori attesi)

vedo se $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$ è uno stimatore non distorto

$$\bar{Y} = \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \bar{Y}_i \qquad \bar{Y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_{it}$$

$E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] = Var(\bar{Y}_i)$ varianza dei m.a. perché:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{Y}_1, & \dots, & \bar{Y}_i, & \dots, & \bar{Y}_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

funz. di $Y_{11}, \dots, Y_{1T}$ m.a. stoc. indip. — funz. di $Y_{i1}, \dots, Y_{iT}$ m.a. stoc. indip. — funz. di $Y_{n1}, \dots, Y_{nT}$ m.a. stoc. indip.

gli $\bar{Y}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ sono funz. su insiemi disgiunti di m.a. iid

$\Rightarrow \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ iid

$$Var(\bar{Y}_i) = E[Var(\bar{Y}_i | U_i)] + Var[E(\bar{Y}_i | U_i)]$$

$$= E\left[Var\left(\frac{1}{T} \sum_t Y_{it} \,\middle|\, U_i \right) \right] + Var\left[E\left(\frac{1}{T} \sum_t Y_{it} \,\middle|\, U_i \right) \right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2} \sum_t Var(Y_{it} | U_i) \right] + Var\left[\frac{1}{T} \sum_t E(Y_{it} | U_i) \right]$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2} T\, v(U_i)\right] + Var\left[\frac{1}{T}\cdot T\, \mu(U_i)\right]$$

$$= \frac{1}{T} E[v(U_i)] + Var[\mu(U_i)] = \frac{1}{T}\cdot v + a$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right] = \frac{1}{T}\cdot v + a \neq a$$

non è quindi uno stimatore non distorto di a, ma possiamo aggiustarlo

$$\tilde{a} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \frac{1}{T}\tilde{v}$$

infatti $E[\tilde{a}] = \frac{1}{T}\cdot v + a - \frac{1}{T}\overbrace{E(\tilde{v})}^{=v} = a$

$$\hat{a} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2 - \frac{1}{T}\hat{v}$$

$\hat{a}$ è la stima di a

tuttavia nelle ipotesi del modello abbiamo posto $a>0$, mentre potrebbe capitare che $\hat{a}$ risulti nullo o negativo (sottraggo $\frac{1}{T}\hat{v}$)

il modello risulterebbe incompatibile con i dati

nella pratica può accadere che si usi $\hat{\hat{a}} = \max(\hat{a}, 0)$

($a=0 \rightarrow$ non c'è dispersione sul premio a priori, la collettività è perfettamente omogenea)

una volta calcolati $\hat{\mu}, \hat{v}, \hat{a}$ si trova

$$\widetilde{\mu_{T+1}(U_i)}^{cred} = \hat{\mu}\,\frac{T}{T+\hat{k}} + \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it}\right)\frac{\hat{k}}{T+\hat{k}} \qquad \hat{k} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}}$$

$\rightarrow$ stima del premio individuale di credibilità

PROCESSO DI POISSON SEMIPARAMETRICO PER IL NUMERO DI SINISTRI

collettività di rischi

per l'i-esimo individuo: $N_{i1}, N_{i2}, \dots$ processo dei numeri di arrivo di interesse

U_i parametro aleatorio di rischio

- $(U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots)$ iid al variare di i
- fissato i, $\forall$ u determinazione di U_i

$$N_{i1}|U_i = u,\ N_{i2}|U_i = u, \dots \quad \text{iid}$$

- $N_{it} \mid U_i = u \sim Poi(\lambda u) \quad \lambda > 0$
- $E(U_i) = 1 \qquad Var(U_i) = \sigma^2$

quali sarebbero μ, v, a?

$E[N_{it} \mid U_i = u] = \lambda u = \mu(u)$ in questo caso è lineare

$Var[N_{it} \mid U_i = u] = \lambda u = v(u)$

$\mu = E[E(N_{it} \mid U_i)] = E[\lambda U_i] = \lambda$ premio collettivo (come nel processo Poisson-gamma)

$v = E[Var(N_{it} \mid U_i)] = E[\lambda U_i] = \lambda$

$a = Var[E(N_{it} \mid U_i)] = Var[\lambda U_i] = \lambda^2 \sigma^2$

sono soddisfatte le ipotesi del modello di Bühlmann, e in più si è ipotizzato che $N_{it} \mid U_i = u \sim Poi(\lambda u)$, $\lambda > 0$

posso quindi calcolare $\hat{\lambda}, \hat{a}$

$$\rightarrow \widetilde{\mu}^{cred}_{T+1}(U_i) = \mu \frac{T}{T+\hat{k}} + \frac{\sum_{t=1}^{T} n_{it}}{T} \cdot \frac{\hat{k}}{T+\hat{k}} \qquad \hat{k} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}^2 \hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\hat{\lambda} \hat{\sigma}^2}$$

↳ stima di $E[Y_{i\,T+1} \mid U_i]$ premio individuale

<u>ASPETTI NEGATIVI DEL MODELLO DI BÜHLMANN</u>

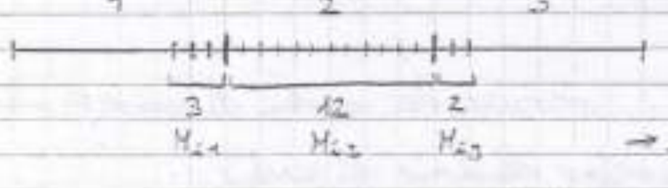
in questo modello si è ipotizzato che:

$\forall u \quad Y_{i1} \mid U_i = u,\ Y_{i2} \mid U_i = u, \ldots$ siano i.i.d

ma l'identica distribuzione può creare dei problemi

<u>es. 1</u>:

$Y_{it} = M_{it}$ num. di sinistri per l'i-esimo assicurato nell'anno t nel periodo di esposizione



→ i tempi di esposizione sono diversi

è poco ragionevole considerare gli M_{it} identicamente distribuiti proprio per il fatto che i tempi di esposizioni sono differenti es. 2:

$Y_{it} = X_{it}$ risarcimento totale per l'i-esimo assicurato nell'anno t, a valore intero con V_{it} valore assicurato

anche in questo caso l'identica distribuzione risulta essere poco ragionevole perché X_{it} è legato a V_{it} che può cambiare nel tempo

es. 3:

$Y_{it} = \overline{X}_{it}$ risarcimento totale per l'i-esimo portafoglio nell'anno t, con montepremi P_{it} (il rischio è il portafoglio)

se P_{it} varia di anno in anno difficilmente $\overline{X}_{it}$ saranno identicamente distribuiti

appare quindi evidente la necessità di definire un modello che non preveda l'identica distribuzione degli $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots \ \forall u$

MODELLO DI BÜHLMANN-STRAUSS (1970)

collettività di rischi

per il rischio i-esimo: $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots$ processo dei n.a. di interesse

U_i parametro aleatorio di rischio

- $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$ stocasticamente indipendenti
- U_i identicamente distribuiti $\forall i$
- fissato i:

$\forall u$ determinazione di U_i; $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti

$$\exists \text{ finiti } \begin{cases} E[Y_{it}|U_i = u] = \mu(u) \\ Var[Y_{it}|U_i = u] = \dfrac{v(u)}{m_{it}} \end{cases}$$

$\mu(u)$ non dipende da t

$v(u)$ non dipende da i, t

m_{it} misura di esposizione o volume
è un num certo, un dato

es. 1: M_{it} = num di sinistri rischio i-esimo, anno t nel periodo di esposizione

$$Y_{it} = \frac{M_{it}}{exp_{it}}$$

exp_{it} = tempo di esposizione rischio i-esimo, anno t

num sinistri per unità di esposizione

trovo che:

$$E\left(\frac{M_{it}}{exp_{it}} \middle| U_i = u \right) = \mu(u)$$

$$Var\left(\frac{M_{it}}{exp_{it}} \middle| U_i = u \right) = \frac{v(u)}{exp_{it}}$$ → varia con il tempo (dipende da t)

es. 2:

X_{it} risarcimento totale i-esimo rischio, anno t, con V_{it} valore assicurato

$Y_{it} = \frac{X_{it}}{V_{it}}$ tasso di premio

trovo che:

$$E\left(\frac{X_{it}}{V_{it}} \middle| U_i = u \right) = \mu(u)$$

$$Var\left(\frac{X_{it}}{V_{it}} \middle| U_i = u \right) = \frac{v(u)}{V_{it}}$$

es. 3:

$\overline{X}_{it}$ risarcimento totale i-esimo portafoglio, anno t, monteprem P_{it}

$Y_{it} = \frac{\overline{X}_{it}}{P_{it}}$

accolgo la ipotesi che:

$$E\left(\frac{\overline{X}_{it}}{P_{it}} \middle| U_i = u \right) = \mu(u)$$

$$Var\left(\frac{\overline{X}_{it}}{P_{it}} \middle| U_i = u \right) = \frac{v(u)}{P_{it}}$$

---

consideriamo:

$E[Y_{it}] = E[E(Y_{it}|U_i)] = E[\mu(U_i)] \triangleq \mu$ premio a priori

$E[Var(Y_{it}|U_i)] = \left[\frac{1}{m_{it}} v(U_i)\right] = \frac{1}{m_{it}} E[v(U_i)] = \frac{1}{m_{it}} v$

$E[v(U_i)] \triangleq v$ non dipende da i

$\Rightarrow v = E[m_{it} Var(Y_{it}|U_i)]$

$Var[E(Y_{it}|U_i)] = Var[\mu(U_i)] \triangleq a$ non dipende da i

$E[Y_{i,T+1} | U_i] = \mu(U_i)$ premio individuale

consideriamo il sistema normale (omettiamo indice i)

$(U, Y_1, Y_2, \dots)$ $\quad m_t$

$$\begin{cases} E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_t) \\ Cov(Y_{T+1}, Y_h) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Cov(Y_t, Y_h) \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

troviamo i coeff. $\alpha_0^*, \dots, \alpha_t^*$ che ci permettono di calcolare lo stimatore di credibilità del premio individuale:

$$\widetilde{\mu_{T+1}}(U)^{cred} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_t$$

$E(Y_t) = \mu \quad t = 1, \dots, T, T+1$

$$Var(Y_t) = E[Var(Y_t | U)] + Var[E(Y_t|U)] \overset{!}{=} \frac{1}{m_t} v + a$$

$$\underset{t \neq h}{Cov(Y_t, Y_h)} = E(Y_t Y_h) - E(Y_t)E(Y_h) \overset{!}{=} E[\mu(U)^2] - E[\mu(U)]^2 = Var[\mu(U)] = a$$

$E(Y_t Y_h) = E[E(Y_t Y_h | U)] = E[E(Y_t|U) E(Y_h|U)]$ per indip. $Y_1|U, Y_2|U, \dots$

$\overset{!}{=} E[\mu(U) \cdot \mu(U)] = E[\mu(U)^2]$ momento secondo del premio individuale

$$E[Y_t] = E[E(Y_t|U)] = E[\mu(U)] = E[E(Y_h|U)] = E[Y_h]$$

per sviluppare il sistema normale abbiamo bisogno dei parametri μ, v, a che supponiamo assegnati

il sistema diventa:

$$\begin{cases} \mu = \alpha_0 + \mu \sum_t \alpha_t \\ a = \alpha_h \cdot \left(\frac{1}{m} v + a\right) + \sum_{t \neq h} (\alpha_t a) \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$a = \alpha_h \frac{1}{m_h} v + a \sum_t \alpha_t \Big/ \cdot \frac{1}{a}$$

$$\begin{cases} \sum_t \alpha_t = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ 1 = \alpha_h \frac{1}{m_h} k + \sum_t \alpha_t \qquad k = \frac{v}{a} \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\alpha_h \frac{1}{m_h} k = 1 - 1 + \frac{\alpha_0}{\mu} \iff \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu} \cdot \frac{m_h}{k}$$

$$\rightarrow \sum_{h=1}^{T} \alpha = \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k} \sum_{h=1}^{T} m_h \qquad \sum_{h=1}^{T} m_h = m$$

$$= \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k} m$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k} m = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu} \cdot \frac{m_h}{k} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha_0}{\mu k} m + \frac{\alpha_0}{\mu} = 1 \iff \alpha_0 \Big(\underbrace{\frac{m}{\mu k} + \frac{1}{\mu}}_{= \frac{m+k}{\mu k}} \Big) = 1$$

$$\iff \alpha_0 = \mu \frac{k}{m+k}$$

$$\begin{cases} \alpha_0^* = \mu \cdot \frac{k}{m+k} \\ \alpha_h^* = \frac{k}{m+k} \cdot \frac{m_h}{k} = \frac{m_h}{m+k} \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$\boxed{\text{TS-05-11-2013}}$ (30 ORE)

$$\widetilde{\mu}_{T+1}(U)^{cred} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_t$$

stimatore di $E(Y_{T+1}|U)$ premio individuale

$$= \mu \cdot \frac{k}{m+k} + \sum_{t=1}^{T} \frac{m_t}{m+k} Y_t$$

$$= \mu \cdot \underbrace{\frac{k}{m+k}}_{1-z_T} + \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{m_t}{m} Y_t \right) \cdot \overbrace{\frac{m}{m+k}}^{z_T}$$

combinazione convessa

premio a priori $E(Y_{T+1})$

$\left(\text{media ponderata dei } Y_t \text{ con pesi } \frac{m_t}{m}\right) = \bar{Y}_T$

$H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$

$$P_{T+1}^{cred}(H_T) = \mu \cdot \frac{k}{m+k} + \sum_{t=1}^{T} \frac{m_t}{m} y_t \cdot \frac{m}{m+k}$$

z_T dipende da m:

al crescere di m, $1 - z_T$ decresce $\rightarrow z_T$ cresce

z_T dipende da $k = \frac{v}{a}$:

a cresce, k decresce $\rightarrow z_T$ cresce considero i-esimo individuo:

$$\tilde{\mu}_{T+1}(\Theta_i)^{cred} = \mu \frac{k}{m_{i\cdot}+k} + \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{m_{it}}{m_{i\cdot}} Y_{it}\right) \frac{m_{i\cdot}}{m_{i\cdot}+k} \qquad m_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{T} m_{it}$$

il peso di credibilità dipende dall'individuo

STIMA DEI PARAMETRI

Per sviluppare il modello è necessario disporre di μ, v, a: li si stima dai dati.

Supponiamo di disporre di osservazioni per n rischi della collettività osservati ciascuno per T anni:

$$Y_{it} \rightarrow y_{it} \qquad \begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ t=1,\dots,T \end{array}$$

$$m_{it}$$

posto:

$$m_{i\cdot} = \sum_{t=1}^{T} m_{it} \qquad m_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{n} m_{i\cdot}$$

$$\bar{\bar{Y}}_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{m_{it}}{m_{i\cdot}} Y_{it} \qquad \bar{\bar{Y}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i\cdot}}{m_{\cdot\cdot}} \bar{\bar{Y}}_i$$

- $\tilde{\mu} = \bar{\bar{Y}}$

- $$\tilde{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\underbrace{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} m_{it} (Y_{it} - \bar{\bar{Y}}_i)^2}_{\sigma_i^2} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

- $$\tilde{a} = \frac{m_{\cdot\cdot}}{m_{\cdot\cdot}^2 - \sum_{i=1}^{n} (m_{i\cdot})^2} \left[\sum_{i=1}^{n} m_{i\cdot} (\bar{\bar{Y}}_i - \bar{\bar{Y}})^2 - (n-1)\tilde{v} \right]$$

esempio:

		ANNO 1	ANNO 2	ANNO 3	ANNO 4
C L	RISARCIMENTO TOTALE	12'000	15'000	17'000	21'460,28
A S	MISURA DI ESPOSIZIONE	50	60	70	90
S E 1	RISARCIMENTO TOT. PER UNITÀ DI ESPOSIZ.	240	250	242.86	238.45

		ANNO 1	ANNO 2	ANNO 3	ANNO 4
CLASSE 2	RISARCIMENTO TOTALE	30'000	36000	28000	21990,42
	MISURA DI ESPOSIZIONE	150	160	120	100
	RISARCIMENTO TOT. PER UNITÀ DI ESPOSIZ.	200	225	233.33	219.90

$m_{1.} = 180$ $\quad \bar{\bar{y}}_1 = 244.44$ $\quad \hat{\mu} = 226.23$

$m_{2.} = 430$ $\quad \bar{\bar{y}}_2 = 218.60$ $\quad \hat{\tau} = 21'878$

$m_{..} = 610$ $\quad \bar{\bar{y}} = 226.23 = \hat{\mu}$ $\quad \hat{\lambda} = 247.64$

$z_{1,3} = 0.671 \quad z_{2,3} = 0.83$

PROCESSO POISSON MISTURA SEMIPARAMETRICO CON COMPONENTI DI REGRESSIONE

collettività di rischi

per l'i-esimo individuo: $N_{i1}, N_{i2}, \dots$ numeri dei n.a. di interesse

U_{i1} parametro aleatorio di rischio

- $(U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots)$ stocasticamente indipendenti al variare di i
- $U_1, U_2, \dots$ identicamente distribuiti

fissato i, $\forall u$ determinazione di U_i

$N_{i1}|U_i = u,\ N_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti

- $N_{it}|U_i = u \sim Poi(\lambda_{it}\, u)$
- $E(U_i) = 1 \qquad Var(U_i) = \tau^2$

$E(N_{it}|U_i = u) = \lambda_{it}\, u$

$E(N_{it}|U_i) = \lambda_{it}\, U_i$

$E(N_{it}) = E[E(N_{it}|U_i)]$

$= \lambda_{it} E(U_i) = \lambda_{it}$ — il num atteso annuo di sinistri dipende dall'assicurato (i) e dall'anno (t)

→ non c'è stazionarietà

posto $Y_{it} = \dfrac{N_{it}}{\lambda_{it}}$

$$E(Y_{it}|U_i=u) = E\left(\frac{N_{it}}{\lambda_{it}}\Big|U_i=u\right) = \frac{1}{\lambda_{it}}\cdot\lambda_{it}\,u = u$$

$$Var(Y_{it}|U_i=u) = Var\left(\frac{N_{it}}{\lambda_{it}}\Big|U_i=u\right) = \frac{1}{\lambda_{it}^2}\,\lambda_{it}\,u = \frac{u}{\lambda_{it}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mu(u)=u\\ v(u)=u\\ m_{it}=\lambda_{it}\end{array}}$$

→ per i processi $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, ...)$ $i=1,...,n$ sono soddisfatte le ipotesi del modello Bühlmann-Straub

$$\mu = E[E(Y_{it}|U_i)] = E[U_i] = 1$$

$$v = E[\lambda_{it}\,Var(Y_{it}|U_i)] = \lambda_{it}\cdot E\left(\frac{U_i}{\lambda_{it}}\right) = 1$$

$$a = Var[E(Y_{it}|U_i)] = Var(U_i) = \sigma^2$$

dati λ_{it}, σ^2

$E[Y_{i,T+1}|U_i]$ premio individuale $\mu(U_i)$

$$\widetilde{\mu_{T+1}(U_i)}^{cred} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1} + \sum_{t=1}^{T}\frac{\lambda_{it}}{\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}}\,Y_{it}\cdot\frac{\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}}{\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}+\frac{1}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}+1} + \frac{\sum_{t=1}^{T}N_{it}}{\cancel{\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}}}\cdot\frac{\sigma^2\cancel{\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}}}{\sigma^2\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}+1}$$

$$= \frac{1+\sigma^2\sum_{t=1}^{T}N_{it}}{1+\sigma^2\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}}$$

$$E[N_{i,T+1}|U_i] = E[\lambda_{i,T+1}\,Y_{i,T+1}|U_i]$$

$$= \lambda_{i,T+1}\,E[Y_{i,T+1}|U_i]$$

$$\widetilde{E(N_{i,T+1}|U_i)}^{cred} = \underbrace{\lambda_{i,T+1}}_{\substack{E(N_{i,T+1})\\ \text{premio a priori}}}\cdot\left.\frac{1+\sigma^2\sum_{t=1}^{T}N_{it}}{1+\sigma^2\sum_{t=1}^{T}\lambda_{it}}\right]$$

fornisce l'adeguamento rispetto l'esperienza

CREDIBILITÀ ESATTA

- $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$ iid $\forall i$
- $\forall u$ determinazione di U_i

$Y_{i1}|U_i = u$, $Y_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti con legge assegnata

- U_i abbia legge assegnata

Abbiamo visto che per stimare $E(Y_{i,T+1}|U_i)$ premio individuale si usa lo stimatore bayesiano $E(Y_{i,T+1}|Y_{i1}, \dots, Y_{iT})$.

può accadere che $E(Y_{i,T+1}|Y_{i1}, \dots, Y_{iT}) = a_0 + \sum_{t=1}^{T} a_t Y_t$

se lo stimatore è lineare il premio bayesiano e quello di credibilità coincidono $\rightarrow$ si dice che si ha CREDIBILITÀ ESATTA o APPROCCIO BAYESIANO ESATTO

- $Y_{it}|U_i = u \sim \frac{p(y) e^{-uy}}{q(u)}$ famiglia esponenziale lineare
- $U_i \sim \frac{q(u)^{h} e^{-u\alpha h}}{c(\alpha, h)}$ α, h parametri; $c(\alpha, h)$ costante di normalizzazione

$H_T = (Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{iT} = y_{iT})$

$$f_{U_i|H_T}(u) \propto f_{U_i}(u) \prod_{t=1}^{T} f_{Y_{it}|U_i=u}(y_{it}) \propto$$

$$\propto q(u)^{-h} e^{-u\alpha h} e^{-u\sum_{t=1}^{T} y_{it}} q(u)^{-T} = q(u)^{-(h+T)} e^{-u(\alpha h + \sum_{t=1}^{T} y_{it})}$$

$f_{U_i}(u) \propto q(u)^{-h} e^{-u\alpha h}$

$f_{U_i|H_T}(u) \propto q(u)^{-(h+T)} e^{-u(\alpha h + \sum_{t=1}^{T} y_{it})}$

famiglie coniugate naturali: stessa famiglia di distribuzione ma con i parametri aggiornati

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- KLUGMAN, altri (1998), "Loss Models: from Data to Decision", WILEY
- T. MIKOSH (2004), "Non Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes", SPRINGER
- DENUIT, CHARPENTIER (2005), "Mathematique de l'Assurance Non-Vie", ECONOMICA
- BÜHLMANN, GISLER (2005), "A course in Credibility Theory and its Applications", SPRINGER

TS-08-11-2013 (32 ore)

SISTEMI BONUS-MALUS

Consideriamo un portafoglio ripartito in classi tariffarie

t anno di calendario, i classe tariffaria, T anni di osservazione

H_T = storia di sinistrosità

$$P_t^{(i)}(H_T) = f(P_t^{(i)}; n_1,\dots,n_T; y_{11},\dots,y_{1n_1}; y_{21},\dots,y_{2n_2}; \dots; y_{T1},\dots,y_{Tn_T})$$

Si potrebbe valutare il premio individuale guardando oltre che all'anno e alla classe tariffaria anche al num annuo di sinistri e ai singoli importi di risarcimento per ciascun sinistro, ma questa valutazione è piuttosto pesante.

Modelli alternativi più semplici:

$\bar{f}(P_t^{(i)}, n_1,\dots,n_T)$ → classe tariffaria, anno, num sinistri per ciascun anno passato

$g(P_t^{(i)}, n_T, \varphi(n_1,\dots,n_{T-1}))$ → classe tariffaria, anno, num sinistri dell'anno precedente e sintesi sul num. sinistri anni precedenti

In questo modo è possibile suddividere le classi tariffarie in ulteriori classi di merito, in cui:

$(C_{t-1}, N_{t-1}) \longrightarrow C_t$

ovvero la classe dell'anno t dipende dalla classe dell'anno $t-1$ e dal num. di sinistri avvenuti nell'anno $t-1$

Si guarda solo al numero di sinistri e non agli importi di risarcimento perché, oltre che essere più semplice, uno stesso sinistro può provocare danni molto diversi ed inoltre il num. di sinistri è conosciuto quasi subito

Per costruire un sistema di questo tipo è necessario definire:

- classi di merito o classi BM, $1,\dots,J$
- regola di ingresso: j_0 classe di ingresso (sia per un nuovo assicurato

che per un assicurato giunto da un'altra compagnia)

- regole evolutive o di transizione

$$\underset{\substack{\text{classe BM}\\\text{dell'assicurato}\\\text{anno } t}}{(C_t}, \underset{\substack{\text{num sinistri}\\\text{anno } t}}{n_t)} \longrightarrow \underset{\substack{\text{classe BM}\\\text{di arrivo}}}{C_{t+1}}$$

- scala dei coefficienti di premio

CLASSE	COEFF. PREMIO
1	π_1
⋮	⋮
j	π_j
⋮	⋮
J	π_J

$\pi_1 \le \pi_2 \le \dots \le \pi_j \le \dots \le \pi_J$

$P^{BM}_{t,i,j} = P_{t,i} \cdot \pi_j$ PREMIO BONUS-MALUS anno t, classe tariff. i, classe BM j

$P_{t,i}$ = premio di riferimento o premio base

spesso $P_{t,i} = \underset{\substack{\text{premio di riferimento}\\\text{di portafoglio anno } t}}{P_t} \cdot \underset{\substack{\text{"relatività"}\\\text{legata alla classe}\\\text{tariff. } i}}{y_i}$

$\pi_j < 1 \Rightarrow P^{BM}_{t,i,j} < P_{t,i}$ → sconto nel premio base, CLASSE DI BONUS

$\pi_j > 1 \Rightarrow P^{BM}_{t,i,j} > P_{t,i}$ → aggravio nel premio base, CLASSE DI MALUS

può esserci un h t.c. $\pi_h = 1 \Rightarrow P^{BM}_{t,i,h} = P_{t,i}$ CLASSE BM DI RIFERIMENTO

SISTEMA "MINISTERIALE" (RCA)

in vigore in Italia prima della liberalizzazione tariffaria

18 CLASSI

$j_0 = 14$

$h = 13$

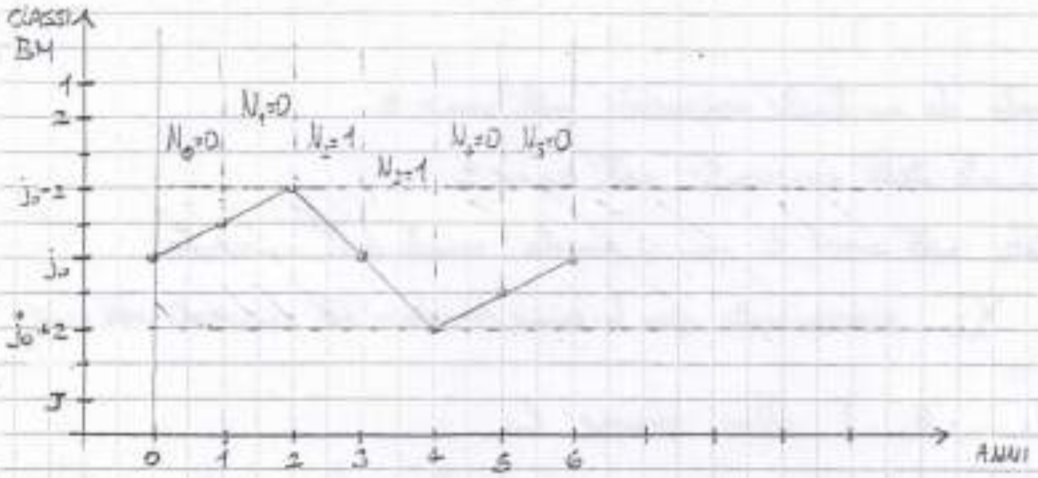
j	π_j
1	0.5
⋮	⋮
13	1
14	1.15
⋮	⋮
18	2

$$C_{t+1} = \begin{cases} C_t - 1 & N_t = 0 \\ C_t + 2 & N_t = 1 \\ C_t + 5 & N_t = 2 \\ C_t + 8 & N_t = 3 \\ C_t + 11 & N_t \ge 4 \end{cases}$$

più correttamente $$C_{t+1} = \begin{cases} \max(C_t - 1, 1) & N_t = 0 \\ \min((C_t + 3)N_t - 1, 18) & N_t = 1,2,3 \\ \min(C_t + 11, 18) & N_t \ge 4 \end{cases}$$

OSS:

poniamo che si osservi una frequenza sinistri pari a $\frac{1}{3}$ (cioè 1 sinistro ogni 3 anni).



con un sinistro ogni 3 anni l'assicurato si trova sempre in una classe tra j_0-2 e j_0+2

se la freq. sinistri è $< \frac{1}{3}$ ⇒ l'assicurato tende a spostarsi nelle classi di bonus ↗

se " " è $> \frac{1}{3}$ ⇒ " " " " " di malus ↘

in Italia si osserva una freq. sinistri complessiva di 0.07 che è ben minore di $\frac{1}{3}$ → la gran parte degli assicurati tende a spostarsi nelle classi di bonus in breve tempo

→ non si differenziano più i premi in modo efficace

→ il sistema presto non è più in equilibrio finanziario

se all'interno di una classe tariffaria si pone un unico premio uguale per tutti allora si ha la massima solidarietà (alcuni pagano più dell'equo, altri meno)

se invece si personalizza molto si ha una solidarietà minima

in tutte le tariffe si vuole che ci sia un giusto equilibrio tra solidarietà e personalizzazione per evitare fenomeni di antiselezione

essendo previsto un aggravio di premio in caso di sinistro, può accadere che l'assicurato paghi da solo il danno per evitarlo → autoliquidazione

tuttavia aggravi troppo pesanti potrebbero portare l'assicurato ad autoassicurarsi e a evitare di denunciare sinistri portando sempre più soggetti e sempre più velocemente nelle classi di bonus.

ALCUNI INDICATORI PER VALUTARE SISTEMI BM

collettività di rischi "omogenei per caratteristiche osservabili a priori

→ ci concentriamo su una classe tariffaria (ometto indice i)

P_t premio base

C_t classe BM occupata da un fissato assicurato nell'anno t

N_t num sinistri causati dall'assicurato nell'anno t

X_t risarcimento totale nell'anno t per i sinistri causati dall'assicurato

$X_t = \sum_{h=1}^{N_t} Y_{t,h}$ $\quad Y_{t,h}$ risarcimento per h-esimo sinistro dell'assicurato nell'anno t

se conosco $(C_1, N_1, N_2, \dots, N_{t-1})$ allora conosco C_t

per studiare il processo $\{C_1, C_2, \dots\}$ è necessario formulare ipotesi probabilistiche sul processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$

$$N_t \mid N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1};\ Y_{11} = y_{11}, \dots, Y_{1n_1} = y_{1n_1};\ Y_{21} = y_{21}, \dots, Y_{2n_2} = y_{2n_2}, \dots \overset{d}{=}$$
$$\overset{d}{=} N_t \mid N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1}$$

basta conoscere il numero di sinistri di ciascun anno, non serve conoscere gli importi di tutti i risarcimenti di ciascun sinistro

$X_t \sim$ distrib. composta

$E(X_t) = E(N_t)\,E(Y_t)$ $\quad E(N_t)$ = num medio di sinistri anno t

$E(Y_t)$ = risarcimento medio per sinistro anno t in ipotesi che il sinistro si sia verificato

DISTRIBUZIONE DI C_t

$Pr(C_t = j) \qquad j = 1, \dots, J$

come evolve tale probabilità al variare di t?

dipende dalla legge di $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ e dalla regole di transizione

$b_t = \sum_{j=1}^{J} \gamma_j \, Pr(C_t = j)$ $\quad$ COEFFICIENTE MEDIO DI PREMIO
premio atteso anno t con $P_t = 1$

$$\underset{\text{premio}}{\tilde{\Pi}_t} = \begin{cases} P_t \gamma_1 & \text{con } Pr(C_t = 1) \\ \vdots & \vdots \\ P_t \gamma_J & \text{con } Pr(C_t = J) \end{cases}$$

$$E[\tilde{\Pi}_t] = \sum_{j=1}^{J} P_t \, \pi_j \, Pr(C_t = j) = P_t \cdot b_t$$

come si comportano le $Pr(C_t = j)$?

$Pr(C_1 = 1) \longrightarrow Pr(C_t = 1)$ le prob. delle classi minime aumentano

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$Pr(C_1 = J) \qquad Pr(C_t = J)$ le prob. delle classi massime diminuiscono

$\Rightarrow b_t$ decresce al crescere di t

supponiamo di conoscere $Pr(C_1 = 1), \dots, Pr(C_1 = J)$ (stimate dal portafoglio)

fissiamo P_1 t.c. $\sum_{j=1}^{J} P_1 \pi_j Pr(C_1 = j) = E(X_1)$

ovvero P_1 garantisce un equilibrio tecnico

$P_1 \triangleq P_1^{(e)}$ premio di equilibrio

poniamo $E(X_t)$ costante con t (situazione di stazionarietà)

b_t decresce con t

$P_t = P_1 = P_1^{(e)}$

$\rightarrow$ premio atteso in t: $\sum_{j=1}^{J} P_1^{(e)} \pi_j Pr(C_t = j) = P_1^{(e)} b_t < P_1^{(e)} b_1 = E(X_1) = E(X_t)$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{J} P_1^{(e)} \pi_j Pr(C_t = j) < E(X_t)$$

quindi non c'è più equilibrio tecnico (pur supponendo $E(X_t)$ fisso con t)

l'assicuratore quindi dovrà aumentare il premio di equilibrio di anno in anno per mantenere l'equilibrio tecnico (se non c'è non può operare)

$\rightarrow$ l'assicurato non avrà lo sconto che si era aspettato

fissato un assicurato nell'anno $t = 1$

classe BM ℓ coeff. π_ℓ

se non commette sinistri in $t > 1$ si ha

$j < \ell \Rightarrow \pi_j < \pi_\ell$

ci si aspetta uno sconto di : $1 - \frac{\pi_j}{\pi_\ell}$

ma se in $t=1$: $\quad P_1 \pi_k$

in $t>1$: $\quad P_t \pi_j \qquad P_t > P_1$

$$\Rightarrow \frac{P_1\pi_k - P_t\pi_j}{P_1\pi_k} = 1 - \frac{P_t}{P_1}\cdot\frac{\pi_j}{\pi_k} < 1 - \frac{\pi_j}{\pi_k}$$

lo sconto è minore di quello che ci si aspettava

esempio:

$t=1$ classe BM 14 $\quad \pi_{14} = 1.15$

nessun sinistro per 5 anni

$t=6$ classe BM 9 $\quad \pi_9 = 0.78$

ci si aspetta uno sconto di: $1 - \frac{0.78}{1.15} \simeq 0.32$

ma se $P_6 = 1.15 P_1$, lo sconto è: $1 - 0.78 = 0.22$

$0.22 < 0.32$

lo sconto è minore

In alcuni casi può accadere che $P_6\pi_9 > P_1\pi_{14}$, e quindi oltre a non avere lo sconto che ci si aspettava si ha anche un aggravio di premio rispetto al primo anno.

in caso di scala BM differente (diverso numero di classi) invece che b_t si usa

$$\frac{b_t - \pi_{min}}{\pi_{max} - \pi_{min}}$$

perché b_t tiene conto anche della scala

Abbiamo visto che i premi di equilibrio $P_t^{(e)}$ sono tali che:

$$\sum_{j=1}^{J} P_t^{(e)} \pi_j \Pr(C_t=j) = E(X_t)$$

e abbiamo anche visto che:

essendo b_t decrescente con $t \underset{}{\overset{\text{crescente}}{\uparrow}}$ allora i $P_t^{(e)}$ devono crescere con t crescente

Per valutare questi indicatori è necessario fornire una valutazione probabilistica sul processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$, e per fare ciò si ricorre alle CATENE DI MARKOV.

DEF: PROCESSO MARKOVIANO

considerato un processo stocastico $\{C_1, C_2, \dots\}$ a parametro discreto C_t il quale abbia un numero finito di determinazioni possibili $\{1, 2, \dots, J\}$ medesime per ogni t, tale processo è detto PROCESSO MARKOVIANO se:

dato $K_{t-1} = (C_1 = j_1, \dots, C_{t-1} = j_{t-1})$

$\forall i, j, t, K_{t-1}$ riesce che

$$Pr(C_{t+1} = j \mid C_t = i, K_{t-1}) = Pr(C_{t+1} = j \mid C_t = i)$$

ovvero la valutazione probabilistica di C_{t+1} dipende esclusivamente dall'informazione più recente sul processo.

DEF: CATENA MARKOVIANA

considerato un processo markoviano $\{C_1, C_2, \dots\}$, tale processo è detto CATENA MARKOVIANA se:

$$Pr(C_{t+1} = j \mid C_t = i) = p_{ij}$$

ovvero tale probabilità condizionata è la medesima per ogni epoca (non dipende da t) (la prob. di passare dallo stato i allo stato j non cambia mai)

la matrice $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1J} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2J} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{J1} & p_{J2} & \cdots & p_{JJ} \end{bmatrix}$, cioè la matrice delle $p_{ij} \geq 0$ probabilità

è detta MATRICE DELLE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE.

È una matrice stocastica, infatti: $\sum_{j=1}^{J} p_{ij} = \sum_{j=1}^{J} Pr(C_{t+1} = j \mid C_t = i) = 1$

$\boxed{\text{TS-11-11-2013}}$ (34 ORE) 7ª SETTIMANA

poniamo $\underline{a}_t = (Pr(C_t = 1), \dots, P(C_t = J))$
$\qquad\qquad \stackrel{!}{=} (a_t(1), \dots, a_t(J))$

se conosco $\underline{a}_1$ e $\mathbf{P}$

$\Rightarrow$ posso trovare $\underline{a}_t$

DIM:

$$\underline{a}_2 \qquad a_2(j) = Pr(C_2=j) \quad \text{j-esimo elemento di } \underline{a}_2$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{J} Pr(C_1=i)\, Pr(C_2=j \mid C_1=i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{J} a_1(i)\, p_{ij}}_{\text{j-esimo elemento di } \underline{a}_1 \underline{P}}$$

$$\Rightarrow \underline{a}_2 = \underline{a}_1 \underline{P}$$

$$\underline{a}_3 \qquad a_3(j) = Pr(C_3=j)$$

$$\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{J} Pr(C_2=i)\, Pr(C_3=j \mid C_2=i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{J} a_2(i)\, p_{ij}}_{\text{j-esimo elemento } \underline{a}_2 \underline{P}}$$

$$\Rightarrow \underline{a}_3 = \underline{a}_2 \underline{P} = \underline{a}_1 \underline{P}^{(2)} \qquad \underline{P}^{(2)} = \underline{P} \times \underline{P}$$

...

$$\underline{a}_t = \underline{a}_{t-1} \underline{P} = \underline{a}_1 \underline{P}^{(t-1)} \qquad \underline{P}^{(t-1)} = \underbrace{\underline{P} \times \underline{P} \times \dots \times \underline{P}}_{t-1 \text{ volte}}$$

In una catena markoviana, assegnati $\underline{a}_1$ $\underline{P}$, rimane assegnata la legge del processo

considerata $\underline{P}^{(\tau)}$ $\tau \in \mathbb{N}$ $\tau \geq 2$

$p_{ij}^{(\tau)}$ elemento di posto ij di $\underline{P}^{(\tau)}$

$$\Rightarrow p_{ij}^{(\tau)} = Pr(C_{t+\tau}=j \mid C_t=i) \quad \forall t$$

DIM:

$$Pr(C_{t+2}=j \mid C_t=i) = \sum_{h:(C_{t+1}=h,\, C_t=i)\neq\emptyset} Pr(C_{t+2}=j,\, C_{t+1}=h \mid C_t=i) \qquad h=1,\dots,J$$

$$\overset{!}{=} \sum_{h:(C_{t+1}=h,\, C_t=i)\neq\emptyset} Pr(C_{t+1}=h \mid C_t=i)\, Pr(C_{t+2}=j \mid C_{t+1}=h,\, C_t=i)$$

$$Pr(C_{t+1}=h \mid C_t=i) = p_{ih}$$

$$Pr(C_{t+2}=j \mid C_{t+1}=h,\, C_t=i) = ?$$

// RICHIAMO

$$Pr(E|H) = Pr(E \wedge H|H) = \sum_i Pr(E \wedge H_i|H) = \sum_i Pr(H_i|H)Pr(E|\underbrace{H_i \wedge H}_{H_i \Rightarrow H})$$

$H = \bigvee_i H_i$ somma logica di eventi a due a due incompatibili

$H_i \wedge H_j = \emptyset$

$$= \sum_i Pr(H_i|H)\underbrace{Pr(E|H_i)}_{\text{non dipende da } i \; = p}$$

$$= p \sum_i \overbrace{Pr(H_i|H)}^{=1}$$

$$= p$$

$$(C_{t+1}=h, C_t=i) = \bigvee_{K_{t-1}} \underbrace{(C_{t+1}=h, C_t=i, K_{t-1})}_{\text{eventi a due a due incompatibili}}$$

$\bigvee K_{t-1} = \Omega$ somma logica di tutti i possibili K_{t-1}

$$\Rightarrow Pr(C_{t+2}=j|C_{t+1}=h, C_t=i) = \sum_{K_{t-1}} Pr(C_{t+1}=h, C_t=i, K_{t-1}|C_{t+1}=h, C_t=i) \cdot$$
$$\cdot \underbrace{\underbrace{Pr(C_{t+2}=j|C_{t+1}=h, C_t=i, K_{t-1})}_{Pr(C_{t+2}=j|C_{t+1}=h)}}_{p_{ij}}$$

$$= p_{ij} \overbrace{\sum_{K_{t-1}} Pr(\dots)}^{=1}$$

$$= p_{ij}$$

$$Pr(C_{t+2}=j|C_t=i) = \sum_{h:(C_{t+1}=h, C_t=i)\neq\emptyset} p_{ih}\, p_{ij} = p_{ij}^{(2)} \quad \forall t$$ elemento di posto ij della matrice $P^{(2)}$

per induzione:

base: è vero che $Pr(C_{t+2}=j|C_t=i) = p_{ij}^{(2)} \quad \forall t$

ipotesi induttiva: sia vero che $Pr(C_{t+\tau-1}=j|C_t=i) = p_{ij}^{(\tau-1)} \quad \forall t$

$$\Rightarrow Pr(C_{t+\tau}=j|C_t=i) = \sum_h Pr(C_{t+\tau}=j, C_{t+\tau-1}=h|C_t=i)$$

$$= \sum_h \underbrace{Pr(C_{t+\tau}=h|C_t=i)}_{p_{ih}^{(\tau-1)}} \underbrace{\underbrace{Pr(C_{t+\tau}=j|C_{t+\tau-1}=h, C_t=i)}_{Pr(C_{t+\tau}=j|C_{t+\tau-1}=h)}}_{p_{hj}}$$

$$= p_{ij}^{(\tau)} \quad \forall t$$

DEF: CATENA MARKOVIANA REGOLARE

considerata una catena markoviana e la successione $P, P^{(2)}, P^{(3)}, \dots, P^{(t)}, \dots$ delle matrici di transizione, tale catena è detta CATENA MARKOVIANA REGOLARE se

$\exists\, t_0 : \forall t \geq t_0$ risulta $p_{ij}^{(t)} > 0 \quad \forall i,j$

cioè pur di fare un certo numero elevato di passi, a partire da un qualunque stato del sistema si ha sempre probabilità positiva di raggiungere un qualunque altro stato del sistema (le $P^{(t)}$ non hanno zeri al loro interno)

TEOREMA DI MARKOV

In una catena markoviana regolare

$$\exists \lim_{t \to +\infty} p_{ij}^{(t)} = u_j > 0 \qquad \text{(non dipende da } j\text{)}$$

$$\sum_{j=1}^{J} u_j = 1$$

$$\text{tra } U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_J \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 & \dots & u_J \end{bmatrix}$$ è una matrice stocastica

CONSEGUENZA

$$\underline{q}_t = \underline{q}_1 P^{(t-1)} \xrightarrow{t \to +\infty} \underline{q}_1 U$$ (faccio il limite della matrice elemento per elemento)

$$\underline{q}_1 U = \underline{u} = (u_1, \dots, u_J)$$

$$\underline{q}_t \xrightarrow{t \to +\infty} \underline{u},$$ $\underline{u}$ vettore non dipendente da t

asintoticamente si raggiunge una situazione di stazionarietà

$$Pr(C_\infty = j) = u_j$$

$$\begin{array}{ccccc} \underline{q}_t & = & \underline{q}_{t-1} & \cdot & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad t \to +\infty \\ \underline{u} & & \underline{u} & & P \end{array} \qquad \begin{cases} \underline{u} = \underline{u} P \\ \sum_{j=1}^{J} u_j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u} P \\ \sum_{j=1}^{J} u_j = 1 \end{cases}$$ risolvendo questo sistema si trova la distribuzione asintotica (trovo $\underline{u}$)

Vediamo ora un primo modello per la valutazione probabilistica del processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$

MODELLO (A)

- $\forall j$ determinazione di C_1

  $N_1|C_1=j,\ N_2|C_1=j, \dots$ i.i.d

- $N_j|C_1=j$ ha legge che non dipende da j

  $P_r(N_t=m|C_1=j) = p_m \qquad m=0,1,\dots$

- è assegnata la legge di C_1: conosco $P_r(C_1=j) \quad j=1,\dots,J$

$\Rightarrow \{C_1, C_2, \dots\}$ è una catena markoviana (spesso regolare)

$$P_r(C_t=j) = \underline{a}_t = \underline{a}_1 P^{(t-1)}$$

$$b_t = \sum_j \pi_j P_r(C_t=j)$$

$$P_t^{(e)} : \sum_j P_t^{(e)} \pi_j P_r(C_t=j) \overset{!}{=} E(X_t) = E(N_t)E(Y_t)$$

$$E(N_t) = \sum_j P_r(C_1=j) \underbrace{E(N_t|C_1=j)}_{\sum_m m p_m}$$

guardiamo alle ipotesi:

- $N_1|C_1=j,\ N_2|C_1=j, \dots$ i.i.d

  → stazionarietà, può essere un problema se si guardi ad archi temporali piuttosto lunghi, ma per pochi anni può andare bene

  → indipendenza, ipotesi piuttosto forte, difficilmente si tiene conto della sola classe iniziale e non del num. di sinistri precedenti

- $P_r(N_t=m|C_1=j) = p_m$

  → altra ipotesi forte, ci si aspetta una diversa sinistrosità per le differenti classi BM

PROPOSIZIONE:

nel modello (a) $\quad Pr(N_t=m \mid K_t)=p_m \qquad \forall t, m, K_t$

$$K_t=(C_1=j_1,\dots,C_t=j_t)$$

fissati m, t, K_t

$$K_t=(C_1=j_1,\dots,C_t=j_t)=\overbrace{\bigvee_{H_{t-1}:(C_1=j_1,H_{t-1})\Rightarrow K_t}(C_1=j_1,\underbrace{N_1=m_1,\dots,N_{t-1}=m_{t-1}}_{H_{t-1}})}^{\text{eventi a due a due incompatibili}}$$

es: sistema ministeriale

$(C_1=17, C_2=16)=(C_1=17, N_1=0)$

$(C_1=17, C_2=18)=(C_1=17, N_1=1)\vee(C_1=17, N_1=2)\vee(C_1=17, N_1=3)\vee(C_1=17, N_1\geq 4)$

$$Pr(N_t=m \mid K_t)=\underbrace{\sum_{H_{t-1}} Pr(C_1=j_1, H_{t-1} \mid K_t)}_{=1}\ \underbrace{Pr(N_t=m \mid C_1=j, H_{t-1})}_{\underbrace{Pr(N_t=m \mid C_t=j)}_{p_m}\ \text{per indip. condizionata}}$$

$$= p_m$$

PROPOSIZIONE

nel modello (a) il processo delle classi $\{C_1, C_2, \dots\}$ è una catena markoviana

fissati i, j, t, $\quad K_{t-1}=(C_1=j_1,\dots,C_{t-1}=j_{t-1})$

$$Pr(C_{t+1}=j \mid C_t=i, K_{t-1})=\sum_m Pr(C_{t+1}=j, N_t=m \mid C_t=i, K_{t-1})$$

$$=\sum_m \underbrace{Pr(N_t=m \mid C_t=i, K_{t-1})}_{\substack{p_m \\ \text{non dipende da } K_{t-1} \\ \text{e da } t}}\ \underbrace{Pr(C_{t+1}=j \mid C_t=i, K_{t-1}, N_t=m)}_{\substack{\text{conta solo } (C_t, N_t) \\ \to \text{ non dipende da } K_{t-1} \text{ e da } t \\ \text{può valere } <^{1}_{0}}}$$

$$\triangleq \alpha(i,j)$$

$$Pr(C_{t+1}=j \mid C_t=i)=\sum_{K_{t-1}} Pr(C_{t+1}=j, K_{t-1} \mid C_t=i)$$

$$=\underbrace{\sum_{K_{t-1}} Pr(K_{t-1} \mid C_t=i)}_{=1}\ \underbrace{Pr(C_{t+1}=j \mid C_t=i, K_{t-1})}_{\alpha(i,j)}$$

$$=\alpha(i,j)$$

$\Rightarrow Pr(C_{t+1}=j \mid C_t=i, K_{t-1})=Pr(C_{t+1}=j \mid C_t=i)=\alpha(i,j)=p_{ij}$ $\quad$ non dipende da t

TS - 12-11-2013 (36 ore)

$$\underline{a}_1 = \left(Pr(C_1=1), \dots, Pr(C_1=j_0), \dots, Pr(C_1=J) \right)$$
$$\overset{!}{=} \left(0, \dots, 1, \dots, 0 \right) \text{ se tutti nuovi assicurati}$$

$$\hat{Pr}(C_1=j) = \frac{\text{num. assicurati classe BM}_j}{\text{num. totale assicurati}}$$

es: sistema ministeriale

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
p_{ij} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 17 & 18 \\
\hline
1 & p_0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\
2 & p_0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_0 & 1-p_0
\end{array} = \underline{P}$$

p_n probabilità sull'evoluzione (prob. di commettere n sinistri) $n=0,1,\dots$

$$\hat{p}_n = \frac{\text{num. assicurati che hanno riportato } n \text{ sinistri}}{\text{num. totale assicurati}}$$

$Pr(C_t=j)$

$$\underline{a}_t = \underline{a}_1 P^{(t-1)}$$
$$b_t = \sum_{j=1}^{J} \pi_j Pr(C_t=j)$$
$$P_t^{(n)} : \sum_j P_t^{(c)} \pi_j Pr(C_t=j) \overset{!}{=} E(X_t) = E(N_t)E(Y_t)$$

---

es: sistema ministeriale

$\underline{a}_1 = (0, 0, \dots, \underset{14}{1}, \dots, 0)$ (tutti nuovi assicurati il primo anno)

$p_0 = 0.93176$ $\qquad E(Y_t) = 3000$

$p_1 = 0.06339$

$p_2 = 0.00433$

$p_3 = 0.00042$

$p_4 = 0.00007$

$p_5 = 0.00003$

$p_n = 0 \quad n \geq 6$

MODELLO C

- $\forall j$ determinazione di C_1, $\forall u$ determinazione di U

  $N_1 | C_1 = j, U = u$; $N_2 | C = j, U = u$, ... i.i.d
- $N_t | C_1 = j, U = u \sim Poi(\lambda_j, u)$ $\quad \lambda_j > 0$
- $U | C_1 = j \sim$ gamma (α, α) (la distrib. del param. U di rischio è comune a tutte le collettività)
- sono assegnate $Pr(C_1 = j)$ $\quad j = 1, ..., J$

il processo $\{N_1, N_2, ...\} | C_1 = j$ è un processo Poisson-gamma (λ_j, α)

$\{N_1, N_2, ...\}$ è mistura di processi Poisson-gamma con misturante $Pr(C_1 = j)$ $j = 1, ..., J$

con questo modello si può tener conto di più aspetti quali:
- ingresso nuovi assicurati
- autoliquidazione

...

FUNZIONI O INDICI PER VALUTARE IL GRADO DI PERSONALIZZAZIONE BM

consideriamo alcuni premi per l'anno t
- $P_t \pi_{C_t}$ PREMIO BM
- $E(X_t)$ PREMIO A PRIORI, non c'è personalizzazione
- $E(X_t | U)$ PREMIO INDIVIDUALE, massima personalizzazione
- $E(X_t | X_1, ..., X_{t-1})$ PREMIO BAYESIANO, ma con sistema BM non conosciamo $X_1, ..., X_{t-1}$

  $\hookrightarrow E(X_t | C_t)$ PREMIO A POSTERIORI, consente una buona personalizzazione

$$A = E\left[\left(E(X_t) - P_t \pi_{C_t}\right)^2 \right]$$

$$\overset{!}{=} \sum_{j=1}^{J} P_r(C_t = j) \left(E(X_t) - P_t \pi_{C_t}\right)^2$$

se risulta A prossimo allo zero si ha poca personalizzazione

$$B = E\left[\left(E(X_t | U) - P_t \pi_{C_t}\right)^2 \right]$$

$$\overset{!}{=} \iint \left(E(X_t | U = u) - P_t \pi_{C_t}\right)^2 dF_{U, C_t}(u, j)$$

se risulta B prossimo allo zero si ha una buona personalizzazione

$$C = E\left[\left(E(X_t | C_t) - P_t \pi_{C_t}\right)^2 \right]$$

$$\overset{!}{=} \sum_{j=1}^{J} P_r(C_t = j) \left(E(X_t | C_t = j) - P_t \pi_{C_t}\right)^2$$

PREDICTIVE ACCURACY
vale lo stesso che per B

$i_1 = \left(\frac{A}{A+B} \right)^{\frac{1}{2}}$ se $A=0 \Rightarrow i_1 = 0$ → non c'è personalizzazione

se $B=0 \Rightarrow i_1 = 1$ → c'è la massima personalizzazione

$i_2 = \left(\frac{A}{A+C} \right)^{\frac{1}{2}}$ se $A=0 \Rightarrow i_2 = 0$ → non c'è personalizzazione

se $C=0 \Rightarrow i_2 = 1$ → c'è una buona personalizzazione

COSTRUZIONE DI SCALE BM

sono già assegnati: - num. classi ($j = 1, \dots, J$, h classe di riferimento)

- regola evolutiva

è necessario calcolare la scala, cioè i π_j

si fa riferimento solo a $\{N_1, N_2, \dots\}$ processo di arrivo dei sinistri

poniamo che al primo anno tutti gli assicurati siano nella classe di ingresso

$$Pr(C_1 = j) = \begin{cases} 0 & j \neq j_0 \\ 1 & j = j_0 \end{cases}$$

approccio bayesiano:

U param. di rischio

- $N_1 | U=u$, $N_2 | U=u$, ... stocasticamente indipendenti con legge assegnata
- U con legge assegnata

considero $E(N_t|U)$ premio individuale e $f(C_t)$ premio BM (è funzione di C_t)

si può pensare di minimizzare, scegliendo una opportuna f, la differenza in media quadratica tra i due premi

$$\min_{f \in \mathcal{F}} E\left[\left(E(N_t|U) - f(C_t) \right)^2 \right]$$

trovo $f^*(C_t) = E[E(N_t|U) | C_t]$

$= E[N_t | C_t]$

$$E[N_t | C_t] = E[\underbrace{E(N_t | C_t, U)}_{E(N_t|C_t)} | C_t]$$

per indipendenza condizionata su U

$$\pi_j = \frac{f^*(j)}{f^*(h)} = \frac{E(N_t | C_t = j)}{E(N_t | C_t = h)}$$

NORBERG (1976)

si costruisce una scala che varia al variare di t ma solitamente la scala è fissa

$$\min_{f \in \mathcal{F}} E\left[(N_t - f(C_t))^2 \right] = f^* = E(N_t \mid C_t)$$

BORGAN, HOEM, NORBERG (1981)

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \omega_t \, E\left[(N_t - f(C_t))^2 \right]}_{Q(f(1),\dots,f(J))} \qquad \omega_t \geq 0$$

$$f^*(j) = \frac{\sum_t \omega_t \Pr(C_t = j) E(N_t \mid C_t = j)}{\sum_t \omega_t \Pr(C_t = j)}$$

$$\pi_j = \frac{f^*(j)}{f^*(h)}$$

$\boxed{\text{TS - 15 - 11 - 2013}}$ (38 ORE)

COENE, DORAY (1996)

$E(N_t \mid H_{t-1})$ premio bayesiano $\qquad H_{t-1} = (N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1})$

$$E(N_t \mid H_{t-1}) = E(N_t) \cdot \frac{E(N_t \mid H_{t-1})}{E(N_t)}$$

premio a priori (collettivo)

coeff. di revisione bayesiano

es: Poiss-gamma (λ, α)

$$\frac{\alpha + \sum_h n_h}{\alpha + \lambda (t-1)}$$

$H_{t-1} \longrightarrow C_t = j(n_1, \dots, n_{t-1})$

la storia di sinistrosità determina la classe BM

$$P_t \cdot \pi_{j(n_1, \dots, n_{t-1})} \quad \text{premio BM}$$

premio di riferimento

componente legata alla storia di sinistrosità

→ c'è una sorta di analogia tra i due premi

$$\min_{\pi_1, \dots, \pi_J} \sum_{t=1}^{T} \sum_{n_1, \dots, n_{t-1}} \Pr(C_\infty = j(n_1, \dots, n_{t-1})) \left(\frac{E(N_t \mid H_{t-1})}{E(N_t)} - \pi_{j(n_1, \dots, n_{t-1})} \right)^2$$

si possono porre dei vincoli quali:

$\pi_j \leq \pi_{j+1}$

π_1 A , π_J B

$$\sum_{j=1}^{J} \pi_j \Pr(C_\infty = j) = 1 \implies \sum E(N_{t\infty}) \pi_j \Pr(C_{t\infty} = j) = E(N_{t\infty})$$

ripartire i premi per coprire il rimborso atteso asintotico (bilanciamento a regime)

Nei modelli visti finora si è posta un'ipotesi di stazionarietà per il processo di arrivo dei sinistri $N_1, N_2, \dots$

Ciò non risulta essere un problema se si guarda al breve periodo (2-3 anni), ma per durate superiori solitamente gli assicurati passano ad altre classi tariffarie sulle quali in generale il processo di arrivo sinistri è differente rispetto le altre classi tariffarie, il che rende poco plausibile l'ipotesi di stazionarietà.

→ per ovviare al problema si può pensare ad una stabilità del numero di assicurati all'interno delle classi nei vari anni (ogni assicurato che esce da quella classe tariffaria è rimpiazzato da un altro che entra)

→ sorge la necessità di inserire un altro indicatore che tenga conto dell'evoluzione della classe tariffaria per un fissato assicurato del portafoglio:

I_t classe tariffaria anno t

C_t " BM " t

N_t num sinistri " t

X_t risarcimento " t

→ considerare $Pr(C_t = j \mid I_t = k)$

posso $Pr(C_t = j) = \sum_k Pr(I_t = k) Pr(C_t = j \mid I_t = k)$

In ipotesi di stabilità di portafoglio si può porre $I_t = I$, cioè non dipendente dal tempo

Noi abbiamo trattato scala a livello di classe tariffaria, non a livello di portafoglio (ogni classe tariffaria ha la sua scala)

BIBLIOGRAFIA

- LEMAIRE J. (1995), "Bonus Malus Systems in Automobile Insurance", KLUWER
- DENUIT, altri (2007), "Actuarial Modelling of Claim Counts", WILEY

Prima di procedere con il prossimo capitolo, introduciamo una nozione di funzione inversa che generalizza la funzione di funzione inversa per le funzioni di ripartizione.

$F(\cdot)$ è FUNZIONE DI RIPARTIZIONE se:

- $F: \mathbb{R} \to [0,1]$
- monotona non decrescente
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- continua a destra

$\overline{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$ è FUNZIONE DELLE CODE:

- $\overline{F}: \mathbb{R} \to [0,1]$
- monotona non crescente
- $\lim_{x \to -\infty} \overline{F}(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} \overline{F}(x) = 0$
- continua a sinistra

data F, se essa è invertibile allora si può dare un significato a F^{-1} funz. inversa

ma se F non è invertibile?

pongo $\overleftarrow{F}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$ $\quad p \in [0,1]$

$p = 0$

$\overleftarrow{F}(0) = \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 0 \} = \inf \mathbb{R} = -\infty$

$p = 1$

$\overleftarrow{F}(1) = \inf \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\}}_{A_1}$

se $F(x) < 1 \;\; \forall x \Rightarrow A_1 = \emptyset$

per convenzione $\inf \emptyset = +\infty$

se $A_1 \neq \emptyset$, bisogna vedere se tale insieme risulti inferiormente limitato, cioè

se $\exists\, \overline{x} : \overline{x} \leq x \;\; \forall x \in A_1$

* $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1\}$ (F non può essere superiore a 1)

fissato un intorno di zero I_0 (intervallo) t.c. $1 \notin I_0$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \Rightarrow \exists\, I_{-\infty} : \forall x \in I_{-\infty} \quad F(x) \in I_0$

sia $\bar{x} \in I_{-\infty}$, $\Rightarrow F(\bar{x}) < 1 = F(x) \quad \forall x \in A_1$

$\Rightarrow \bar{x} < x \quad \forall x \in A_1$ per monotonia $F(\cdot)$

$\Rightarrow A_1$ è inferiormente limitato

$\Rightarrow \exists \inf A_1 \in \mathbb{R}$

quindi $F^{\leftarrow}(1) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\} \begin{cases} +\infty & A_1\ \emptyset \\ \in \mathbb{R} & A_1 \neq \emptyset \end{cases}$

$p \in \,]0,1[$

$F^{\leftarrow}(p) = \inf \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}}_{A_p}$

si prova che $A_p \neq \emptyset$

fissato un intorno di 1 I_1 (intervallo) t.c. $p \notin I_1$

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \exists\, I_{+\infty} : \forall x \in I_{+\infty} \quad F(x) \in I_1$

** sia $x' \in I_{+\infty} \Rightarrow F(x') > p$

$\Rightarrow x' \in A_p \quad \Rightarrow A_p \neq \emptyset$

si prova che A_p è inferiormente limitato

procedimento analogo al caso $p=1$ (devo escludere p da I_0)

$\Rightarrow \exists \inf A_p \in \mathbb{R}$

quindi $F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\} \in \mathbb{R} \qquad p \in \,]0,1[$

$F^{\leftarrow} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

<u>DEF: FUNZIONE INVERSA GENERALIZZATA</u>

Data F funzione di ripartizione, la funzione $F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$ $p \in [0,1]$, con la convenzione che $\inf \emptyset = +\infty$, è detta FUNZIONE INVERSA GENERALIZZATA (o funzione quantile) della F.

PROPRIETÀ

1) sia $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < F(x) < 1\}$

$F|_B$ strettamente crescente

$F|_B : B \to F(x)$ è invertibile

$F^{-1} \triangleq F|_B^{-1} : F(B) \to B$

se F non è invertibile, F^{-1} è l'inversa dove essa è definita (su restrizioni)

sia $p \in F(B) \Rightarrow F^{\leftarrow}(p) = F^{-1}(p)$

mostriamo che $A_p = \{x \mid F(x) \geq p\} = \{x \mid x \geq F^{-1}(p)\}$

$\supset$

sia $x' : x' \geq F^{-1}(p) \Rightarrow F(x') \geq F(F^{-1}(p)) = p \Rightarrow x' \in A_p$

$\subset$

sia $x'' \in A_p \Rightarrow F(x'') \geq p$

se $x'' \in B$, $F(x'') \in F(B) \Rightarrow F^{-1}(F(x'')) = x'' \geq F^{-1}(p) \Rightarrow x'' \in \{x \mid x \geq F^{-1}(p)\}$

se $x'' \notin B \Rightarrow F(x'') = 1 \geq p \Rightarrow x'' \geq F^{-1}(p) \Rightarrow x'' \in \{x \mid x \geq F^{-1}(p)\}$

$\left.\begin{array}{l} \hookrightarrow F(x'') = 0 \vee F(x'') = 1 \\ F(x'') \geq p > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(x'') = 1$

$F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \mid F(x) \geq p\} = \inf[F^{-1}(p), +\infty[= F^{-1}(p)$

per gli x t.c. $F(x) \neq 0, 1$, se è definita $F^{-1}(p) \Rightarrow F^{\leftarrow}(p) = F^{-1}(p)$

dove la $F \neq 0, 1$, se strettamente crescente e continua $\Rightarrow F^{\leftarrow} \equiv F^{-1}$

2) F sia funzione di ripartizione costante a tratti con salti in $x_1 < x_2 < \dots$

ripartiamo $[0,1] = \{0\} \cup]0, F(x_1)] \cup]F(x_1), F(x_2)] \cup \dots \cup]F(x_{i-1}), F(x_i)] \cup \dots$

sia $p \in]0,1[$

$\exists! i : p \in]F(x_{i-1}), F(x_i)]$

$F^{\leftarrow}(p) = x_i$

$A_p = \{x \mid F(x) \geq p\} = \{x \mid x \geq x_i\}$

$\supset$

$x' : x' \geq x_i \Rightarrow F(x') \geq F(x_i) \geq p \Rightarrow x' \in A_p$

$\subset$ $\boxed{A\subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c}$

$x'' \notin \{x \mid x \geq x_i\} \Rightarrow x'' < x_i$

$F(x'') \leq F(x_{i-1}) < p \Rightarrow x \notin A_p$

$\overset{\leftarrow}{F}(p) = x_i \Leftrightarrow F(x_{i-1}) < p \leq F(x_i)$

$\boxed{\text{TS - 18 - 11 - 2013}}$ (40 ore) 8^a SETTIMANA

3) se $A_p = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\} \neq \emptyset \Rightarrow A_p$ intervallo superiormente illimitato

sia $p \in]0,1[\Rightarrow A_p \neq \emptyset$

poniamo $\overset{\leftarrow}{F}(p) \triangleq \lambda \in \mathbb{R}$

proviamo che $\forall x > \lambda \Rightarrow x \in A_p$ (cioè A_p superiormente illimitato)

fissato $x > \lambda = \inf A_p \Rightarrow \exists x' \in A_p$ t.c. $x' < x$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow F(x') \leq F(x) \\ p \leq F(x') \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) \geq p \quad \forall x > \lambda$$

$$\Rightarrow x \in A_p \quad \forall x > \lambda$$

per quanto ne sappiamo se $p \in]0,1[$

$$A_p = \begin{cases}]\lambda, +\infty[\\ [\lambda, +\infty[\end{cases}$$ è comunque una semiretta superiormente illimitata

se $p = 0 \Rightarrow A_0 = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ è sup. ill.)

~~se $p = 1$~~ $\Rightarrow \begin{cases} A_1 \neq \emptyset & \text{vale la verifica fatta per } p \in]0,1[\\ A_1 = \emptyset & A_1 \text{ è intervallo degenere} \end{cases}$

4) $\overset{\leftarrow}{F}$ è continua a sinistra

<u>LEMMA:</u>

(i) (i.1) $F(\overset{\leftarrow}{F}(p)) \geq p \quad \forall p \in]0,1[$

(i.2) $\overset{\leftarrow}{F}(F(x)) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\overset{\leftarrow}{F}$ è monotona non decrescente

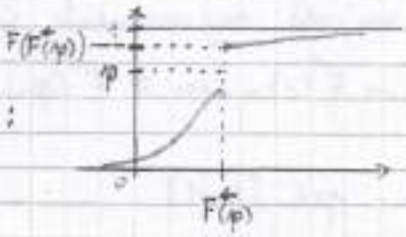
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in [0,1] \quad F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq \overset{\leftarrow}{F}(p)$

DIM:

(i.1) fissiamo $p \in]0,1[$, $\quad F^{\leftarrow}(p) \triangleq \lambda \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \lambda^+} F(x) = F(\lambda) \\ F\big|_{x>\lambda} \geq p \end{array}\right\} F(\lambda) \geq p \iff F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$$

in generale non vale l'uguaglianza:



$\boxed{\underline{\text{NB!}} \quad \lambda \in A_p \Rightarrow A_p = [\lambda, +\infty[}$

se $p=1$, $A_1 \neq \emptyset \iff F^{\leftarrow}(1) \in \mathbb{R}$

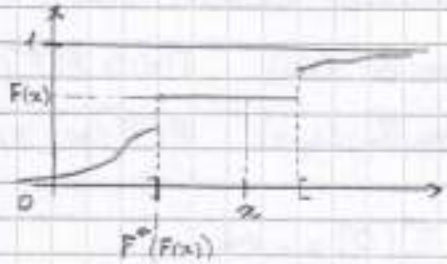
$\Rightarrow F(F^{\leftarrow}(1)) = 1$ vale lo stesso ragionamento di sopra

(i.2) fissato $x \in \mathbb{R}$, $\quad F(x) \in [0,1]$

$$F^{\leftarrow}(F(x)) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq F(x)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq F(x)\} \\ \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq F(x)\} \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x$$

in generale non vale l'uguaglianza:



~~(ii) $\forall p_1, p_2 \in [0,1]$, $p_1 < p_2 \Rightarrow F^{\leftarrow}(p_1) \leq F^{\leftarrow}(p_2)$~~

siano $p_1, p_2 \in]0,1[$, $0 < p_1 < p_2 < 1$

$A_{p_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p_1\} \qquad A_{p_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p_2\}$

$\inf A_{p_1} = F^{\leftarrow}(p_1) \qquad \inf A_{p_2} = F^{\leftarrow}(p_2)$

$x \in A_{p_2} \Rightarrow F(x) \geq p_2 > p_1$

$\Rightarrow F(x) > p_1 \Rightarrow x \in A_{p_1}$

$\Rightarrow A_{p_2} \subseteq A_{p_1}$

$\Rightarrow \inf A_{p_2} \geq \inf A_{p_1}$

$F^{\leftarrow}(p_2) \geq F^{\leftarrow}(p_1)$

sia $p_1 = 0$, $p_2 > p_1 = 0$

$F^{\leftarrow}(0) = -\infty \leq F^{\leftarrow}(p_2) \quad \forall p_2 > 0$

sia $p_2 = 1$, $p_1 < p_2 = 1$

A_{p_2} $\neq \emptyset$ → vale ragionamento fatto per $p_1, p_2 \in]0,1[$

A_{p_2} $= \emptyset$ → $F^{\leftarrow}(1) = +\infty \geq F^{\leftarrow}(p_1) \quad \forall p_1 < 1$

(iii) fissato $x \in \mathbb{R}$, $p \in [0,1]$

$\Rightarrow$

sia $F(x) \geq p$

possiamo calcolare $F^{\leftarrow}(F(x))$, $F^{\leftarrow}(p)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per la (ii)} & F^{\leftarrow}(F(x)) \geq F^{\leftarrow}(p) \\ \text{per la (i.2)} & F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x \end{array}\right\} \Rightarrow x \geq F^{\leftarrow}(p)$$

$\Leftarrow$

sia $x \geq F^{\leftarrow}(p)$

preso $p \in]0,1[\Rightarrow F^{\leftarrow}(p) \in \mathbb{R}$

possiamo calcolare $F(x)$, $F(F^{\leftarrow}(p))$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per la (ii)} & F(x) \geq F(F^{\leftarrow}(p)) \\ \text{per la (i.1)} & F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) \geq p$$

se $p = 0 \Rightarrow F^{\leftarrow}(0) = -\infty$

$x \geq -\infty \Rightarrow F(x) \geq 0 = p$

se $p = 1$

A_{p_1} $= \emptyset \Rightarrow F^{\leftarrow}(1) = +\infty \quad \nexists x \in \mathbb{R} : x \geq +\infty$ (niente da dimostrare)

A_{p_1} $\neq \emptyset$ → vale ragionamento fatto per $p \in]0,1[$ $\Rightarrow F(x) \geq F(F^{\leftarrow}(1)) = 1$

<u>OSS:</u>

è possibile dare altre definizioni per la nozione di funz. inversa generalizzata:

noi abbiamo preso : $F^{\leftarrow}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$

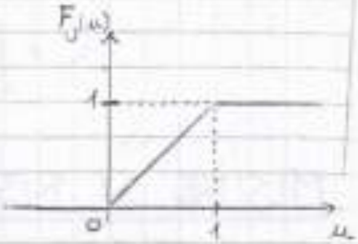
altre definizioni : $F^{\leftarrow +}(p) = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq p\}$

$F^{\leftarrow(\alpha)} = \alpha F^{\leftarrow}(p) + (1-\alpha) F^{\leftarrow +}(p) \qquad \alpha \in [0,1]$

// RICHIAMO

$U \sim unif(0,1)$

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & u \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u & 0 \le u < 1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$



//

<u>TEOREMA</u>

sia F una funzione di ripartiziona, U n.a. $\sim unif(0,1)$ con determinazioni in $[0,1]$. Considerato $X' = F^{\leftarrow}(U)$ n.a.

$$\Rightarrow F_{X'}(\cdot) = F(\cdot)$$

cioè a partire da una data funzione di ripartizione è possibile costruire un n.a. che abbia come funz. di ripartizione quella data inizialmente tramite l'inversa generalizzata relativa alla funzione di ripartizione di una uniforme.

DIM:

fissato $x \in \mathbb{R}$

$$(F^{\leftarrow}(U) \le x) \overset{(iii)}{=} (U \le F(x))$$

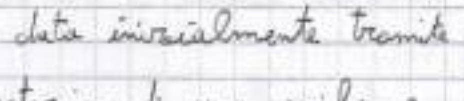
$$F_{X'}(x) = Pr(X' \le x) = Pr(F^{\leftarrow}(U) \le x)$$

$$= Pr(U \le F(x)) = F_U(F(x)) = F(x)$$

<u>DEF: RISCHIO</u>

Diciamo RISCHIO un n.a. $X \geq 0$ che rappresenta un importo che un assicuratore dovrà pagare (ad una data futura T) a fronte di:

- un sinistro
- un contratto
- un portafoglio di contratti



<u>TEOREMA</u>

dato un rischio X : $E(X) = \int_0^{+\infty} x \, dF_X(x) < +\infty$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} \overline{F}_X(x) \, dx \qquad \overline{F}_X = 1 - F_X$$

DIM:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \, dF_X(x) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{x} dz \right] dF_X(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\int_y^{+\infty} dF_x(x) \right] dx$$
$$= \int_0^{+\infty} (1-F_x(y))\,dy = \int_0^{+\infty} \bar{F}_x(y)\,dy$$

MISURE DI RISCHIO

DEF: MISURA DI RISCHIO

Diciamo MISURA DI RISCHIO in un insieme di rischi $\mathfrak{X}$, un funzionale

$$\rho : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

tale che dato $X \in \mathfrak{X}$, $\rho(X)$ sia l'ammontare di capitale del quale il detentore della posizione finanziaria X deve disporre affinché ~~su~~ tale situazione risulti accettabile o per un controllore interno o per un controllore esterno.

$\mathfrak{X}$ insieme dei rischi

$\mathcal{A}$ insieme dei n.a. che sono "accettabili", regione di accettabilità

$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf\{\alpha \geq 0 : -X + \alpha \in \mathcal{A}\}$

// RICHIAMO: PRINCIPI DI CALCOLO DEL PREMIO

$\Pi : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$\mathfrak{X}$ insieme dei risarcimenti per contratti

$X \in \mathfrak{X} \to \Pi(X)$ premio: richiesta di capitale per accettare di gestire X

$\Pi(X) > E(X)$ caricamento di sicurezza //

OSS:

ci sono misure di rischio tali che:

$$X \overset{d}{=} Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$$

ma ciò può essere un problema, es:

X a determinazioni in $[0, \bar{x}]$

$Y \geq 0$

sia $X \overset{d}{=} Y$

$(X = x') = \Phi$, $(Y = x') \neq \Phi$

$Pr(X = x') = Pr(Y = x') = 0$, entrambi gli eventi hanno prob. nulla, ma il secondo è comunque possibile

DEF: MISURA COERENTE DI RISCHIO

Una misura di rischio ρ definita in $\mathcal{X}$ è una MISURA COERENTE DI RISCHIO

$\iff$ ① $\rho(X+c) = \rho(X) + c \quad \forall X \in \mathcal{X}, \forall c \in \mathbb{R}, \ X+c \in \mathcal{X}$ — TRASLATIVITÀ

② $\rho(aX) = a\rho(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \forall a > 0, \ aX \in \mathcal{X}$ — OMOGENEITÀ POSITIVA

③ $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}, \quad +Y \in \mathcal{X}$ — SUB-ADDITIVITÀ

④ $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}$ — MONOTONIA

COMMENTI:

① $X \to$ può generare $-x$ — $X+c \to$ può generare $-x$, genera di sicuro $-c$

chiedo $\rho(x)$ — chiedo $\rho(x) + c$

se vale ①: $\rho(X - \rho(x)) = \rho(x) - \rho(x) = 0$

il rischio $X - \rho(x)$ non richiede altro capitale, è già accettabile

② X in € — aX in \$ $= X$ in €

chiedo $\rho(x)$ in € — chiedo $\rho(aX)$ in \$ $= \rho(X)$ in €

tuttavia a potrebbe essere così grande da generare un problema di liquidità-solvibil

$\boxed{\text{TS - 19 - 11 - 2013}}$ (42 ORE)

③ se $\exists X, Y : \rho(X+Y) > \rho(X) + \rho(Y)$

risulterebbe più conveniente dividere l'impegno tra due parti

→ una compagnia assicuratrice potrebbe essere indotta a ripartire la copertura tra più controllate per essere soggette ad un minor requisito di solvibilità

④ $X(\omega) \leq Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

se con X in ogni caso si paga meno che con Y è abbastanza ovvio richiede meno capitale

(④b $P_r(X \leq Y) = 1 \Rightarrow \rho(x) \leq \rho(Y)$ — MONOTONIA "PIÙ DEBOLE")

talvolta si considera la proprietà ④b invece che la ④

OSS:

considero $\rho(X) = E(X)$

- $E(X+c) = E(X) + c \qquad c \in \mathbb{R}$, costante
- $E(aX) = a\,E(X) \qquad a \in \mathbb{R}$, costante
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

La speranza matematica è una misura coerente di rischio, tuttavia considerata come principio di calcolo del premio si possono fare numerose critiche (assenza variabilità, ecc...)

MISURE DI RISCHIO BASATE SU SCENARI

$\mathcal{X}$ insieme dei rischi, v.a. definite su $\mathbb{P}$, $\mathcal{A}$ σ-algebra su $\mathbb{P}$

$\mathcal{P}$ insieme non vuoto di misure di probabilità su $\mathcal{A}$

$$\rho(X) = \sup\{\underbrace{E_Q(X)}_{\text{speranza matematica di } X \text{ calcolata con } Q},\ \underbrace{Q}_{\text{misura di probabilità}} \in \mathcal{P}\}$$

WORST-CASE SCENARIO

Si può mostrare che questa è una misura coerente di rischio

MISURA DI RISCHIO DEL VALUE-AT-RISK (VaR)

dato $X \geq 0$, $p \in]0,1[$

è detto VALUE-at-RISK (VaR) di X al livello (di confidenza) p:

$$VaR[X;p] = F_X^{\leftarrow}(p)$$
$$= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}$$

$\mathcal{X}$ insieme dei rischi, fissato $p \in]0,1[$

$\rho(\cdot) = VaR[\cdot, p]$ in $\mathcal{X}$

$\rho(X) = VaR[X, p]$

$$P_r(X > VaR[X;p]) = 1 - F_X(VaR[X;p])$$
$$= 1 - F_X(F_X^{\leftarrow}(p)) \leq 1 - p$$

SOLVENCY II

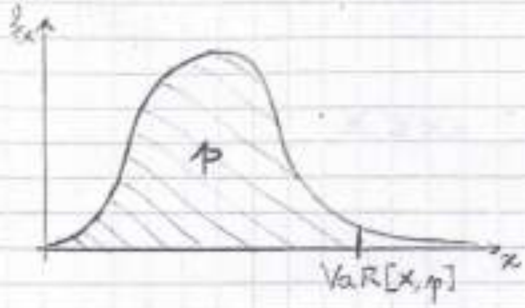
$p = 0.995$

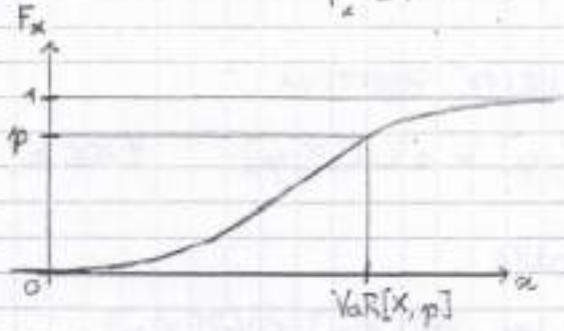
$X \geq 0$ abbia distribuzione dotata di densità

$f_X(x) > 0, \quad x > 0$

$F_X(\cdot)$ ct, strett. crescente

$F_X^{\leftarrow} = F^{-1}$





- il $VaR[X,p]$ ha la stessa dimensione di X (noi consideriamo importi)
- se $X \overset{d}{=} Y \Rightarrow VaR[X;p] = VaR[Y,p]$

<u>PROPRIETÀ DEL VaR</u>

$\mathcal{X}$ insieme di rischi, $p \in]0,1[$, $\rho(\cdot) = VaR[\cdot\,;p]$

(a) NO - RIPOFF

- se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ certo t.c. $X \leq M \Rightarrow VaR[X;p] \leq M$

se $X \leq M \Rightarrow P_r(X \leq M) = 1 = F_X(M)$

$$p < 1 \Rightarrow p < F_X(M) \overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} F_X^{\leftarrow}(p) \leq M$$

$$\Longleftrightarrow VaR[X;p] \leq M$$

se $\exists$ $\max[X]$, massima determinazione possibile di X $\Rightarrow VaR[X;p] \leq \max[X]$

(b) TRASLATIVITÀ

- $VaR[X+c\,;p] = VaR[X;p] + c \quad \forall X \in \mathcal{X},\ c \in \mathbb{R}$ certo, $X + c \in \mathcal{X}$

"in $\mathbb{R}$ $a = b \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \Leftrightarrow b \leq x$"

fissato $x \in \mathbb{R}$ $\quad VaR[X+c,p] \leq x \Leftrightarrow F_{X+c}^{\leftarrow}(p) \leq x$

$$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} p \leq F_{X+c}(x)$$

$$F_{X+c}(x) = P_r(X + c \leq x)$$

$$\overset{!}{=} P_r(X \leq x - c) = F_X(x-c)$$

$$\Rightarrow p \leq F_X(x-c) \overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} F_X^{\leftarrow}(p) \leq x - c$$

$$\Longleftrightarrow VaR[X;p] \leq x - c$$

$$\Longleftrightarrow VaR[X;p] + c \leq x$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad VaR[X+c;p] \leq x \iff VaR[X;p]+c \leq x$

$\Rightarrow VaR[X+c;p] = VaR[X;p] + c$

(c) OMOGENEITÀ POSITIVA

- $VaR[aX;p] = a\,VaR[X;p] \qquad \forall X \in \mathcal{X},\ a>0,\ aX \in \mathcal{X}$

(d) MONOTONIA

- $X \leq Y \Rightarrow VaR[X;p] \leq VaR[Y;p]$

$X \leq Y \Rightarrow F_x(x) \geq F_y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$F_y(x) = Pr(Y \leq x) \leq Pr(X \leq x) = F_x(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$Y \leq x \Rightarrow X \leq x$

$\{x \in \mathbb{R} \mid F_x(x) \geq p\} \supset \{x \in \mathbb{R} \mid F_y(x) \geq p\}$

sia $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid F_y(x) \geq p\}$

$\Rightarrow F_y(x) \geq p \Rightarrow F_x(x) \geq p$

$\Rightarrow x \in \{x \in \mathbb{R} \mid F_x(x) \geq p\}$

$\Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_y(x) \geq p\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_x(x) \geq p\}$

$F_y^{+}(p) \geq F_x^{+}(p)$

$VaR[Y;p] \geq VaR[X;p]$

(d') $F_x(x) \geq F_y(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow VaR[Y;p] \geq VaR[X;p]$

DOMINANZA STOCASTICA DEL PRIMO LIVELLO

se $Pr(X \leq Y) = 1 \Rightarrow F_x \geq F_y \Rightarrow VaR[Y;p] \geq VaR[X;p]$

pongo $H = (X \leq Y)$

$Pr(H) = 1 \qquad Pr(\overline{H}) = 0$

$Pr(X > x) = Pr(X > x \land H) + \overbrace{\underbrace{Pr(X > x \land \overline{H})}_{\Rightarrow \overline{H}}}^{=0}$

$Pr(Y > x) = Pr(Y > x \land H)$

$X > x \land H \Rightarrow Y > x \land H$

$Pr(X > x \land H) \leq Pr(Y > x \land H)$

$Pr(X > x) \leq Pr(Y > x) \iff 1 - F_x(x) \leq 1 - F_y(x)$

$\iff F_x(x) \geq F_y(x)$

(e) NON INTRODUCE CARICAMENTI INGIUSTIFICATI

una misura di rischio $\rho(\cdot)$ non introduce caricamenti ingiustificati

$\iff X \overset{d}{=} \bar{x} \quad \bar{x} \in \mathbb{R}$ certo $\Rightarrow \rho(X) = \bar{x}$

$$X \overset{d}{=} \bar{x}, \ p \in]0,1[$$

$$F_X^{\leftarrow}(p) = \bar{x} \Rightarrow \mathrm{VaR}[X,p] = \bar{x}$$

OSS:

una misura di rischio $\rho(\cdot)$ introduce un caricamento di sicurezza se $\forall X$ $\rho(X) > E(X)$

- il $\mathrm{VaR}[X;p]$ non soddisfa tale proprietà: $\exists X, p$ t.c. $\mathrm{VaR}[X,p] \leq E(X)$

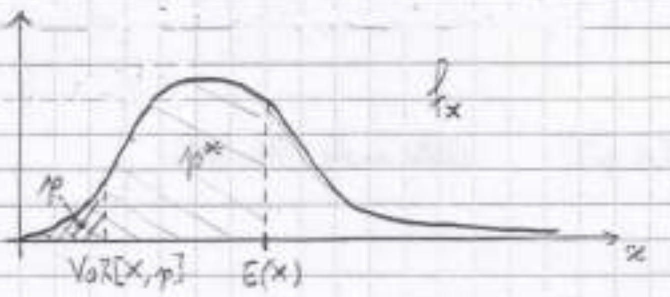
esempio:

$X \in \mathcal{X}, \ E(X) < +\infty$

$F_X(E(X)) = p^* \in [0,1]$

fissato $p < p^*$ e $\mathrm{VaR}[\cdot\,; p]$

$$\mathrm{VaR}[X;p] = F_X^{\leftarrow}(p) \overset{(\omega)}{\leq} F_X^{\leftarrow}(p^*) = F_X^{\leftarrow}(F(E(X))) \overset{(L2)}{\leq} E(X)$$

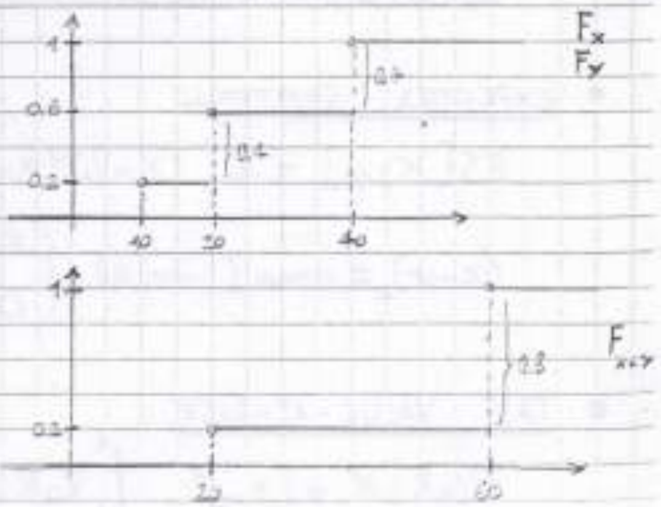


- il $\mathrm{VaR}[X,p]$ non soddisfa la proprietà di sub-additività

esempio:

$\mathbb{P} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

	X	Y	X+Y	P(ω)
ω_1	10	10	20	0.2
ω_2	20	40	60	0.4
ω_3	40	20	60	0.4



$p = 0.6$

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{VaR}[X,0.6] = \mathrm{VaR}[Y,0.6] = 20 \\ \mathrm{VaR}[X+Y,0.6] = 60\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{VaR}[X+Y,0.6] > \mathrm{VaR}[X,0.6] + \mathrm{VaR}[Y,0.6]$

$$60 > 40$$

CAPITALE DI RISCHIO BASATO SUL VaR

$X \in \mathcal{X}, \quad X \geq 0$

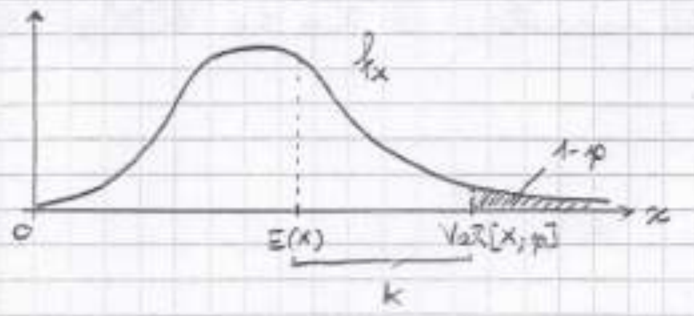
fissato $p \in]0,1[$ livello di confidenza

Il CAPITALE DI RISCHIO per X al livello p è:

$$K = VaR[X;p] - E(X)$$

$$Pr(X > E(X)+K) = Pr(X > VaR[X;p]) \leq 1-p$$

$$Pr(K+E(X)-X<0) \leq 1-p \qquad (\rightarrow \text{prob. di rovina})$$



X con distribuzione dotata di densità f_X

MISURE DI RISCHIO BASATE SUL VALUE-AT-RISK

$\mathcal{X}$ insieme di rischi, $p \in]0,1[$

- CONDITIONAL TAIL EXPECTATION

$$CTE[X;p] = E(X \mid X > VaR[X;p]) \qquad \text{(detto anche TAIL VaR)}$$

- MEAN EXCESS FUNCTION

$$e_X(VaR[X;p]) = E(X - VaR[X;p] \mid X > VaR[X;p])$$

$$e_X(v) = E(X - v \mid X = v)$$

- EXPECTED SHORTFALL

$$ES[X;p] = E[(X - VaR[X;p])_+]$$

$$(x-v)_+ = \max(\,-v, 0) = \begin{cases} x-v & x-v \geq 0 \\ 0 & x-v < 0 \end{cases}$$

- TAIL VALUE-AT-RISK

$$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X;t]\, dt$$

TS - 22 - 11 - 2013 (44 ore)

OSS: RELAZIONI TRA LE MISURE DI RISCHIO BASATE SUL VaR

- $ES[X;p] = E[(X - VaR[X;p])_+]$

$VaR[X;p] \triangleq V$

$$E[(X-V)_+] = Pr(X \leq V)E[\underbrace{(X-V)_+}_{=0} | X \leq V] + Pr(X > V)E[\underbrace{(X-V)_+}_{=X-V} | X > V]$$

$$= Pr(X > V)E[X - V | X > V]$$

$$= Pr(X > V)\, e_X(V)$$

$$ES[X;p] = Pr(X > VaR[X;p])\, e_X(VaR[X;p])$$

$$e_X(VaR[X;p]) = \frac{E[X;p]}{1 - F_X(VaR[X;p])}$$

- $CTE[X;p] = E(X | X > VaR[X;p])$

$$= E(X | X > V) = E(X - V | X > V) + V$$

$$= e_X(V) + V$$

$$CTE[X;p] = VaR[X;p] + e_X(VaR[X;p])$$

$$= VaR[X;p] + \frac{E[X;p]}{1 - F_X(VaR[X;p])}$$

- $ES[X;p] = E[(X-V)_+]$ $\qquad U \sim unif(0,1) \quad F_X^{\leftarrow}(U) \overset{d}{=} X$

$$= E[(F_X^{\leftarrow}(U) - V)_+]$$

$$= E[(F_X^{\leftarrow}(U) - F_X^{\leftarrow}(p))_+]$$

$$= \int_0^1 (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))_+ \, du$$

$u < p \Rightarrow F_X^{\leftarrow}(u) \leq F_X^{\leftarrow}(p) \Rightarrow (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))_+ = 0$

$u \geq p \Rightarrow F_X^{\leftarrow}(u) \geq F_X^{\leftarrow}(p) \Rightarrow (\dots)_+ = F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p)$

$$= \int_p^1 (F_X^{\leftarrow}(u) - F_X^{\leftarrow}(p))\, du$$

$$= \int_p^1 F_X^{\leftarrow}(u)\, du - F_X^{\leftarrow}(p)(1-p)$$

$$\frac{ES[X,p]}{1-p} = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;u]\,du - VaR[X;p]$$
$$= TVaR[X;p] - VaR[X;p]$$

$$TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{1-p}$$

$$CTE[X;p] = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{\underbrace{1-\underbrace{F_x(VaR[X;p])}_{\geq p}}_{\leq 1-p}}$$

se $p \in]F_x(x_0^-), F_x(x_0)[\neq \emptyset \Rightarrow TVaR[X;p] \neq CTE[X;p]$

altrimenti $\Rightarrow TVaR[X;p] = CTE[X;p]$

se F_x è continua $\Rightarrow TVaR[X;p] = CTE[X;p] \quad \forall p \in]0,1[$

OSS:

- si può provare che il TVaR:
  - è misura coerente di rischio
  - soddisfa il no-ripoff
  - non introduce caricamenti ingiustificati
  - introduce un caricamento di sicurezza

- in generale il $CTE[X;p]$ non soddisfa la sub-additività (tale proprietà vale se la F_x è continua, cioè $CTE = TVaR$)

CAPITALE DI RISCHIO BASATO SUL TVaR

$X \in \mathcal{X}, \quad X \geq 0, \quad p \in]0,1[$

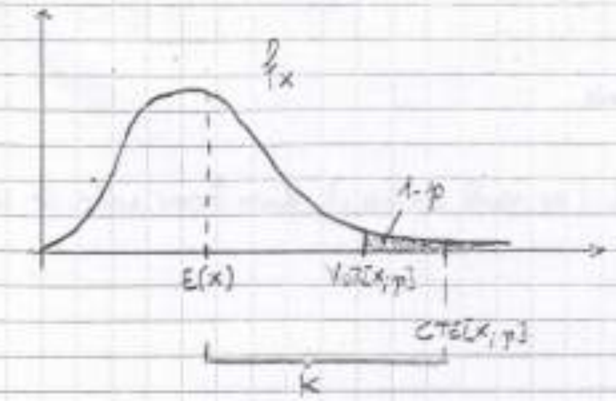
Il capitale di rischio basato sul TVaR di X al livello p è:

$$K = TVaR[X;p] - E(X)$$

$$P_r(X > E(X) + K) = P_r(X > TVaR[X;p])$$
$$TVaR[X;p] \geq VaR[X;p]$$
$$\leq P_r(X > VaR[X;p]) \leq 1-p$$

X con distribuzione dotata di densità f_X :

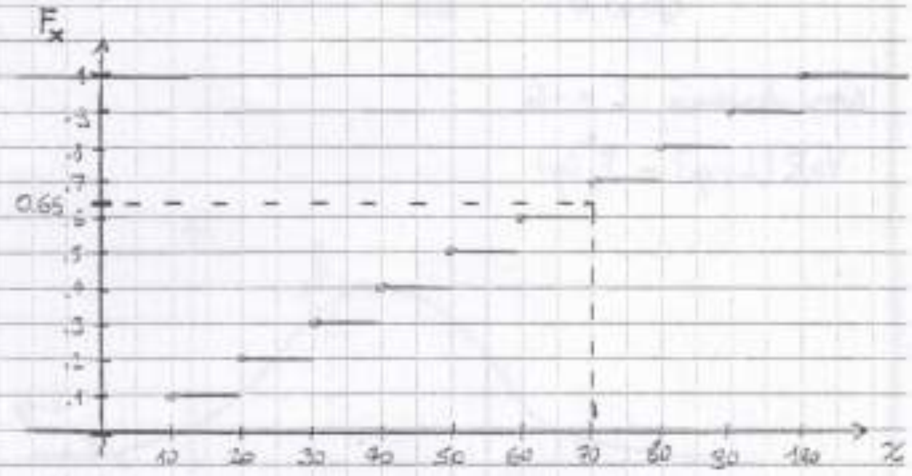
$$TVaR[X;p] = CTE[X,p] \overset{!}{=} E[X \mid X > VaR[X;p]]$$



<u>esempio:</u>

	X	$P(\omega)$
ω_1	10	1/10
ω_2	20	1/10
ω_3	30	1/10
ω_4	40	1/10
ω_5	50	1/10
ω_6	60	1/10
ω_7	70	1/10
ω_8	80	1/10
ω_9	90	1/10
ω_{10}	100	1/10

$E(X) = 55$ $\qquad p = 0.65$



$VaR[X;0.65] = 70$

$$CTE[X;0.65] = E(X \mid X > 70) \overset{!}{=} (80+90+100)\cdot \tfrac{1}{3} = 90$$

$$e_X(VaR[X;0.65]) = E(X-70 \mid X>70) \overset{!}{=} E(X \mid X>70) - 70 = 90-70 = 20$$

$$ES[X;0.65] = E[(X-70)_+] \overset{!}{=} (10+20+30)\cdot \tfrac{1}{10} = 6$$

$$TVaR[X;0.65] = VaR[X;0.65] + \frac{ES[X;0.65]}{0.35} \overset{!}{=} 70 + \frac{6}{0.35} \simeq 87.14$$

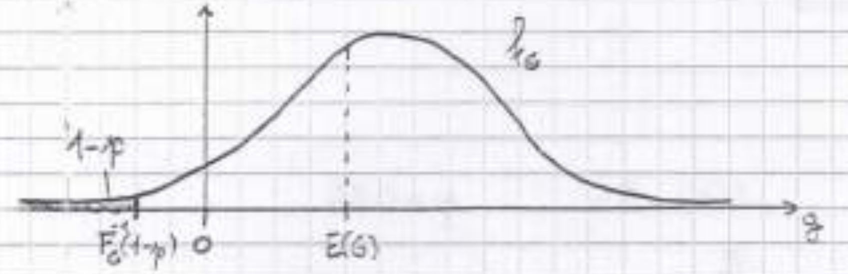
OSS:

dato $X \geq 0$, $p \in]0,1[$, $VaR[X;p]$

consideriamo G, guadagno per il detentore

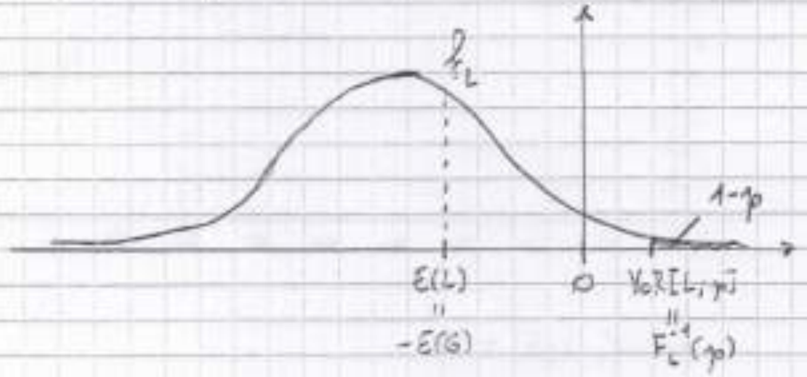
$$G \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$ → tre casi possibili: si vuole evitare di finire troppo sotto lo zero

sia G con distribuzione dotata di densità



consideriamo $L = -G$

$VaR[L;p] = F_L^{\leftarrow}(p)$



per distribuzioni dotate di densità:

$$VaR[L;p] = F_L^{\leftarrow}(p) = -F_G^{\leftarrow}(1-p)$$
$$F_L^{-1}(p) = -F_G^{-1}(1-p)$$

CAPITALE DI RISCHIO BASATO SUL VaR

1) $Pr(K+G<0) \leq 1-p$

$K = VaR[L;p]$

$$Pr(VaR[L;p]+G<0) = Pr(VaR[L;p]-L<0)$$
$$\overset{!}{=} Pr(L > VaR[L;p]) = 1 - \underbrace{F_L(VaR[L;p])}_{F_L(F_L^{\leftarrow}(p))} \leq 1-p$$

2) $P_r(K + G < E(G)) \leq 1 - p$

$K = E(G) + VaR[L; p]$

MISURA DI RISCHIO DI WANG

$\mathcal{X}$ insieme di rischi, $\xi > 0$ (cu)

$\rho_\xi(X) = \int_0^{+\infty} (\overline{F}_X(x))^{1/\xi} dx \qquad X \in \mathcal{X}, \quad \overline{F}_x = 1 - F_x$

poniamo $F_\xi(x) = 1 - (\overline{F}_x(x))^{1/\xi}$

se $\overline{F}_x(x) = 0 \Rightarrow F_\xi(x) = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \in]0,1[, \ \alpha > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$
- F_ξ è monotona non decrescente
- $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
- $\lim_{x \to x_0^+} F_\xi(x) = 1 - (\overline{F}_x(x_0))^{1/\xi} = F_\xi(x_0)$

  $\to F_\xi(x)$ è ct a destra

$\Rightarrow F_\xi$ è funzione di ripartizione

- $(X \leq x) = \Phi \Rightarrow F_x(x) = 0 \Rightarrow F_\xi(x) = 0$
- $(X \leq x) = \Omega \Rightarrow F_x(x) = 1 \Rightarrow F_\xi(x) = 1$
- $(X \leq x) = (X \leq y) \Rightarrow F_x(x) = F_x(y) \Rightarrow F_\xi(x) = F_\xi(y)$

condizioni necessarie perché F_ξ sia funz di ripartiz per X

$\Rightarrow F_\xi$ è valutazione/funz. di ripartizione coerente per X

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \, dF_x(x) = \int_0^{+\infty} \overline{F}_x(x) dx$$

$$E_\xi(X) = \int_0^{+\infty} x \, dF_\xi(x) = \int_0^{+\infty} \overline{F}_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} (\overline{F}_x(x))^{1/\xi} dx$$

$$\overline{F}_\xi(x) = 1 - F_\xi(x) = (\overline{F}_x(x))^{1/\xi}$$

OSS:

se $\varphi > 1 \Rightarrow \frac{1}{\varphi} < 1$

$1 - F_x(x) < (1 - F_x(x))^{1/\varphi}$

$= \text{se } F_x(x) <^{0}_{1}$

$\int_0^{+\infty} (1 - F_x(x))\,dx < \int_0^{+\infty} (1 - F_x(x))^{1/\varphi}\,dx$ a meno che la funz. di ripartiz. abbia un salto di ampiezza unitaria

$E(X) < E_\varphi(X) = \rho_\varphi(X)$

↳ la misura introduce un caricamento di sicurezza positivo

$\rho_\varphi(\cdot)$ $\varphi > 1$ PRINCIPIO DI CALCOLO DEL PREMIO DI WANG

o

RISK-ADJUSTED PRINCIPLE

→ si ha un caricamento di sicurezza implicito (si va a modificare la funz di ripartizione iniziale)

$1 - F_x(x) < (1 - F_x(x))^{1/\varphi}$

$P(X > x) < P_\varphi(X > x)$ → c'è più massa sulle code

→ valutazione più prudenziale

MISURE DI RISCHIO DI WANG GENERALIZZATE

$\mathcal{X}$ insieme di rischi

g funzione definita in $[0,1]$ non decrescente t.c. $\left.\begin{matrix} g(0)=0 \\ g(1)=1 \end{matrix}\right]$ - DISTORSION FUNCTION

$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(\bar{F}_x(x))\,dx$ (se $g(x) = x^{1/\varphi}$ → WANG)

PROPRIETÀ ρ_g

- no ripoff
- traslatività
- omogeneità positiva
- monotonia
- non introduce caricamenti ingiustificati

se la g è concava:

- ρ_g sub-additiva
- ρ_g introduce un caricamento di sicurezza

BIBLIOGRAFIA

- DENUIT, altri (2005), "Actuarial Theory for Dependent Risk, Measures, Orders and Models", WILE.
- MC NEIL, altri (2005), "Quantitative Risk Management", PRINCETOWN S. in FINANC.

TS - 25 - 11 - 2013 (46 ORE) 9ª SETTIMANA ASSENTE

VALUTAZIONI MEDIANTE SIMULAZIONE STOCASTICA

$Y = \varphi(X)$ con F_X assegnata

$E(Y) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dF_x(x)$

$F_Y(y) = Pr(Y \le y) = Pr(\varphi(X) \le y)$ → non sempre facile da calcolare

$Y = \varphi(X_1, \dots, X_n) = \varphi(\underline{X})$ con $F_{\underline{X}}$ assegnata

→ può essere molto difficile valutare Y

$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots)$ con $(X_1, X_2, \dots) \sim \mathcal{F}$ (processo stocastico)

→ situazione ancora più complicata

es: $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, $X = \varphi(N, Y_1, Y_2, \dots)$

$(N, Y_1, Y_2, \dots) \sim \mathcal{F}$

- $Y_1 | N=n, \dots, Y_n | N=n$ i.i.d $\forall n > 0$
- $Y_i | N=n$, $i \le n$ ha legge che non dipende da n
- → $Pr(N=n)$ $n = 0, 1, \dots$
- → F_Y

$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N=n)\, F_Y^{*(n)}(x)$ → dal punto di vista operativo è un bel problema calcolare questa funz. di ripartizione

Il metodo della SIMULAZIONE STOCASTICA consiste nel sostituire un ente aleatorio del tipo

X num. aleatorio
$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vettore aleatorio
$(X_1, X_2, \dots)$ processo stocastico

per il quale è assegnata una valutazione probabilistica, con un altro ente aleatorio che riproduca lo stesso stato di incertezza, al quale riteniamo di assegnare le stesse valutazioni probabilistiche dell'ente originale.

$X \sim F_X \longrightarrow X'$ t.c. $F_{X'} = F_X$

$\underline{X} \sim F_{\underline{X}} \longrightarrow \underline{X}'$ t.c. $F_{\underline{X}'} = F_{\underline{X}}$

$(X_1, X_2, \dots) \sim \mathcal{F} \longrightarrow (X_1', X_2', \dots) \sim \mathcal{F}$

purché risultino osservabili:

$$\left.\begin{array}{l} x' \\ \underline{x}' = (x_1', \dots, x_m') \\ (x_1', x_2', \dots) \end{array}\right\}$$ le determinazioni di questi enti sono dette DETERMINAZIONI SIMULATE dell'ente aleatorio originale

Considero $Y = \varphi(X_1, \dots, X_m)$, $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m) \sim F_{\underline{X}}$

se $\underline{X}' = (X_1', \dots, X_m')$ simula $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$

$Y' = \varphi(\underline{X}')$, $Y' \overset{d}{=} Y$

allora Y' simula Y

Se $\underline{X}'$ è osservabile, cioè posso osservare il valore $\underline{x}'$

$y' = \varphi(\underline{x}')$ è DETERMINAZIONE SIMULATA di Y

Supponiamo di avere $Y = \varphi(\underline{X})$ con $\underline{X} \sim F_{\underline{X}}$ e siamo in difficoltà per calcolare $E(Y)$, $Var(Y)$, F_Y $\quad Y = \varphi(X_1, \dots, X_m)$ $\quad \underline{X} = (X_1, \dots, X_m) \sim F_{\underline{X}}$

se $\underline{X}_1', \dots, \underline{X}_n'$ sono vettori aleatori stocasticamente indipendenti che simulano $\underline{X}$ ($\Leftrightarrow \underline{X}_i' \overset{d}{=} \underline{X}$ $\forall i = 1, \dots, n$) allora:

$Y_1' = \varphi(\underline{X}_1'), \dots, Y_n' = \varphi(\underline{X}_n')$ → trasformati di vettori aleatori stoc. indip.
→ n.a. stoc. indip.

$Y_i' \overset{d}{=} Y$ → simulano Y

→ $Y_1', \dots, Y_n'$ è un CAMPIONE della distribuzione F_Y

quindi posso costruirmi:

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\underline{X}_i')$ stimatore non distorto e consistente di $E(Y)$

se gli $\underline{X}_1', \dots, \underline{X}_n'$ sono osservabili allora:

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\underline{x}_i') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i' \longrightarrow \hat{E}(Y)$

per la varianza trovo lo stimatore:

$\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i' - \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{m} Y_h'\right)^2$ stimatore non distorto di $Var(Y)$

se gli $X_1', \dots, X_m'$ sono osservabili

$\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i' - \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{m} y_h'\right)^2 \rightarrow \hat{Var}(Y)$

se ho:

$y_1', \dots, y_n' \rightarrow F_n(y) = \frac{card\{y_i' \mid y_i' \leq y\}}{n}$ funz. di ripartizione empirica che posso prendere come stima della funz di ripartizione di Y $\rightarrow \hat{F}_Y$

Dobbiamo quindi avere:

- un ente aleatorio che possa essere simulato
- tecnica efficiente, posso osservare molte determinazioni stimate

SIMULAZIONE DI UN NUMERO ALEATORIO

supponiamo di avere $X \sim F_x$, devo costruire un n.a. con stessa funzione di ripartizione:

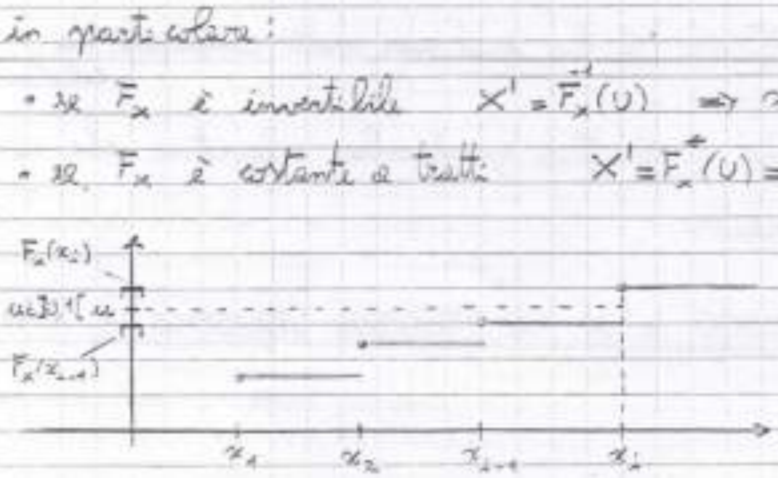
$X' = F_X^{\leftarrow}(U)$ $U \sim unif(0,1) \Rightarrow X' \sim F_x$, cioè X' simula X

se U è osservabile e u è la sua determinazione allora:

$x' = F_x^{\leftarrow}(u)$ è una DETERMINAZIONE SIMULATA DI X

in particolare:

- se F_x è invertibile $X' = F_x^{-1}(U) \Rightarrow x' = F_x^{-1}(u)$
- se F_x è costante a tratti $X' = F_x^{\leftarrow}(U) = x_i \Leftrightarrow F_x(x_{i-1}) < U \leq F_x(x_i)$



se $x \in]F_X(x_{i-1}), F_x(x_i)] \rightarrow x_i$ è determinazione simulata di X

più in generale

$x' = \inf\{x \mid F_x(x) \geq u\} = F_x^{\leftarrow}(u)$

Se abbiamo bisogno di più determinazioni simulate indipendenti possiamo fare riferimento ad una sequenza:

$U_1, U_2, \dots$ i.i.d $U_i \sim unif(0,1)$

$X_1' = F_X^{\leftarrow}(U_1)$, $X_2' = F_X^{\leftarrow}(U_2)$, ... sequenza di v.a. iid che simulano X

$u_1, u_2, \dots$ valori osservati di $U_1, U_2, \dots$

$x_1' = F_X^{\leftarrow}(u_1)$, $x_2' = F_X^{\leftarrow}(u_2), \dots$ seq. di determinaz. simulate di X che possiamo prendere come valori osservati di un campione di X

OSS: come costruire una sequenza di n.c. osservabili

Tutti i software hanno generatori di numeri pseudo-casuali, cioè algoritmi che generano sequenze di numeri $u_1, u_2, \dots \in [0,1]$ che possono essere considerati come valori osservati di $U_1, U_2, \dots$ i.i.d $\sim unif(0,1)$

es: in R

runif (n, 0, 1)

→ calcolare media e varianza campionaria di 100 o 1000 num generati e andare a confrontarle con media e varianza della della distrib. uniforme

$F_X^{-1} \longrightarrow x' = F_X^{-1}(u)$

→ prendo $N(0,1)$, non riesco a calcolare l'inversa (neanche la diretta in forma chiusa)

lo stesso vale per $N(\mu, \sigma^2)$ o la gamma(α, β)

la funz. di ripartiz. non è calcolabile in forma chiusa, è problematica anche per una funz. di rip. costante a tratti

Più in generale dovrei fare $x' = F_X^{\leftarrow}(u)$, il che può essere molto complicato da calcolare

Il problema si risolve andando a sfruttare particolari algoritmi che ci consentono di fare la simulazione.

SIMULAZIONE DI UN VETTORE ALEATORIO o DI UN PROCESSO STOCASTICO A PARAM. DISCRETO

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim F_{\underline{X}}$

$(X_1, X_2, \dots) \sim \mathcal{F}$ processo con legge assegnata

1) $X_1, X_2, \dots$ stocasticamente indip.

↳ basta assegnare le marginali

se $U_1, U_2, \dots$ iid $\sim unif(0,1)$

$\Rightarrow X_1' = F_{X_1}^{\leftarrow}(U_1), \quad X_2' = F_{X_2}^{\leftarrow}(U_2), \dots$

$X_1', X_2', \dots$ stoc. indip. perché trasformate di v.a. stoc. indip.

$X_1' \stackrel{d}{=} X_1, \quad X_2' \stackrel{d}{=} X_2$

allora $(X_1', X_2', \dots)$ simula $(X_1, X_2, \dots)$

se $u_1, u_2, \dots$ sono num pseudo-casuali e quindi determinazioni di $U_1, U_2, \dots$

$\Rightarrow x_1' = F_{X_1}^{\leftarrow}(x_1), \quad x_2' = F_{X_2}^{\leftarrow}(x_2), \dots$ determinazioni simulate dell'ente originale

$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow (x_1', x_2', \dots, x_n')$ è una determ. simulata di $\underline{X}$

se voglio più simulazioni devo ripetere il processo

2) $X_1, X_2, \dots$ v.a. non stocasticamente indipendenti (bisogna tener conto dei legami probabilistici, non basta assegnare le marginali)

se $U_1, U_2, \dots$ iid $\sim unif(0,1)$ e $u_1, u_2, \dots$ determinazioni:

$F_{X_1}^{\leftarrow}(u_1) = x_1', \quad F_{X_2|X_1=x_1'}^{\leftarrow}(u_2) = x_2', \quad F_{X_3|X_1=x_1', X_2=x_2'}^{\leftarrow}(x_3) = x_3', \dots$

si prova che $(x_1', x_2', x_3', \dots)$ è determinazione simulata dell'ente originale

OSS:

si può procedere in modo sequenziale: si calcola x_1', a partire da x_1' si costruisce una determ. simulata di X_2, dati x_1' e x_2' si può costruire una determ. simulata di X_3, e così via

SIMULAZIONE DI $N(0,1)$

$W \sim N(0,1)$ come simulare W?

$F_W^{-1}(U) = W' \quad U \sim unif(0,1) \rightarrow W'$ simula W

tuttavia non è possibile calcolare F_W in forma chiusa, bisogna sfruttare un algoritmo

ALGORITMO DI BOX-MÜLLER

U_1, U_2 iid $\sim unif(0,1)$

$W_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$

$W_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \,\mathrm{sen}(2\pi U_2)$ $\qquad W_1, W_2$ iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$

SIMULAZIONE:

- generare u_1, u_2 num pseudo-casuali
- calcolare $w_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cos(2\pi u_2)$ determ. sim. di W_1

  $w_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \,\mathrm{sen}(2\pi u_2)$ " " " W_2

$$\left.\begin{array}{l}(u_1, u_2) \longrightarrow w_1, w_2 \\ (u_1', u_2') \rightarrow w_1, w_2\end{array}\right\}$$ in questo modo ho più determ. simulate di W_1, W_2

es: in R

rnorm $(n, 0, 1)$

→ sfruttare l'algoritmo di B-M per calcolare più determ. simulate in modo da poter ottenere i momenti primi, poi simulare con l'algoritmo in dotazione nel software e confrontare

SIMULAZIONE DI $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ considero $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

posto $W = \frac{X-\mu}{\sigma}$ abbiamo $X = \sigma W + \mu$ $\quad W \sim \mathcal{N}(0,1)$

se W' simula $W \rightarrow X' = \sigma W' + \mu$ simula X

SIMULAZIONE:

- generare w' determ. simulate di $\mathcal{N}(0,1)$

  con algoritmo B-M

  rnorm(...)
- calcolare $x' = \sigma w' + \mu$ determ. sim. di $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

SIMULAZIONE DI $LN(\mu, \sigma)$

$X \sim LN(\mu, \sigma) \iff \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

posto $Y = \ln X \Rightarrow X = e^Y \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

se Y' simula $Y \rightarrow X' = e^{Y'}$ simula X

SIMULAZIONE:

- generare u' determ. simulata di $\mathcal{U}(0,1)$
- calcolare $y' = \sigma u' + \mu$ determ. simulata di $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- calcolare $x' = e^{y'}$ determ. simulata di $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$

SIMULAZIONE DI GAMMA(α, ρ)

- $X \sim \exp(\rho)$ $(\alpha = 1)$ $\rho > 0$ esponenziale

$F_X(x) = \underbrace{1 - e^{-\rho x}}$ $x \geq 0$

↳ strett crescente ⇒ invertibile

$F_X^{\leftarrow}(x) = F_X^{-1}(x)$ $x > 0$, $F_X^{-1}(u)$ $u \in]0,1[$

$1 - e^{-\rho x} = u \rightarrow e^{-\rho x} = 1 - u$

$\rightarrow -\rho x = \ln(1-u) \rightarrow x = -\frac{1}{\rho} \ln(1-u)$

$F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\rho} \ln(1-u)$ $u \in]0,1[$

se $U \sim unif(0,1) \Rightarrow 1 - U \sim unif(0,1)$

↳ $X' = -\frac{1}{\rho} \ln(1-U)$ simula X → $X'' = -\frac{1}{\rho} \ln(U)$ simula X

SIMULAZIONE:

- generare u
- calcolare $x' = -\frac{1}{\rho} \ln(1-u)$ o $x'' = -\frac{1}{\rho} \ln(u)$ determ. simulata di $X \sim \exp(\rho)$

- $X \sim gamma(n, \rho)$ $(\alpha = n \in \mathbb{N})$ erlangiana

$f_X(x) = \frac{\rho^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\rho x}$ $x \geq 0$

// RICHIAMO: proprietà fam gamma

$X_1, \dots, X_n$ iid $\sim gamma(\alpha, \rho)$

$X_1 + \dots + X_n \sim gamma(n\alpha, \rho)$ la fam. gamma è chiusa per convoluzione n-esima

se $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \exp(\rho) \Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim gamma(n, \rho)$ //

$N(t) = \text{card}\{m \geq 1 \mid T_m \leq t\}$ come a dire:

se $m \geq 1$: $N(t) = m \iff T_m \leq t$ e $T_{m+1} > t$

$$\iff T_m \leq t < T_{m+1}$$

$$\iff \underbrace{W_1 + \dots + W_m}_{\text{tempo d'attesa per l'm-esimo arrivo}} \leq t < \underbrace{W_1 + \dots + W_m + W_{m+1}}_{\text{tempo d'attesa per l'm+1-esimo arrivo}}$$

$\boxed{\text{TS-26-11-2013}}$ (45 ore) ASSENTE

se $m=0$: $N(t) = 0 \iff W_1 > t$ (l'istante t precede il primo intertempo)

$\Rightarrow$ riesco ad esprimere $N(t)$ con il processo degli intertempi:

$$N(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} m \, |N(t)=m| = 0 \cdot |t < W_1| + \sum_{m \geq 1} m \, |W_1 + \dots + W_m \leq t < W_1 + \dots + W_{m+1}|$$

solo uno di questi indicatori è = 1

$\hookrightarrow$ caso $m=0$

$N(1) \sim \text{Poi}(\lambda)$: $\underline{N(1)} = 0 \cdot |1 < W_1| + \sum_{m \geq 1} m \, |W_1 + \dots + W_m \leq 1 < W_1 + \dots + W_{m+1}|$

$\hookrightarrow$ funz. del processo degli intertempi

se $\{W_1', W_2', \dots\}$ simula $\{W_1, W_2, \dots\}$ possiamo trovare un num. che simula $N(t)$ applicando la stessa funzione che applichiamo al processo degli interarrivi per trovare $N(t)$

se $U_1, U_2, \dots$ iid $\sim$ unif$(0,1)$ allora:

$\{-\frac{1}{\lambda} \ln U_1, -\frac{1}{\lambda} \ln U_2, \dots\}$ simula $\{W_1, W_2, \dots\}$

$$N' = 0 \cdot \left| 1 < -\frac{1}{\lambda} \ln U_1 \right| + \sum_{m \geq 1} m \left| -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \ln U_i \leq 1 < -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m+1} \ln U_i \right|$$

N' simula $N \sim \text{Poi}(\lambda)$

$N' = 0 \iff 1 < -\frac{1}{\lambda} \ln U_1 \iff -\lambda > \ln U_1 \iff e^{-\lambda} > U_1$

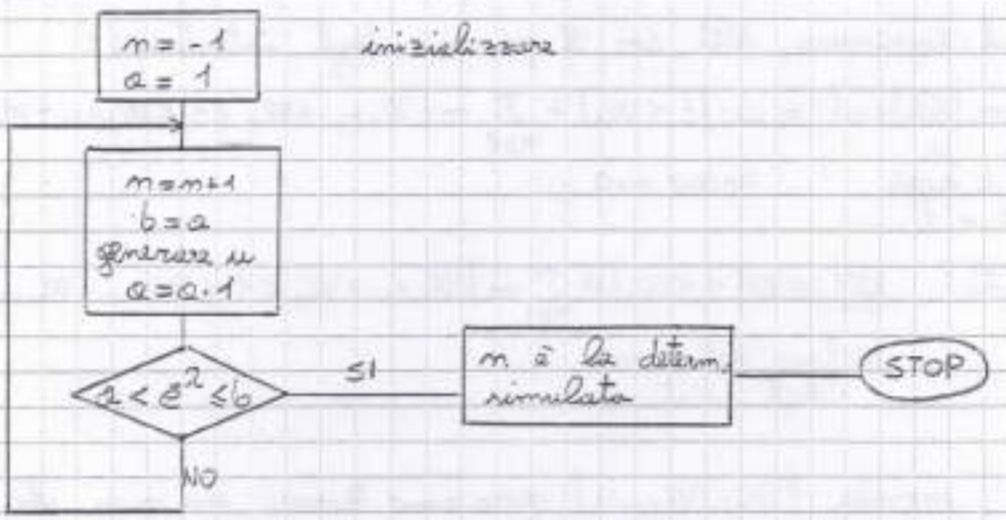
$N' = m \iff -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \ln U_i \leq 1 < -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{m+1} \ln U_i$

$$\iff \sum_{i=1}^{m} \ln U_i \geq -\lambda > \sum_{i=1}^{m+1} \ln U_i \iff \prod_{i=1}^{m} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{m+1} U_i$$

SIMULAZIONE:

- generare u_1
  - $u_1 < e^{-\lambda} \Rightarrow 0$ è determ. simulata di N
  - altrimenti: generare u_2
    - $u_1 u_2 < e^{-\lambda} \le u_1 \Rightarrow 1$ è determ. simulata di N
    - altrimenti: generare u_3
      - ...
      - ...

DIAGRAMMA A BLOCCHI:



SIMULAZIONE $N \sim BinNeg$

N $\quad \Theta$ parametro aleatorio (quello solitamente indicato con U)

$\lambda > 0, \quad \alpha > 0$

$$\left.\begin{array}{l} N|\Theta=\theta \sim Poi(\lambda\theta) \\ \Theta \sim gamma(\alpha,\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow N \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right) \qquad \begin{array}{l} E(N)=\lambda \\ Var(N)=\lambda+\frac{\lambda^2}{\alpha} \end{array}$$

L'idea è quella di simulare il vettore (Θ, N), ma in questo caso non si ha l'indipendenza, quindi si procede con una simulazione sequenziale

SIMULAZIONE:

- simulare Θ: generare u e calcolare $\overleftarrow{F_\Theta}(u) = \theta'$
- $N|\Theta=\theta' \sim Poi(\lambda\theta')$: si può simulare n' da una $Poi(\lambda\theta')$ (ad esempio con l'algoritmo visto prima)

n' è determ. simulata di una BinNeg

SIMULAZIONE DI X - POISSON COMPOSTA

$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$

- $\forall\, n > 0$ $\quad Y_1|N=n, \dots, Y_n|N=n$ iid
- $\underset{i \le n}{Y_i|N=n}$ ha legge che non dipende da n

  F_Y: distrib. del risarcimento per sinistro in ip. che il sinistro si sia verificato
- $N \sim Poi(\lambda)$

$$\Rightarrow X \sim \text{Poisson Composta}(\lambda, F_Y)$$

formalmente è possibile scrivere F_X, ma ciò non è operativamente

$X = \varphi(\underbrace{N, Y_1, Y_2, \dots}$)

simulare questo processo per poi ottenere una determ. simulata di X

• METODO DIRETTO

Non essendoci indipendenza nel processo bisogna procedere sequenzialmente

- simulare N: generare u e calcolare $F_N^{\leftarrow}(u) = n'$ (o usare un algoritmo)
- $Y_1|N=n' \sim F_Y$, devo simulare $Y_1|N=n'$: $F_Y^{\leftarrow}(u_1) = y_1'$
- $Y_2|N=n', Y_1 = y_1' \overset{d}{=} Y_2|N=n' \sim F_Y$: $F_Y^{\leftarrow}(u_2) = y_2'$

  $\vdots$
- simulare $Y_1|N=n', \dots, Y_{n'}|N=n'$ che sono iid: generare $u_1, \dots, u_{n'}$ e calcolare

$$\underset{\overset{\|}{y_1'}}{F_Y^{\leftarrow}(u_1)}, \dots, \underset{\overset{\|}{y_{n'}'}}{F_Y^{\leftarrow}(u_{n'})}$$

Così facendo si è simulato tutto il processo in quanto:

$\underset{h > n'}{Y_h|N=n'=0} \quad \rightarrow \quad (n', y_1', \dots, y_{n'}', 0, 0, \dots)$ è determ. simulata di $\{N, Y_1, Y_2, \dots\}$

- calcolare $x' = y_1' + \dots + y_{n'}'$ determinazione simulata di X

OSS:

Il metodo diretto può essere un processo molto lungo.
Esistono algoritmi che si basano sull'approssimazione della distribuzione Poisson-Composta.

APPROSSIMAZIONE WILSON-HILFERTY

$X \sim$ Poisson - Composta (λ, F_Y)

$F_X,\ \mu_X,\ \sigma_X,\ \gamma_X = \dfrac{E[(X-\mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$ coeff. di asimmetria

$$F_X(x) \simeq \Phi\left(h\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\right) \quad x>0$$

essendo $h(t) = C_1 + C_2 (t + C_3)^{1/3}$

$$C_1 = \frac{1}{6}\gamma_X - \frac{6}{\gamma_X}$$

$$C_2 = 3\left(\frac{2}{\gamma_X}\right)^{2/3}$$

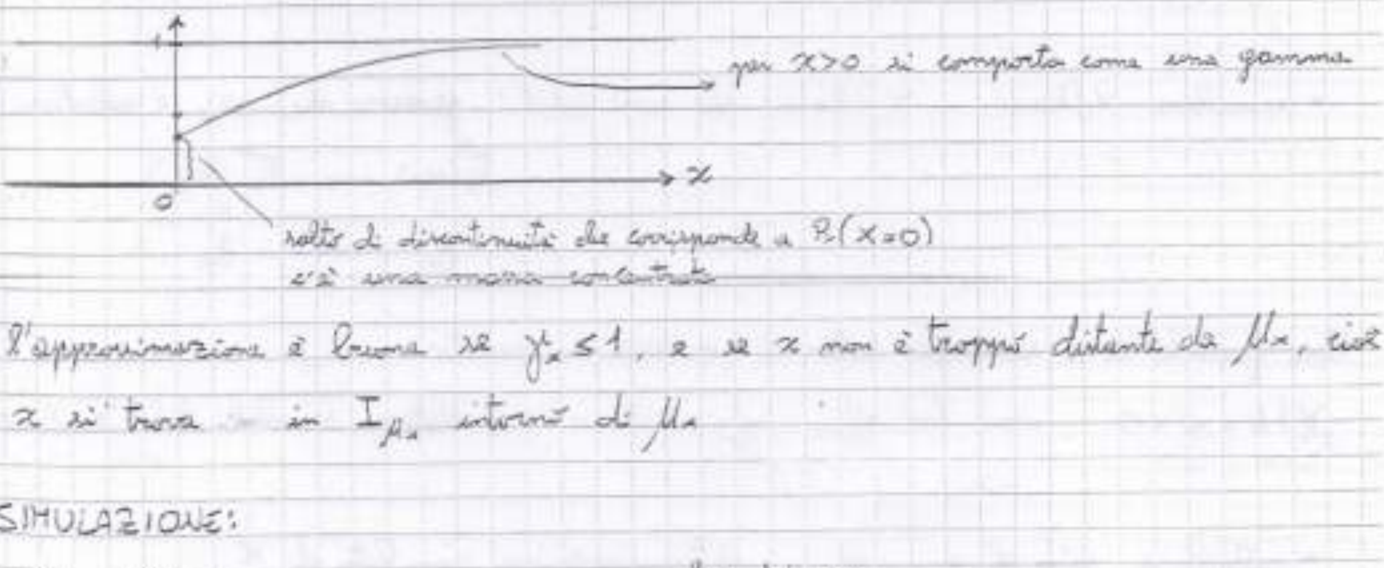
$$C_3 = \frac{2}{\gamma_X}$$

la $\Phi\left(h\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\right)$ è un'approssimazione pensata per la gamma, ma può andare bene anche per la Poisson-Composta.

OSS:

perché deve essere $x>0$!

$Pr(X=0)>0$: $N=0 \Rightarrow X=0 \Rightarrow 0 < Pr(N=0) \leq Pr(X=0)$



l'approssimazione è buona se $\gamma_X \leq 1$, e se x non è troppo distante da μ_X, cioè x si trova in I_{μ_X} intorno di μ_X

SIMULAZIONE:

$W \sim N(0,1)$ $\qquad$ $h(\cdot)$ strett. cresc.

$$\Phi\left(h\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\right) = Pr\left(W \leq h\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\right) \overset{!}{=} Pr\left(h^{-1}(W) \leq \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$$

$$\overset{!}{=} Pr(\sigma_X h^{-1}(W) + \mu_X \leq x) = F_{\sigma_X h^{-1}(W)+\mu_X}(x)$$

$$\rightarrow F_X(x) \simeq F_{\sigma_X h^{-1}(W)+\mu_X}(x)$$

approssimativ. uguale in distrib.: $X \overset{d}{\simeq} \sigma_X h^{-1}(W) + \mu_X$

- calcolare $\mu_x = \lambda E(Y)$

$$\sigma_x = \sqrt{\lambda E(Y^2)}$$

$$\gamma_x = \frac{E(Y^3)}{\sqrt{(\lambda E(Y^2))^3}}$$

- simulare $W \sim N(0,1)$ e trovare w' (ad es. con Box-Müller)
- calcolare $x' = \sigma_x h^{-1}(w') + \mu_x$ che può essere presa come determ. sim. di X

$$w = C_1 + C_2 (t + C_3)^{1/3}$$

$$(t + C_3)^{1/3} = \frac{w - C_1}{C_2} \rightarrow t + C_3 = \left(\frac{w - C_1}{C_2}\right)^3 \rightarrow t = \left(\frac{w - C_1}{C_2}\right)^3 - C_3$$

$$\Rightarrow h^{-1}(w) = \frac{(w' - C_1)^3}{C_2^3} + C_3$$

- APPROSSIMAZIONE NORMAL - POWER

$X \sim$ Poisson-Composta(λ, F_Y) $\quad \mu_x, \sigma_x, \gamma_x$

$$F_x(x) \simeq \Phi\left(-\frac{3}{\gamma_x} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_x^2} + 1 + \frac{6}{\gamma_x} \cdot \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}}\right) \quad x > 0$$

l'approssimazione è migliore in un intorno I_{μ_x} per $\gamma_x \leq 1$

se $W \sim N(0,1)$ allora:

$$\mu_x + \sigma_x W + \frac{\sigma_x \gamma_x}{6}(W^2 - 1) \overset{d}{\simeq} X$$

SIMULAZIONE:

- calcolare $\mu_x, \sigma_x, \gamma_x$
- simulare $W \sim N(0,1)$ e trovare w'
- calcolare $x' = \mu_x + \sigma_x w' + \frac{\sigma_x \gamma_x}{6}(w'^2 - 1)$ che può essere presa come determ. simulata di X

BIBLIOGRAFIA

- POYKIN, PANTIKÄINEN, PESONEN (1994), "Practical Risk Theory for Actuaries", CHAPMAN HALL

X risarcimento per un portafoglio in un finito intervallo

$X \sim$ Poisson-Composta (λ, F_x)

$K = \underbrace{VaR[X;p]}_{} - \underbrace{E(X)}_{}$ → si calcola facilmente

→ $= F_x^{\leftarrow}(p)$, serve la F_x che non è facile da calcolare

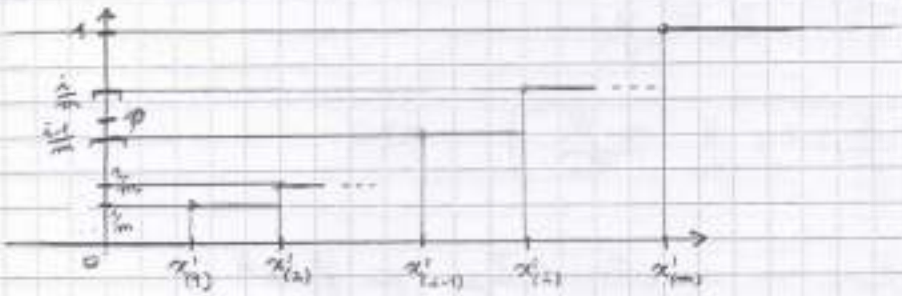
ottenere m determ. simulate: $x'_1, \dots, x'_m$

$\hat{F}_x = F_m \qquad F_m(x) = \dfrac{\text{card}\{x'_i \mid x'_i \leq x\}}{m}$

posso quindi stimare il VaR:

$\hat{VaR}[X, p] = F_m^{\leftarrow}(p)$ uso i quantili di ordine p della funz. di ripartiz. empirica

se $x'_{(1)} < x'_{(2)} < \dots < x'_{(m)}$



$F_m^{\leftarrow}(p) = x'_{(i)} \iff F_m(x_{(i-1)}) < p \leq F_m(x_{(i)})$

$\iff \dfrac{i-1}{m} < p \leq \dfrac{i}{m}$

$\iff i-1 < mp \leq i$ dove i è il più piccolo intero dopo mp

es: $p = 0.995$
$m = 10000$ $\rightarrow \hat{VaR}[X; p] = x_{(9950)}$

SIMULAZIONE DI UN PROCESSO DI POISSON

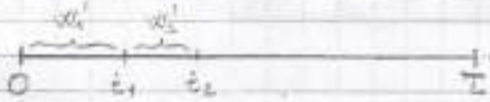
$\{N(t), t \geq 0\}$ il processo è esprimibile con $\{W_1, W_2, \dots\}$ iid $\exp(\lambda)$

si va a simulare $\{W_1, W_2, \dots\}$

$\{W'_1, W'_2, \dots\}$ simula $\{W_1, W_2, \dots\}$

→ ad esempio $\left\{-\dfrac{1}{\lambda}\ln U_1, -\dfrac{1}{\lambda}\ln U_2, \dots\right\}$

ci si pone in un intervallo limitato $[0, \tau]$



SIMULAZIONE:

• simulare $w_1 \to w_1'$

$$\begin{cases} w_1' > \tau \Rightarrow n(t)=0 \quad 0 \le t < \tau \to \text{STOP} \\ w_1' \le \tau \Rightarrow n(t)=0 \quad 0 \le t < t_1 \end{cases}$$

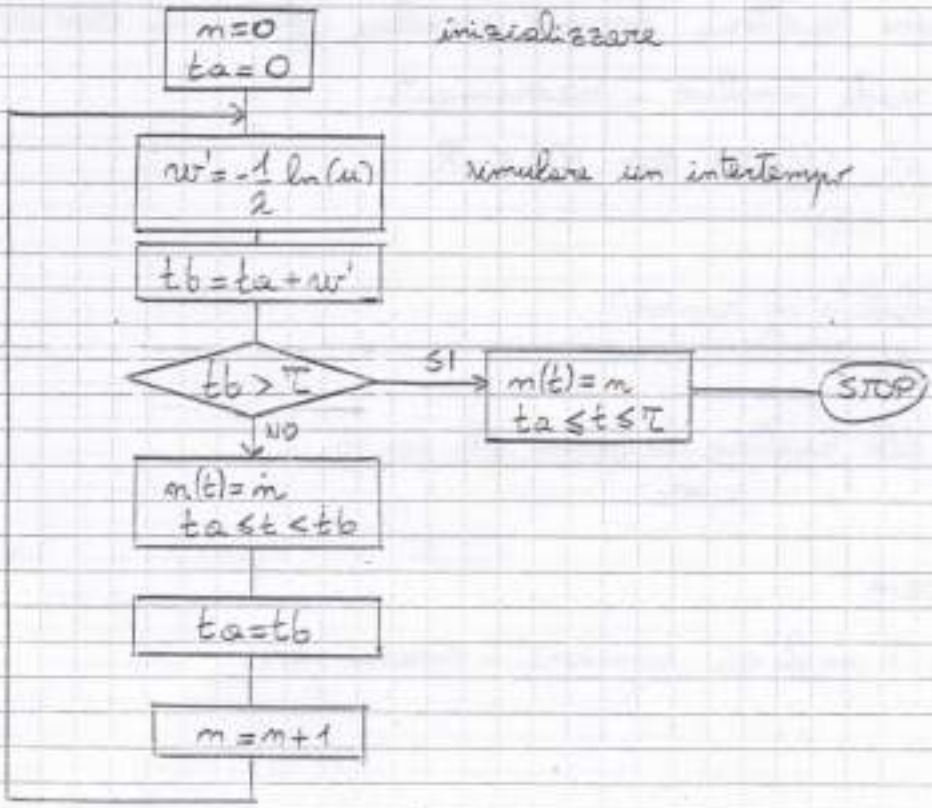
simulare $w_2 \to w_2'$

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + w_2' > \tau \Rightarrow n(t)=1 \quad t_1 \le t < \tau \\ t_2 \le \tau \Rightarrow n(t)=1 \quad t_1 \le t < t_2 \end{cases}$$

simulare $w_3 \to w_3'$ ...

Ci si ferma quando simulando un ulteriore intertempo si supera τ

DIAGRAMMA A BLOCCHI



TS - 29 - 11 - 2013 (50 ORE)

VALUTAZIONE DELLA PROBABILITÀ DI ROVINA NELLA TCR

$R(t) = R + ct - S(t)$

$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$

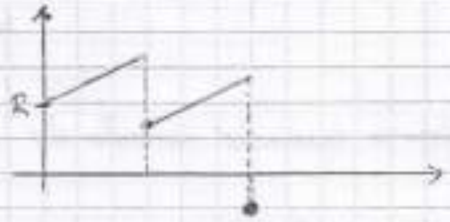
- $\{N(t),\ t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ
- $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ $\quad Y_{n+1}|H, \dots, Y_{n+m}|H$ iid con F_Y che non dipende da H, n, m

$\rightarrow S(t)$ processo ad incrementi indipendenti e stazionari $\sim$ Poisson-Composto

$\psi(R) = Pr\left(\bigvee_{t \geq 0} R(t) < 0 \right)$

$\psi(R, \tau) = Pr\left(\bigvee_{0 \leq t \leq \tau} R(t) < 0 \right)$

es: traiettoria che non porta alla rovina



es: traiettoria che porta alla rovina

Se vogliamo stimare una traiettoria dovremo simulare gli istanti dove avvengono i sinistri e per questi simulare i risarcimenti.

$$R(t) < 0 \iff R + \underbrace{ct - S(t)}_{D(t)} < 0 \iff D(t) < -R$$

Per simulare la probabilità di rovina:

m traiettorie simulate

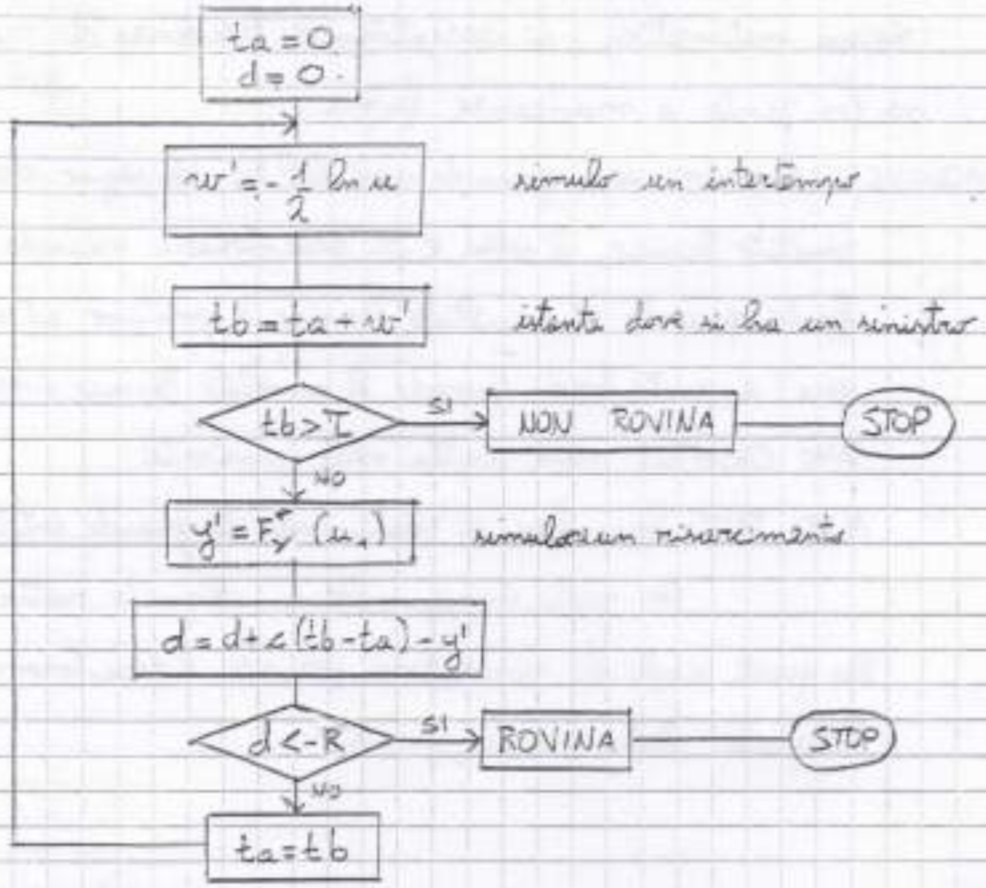
$$\hat{\psi}(R, \tau) = \frac{\text{num delle traiettorie che portano alla rovina}}{m}$$

SIMULAZIONE TRAIETTORIA

simulare gli istanti e su di cui simulare i risarcimenti

<GIRA →>

DIAGRAMMA A BLOCCHI



BIBLIOGRAFIA:

- DE NUIT, CHARPENTIER (2004), "Mathematique de l'Assurance non-vie", ECONOMICA

per l'esame: per ogni distribuzione provare a fare differenti simulazioni con gli algoritmi visti e quelli proposti dal software, fare confronti tra le stime empiriche e momenti teorici

RISERVE TECNICHE

Le riserve tecniche non sono libere da impegni come le riserve patrimoniali che si collocano nel patrimonio netto: le riserve tecniche infatti sono debiti verso gli assicurati e quindi si trovano nella passività

- RISERVA PREMI: messa per coprire sinistri e spese future per contratti già stipulati
- RISERVA SINISTRI: stima di quanto l'assicuratore dovrà pagare in futuro per sinistri già verificati nell'esercizio e in esercizi precedenti

- RISERVA SENESCENZA: per assicurazioni malattia su base poliennale, e senza riserva matematica, si accantonano eccedenze di premio per far fronte a mancanze future
- RISERVA DI PEREQUAZIONE: essendoci una grande variabilità del segno del risultato tecnico, l'idea è di accantonare creando un fondo quando il risultato tecnico è positivo ed attingere a questo fondo quando il risultato tecnico è negativo
  RAMO CREDITO: viene scritta nelle passività
  ALTRI RAMI: bassa freq. di rischi ma di grande entità
  (es: rischi energia nucleare, calamità naturali)
  Per questi rischi la normativa prevede l'accantonamento integrale della riserva premi.

OSS:

La riserva di perequazione non esisterà più nel momento in cui entrerà in vigore SOLVENCY II: si vuole che nel bilancio vengano scritte le attività e le passività reali, quindi si sposterà questa riserva nel capitale di rischio

Ci concentreremo sulle riserve premi e riserve sinistri commentando le relative normative.

RISERVA PREMI

a) RISERVA PER FRAZIONI DI PREMI

- METODO PRO RATA TEMPORIS

$R_p(1)$: riserva premi alla chiusura dell'esercizio

$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$

In 1 si accantona la parte di premio che andrà a coprire la durata residua del contratto

$$R_p(1) = \sum_{h=1}^{m} P_h^T (1-\alpha') \cdot t_h$$ METODO PRO RATA TEMPORIS (α' spese di acquisizione)

es: contratto stipulato il 1° ottobre: $P_h^T(1-\alpha')\frac{9}{12}$

OSS: <u>GIUSTIFICAZIONE METODO PRO RATA TEMPORIS</u>

Per un fissato individuo consideriamo $\{X(t), t\geq 0\}$ processo dei risarcimenti in $[0,t]$

IPOTESI:

- $\{N(t), t\geq 0\}$ processo di Poisson (λ)
- $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ $Y_{m+1}|H, \dots, Y_{m+m}|H$ iid F_Y

$$\Rightarrow X(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h \qquad X(t) \sim \text{Poiss-comp}(\lambda t, F_Y)$$

$\{X(t), t\geq 0\}$ processo ad incr. indip. e staz.

(sono le stesse ip. per $S(t)$ nella TCR)

visto che: $E[X(t+1) - X(t)] = \lambda E(Y) = E[X(1)]$

in riferimento ad una durata t:

$$E[X(t)] = \lambda t E(Y) = t\underbrace{\lambda E(Y)}_{\text{risarcimento atteso nel corso di un anno}} = tE[X(1)]$$

A fronte di un premio equo incassato per un anno, per una durata residua t il premio sarà $tE[X(1)]$

Metto via la porzione di premio necessaria a coprire la durata residua del contratto

Le ipotesi della TCR giustificano il metodo di calcolo della riserva rischi pro rata temporis. Sotto quindi c'è l'idea di un processo ad incrementi indipendenti e stazionari.

- <u>METODO FORFETTARIO</u>

$$P^T(1) = \sum_{h=1}^{m} P_h^T \qquad \text{non si deducono le spese}$$

$P^T(1) = 0.35$ rischi annuali nell'esercizio

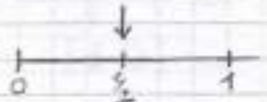
$= 0.40$ RCA

$= 0.15$ per rischi di breve durata

CONFRONTO TRA I DUE METODI

$$R_p(1) = \sum_{h=1}^{n} P_h^T (1-\alpha') t_h$$

supponiamo che tutti i contratti siano stipulati a metà esercizio



$$\to R_p(1) = (1-\alpha')\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{h=1}^{T} P_h^T}_{P^T(1)} \simeq 35\% \, P^T(1)$$

$\alpha' \simeq 0.30$

↳ il metodo forfettario vale in caso si abbia una certa uniformità nella stipulazione dei contratti

Si può usare il metodo forfettario se:

$$0 < \frac{RF - RPRT}{RPRT} \le 0.02$$

RF = riserva metodo forfettario

RPRT = riserva pro rata temporis

Che interesse ha l'assicuratore ad usare il metodo forfettario o il metodo pro rata temporis? Il fatto è che le riserve tecniche sono: - fiscalmente deducibili

- voci di passività

Si decide quindi quale metodo è "più comodo", basta che poi sia precisato nell'allegato del bilancio.

es: premio pagato in un'unica soluzione in via anticipata

metodo PRT: $P_1 \cdot \frac{3}{6}$

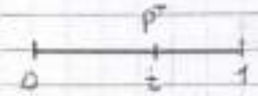
b) RISERVA PER RISCHI IN CORSO

Può accadere che alla chiusura dell'esercizio l'assicuratore valuti che la riserva calcolata più le rate future non siano adeguate per coprire sinistri e spese future (ad es. è aumentata la freq sinistri o è aumentata l'inflazione

$R_p(1)$ + rate future di premi → INSUFFICIENTI

Può anche accadere che l'investimento della riserva sia stato sopravvalutato.
In generale si costituisce questa riserva quando cambiano i parametri in base ai quali si era costruita la tariffa.
Si può quindi considerarla un metodo di correzione del metodo pro rata temporis (che ad es non considera la stagionalità)

- <u>METODO ANALITICO</u>



in t incasso P^T premio che applico in base alla tariffa che ho applicato sulla base di osservazioni passate

In 1 cambia lo stato di informazione, valuto la tariffa in questo nuovo stato di informazione e può accadere che $P^{T'} > P^T$

$\rightarrow$ si era calcolata $RPRT = P^T(1-\alpha')t$, ma in 1 si valuta che in realtà serve $RPRT = P^{T'}(1-\alpha')t$

si pone la differenza nella riserva per rischi in corso:

$$RRC = [P^{T'} - P^T](1-\alpha')t$$

- <u>METODO SEMPLIFICATO</u>

consideriamo un indice di sinistrosità:

$$\frac{\overbrace{(\text{pagato} + \text{riservato} + \text{spese dirette di liquidazione per sinistri dell'es.})}^{\text{costo sinistri dell'es.}}}{\underbrace{P^T(1)(1-\alpha') + \underbrace{R_p(0) - R_p(1)}_{\text{riserva per frazioni di premio}}}_{\text{premi di competenza dell'es. dedotte le spese di acquisizione}}} = \frac{S}{P}$$

$\Rightarrow \frac{S}{P}$ COSTO MEDIO PER UNITÀ DI MONTEPREMI

Nell'anno successivo avrò:

$R_p(1)$ + rate future (contratti stipulati l'anno precedente) : stima dei premi che avrò il prossimo anno per i sinistri che verificheranno il prossimo anno per i contratti dell'anno corrente

$\frac{S}{P}$ ($R_p(1)$ + rate future) stima del costo dei sinistri che graveranno nell'anno $t+1$ per contratti stipulati nell'anno t

$\frac{S}{P}$ ($R_p(1)$ + rate future) − ($R_p(1)$ + rate future)   RISERVA PER RISCHI IN CORSO

Alla chiusura dell'esercizio in caso si stimi un'insufficienza della riserva premi, si metterà quella differenza nella riserva per rischi in corso.

TS-02-12-2013 (52 ORE) 10^ SETTIMANA ASSENTE

RISERVA SINISTRI

$R_s(1)$ stima di ciò che l'assicuratore dovrebbe pagare per sinistri avvenuti nell'esercizio o in esercizi precedenti e non ancora pagati

bisogna determinare quando e quanto si pagherà

0 ——— 1 $R_s(1)$

INBR → Incurred But Not Reported (tardivi), sinistri avvenuti nell'es. e non ancora denunciati

Bisogna tener conto di quando si pensa di finire il pagamento in modo da tener conto dell'inflazione.

In caso sia prevista una franchigia (che dovrebbe essere a carico dell'assicurato) anch'essa deve essere messa a riserva.

- METODO DELL'INVENTARIO o CASE RESERVE

"La riserva deve essere, in linea di principio, valutata separatamente per ciascun sinistro" (Codice delle Assicurazioni, art. 33, comma 3)

Si ha una valutazione soggettiva del liquidatore per ciascuna pratica aperta. La valutazione della riserva è importante per il controllo interno

- VALUTAZIONE DI TIPO TECNICO-ATTUARIALE

C'è stata un'apertura delle valutazioni, prima l'unico metodo era quello dell'inventario. L'apertura delle valutazioni della riserva è voluta dal legislatore per indurre le compagnie assicuratrici a valutare le riserve in metodo multifase:

- 1^ FASE: strutture liquidative che valutano i sinistri con il metodo dell'inventario
- 2^ FASE: strutture dell'impresa che analizzano le stime dell'inventario affiancandole a valutazioni di tipo tecnico-attuariale

INFLAZIONE

L'inflazione di cui bisogna tener conto è la CLAIM INFLATION

- INFLAZIONE MONETARIA NEL SETTORE

  (es: RCA, inflazione sui pezzi di ricambio o sugli stipendi del settore auto)

- SUPER-IMPOSED INFLATION

  variazione del costo dei sinistri per motivi differenti dall'inflazione

  (es: motivi giuridici o legislativi, come passaggio dal 5% al 10% degli interessi sulle riserve)

Quali sono i sinistri per i quali vengono accantonate riserve?
Per un sinistro che abbia circostanze chiare, con responsabilità e risarcimento chiaramente attribuibili, è nell'interesse dell'assicuratore chiudere il caso il prima possibile.
Non vengono pagati subito tutti gli altri sinistri

PROCESSO DI SMONTAMENTO DELLA RISERVA SINISTRI

ϑ

sinistri anno ϑ <
- chiusi in ϑ (cioè pagati)
- aperti alla chiusura di ϑ

$\rightarrow R_s(\vartheta, \vartheta)$

anno di accadimento — anno di valutazione

ϑ , $\vartheta+1$

sinistri anno ϑ <
- chiusi
- rivalutati
- aperti

bisogna aggiornare $R_s(\vartheta, \vartheta)$ in $R_s(\vartheta, \vartheta+1)$

Quale andamento avrà questa valutazione? I sinistri verranno pagati nel tempo quindi un andamento decrescente fino ad arrivare a 0

ϑ , $\vartheta+1$, $\vartheta+\tau$

0 , $R_s(\vartheta,\vartheta)$, $R_s(\vartheta,\vartheta+1)$, $R_s(\vartheta,\vartheta+\tau)=0$

t = durata del processo di smontamento della riserva sinistri

Vi sono: - RAMI A BREVE SMONTAMENTO, t = 4,5 anni (es. grandine)
- RAMI A LUNGO SMONTAMENTO, t = 10,15 anni (es. RCA, rami con RC)

In RC comunque la percentuale dei sinistri pagati nell'anno corrente o nell'anno successivo è molto alta, ciò che cambia è il costo medio per sinistro, che può essere di 3500€ per i sinistri che vengono chiusi subito, mentre può arrivare a 150'000€ per sinistri che vengono chiusi fino a 15 anni di differimento.

METODI STATISTICO-ATTUARIALI PER LA VALUTAZIONE DELLA RISERVA SINISTRI

Forniscono una valutazione globale per il portafoglio.
È possibile ripartire queste metodologie in due grandi categorie:

- METODI DETERMINISTICI

tecniche (algoritmiche) nate su basi empiriche che forniscono una stima puntuale

- METODI BASATI SU MODELLI STOCASTICI

alla chiusura dell'esercizio si dovrà valutare numeri aleatori e quindi formulare un modello probabilistico usando i dati per stimare i valori del modello; questi metodi consentono di avere informazioni molto più utili come quale stima usare (speranza matematica, percentile) e quanto è valida tale stima;
anche nella pratica attuariale è diventato importante fare riferimento a modelli stocastici.

<GIRA →>

SCHEMA GENERALE

Facciamo riferimento ad una tipologia di sinistri con marcati caratteri di analogia. Supponiamo che la data di valutazione per questa tipologia di sinistri sia il 31/12/A

i: PERIODO DI ORIGINE di un sinistro

↳ l'anno entro il quale si trova la data di accadimento o di denuncia del sinistro, o la sottoscrizione della polizza che ha avuto il sinistro

anno, semestre, quadrimestre, ... (dipende da come si fraziona l'anno)

I sinistri con periodo di origine i possono essere pagati in:

$i, i+1, \dots, i+t$ PERIODI DI PAGAMENTO

t: DURATA DEL PROCESSO DELLA RISERVA

Indichiamo con $j = 0, \dots, t$ PERIODO DI DIFFERIMENTO o SVILUPPO

↳ stesso frazionamento usato per i

Per svincolarsi dal particolare periodo A, si introduce una codifica numerica

i sinistri di quest'anno dovrebbero essere chiusi in t, ma non si può escludere che qualche sinistro non sia chiuso in t, le cosiddette CODE

Si introducono quindi alcune GRANDEZZE DI INTERESSE per la valutazione della riserva:

X_{ij} "grandezza di interesse" periodo di origine i (anno), periodo di diff. j (anno)

- P_{ij} PAGAMENTI INCREMENTALI: importo complessivamente pagato con differimento j per sinistri con periodo (anno) di origine i (quindi importi pagati in $i+j$)

• C_{ij} <u>PAGAMENTI CUMULATI</u>: importo complessivamente pagato per sinistri con periodo (anno) di origine i e differimento $\leq j$

$C_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P_{ih}$

• P_{ij}^F: (Finalized) importo che è stato complessivamente pagato per sinistri con periodo di origine i e chiusi con differimento j (si tiene conto che possono esserci pagamenti intermedi)

• C_{ij}^F: importo complessivamente pagato per sinistri con periodo di origine i, chiusi con differimento $\leq j$

• $\frac{P_{ij}}{w_{ij}}$: pagamento incrementale rapportato ad una misura di esposizione

w_{ij} può dipendere solo da i:

$w_{ij} = w_i$ <
- premi di competenza dell'anno di origine i
- num. dei sinistri " " " i
- ...

• $\frac{C_{ij}}{w_{ij}}$: pagamenti cumulati rapportati ad una misura di esposizione

• P_{ij}^*: pagamento incrementale rettificato rispetto all'inflazione

P_{ij} è l'importo nominale mentre P_{ij}^* esprime P_{ij} tutti a valori correnti di un dato anno (tipicamente t)

possiamo definirlo come pagamento incrementale di sinistri con anno di origine t, effettuato con differimento j a valori correnti nell'anno t

tassi annui di inflazione

$P_{ij}^* = P_{ij}(1+\varphi_{i+j+1})\cdot\ldots\cdot(1+\varphi_t)$ dove l'inflazione è la CLAIM INFLATION

$C_{ij}^* = \sum_{h=0}^{j} P_{ih}^*$

• I_{ij}: INCURRED LOSSES (= CLAIMS): stime effettuate alla chiusura dell'anno $i+j$ del costo ultimo per i sinistri che hanno anno di origine i

$I_{ij} = C_{ij}$ + stima inventario per i pagamenti futuri di sinistri di origine i che alla chiusura $i+j$ sono ancora aperti

→ dato osservato, importo che è stato già pagato

• N_{ij}: numero di pagamenti effettuati con differimento j per sinistri con periodo di origine i

num. di importi che dà origine all'importo P_{ij}

N_{ij}^c danno origine a C_{ij}

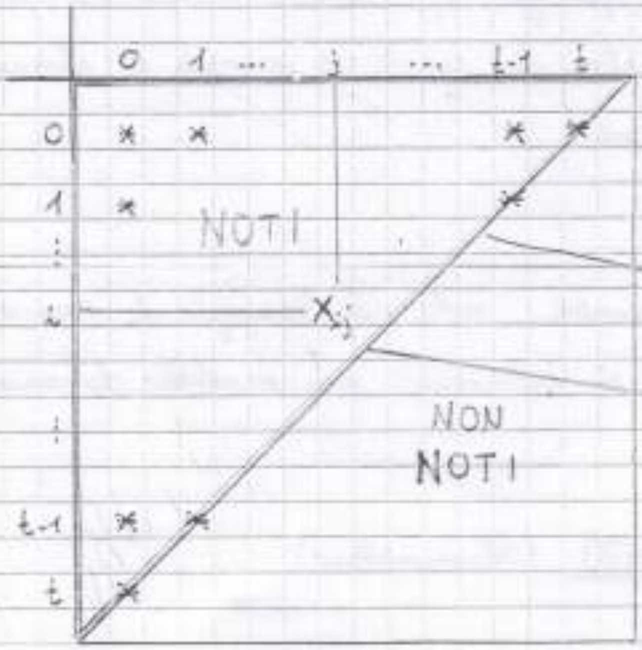
• D_{ij}: numero di sinistri con periodo di origine i denunciati con diff. j

⋮

ci possono essere molte altre grandezze di interesse

In generale si ha la grandezza di interesse X_{ij} e si può quindi costruire la tabella:

TABELLA DI RUN-OFF o SVILUPPO



* dati di cui si dispone

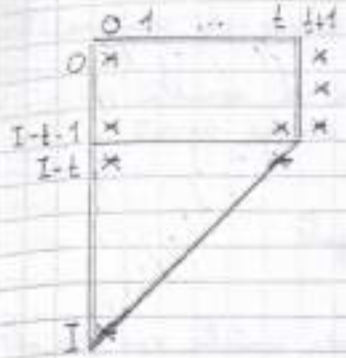
→ sulla diagonale $i+j=t$

→ TRIANGOLO DI RUN-OFF

in $i=t$ si ha un solo dato

Gli elementi che si trovano su una riga sono pagamenti che hanno lo stesso periodo di origine, su una stessa colonna hanno lo stesso periodo di differimento, nella diagonale hanno lo stesso periodo di pagamento

Talvolta si può avere una struttura a trapezio anziché a triangolo:



STRUTTURA A TRAPEZIO

poniamo ${}_0R_t$: stima di quanto si deve ancora pagare per sinistri con periodo di origine 0 o precedenti non ancora chiusi in t, quindi con periodo di differimento > t

TS - 03 - 12 - 2013 (54 ore)

<u>MODELLI STOCASTICI</u>

gli X_{ij} grandezze di interesse sono considerati num. aleatori

x_{ij} in ∇ e $\triangleright$ sono i valori osservati degli X_{ij} $(i+j \leq t)$

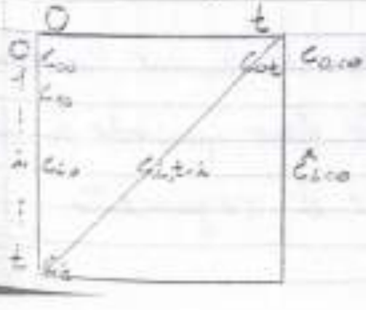
Viene introdotto un modello probabilistico per gli X_{ij}, tramite i dati x_{ij} si stimano i parametri del modello a partire dai quali si procede a stimare i valori non noti del triangolo inferiore

<u>METODI DETERMINISTICI</u>

si considerano gli X_{ij} come semplici numeri, noti nel triangolo di run-off o nel trapezio, per la parte non nota si introduce un modello deterministico e un algoritmo di stima

<u>METODO DELLA CATENA (CHAIN LADDER)</u> (deterministico)

$C_{ij} > 0$ pagamenti cumulati



${}_0R_t$ stima dell'importo da pagare dopo t per sinistri del periodo con origine 0 e dato avvenuto (stimato a posti) poniamo $C_{0\infty} = C_{0\,t+1} = C_{0t} + {}_0R_t$ COSTO ULTIMO DEL PERIODO DI ORIGINE 0

se $C_{i\infty}$ fosse noto si ha:

$$R_i = C_{i\infty} - C_{i,t-i} \quad \text{riserva sinistri per sinistri di origine } i$$

$$R = \sum_{i=0}^{t} R_i \quad \text{riserva di portafoglio}$$

stimare $\hat{C}_{i\infty}$ per poter stimare $\hat{R}_i = \hat{C}_{i\infty} - \hat{C}_{i,t-i}$

e quindi $\hat{R} = \sum_{i=1}^{t} \hat{R}_i$

IPOTESI:

$\dfrac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \triangleq f_{j-1} \quad \forall i,j$ — f: fattori di sviluppo o development factors o link ratio

cioè non dipende da i

$\iff C_{ij} = C_{i,j-1} f_{j-1}$

PROPOSIZIONE

$\exists f_0, \dots, f_t$ t.c. $\dfrac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1} \quad \forall i,j \iff \exists \alpha_0, \dots, \alpha_t, \pi_0, \dots, \pi_{t+1}$ t.c. $\underline{P_{ij} = \alpha_i \pi_j} \quad \forall i,j$

DIM:

$\Leftarrow$

$$C_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P_{ih} = \sum_{h=0}^{j} \alpha_i \pi_h = \alpha_i \sum_{h=0}^{j} \pi_h \quad \forall i,j$$

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = \frac{\alpha_i \sum_{h=0}^{j} \pi_h}{\alpha_i \sum_{h=0}^{j-1} \pi_h} \triangleq f_{j-1} \quad \text{(non dipende da } i\text{)}$$

$\Rightarrow$

C_{ij}

$C_{i,j+1} = C_{i,j} \cdot f_j$

$C_{i,j+2} = C_{i,j+1} \cdot f_{j+1} = C_{ij} \cdot f_j \cdot f_{j+1}$

$\vdots$

$C_{i,t+1} = C_{i,t} \cdot f_t = C_{i,j} \prod_{h=j}^{t} f_h$

$C_{ij} = C_{i,t+1} \dfrac{1}{\prod_{h=j}^{t} f_h} \quad \forall i,j$

$$P_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1} = C_{i,t+1} \cdot \frac{1}{\prod_{h=j}^{t} f_h} - C_{i,t+1} \cdot \frac{1}{\prod_{h=j-1}^{t} f_h}$$

$$= C_{i,t+1} \left[\frac{1}{\prod_{h=j}^{t} f_h} - \frac{1}{\prod_{h=j-1}^{t} f_h} \right] \triangleq \alpha_i \, r_j$$

$\sum_{j=0}^{t+1} r_j = 1$, $r_j > 0$ $\Big\} \rightarrow$ si possono vedere gli r_j come aliquote

$P_{ij} = \alpha_i \, r_j \quad \forall i,j$

i pagamenti incrementali sono esprimibili con un modello moltiplicativo: un fattore dipende solo dall'origine i e l'altro fattore dipende solo dal differimento

il costo ultimo $C_{i,t+1}$ è un'aliquota (del costo ultimo) riferita al differ.

IPOTESI FORTE: la aliquote non dipende dall'origine i, sono fisse nel tempo $\Rightarrow$ si presuppone una stabilità nel processo di smontamento della riserva (il che nella pratica è poco plausibile, specie nel lungo periodo)

se vengono forniti $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_t$ stime dei fattori di sviluppo allora si può riempire la tabella $\longrightarrow$ PROIEZIONE

$$\hat{C}_{i,t-i+1} = C_{i,t-i} \cdot \hat{f}_{t-i}$$

$$\vdots$$

$$\hat{C}_{i\infty} = C_{i,t-i} \cdot \prod_{h=t-i}^{t} \hat{f}_h$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i\infty} - C_{i,t-i} = C_{i,t-i} \left(\prod_{h=t-i}^{t} \hat{f}_h - 1 \right)$$

Come stimare i fattori di sviluppo?

$$C_{ij} = C_{i,j-1} \cdot f_{j-1} \quad \forall i,j$$

$$\sum_{i \in I} C_{ij} = \sum_{i \in I} (C_{i,j-1} f_{j-1}) = f_{j-1} \sum_{i \in I} C_{i,j-1}$$

$$f_{j-1} = \frac{\sum_{i \in I} C_{ij}}{\sum_{i \in I} C_{i,j-1}}$$

$$\hat{f}_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}}$$

media ponderata di $\frac{C_{0j}}{C_{0,j-1}}, \dots, \frac{C_{t-j,j}}{C_{t-j,j-1}}$

$$= \sum_{i=0}^{t-j} w_i^{(j)} \left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}\right) \qquad \sum_{i=0}^{t-j} w_i^{(j)} = 1 \qquad w_i^{(j)} > 0$$

$$\boxed{\min_{i=0,\dots,t-j} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \leq \hat{f}_{j-1} \leq \max_{i=0,\dots,t-j} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}}$$

OSS:

$$P_{ij} = \alpha_i \pi_j$$

$$\frac{P_{ij}}{P_{i,j-1}} = \frac{\pi_j}{\pi_{j-1}} = \bar{f}_{j-1}$$

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1} \quad \forall i,j$$

$$C_{ij} = C_{i,t+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\prod_{h=j}^{t} f_h}}_{\triangleq b_j} \qquad b_{t+1} = 1 \qquad b_j \leq b_{j+1}$$

CLAIMS DEVELOPMENT PATTERN o FATTORI DI GROSSING UP

si potrebbero stimare gli f_{j-1} così:

$$\hat{f}_{j-1} = \sum_{i=0}^{t-j} \bar{w}_i^{(j)} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}$$

oppure come media aritmetica

$$w_i^{(j)} = \frac{1}{t-j+1}$$

stima worst case

$$\hat{f}_{j-1} = \max_{i=0,\dots,t-j} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}$$

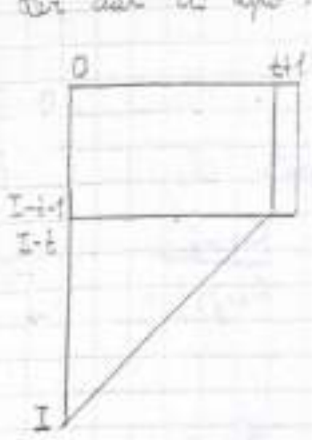
METODI LINK RATIO

ipotesi base del metodo della catena

media ponderata differente

$$\hat{f}_t = \frac{C_{0\infty}}{C_{0t}} \qquad C_{0\infty} = C_{0t} + {}_0R_t$$

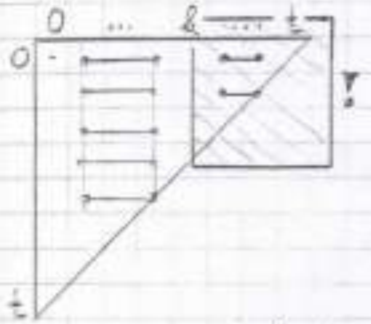
Per dati di tipo:



$$\hat{f}_t = \sum_{i=0}^{I-t-1} \bar{w}_i^{(t)} \frac{C_{i,t+1}}{C_{i,t}}$$

OSS:

Nella parte finale della tabella di run-off le stime sugli f_j (gli ultimi) sono meno accurate perché fatte su un numero minore di dati



$$\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{k-1}, \underbrace{\hat{f}_k, \dots, \hat{f}_t}_{\text{stime meno accurate}}$$

$h(j) = a b^{j-k+1} \qquad j = k-1, \dots, t$

$\min_{a,b} \sum_{j=k-1}^{t} \left[h(j) - \hat{f}_j\right]^2 \longrightarrow \hat{a}, \hat{b}$

$\hat{f}^s_k = \hat{a}\hat{b}, \quad \hat{f}^s_{k+1} = \hat{a}\hat{b}^2, \dots$

$\ln h(j) = \alpha + \beta(j-k+1)$

CRITICHE ALLA STABILITÀ DELLE ALIQUOTE

$P_{ij} = \alpha_i \pi_j \qquad \forall i,j$

Il modello ipotizza una certa stabilità degli π_j in quanto essi dipendono solo dal periodo di differimento e non dal periodo di origine, tuttavia può accadere che:

- vi siano dei cambi nei tassi di interesse
- l'assicuratore vada ad agire su diverse tipologie di affari (altri settori)
- l'inflazione non sia costante

Per ovviare al problema dell'inflazione si può ricorrere al METODO DELLA CATENA MODIFICATO

$$C_{ij} \longrightarrow P_{ij} \longrightarrow P^*_{ij} \longrightarrow C^*_{ij} \qquad C^*_{ij} = \sum_{h=0}^{j} P^*_{ih}$$

$P_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1}$ $\qquad (\varphi_1, \dots, \varphi_t)$: $P^*_{ij} = P_{ij}(1+\varphi_{i+j+1})\dots(1+\varphi_t)$

tassi annui di inflazione

su C^*_{ij} sia accettabile l'ipotesi base del metodo della catena

$$\frac{C^*_{ij}}{C^*_{i,j-1}} = f_{j-1} \longrightarrow \hat{C}^*_{ij}$$

$$\hat{P}^*_{ij} \xrightarrow{\text{STIME DI } \varphi_{t+1}, \varphi_{t+2}, \dots} \hat{P}_{ij}$$

$\hat{P}^*_{ij} = \hat{C}^*_{ij} - \hat{C}^*_{i,j-1}$ $\qquad \hat{P}_{ij} = \hat{P}^*_{ij}(1+\varphi_{t+1}) \dots (1+\varphi_{t+j})$

$$\hat{R}_i = \sum_{j > t-i+1} \hat{P}_{ij}$$

TECNICA ATTUARIALE DELLE ASSICURAZIONI

DANNI

3

TS – 06-12-2013 (56 ore)

METODO DI SEPARAZIONE o DI TAYLOR (ARITMETICO)

- P_{ij}

modello: $P_{ij} = \alpha_i \, r_j \, \lambda_{i+j}$

α_i: dipende solo dall'origine
r_j: dipende solo dal differimento
λ_{i+j}: dipende solo dal periodo di pagamento

OSS:

se $\lambda_{i+j} = \lambda \quad \forall i,j \Rightarrow P_{ij} = \lambda \alpha_i r_j$ modello sottostante il CL (chain ladder)

Con λ_{i+j} si introduce un fattore dipendente dall'anno di pagamento che va a disturbare la stabilità del processo di smontamento della riserva

DATI:

- P_{ij} $\quad i = 0, \dots, t \quad j = 0, \dots, t \quad i+j \leq t$

- una grandezza per i diversi anni di origine che dia una "misura di esposizione"
  - n_i numero sinistri anno i
  - π_i premi di competenza anno i
  - altro

- ${}_tR_0$ riserva per sinistri con origine 0 che verranno pagati dopo t

OBBIETTIVO: stimare $R_i = \left(\sum_{j=t-i+1}^{t} P_{ij} \right) + {}_tR_i$

INTERPRETAZIONE DEI PARAMETRI:

si può sempre supporre senza perdita di generalità che $\sum_{j=0}^{t} r_j = 1$

poniamo $\alpha_i = n_i$

In ipotesi che il costo medio per sinistro si sia mantenuto costante in termini reali ma sia aumentato come importo monetario nominale per via di effetti inflattivi

sia μ = costo medio per sinistro a valori correnti di $i=0$

λ_{i+j} = " " " " " " " di $i+j$

$\lambda_{i+j} = \mu(1+\varphi_1)\dots(1+\varphi_{i+j})$ $\qquad$ φ_i = tasso di inflazione anno i

$= \mu\, \rho_{i+j}$ → fattore di adeguamento (da 0 a $i+j$)

$P_{ij} = \overline{m_i\, \mu\, \rho_{i+j}}\ \pi_j$

costo finale del periodo di origine i espresso a valori correnti dell'anno 0

costo ultimo del periodo di origine i espresso a valori correnti dell'anno $i+j$

$P_{ij} = m_i\, \pi_j\, \lambda_{i+j}$

ALGORITMO DI STIMA DEI PARAMETRI:

(1) dai dati disponibili nella tabella di run-off si vanno a stimare:

$\pi_0, \dots, \pi_t,\ \lambda_0, \dots, \lambda_t$

$\hat{P}_{ij} = m_i\, \hat{\pi}_j\, \hat{\lambda}_{i+j}$ $\qquad$ m_i è un dato

$i+j>t$ $\qquad$ $\hat{\pi}_j$ è stato stimato

manca $\hat{\lambda}_{i+j}$

(2) stimare $\lambda_{t+1}, \lambda_{t+2}, \dots$

(3) stimare ${}_tR_i$

(1)

consideriamo $\dfrac{P_{ij}}{m_i} \triangleq s_{ij}$ $\qquad$ $i+j \le t \rightarrow s_{ij}$ è un dato

il corrispondente di s_{ij} è $\pi_j \lambda_{i+j}$

	0	1	...	t-1	t
0	s_{00}	s_{01}		$s_{0,t-1}$	s_{0t}
1	s_{10}	s_{11}		$s_{1,t-1}$	
⋮	⋮				
i	s_{i0}		$s_{i,t-i}$		
⋮	⋮				
t	s_{t0}				

	0	1	...	t-1	t
0	$\pi_0\lambda_0$	$\pi_1\lambda_1$		$\pi_{t-1}\lambda_{t-1}$	$\pi_t\lambda_t$
1	$\pi_0\lambda_1$	$\pi_1\lambda_2$		$\pi_{t-1}\lambda_t$	
⋮	⋮				
i	$\pi_0\lambda_i$		$\pi_{t-i}\lambda_t$		
⋮	⋮				
t	$\pi_0\lambda_t$				

in ipotesi che $\sum_{j=0}^{t} \pi_j = 1$

nella colonna tutti gli elementi hanno lo stesso r_i

gli elementi che si trovano su una stessa diagonale hanno tutti lo stesso fattore λ_i

ALGORITMO:

- si guardano gli elementi dell'ultima diagonale degli s_{ij} e l'ultima diagonale degli $r_i \lambda_{i+j}$ e si fanno le somme:

$$\sum_{i+j=t} s_{ij} \qquad \sum_{j=0}^{t} (r_j \lambda_t) = \lambda_t \sum_{j=0}^{t} r_j = \lambda_t$$

$$\rightarrow \hat{\lambda}_t = \sum_{i+j=t} s_{ij}$$

s_{0t}, $r_t \lambda_t$

$\hat{r}_t$: $\hat{r}_t \hat{\lambda}_t = s_{0t}$

$$\rightarrow \hat{r}_t = \frac{s_{0t}}{\hat{\lambda}_t}$$

- si guarda alle diagonali precedenti

$$\sum_{i+j=t-1} s_{ij} \qquad \sum_{j=0}^{t-1} (r_j \lambda_{t-1}) = \lambda_{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} r_j = \lambda_{t-1} (1 - r_t)$$

$$\rightarrow \hat{\lambda}_{t-1} = \frac{\sum_{i+j=t-1} s_{ij}}{1 - \hat{r}_t}$$

$\hat{r}_{t-1}$: $s_{0,t-1} + s_{1,t-1} = \hat{r}_{t-1} (\hat{\lambda}_{t-1} + \hat{\lambda}_t)$

$$\rightarrow \hat{r}_{t-1} = \frac{s_{0,t-1} + s_{1,t-1}}{\hat{\lambda}_{t-1} + \hat{\lambda}_t}$$

$\vdots$

- passo h

$$\hat{\lambda}_h = \frac{\sum_{i+j=h} s_{ij}}{1 - \sum_{j=h+1} r_j} \qquad \hat{r}_h = \frac{\sum_{i=0}^{t-h} s_{ih}}{\sum_{k=h}^{t} \hat{\lambda}_k}$$

ora abbiamo $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_t$, $\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_t$

servono le stime di $\hat{\lambda}_{t+1}, \hat{\lambda}_{t+2}, \dots$

(2)

consideriamo $\frac{\lambda_h}{\lambda_{h-1}} = \frac{\mu\,\rho_h}{\mu\,\rho_{h-1}} = (1+\varphi_h)$ con φ_h tasso di inflazione tra $h-1$ e h

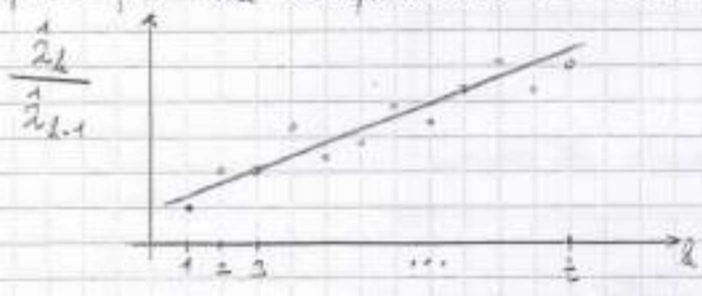
partendo dai $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_0}, \dots, \frac{\hat{\lambda}_t}{\hat{\lambda}_{t-1}}$ che abbiamo stimato

$\longrightarrow$ possiamo passare a $(1+\hat{\varphi}_1), \dots, (1+\hat{\varphi}_t)$

$\hookrightarrow$ stime sui tassi di inflazione passati

si potrebbero usare le stime sull'inflazione futura (fornite da fonti esterne) per stimare i λ_{t+j} futuri: $\frac{\hat{\lambda}_{t+1}}{\hat{\lambda}_t} = 1+\hat{\varphi}_{t+1}$

oppure fare delle estrapolazioni dai dati passati (es. modello lineare)



$f(h) = a + bh$

$\min_{a,b} \sum_{h=1}^{t} \left(f(h) - \frac{\hat{\lambda}_h}{\hat{\lambda}_{h-1}} \right)^2 \longrightarrow \hat{a}, \hat{b}$

$\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} = f(t+1) \longrightarrow \hat{\lambda}_{t+1} = \hat{f}(t+1)\,\hat{\lambda}_t$

$\dots$

a seconda di come si dispongono i pti sul grafico si valuta che tipo di modello sfruttare (lineare, esponenziale, ...)

(3) stimare la coda ${}_tR_i$

in ipotesi che: ${}_tR_i = P_{i,t+1} = n_i\,\pi_{t+1}\,\lambda_{i+t+1}$ (tutto ciò che non è stato pagato con differimento t lo si paga con 〃 $t+1$)

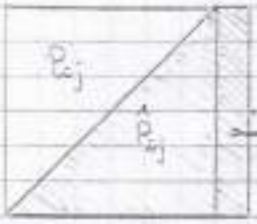
nel passo (2) si procede fino a $\hat{\lambda}_{2t+1}$

non abbiamo stimato π_{t+1}

ma ${}_tR_0 = n_0\,\pi_{t+1}\,\lambda_{t+1}$

$$\frac{{}_tR_i}{{}_tR_0} = \frac{n_i\,\pi_{t+1}\,\lambda_{i+t+1}}{n_0\,\pi_{t+1}\,\lambda_{t+1}} \implies {}_tR_i = \frac{n_i}{n_0}\,\frac{\lambda_{i+t+1}}{\lambda_{t+1}}\,{}_tR_0$$

$$\rightarrow {}_t\hat{R}_i = \frac{n_i}{n_0} \cdot \frac{\hat{\lambda}_{i+t+1}}{\hat{\lambda}_{t+1}} \cdot {}_tR_0$$



$$\hat{P}_{ij} = n_i \, \hat{r}_j \, \hat{\lambda}_{i+j} \qquad i+j>t$$

$$\hat{R}_i = \left(\sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{P}_{ij}\right) + {}_t\hat{R}_i$$

METODO DEL LOSS RATIO SEMPLICE

$i = 0, \dots, t$

supponiamo di conoscere i PC_i premi di competenza

// RICHIAMO: PREMI DI COMPETENZA

0 — 1

$$PC = P(1) + R_p(0) - R_p(1)$$

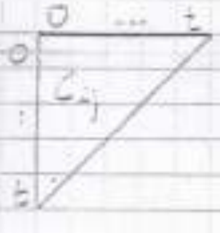
premi destinati a coprire i sinistri dell'esercizio //

$C_{i\infty}$ o $C_{i,t+1}$ = costo complessivo dei sinistri con origine i

posto $L_i = \frac{C_{i\infty}}{PC_i}$ ULTIMATE LOSS RATIO periodo di origine i

$$C_{i\infty} = L_i \, PC_i$$

DATI:



0	PC_0
⋮	
t	PC_t

l_i ultimate loss-ratios i $\quad i = 0, \dots, t$

dati esterni desunti:
- dal mercato
- da un portafoglio
- altro...

$$\hat{C}_{i\infty} = \hat{L}_i \, PC_i = l_i \, PC_i$$

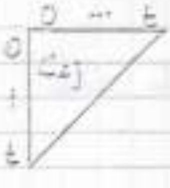
$$\hat{L}_i = l_i$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i\infty} - C_{i,t-i} = \hat{L}_i \, PC_i - C_{i,t-i}$$

Questo metodo è utilizzabile in caso ci siano pochi dati disponibili (si sfruttano infatti molti dati esterni e poche informazioni sulla compagnia)

METODO DI BORNHEUTTER - FERGUSON

DATI:



0	PC_0	l_0
⋮	⋮	⋮
t	PC_t	l_t

l_i ultimate loss ratio (valori esterni).

MODELLO:

$C_{ij} = \mu_i \, b_j$ $\qquad \mu_i = C_{i\infty}$

$b_j =$ aliquota del costo ultimo per pagamento con differimento minore uguale a j

non dipende da i anno di origine, ma solo da j

$b_j \leq b_{j+1}, \quad b_{t+1} = b_\infty = 1$

$$R_i = C_{i\infty} - C_{i,t-i}$$
$$= \mu_i - \mu_i b_{t-i} = \mu_i(1 - b_{t-i}) \qquad i = 0, \dots, t$$

STIMA:

- $\mu_0, \dots, \mu_t$ (dati esterni)
- $b_0, \dots, b_t, b_{t+1} = 1$

$\hat{\mu}_i = \hat{l}_i PC_i = l_i PC_i$ stima che non dipende da

OSS: nel chain ladder

$$C_{ij} = C_{i\infty} \frac{1}{\prod_{l=j} f_l}$$

$$\hat{b}_j^{CL} = \frac{1}{\prod_{l=j} \hat{f}_l}$$ si stimano i link ratio con il metodo della catena

$$C_{i\infty}^{BF} = C_{i,t-i} + R_i^{BF}$$
$$= C_{i,t-i} + \underbrace{\hat{\mu}_i(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL})}_{l_i PC_i (1 - \hat{b}_{t-i}^{CL})}$$

poiché $i_1 < i_2 \Rightarrow$

$$t - i_1 > t - i_2$$

$$\hat{b}_{t-i_1}^{CL} > \hat{b}_{t-i_2}^{CL}$$

$$1 - \hat{b}_{t-i_1}^{CL} < 1 - \hat{b}_{t-i_2}^{CL}$$

più si evolve il processo di smontamento della riserva meno peso si dà alla stima esterna

$\boxed{\text{TS - 09 - 12 - 2013}}$ (58 ore) 11ª SETTIMANA

$$\hat{R}_i^{CL} = C_{i,t-i} \left(\prod_{h=t-i}^{t} \hat{f}_h - 1 \right)$$

$$\hat{C}_{i\infty}^{CL} = C_{i,t-i} \left(\prod_{h=t-i}^{t} \hat{f}_h \right)$$

La riserva sinistri nel CL dipende da $C_{i,t-i}$ ultimo pagamento

→ si rischia di sottostimare la riserva se l'ultimo pagamento è piccolo

(ciò può accadere specialmente verso la fine, quando manca poco da pagare)

Il secondo fattore $\left(\prod \hat{f}_h \right) - 1$ aggiusterebbe le cose se le ipotesi sottostanti il metodo della catena fossero pienamente soddisfatte ($P_{ij} = \alpha_i r_j$, $\sum r_j = 1$), ma queste ipotesi sono piuttosto forti

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{\mu}_i \left(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL} \right)$$

$\hat{b}_{t-i}^{CL}$ → ricavati dai dati della tabella di run-off

$\hat{\mu}_i$: $l_i \pi_i$

$\hat{\mu}_i$ stime esterne

In questo modo la riserva non prende l'ultimo dato disponibile ma una stima esterna

$$\hat{C}_i^{BF} = C_{i,t-i} + \hat{\mu}_i \left(1 - \hat{b}_{t-i}^{CL} \right)$$

Il costo ultimo tiene conto dei dati della tabella di run-off e della stima esterna.

I dati esterni perdono peso man mano che ci si avvicina al completo run-off.

CREDIBLE CLAIMS RESERVING METHODS

$$\hat{C}_{i\infty} = \alpha_i \, \hat{C}^{CL}_{i\infty} + (1-\alpha_i)\, \hat{C}^{BF}_{i\infty} \qquad 0 \le \alpha_i \le 1$$

dipende da

dipende da

e $\hat{\beta}_i$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i\infty} - \underbrace{C_{i,t-i}}_{\alpha_i C_{i,t-i} + (1-\alpha_i) C_{i,t-i}}$$

$$= \alpha_i \hat{R}_i^{CL} + (1-\alpha_i) \hat{R}_i^{BF}$$

come scegliere gli α_i?

BENKTANDER - HOVINEN: $\alpha_i = \hat{b}_{t-i}$

tanto più la generazione è vicina al run-off tanto più peso si da alla $\hat{R}_i^{CL}$

METODO DI FISHER-LANGE

si usa per proiettare sia il numero di pagamenti che i pagamenti

MODELLO:

$$P^*_{ij} = n_{ij} \cdot \varsigma^*_j$$

n_{ij} = numero di sinistri con periodo di origine i chiusi con differimento j

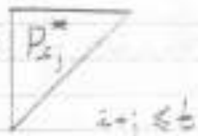
$\varsigma^*_j = \dfrac{P^*_{ij}}{n_{ij}}$ dipende solo dal differimento j

è la quota di P^*_{ij} mediamente attribuibile a ciascuno dei sinistri con origine i chiusi in $i+j$

guardando a ς^*_j si nota una discrepanza tra numeratore e denominatore:

- un sinistro chiuso in $i+j$ potrebbe essere stato pagato parzialmente in periodi precedenti
- un pagamento fatto in $i+j$ non è detto chiuda il sinistro in $i+j$

DATI:

- 

$$P_{ij} \rightarrow P^*_{ij} = P_{ij}(1+\varphi_{i+j+1}) \dots (1+\varphi_t)$$

- n_{ij}, $i+j \le t$
  - n_i numero dei sinistri dell'anno i
  - ${}_tR_i = 0$ (non ci sono code)

Per proiettare i P_{ij}^* servono:

- le proiezioni dei n_{ij}
- la stima dei τ_j^*

<u>MODELLO A per n_{ij}</u>

$n_{ij} = \phi_j n_i \quad \forall i,j$ (modello moltiplicativo)

$\hookrightarrow \phi_j = \frac{n_{ij}}{n_i}$

SPEED OF FINALIZATION
quota di sinistri con origine i chiusi in $i+j$
non dipende da i

①

fissato j: $\sum_{i \in I} n_{ij} = \sum_{i \in I} \phi_j n_i = \phi_j \sum_{i \in I} n_i \rightarrow \phi_j = \frac{\sum_{i \in I} n_{ij}}{\sum_{i \in I} n_i}$

$$\hat{\phi}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} n_i}$$ ($n_{i,t-j}$ è sulla diagonale)

②

stimare gli $\hat{\phi}_j$ usando il CL per gli n_{ij} (le ipotesi di base sono le stesse, modello moltiplicativo)

$$\frac{n_{ij}}{n_{i,j-1}} = \frac{\phi_j n_i}{\phi_{j-1} n_i} = \frac{\phi_j}{\phi_{j-1}} \triangleq f_{j-1}$$

Con entrambe le varianti la somma dei dati e delle stime sul numero di sinistri è diversa dal numero totale di sinistri

$n_{ij} + \hat{n}_{ij} \neq n_i$

Inoltre si suppone di non conoscere gli n_i e quindi di stimarli con il CL: $\hat{\phi}_j \quad \hat{n}_{ij} = \hat{\phi}_j n_i \quad i+j > t$

OSS:

valga $n_{ij} = \phi_j n_i \quad \forall i, j$

consideriamo: $\sum_{h=j}^{t} n_{ih} = \sum_{h=j}^{t} (\phi_h n_i) = n_i \sum_{h=j}^{t} \phi_h$

$$\frac{n_{ij}}{\sum_{h=j}^{t} n_{ih}} = \frac{\phi_j n_i}{n_i \sum_{h=j}^{t} \phi_h} = \frac{\phi_j}{\sum_{h=j}^{t} \phi_h} \triangleq \gamma_j$$

$$\Rightarrow n_{ij} = \gamma_j \sum_{h=j}^{t} n_{ih}$$

$$= \gamma_j \left[n_i - \sum_{h=0}^{j-1} n_{ih} \right]$$

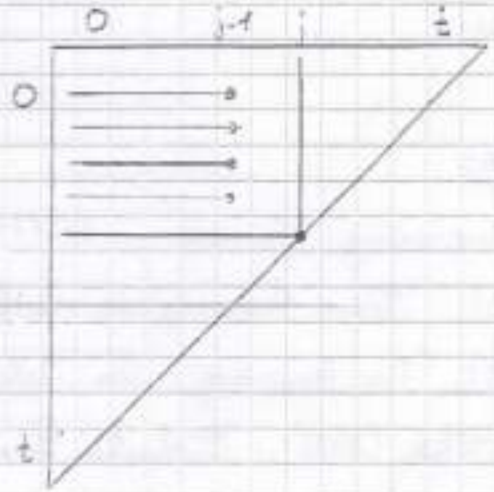
MODELLO B per n_{ij}

$$n_{ij} = \gamma_j \left[n_i - \sum_{h=0}^{j-1} n_{ih} \right]$$

$$\sum_{i \in I} n_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\gamma_j \left[n_i - \sum_{h=0}^{j-1} n_{ih} \right] \right)$$

$$= \gamma_j \sum_{i \in I} \left(n_i - \sum_{h=0}^{j-1} n_{ih} \right)$$

$$\hat{\gamma}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} \left(n_i - \sum_{h=0}^{j-1} n_{ih} \right)}$$



PROIEZIONE n_{ij}:

- $\hat{n}_{i,t-i+1} = \hat{\gamma}_{t-i+1} \left(n_i - \sum_{h=0}^{t-i} n_{ih} \right)$
- $n_{i,t-i+2} = \gamma_{t-i+2} \left(n_i - \sum_{h=0}^{t-i+1} n_{ih} \right)$

$$\longrightarrow \hat{n}_{i,t-i+2} = \hat{\gamma}_{t-i+2} \left(n_i - \sum_{h=0}^{t-i} n_{ih} - \hat{n}_{i,t-i+1} \right)$$

...

- $\hat{n}_{ij} = \hat{\vartheta}_j \left(n_i - \sum_{h=0}^{t-i} n_{ih} - \sum_{h=t-i+1}^{j-1} \hat{n}_{ih}\right) \qquad i+j>t$

si può dimostrare che: $\sum_{h=0}^{t-i} n_{ih} + \sum_{h=t-i+1}^{t} \hat{n}_{ih} = n_i$

STIME DI ς_j^*:

$$P_{ij}^* = n_{ij}\, \varsigma_j^*$$

$$\sum_{i \in I} P_{ij}^* = \varsigma_j^* \sum_{i \in I} n_{ij}$$

$$\rightarrow \hat{\varsigma}_j^* = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} P_{ij}^*}{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}$$

PROIEZIONE P_{ij}^*:

$$\hat{P}_{ij}^* = \hat{n}_{ij}\, \hat{\varsigma}_j^* \qquad i+j>t$$

$$\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ij}^* (1+\varphi_{t+1}) \dots (1+\varphi_{i+j})$$

$$\hat{R}_i = \sum_{j=t-i+1}^{t} \hat{P}_{ij}$$

BIBLIOGRAFIA:

- "Claims Reserving Manual", INSTITUTE AND FACULTY OF ACTUARIES
- TAYLOR (1986), "Claim Reserving in non-life Insurance", NORTH HOLLAND
- TAYLOR (2000), "Loss Reserving. An Actuarial Perspective", KLUWER
- WÜTHRICH, MERZ (2008), "Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance", WILEY

RISERVE PER SINISTRI IBNR (INCURRED BUT NOT REPORTED o TARDIVI)

Alla chiusura dell'esercizio si deve fare una stima di quanto si dovrà pagare in futuro per sinistri accaduti ma non ancora denunciati.

Ad esempio piccoli sinistri o eventi catastrofici che si verificano in prossimità della chiusura dell'esercizio.

Può accadere che lo stesso sinistro sia ignoto all'assicurato (es: furti o danni nella seconda casa), oppure che il sinistro produca dei danni che però si manifestano molto tempo dopo (es: esposizione all'amianto).

Altri casi:

- COASSICURAZIONE: un pool di assicuratori si accorda per coprire una quota di risarcimenti comuni

  compagnia A copre il 70%
  " B " " 20%
  " C " " 10%

  A ha il contatto con gli assicurati (delega a parte)
  l'assicurato denuncia ad A, se A non comunica subito per B e C il sinistro è IBNR

- RIASSICURAZIONE XL: un sinistro denunciato è stimato essere sotto la priorità, quindi la cedente non comunica il sinistro al riassicuratore; se poi però ci si rende conto che la priorità è stata superata allora il sinistro è IBNR per il riassicuratore

<u>esempio: RCA</u>

96% dei sinistri denunciati nell'esercizio
4% " " sono IBNR, ma solitamente sono quasi tutti denunciati nei primi mesi dell'esercizio successivo.

$\boxed{\text{TS-10-12-2013}}$ (59 ...)

t — ci si pone alla chiusura dell'esercizio

<u>OSS:</u>

DIFFERIMENTO DEI PAGAMENTI

ANNI DI ORIGINE	0	1	...	t	$t+1$
0					
1					
$\vdots$			C_{ij}		$\hat{C}_{i\infty}$
t					

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i\infty} - C_{i,t-i}$$

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^{t} \hat{R}_i$$

se l'anno di origine corrisponde all'anno di accadimento del sinistro

$\Rightarrow \hat{C}_{i\infty}$ contiene in sé la componente IBNR

è la stima di quanto si pagherà in futuro per sinistri accaduti nell'anno i

se l'anno di origine è l'anno di denuncia del sinistro

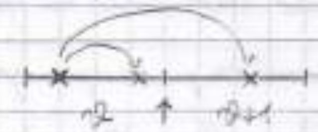
$\Rightarrow \hat{C}_{i\infty}$ è la stima del costo complessivo per sinistri denunciati in i

i sinistri IBNR non sono valutati nella riserva

METODI DI STIMA DELLA RISERVA IBNR

(1) breve differimento della denuncia

il sinistro viene denunciato nello stesso esercizio o al massimo in quello successivo



$n_{IBNR}(i)$ = numero di sinistri IBNR alla chiusura dell'esercizio i

$n(i)$ = " totale di sinistri " " " " i

$C^*_{IBNR}(i)$ = stima del costo medio per sinistro IBNR alla chiusura di i valutato a valori correnti alla chiusura di ϑ

IPOTESI:

- $\frac{n_{IBNR}(i)}{n(i)} = p$ la proporzione di sinistri IBNR è costante (es: 4% in RCA)
- $C^*_{IBNR}(i) = C^*$ il costo medio è costante

supponiamo di disporre di dati per un certo numero di anni

$\ldots,\ \vartheta-2,\ \vartheta-1,\ \vartheta$

$n_{IBNR}(\vartheta-h)$ $h=1,2,\ldots$ alla chiusura di ϑ è un dato, è conosciuto

$n(\vartheta-h)$ " " " ϑ " " "

$$\rightarrow \hat{p} = \sum_h \omega_h \frac{n_{IBNR}(\vartheta-h)}{n(\vartheta-h)} \quad \text{con } \sum_h \omega_h = 1,\ \omega_h \geq 0$$

pesi non negativi di somma unitaria

$$m_{IBNR}(\vartheta) = p\,n(\vartheta) = p\left(m_{IBNR}(\vartheta) + m_D(\vartheta)\right)$$ $m_D(\vartheta)$ numero di sinistri denunciati in ϑ

$$m_{IBNR}(\vartheta)(1-p) = p\,m_D(\vartheta)$$

$$m_{IBNR}(\vartheta) = \frac{p}{1-p}\, m_D(\vartheta) \quad \rightarrow \quad \hat{m}_{IBNR}(\vartheta) = \frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\, m_D(\vartheta)$$

$$\sum_h w'_h\, C^*_{IBNR}(\vartheta - h) = \hat{C}^* \qquad \sum_h w'_h = 1 \qquad w'_h \geq 0$$

$$\hat{R}_{IBNR} = \hat{m}_{IBNR}(\vartheta)\, \hat{C}$$ $\hat{C}^* \rightarrow \hat{C}$ tenendo conto dell'inflazione

(2)

d differimento massimo della denuncia rispetto l'anno di accadimento

$\vartheta-d$	...	$\vartheta-1$	ϑ
0	...	$d-1$	d

fissato l'anno i $\quad i = 0, \dots, d$

denuncia in $i+j$ $\quad i+j \leq d$, j differimento della denuncia

I_{ij}^{IBNR} stima alla chiusura di ϑ del costo ultimo dei sinistri avvenuti nell'anno i IBNR alla chiusura di i e denunciati con differimento j

ANNO DI ACCADIMENTO	DIFFERIMENTO DENUNCIA: 1	...	d
0	I_{01}^{IBNR}	...	I_{0d}^{IBNR}
⋮	⋮		
i	I_{i1}^{IBNR}	... $I_{i,d-i}^{IBNR}$	
⋮	⋮		
$d-1$	$I_{d-1,1}^{IBNR}$		
d			

può accadere che:

$$\frac{I_{ij}^{IBNR}}{I_{i,j-1}^{IBNR}} \triangleq f_{j-1}$$

cioè il rapporto non dipende da i

→ ipotesi dell'algoritmo per il CL

si può sfruttare quel metodo

si stimano gli $\hat{I}_{ij}^{IBNR}$ $\quad i+j > d$

per la riga d $\boxed{}$ si fanno delle medie a partire dalle colonne soprastanti

→ tutti i metodi utilizzati per la stima della riserva sinistri potrebbero essere utilizzati per la stima della riserva IBNR perché si ritengano soddisfatte le ipotesi previste dai modelli

(3)

si introduce una grandezza che fornisce una misura di esposizione al fenomeno IBNR

considero l'anno i, $H(i)$ misura di esposizione riferita all'anno i

la misura $H(i)$ può essere:

- basata su premi
  - monetari (premi di competenza, premi contabilizzati, ...)
  - non monetari (num di polizze sottoscritte, ...)
- basata su sinistri
  - monetari (importo pagato per sinistri denunciati nell'esercizio, importo riservato per sinistri dell'esercizio già denunciati, ...)
  - non monetari (numero di sinistri non denunciati, ...)

esempi:

- breve differimento della denuncia (max 1 anno)

ipotesi:

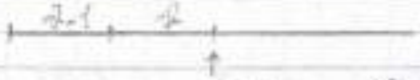
$$\frac{I_{i,1}}{H(i)} = p$$

il rapporto non dipende da i, è proporzionale alla misura di esposizione

stima $$\hat{p} = \sum w_h \frac{I^{IBNR}_{\vartheta-h,1}}{H(\vartheta-h)}$$

$$\Rightarrow \hat{I}^{IBNR}_{\vartheta-1} = \hat{p}\, H(\vartheta)$$

METODO DI TARBELL



$m^{(\vartheta)}_{10,11,12}$ = num. dei sinistri denunciati negli ultimi 3 mesi dell'esercizio ϑ

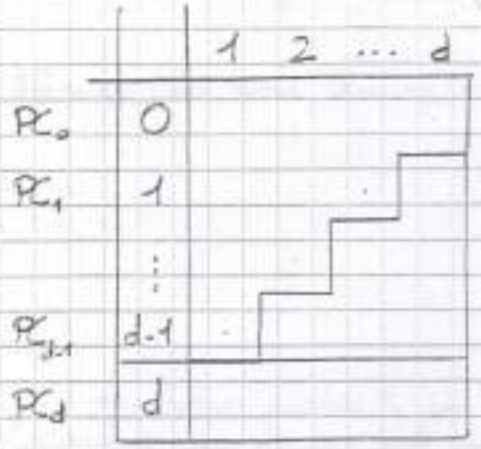
$$R_{IBNR}(\vartheta) = I^{IBNR}_{\vartheta-1,1} \cdot \frac{m^{(\vartheta)}_{10,11,12}\, C^{(\vartheta)}_{10,11,12}}{m^{(\vartheta-1)}_{10,11,12}\, C^{(\vartheta-1)}_{10,11,12}}$$

$C^{(\vartheta)}_{10,11,12}$ = stima del costo medio per un sinistro denunciato come ...

$M(i) = m^{(i)}_{10,11,12}\ C^{(i)}_{10,11,12}$ stima del costo complessivo per sinistri denunciati negli ultimi 3 mesi dell'anno i

$$ {}^{1}_{1}\varphi = \frac{I^{IBNR}_{\vartheta-1,1}}{M(\vartheta-1)} $$

- d differimento massimo della denuncia rispetto l'anno di accadimento



$$ \frac{I^{IBNR}_{ij}}{PC_i} = \pi_j $$

$$ I^{IBNR}_{ij} = \pi_j PC_i $$

$$ \hat{\pi}_j = \sum_{i=0}^{d-j} \frac{I^{IBNR}_{ij}}{PC_i}\,\omega_i \qquad \Sigma\omega_i = 1 \quad \omega_i \geq 0 $$

stimati gli $\hat{\pi}_j$ si può riempire il triangolo inferiore

$i + j > d$

$$ \hat{I}^{IBNR}_{ij} = \hat{\pi}_j\, PC_i $$

$$ \sum_{j=d-i+1}^{d} (\hat{\pi}_j\, PC_i) = \hat{R}_{IBNR,\,i} $$

$\boxed{\text{TS-13-12-2013}}$ (61 ore)

REQUISITI DI SOLVIBILITÀ

- È fondamentale che le imprese di assicurazione siano in grado di far fronte agli impegni assunti
- Nell'impresa assicuratrice si ha l'inversione del processo costi-ricavi
  → è necessario un controllo pubblico sulla attività assicurativa
  → è necessaria una legislazione assicurativa

Tutto ciò è previsto a tutela degli assicurati.

Sono necessarie delle garanzie finanziarie:

- RISERVE TECNICHE (capitale non libero da impegni, è un debito verso gli assicurati)

- CAPITALE LIBERO DA IMPEGNI (in Italia era detto MARGINE DI SOLVIBILITÀ)

quali voci di bilancio?
quale quantità minima?
quali attivi ammessi?

→ il legislatore ha definito tutto ciò:

DIRETTIVA EU 73/239/CE

- voci di bilancio
- entità minima
- attività a copertura
- azioni dell'autorità di vigilanza (AV)

Tuttavia tali misure sono risultate essere inadeguate e quindi sono state apportate delle modifiche nel tempo:

→ SOLVENCY
- SOLVENCY I
  - 2002/12/EC
  - 2002/13/EC
- SOLVENCY II
  - è stata delineata ma non è ancora entrata in vigore (vari problemi tra cui la crisi economica)

Tutt'ora è attiva SOLVENCY I

MARGINE DI SOLVIBILITÀ DISPONIBILE (MSD)

deve avere un'entità minima, detta MARGINE DI SOLVIBILITÀ RICHIESTO (MSR)

Perché una compagnia ottenga dall'AV la licenza ad operare in ambito assicurativo nell'anno $\vartheta+1$ è necessario che essa abbia a disposizione la soglia minima prevista alla chiusura dell'anno ϑ

ϑ | $\vartheta+1$

MSD($\vartheta+1$)

MSR($\vartheta+1$)

MSD($\vartheta+1$): patrimonio dell'impresa libero da qualunque onere possibile nel bilancio di ϑ è composto da tre parti:

I [PATRIMONIO NETTO

II [capitale con alcune restrizioni

III [" " restrizioni, richiedendo l'autorizzazione dell'AV in via transitoria es: dal prospetto UNIPOL

$$
I = + \begin{cases} \text{CAP. SOCIALE VERSATO} \\ \text{RISERVE PATRIMONIALI} \\ \text{RIPORTO DI UTILI} \end{cases} - \begin{cases} \text{PROVVIGIONI DI ACQUISIZIONE} \\ \text{ATTIVI IMMATERIALI} \\ \text{AZIONI O QUOTE PROPRIE} \\ \text{PERDITE DI ESERCIZIO} \\ \text{PERDITE PORTATE A NUOVO} \end{cases}
$$

$MSR(\vartheta+1)$

- importo calcolato in relazione ai premi

$P^T(\vartheta)$ premi lordi contabilizzati nell'esercizio ϑ

$$A = \min\{P^T(\vartheta), a\} \qquad B = P^T(\vartheta) - A$$

$$a_{2011} = 57'500'000 \text{ €}$$

$$0.18A + 0.16B = \begin{cases} 0.18P^T(\vartheta) & P^T(\vartheta) \le a \\ 0.18a + 0.16P^T(\vartheta) - 0.16a & P^T(\vartheta) > a \end{cases}$$

$$0.16P^T(\vartheta) + 0.02a < 0.18P^T(\vartheta)$$ per non penalizzare le imprese con grande volume di affari

$P^T(\vartheta)$ per i rami 11, 12, 13 (R.C. aeromobili, R.C. marittimi, R.C. generali)

$$P^T(\vartheta) = \sum_{i \neq 11,12,13} P_i^T(\vartheta) + \sum_{i=11,12,13} P_i^T(\vartheta)(1+0.50)$$

è prevista una maggiorazione del 50% perché tali rami sono più rischiosi

---

- importi calcolati in relazione ai sinistri

$\bar{S}(\vartheta)$ media delle competenze sinistri degli esercizi ϑ, $\vartheta-$, $\vartheta-$

$$\bar{S}(\vartheta) = \frac{1}{3}\left(CS(\vartheta) + CS(\vartheta-1) + CS(\vartheta-2)\right)$$

CS = competenza sinistri

$$CS(\vartheta) = \underbrace{S(\vartheta)}_{\text{risarcimenti pagati in } \vartheta} + \underbrace{R_s(\vartheta)}_{\text{riserva sinistri fine es. } \vartheta} - \underbrace{R_s(\vartheta-1)}_{\text{riserva sinistri fine es. } \vartheta-1}$$ (− variazione della riserve per recuperi)

$$= \frac{1}{3}\left[S(\vartheta) + R_s(\vartheta) - R_s(\vartheta-1) + S(\vartheta-1) + R_s(\vartheta-1) - R_s(\vartheta-2) + S(\vartheta-2) + R_s(\vartheta-2) - R_s(\vartheta-3)\right]$$

$$\bar{S}(\vartheta) = \frac{1}{3}\left[S(\vartheta) + S(\vartheta-1) + S(\vartheta-2) + R_s(\vartheta) - R_s(\vartheta-3)\right]$$

Se l'impresa esercita esclusivamente o prevalentemente nei rami grandine, tempesta, gelo, credito la media si fa negli ultimi 7 anni.

$$A' = \min\{\bar{S}(\vartheta),\ a'\} \qquad B' = \bar{S}(\vartheta) - A'$$

$$a'_{2011} = 40'300'000$$

$$0.26A' + 0.23B' = \begin{cases} 0.26\,\bar{S}(\vartheta) & \bar{S}(\vartheta) \le a' \\ \underbrace{0.23\,\bar{S}(\vartheta) + 0.03\,a'}_{< 0.26\,\bar{S}(\vartheta)} & \bar{S}(\vartheta) > a' \end{cases}$$

per non penalizzare le imprese con grandi volume di affari

$\bar{S}^{(i)}(\vartheta)\,(1+0{,}50) \qquad i = 11, 12, 13$ (rami più rischiosi)

$$MSR(\vartheta+1) = \max\{0.18A + 0.16B;\ 0.26A' + 0.23B'\}\,\max\{0.5;\ \rho(\vartheta)\}$$

$$\rho(\vartheta) = \frac{CSN(\vartheta) + CSN(\vartheta-1) + CSN(\vartheta-2)}{CS(\vartheta) + CS(\vartheta-1) + CS(\vartheta-2)}$$ grado di conservazione

$$CSN(\vartheta) = \left[S(\vartheta) - {}_{\pi}S(\vartheta)\right] + \left[R_s(\vartheta) - R_s(\vartheta-1)\right] - \left[{}_{\pi}R(\vartheta) - {}_{\pi}R(\vartheta-1)\right]$$

↳ risarcimenti a carico del riassicuratore

→ riserva sinistri a carico del riassicuratore

se l'impresa non si riassicura:

$\rho(\vartheta) = 1$

$\Rightarrow MSR(\vartheta+1) = \max\{0.18A + 0.16B;\ 0.26A' + 0.23B'\}$

se l'impresa si riassicura

$\rho(\vartheta) < 1$

$\Rightarrow MSR(\vartheta+1) < \max\{\ldots;\ldots\}$

se $\rho(\vartheta) > 0.5 \Rightarrow \max\{0.5;\ \rho(\vartheta)\} = \rho(\vartheta)$

se $\rho(\vartheta) < 0.5 \Rightarrow \max\{0,5;\ \rho(\vartheta)\} = 0.5$

→ essendoci un grande ricorso alla riassicurazione (il portafoglio è rischioso?) si pone comunque un livello minimo se $MSR(\vartheta+1)$ risulta essere di parecchio inferiore al $MSR(\vartheta)$ allora l'impresa non può scrivere in bilancio $MSR(\vartheta+1)$ ma deve fare degli aggiustamenti.

QUOTA DI GARANZIA

è stabilita una quota di garanzia così definita:

$$Q = \max\left\{ \frac{1}{3} MSR(\vartheta+1);\ c \right\}$$

per i rami 10, 11, 12, 13, 14, 15 (R.C. auto, R.C. aeromobili, R.C. marittimi, R.C. generale, R.C. credito, R.C. cauzioni) $c_{2012} = 3'500'000$ €

● $MSD(\vartheta+1) > MSR(\vartheta+1)$ → situazione tranquilla

▲ $Q < MSD(\vartheta+1) < MSR(\vartheta+1)$ → l'A.V. richiede un piano di risanamento alla compagnia

▲ $MSD(\vartheta+1) < Q$ → l'A.V. richiede un piano di risanamento a brevissimo termine

La formula per il calcolo del $MSR(\vartheta+1)$ è stata elaborata sulla base del Modello della Teoria del Rischio monoperiodale individuale:

- un fissato portafoglio di rischi "omogenei"
- un fissato esercizio 0 —— 1

R dotazione di capitale

P premi

E spese

S risarcimenti per sinistri

$G = P - E - S$
→ saldo della gestione tecnica nell'esercizio

$Pr(R+G<0) = Pr(G<-R)$ probabilità di rovina nell'esercizio

→ è necessario un mod. probabilistico per G

posto $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$ con n = num. di polizze in portafoglio

G_i = saldo della gestione tecnica di ciascun contratto

si possono considerare le conclusioni dedotte dal Teorema del Limite Centrale

TEOREMA SUL LIMITE CENTRALE

$X_1, X_2, \dots$ v.a. i.i.d con $Var(X_i) < +\infty$

posto $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$

$$\Rightarrow S_n^* \xrightarrow[\text{in legge}]{n \to +\infty} \mathcal{N}(0,1)$$

$$F_{S_n^*}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(x) \quad \forall x, \quad \Phi \text{ funz. di ripartizione di } \mathcal{N}(0,1)$$

per n elevato $F_{S_n^*}(x) \approx \Phi(x)$

Esistono delle generalizzazioni del TLC che, a partire da v.a. stocasticamente indipendenti ma non necessariamente identicamente distribuite, purché una di esse non abbia una varianza troppo elevata, permettono di giungere alle stesse conclusioni circa tale approssimazione:

$G_1, G_2, \dots$ i.i.d

$$\frac{G - E(G)}{\sigma(G)} \overset{d}{\approx} \mathcal{N}(0,1)$$

$$Pr(G < -R) = Pr\left(\frac{G - E(G)}{\sigma(G)} < -\frac{R + E(G)}{\sigma(G)}\right) \simeq \Phi\left(-\frac{R+E(G)}{\sigma(G)}\right)$$

$I \triangleq \frac{R + E(G)}{\sigma(G)}$ INDICE DI STABILITÀ RELATIVA DEL PORTAFOGLIO

se I cresce, $-I$ decresce, $\Phi(-I)$ decresce $\Rightarrow$ probabilità di rovina

I dipende da: $R \to$ dotazione di capitale

$E(G) \to$ caricamento di sicurezza

$\sigma(G) \to$ riassicurazione

se non c'è ricorso in riassicurazione:

$G = P - S$ $\qquad Var(G) = Var(S)$

se c'è ricorso in riassicurazione:

$G_r = P - P_r - aS \quad a < 1 \qquad Var(G_r) = Var(aS)$

$$= a^2 Var(S) < Var(S)$$

<1

TS-16-12-2013 (63 ...) (2^a SETTIMANA)

Fissato un livello p_0 (basso) probabilità accettabile di rovina, allora I deve essere tale che: $\Phi(-I) = p_0$

$$-I = \Phi^{-1}(p_0)$$

$$I = -\underbrace{\Phi^{-1}(p_0)} = -z_{p_0}$$

↳ quantile di ordine p_0 della $N(0,1)$

All'epoca di elaborazione di tal formule si erano analizzate delle compagnie presenti sul mercato europeo e si era posto $p_0 = 3‰$ (= 0.003, 3 per mille)

$$z_{p_0} \simeq -2.75$$

m compagnie

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ \vdots & & & \\ i & P_i^T & E(G_i) & \sigma(G_i) \\ \vdots & & & \\ m & & & \end{array}$$

i-esima compagnia

R_i deve essere tale che $\dfrac{R_i + E(G_i)}{\sigma(G_i)} = -z_{p_0}$

$$R_i = -[z_{p_0}\sigma(G_i) + E(G_i)]$$

si è guardato a:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{-[z_{p_0}\sigma(G_i) + E(G_i)]}{P_i^T} \simeq 0.18$$

rapporto in media tra dotazione di capitale e monteprremi

$$\Rightarrow \text{MSR: } 0.18\, P^T(\alpha)$$

$\dfrac{S}{P} = 0.70$ è visto come un buon risultato di gestione

se $\dfrac{S}{P} > 0.70$ allora i sinistri "contano molto"

$$\to P = \frac{1}{0.70} S \Rightarrow 0.18 P = \frac{0.18}{0.70} S$$

$$= 0.26\, S$$

$$\Rightarrow \text{MSR: } 0.26\, S^T(\alpha)$$

Questo modello però è giudicato inadeguato:
- le formule si basano soprattutto sul volume d'affari e non sulle fonti di rischio (non si tiene conto del rischio finanziario né di rischi tecnici come il rischio di riservazione, il rischio di premi, ecc... né di rischi operativi)
- le formule sono basate su numeri fissi

La struttura di SOLVENCY I riprende, salvo piccoli aggiustamenti, la direttiva del '73
→ ci si orienta a SOLVENCY II che è molto più adeguato

IAS / IFRS
International Accounting Standards (IAS)
International Financial Reporting Standards (IFRS)

I bilanci delle imprese sono importanti per: investitori, mercato, assicurati, A.V., controllo interno...
→ è fondamentale che i bilanci siano scritti in modo adeguato alla struttura dell'impresa e che siano confrontabili tra di loro

nel 1973 nasce lo IASC (I.A.S. Commitee) con lo scopo di creare un sistema standard per la contabilità d'azienda → IAS
nel 2001 cambia in IASB (I.A.S. Board) → IFRS

Si vuole arrivare a rendiconti che siano il più trasparenti ed il più confrontabili possibile

Nel 1997 si era iniziato un lavoro sulla rendicontazione in ambito assicurativo assumendo il modello contabile ASSET / LIABILITY (attivo / passivo), ovvero valutare gli attivi e i passivi per poi farne la differenza ed trovare il risultato d'esercizio
Come criterio di valutazione si indicava il metodo del FAIR VALUE (valore corretto): "corrispettivo al quale un'attività può essere scambiata

o una passività estinta in una transazione tra terzi che siano parti informate e disponibili allo scambio", ovvero il prezzo di mercato.

Questo sistema di valutazione, per quanto riguarda il settore assicurativo, doveva entrare in vigore in UE nel 2005, ma le compagnie si sono fortemente opposte (come valutare le riserve a prezzi di mercato?)

Allora si sono aperte due fasi:

- FASE I, terminata con IFRS4 - Insurance Contracts (del 31/03/2004, in vigore dal 2005)
- FASE II, prima anticipata, poi bloccata in attesa di SOLVENCY II

IFRS4

- si definisce:
  - contratto assicurativo (rendicontare con IAS/IFRS per contratti assicurativi)
  - strumento finanziario (rendicontare con IAS/IFRS per strumenti finanziari)
  - altro (rendicontare con IAS/IFRS per altro)
- unbundling: dividere la componente assicurativa da quella finanziaria
- nei rami danni:
  - vietato accantonare riserve di perequazione e riserve per rischi catastrofali (in quanto passività non effettivamente sorte)
  - scrivere gli importi al lordo della riassicurazione (una passività non è estinta anche se si è riassicurati)
  - eseguire LAT, Liability Adequacy Test (verificare l'adeguatezza delle passività scritte in bilancio)
  - per il resto come in precedenza

Dal 2005 è obbligatorio rispettare questi principi solo per i bilanci consolidati (quelli di gruppo) ma non per quelli individuali

FASE II

DSOP 2001 } documenti dello IASB
DP maggio 2007 }

Tali principi andranno applicati ai contratti assicurativi indipendentemente da chi li emette

Restano le condizioni della fase I, ma si introduce il principio del FAIR VALUE: tutto ciò che è trattato sul mercato deve essere valutato a prezzo di mercato (anche le grandezze tipo tassi di interesse, ...). Per le cose non presenti sul mercato o si deve far riferimento ad un equivalente presente sul mercato (sempre che ci sia) oppure in mancanza di quest'ultimo si procede in un altro modo:

- STIMARE I FLUSSI FUTURI per tutti gli scenari possibili
  - descrizione (modelli stocastici)
  - valutare la speranza matematica di ogni flusso futuro
- TIME VALUE OF MONEY
  - attualizzare i flussi attesi (usando tassi di mercato per strumenti finanziari con analogo timing e valuta, solitamente attività risk-free)
- MARGINI PER IL RISCHIO (MARKET VALUE MARGIN)
  - rischio di processo (rischiosità intrinseca associata ad un ente aleatorio, dovuta al fatto che il valore osservato solitamente è differente dal valore atteso)
  - rischio di stima (i parametri sono stimati dai dati, c'è sempre un rischio)
  - rischio di modello (usare un modello non adeguato)

→ usare indicatori della dispersione della distribuzione (es varianza)

→ logica VaR: $MVM = VaR[X; p] - E(X)$

TVaR: $MVM = TVaR[X; p] - E(X)$

→ costo del capitale (SOLVENCY II)

↳ a fronte di passività si ha un certo capitale di rischio che ha un costo per gli investitori (perché deve essere tenuto fermo)

→ valutare questo costo il capitale allocato a fronte delle passività

I flussi dovrebbero essere valutati in questo modo:

(i) risarcimenti per sinistri denunciati ma non ancora pagati (reported claims)

(ii) " " " avvenuti " " " denunciati (IBNR)

(iii) " " " futuri per contratti già in essere

(iv) spese di gestione dei punti (i) (ii) (iii)

OSS:

(i) + (ii) è ciò che ora entra nella riserva sinistri (+ le spese di gestione per tali due punti)

TS – 17 – 12 – 2013 (65 ore)

schede su SOLVENCY II

dopo PREMIUM e RESERVE RISK (pag. 9)

$$P_r(Y > VaR[Y;p]) = 1-p$$

$$= P_r(\ln Y > \ln VaR[Y;p])$$

$$= P_r\Big(\underbrace{\frac{\ln Y-\mu}{\nu}}_{\sim N(0,1)} > \underbrace{\frac{\ln VaR[Y;p]-\mu}{\nu}}_{\text{quantile di ordine } 0.995 \text{ di } N(0,1)}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln VaR[Y;p]-\mu}{\nu} = N_{0.995}$$

$$\ln VaR[Y;p] = \nu N_{0.995} + \mu$$

$$VaR[Y;p] = e^{\nu N_{0.995}}\, e^{\mu}$$

$$= e^{\sqrt{\ln(\sigma^2+1)}\cdot N_{0.995}}\, e^{-\frac{1}{2}\ln(\sigma^2+1)}$$

$$= \frac{\exp\{N_{0.995}\sqrt{\ln(\sigma^2+1)}\}}{\sqrt{\sigma^2+1}}$$

$$\bar{k} = \frac{e^{N_{0.995}\sqrt{\ln(\sigma^2+1)}}}{\sqrt{\sigma^2+1}} - 1 = \rho(\sigma)$$

pag 23

RR_1

$\{P_{ij} ;\ i=0,\dots,t ;\ j=0\dots t\}$ modello stocastico per i pagamenti incrementali

alla chiusura dell'esercizio t si valuta $R_s(t)$ a partire dalla stima desunta dal modello

↳ la $R_s(t)$ deve far fronte ai pagamenti da sulla diagonale

(i P_{ij} : $i+j=t+1$, $i=0,\dots,t$)