1. La distribuzione composta per il risarcimento totale

1.1 Introduzione

In un contratto di assicurazione contro i danni, usualmente denominato *polizza*, l'assicuratore si impegna a risarcire l'assicurato, secondo le modalità previste nel contratto, per i danni causati dai sinistri che colpiscono il rischio assicurato durante il periodo di copertura. I danni possono derivare, per esempio, dalla perdita di valore di un bene di proprietà dell'assicurato, dall'esigenza di effettuare pagamenti in seguito all'insorgere di un'obbligazione di responsabilità civile, dalle conseguenze economiche prodotte da alterazioni dello stato di salute a seguito di malattia o infortunio.

A fronte dell'impegno aleatorio dell'assicuratore, il contraente paga un prezzo, detto *premio*, che può essere corrisposto in un'unica soluzione al momento della stipulazione del contratto oppure frazionato in più rate.

Nella maggior parte dei contratti di assicurazione contro i danni la durata del contratto è annuale. In alcune coperture assicurative può essere presente la clausola di tacito rinnovo; tuttavia, anche in questo caso, i premi sono generalmente corrisposti anno per anno e si riferiscono a singole coperture di durata annuale. Inoltre, in certi casi, è possibile stipulare contratti con durata inferiore ad un anno, per esempio una polizza per un unico viaggio in assicurazioni dei rami trasporti.

Nel seguito, fissiamo l'attenzione su un contratto di durata annuale, con pagamento del premio in un'unica soluzione alla stipulazione del contratto. L'obiettivo che ci proponiamo è determinare il premio secondo un'impostazione tecnico-attuariale.

Punto di partenza è la valutazione della *prestazione aleatoria* dell'assicuratore, che consiste nel pagamento all'assicurato, più in generale ai beneficiari, del *risarcimento totale* per i danni prodotti da tutti i sinistri che colpiscono il rischio assicurato nel periodo di copertura. Osserviamo, a tale proposito, che nel corso del periodo di copertura il rischio assicurato può essere colpito da più di un sinistro e pertanto l'assicuratore può essere chiamato a fare fronte a più di un risarcimento. Nella descrizione del risarcimento totale è allora importante mettere in evidenza gli elementi che lo determinano: il numero aleatorio dei sinistri che colpiscono il rischio assicurato durante il periodo di copertura e gli importi aleatori dei singoli risarcimenti, a fronte dei danni provocati dai sinistri.

Dopo avere descritto la prestazione aleatoria, si può procedere alla sua valutazione probabilistica. Le ipotesi usualmente accolte danno luogo al modello di *distribuzione composta*. Tale modello consente di valutare separatamente la distribuzione del numero dei sinistri e la distribuzione del danno per sinistro e di determinare agevolmente gli elementi con i quali calcolare il premio di una copertura assicurativa, secondo i principi di calcolo del premio usualmente utilizzati nella pratica attuariale.

In questo capitolo sono presentati in dettaglio gli aspetti relativi alla descrizione e alla valutazione del risarcimento totale. Con riferimento all'aspetto descrittivo, è anche evidenziato il legame tra il risarcimento e il danno per sinistro nelle principali forme contrattuali delle assicurazioni dei rami danni. Il capitolo si conclude con alcuni commenti sulle ipotesi probabilistiche sottostanti il modello di distribuzione composta.

1.2 Descrizione del risarcimento totale

Prima di affrontare il problema della valutazione della prestazione aleatoria dell'assicuratore è opportuno soffermarsi con qualche dettaglio sull'aspetto descrittivo.

Con riferimento ad un contratto di assicurazione di durata annuale, indichiamo con

X *il risarcimento totale aleatorio a carico dell'assicuratore per effetto del contratto.*

Il risarcimento totale X può essere descritto come somma dei risarcimenti per i sinistri che colpiscono il rischio assicurato nel periodo di copertura. A tale fine, chiamato per brevità *rischio* il rischio assicurato nel periodo di copertura, sia

N *il numero aleatorio di sinistri che colpiscono il rischio.*

Il rischio può essere colpito da 0, 1, 2, ... sinistri, N è dunque un numero aleatorio con determinazioni numeri naturali; inoltre, realisticamente, è limitato. Può essere tuttavia difficile individuare la massima determinazione di N, pertanto nei modelli si considerano spesso come determinazioni possibili tutti i numeri naturali. Chiaramente, nella scelta della distribuzione di probabilità si dovrà tenere conto del fatto che N è, in realtà, limitato e sarà quindi opportuno scegliere distribuzioni che assegnino probabilità veramente esigue alle determinazioni elevate.

Indichiamo con

Z_i *l'importo aleatorio del danno arrecato dall'i-esimo sinistro.*

Per intendere il significato che attribuiamo a Z_i, occorre precisare lo stato d'informazione in cui tale numero aleatorio deve essere considerato. Poiché l'obiettivo è descrivere la prestazione aleatoria dell'assicuratore alla stipulazione del contratto, i numeri aleatori X, N e Z_i sono tutti riferiti allo stato d'informazione che si ha in tale momento. Fissato i, è possibile che il sinistro i-esimo non si verifichi, in tal caso il numero aleatorio Z_i assume determinazione nulla. Si ha dunque che l'evento $N < i$ implica l'evento $Z_i = 0$, in simboli $N < i \Rightarrow Z_i = 0$. Se invece l'$i$-esimo sinistro si verifica, Z_i è l'effettivo importo di danno.

Per una descrizione più formale di Z_i, ricordiamo che per assegnare un numero aleatorio si deve assegnare un'*applicazione aleatoria*, cioè un'applicazione definita su una *partizione dell'evento certo* (un insieme di eventi a due a due incompatibili ed esaustivi) con valori nell'insieme dei numeri reali. Introduciamo la seguente partizione dell'evento certo

$$\wp_i = \left\{\omega_i^{(0)}, \omega_i^{(z)} : z \in J\right\},$$

dove $\omega_i^{(0)}$ indica l'evento "l'i-esimo sinistro non si verifica", $\omega_i^{(z)}$ indica l'evento "si verifica l'i-esimo sinistro e l'importo del danno è z" e J è l'insieme dei valori possibili del danno provocato da un sinistro. Si può allora definire Z_i mediante l'applicazione che assegna a $\omega_i^{(0)}$ valore zero e a $\omega_i^{(z)}$ valore z, per ogni $z \in J$. Naturalmente, quando Z_i è considerato congiuntamente con altri numeri aleatori si deve introdurre una partizione, più fine della $\wp_i$, che consenta di descrivere tutti i numeri aleatori presi in esame.

Osserviamo che ai fini della descrizione della prestazione aleatoria dell'assicuratore, sono rilevanti solo i sinistri, risarcibili ai sensi del contratto, che provocano un danno di importo positivo. Pertanto, il numero aleatorio N è da intendersi come il numero di tali sinistri[1] e Z_i è il danno causato dall'i-esimo. Si ha dunque, non solo $N < i \Rightarrow Z_i = 0$, ma anche $Z_i = 0 \Rightarrow N < i$ ovvero i due eventi sono uguali.

Realisticamente, come N, anche Z_i è un numero aleatorio limitato con un numero finito di determinazioni possibili. Nei modelli si considera però spesso l'intervallo $[0, +\infty[$ come insieme delle determinazioni possibili di Z_i.

Il risarcimento o indennizzo che l'assicuratore paga all'assicurato a fronte del danno causato da un sinistro è funzione del danno. Indichiamo con

Y_i *l'importo aleatorio del risarcimento per l'i-esimo sinistro:* $Y_i = \varphi(Z_i)$.

La φ è detta *funzione di risarcimento* ed è determinata dalle condizioni contrattuali. Nel seguito, supporremo per semplicità che la funzione di risarcimento sia la medesima per qualunque sinistro che colpisca il rischio. Le funzioni di risarcimento corrispondenti alle più comuni forme assicurative sono richiamate nel prossimo paragrafo.

In conclusione, possiamo descrivere il risarcimento totale X come segue

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ Y_1 + \ldots + Y_N & \text{se } N > 0, \end{cases}$$

con $Y_i = \varphi(Z_i)$, o anche

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i \,, \tag{1.2.1}$$

con la convenzione che $X = 0$ se $N = 0$. Il risarcimento totale può essere anche descritto dalle

$$X = \sum_{i \geq 1} \left((Y_1 + \ldots + Y_i) |N = i| \right) = \sum_{i \geq 1} \left(Y_i |N \geq i| \right),$$

dove $|N = i|$, $|N \geq i|$ sono gli indicatori dei rispettivi eventi.

---

[1] In pratica può accadere che ad alcuni sinistri denunciati corrisponda un importo di danno nullo a carico dell'assicuratore. Si parla di *sinistri senza seguito*. Nella definizione del numero aleatorio N tali sinistri non sono conteggiati.

Nelle precedenti rappresentazioni sono presenti gli elementi che determinano la prestazione dell'assicuratore: il numero di sinistri che colpiscono il rischio e i risarcimenti per tali sinistri, i quali sono funzioni dei danni provocati. Si osservi che il numero aleatorio X è pertanto funzione del processo stocastico $\{N, Z_1, Z_2, \ldots\}$.

1.3 Funzioni di risarcimento

Richiamiamo brevemente le principali forme assicurative offerte nei contratti delle assicurazioni dei rami danni e le corrispondenti funzioni di risarcimento.

Con riferimento ad un fissato sinistro, siano Z il danno e $Y = \varphi(Z)$ il corrispondente risarcimento.

Osserviamo preliminarmente che tra risarcimento e danno deve sussistere la relazione $Y \leq Z$, detta *principio di non arricchimento*. Infatti, lo scopo del contratto di assicurazione è fornire copertura all'assicurato per le conseguenze patrimoniali derivanti dai sinistri, attraverso la corresponsione di un risarcimento a fronte di un danno occorso, e non di procurargli un guadagno. Il risarcimento non può allora superare l'ammontare del danno.

Assicurazione a valore intero

È una forma assicurativa applicata tipicamente nelle assicurazioni di beni (per esempio: incendio, furto, trasporti), dove è quantificabile *a priori* un valore del bene assicurato. Tale valore, sia V, è riportato in polizza ed è detto *valore assicurato* o *somma assicurata*; esso rappresenta la massima determinazione possibile del danno provocato da un sinistro.

La funzione di risarcimento è l'identica, si ha cioè $Y = Z$. Nella Figura 1.1 è riportato il grafico del risarcimento in funzione del danno.

Può accadere che il valore assicurato V, dichiarato in polizza, non coincida con il valore effettivo del bene assicurato, V_r, riferito all'epoca del sinistro, secondo quanto accertato dall'assicuratore in seguito alla denuncia. Allora, se $V \geq V_r$, il risarcimento segue la regola stabilita: $Y = Z$. Altrimenti, se $V < V_r$, si ha *sottoassicurazione* ed è applicata la *regola proporzionale*

$$Y = \frac{V}{V_r} Z .$$

In tale caso, la funzione di risarcimento è dunque $\varphi(z) = \dfrac{V}{V_r} z$. Il grafico è riportato in Figura 1.2.

Prima di descrivere la prossima forma assicurativa, introduciamo la nozione di *massimo danno probabile* (*maximum probable loss*, *MPL*).

Può accadere che si ritenga di attribuire probabilità nulla alle determinazioni possibili del danno provocato da un sinistro, che risultino superiori ad un dato importo.

Se Z è discreto, si definisce massimo danno probabile l'estremo superiore dei valori possibili del danno per sinistro ai quali è attribuita probabilità positiva,

$$MPL = sup\,\{z \in \Re : Pr(Z = z) > 0\} .$$

Più in generale, data la funzione di ripartizione del danno per sinistro $F(z) = Pr(Z \leq z)$, si pone (v. Figura 1.3 per un esempio con F continua)

$$MPL = sup\{z \in \Re : F(z) < 1\} = inf\ \{z \in \Re : F(z) = 1\}.$$

Si noti che, se $z \geq MPL$, allora $Pr(Z > z) = 0$.

Assicurazione a primo rischio relativo

Come l'assicurazione a valore intero, anche questa è una forma assicurativa che è applicata quando è quantificabile *a priori* un valore V del bene assicurato, quindi nelle assicurazioni di beni. L'importo V, ancora detto *valore assicurato* o *somma assicurata*, è indicato nella polizza e rappresenta la massima determinazione possibile del danno provocato da un sinistro. È inoltre indicato nel contratto un valore $M < V$, usualmente detto *massimale di copertura*, e l'assicuratore si impegna a risarcire il danno in misura integrale se il danno è minore o uguale a M, a pagare l'importo M altrimenti. Il risarcimento è dunque (v. Figura 1.4)

$$Y = \begin{cases} Z & \text{se } Z \leq M \\ M & \text{se } Z > M \end{cases} = min(Z,M).$$

Il valore M può, in particolare, rappresentare il massimo danno probabile.

Analogamente al caso dell'assicurazione a valore intero, se $V < V_r$, con V_r valore effettivo del bene assicurato, si ha sottoassicurazione ed è applicata una riduzione nel risarcimento (v. Figura 1.5). Il risarcimento è definito dalla

$$Y = min(\frac{V}{V_r}Z,\ M).$$

Assicurazione a primo rischio assoluto

È una forma assicurativa in cui non si fa alcun riferimento in polizza ad un valore assicurato. Si fissa contrattualmente il *massimale di copertura M* e il risarcimento è definito dalla

$$Y = \begin{cases} Z & \text{se } Z \leq M \\ M & \text{se } Z > M \end{cases} = min(Z,\ M).$$

È la modalità di risarcimento tipica delle assicurazioni di responsabilità civile. Inoltre è usualmente presente nelle coperture del ramo malattie per il rimborso di spese mediche. Nelle assicurazioni di beni M può essere fissato pari al massimo danno probabile.

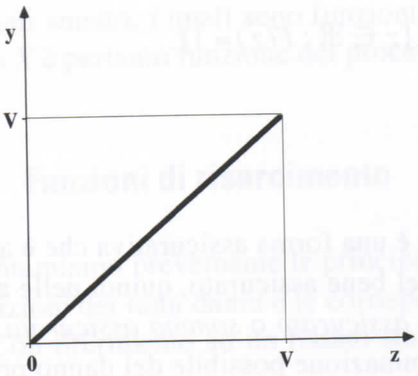

Figura 1.1. *Assicurazione a valore intero*

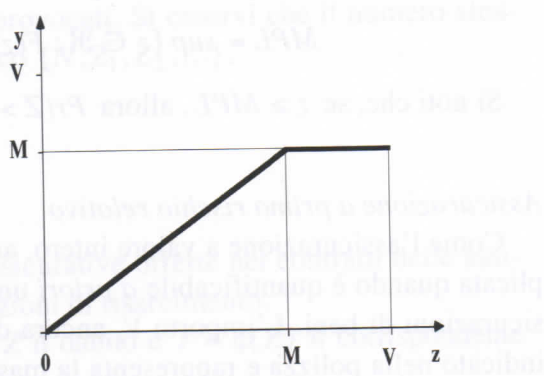

Figura 1.4. *Assicurazione a primo rischio relativo*

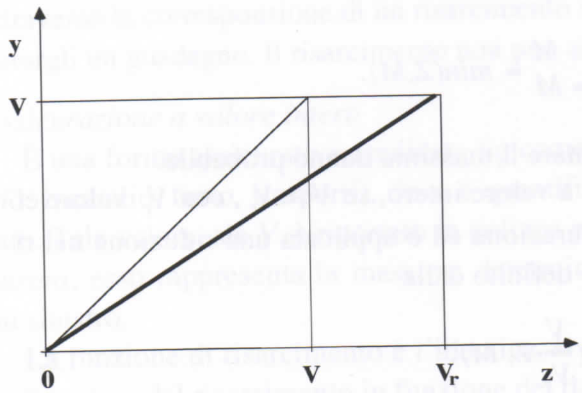

Figura 1.2. *Assicurazione a valore intero. Regola proporzionale*

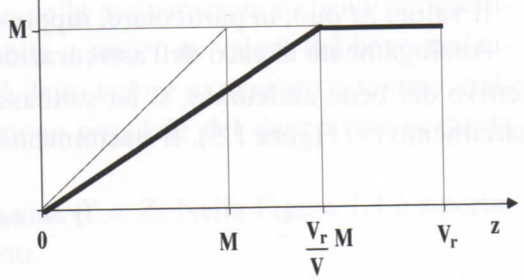

Figura 1.5. *Assicurazione a primo rischio relativo. Sottoassicurazione*

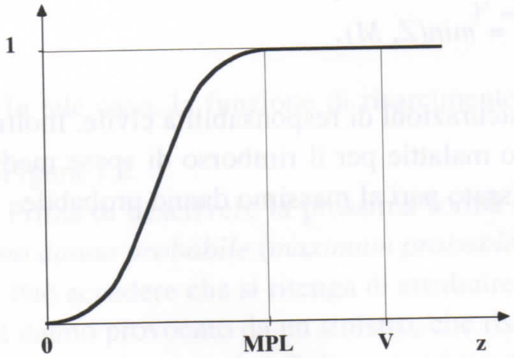

Figura 1.3. *Funzione di ripartizione del danno e MPL*

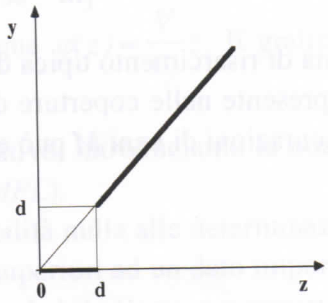

Figura 1.6. *Assicurazione con franchigia relativa*

Assicurazione a garanzia illimitata

È una forma che può trovare applicazione nelle assicurazioni di responsabilità civile. Il risarcimento coincide con il danno, senza limitazioni di copertura,

$$Y = Z.$$

Assicurazione con franchigia

Si fissa un importo d e il risarcimento è nullo se l'importo del danno è minore o uguale a d. Si distingue poi tra assicurazione con franchigia relativa e assicurazione con franchigia assoluta.

Franchigia relativa. Per importi di danno superiori a d il risarcimento del danno avviene in misura integrale (v. Figura 1.6),

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le d \\ Z & \text{se } Z > d \end{cases} = Z|Z > d|,$$

dove $|Z > d|$ è l'indicatore dell'evento $Z > d$.

Franchigia assoluta. Per importi di danno superiori a d è risarcita l'eccedenza rispetto alla franchigia e l'importo d rimane a carico dell'assicurato (v. Figura 1.7),

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le d \\ Z - d & \text{se } Z > d \end{cases} = max(0,\ Z - d).$$

La presenza di una franchigia ha lo scopo di coinvolgere maggiormente l'assicurato nella prevenzione dei sinistri. Evita inoltre l'intervento dell'assicuratore per danni di lieve entità con conseguenti riduzioni di costi, anche di tipo amministrativo. L'assicurato non è, naturalmente, coperto per importi di danno inferiori alla franchigia, ma ciò gli consente di ottenere una riduzione del premio.

Spesso le condizioni previste nei contratti danno luogo a funzioni di risarcimento che combinano tra loro alcune delle diverse modalità sopra descritte. Per esempio, in presenza di franchigia d e di massimale M, il risarcimento in caso di franchigia relativa è

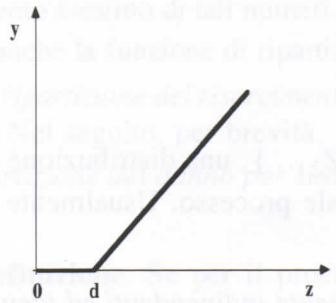

Figura 1.7. *Assicurazione con franchigia assoluta*

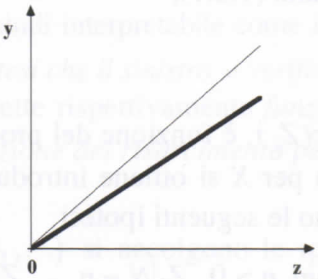

Figura 1.8. *Assicurazione con scoperto*

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le d \\ Z & \text{se } d < Z \le M \\ M & \text{se } Z > M \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le d \\ min(Z,M) & \text{se } Z > d. \end{cases}$$

Nel caso di franchigia assoluta, si ha

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le d \\ Z-d & \text{se } d < Z \le M \\ M-d & \text{se } Z > M \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le d \\ min(Z-d, M-d) & \text{se } Z > d. \end{cases}$$

Quest'ultima espressione può essere scritta nelle due forme seguenti

$$Y = max(0,\ min(Z-d, M-d)) = min(M-d, max(0, Z-d)).$$

Assicurazione con scoperto

Si fissa un'aliquota $0 < \alpha < 1$. A fronte del danno Z, l'importo αZ rimane a carico dell'assicurato. Il risarcimento è dunque (v. Figura 1.8)

$$Y = (1-\alpha)Z.$$

La clausola di scoperto è introdotta, in particolare, quando il comportamento dell'assicurato può influire sul costo del sinistro. Ciò avviene, per esempio, nelle coperture per il rimborso di spese mediche, nella garanzia "guasti accidentali" (*kasko*) dell'assicurazione auto rischi diversi, nel caso di assicurazioni contro i furti.

La stessa funzione di risarcimento si ha nell'*assicurazione con franchigia in percentuale del danno.*

1.4 Valutazione probabilistica del risarcimento totale

Abbiamo considerato il risarcimento totale X per un contratto di assicurazione contro i danni sotto l'aspetto descrittivo. Passiamo ora alla valutazione probabilistica. Poiché X descritto dalla (1.2.1),

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i\,,$$

con $Y_i = \varphi(Z_i)$, è funzione del processo stocastico $\{N, Z_1, Z_2, \ldots\}$, una distribuzione di probabilità per X si ottiene introducendo un modello per tale processo. Usualmente si considerano le seguenti ipotesi

(1) per ogni $n > 0$, $Z_1|N=n, \ldots, Z_n|N=n$ *sono stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuiti,*

(2) la distribuzione di probabilità di $Z_i|N = n$, $i \le n$, non dipende da n.

Le precedenti due ipotesi implicano che la distribuzione di probabilità di $Z_i|N = n$, *importo del danno provocato dall'i-esimo sinistro nell'ipotesi che il rischio sia colpito da n sinistri*, con $i \le n$, non dipende né da i, né da n. Indichiamo con F_Z la comune funzione di ripartizione e con $E(Z^k)$ il comune momento k-esimo di tali numeri aleatori condizionati.

Osservazione. Si può facilmente verificare che F_Z è interpretabile come *la funzione di ripartizione del danno provocato da un sinistro, nell'ipotesi che il sinistro si verifichi.* Consideriamo, infatti, nelle ipotesi *(1)* e *(2)*, la funzione di ripartizione del numero aleatorio $Z_i|N \ge i$ che possiamo appunto definire come *l'importo del danno per l'i-esimo sinistro, nell'ipotesi che il sinistro si verifichi.* Preliminarmente, osserviamo che l'evento $N \ge i$ può essere descritto come somma logica di eventi a due a due incompatibili: $(N \ge i) = \bigvee_{n=i}^{+\infty} (N = n)$.

Per la proprietà di disintegrabilità della probabilità, si ha

$$Pr(Z_i \le z|N \ge i) = \sum_{n=i}^{+\infty} Pr(N = n|N \ge i) Pr(Z_i \le z|N = n)$$

$$= \sum_{n=i}^{+\infty} Pr(N = n|N \ge i) F_Z(z) = F_Z(z).$$

Pertanto, i numeri aleatori $Z_i|N \ge i$ e $Z_i|N = n$, $i \le n$, hanno la stessa funzione di ripartizione F_Z.

Sottolineiamo che F_Z e $E(Z^k)$ sono rispettivamente la funzione di ripartizione e il momento k-esimo dei numeri aleatori $Z_i|N \ge i$ e $Z_i|N = n$, $i \le n$, e *non* di Z_i. ♦

Dalle *(1)*, *(2)* seguono le

(1') per ogni $n > 0$, $Y_1|N = n, \dots, Y_n|N = n$ sono stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuiti,

(2') la distribuzione di probabilità di $Y_i|N = n$, $i \le n$, non dipende da n.

Pertanto anche la distribuzione di probabilità di $Y_i|N = n$, $i \le n$, non dipende né da i né da n. Indichiamo con F_Y la comune funzione di ripartizione e con $E(Y^k)$ il comune momento k-esimo di tali numeri aleatori condizionati. Analogamente a quanto visto sopra, F_Y è anche la funzione di ripartizione di $Y_i|N \ge i$ ed è quindi interpretabile come *la funzione di ripartizione del risarcimento per un sinistro, nell'ipotesi che il sinistro si verifichi.*

Nel seguito, per brevità, F_Z e F_Y saranno anche dette rispettivamente *funzione di ripartizione del danno per sinistro* e *funzione di ripartizione del risarcimento per sinistro.*

Definizione. Se per il processo stocastico $\{N, Y_1, Y_2, \dots\}$ si accolgono le ipotesi *(1')*, *(2')*, la distribuzione di probabilità di $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ è detta *distribuzione composta.*

Per qualche commento sulle ipotesi sottostanti il modello di distribuzione composta si vedano le note riportate alla fine del paragrafo.

I momenti e la funzione di ripartizione della distribuzione composta di X si ottengono dai momenti e dalle distribuzioni di N e di $Y_i|N = n$.

Speranza matematica di X

Supponiamo, com'è naturale, che le speranze matematiche $E(N)$ e $E(Y)$ del numero di sinistri e del risarcimento per sinistro siano finite. Per la proprietà di disintegrabilità della speranza matematica rispetto alla partizione $\{N = 0, N = 1, \ldots\}$, si ha

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)E(X \mid N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)E(\sum_{i=1}^{n} Y_i \mid N = n).$$

Sfruttando la proprietà di additività della speranza matematica ed essendo $E(Y_i|N = n) = E(Y)$, per ogni $i \leq n$ e per ogni $n > 0$, si ottiene

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n) \sum_{i=1}^{n} E(Y_i \mid N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)n\,E(Y)$$

$$= E(Y) \sum_{n=0}^{+\infty} nPr(N = n) = E(N)E(Y).$$

Pertanto,

$$E(X) = E(N)E(Y),$$

il risarcimento totale atteso, ovvero il *premio equo*, è prodotto del numero atteso di sinistri e del risarcimento atteso per sinistro, nell'ipotesi che il sinistro si verifichi.

Varianza di X

Essendo, per la varianza, $var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, calcoliamo il momento secondo di X, supponendo che siano finiti i momenti secondi $E(N^2)$ e $E(Y^2)$ del numero di sinistri e del risarcimento per sinistro. Con passaggi analoghi a quelli sviluppati per il calcolo della speranza matematica, si ha

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)E(X^2 \mid N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \mid N = n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)\left[\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2 \mid N = n) + \sum_{i \neq j}^{1,n} E(Y_i Y_j \mid N = n)\right].$$

Dalle $E(Y_i^2 \mid N = n) = E(Y^2)$, $E(Y_i \mid N = n) = E(Y)$ e dall'indipendenza stocastica di $Y_i \mid N = n$, $Y_j \mid N = n$, $i \neq j$, per cui riesce

$$E(Y_i Y_j \mid N = n) = E(Y_i \mid N = n)E(Y_j \mid N = n) = E(Y)^2,$$

segue

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)\left[nE(Y^2) + (n^2 - n)E(Y)^2\right]$$

$$= var(Y) \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)n + E(Y)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n)n^2$$

$$= E(N)var(Y) + E(N^2)E(Y)^2.$$

Con semplici passaggi si ottiene infine

$$var(X) = E(N)var(Y) + var(N)E(Y)^2,$$

dove $var(Y)$ indica la varianza della comune distribuzione dei numeri aleatori $Y_i|N = n$, $i \le n$.

In modo analogo si possono ottenere altri momenti della distribuzione di X.

Ricordiamo che, per i principi di calcolo del premio maggiormente utilizzati nella pratica attuariale, il caricamento di sicurezza è funzione della speranza matematica o della varianza di X. Dalle conclusioni precedenti si ricava che per il calcolo del premio secondo tali principi, in ipotesi di distribuzione composta, è sufficiente valutare le speranze matematiche e le varianze del numero di sinistri e del risarcimento per sinistro, nell'ipotesi che il sinistro si verifichi. Altri principi di calcolo del premio, per esempio i principi del percentile, dell'utilità nulla o di Wang, richiedono invece di valutare la distribuzione di X.

Funzione di ripartizione di X

Per la proprietà di disintegrabilità della probabilità rispetto alla partizione $\{N = 0, N = 1, \ldots\}$, si ottiene

$$F_X(x) = Pr(X \le x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n) Pr(X \le x \mid N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n) Pr(\sum_{i=1}^{n} Y_i \le x \mid N = n).$$

Se $n > 0$, $Pr(\sum_{i=1}^{n} Y_i \le x \mid N = n)$ è il valore in x della funzione di ripartizione della somma di n numeri aleatori indipendenti ed identicamente distribuiti, con funzione di ripartizione F_Y: la *convoluzione n-esima* della funzione di ripartizione F_Y. Poniamo

$$Pr(\sum_{i=1}^{n} Y_i \le x \mid N = n) = F_Y^{*(n)}(x).$$

Se $n = 0$, la $Pr(X \le x \mid N = n)$ è nulla per $x < 0$, vale 1 per $x \ge 0$. Poniamo

$$F_Y^{*(0)}(x) = Pr(X \le x \mid N = 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \ge 0. \end{cases}$$

Pertanto, la funzione di ripartizione del risarcimento totale è

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N = n) F_Y^{*(n)}(x).$$

La precedente espressione fornisce, formalmente, la funzione di ripartizione di una distribuzione composta. Operativamente però tale funzione di ripartizione è calcolabile solo in casi molto particolari. Per il calcolo effettivo, in letteratura sono presentate varie proposte: metodi di tipo iterativo, in alcune ipotesi sulla distribuzione di N; metodi approssimati; metodi basati su simulazione stocastica (v. Klugman *et al.* (1998)).

Si è visto che, in ipotesi di distribuzione composta, per assegnare una valutazione probabilistica al risarcimento totale X e quindi per calcolare il premio di una copertura assicurativa, occorre assegnare le distribuzioni (o almeno i momenti) di N e dei numeri aleatori $Y_i|N=n$. Tuttavia, essendo $(Y_i|N=n) = (\varphi(Z_i)|N=n) = \varphi(Z_i|N=n)$, si ha

$$E(Y^k) = \int_0^{+\infty} \varphi(z)^k \, dF_Z(z).$$

Pertanto, usando il modello di distribuzione composta, per ottenere valutazioni per X, basta assegnare, e quindi valutare, in modo separato le distribuzioni (o almeno i momenti) del numero di sinistri e del danno per sinistro ovvero la distribuzione $Pr(N=n)$, $n = 0,1,\ldots$, e la funzione di ripartizione F_Z. Tali distribuzioni costituiscono la *base tecnica del rischio*.

In alternativa, si può pensare di assegnare direttamente una distribuzione a X. Il fatto di trattare in modo separato le distribuzioni del numero di sinistri e del danno per sinistro ha però notevoli vantaggi, poiché permette di tenere conto di entrambe le componenti e degli elementi che possono influire in maniera diversa su di esse. Ciò consente di costruire modelli più accurati e flessibili per la distribuzione del risarcimento totale.

Nota 1. *Alcuni commenti sulle ipotesi del modello.*
Analizziamo in dettaglio le ipotesi che conducono ad una distribuzione composta, in relazione alla loro accettabilità nell'applicazione pratica del modello.

- *Per ogni* $n > 0$, $Z_1|N=n, \ldots, Z_n|N=n$ *sono identicamente distribuiti.*
  Sapendo che ci sono stati n sinistri, ai danni prodotti da tali sinistri si ritiene di attribuire la medesima distribuzione di probabilità, indipendentemente dall'ordine in cui i sinistri si sono verificati. Tale ipotesi è ragionevole vista la breve durata del contratto assicurativo.

- *Per ogni* $n > 0$, $Z_1|N=n, \ldots, Z_n|N=n$ *sono stocasticamente indipendenti.*
  Per esempio, il numero aleatorio $Z_2|(N=2, Z_1 \in I_1)$, essendo I_1 un intervallo di $\Re$, ha la stessa distribuzione di $Z_2|N=2$. In molti casi concreti, nell'ipotesi che ci siano stati due sinistri, un'informazione sull'importo del danno provocato dal primo sinistro può portare a modificare la valutazione probabilistica del danno provocato dal secondo.

- *La distribuzione di probabilità di* $Z_i|N=n$, $i \leq n$, *non dipende da* n.
  Per esempio, la distribuzione del danno provocato dal primo sinistro è la medesima sia nell'ipotesi che ci sia stato un solo sinistro, sia nell'ipotesi di un numero maggiore di sinistri. Si ipotizza quindi invarianza della distribuzione del danno per sinistro dal numero di sinistri che colpiscono il contratto (precisamente, si introduce l'ipotesi di indipendenza stocastica condizionata di $Z_i|N \geq i$ da $N|N \geq i$). Le osservazioni su dati reali, in molti casi, non avvalorano tale ipotesi. Infatti, spesso mostrano che maggiore è il numero di sinistri che colpiscono un rischio, mediamente inferiori sono i danni provocati dai vari sinistri.

Le ipotesi sono dunque fortemente semplificatrici e spesso, in particolare le ultime due, non in accordo con quanto si osserva. Segnaliamo tuttavia che, benché siano introdotte per rendere trattabile il problema del calcolo dei momenti della distribuzione del risarcimento totale, non portano a valutazioni inaccettabili. L'effetto delle ipotesi è, infatti, mitigato dal fatto che, generalmente, è poco probabile che un rischio sia colpito da più di un sinistro.

Ulteriori ipotesi semplificatrici introdotte nel modello sono le seguenti.

- *Non si tiene conto di aspetti finanziari.*
  Nel valutare l'impegno dell'assicuratore all'epoca di stipulazione del contratto, gli importi dei risarcimenti non sono attualizzati. Ciò è giustificato dalla breve durata della copertura. Un modo semplificato per tenere conto di aspetti finanziari è supporre che tutti i risarcimenti siano pagati a metà anno e quindi porre
  $$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i \, v^{1/2},$$
  dove v rappresenta il fattore annuo di attualizzazione. Tale approssimazione è accettabile ipotizzando che i risarcimenti siano pagati, nel periodo di copertura, in modo uniforme rispetto al tempo.

- *Non si tiene conto del fatto che in alcuni casi i sinistri vengono risarciti anche diversi anni dopo l'accadimento.*
  Nella pratica si osserva invece che tali sinistri sono mediamente di importi più elevati di quelli risarciti subito, e ciò non solo a causa di effetti economico-finanziari. ◆

Nota 2. *Usuale formulazione del modello nella letteratura attuariale.*
Le ipotesi probabilistiche sul processo stocastico sottostante la descrizione del risarcimento totale, che conducono ad una distribuzione composta, sono usualmente formulate come segue

(a) *i numeri aleatori $Z_1, Z_2, \ldots$ sono indipendenti ed identicamente distribuiti,*
(b) *i numeri aleatori $Z_1, Z_2, \ldots$ sono indipendenti da N.*

Se i numeri aleatori Z_i sono definiti come nel § 1.2, tale formulazione deve essere intesa come una schematizzazione delle *(1)*, *(2)*, in quanto formalmente non è corretta, com'è evidenziato qui di seguito.

- Non è possibile assumere l'ipotesi di indipendenza stocastica tra i numeri aleatori Z_i e N perché tra questi vi sono addirittura relazioni di dipendenza logica. Ricordiamo, infatti, che riesce $(N < i) = (Z_i = 0)$.
- Non è possibile assumere l'ipotesi di uguale distribuzione dei numeri aleatori Z_i. Infatti, essendo $(N < i) = (Z_i = 0)$, si ha $Pr(N < i) = Pr(Z_i = 0)$ e, poiché in generale $Pr(N < i) \neq Pr(N < j)$, si ricava $Pr(Z_i = 0) \neq Pr(Z_j = 0)$, per $i \neq j$.
- Non è possibile assumere l'ipotesi di indipendenza stocastica tra i numeri aleatori Z_i. Per esempio, consideriamo $Pr(Z_1 = 0)$ e $Pr(Z_1 = 0 \mid Z_2 > 0)$. Per quanto osservato al punto precedente, si ha $Pr(Z_1 = 0) = Pr(N = 0)$ e, ragionevolmente, quest'ultima probabilità è positiva. Risulta invece $Pr(Z_1 = 0 \mid Z_2 > 0) = 0$, poiché $Z_2 > 0 \Rightarrow N \geq 2$ e $N \geq 2 \Rightarrow Z_1 > 0$.

L'impossibilità di assumere le *(a)*, *(b)* deriva dalle relazioni logiche tra il numero di sinistri N e gli importi di danno Z_i, $i \geq 1$. Tuttavia, rinunciando all'interpretazione come importi di danno per sinistro, si può formalmente definire un processo stocastico $\{Z_1', Z_2', \ldots\}$, indipendente da N, i cui numeri aleatori siano stocasticamente indipendenti ed identicamente distribuiti, con funzione di ripartizione F_Z (la funzione di ripartizione che si ritiene di assegnare al danno per un sinistro che si verifichi). Si ottiene un modello probabilistico che, a parità di distribuzione di N e F_Z, assegna a

$$X' = \sum_{i=1}^{N} Y_i' = \sum_{i\geq 1} \left((Y_1' + \ldots + Y_i') \middle| N = i \right) = \sum_{i\geq 1} \left(Y_i' \middle| N \geq i \right),$$

con $Y_i' = \varphi(Z_i')$, la stessa distribuzione che si ha per il risarcimento totale $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ assumendo le *(1)*, *(2)*.
Abbiamo preferito la formulazione con le ipotesi *(1)*, *(2)* in quanto maggiormente aderente agli aspetti interpretativi. ◆