2. Aspetti introduttivi sulla tariffazione nei rami danni

2.1 Introduzione

Con riferimento ad una determinata copertura assicurativa, la *tariffazione* è il procedimento che conduce a determinare i premi da richiedere agli assicurati.

Per quanto visto nel Capitolo 1, il premio per ciascun contratto è basato sulla valutazione probabilistica della prestazione aleatoria dell'assicuratore ovvero del risarcimento totale per i danni provocati dai sinistri che colpiscono il rischio assicurato nel periodo di copertura. In ipotesi di distribuzione composta, si tratta di valutare per ciascun rischio la *base tecnica*, di assegnare cioè le distribuzioni del numero dei sinistri e del danno per sinistro, nell'ipotesi che il sinistro si verifichi. Nella pratica, tali valutazioni si ottengono a partire dai dati del portafoglio dell'assicuratore.

Un portafoglio è una collettività di rischi eterogenei, pertanto, con le tecniche della tariffazione, esso è usualmente ripartito in sottogruppi di rischi con forti caratteristiche di analogia con l'obiettivo di ottenere classi omogenee per sinistrosità, cosicché ai rischi di una medesima classe si possa attribuire la medesima base tecnica. In tale modo, si differenziano i premi per gli assicurati della collettività, tenendo conto dei diversi profili di rischio.

La differenziazione dei premi avviene usualmente in due fasi. In una prima fase, detta di *personalizzazione* o *tariffazione a priori* (o anche *classificazione dei rischi* o *segmentazione del portafoglio*), si differenziano i premi in funzione di un insieme di caratteristiche specifiche dei rischi, osservabili *a priori*, prima di disporre di informazioni sulle storie di sinistrosità degli assicurati. Le tecniche della personalizzazione *a priori* consentono di individuare sottogruppi di rischi analoghi, le *classi tariffarie*, sulla base delle determinazioni di un insieme di *variabili tariffarie*, e di valutare i premi da attribuire ai rischi di ciascuna classe.

Anche se si utilizzano molte variabili tariffarie, all'interno di ogni classe rimane però notevole eterogeneità nei comportamenti degli assicurati e quindi nella sinistrosità e si è riscontrato che, per formulare previsioni sulla sinistrosità di un assicurato, spesso l'osservazione della sua storia passata può essere più efficace dell'uso di molte variabili tariffarie. Per alcune coperture assicurative è stata allora introdotta l'idea di realizzare un "aggiustamento" del premio, *a posteriori*. Si ha quindi la seconda fase, detta di *personalizzazione o tariffazione a posteriori*, in cui si tiene conto della storia individuale di sinistrosità di ciascun assicurato. In tale modo si ha un passaggio da un *premio collettivo di classe*, valutato nella prima fase, ad un *premio basato sull'esperienza individuale*, con l'obiettivo di far pagare, alla lunga, un premio maggiormente corrispondente all'effettiva sinistrosità.

In questo testo ci occupiamo solo della fase di personalizzazione *a priori*. In particolare, nel presente capitolo, dopo avere delineato il procedimento per ottenere le classi tariffarie, richiamiamo i modelli moltiplicativo e additivo tradizionalmente usati per determinare i premi equi per i rischi di ciascuna classe. Tali modelli non richiedono di specificare le distribuzioni della base tecnica e consentono di stimare i valori attesi dei numeri aleatori che descrivono la sinistrosità tramite le stime di alcuni parametri detti *relatività*. A partire dal prossimo capitolo il problema sarà trattato più in generale mediante modelli di regressione. Per le esemplificazioni, qui e nel seguito, facciamo riferimento all'assicurazione di Responsabilità Civile Autoveicoli (RCA), nell'ipotesi che il risarcimento dei danni sia effettuato con la procedura ordinaria tipica delle assicurazioni di responsabilità civile, secondo la quale il danneggiato è risarcito dalla compagnia che copre il responsabile del sinistro. Un cenno sulla descrizione e valutazione della prestazione dell'assicuratore nello schema di risarcimento diretto attualmente in vigore in Italia è riportata nel § 10.7.

2.2 La personalizzazione *a priori*

Per individuare le caratteristiche dei rischi sulla base delle quali personalizzare i premi *a priori*, si fa riferimento ad osservazioni statistiche. A partire da dati aziendali o esogeni, quali per esempio dati di portafogli di altre imprese o dati di mercato, si determinano i fattori che si giudicano influenti sulla sinistrosità, più precisamente, sulle *valutazioni probabilistiche degli elementi aleatori che descrivono la sinistrosità* di ciascun individuo.

Per descrivere la sinistrosità, si possono considerare il numero di sinistri nel periodo di copertura, il risarcimento per sinistro, il risarcimento totale, ma anche, eventualmente, altri elementi. Per esempio, nelle assicurazioni di responsabilità civile, può essere rilevante tenere conto separatamente dei numeri di sinistri con danni solo a cose, con lesioni a persone e con danni sia a cose sia a persone.

I fattori giudicati influenti sulla sinistrosità sono detti *fattori di rischio*. Nella Tabella 2.1 è riportato un elenco di fattori di rischio nell'assicurazione RCA. Si tratta di caratteristiche del veicolo e dell'assicurato, di informazioni legate all'uso del veicolo e ad altri aspetti. Sono informazioni che l'assicuratore può ottenere *a priori*, prima di disporre di informazioni sulla storia di sinistrosità. Naturalmente, i fattori da considerare per la tariffazione dovranno essere rilevabili facilmente ed in modo affidabile.

Ogni fattore di rischio può assumere più determinazioni. Spesso le determinazioni sono ripartite in *classi* dette anche *livelli* o *modalità*. Per esempio, nell'assicurazione RCA, se la *potenza del veicolo* è misurata dalla *cilindrata* espressa in cavalli fiscali (CV), una ripartizione delle determinazioni in livelli può essere: meno di 8 CV, 8-10 CV, ..., oltre 20 CV; per il fattore *età*: fino a 22 anni, 23-30, 31-60, oltre 60; per il fattore *professione*: ad alto rischio (agente di commercio, ...), a basso rischio (impiegato, ...).

Tabella 2.1. *Alcuni fattori di rischio nell'assicurazione RCA*

Caratteristiche del veicolo	Caratteristiche dell'assicurato	Altre informazioni
potenza	*età*	*uso del veicolo*
marca	*sesso*	*livello del massimale*
massa	*professione*	*numero di patenti in famiglia*
tipo di alimentazione	*zona di residenza*	*numero di auto in famiglia*
anno di immatricolazione	*anzianità di patente*	*numero di guidatori abituali*

Individuati alcuni fattori di rischio, si pone il problema di *raggruppare* le loro determinazioni in livelli e di *selezionare* i fattori maggiormente significativi. L'obiettivo è ripartire il portafoglio in classi, in modo tale che si ritenga di assegnare la medesima valutazione probabilistica agli elementi che descrivono la sinistrosità degli assicurati di una stessa classe. Le classi nelle quali si ripartisce così il portafoglio sono dette *classi tariffarie* ed i fattori di rischio selezionati sono detti *variabili tariffarie*.

Al fine di valutare i premi, si considera quindi una funzione, detta *modello tariffario*, che ad ogni classe associa il premio corrispondente. Tale funzione dipende da alcuni parametri, detti *relatività*, che sono stimati dai dati. Si ottiene così la *tariffa*.

Alla stipulazione del contratto, un rischio è assegnato alla classe che gli compete sulla base delle sue caratteristiche tariffarie ed il premio che paga è quello previsto dalla tariffa.

Le fasi del raggruppamento delle determinazioni delle variabili tariffarie in livelli e della selezione delle variabili si basano su metodologie statistiche. Attualmente, una metodologia molto utilizzata per la classificazione dei rischi e la determinazione dei premi *a priori* è rappresentata dai modelli lineari generalizzati. La tariffazione *a priori* con tali modelli è ampiamente trattata nei prossimi capitoli. Presentiamo qui invece l'approccio classico alla tariffazione, supponendo di avere già selezionato le variabili tariffarie e ripartito le loro determinazioni in modalità. Segnaliamo che i modelli che descriviamo possono essere rivisti nell'ambito dei modelli lineari generalizzati.

2.3 Modelli tariffari moltiplicativo e additivo

Per semplicità di notazione, supponiamo che siano state selezionate due variabili tariffarie, la prima con I modalità, la seconda con J modalità. Il portafoglio è dunque ripartito in $I \times J$ classi tariffarie. La coppia (i, j) individua la classe in cui la prima variabile tariffaria ha modalità i e la seconda ha modalità j.

Modelli basati sulla quota danni

Supponiamo di poter accogliere l'ipotesi che i risarcimenti totali per i rischi che appartengono ad una stessa classe tariffaria siano identicamente distribuiti. Per la classe (i, j), sia allora $E(X_{ij}^{(k)}) = E(X_{ij})$, dove $X_{ij}^{(k)}$ indica il risarcimento totale in un anno per il k-esimo rischio della classe e $E(X_{ij})$ la comune speranza matematica di tali numeri aleatori.

I dati disponibili si riferiscano ad un periodo di osservazione di durata annuale. Poiché le polizze del portafoglio sono generalmente osservate per frazioni dell'anno, occorre tenere conto dei tempi di esposizione. Ricordiamo che, con riferimento ad un rischio, il *tempo di esposizione* o, più brevemente, l'*esposizione* (detta anche *rischio/anno*) è la durata, misurata in anni, del periodo di copertura contrattuale nell'intervallo di osservazione. Siano

c_{ij} il risarcimento totale osservato per i rischi della classe (i, j),
t_{ij} l'esposizione totale nella classe (i, j),
c il risarcimento totale osservato per i rischi del portafoglio,
t l'esposizione totale nel portafoglio.

I rapporti

$$Q_{ij} = \frac{c_{ij}}{t_{ij}}, \quad Q = \frac{c}{t}$$

sono, rispettivamente, la *quota danni* per i rischi della classe (i, j), che rappresenta una stima "grezza" del premio equo per i rischi della classe, e la quota danni di portafoglio.

Esempio 2.3.1. La Tabella 2.2 riassume le osservazioni relative ad un portafoglio RCA. Le polizze sono suddivise in classi secondo le due variabili tariffarie *età* dell'assicurato e *potenza* fiscale del veicolo, con le seguenti ripartizioni delle determinazioni in livelli:

età 1 = 18-22, 2 = 23-26, 3 = 27-43, 4 = maggiore di 43 (anni),
potenza 1 = 8-12, 2 = 13-17, 3 = maggiore di 17 (CV).

Tabella 2.2. *Dati RCA*

età	*potenza*	Esposizione	Risarcimento totale	Quota danni
1	1	1928,22	750.003,97	388,96
1	2	3596,76	2.766.063,61	769,04
1	3	522,05	490.993,90	940,51
2	1	2990,75	773.416,58	258,60
2	2	6304,10	2.602.502,82	412,83
2	3	1803,40	1.854.122,79	1.028,12
3	1	12983,99	2.375.924,55	182,99
3	2	26326,37	7.527.951,11	285,95
3	3	12107,33	4.105.713,54	339,11
4	1	15781,28	3.312.557,12	209,90
4	2	26820,10	7.365.764,17	274,64
4	3	12117,98	4.147.985,83	342,30

La quota danni di portafoglio è $Q = 308,83$. Si nota che sono sensibilmente maggiori di Q le quote danni degli assicurati giovani, di età tra i 18 e i 26 anni, con autoveicoli di cilindrata superiore ai 12 CV e degli assicurati tra i 23 e i 26 anni con autoveicoli di cilindrata superiore ai 17 CV. ◆

Si introduce ora un *modello tariffario* per perequare le stime grezze in quanto, per diversi motivi, le quote danni difficilmente possono essere impiegate direttamente come valutazioni dei premi equi per le varie classi tariffarie. Infatti, i dati osservati risentono di "perturbazioni accidentali" (per esempio, in una determinata classe si può osservare, durante il periodo di rilevazione, un'elevata sinistrosità del tutto casuale). Inoltre, alcune classi possono essere poco numerose. È invece opportuno utilizzare informazioni provenienti da aggregati più ampi e non solo i dati di ogni singola classe, anche per evitare che a classi "vicine" competano premi troppo diversi. Un altro obiettivo della perequazione può essere introdurre un effetto di *solidarietà*. Ricordiamo che si parla di solidarietà quando in una collettività di rischi, i rischi con premi equi più bassi pagano un premio maggiore dell'equo a vantaggio dei rischi con premi equi più elevati.

Tradizionalmente, i modelli usati nella tariffazione sono i modelli moltiplicativo e additivo.

Modello moltiplicativo. Si pone

$$E(X_{ij}) = p\alpha_i\beta_j .$$

Modello additivo. Si pone

$$E(X_{ij}) = p + \alpha_i + \beta_j .$$

Per indicare, in modo compatto, che assumiamo per $E(X_{ij})$ un modello moltiplicativo o additivo, poniamo $E(X_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j)$, con

$$f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} p\alpha_i\beta_j & \textit{modello moltiplicativo} \\ p + \alpha_i + \beta_j & \textit{modello additivo.} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Nei precedenti modelli, p è un valore fissato e i parametri α_i, β_j, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$, sono le *relatività* che devono essere stimate dai dati in modo da "accostare", in un senso opportuno, le stime grezze.

Indicate con $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$ le stime di α_i, β_j, si ottiene la stima, $\hat{E}(X_{ij})$, di $E(X_{ij})$ e quindi il premio equo per i rischi della classe (i, j), P_{ij}, che è

$$P_{ij} = \hat{E}(X_{ij}) = f(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j).$$

Il valore p può essere fissato, per esempio, pari alla quota danni Q ottenuta per l'intero portafoglio. Osserviamo che, se tutti i rischi del portafoglio avessero pagato il premio Q, si avrebbe equilibrio ("bilanciamento") tra entrate per premi e uscite per risarcimenti. Ponendo allora $p = Q$ nelle (2.3.1), il premio medio Q è "aggiustato", classe per classe, per ottenere premi corrispondenti alle caratteristiche di sinistrosità delle varie classi. Più frequentemente, p è fissato pari alla quota danni di una assegnata classe tariffaria, presa come *classe di riferimento*.

Con l'impiego di un modello tariffario moltiplicativo o additivo, si riduce il problema di stima, infatti si devono stimare $I + J$ relatività in luogo di $I \times J$ premi. Si introducono però implicitamente ipotesi semplificatrici che possono essere molto forti. Si assume, infatti, che gli effetti dei fattori di rischio siano in un caso di tipo moltiplicativo e nell'altro di tipo additivo. Inoltre, in entrambi i modelli, si trascura l'influenza combinata dei due fattori: se la prima variabile tariffaria si presenta nella modalità i-esima, l'effetto della variabile è espresso da un termine moltiplicativo o additivo, α_i, indipendentemente dalla modalità con cui si presenta la seconda variabile tariffaria.

Prima di passare al problema della stima delle relatività, osserviamo che anziché costruire la tariffa stimando direttamente il risarcimento totale atteso per rischio a partire dalle quote danni, in ipotesi di distribuzione composta si può procedere stimando separatamente il numero atteso di sinistri per rischio, a partire dalle frequenze sinistri, e il risarcimento atteso per sinistro, a partire dai risarcimenti medi osservati. I premi sono quindi ottenuti come prodotto delle due componenti. Questo è anzi l'approccio più spesso utilizzato in pratica e suggerito nella letteratura attuariale.

Modelli basati sulla frequenza sinistri e sul risarcimento medio per sinistro

Supponiamo di poter accogliere le seguenti ipotesi.

- I numeri di sinistri per rischio, per i rischi di una stessa classe tariffaria, siano identicamente distribuiti. Per la classe tariffaria (i,j), sia allora $E(N_{ij}^{(k)}) = E(N_{ij})$, dove $N_{ij}^{(k)}$ indica il numero di sinistri in un anno per il k-esimo rischio della classe e $E(N_{ij})$ la comune speranza matematica di tali numeri aleatori.
- I risarcimenti per sinistro (nell'ipotesi che il sinistro si verifichi) per i rischi che appartengono ad una stessa classe tariffaria siano identicamente distribuiti. Per la classe tariffaria (i,j), sia allora $E(Y_{ij}^{(h)}) = E(Y_{ij})$, dove $Y_{ij}^{(h)}$ indica il risarcimento per il sinistro h-esimo nella classe e $E(Y_{ij})$ la comune speranza matematica di tali numeri aleatori.

Dall'osservazione della collettività di assicurati, oltre ai dati sui risarcimenti e sulle esposizioni, siano disponibili anche i dati sui numeri di sinistri. Indichiamo con

n_{ij} il numero totale di sinistri osservato per i rischi della classe (i,j),

n il numero totale di sinistri osservato per i rischi del portafoglio.

I rapporti

$$\frac{n_{ij}}{t_{ij}}, \qquad \frac{n}{t}$$

sono, rispettivamente, l'*indice di sinistrosità* o *frequenza sinistri* per i rischi della classe (i,j), che rappresenta una stima "grezza" del numero atteso annuo di sinistri per ciascun rischio della classe, e l'indice di sinistrosità di portafoglio.

Posto

$$E(N_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} p\alpha_i\beta_j & \textit{modello moltiplicativo} \\ p + \alpha_i + \beta_j & \textit{modello additivo} \end{cases}$$

e, per esempio, $p = n/t$, si stimano le relatività ottenendo una stima del numero atteso di sinistri per i rischi di ciascuna classe tariffaria $\hat{E}(N_{ij})$, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$.

Per quanto riguarda i risarcimenti, i rapporti

$$\frac{c_{ij}}{n_{ij}}, \qquad \frac{c}{n}$$

sono, rispettivamente, il *risarcimento medio per sinistro* per i rischi della classe (i, j), stima "grezza" del risarcimento atteso per sinistro per ciascun rischio della classe, e il risarcimento medio per sinistro di portafoglio.

Posto

$$E(Y_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} p\alpha_i\beta_j & \textit{modello moltiplicativo} \\ p + \alpha_i + \beta_j & \textit{modello additivo} \end{cases}$$

e, per esempio, $p = c/n$, si stimano le relatività ottenendo una stima del risarcimento atteso per sinistro per i rischi di ciascuna classe tariffaria $\hat{E}(Y_{ij})$, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$. Il premio per i rischi della classe (i, j) è

$$P_{ij} = \hat{E}(X_{ij}) = \hat{E}(N_{ij})\hat{E}(Y_{ij}).$$

Nelle coperture assicurative in cui è individuabile un valore, detto *esposizione monetaria*, che rappresenta la determinazione massima del risarcimento per sinistro, il premio può essere calcolato mediante il *tasso di premio*, ovvero il premio per l'esposizione unitaria, e la tariffa fornisce i tassi di premio per le diverse classi tariffarie.

Modelli basati sul tasso di premio

Supponiamo di poter accogliere l'ipotesi che i risarcimenti totali per unità di esposizione monetaria per i rischi che appartengono ad una stessa classe tariffaria siano identicamente distribuiti. Per la classe tariffaria (i, j), sia $E\left(\frac{X_{ij}^{(k)}}{w_{ij}^{(k)}}\right) = E(R_{ij})$, dove $X_{ij}^{(k)}$ e $w_{ij}^{(k)}$ indicano, rispettivamente, il risarcimento totale in un anno e l'esposizione monetaria per il k-esimo rischio della classe, e $E(R_{ij})$ la comune speranza matematica dei rapporti $\frac{X_{ij}^{(k)}}{w_{ij}^{(k)}}$.

Siano

w_{ij} l'esposizione monetaria totale per i rischi della classe (i, j),

w l'esposizione monetaria totale per i rischi del portafoglio,

dove, per tenere conto anche dei tempi di esposizione, $w_{ij} = \sum_k t_{ij}^{(k)} w_{ij}^{(k)}$, essendo $t_{ij}^{(k)}$ il tempo di esposizione del k-esimo rischio della classe (i, j).

I rapporti

$$\tau_{ij} = \frac{c_{ij}}{w_{ij}}, \qquad \tau = \frac{c}{w}$$

sono, rispettivamente, il *tasso di premio* per i rischi della classe (i, j) e il tasso di premio di portafoglio.

Posto

$$E(R_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} p\alpha_i\beta_j & \textit{modello moltiplicativo} \\ p + \alpha_i + \beta_j & \textit{modello additivo} \end{cases}$$

e, per esempio, $p = \tau$, si stimano le relatività ottenendo una stima del risarcimento totale atteso per unità di esposizione monetaria per i rischi di ciascuna classe tariffaria $\hat{E}(R_{ij})$, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$.

Il premio per un rischio della classe (i, j) con esposizione monetaria $\overline{w}$ è

$$P_{ij} = E(R_{ij})\overline{w}.$$

Nel prossimo paragrafo ci soffermiamo brevemente sulla stima delle relatività.

2.4 Metodi di stima delle relatività

Per descrivere alcuni metodi di stima ci riferiamo ai modelli tariffari per il premio equo basati sulle quote danni e supponiamo che, nella (2.3.1), il parametro p sia fissato pari a Q, la quota danni di portafoglio.

Osserviamo che, in entrambi i modelli moltiplicativo e additivo, il problema della stima dei parametri è indeterminato. Nel modello moltiplicativo i parametri sono, infatti, determinati a meno di un fattore non nullo, nel modello additivo a meno di una costante additiva.

Il metodo di stima delle relatività intuitive

È stato introdotto per il modello moltiplicativo. Posto $E(X_{ij}) = Q\alpha_i\beta_j$, si stimano i parametri mediante le

$$\hat{\alpha}_i = \frac{Q_{i\bullet}}{Q}, \qquad \hat{\beta}_j = \frac{Q_{\bullet j}}{Q}$$

dove $Q_{i\bullet}$ è la quota danni relativa ai rischi che hanno la prima variabile tariffaria con modalità i e $Q_{\bullet j}$ è la quota danni relativa ai rischi che hanno la seconda variabile tariffaria con modalità j.

Il metodo è appunto intuitivo e di immediata interpretazione. Se $Q_{i\bullet}/Q > 1$, la modalità i della prima variabile tariffaria è giudicata un'aggravante per il rischio ed il premio per le polizze con tale caratteristica è calcolato "aggiustando" il premio medio Q mediante un fattore pari al precedente rapporto.

Il premio per i rischi di classe (i, j) è dunque

$$P_{ij} = E(X_{ij}) = Q\hat{\alpha}_i\hat{\beta}_j = \frac{Q_{i\bullet}\,Q_{\bullet j}}{Q}.$$

Esempio. Con riferimento all'Esempio 2.3.1, si ha

$$Q_{i\bullet} = \frac{\textit{risarcimento totale per rischi con età } i}{\textit{esposizione per rischi con età } i},$$

$Q_{1\bullet} = 662{,}65$, $\quad Q_{2\bullet} = 471{,}25$, $\quad Q_{3\bullet} = 272{,}47$, $\quad Q_{4\bullet} = 270{,}95$,

$$Q_{\bullet j} = \frac{\textit{risarcimento totale per rischi con veicolo di potenza } j}{\textit{esposizione per rischi con veicolo di potenza } j},$$

$Q_{\bullet 1} = 214{,}10$, $\quad Q_{\bullet 2} = 321{,}38$, $\quad Q_{\bullet 3} = 399{,}19$.

Si ricava dunque la tariffa riportata nella Tabella 2.3.

Confrontando i premi con le quote danni riportate nella Tabella 2.2, si nota l'effetto di perequazione realizzato dalla tariffa. ♦

Tabella 2.3. *Premi RCA*

età	*potenza*	Premio
1	1	459,40
1	2	689,59
1	3	856,54
2	1	326,71
2	2	490,41
2	3	609,14
3	1	188,89
3	2	283,54
3	3	352,19
4	1	187,84
4	2	281,97
4	3	350,23

Descriviamo ora alcuni metodi di stima delle relatività che hanno alla base il soddisfacimento di qualche condizione. Prima di presentare il prossimo metodo introduciamo la nozione di bilanciamento.

Una *condizione di bilanciamento* richiede che, ripartendo il portafoglio in sottogruppi "numerosi" di assicurati, per ciascuno dei sottogruppi *la tariffa copra il fabbisogno*. Più precisamente, si richiede che, considerata una partizione delle classi tariffarie in "macroclassi", in ogni macroclasse gli introiti per premi che si avrebbero applicando la tariffa ai rischi osservati uguaglino i relativi esborsi. Riportiamo qui di seguito alcune usuali condizioni di bilanciamento.

– Si ha *bilanciamento sulle righe* (o *rispetto alla prima variabile tariffaria*) se per i rischi che hanno la prima variabile tariffaria con modalità i, $i = 1,\ldots,I$, i premi complessivamente incassati sono uguali ai risarcimenti effettuati:

$$\sum_{j=1}^{J} P_{ij}t_{ij} = \sum_{j=1}^{J} Q_{ij}t_{ij}, \quad i = 1,\ldots,I ,$$

dove $P_{ij}\, t_{ij}$ è il totale dei premi in relazione all'esposizione e $Q_{ij}t_{ij} = c_{ij}$ è il risarcimento totale per i rischi della classe (i, j).

– Si ha *bilanciamento sulle colonne* (o *rispetto alla seconda variabile tariffaria*) se per i rischi che hanno la seconda variabile tariffaria con modalità j, $j = 1,\ldots,J$, premi complessivamente incassati sono uguali ai risarcimenti effettuati:

$$\sum_{i=1}^{I} P_{ij}t_{ij} = \sum_{i=1}^{I} Q_{ij}t_{ij}, \quad j = 1,\ldots,J .$$

– Si ha *bilanciamento totale* se, nel portafoglio, i premi complessivamente incassati sono uguali ai risarcimenti effettuati:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} P_{ij}t_{ij} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Q_{ij}t_{ij}.$$

È immediato verificare che il bilanciamento sulle righe o sulle colonne implica il bilanciamento totale. Si noti l'importanza, dal punto di vista dell'assicuratore, che la tariffa soddisfi l'ultima condizione di bilanciamento.

Il metodo dei totali marginali

È un metodo di stima delle relatività che può essere applicato sia al modello moltiplicativo sia al modello additivo. L'obiettivo del metodo è realizzare bilanciamento sulle righe e sulle colonne. Posto $E(X_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j)$, si tratta di determinare le relatività che risolvono il seguente sistema

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J} f(\alpha_i, \beta_j)t_{ij} = \sum_{j=1}^{J} Q_{ij}t_{ij} & i = 1,\ldots,I \\ \sum_{i=1}^{I} f(\alpha_i, \beta_j)t_{ij} = \sum_{i=1}^{I} Q_{ij}t_{ij} & j = 1,\ldots,J. \end{cases}$$

Nei prossimi metodi di stima non si pongono obiettivi di bilanciamento, ma di adattamento delle stime ai valori osservati.

Il metodo dei minimi quadrati

È l'usuale metodo di stima dei parametri di un modello, che si pone l'obiettivo di rendere minima la somma degli scostamenti quadratici tra valori stimati e valori osservati. Si determinano cioè $\hat{\alpha}_i$, β_j, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$, che rendono minima la funzione

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} (Q_{ij} - f(\alpha_i, \beta_j))^2.$$

Il metodo dei minimi quadrati ponderati

Per tenere conto anche dell'esposizione nelle varie classi, si determinano $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$, che rendono minima la funzione

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} t_{ij}(Q_{ij} - f(\alpha_i, \beta_j))^2.$$

Il metodo del minimo chi-quadrato

Come misura di adattamento realizzato dal modello, si considera la somma ponderata degli scostamenti quadratici tra valori stimati e valori osservati, rapportati ai valori stimati. Si determinano quindi $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_j$, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$, che rendono minima la funzione

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} t_{ij}\frac{(Q_{ij} - f(\alpha_i, \beta_j))^2}{f(\alpha_i, \beta_j)}.$$

In letteratura sono proposti diversi altri metodi per la stima delle relatività. In questa trattazione non ci soffermiamo ulteriormente su tali aspetti. Segnaliamo ancora che i metodi che hanno l'obiettivo di realizzare adattamento ai valori osservati conducono a stimatori dei parametri le cui proprietà statistiche sono ampiamente discusse in letteratura (v. per esempio Weisberg, Tomberlin (1982)).

In chiusura del capitolo, osserviamo che le stime dei risarcimenti attesi nelle diverse classi tariffarie, $\hat{E}(X_{ij})$, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$, ottenute sulla base dei dati storici, possono essere considerate come valutazione dei premi futuri solo se si reputa che vi sia stabilità nel tempo della base tecnica. Poiché così generalmente non è, ai fini della determinazione della tariffa, nella pratica, la quota danni Q ricavata dai dati di portafoglio, che rappresenta il risarcimento medio per rischio, è "proiettata" al periodo di operatività della tariffa tenendo conto di previsioni sull'evoluzione futura della sinistrosità, e ciò tipicamente andando ad operare sulle due componenti: numero medio di sinistri per rischio e risarcimento medio per sinistro. Si arriva in tal modo ad un *premio medio* $\overline{Q}$ che rappresenta una previsione del risarcimento medio per rischio, per i rischi che si ritiene di assumere nel periodo di validità della tariffa. Stimata l'aliquota p_{ij} degli assicurati che nel periodo di operatività della tariffa si troveranno nella classe tariffaria (i, j), il premio P_{ij} per i rischi di tale classe è usualmente fissato in misura proporzionale a $\hat{E}(X_{ij})$, in modo che la media dei premi consenta di coprire il risarcimento medio $\overline{Q}$. Si pone cioè $P_{ij} = P\,\hat{E}(X_{ij})$, con P tale che

→ è aliquota non n attesi di assicurati!

Condiz. di equilibrio nel futuro

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} P\,\hat{E}(X_{ij})p_{ij} = \overline{Q}\,.$$

Si noti che in tal modo si valuta che le relatività ottenute sulla base dei dati storici siano adeguate anche per il futuro. Qualche ulteriore considerazione sul procedimento che, dalle stime dei risarcimenti attesi, conduce alla tariffa è riportata nel § 10.8.