Capitolo 1

Processi stocastici per i numeri di sinistri

Richiami sui processi stocastici

Un **Processo Stocastico** (o **Processo Aleatorio**) è una famiglia di n.a. che indichiamo in due modi:

- $\{X(t), t \in T\}$, se processo è **a parametro continuo**
- $\{X_t, t \in T\}$ se processo è **a parametro discreto**

dove t è un indice o un parametro. $T \subset \mathbb{R}$

Fissato $t \in T$, $X(t)$ è un n.a.
$\mathcal{P}$ è la partizione dove sono definiti tutti i n.a. della famiglia

$X(t, \cdot) : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$\omega \in \mathcal{P} \to X(t, \omega) \in \mathbb{R}$ determinazione di $X(t)$ corrispondente ad un evento elementare ω

$\{X(t, \omega),\ \omega \in \mathcal{P}\}$ insieme delle determinazioni possibili del n.a. $X(t)$

Fissato $\omega \in \mathcal{P}$ $X(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R}$
$t \in T \to X(t, \omega) \in \mathbb{R}$
$\{X(t, \omega), t \in T\}$ **insieme delle storie del processo** (**o traiettorie o realizzazioni**) che hanno portato ad ω

Tralascio richiami su FdR congiunta e marginale di una coppia aleatoria
Assegnare una valutazione probabilistica ad un processo stocastico:

Legge del processo stocastico

$\{X(t), t \in T\}$ se t è continuo
$\{X_t, t \in T\}$ se t è discreto

$\mathcal{F}$ famiglia di funzioni, detta **Legge** o **Legge temporale del processo**. Insieme di FdR congiunte per ogni sottoinsieme finito di n.a. del processo.

$\mathcal{F} = \{F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)} \in T; n = 1, 2, ..\}$

- $\forall n > 0, \forall t_1, ..., t_n \Rightarrow F_{X(t_1),\ldots,X_{t_n}}$

$\mathcal{P}$ famiglia delle funzioni di probablità

fix s, t $X(t) - X(s)$ sono **incrementi del processo**

1.1 Stazionarietà degli incrementi

def **Processo ad incrementi indipendenti**. Se gli incrementi sono i.i.d.

def **Processo ad incrementi stazionari**. Se la legge degli incrementi dipende da $t-s$ e non da t, s:

$$X(s+\Delta)-X(s) \stackrel{d}{=} X(t+\Delta)-X(t)$$

La legge degli incrementi non dipende da dove arriva ma dalla durata (ampiezza).

Un processo stocastico $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di conta** (point process) se, fissato t, $N(t)$ conta il numero di manifestazioni di un fissato fenomeno (arrivi) nell'intervallo $[0, t]$. Ad esempio un numero di sinistri che colpiscono un portafoglio o polizza in quell'arco temporale.

- $\forall t \geq 0$ $N(t) \geq 0$
- $\forall t \geq 0$ $N(t)$ ha determinazioni naturali (0,1,2,..)
- $\forall s, t$ con $s<t$, $N(s) \leq N(t)$
- $N(t)-N(s) =$ "numero di arrivi nell'intervallo $[s, t]$"

1.2 Richiami sul processo di Poisson

Un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$, è detto **Processo di Poisson con intensità** λ, con $\lambda>0$ se valgono le seguenti 4 proprietà:

I. processo ad incrementi indipendenti
$\forall n, \forall s_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq s_n \leq t_n \Rightarrow N(t_1)-N(s_1), \ldots, N(t_n)-N(s_n)$ sono stocasticamente indipendenti

II. probabilità di 1 arrivo nell'intervallo $[t, \Delta t]$ è proporzionale a δt
$Pr\left([N(t+\Delta t)-N(t)]=1\right)=\lambda \Delta t+o(\Delta t) \quad$ con $\lim\limits_{\Delta t \rightarrow 0^{+}} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$

III. assioma di esclusione di eventi multipli
la pr che nell'intervallo di tempo avvengano almeno 2 eventi è nulla
$\forall t \geq 0, \forall \Delta t>0$, $Pr(N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2)=o(\Delta t)$

IV. Pr che avvenga 1 manifestazione in 0 è certa
$Pr(N(0)=0)=1$

Oss. (dim veloce omessa)

$$\text{II} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0^{+}} \frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t)=1}{\Delta t}=\lambda$$

Oss. (dim veloce omessa)

$$\text{III} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0^{+}} \frac{Pr(N(t+\Delta t)-N(t) \geq \lambda}{\Delta t}=0$$

Come devono essere le distribuzioni marginali unidimensionali del processo?

Teorema 1. *Se $\{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson con intensità $\lambda \Rightarrow N(t) \sim Poi(\lambda t)$ cioè $Pr(N(t)=n)=e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$, $n=0,1, \ldots$ $\forall t \geq 0$*

(dim di 3 pagine omessa: nel passo 1) $n=0$, (1.1) si dim P_0 ammette derivata dx, (1.2) si dim P_0 ammette derivata sx; nel passo 2 $n \geq 0$, (2.1) si dim che P_n derivabile per un fix $n \geq 1$, (2.2) si dim che P_n ammette derivata sx finita in t, infine si passa all'induzione per n)

Teorema 2. *$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson è un processo ad incrementi stazionari, cioé presi s, t $s<t$ il n.a. $N(t)-N(s)$ ha legge che dipende da $t-s$ e non da t, s separati*

Teorema 3. *Sia* (1) $\{N(t), t \geq 0\}$ *processo di Poisson di intensità* λ, *scelto* $\tau > 0$, *posto* $N^{(\tau)}(t) = N(\tau + t) - N(\tau)$, *il processo* (2) $\{N^{\tau}(t), t \geq 0\}$ *è processo di Poisson di intensità* λ.

(dim di mezza pagina in cui (2) soddisfa I-IV omessa)

Sistema di Kolmogorov E' un sistema di condizioni, che spunta all'interno della dimostrazione. Lo denoto con (A), ed è (credo) pari a $P_n'(t) = \lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)\ \forall t \geq 0, \forall n \geq 1$.
Inoltre denotato con (B) $\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t} P_n(t))\right] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$, si dimostra che

$$(A) \Rightarrow (B)$$

Teorema 4. *Nel processo di Poisson è soddisfatta la proprietà di markovianità, cioé fissati* $n \in \mathbb{N}, t_1 < t_2 < ... < t_n \in \mathbb{R}, i_1 \leq i_2 \leq i_{n-1} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Pr(N(t_n) = j | N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, ..., N(t_{n-1}) = i_{n-1} \\ = Pr(N(t_n) = j | N(t_{n-1}) = i_{n-1}) \end{aligned}$$

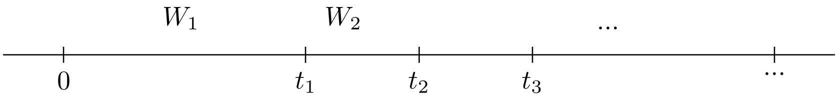
cioè conta solo l'informazione più recente, infatti $\underbrace{Pr(N(t_n) = j | N(t_{n-1}) = i_{n-1})}_{\text{dipende da } i_{n-1}, j, t_n, t_{n-1}}$.

(dim di poche righe omessa)

1.3 Distribuzioni dei tempi di attesa (tra due arrivi)

Statistica bayesiana

- $\boxed{\text{T}_n \text{ tempo di attesa per l'arrivo n-esimo}}$. $T_0 = 0$. $\{T_n, n \geq 0\}$ processo dei tempi di attesa
- $\boxed{\text{W}_n \text{ tempo di attesa tra gli arrivi (n-1)-esimo e n-esimo}}$. $\{W_n, n \geq 1\}$ **processi dei tempi di interarrivo**



Teorema 5. $\{N(t), t \geq 0\}$ *processo di Poisson con intensità* $\lambda \Rightarrow \{W_1, W_2, ...\}$ *i.i.d.,* $W_n \sim \exp(\lambda)$, $n \geq 1$

Oss. Se $E(W_n) = 1/\lambda$ con $\lambda = 0.06$ allora la frequenza sinistri del portafoglio Italia RCA è $E(W_n) = \frac{1}{0.06} = 17$

Chi è la distribuzione marginale dei tempi di interarrivo?
Per come è stata definita T_n la sua densità marginale è $f_{T_n}(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}$ con $t > 0$ che è una Erlangiana (n, λ)

Dato $\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ abbiamo visto che vale il sistema assiomatico A: I, II, III, IV ma non è l'unico modo per definire il processo di Poisson con intensità λ.
Infatti esiste anche B:

- 1. = I
- 2. dati $s < t$, $N(t) - N(s) \sim Poi(\lambda(t - s)$
- 3. = IV

Ed esiste anche un terzo modo di descrivere il processo di Poisson con intensità λ, C:
sia $W_1, W_2, ...$ un processo di n.a. i.i.d. con $W_n \sim \exp(\lambda)$ posto $T_n = W_1 + ... + W_n$ e $N(t) = \text{Card}\{n \geq 1 | T_n \leq t\} \Rightarrow \{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson con intensità λ

OSS:

$W_1 = T_1$

$T_n = W_1 + \dots + T_n \qquad n \geq 1$

$N(t) = card\{n \geq 1 \mid T_n \leq t\} = card\{n \geq 1 \mid W_1 + \dots + W_n \leq t\}$

$= \sum_{n \geq 1} |T_n \leq t|$ indicatore evento

$N(t) = n \iff T_n \leq t \wedge T_{n+1} > t$

$\iff T_n \leq t < T_{n+1}$

$\{N(t),\ t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ

$F_{W_1}(t) = Pr(W_1 \leq t) \qquad t \geq 0$

$= Pr(T_1 \leq t)$

$= 1 - Pr(T_1 > t)$

$[T_1 > t] = [N(t) = 0]$

$Pr(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

$= 1 - e^{-\lambda t}$

//

RICHIAMO

$X \sim exp(\rho) \qquad \rho > 0$

$f_X(x) = \rho e^{-\rho x} \qquad x > 0$

$F_X(x) = 1 - e^{-\rho x} \qquad x \geq 0$

$E(X) = 1/\rho$

$Var(X) = 1/\rho^2$

$m_X(t) = \frac{\rho}{\rho - t} \qquad t < \rho$

Teorema 6. *Vale che* Ⓐ $\Leftrightarrow$ Ⓑ $\Leftrightarrow$ Ⓒ
(dim solo Ⓐ $\Leftrightarrow$ Ⓑ di mezza pagina è omessa)

Sia $\{W_1, W_2, ...\}$ processo di n.a. i.i.d., posto $T_n = W_1 + ... + W_n$ e $N(t)$ =card$\{n \geq 1 | T_n \leq t\}$, allora $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto **processo di rinnovamneto** (o processo dei rinnovi)

Oss. Il processo di Poisson è un particolare processo di rinnovamento
Oss. Il processo di Poisson può esser visto come un processo di arrivo dei sinistri per una polizza assicurativa oppure per un portafoglio di contratti assicurativi.

Il processo di Poisson con i suoi assiomi è adeguato a descrivere questi due fenomeni?

Ipotesi restrittive del modello di Poisson

Tuttavia se consideriamo un processo di Poisson possono sorgere alcuni problemi dovuti alle ipotesi restrittive di questo processo:

- indipendenza degli incrementi: può non essere ragionevole (malattie infettive quindi contagi, incendi boschivi quindi stagione secca,.. sono eventi da considerare ai fini probabilistici. E poi c'è la tariffazione dei premi basata sulla esperienza)
- stazionarietà: altro ipotesi forte. Non è ragionevole. (episodi di stagionalità nel breve periodo, frequenza sinistri decrescente nel corso degli anni,..)
- incrementi con distribuzione di Poisson: media e la varianza non coincidono sempre nella pratica. C'è quindi un problema di sovradispersione o sottodispersione che non viene colto dalla distribuzione poissondi (vd binomiale negativa)

Risulta quindi necessario introdurre modelli analoghi a quello di Poisson in cui vengono allentati i vincoli di volta in volta.

1.4 Processo di Poisson non omogeneo

Idea: sono allentati i vincoli del processo di Poisson. Qui il parametro lambda non è più costante.

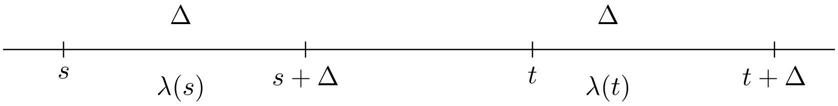
Un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$, è detto **Processo di Poisson nono omogeneo con intensità** $\lambda(t)$, con $\lambda(t) > 0$ se valgono le seguenti 4 proprietà:

I. già vista

II$'$. $Pr\left([N(t+\Delta t) - N(t)] = 1\right) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ con $\lim_{\Delta t \to 0^+} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, con $\lambda(\cdot)$ positiva e integrabile in ogni intervallo limitato
(ocio che qui ho $\lambda(t)$ mentre in II λ era una costante: il fattore di proporzionalità dipende da t)

III. già vista

IV. già vista



Si prova che dati $s < t$, $N(t) - N(s) \sim Poi(\mu(t) - \mu(s))$ ossia che $Pr(N(t) - N(s) = n) = e^{-(\mu(t)-\mu(s))}$ ossia che la legge degli incrementi $N(t) - N(s)$ dipende da t,s: $\mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \lambda(u)du$

- $\boxed{\lambda(\cdot)\ \textbf{funzione di densità del processo}}$
(ad es. processo di Poi omogeneo con intensità λ)

- $\boxed{\mu(\cdot) \textbf{ funzione del valore atteso del processo}}$
  (perché fornisce le speranze matematiche del processo, infatti $E(N(t)) = E(N(t) - N(0)) = \mu(t) \sim Poi(\mu(t) - \mu(0)) = Poi(\mu(t)))$

Caratteristiche della funzione valore atteso

- se $\lambda(t) = \lambda \ \forall t \to$ il processo di Poisson è omogeneo
- se $\lambda(t)$ non è costante $\forall t \to$ il processo di Poisson è omogeneo

- $\mu(0) = 0$
- $t > 0 \Rightarrow \mu(t) > 0$
- $\mu(\cdot)$ strettamente crescente
- $\mu(\cdot)$ è continua (funzione integrale di una funzione integrabile)
- $\mu(\cdot)$ è assolutamente continua
- se $\lambda(\cdot)$ è continua $\to \mu(\cdot)$ è derivabile, ossia $\mu'(t) = \lambda(t)$

Dato sistema ipotesi A′:

- I
- II′
- III
- IV

e dato sistema ipotesi B′:

- I = 1′
- II′: $\exists \mu(\cdot)$ definita su $[0, +\infty[$ che in 0 vale 0, positiva, strettamente crescente, continua, assolutamente continua e $\mu(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ t.c. gli incrementi $N(t) - N(s) \sim Poi(\mu(t) - \mu(s) \forall s < t$
- III
- IV = 3′

Vale che A′ ↔ B′

Modello di ipotesi					Relazioni fra modelli
A	I	II	III	IV	A ⇔ B
B	1(↔ I)	2 (≠ II)	?	3 (↔ IV)	B ⇔ C
A′	I	II′(≠ II	III	IV	A′ ⇔ B′
B′	1′	2′ (≠ II)	?	3′ (IV)	

1.5 Collegamento fra processi di Poisson omogenei e non omogenei

Idea: è possibile passare dai processi di poisson omogenei a quelli non omogenei (e viceversa) attraverso una trasformazione deterministica del tempo.

Dato un processo di Poisson con solità intensità $\{N(t), t \geq 0\}$, sia $\mu(\cdot)$ una funzione con le caratteristiche della funzione valore atteso (quelle di prima).
Poniamo $\boxed{\widetilde{N}(t) = N(\mu(t))}$, da cui otteniamo un **processo di Poisson non omogeneo** con funzione valore atteso $\lambda\mu(\cdot)$ $\{\widetilde{N}(t), t \geq 0\}$.

Oss. Incremento del processo $\widetilde{N}$ è anche incremento del processo N, cambia solo l'intervallo:

$$s < t, \ \widetilde{N}(t) - \widetilde{N}(s) = N(\mu(t)) - N(\mu(s))$$

(l'osservazione qui sopra, che è l'inizio della dimostrazione di 3 pagine che A′ ↔ B′ sviluppata attraverso soddisfacimento dei modelli di ipotesi reciproci, è qui omessa)

Processi mistura di poissoniani

Idea: cade l'indipendenza stocastica fra eventi.

Dato un processo di conta $\{N(t), t \geq 0\}$, sia il numero aleatorio $\boxed{\Lambda > 0 \text{ un } \textbf{parametro aleatorio di rischio}}$ o (**di eterogeneità**).

Teorema 7. *Poiché per ogni determinazione possibile di Λ, il processo condizionato $\{N(t)|\Lambda = x, t > 0\}$ è processo di poisson con intensità x, ed assegnata la distribuzione di probabilità di Λ (f_Λ o F_Λ) $\Rightarrow$ è assegnata la legge del processo $\{N(t), t \geq 0\}$ detto* ***processo mistura di poissoniani con misturante*** *F_Λ, dove F_Λ è la* ***funzione di struttura***

(dim di una pagina è qui omessa)

Oss. Unica osservazione sul teorema è che potrebbe creare disagio nell'approccio classico, ma non in quello bayesiano, per il fatto di $Pr(\lambda = 0) = 0$ per via delle norme di coerenza.

Teorema 8. *Un processo mistura di poissoniani con misturante (funzione di struttura) F_Λ è ad incrementi stazionari*
(ocio non incrementi indipendenti)

Oss. Il processo non è ad incrementi indipendenti
(dim di poche righe è qui omessa)
Dato un processo mistura di poissoniani con misturante Gamma(α, ρ) (dotata di densità), allora fatti i conti posso scrivere che
$Pr(N(t+1) - N(t)) = n) = \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{\rho+1}\right)^{n} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots}$ la cui parte evidenziata è la densità di una binomiale negativa.
Otteniamo quindi che $N(t+1) - N(t) \sim \text{Bin Neg}\left(\alpha; \frac{\rho}{\rho+1}\right)$

$E[N(t+1) - N(t)] = \frac{\alpha}{\rho}$

$Var[N(t+1) - N(t)] = \frac{\alpha}{\rho}\left(1 + \frac{1}{\rho}\right)$

Considerato l'intervallo [s,t[e fatti alcuni conti ottengo che
$s < t$, $\Pr(N(t) - N(s)) = n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\rho}{\rho+t-s}\right)^{\alpha} \left(\frac{t-s}{\rho+t-s}\right)^{n}$.
Allora fatti i conti posso scrivere che
$N(t) - N(s) \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{\rho}{\rho + (t-s)}\right)$
la distribuzione degli incrementi non è necessariamente una Poisson (in ogni incremento abbiamo che la varianza è maggiore della varianza attesa, quindi posso tenere conto della sovradispersione dei dati osservati)

Oss. $Pr(N(t) - N(s) = n|N(s) = m) =?$ è pari ad una quantità che dipende da m, in generale

Oss. $\{N(t), t \geq 0\}$ processo mistura di poissoniani con mistura F_Λ
$\{N(t)|\Lambda = x, t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità x
$N(t)|\Lambda = x \sim Poi(xt)$
$E[N(t)] = \lambda t$ ove $\lambda = E(N(t+1) - N(t))$ ha significato di arrivi in intervalli unitari.
$E(N(t) - N(s)) = \lambda(t-s)$
$U = \frac{\Lambda}{\lambda}$ da cui $\Lambda = \lambda U$ e $E(U) = 1$
si preferisce assegnare una intensità, quindi si inserisce un parametro di disturbo U con una media unitaria

Processo mistura di poissoniani di speranza matematica unitaria

Dato$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di conta, U parametro aleatorio con $E(U) = 1$
Ipotesi: