1 PROCESSO di ARRIVO dei SX

$\{X(t), t\in T\}$: PROCESSO STOCASTICO famiglia indiciata di v.a.

Fix. $t\in T$

$\longrightarrow X(t,\cdot): \Omega \xrightarrow{\text{applicazione}} \mathbb{R}$ t.c. $\omega\in\Omega \rightarrow X(t,\omega)\in\mathbb{R}$

Fix. $\omega\in\Omega$

$\longrightarrow X(\cdot,\omega): T \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $t\in T \rightarrow X(t,\omega)\in\mathbb{R}$

F_X caratterizza la legge del v.a.

Dato $\{X(t), t\in T\}$, la sua valutazione prob. è assegnata assegnando una famiglia $\mathcal{F}$ di f.z., costituita da tutte le fdr congiunte di vettori aleatori (finiti) del processo.
$F\in\mathcal{F}$ sse $\exists n>0, t_1,\dots,t_n\in T$ t.c. $F=F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}$
La famiglia $\mathcal{F}$ caratterizza la legge del processo stocastico

$X(t_1),\dots,X(t_n)$ STOCASTICAMENTE INDIPENDENTI sse $\forall i=1,\dots,n$ $X(t_i) =^d X(t_i)|H$
$\forall$ evt H $(H\neq\emptyset)$ che porta inf. su $X(t_j)$ $\rightarrow H=\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X(t_j)\in A_j)$ $A_j\subset\mathbb{R}$
Basta assegnare le fdr marginali unidimensionali

$\{X(t), t\in T\}$ è a INCREMENTI INDIPENDENTI se $\forall n\geq 2$, $\forall s_1,t_1,\dots,s_n,t_n\in T$: $s_1<t_1\leq s_2<t_2\leq\dots\leq s_n<t_n$
$\rightarrow X(t_1)-X(s_1),\dots,X(t_n)-X(s_n)$ sono s.i.
ovvero se per ogni numero finito di incrementi relativi a intervalli a 2 a 2 disgiunti
$X(t_i)-X(s_i) =^d (X(t_i)-X(s_i))|H$ $\forall H$ t.c. $H=\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(X(t_j)-X(s_j)\in A_j)$ con $A_j\subset\mathbb{R}$

$\{X(t), t\in T\}$ è a INCREMENTI STAZIONARI se $X(t)-X(s)$ dipende solo da $t-s$.
$X(t+h)-X(t) =^d X(\tau+h)-X(\tau)$

$\{N(t), t\in T\}$ è un PROCESSO DI CONTA se $N(t)$ è il numero di arrivi in $[0,t]$

Processo di Poisson

A) $\{N(t), t \geq 0\}$ è un PROCESSO DI POISSON d'intensità λ se:

A1) è a incrementi indipendenti

A2) $Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

A3) $Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$

A4) $Pr(N(0) = 0) = 1$

TEOR. A)

$$Pr(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

DIM:

1) $P_0(t) = Pr(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$

1.1) P_0 è derivabile a dx in t

1.2) P_0 è derivabile a sx in t

1.3) $P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0 \quad / \cdot e^{\lambda t} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}[P_0(t) e^{\lambda t}] = 0$

2) $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \geq 1$

2.1) P_n derivabile a dx in t

2.2) P_n derivabile a sx. in t Sistema di Kolmogorov

2.3) $P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad / \cdot e^{\lambda t} \quad [P_n'(t) + \lambda P_n(t)] e^{\lambda t} = \lambda P_{n-1}(t) e^{\lambda t}$

2.4) $(P_n(t))_{n \geq 1}$ è t.c. $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \hookrightarrow \frac{d}{dt}[P_n(t) e^{\lambda t}]$

x induzione

TEOR: B)

$\{N(t), t \geq 0\}$ è a INCREMENTI STAZIONARI

TEOR: C)

$N^{(\tau)}(t) = N(\tau + t) - N(\tau) \quad \forall \tau > 0 \rightarrow N^{(\tau)} = \{N^{(\tau)}(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson d'intensità λ.

DIM:

- incremento di $N^{(\tau)} \rightarrow$ incremento di N
- incrementi su intervalli disg. di $N^{(\tau)} \rightarrow$ incrementi su interv. disg. di N

Seguono le 4 condizioni per un processo di Poisson

Processo dei tempi d'arrivo

$(N(t)=0) = (t < T_1) = (t < W_1)$

$(N(t)=n) = (t < T_{n+1}) \wedge (t \geq T_n) = (T_n \leq t < T_{n+1})$

$\overset{!}{=} (W_1 + \dots + W_n \leq t < W_1 + \dots + W_n + W_{n+1})$

$X \sim Exp(\rho)$

$f_X(x) = \rho e^{-\rho x}$ $\qquad$ $F_X(x) = 1 - e^{-\rho x}$

$E[X] = \frac{1}{\rho}$ $\qquad$ $V[X] = \frac{1}{\rho^2}$ $\qquad$ $m_X(t) = \frac{\rho}{\rho - t}$

$W_1 = T_1 \sim Exp(\rho)$

DIM:

$F_{W_1}(t) = Pr(W_1 \leq t) = 1 - Pr(T_1 > t) = 1 - Pr(N(t)=0) = 1 - e^{-\lambda t}$

TEOR: $\{W_1, W_2, \dots\} \sim iid$ con $W_n \sim Exp(\lambda)$ $\rightarrow E[W_n] = \frac{1}{\lambda}$

$T_n = W_1 + \dots + W_n$ $\rightarrow$ $m_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{W_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$

$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$ fz. generatrice dei momenti di gamma(n, λ)

$\rightarrow T_n \sim$ Erlangiana(n, λ)

B) $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto processo di Poisson di intensità λ, se

B1) è ad incrementi indipendenti

B2) $N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t-s))$

B3) $Pr(N(0)=0) = 1$

DIM:

B2) $\rightarrow$ A2) $\frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = \frac{e^{-\lambda \Delta t} \lambda \Delta t}{\Delta t} = \lambda e^{-\lambda \Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0^+} \lambda$

B2) $\rightarrow$ A3) $Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = 1 - Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) - Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 0)$

$\overset{!}{=} 1 - e^{-\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}$

$$\frac{Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2)}{\Delta t} = \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} - \lambda e^{-\lambda \Delta t} = \underset{\downarrow \, \lambda}{\lambda} \underset{\downarrow \, 1}{\frac{e^{-\lambda \Delta t} - 1}{-\lambda \Delta t}} - \underset{\downarrow \, \lambda}{\lambda} \underset{\downarrow \, 1}{e^{-\lambda \Delta t}} \rightarrow 0$$

Processi di Poisson non omogenei (non stazionari)

A'] $\{N(t), t \geq 0\}$ è un PROCESSO di POISSON NON OMOGENEO con fz. d'intensità $\lambda(\cdot)$ con $\lambda(\cdot)$ integrabile in ogni intervallo limitato, se

A1) è ad incrementi indipendenti

A2') $Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$

A3) $Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$

A4) $Pr(N(0) = 0) = 1$

Posto $\mu(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$, $\forall s<t$ si ha

$$Pr(N(t) - N(s) = n) = e^{-(\mu(t)-\mu(s))} \frac{(\mu(t)-\mu(s))^n}{n!} \qquad n = 0, 1, \dots$$

Dunque $N(t) - N(s) \sim P(\mu(t) - \mu(s)) \rightarrow$ Il processo non è a incrementi stazionari

Proprietà $\mu(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$

- $\mu(0) = 0$
- $\mu(t) > 0$
- crescente
- assolutamente continua

B] $\{N(t), t \geq 0\}$ è un processo di Poisson non omogeneo con fz. del valore atteso $\mu(\cdot)$, se

B1) è ad incrementi indipendenti

B2) $\mu(\cdot)$ è t.c.: $\mu(0) = 0$, $\mu(t) > 0$, crescente, assolutamente continua e $\forall s<t$ $\quad N(t) - N(s) \sim P(\mu(t) - \mu(s))$

B3) $Pr(N(0) = 0) = 1$

Collegamenti tra processi di Poisson omogenei e non omogenei

PROP:

Sia N un processo di Poisson omogeneo, $\mu(\cdot)$ fz. t.c. $\mu(0)=0, \mu(t)>0$, crescente e continua
Posto $\tilde{N}(t) = N(\mu(t))$, $\tilde{N}$ è un processo di Poisson non omogeneo con fz. del vol. atteso $\lambda\mu(\cdot)$

DIM:

- Ogni incremento di $\tilde{N}$ è incremento di N
- Incrementi di $\tilde{N}$ relativi ad intervalli disg. sono incrementi di N relativi ad intervalli disg.

Poiché N soddisfa B) $\to$ $\tilde{N}$ soddisfa B') con fz. del valore atteso $\lambda\mu(\cdot)$ dim dei 3 pti

PROP

Sia $\tilde{N}$ un processo di Poisson non omogeneo con fz. del valore atteso $\lambda\mu(\cdot)$, t.c. $\lambda>0$ e $\lim_{t\to+\infty} \mu(t)=+\infty$. Posto $N(t) = \tilde{N}(\mu^{-1}(t))$, allora il processo N è un processo di Poisson λ

DIM:

- $\exists \mu^{-1}(t) : \mu'(t) \geq 0$
  - suriettiva: è def. su $I=[0,+\infty[$ e $\inf\mu=0$ e $\sup\mu=+\infty$
  - iniettiva: è crescente
- Ogni incremento di N è un incremento di $\tilde{N}$
- Incrementi N su intervalli disg. sono incrementi di $\tilde{N}$ su intervalli disg.

Poiché $\tilde{N}$ soddisfa B') $\to$ N soddisfa B) dim dei 3 pti

Si può passare da un processo di Poisson non omogeneo ad uno omogeneo mediante una trasformazione deterministica del tempo

Processi misture di Poissoniani

OBIETTIVO: Rimuovere l'indipendenza conservando la stazionarietà

a) $\{N(t) \mid \Lambda = x, t \geq 0\}$ processo di Poisson di intensità x
b) Assegna la legge di Λ

Siano E, H eventi logicamente dipendenti del processo.

1) Λ finito

$$Pr(E) = \sum Pr(\Lambda = x_i) Pr(E \mid \Lambda = x_i)$$
$$Pr(E \mid H) = \sum Pr(\Lambda = x_i \mid H) Pr(E \mid H \wedge \Lambda = x_i)$$
$$Pr(\Lambda = x_i \mid H) = \frac{Pr(\Lambda = x_i) Pr(H \mid \Lambda = x_i)}{\sum_j Pr(\Lambda = x_j) Pr(H \mid \Lambda = x_j)}$$

2) Λ continuo

$$Pr(E) = \int_0^{+\infty} Pr(E \mid \Lambda = x)\, dF_\Lambda(x)$$
$$Pr(E \mid H) = \int_0^{+\infty} Pr(E \mid H \wedge \Lambda = x)\, f_{\Lambda \mid H}(x)\, dx$$
$$f_{\Lambda \mid H}(x) = \frac{f_\Lambda(x) Pr(H \mid \Lambda = x)}{\int_0^{+\infty} Pr(H \mid \Lambda = x)\, dF_\Lambda(x)}$$

Processi misture di poissoniani sono ad INCREMENTI STAZIONARI

$$Pr(N(t) - N(s) = n) = \int_0^{+\infty} e^{-x(t-s)} \frac{[x(t-s)]^n}{n!}\, dF_\Lambda(x)$$

Esempio $\Lambda \sim \text{gamma}(\alpha, \rho)$

$$Pr(N(t) - N(s) = n) = \frac{\rho^\alpha (t-s)^n}{\Gamma(\alpha)\, n!} \int_0^{+\infty} \underbrace{x^{\alpha+n-1} e^{-x[\rho + (t-s)]}}_{\text{nucleo gamma}(\alpha+n,\, \rho+(t-s))} dx = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\, n!} \left(\frac{\rho}{\rho+(t-s)}\right)^\alpha \left(\frac{t-s}{\rho+(t-s)}\right)^n$$

$\hookrightarrow N(t) - N(s) \sim BN\left(\alpha, \frac{\rho}{\rho+(t-s)}\right)$

Processi misture di Poisson NON sono a INCREMENTI INDIPENDENTI

$$Pr(N(t) - N(s) = n \mid N(s) = m) = \int_0^{+\infty} Pr(N(t) - N(s) = n \mid N(s) = m \wedge \Lambda = x)\, dF_{\Lambda \mid N(s)=m}(x)$$
$$\overset{!}{=} \int_0^{+\infty} Pr(N(t) - N(s) = n \mid \Lambda = x)\, dF_{\Lambda \mid N(s)=m}(x)$$ dipende ancora da m

Sia $\{N(t), t \geq 0\}$ un processo mistura di poissoniani con misturante $\Lambda \sim F_\Lambda$ e $E[\Lambda] = \lambda$

$$E[N(t) \mid \Lambda = x] = xt$$
$$E[N(t)] = \int_0^{+\infty} E[N(t) \mid \Lambda = x]\, dF_\Lambda(x) = \int_0^{+\infty} x t\, dF_\Lambda(x) = \lambda t$$

$E[\Lambda] = \lambda$

TEORIA del RISCHIO

Monoperiodale → criterio dell'utilità attesa
Multiperiodale → criterio della probabilità di rovina

$R(t) = R + ct - S(t) \rightarrow \{R(t), t \geq 0\}$ processo di rischio

PROBABILITA' DI ROVINA

$T = \inf \{t \geq 0 : R(t) < 0\}$ T è un ente aleatorio $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$\omega \in \mathbb{P} \rightarrow T(\omega) = \inf\{t \geq 0 : R(t, \omega) < 0\} \begin{cases} \in \mathbb{R} & \{t \geq 0 : R(t) < 0\} \neq \emptyset \\ = +\infty & \{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \emptyset \end{cases}$

PROB. ASINTOTICA DI ROVINA

$\Psi(R) = \Pr(\vee_{t \geq 0}(R(t) < 0)) = \Pr(\vee_{t \geq 0}(R + ct - S(t) < 0))$ → $\Pr(T < +\infty)$

$\{S(t), t \geq 0\}$ processo del risarcimento cumulato $\rightarrow S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$

Dipende da:
- Processo d'arrivo dei sx. $\{N(t), t \geq 0\}$
- Processo dei risarcimenti per sx $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$

DISTRIBUZIONE COMPOSTA

$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$

- $\forall n > 0$, $Y_1 | N = n, \ldots, Y_n | N = n$ iid
- la fdr di $Y_i | N = n$, $i \leq n$ non dipende da n

$\Big\}$ F_Y non dip né da i né da n

F_Y fdr del risarcimento per un sx nell'ip. che il sx. si verifichi

X è assegnata se si assegnano
- distrib. di prob. di N, $\Pr(N = n)$
- la fdr F_Y

$E[X] = E[N] \cdot E[Y]$

$V[X] = E[N] V[Y] + V[N] E[Y]^2$

$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N = n) F_Y^{*(n)}(x)$

$m_X(t) = m_N(\log m_Y(t))$

Ipotesi probabilistiche del modello

1) $\{N(t), t \geq 0\}$ sia un processo di Pois (λ)
2) $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ t.c. $\forall n > 0$, $\forall H$ evt log. dip. dal proc. di arrivo dei sx che implichi che $1, \ldots, n$ verificati
   - $Y_1 | H, \ldots, Y_n | H$ iid
   - la legge $Y_i | H \rightarrow F_Y$ non dipende da i, n, H

F_Y fdr del risarcimento per un sx nel caso in cui il sx si verifichi

Conseguenze ipotesi

1) $S(t)=\sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$ ha distrib. Poisson composta $(\lambda t, F_Y)$

DIM: x la 1) $N(t)\sim P(\lambda t)$, x la 2) $Y_1|N(t)=n,\dots,Y_n|N(t)=n$ iid

2) $\{S(t), t\geq 0\}$ è ad incrementi stazionari

DIM: dim. completa da sl. 17.

- $Pr(S(t)-S(s)\leq x)=\sum_{m,n}^{0,+\infty} Pr(H(m,n))Pr(S(t)-S(s)\leq x\,|\,H(m,n))$
- $Pr(\sum_{h=m+1}^{m+n} Y_h\leq x\,|\,H(m,n))=F_Y^{*(n)}(x)$ $\hookrightarrow := Pr(N(s)=m)Pr(N(t)-N(s)=n)$
- $Pr(S(t)-S(s)\leq x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} Pr(N(s)=m)}_{=1} Pr(N(t)-N(s)=n)\,F_Y^{*(n)}(x)\right)$

  $\overset{!}{=}\sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N(t)-N(s)=n)\,F_Y^{*(n)}(x)$ dipende da $t-s$ e non da t,s

3) $\{S(t), t\geq 0\}$ è ad incrementi indipendenti no dim.

$\rightarrow$ Il processo $\{S(t), t\geq 0\}$ è un processo di Poisson composto

Coefficiente di aggiustamento

OBIETTIVO: ottenere una limitazione superiore per la prob. di rovina

Ulteriori ipotesi:

a) Principio della speranza matematica $P(t)=\lambda\mu(1+\theta)t$

b) $\exists I_0$ t.c. $m_Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty}\,dF_Y(y)=E[e^{tY}]\in\mathbb{R}$ $\forall t\in I_0$

Sia $[0,\gamma[\,\subset\mathbb{R}_+$ con $\gamma=\sup\{t>0: \underset{\in\mathbb{R}}{m_Y(t)}<+\infty\}$

c) $\lim_{t\to\gamma^-}[\lambda m_Y(t)-(\lambda+ct)]=+\infty$ Elimino le distrib. t.c. $m_Y(t)$ è finito per $t\to\gamma^-$

PROP: $\exists!\,\alpha>0$ t.c. $\lambda+c\alpha=\lambda m_Y(\alpha)$ α è il coeff. di aggiustamento

TEOR: Disuguaglianza di Lundberg

$\Psi(R)\leq e^{-\alpha R}$

DIM:

$m_Y(0)=1$, $g_1(t)=\lambda+ct=\lambda+\lambda\mu(1+\theta)t$

$g_2(t)=\lambda m_Y(t)$

exp., monotonia e lin. integ. $\rightarrow$ segue dalla convex.

g_2: $g_2(0)=\lambda$, $g_2'(0)=\lambda\mu>0$, strett. convessa, è continua

$g(t)=g_2(t)-g_1(t)=\lambda m_Y(t)-(\lambda+ct)$

$g(0)=0$, $g'(0)=\lambda\mu-c<0\rightarrow\exists I_0^+: g(t)<g(0)$, g è strett. convessa e continua,

$\lim_{t\to\gamma^-} g(t)=\lim_{t\to\gamma^-}[\lambda m_Y(t)-(\lambda+ct)]=+\infty$

$\rightarrow\exists!\,\alpha>0$ t.c. $g(\alpha)=0$, dal Th. di Connessione $g<0$ in I_0^+ e $g>0$ in I_{γ^-}

$\hookrightarrow$ segue dalla convex.

TEOR: $\psi(R) = \dfrac{e^{-\lambda R}}{E[e^{-\lambda R(T)} | T < +\infty]}$ con $T = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$

Se $\lambda \to 0 \to \psi(R) \to 1$

$\lambda \propto \theta, F_Y$

Applicazioni del modello

1) lvl di detezione del cap. R t.c. $\psi(R) \le p_0$

$e^{-\lambda R} \le p_0$ sse $R \ge -\dfrac{\log p_0}{\lambda}$

2) valore per il coeff. di caricamento dei premi

$e^{-\lambda R} \le p_0$ sse $\lambda \geq -\dfrac{\log p_0}{R} \to 1 + \mu(1+\theta)\left(-\dfrac{\log p_0}{R}\right) = m_Y\left(-\dfrac{\log p_0}{R}\right)$ sse $\theta = \dfrac{R\left[m_Y\left(-\frac{\log p_0}{R}\right) - 1\right]}{-\mu \log p_0} - 1$

3) RIASSICURAZIONE

$S_{ced}(t) = \sum_h \gamma(Y_h)$ $\quad S_{riass}(t) = \sum (Y_h - \gamma(Y_h))$

- Quota share $\quad \gamma(Y_h) = \alpha Y_h \quad Y_h - \gamma(Y_h) = (1-\alpha) Y_h$
- Excess of loss $\quad \gamma(Y_h) = \min(Y_h, L) \quad Y_h - \gamma(Y_h) = \max(0, Y_h - L)$

Processo di rischio per il portafoglio coperto dall'ass.ne

$\{S_{ced}(t), t \geq 0\}$ è un processo Poisson composto $(\lambda, F_{\gamma(Y)})$

$E[\gamma(Y)] = \int_0^{+\infty} \gamma(y)\, dF_Y(y)$ $\quad m_{\gamma(Y)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma(y)t}\, dF_Y(y)$ $\quad E[S_{ced}(t) - S_{ced}(s)] = \lambda(t-s) E[\gamma(Y)]$

$P_r(t) = c_r t \quad c_r = (1+\theta_r) E[S_{riass}(t+1) - S_{riass}(t)] = (1+\theta_r) E[Y - \gamma(Y)]$

$R_{ced}(t) = R + (c - c_r)t - S_{ced}(t)$ $\quad (c-c_r)(t-s) > E[S_{ced}(t) - S_{ced}(s)]$ sse $c - c_r > \lambda E[\gamma(Y)]$

$\lambda_r: \lambda + (c - c_r)t = \lambda m_{\gamma(Y)}(t)$

Modello uniperiodale, individuale della Teoria del Rischio

Rischi analoghi ed indipendenti, $\sim$ iid

$P_i = P \; \forall i$

$G = \sum G_i$ guadagno aleatorio, $G_i = P_i - X_i$ con $P_i = E[X_i] + m_i$

$E[G] = \sum G_i = m \quad Var(G) = \sum Var(G_i) = \sigma^2$

Prob. di rovina nell'esercizio: $P_r(R + P - X < 0) = P_r(G < -R)$

$P_r(G < -R) = P_r\Big(\underbrace{\frac{G-m}{\sigma}}_{\sim^{TLC} N(0,1)} < -\frac{R+m}{\sigma}\Big) \cong \phi\left(-\frac{R+m}{\sigma}\right)$

$I = \dfrac{R+m}{\sigma}$ indice di stabilità relativa del portafoglio

$\to$ Posso ridurla con la varianza $Var(G_{ced}) = \underbrace{\alpha^2}_{\to\, \alpha < 1} Var(G) < Var(G)$

PERSONALIZZAZIONE del PREMIO BASATA sull' ESPERIENZA

Premio a priori o collettivo $\xrightarrow[\text{Storia individuale di sx.}]{}$ Premio a posteriori o basato sull'exp

$E[Y_{T+1}]$ $\qquad\qquad$ $E[Y_{T+1}|U=u]=\mu_{T+1}(u)$

$$Var[Y]=E[Y^2]-E[Y]^2=E[Var[Y|U]]-Var[E[Y|U]]$$

Consideriamo una collettività di rischi "analoghi", omogenei rispetto a caratteristiche osservabili a priori, ed "indipendenti". Nella collettività vi sia eterogeneità residua.

Approccio Bayesiano

Ipotesi:

- $Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots$ s.i. e di legge assegnata $\forall u$
- Assegnata la legge di $U_i \rightarrow$ f.z. di struttura

Legge del processo $\{Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ è la legge mistura $Pr(A)=\int Pr(A|U_i=u)\,dF_{U_i}(u)$

I processi $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ siano

- identicamente distribuiti
  - $\{Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots\}$ id
  - U_i id
- s.i. $\forall i$ sx di un ass.to i non influenzano valutazione su ass.to j

Premio individuale in T+1 aleatorio $E[Y_{T+1}|U]=\mu_{T+1}(U)$ $\qquad$ $E[E[Y_{T+1}|U]]=E[Y_{T+1}]$

PREMIO BAYESIANO

$$E[Y_{T+1}|H_T]=\int E[Y_{T+1}|H_T,U=u]\,dF_{U|H_T}(u)=\int E[Y_{T+1}|U=u]\,dF_{U|H_T}(u)=\int\mu_{T+1}(u)\,dF_{U|H_T}(u)=E[\mu_{T+1}(U)|H_T]$$

$$f_{U|H_T}(u)=\frac{f_U(u)Pr(H_T|U=u)}{\int Pr(H_T|U=u)f_U(u)\,du}$$

Modello Poisson-gamma per N_{it}

a) $\{U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$ iid $\forall i$

b) fix i:
- b1) $N_{i1}|U_i=u, N_{i2}|U_i=u, \dots$ s.i. $\forall u \in U$
- b2) $N_{it}|U_i=u \sim P(\lambda u)$
- b3) $U_i \sim Gamma(\alpha,\alpha)$

$\{N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$ processo Poisson-gamma(λ,α)

$E[U_i]=1 \quad Var[U_i]=\frac{1}{\alpha} \quad E[N_{it}|U_i=u]=\lambda u$ → Premio individuale

$E[N_{it}]=E[E[N_{it}|U_i]]=E[\lambda U_i]=\lambda$ → Premio a priori o collettivo

$Var[N_{it}]=E[Var[N_{it}|U]]+Var[E[N_{it}|U]]=E[\lambda U_i]+Var[\lambda U_i]=\lambda+\lambda^2\alpha^{-1}$

Il processo Poisson-Gamma è SCAMBIABILE

$$Pr(N_1=n_1,\dots,N_T=n_T)=\frac{\Gamma(\alpha+\sum^T n_t)}{\Gamma(\alpha)\prod^T n_t!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda T}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda T}\right)^{\sum^T n_t}$$

Posso sostituire $(N_1,\dots,N_T)$ con $(N_{\pi(1)},\dots,N_{\pi(T)})$

Aggiornamento Bayesiano

PREMIO A POSTERIORI: $E[N_{T+1}|H_T]=E[\mu_{T+1}(U)|H_T]=E[\lambda U|H_T]=\lambda E[U|H_T]$

$$f_{U|H_T}(u)=\frac{f_U(u)\,Pr(H_T|U=u)}{Pr(H_T)}\propto u^{\alpha+\sum^T n_t}e^{-u(\alpha+\lambda T)}\sim \text{gamma}(\alpha+\textstyle\sum^T n_t,\alpha+\lambda T)$$

$U\sim \text{gamma}(\alpha,\alpha) \longrightarrow U|H_T\sim \text{gamma}(\alpha+\sum^T n_t,\alpha+\lambda T)$

$$E[U|H_T]=\frac{\alpha+\sum^T n_t}{\alpha+\lambda T}\longrightarrow E[N_{T+1}|H_T]=\lambda\frac{\alpha}{\alpha+\lambda T}+\frac{\sum n_t}{T}\,\frac{\lambda T}{\alpha+\lambda T}$$

↳ $c_{T+1}(H_T)=\frac{E[N_{T+1}|H_T]}{E[N_{T+1}]}$ Coefficiente di aggiornamento o revisione bayesiana

Per la stima dei parametri: approccio bayesiano empirico, α e λ sono certi ma non noti

La famiglia gamma è coniugata naturale della Poisson

Approccio della Teoria della credibilità bayesiana

FORMULA DI CREDIBILITÀ: $P^{cred}_{i,T+1}(H_T)=(1-z_{iT})P_{T+1}+z_{iT}\bar{y}_{iT}$

Credibilità bayesiana

- $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2},\dots\}$ s.i. $\forall i$
- $\{Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u,\dots\}$ s.i. $\forall u$

OBIETTIVO: ottenere uno stimatore di $\mu_{i,T+1}(U_i)=E[Y_{i,T+1}|U_i]$

$Q_i(a_{i0},\dots,a_{iT})=E[(\mu_{i,T+1}(U_i)-a_{i0}-\sum^T a_{it}Y_{it})^2]$ → derivo e pongo $=0$ per cercare i minimi

$$\begin{cases} E[Y_{T+1}]=a_0+\sum^T a_t E[Y_t] \\ Cov(Y_h,Y_{T+1})=\sum^T a_t Cov(Y_h,Y_t)\end{cases}$$

Ammette una e una sola soluzione se $var(Y)$ è invertibile

$\tilde{\mu}^{cred}_{T+1}(U) = \alpha_0^* + \sum^T \alpha_t^* Y_t$ stimatore di credibilità lineare del premio individuale in T+1

$P^{cred}_{T+1}(H_T) = \alpha_0^* + \sum^T \alpha_t^* Y_t$ premio di credibilità in T+1 → Non serve specificare la distrib.

Modello di credibilità di Bühlmann

- $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ iid $\forall i$ → Prima non erano iid
- $Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots$ iid $\forall u$, momenti primi finiti

$\mu(u) = E[Y_{it}|U_i=u]$ $\quad v(u) = Var(Y_{it}|U_i=u)$

$\mu = E[\mu(U)] = E[Y_{it}]$

$\left.\begin{array}{l} v = E[v(U)] = E[Var[Y_{it}|U_i=u]] \\ a = Var[\mu(U)] = Var[E[Y_{it}|U_i=u]] \end{array}\right\} Var(Y_{it}) = a+v$

Parametri di struttura del modello

$Cov(Y_{ih}, Y_{it}) = a$

$\begin{cases} E[Y_{i,T+1}] = \alpha_0 + \sum \alpha_t E[Y_{it}] \\ Cov(Y_h, Y_{T+1}) = \sum \alpha_t Cov(Y_h, Y_t) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \mu = \alpha_0 + \mu \sum \alpha_t \\ a = \alpha_h(v+a) + \sum \alpha_t a \end{cases}$ $\quad \alpha_0^* = \mu \frac{k}{k+T}$ $\quad \alpha_t^* = \frac{1}{T+k}$ → Non dip. da t

$\tilde{\mu}_{T+1}(U_i)^{cred} = \mu \frac{k}{T+k} + \frac{1}{T+k} \sum^T Y_{it} = (1-z_T)\mu + z_T \bar{Y}_{iT}$ Stimatore di credibilità lineare del Premio individuale

$P^{cred}_{i,T+1}(H_{iT}) = (1-z_T)\mu + z_T \frac{\sum y_{it}}{T}$

Stime dei parametri:

$\tilde{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum^T Y_{it}$ $\quad \tilde{\mu} = \frac{1}{r}\sum^r \tilde{\mu}_i$ $\quad \tilde{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1}\sum^T (Y_{it} - \tilde{\mu}_i)^2$ $\quad \tilde{v} = \frac{1}{r}\sum^r \tilde{\sigma}_i^2$

$Var(\tilde{\mu}_i) = \frac{1}{T} v + a$ → $\tilde{a} = \frac{1}{r-1}\sum^r (\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu})^2 - \frac{1}{T}\tilde{v}$

Modello di credibilità di Bühlmann-Strauß

vs. Buhlmann: uguale valore atteso ma non uguale distribuzione

- $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ s.i. $\forall i$
- $U_1, U_2, \dots$ i.d.
- $Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots$ s.i. con $E[Y_{it}|U_i=u] = \mu(u)$ e $Var[Y_{it}|U_i=u] = \frac{v(u)}{m_{it}}$

$\mu = E[Y_{it}]$

$v = m_{it} E[var[Y_{it}|U_i]]$ $\quad Var(Y_{it}) = E[Var(Y_{it}|U_i)] + Var[E[Y_{it}|U_i]] = \frac{v}{m_{it}} + a$

$a = Var[E[Y_{it}|U_i]] = Cov(Y_{ih}, Y_{it})$

$$\begin{cases} E[Y_{i,T+1}] = a_0 + \sum a_t E[Y_{it}] \\ Cov[Y_{i,T+1}, Y_{i,h}] = \sum a_t Cov(Y_{i,t}, Y_{i,h}) \end{cases} \longrightarrow \quad a_{i0}^* = \mu \frac{k}{m_{i\cdot}+k} \qquad a_{it}^* = \frac{m_{it}}{m_{i\cdot}+k}$$

Stimatore di credibilità lineare del premio individuale in T+1

$$\widetilde{\mu}_{i,T+1}^{cred}(U_i) = a_{i0}^* + \sum a_{it}^* Y_{it} = \mu \frac{k}{m_{i\cdot}+k} + \sum^T \frac{m_{it}}{m_{i\cdot}+k} Y_{it} = (1-Z_{iT})\mu + Z_{iT}\overline{Y}_{iT}$$

$$P_{i,T+1}^{cred}(H_T) = (1-Z_{iT})\mu + Z_{iT} \sum \frac{m_{it}}{m_{i\cdot}} y_{it}$$

Sistemi Bonus-Malus

$(n_{t-1}, C_t) \to C_t$ $\qquad P_{t,k,j}^{BM} = P_{t,k} \cdot \gamma_k \cdot \pi_j$ (Premio base; Premio di riferimento)

Fix. la classe j $\qquad X_t = \sum_{h=1}^{N_t} Y_{th}$ $\qquad C_t$ $\qquad H_T = \bigwedge_{t=1,\dots,T;\ h=1,\dots,n_t} (Y_{th} \in A_{th})$

- indip. stoc. di $\{N_t, t=1,2,\dots\}$ da $\{Y_{t1}, Y_{t2}, \dots\}$ $\quad (N_{T+1} | N_1=n_1, \dots, N_T=n_T) =_d (N_{T+1} | N_1=n_1, \dots, N_T=n_T, H_T)$
- X_t distrib. composta $E[X_t] = E[N_t]E[Y_t]$
- iid $\forall i$

C_t dipende da $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ $\qquad P_r(C_t=j)$ $\qquad b_t = \sum_j^S \pi_j P_r(C_t=j)$

$E[X_1] = \sum_j^S P_1^{(e)} \pi_j P_r(C_1=j) = P_1 b_1$

Se le distrib. X_t, N_t non variano si ha equilibrio tecnico solo se $b_1 = b_t$

PREMIO D'EQUILIBRIO: $\sum^S P_t^{(e)} \pi_j P_r(C_t=j) = E[X_t]$

Catene markoviane finite

Δ PROCESSO MARKOVIANO FINITO se $P_r(C_{t+1}=j | C_t=i, K_{t-1}) = P_r(C_{t+1}=j | C_t=i)$ $\forall i,j,t$

OMOGENEO o CATENA MARKOVIANA se $P_r(C_{t+1}=j | C_t=i) = p_{ij}$ non dipendono da t

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1S} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{S1} & \cdots & p_{SS} \end{bmatrix}$$

→ Stati del sistema

→ Matrice delle probabilità condizionate di transizione

$a_t = (a_t(1), \dots, a_t(S)) = (P_r(C_t=1), \dots, P_r(C_t=S))$

$a_2(j) = P_r(C_2=j) = \sum_i^S P_r(C_1=i) P_r(C_2=j | C_1=i) = \sum_i^S a_1(i) p_{ij} \longrightarrow a_2 = a_1 \cdot P$

$a_t = a_{t-1} \cdot P = a_1 \cdot P^{(t-1)}$

$P_{ij}^{(\tau)}$ matrice delle prob. condiz. di transizione $(p_{ij}^{(\tau)})$ di passare dallo stato i allo stato j in τ passi

Δ Una catena markoviana è REGOLARE se $\exists t_0$ t.c. $\forall t \geq t_0 \; p_{ij}^{(t)} > 0$

TEOR. di MARKOV

In una catena markoviana regolare $\forall i,j \; \exists \lim_{t \to +\infty} p_{ij}^{(t)} = v_j > 0$ non dip. da i

$\rightarrow P^{(t)}$ converge, al divergere di t a $V = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_J \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 & \dots & v_J \end{bmatrix}$

Il processo ammette una distrib. asintotica indip. dalla distrib. iniziale

$a_t = a_1 P^{(t-1)}$ $\quad \lim_{t \to +\infty} a_t = a_1 \lim P^{(t-1)} = a_1 V = v \quad \rightarrow \quad a_t = a_{t-1} \cdot P \xrightarrow{t \to +\infty} v = vP$

$$\begin{cases} v(P - I) = 0 \\ \sum v_j = 1 \end{cases} \qquad a_1 = v \rightarrow \text{stazionarietà}$$

Modello (a)

- $N_1 | C_1 = j, N_2 | C_1 = j, \dots$ iid $\forall j$
- $Pr(N_t = n | C_1 = j) = p_n$ indipendenti da j, assegnate
- $Pr(C_1 = j)$ assegnate

PROP. 1

$Pr(N_t = n | K_t) = p_n \qquad \forall K_t = (C_1 = j_1, \dots, C_t = j_t) \neq \emptyset$

DIM:

a 2 a 2 incompatibili

$K_t = V_{H_{t-1} \to K_t} H_{t-1} \qquad H_{t-1} = (C_1 = j_1, N_1 = n_1, \dots, N_{t-1} = n_{t-1}) \qquad K_t$ log. dip. da $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$

$Pr(N_t = n | K_t) = \sum_{H_{t-1} \to K_t} Pr(H_{t-1} | K_t) \, Pr(N_t = n | H_{t-1}) = p_n$ $\;$ 1 $\;$ $p_n \rightarrow$ per indip. cond. e seconda ip.

PROP. 2

$\{C_1, C_2, \dots\}$ è una catena markoviana

DIM:

Provo che $Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = Pr(C_{t+1} = j | C_t = i) = p_{ij}$

$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = \sum_n Pr(N_t = n | C_t = i, K_{t-1}) \cdot Pr(C_{t+1} = j | N_t = n, C_t = i, K_{t-1})$

$\stackrel{!}{=} \lambda(i,j) \rightsquigarrow \forall K_{t-1}$ $\quad p_n \qquad$ 0 o 1 è possibile ovvero il salto di classe con n sx.

$\lambda(i,j) \rightarrow$ lo posso portare fuori $\qquad$ 1

$Pr(C_{t+1} = j | C_t = i) = \sum_{K_{t-1}} Pr(K_{t-1} | C_t = i) \, Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1}) = \lambda(i,j) \left(\sum_{K_{t-1}} Pr(K_{t-1} | C_t = i) \right)$

$\stackrel{!}{=} Pr(C_{t+1} = j | C_t = i, K_{t-1})$ cvd

Modello b)

- $N_1 | U=u, C_1=j, N_2 | U=u, C_1=j, \dots$ iid $F_{j,u}$
- $N_t | U=u, C_1=j \sim Pois(\lambda_j u)$ λ_j assegnati
- $U | C_1=j \sim gamma(\alpha,\alpha)$ α assegnato
- C_1 distrib. assegnata

$$\mathcal{L}(N_t | U=u, C_1=j) = \mathcal{L}(N_t | C_1=j)) \underset{\sim P(\lambda_j u)}{} \mathcal{L}(U=u | C_1=j) \underset{\sim gamma(\alpha,\alpha)}{} \rightarrow \{N_1 | C_1=j, N_2 | C_1=j, \dots\} \text{ Poisson-gamma}(\lambda_j, \alpha)$$

$\{N_1, N_2, \dots\}$ mistura di processi Poisson-gamma con misturante la distrib. di C_1

$$N_t | C_1=j \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_j}\right) \qquad E[N_t | C_1=j] = \lambda_j \qquad Var[N_t | C_1=j] = \lambda_j + \alpha^{-1}\lambda_j^2$$

$\{N_1 | C_1=j, N_2 | C_1=j, \dots\}$ n.a. non sono s.i., il processo è scambiabile

PREDICTIVE ACCURACY $E[(E[X_t | C_t] - \pi_{C_t} P_t)^2]$

// manca la parte su costruzione di scale di coeff. di premio

MISURE DI RISCHIO

Δ INVERSA GENERALIZZATA $\quad F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} \qquad p \in [0,1]$

1) $p = 0 \rightarrow A_0 = \mathbb{R} \rightarrow F^{\leftarrow}(0) = \inf \mathbb{R} = -\infty$

$p = 1$
- se $A_1 = \emptyset$ $(F(x) < 1 \; \forall x) \rightarrow F^{\leftarrow}(1) = \inf \emptyset = +\infty$
- se $A_1 \neq \emptyset$ Provo che A_1 è inferior. lim. $(\exists x' \in \mathbb{R} : x' \leq x \; \forall x \in A_1)$

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ sse $\forall I_0 \; \exists I_{-\infty} : \forall x \in I_{-\infty} \Rightarrow F(x) \in I_0$. Fix. $I_0 =]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $\varepsilon < 1$

Sia $x' \in I_{-\infty} \rightarrow F(x') \in I_0 \rightarrow F(x') < \varepsilon < 1 = F(x) \; \forall x \in A_1 \rightarrow x' < x \; \forall x \in A_1$

$F^{\leftarrow}(1) = \inf A_1 \in \mathbb{R}$

$p \in]0,1[$ $\quad A_p$ è non vuoto e inf. limitato

2) A_p è un intervallo superiormente illimitato
- Se $p = 0$, $A_0 \in \mathbb{R}$
- Se $p \in]0,1[$ o $p = 1$ $\quad \inf A_p = F^{\leftarrow}(p) \triangleq \lambda$. Provo che $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $x > \lambda \Rightarrow x \in A_p$

$\exists x' < x : x' \in A_p$

$F(x') \leq F(x) \quad F(x') \geq p \rightarrow F(x) > p \rightarrow x \in A_p$

3) Si $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < F(x) < 1\}$ e $F_{|B}$ strett. cresc. Allore $F_{|B} : B \rightarrow F_{|B}(B) = F(B)$ è invertibile

Sia $p \in F(B)$, allore $\exists F^{-1}(p) \in B$.

Provo che $F^{-1}(p) = F^{\leftarrow}(p)$; verifico che $A_p = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq F^{-1}(p)\} = A$

- $A \subset A_p \rightarrow$ Sia $x \in A \rightarrow x \geq F^{-1}(p) \rightarrow F(x) \geq F(F^{-1}(p)) = p \rightarrow x \in A_p$
- $A_p \subset A \rightarrow$ Sia $x \in A_p \rightarrow F(x) \geq p$
  - Se $x \in B \rightarrow F(x) \in F(B)$. Allora $F(x) \geq p \rightarrow F^{-1}(F(x)) \geq F^{-1}(p) \rightarrow x \geq F^{-1}(p)$
  - Se $x \notin B \rightarrow F(x) = 1 > p$. Essendo F monotona non decr. $\rightarrow x > F^{-1}(p)$
- Se F è invertibile in $]0,1[\rightarrow F^{\leftarrow} = F^{-1}$, dove F^{-1} è definita
- Se F è continua in $\mathbb{R}$, strett. cresc. in $]0,1[$, $\rightarrow F^{\leftarrow}(p) = F^{\leftarrow}(p) \; \forall p \in]0,1[$

4) Sia F costante a tratti con pti di disc. $x_1 < x_2 < \ldots \rightarrow \exists! \, i$ t.c. $p \in]F(x_{i-1}), F(x_i)]$

$A_p = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq x_i\} \qquad F^{\leftarrow}(p) = \inf A_i = x_i$

$F^{\leftarrow}(p) = x_i$ sse $F(x_{i-1}) < p \leq F(x_i)$

LEMMA

I) a) $F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p \quad \forall p \in]0,1[$ o $p=1$ se $A_1 \neq \emptyset$

b) $F^{\leftarrow}(F(x)) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II) $F^{\leftarrow}$ è monotona non decrescente

III) $F(x) \geq p$ sse $x \geq F^{\leftarrow}(p)$

DIM:

a) $\lambda = F^{\leftarrow}(p)$. X continuità a dx di F $\lim_{x \to \lambda^+} F(x) = F(\lambda) \to$ Restrizione di F a $\{x \in \mathbb{R} : x > \lambda\}$

$x > \lambda \to x \in A_p$ $(F(x) \geq p \ \forall x \in A_p)$ $\lim_{x \to \lambda^+} F(x) \geq p \qquad F(\lambda) = F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$

TEOR: Probability integral transform

$X' = F^{\leftarrow}(U)$ ha fdr F

DIM:

$f_U(u) = 1 \qquad F_U(u) = u$ con $0 \leq u < 1$

$F_{X'}(x) = \Pr(F^{\leftarrow}(U) \leq x) = \Pr(U \leq F(x)) = F_U(F(x)) = F(x)$

TEOR:

$E[X] = \int_0^{+\infty} x \, dF_X(x) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) \, dx = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x) dx$

DIM:

$\exists$ finito $\lim_{c \to +\infty} \int_0^c x \, dF_X(x) = E[X]$. $\int_0^c x \, dF_X(x) = c F_X(c) - \int_0^c F_X(x) dx = \underbrace{c(1 - F_X(c))}_{\text{TDC} \to 0} + \int_0^c (1 - F_X(x)) dx$

Una MISURA di RISCHIO è un funzionale $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$\rho(x)$ è il minimo ammontare di capitale per rendere accettabile la posizione

Ogni principio del premio è una particolare misura di rischio

Una misura di rischio può dipendere dal rischio solo tramite la distribuzione di probabilità

$X =^d Y \to \rho(x) = \rho(Y)$

Misure coerenti di rischio

I) $\rho(X+c) = \rho(X)+c$ TRASLATIVITÀ

II) $\rho(a X) = a\,\rho(X)$ POSITIVA OMOGENEITÀ

III) $\rho(X+Y) \le \rho(X)+\rho(Y)$ SUB-ADDITIVITÀ

IV) $X \le Y \to \rho(X) \le \rho(Y)$ MONOTONIA

Misure di Rischio del VaR

Δ VALUE-AT-RISK di X al livello p $\quad VaR[X;p] = F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \ge p\}$

Δ Dato un insieme di rischi $\mathcal{X}$ e $p \in (0,1)$ è detto MISURA DI RISCHIO DEL VAR a livello p, il funzionale $\rho_p(\cdot) = VaR[\cdot;p] : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$

$$P_r(X > VaR[X;p]) = 1 - F_X(F_X^{-1}(p)) \le 1-p$$

Proprietà

a) NO-RIPOFF: $\quad X \le M \quad VaR[X;p] \le M$ (Certo) $\qquad X \le M \to F_X(M) = 1 > p$

b) TRASLATIVITÀ: $VaR[X+c;p] = VaR[X;p]+c \qquad F_{X+c}^{-1}(p) \le x$ sse $p \le F_X(x-c)$

c) POSITIVA OMOGENEITÀ: $VaR[aX;p] = a\,VaR[X;p]$

d) MONOTONIA: $X \le Y \to VaR[X;p] \le VaR[Y;p] \qquad X \le Y \to F_X(x) \ge F_Y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, $A_p^{(Y)} \subset A_p^{(X)} \to \inf A_p^{(Y)} \ge \inf A_p^{(X)}$

e) NO CARICAMENTI INGIUSTIFICATI: se X è certo o q.c. : $X = \bar{x} \to VaR[X;p] = \bar{x} \quad \forall p$

Proprietà non soddisfatte

1) ρ introduce un caricamento di sicurezza $\quad \rho(X) > E[X] \qquad$ Se $p < p^* \to VaR[X;p] < E[X]$, $\; p^* = F_X(E[X])$

Principio del percentile: $\Pi(X) = \inf\{P : F_X(P) \ge 1-\varepsilon\} = VaR[X; 1-\varepsilon]$ con ε piccolo

2) Non soddisfa la proprietà di sub-additività

DOMINANZA STOCASTICA

$F_X(x) \ge F_Y(x)$ sse $P_r(X > x) \le P_r(Y > x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad Y$ è più rischioso di X

Δ $X \le_{sd} Y$ sse $\forall t \in \mathbb{R}$ $F_X(t) \ge F_Y(t)$ sse $S_X(t) \le S_Y(t)$

$\le \subset \le_{sd}$: $\forall X, Y \in \mathcal{X}$, $X \le Y \to X \le_{sd} Y \quad$ Infatti, $\forall t \in \mathbb{R}$ $Y(\omega) \le t \to X(\omega) \le t \ \forall \omega \in \Omega$

$\to P_r(Y \le t) \le Prob(X \le t)$ sse $F_Y(t) \le F_X(t)$ sse $X \le_{sd} Y$

TEOR:

Il VaR è monotono rispetto a $\leq_{sd}$. $\forall X,Y \in \mathcal{X},\ X \leq_{sd} Y \to VaR[X;p] \leq VaR[Y;p]$

Infatti $VaR[X;p] = \inf\{x : F_X(x) \geq p\} = A_p$ $\quad F_X(x) \geq F_Y(x)$. Quindi $F_Y(x) \geq p \to F_X(x) \geq p$

$A_p^Y \subset A_p^X \longrightarrow \inf A_p^Y \geq \inf A_p^X$

Capitale di rischio basato sul VaR

$Pr(\underbrace{X > R+P}_{\text{Evt. rovina}}) \leq 1-p$ $\quad$ Requisito di solvibilità

$\hookrightarrow$ sse $1 - F_X(R+P) \leq 1-p$ $\quad$ sse $F_X(R+P) \geq p$

$R+P = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\} = VaR[X;p]$

Capitale di rischio basato sul VaR $\quad R = VaR[X;p] - P$

Effetto della riassicurazione sul requisito di solvibilità

$R' + P - P_r = VaR[\Gamma;p] \leq VaR[X;p]$

In Quota-share $\quad R' < R$ se $P_r < (1-a)P$

VaR usato per valutare passività con "best estimate", introducendo market value margin o risk adjust

$MR = VaR[X;p] - E[X]$

Misure di rischio basate sul VaR

$CTE[X;p] = E[X \mid X > VaR[X;p]]$

$e_X(VaR[X;p]) = E[X - VaR[X;p] \mid X > VaR[X;p]]$

$ES[VaR[X;p]] = E[(X - VaR[X;p])_+]$

$TVaR[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;u]\,du$

Relazioni:

$ES[X;p] = Pr(X > VaR[X;p])\, e_X(VaR[X;p])$

$e_X(VaR[X;p]) = \frac{ES[VaR[X;p]]}{\bar{F}_X(VaR[X;p])}$

$TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \frac{ES[X;p]}{1-p}$

VALUTAZIONI ATTUARIALI MEDIANTE SIMULAZIONE STOCASTICA

Sia $X = \sum^N Y_i = \varphi(N, Y_1, Y_2, \dots)$ con distrib. composta assegnata.
Formalmente $F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Pr(N=n) F_Y^{*(n)}(x)$ ma F_X non sempre ottenibile

Se $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ con assegnata $F_{X_1,\dots,X_n}$, per simulare Y si può simulare $(X_1,\dots,X_n)$ con $(X_1',\dots,X_n') =^d (X_1,\dots,X_n)$ e porre $Y' = (X_1',\dots,X_n')$. Essendo $Y' =^d Y$ allore Y' simula Y

Se $\underline{X}_1', \dots, \underline{X}_n'$ sono osservabili e $\underline{x}_1', \dots, \underline{x}_n'$ i valori oss.ti, allora $y_i' = \varphi(\underline{X}_i')$ è il campione oss.to della distrib. Y.

- Stima di $E[Y]$ $\quad \frac{1}{m} \sum y_i$
- Stima di $Var[Y]$ $\quad \frac{1}{m-1} \sum (y_i - \bar{y}')^2$
- Stima di $F_m(y) = \dfrac{card\{i;\ y_i \le y\}}{m}$

Simulazione di un n.a.

$U \sim Unif(0,1) \rightarrow X' = F_X^{\leftarrow}(U)$ è t.c. $X' =^d X$. X' simula X

I) Se X è discreto $\quad X' = x_i$ sse $F_X(x_{i-1}) < U < F_X(x_i) \quad x' = F_X^{\leftarrow}(u) = x_i$

II) Se F_X è strett. cresc. e continua. $\exists F_X^{-1}$ e $X' = F_X^{-1}(U)$ simula X

III) In generale $X' = F_X^{\leftarrow}(U)$ simula $X \quad x' = F_X^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \ge u\}$

Simulazione di un vettore aleatorio o di un processo stocastico a parametro discreto

Sia $(X_1,\dots,X_n)$ con fdr congiunta $F_{X_1,\dots,X_n}$ o $\{X_1, X_2, \dots\}$ con legge $\mathcal{F}$.

1) $X_1, X_2, \dots$ s.i. $\quad F_{X_1}^{\leftarrow}(U_1), F_{X_2}^{\leftarrow}(U_2), \dots \quad x_1' = F_{X_1}^{\leftarrow}(u_1), x_2' = F_{X_2}^{\leftarrow}(u_2), \dots$

2) $X_1, X_2, \dots$ no s.i. $\quad x_1' = F_{X_1}^{\leftarrow}(u_1), x_2' = F_{X_2|X_1=x_1'}^{\leftarrow}(u_2), F_{X_3|X_1=x_1', X_2=x_2'}^{\leftarrow}(u_3), \dots$ Simulazione in modo sequenziale

Algoritmi per la simulazione

$X \sim Exp(\rho) \quad F_X(x) = 1 - e^{-\rho x}$ strett. cresc. $\rightarrow F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\rho}\log(1-u)$

$X' = -\frac{1}{\rho}\log U$

$X \sim Gamma(n, \rho) \quad X' = \sum_i^n X_i' = \sum^n -\frac{1}{\rho}\log U_i$

$N \sim P(\lambda) \rightarrow W_n \sim Exp(\lambda) \rightarrow W_1' = -\frac{1}{\lambda}\log U_1,\ W_2' = -\frac{1}{\lambda}\log U_2, \dots$

$N' = 0$ sse $U_1 < e^{-\lambda} \quad N' = n$ sse $\prod_{i=1}^{n+1} U_i < e^{-\lambda} < \prod_{i=1}^{n} U_i$

RISERVE TECNICHE

- RISERVA PREMI
  - Riserve per frazioni di premi
    - Pro rata temporis
    - Metodo forfettario 35%
  - Riserve per rischi in corso
    - Criterio analitico
    - Calcolo semplificato CR

- RISERVA SX.
  - IBNR
  - RBNS
  - RBNES
  - Spese di liquidazione ALAE, ULAE

Valutazione tramite
  - Metodo dell'inventario case reserve
  - Metodi statistico-attuariali

Processo di smontamento della riserva $R_{s,\theta}(\theta+k)$

Metodi statistico-attuariali per la valutazione della riserva sx.

Nei modelli stocastici $\{Y_{i,j},\ i,j=0,\dots,t\}$ è trattato come un processo di n.a., quindi è formulata un'ipotesi probabilistica

I metodi deterministici permettono di ottenere una stima puntuale, best estimate, dei pagamenti futuri

METODO della CATENA (CL)

$$\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1} \quad \text{sse} \quad C_{ij} = C_{i,j-1} f_{j-1} \to \text{LINK RATIOS}$$

PROP

$\exists f_0,\dots,f_t > 0$ t.c. $\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1}$ sse $\exists\, \alpha_0,\dots,\alpha_t$ pos, $r_0,\dots,r_t$ non neg. con $r_0>0$ t.c. $P_{ij} = \alpha_i r_j$

DIM

$\Leftarrow$ $C_{ij} = \sum_k^j P_{ik} = \alpha_i \sum_k^j r_k \qquad \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = 1 + \frac{r_j}{\sum^{j-1} r_k}$

$\Rightarrow$ $C_{ij} = C_{it}\frac{1}{\prod_{k=j}^{t-1} f_k} \qquad P_{i0} = C_{i0} = \underbrace{C_{it}}_{\alpha_i}\underbrace{\prod f_k^{-1}}_{r_0>0} \qquad P_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1} = \underbrace{C_{it}}_{\alpha_i}\underbrace{\frac{f_{j-1}-1}{\prod_{k=j-1}^{t-1} f_k}}_{r_j\geq 0}$

α_i: costo ultimo per l'anno di origine i

r_j: quota del costo ultimo pagata con diff. j

STIME

$$\hat f_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}} = \frac{\sum C_{i,j-1} \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}}{\sum C_{i,j-1}}$$

$\hat f_{j-1}$ media ponderata di $\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}}$ nei diversi anni con pesi $C_{i,j-1}$

PREVISIONI

$$\hat C_{i,j} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{j-1} \hat f_h^{-1} \qquad i+j>t \quad \to \quad \hat C_{it} = C_{i,t-i} \prod_{h=t-i}^{t-1} \hat f_h^{-1}$$

$$R_i = \hat C_{it} - C_{i,t-i} = C_{i,t-i}\left(\prod \hat f_h^{-1} - 1\right)$$

$$C_{ij} = C_{it} \prod_{h=j}^{t-1} \hat f_h^{-1} = C_{it}\, b_j$$

b_j: quota del costo ultimo pagata con diff. $\leq j$

METODO di SEPARAZIONE o di TAYLOR

$\exists\ \alpha_0, \dots, \alpha_t > 0$ $\quad r_0, \dots, r_t \geq 0$, uno almeno pos., $\lambda_0, \dots, \lambda_{2t} \geq 0$ t.c. $P_{ij} = \alpha_i r_j \lambda_{i+j}$

α_i: misure di esposizione w_i con $w_i = n_i$ o $w_i = CP(i)$

ν: risarcimento medio per sx. a valori correnti dell'anno di origine 0

λ_{i+j}: risarcimento medio per sx. a valori correnti dell'anno di calendario $i+j$

$\lambda_{i+j} = \nu\, \delta_{i+j}$ $\qquad \delta_{i+j}$ fattore di adeguamento dei costi dei sx.

$\delta_{i+j} = (1+\varphi_1)\dots(1+\varphi_{i+j})$ $\qquad \varphi_k$ tasso annuo di inflazione

$\delta_{i+j} = \frac{\phi(i+j)}{\phi(0)}$ $\qquad \phi(k)$ indice dei costi dei sx.

$$P_{ij} = n_i\, \nu\, \delta_{i+j}\, r_j$$

STIME

$s_{ij} = \frac{P_{ij}}{n_i}$ $\qquad \frac{P_{ij}}{n_i} = r_j \lambda_{i+j}$ $\qquad$ OBIETTIVO: stimare r e λ

Passo 1) $\quad \hat\lambda_t = \sum_{i+j=t} s_{ij}$ $\qquad \hat r_t = \frac{s_0}{\hat\lambda_t}$

Passo 2) $\quad \hat\lambda_{t-1} \frac{\sum_{i+j=t-1} s_{ij}}{1-\hat r_t}$ $\qquad \hat r_{t-1} = \frac{s_{0,t-1} + s_{1,t-1}}{\hat\lambda_{t-1} + \hat\lambda_t}$

Passo n) $\quad \hat\lambda_h = \frac{\sum_{i+j=h} s_{ij}}{1 - \sum_{j=h+1}^{t} \hat r_j}$ $\qquad \hat r_h = \frac{\sum_{j=0}^{t-h} s_{jh}}{\sum_{h=h}^{t} \hat\lambda_k}$

METODO del LOSS RATIO

$L_i = \frac{C_{it}}{CP(i)}$

↳ Ultimate loss ratio

$\hat C_{it} = l_i\, CP(i)$

↗ Dato interno

↳ Dato esterno

METODO di BORNHUETTER-FERGUSON (BF)

$\exists\ \nu_0,\dots,\nu_t > 0$ e $b_0,\dots,b_t > 0$, con $b_t = 1$ t.c. $C_{ij} = \nu_i b_j$

ν_i: Costo ultimo per i $\quad C_{it} = \nu_i$

b_j: Quota del costo ultimo pagata con diff. $\leq j$

BF $\quad C_{ij} = \nu_i b_j \rightarrow \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = \frac{b_j}{b_{j-1}} \triangleq f_{j-1}$ CL $\quad \rightarrow$ Diverso l'approccio di stima dei parametri.

CL $\quad \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} = f_{j-1} \rightarrow C_{ij} = C_{it} \prod_{h=j}^{t-1} f_h^{-1} \triangleq \nu_i b_j$ BF

$$C_{it} = C_{i,t-i} + \nu_i \underbrace{(1 - b_{t-i})}_{\text{Still to come factor}} \qquad R_i = \nu_i (1 - b_{t-i})$$

STIMA

ν_i: basate su dati esterni

b_j: ottenute dai link ratio stimati con il metodo CL

$$\hat{C}_{it} = C_{i,t-i} + \hat{\nu}_i (1 - \hat{b}^{CL}_{t-i}) \qquad R_i = \hat{\nu}_i (1 - \hat{b}^{CL}_{t-i})$$

Formula tipo credibilità

$$\hat{C}^{BF}_{it} = C_{i,t-i} \left(\prod f_h\right) \hat{b}^{CL}_{t-i} + \nu_i (1 - \hat{b}^{CL}_{t-i}) = \hat{C}^{CL}_{i,t} \hat{b}^{CL}_{t-i} + \hat{\nu}_i (1 - \hat{b}^{CL}_{t-i})$$

$$R_i^{CL} = C_{i,t-i} \left(\prod_{h=t-i}^{t-1} \hat{f}_h - 1\right)$$

$\hookrightarrow$ Se è piccolo (nei primi anni) può creare può creare problemi

CREDIBLE CLAIM RESERVING METHODS

$$\hat{C}_{it} = \hat{C}^{CL}_{it} \alpha_i + \hat{C}^{BF}_{it} (1 - \alpha_i)$$

METODO di FISHER-LANGE (costo medio per sx)

$\exists\ \sigma^*_0,\dots,\sigma^*_t > 0$ t.c. $\quad P^*_{ij} = n_{ij} \sigma^*_j$

n_{ij} = n. di sx. dell'anno di origine i chiusi con diff. j

$\sigma^*_j = \frac{P^*_{ij}}{n_{ij}}$ Pagamento medio per sx chiuso con diff. j, aggiustato per l'inflazione

$P^*_{ij} = P_{ij} (1 + \varphi_{i+j+1}) \cdots (1 + \varphi_t) \quad \rightarrow$ Metodo di separazione $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 1 + \varphi_1$

$$\hat{\sigma}^*_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} P^*_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} n_{ij}}$$

Modello 1) per n_{ij} $\quad n_{ij} = n_i \phi_j \rightarrow \frac{n_{:j}}{n_{:j-1}} = \frac{\Phi_j}{\Phi_{j-1}} \triangleq f_{j-1}$

Modello 2) per n_{ij} $\quad n_{ij} = \varphi_j \left(n_i - \sum_{k=0}^{j-1} n_{ik}\right)$

φ_j: quota dei sx, chiuse con differimento $\geq j$, che vengono chiusi in j

Mod 1) $\rightarrow$ Mod 2)

Riserve per sx. IBNR

METODO del COSTO MEDIO e del NUMERO MEDIO di sx. IBNR

IPOTESI $\quad \frac{n_{IBNR}(i)}{n(i)} = \rho \qquad C^*_{IBNR}(i) = C^* \qquad$ costanti

STIME $\quad \hat{\rho} = \sum_{i=\theta-T}^{\theta-1} w_i \frac{n_{IBNR}(i)}{n(i)} \qquad \hat{C}^* = \sum_{i=\theta-T}^{\theta-1} w_i C^*_{IBNR}(i)$

$n_{IBNR}(\theta) = n(\theta)\rho \quad$ e $\quad n(\theta) = n_D(\theta) + n_{IBNR}(\theta) \rightarrow n(\theta) = \frac{n_D(\theta)}{1-\rho}$

$\hat{n}_{IBNR}(\theta) = n_D(\theta)\frac{\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$

$$R_{IBNR}(\theta) = \hat{n}_{IBNR}(\theta) \cdot \hat{C}_{IBNR}(\theta)$$

ALTRI METODI

Metodi basati su una misura di esposizione

Rami con breve durata del differimento della denuncia

Rami con lunga durata del differimento della denuncia