

TECNICA ATTUARIALE

DELLE ASSICURAZIONI

DANNI

①

TS - 30 - 08 - 2013, (7 - 78)

RICHIAMO PROCESSI STOCASTICI

DEF.

Ora PROCESSO STOCASTICO o PROCESSO ALEATORIO sono famiglie di numeri

aleatori che indichiamo

$$\{X(t), t \in T\} \quad \text{oppure} \quad \{X_t, t \in T\}$$

es: $N(t)$

es: N_t

$Y(t)$

Y_t

dove t è un indice o un "parametro", $t \in T$ insieme di indici

$$T \subset \mathbb{R}$$

se T ha la cardinalità del continuo il processo si dice a **PARAMETRO CONTINUO**

es: $T = [t_1, t_2]$

$T = [0, +\infty]$

se T invece è finito e numerabile il processo si dice a **PARAMETRO DISCRETO**

es: $T = \{t_1, \dots, t_n\}$

$T = \{t_1, t_2, \dots\}$

Quanto $t \in T$, $X(t)$ è m.a.

P partizione dove sono definiti tutti i m.a. della famiglia

$$X(t; \cdot) : P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \in P \rightarrow X(t; \omega) \in \mathbb{R}$$

determinazione di $X(t)$ corrispondente ad un evento elementare ω

$\{X(t; \omega), \omega \in P\}$ insieme delle determinazioni possibili del m.a. $X(t)$

Quanto $\omega \in P$

$$X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \in T \rightarrow X(t, \omega) \in \mathbb{R}$$

$\{X(t, \omega), t \in T\}$ insieme delle tracce/fattorie/realizzazioni del process. che
hanno spunto su ω

VALUTAZIONE PROBABILISTICA

- X m.a.

$$F_x(x) = \Pr(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x_1 \leq x_2 \quad (X \leq x) \Rightarrow (X \leq x_2) \quad \text{famiglia monotone}$$

- $0 \leq F_x(x) \leq 1 \quad \forall x$

- F_x monotona non decrescente, prodotto logico

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = \Pr(\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} X \leq x) = 0$
 ϕ evento impossibile

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = \Pr(\bigvee_{x \in \mathbb{R}} X \leq x) = 1$ \rightarrow come logica
 Ω evento certo

- F_x continua a dx

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_x(x) = F_x(x_0)$$

$$\Pr(\bigwedge_{x > x_0} X \leq x) = \Pr(X \leq x_0)$$

- $(X \leq x) = \phi \Rightarrow F_x(x) = 0$

- $(X \leq x) = \Omega \Rightarrow F_x(x) = 1$

- $x \neq y, (X \leq x) = (X \leq y) \Rightarrow F_x(x) = F_y(y)$

$$\Rightarrow \Pr(a < X < b) = F_x(b) - F_x(a)$$

- (X, Y) coppia di m.a.

$$F_{x,y}(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

CONGIUNTA

- $0 \leq F_{x,y}(x, y) \leq 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

- fissato $y \in \mathbb{R}$

$F_x(\cdot, y)$ è funz. monotona non decrescente continua a dx

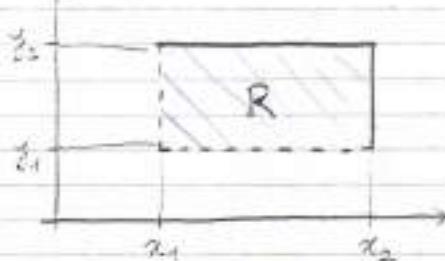
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(\cdot, y) = 0$

- fissato $x \in \mathbb{R}$

$F_y(x, \cdot)$ è funz. monotona non decrescente continua a dx, $\lim_{y \rightarrow +\infty} F_y(x, y) = 1$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} F_{x,y}(x,y) = \Pr \left(\bigvee_{x,y \in \mathbb{R}} (X \leq x, Y \leq y) \right) = 1 \rightarrow \text{misurabile}$$

$$x_1 < x_2, y_1 < y_2$$



$$\begin{aligned} \Pr(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) &= \\ &= \Pr(X \leq x_2, Y \leq y_2) - \Pr(X \leq x_2, Y \leq y_1) - \Pr(X \leq x_1, Y \leq y_1) + \Pr(X \leq x_1, Y \leq y_2) \\ &= F_{x,y}(x_2, y_2) - F_{x,y}(x_2, y_1) - F_{x,y}(x_1, y_1) + F_{x,y}(x_1, y_2) \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{x,y}(x,y) = \Pr \left(\bigvee_{y \in \mathbb{R}} (X \leq x, Y \leq y) \right) = \Pr(X \leq x) = F_x(x)$$

FUNZIONE DI
RIPARTIZIONE
MARGINALE DI X

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{x,y}(x,y) = \Pr \left(\bigvee_{x \in \mathbb{R}} (X \leq x, Y \leq y) \right) = \Pr(Y \leq y) = F_y(y)$$

FUNZIONE DI
RIPARTIZIONE
MARGINALE DI Y

• (X_1, \dots, X_n) campione di n.a.

$$F_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

• vengono le stesse considerazioni fatte per il caso bidimensionale

$$\Pr(X_1, \dots, X_n \in R) \geq 0$$

↳ rettangolo di \mathbb{R}^n

ASSEGNARE UNA VALUTAZIONE PROBABILISTICA AD UN PROCESSO STOCASTICO

LEGGE DEL PROCESSO STOCASTICO

$$\{X(t), t \in T\}$$

• funzione di funzioni LEGGE e LEGGE TEMPORALE DEL PROCESSO

insieme delle funzioni di ripartizione condizionate per ogni istantanea finito di n.a. del processo

$$\mathcal{F} = \left\{ F_{X(t_1), \dots, X(t_m)} ; t_1, \dots, t_m \in T ; m=1, 2, \dots \right\}$$

• $\forall n, \forall t_1, \dots, t_n$

$F_{X(t_1), \dots, X(t_m)}$ è funz. di riportaz. per $(X(t_1), \dots, X(t_m))$

• (T_1, \dots, T_m) permutazione di $(1, \dots, m)$

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_m)}(x_1, \dots, x_m) = F_{X(T_1), \dots, X(T_m)}(x_{T_1}, \dots, x_{T_m})$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X(t_1), \dots, X(t_m), X(t_{m+1}), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_{m+1}) = F_{X(t_1), \dots, X(t_m)}(x_1, \dots, x_m)$

se $X(t)$ $t \in T$ sono stocasticamente indipendenti

pure le $F_{X(t)}$ $t \in T$ marginali si possono costruire le congruenti

se $X(t)$ sono anche identicamente distribuite

il tutto è ancora più semplice

• X m.a. con determinazioni nel discreto $(E) \subset \mathbb{R}$

$$\Pr(X=a) \quad a \in E$$

dalle quali si costruisce la funz. di riportaz.

• $\{X(t), t \in T\}$

se le determinazioni $X(t) \in E = \{j_1, j_2, \dots\}$

$$\Pr(X(t_1)=j_1, \dots, X(t_m)=j_m) \quad \forall m, \forall t_1 < \dots < t_m, \forall j_1, \dots, j_m \in E$$

• sia $T \subset \mathbb{R}$, intervalli

$\{X(t), t \in T\}$ proc. a param. continuo

DEF

"se per ogni scelta di un n° punto di momento del processo
tutti gli incrementi degli istanti successivi sono stocasticamente
indipendenti"

$X(t) - X(s)$ incremento del proc. in $[s, t]$ INDIPENDENZA STOCHASTICA

Il processo è detto ab. INCREMENTI INDEPENDENTI se

$\forall m > 0, \forall s_1, t_1, \dots, s_m, t_m \in T$ s.t. $s_1 < t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_m \leq t_m$

$X(t_1) - X(s_1), \dots, X(t_m) - X(s_m)$ sono m.a. stocasticamente indipendenti

$\frac{s_1}{t_1} \leq \frac{s_2}{t_2} \leq \dots \leq \frac{s_m}{t_m} \Rightarrow$ gli incrementi relativi a gli intervalli s.t.

$X(t_1) - X(s_1), \dots, X(t_m) - X(s_m)$ stocast. indip.

H una densità
che probabilmente
è costante

$\forall i = 1, \dots, m$

$$X(t_i) - X(s_i) \stackrel{d}{=} X(t_i) - X(s_i) | H$$

$$\forall H \text{ s.t. } H = \bigcup_{j=1}^{t-1} [X(t_j) - X(s_j) \in A_j]$$

$A_j \in \mathcal{R}$

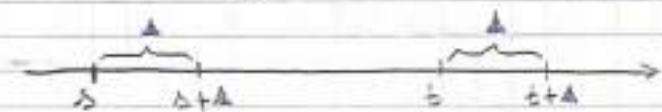
dove H è lo stato d'infusione
che qualifica tutti gli eventi
negli altri incrementi del processo

DEF

il processo è detto ab. INCREMENTI STAZIONARI

$\forall s, t \in T \quad s < t$

$X(t) - X(s)$ ha legge che dipende da $t-s$ e non da s, t separatamente



legge degli incrementi non
sarebbe lo stesso se avessero una
tale durata/ampiezza

$$X(s+\Delta) - X(s) \stackrel{d}{=} X(t+\Delta) - X(t)$$

TS - 01-10-2013 (4 ore)

NOTAZIONE (note)

$\{X(t), t \in T\}$ T continuo //

$\{X_t, t \in T\}$ T discreto //

DEF

un proc. stocastico $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto PROCESSO DI CONTA se $N(t)$ conta

il num. di manifestazioni di un fisico fenomeno (arrivi) nell'intervallo $[0, t]$

• $\forall t \geq 0 \quad N(t) \geq 0$

• $\forall t \geq 0 \quad N(t)$ ha determinazioni naturali $(0, 1, 2, \dots)$

• $\forall s, t \quad s < t, \quad N(s) \leq N(t)$

• $N(t) - N(s) =$ "num. di arrivi nell'intervallo $[s, t]$ "

DEF: PROCESSO DI POISSON

un proc. di conta $\{N(t), t \geq 0\}$ è detto PROCESSO DI POISSON CON

INTENSITÀ λ , $\lambda > 0$, se vengono le quattro seguenti proprietà:

Axioms (I, II, III, IV)

I. il proc. è ab incrementi indipendenti

$$\Leftrightarrow \forall n, \forall s_1 < t_1 \leq \dots \leq s_n < t_n$$

$N(s_1) = N(t_1), \dots, N(t_n) = N(s_n)$ sono strettamente indipendenti

II. $\forall t > 0, \forall \Delta t > 0$

$$\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = 2\Delta t + o(\Delta t)$$

"1 arrivo nell'intervallo"

$$\xrightarrow{\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0} \text{infinitesima di ordine superiore a } \Delta t$$

III. $\forall t > 0, \forall \Delta t > 0$

$$\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

"2 e più arrivi nell'intervallo"

ASSIOMA DI ESCLUSIONE NEGLI EVENTI MULTIPLI

→ hanno probabilità $\rightarrow 0$.

IV. $\Pr(N(0) = 0) = 1$

$\xrightarrow{\text{evidenz. centro}}$

OSS:

$$\bullet \text{ II} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = 2$$

\Rightarrow

$$\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \underbrace{\frac{2\Delta t}{\Delta t}}_{2} + \underbrace{\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}_0 \quad \Delta t \rightarrow 0^+$$

\Leftrightarrow

$$\text{poniamo, } o(\Delta t) = \frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) - 2}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} o(\Delta t) = 0 \quad \text{funz. infinitesima per } \Delta t \rightarrow 0^+$$

$$\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = o(\Delta t) \cdot \Delta t + 2\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{o(\Delta t) \Delta t}{\Delta t} = 0$$

$$= 2\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\bullet \text{ III} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2)}{\Delta t} = 0$$

TEOREMA

se $\{N(t), t \geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità $\lambda \Rightarrow N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$

$$\text{cioè } P_r(N(t)=m) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \quad m=0,1,\dots$$

DIM:

finiamo $m \geq 0$, posto $P_m(t) = P_r(N(t)=m)$ sarà come funz di t per $t \geq 0$

$$\text{proviamo che } P_m(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, \quad t \geq 0$$

$m=0$

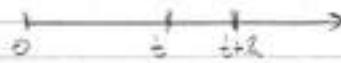
$$P_0(t) = P_r(N(t)=0) \quad (\text{da dim da } P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0)$$

finiamo $t \geq 0$

\rightarrow verificare che P_0 è derivabile in t .

finiamo $h > 0$

$$P_0(t+h) = P_r(N(t+h)=0)$$



$$[N(t+h)=0] = [N(t)=0 \wedge N(t+h)-N(t)=0]$$

$$\rightarrow P_0(t+h) = P_r(N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0)$$

$$= P_r(N(t)=0) P_r(N(t+h)-N(t)=0) \quad (\text{per l'indipendenza})$$

$$= P_0(t) P_r[N(t+h)-N(t) \geq 1]$$

$$= P_0(t) \{[N(t+h)-N(t)=1] \cup [N(t+h)-N(t) \geq 2]\}$$

$$\Rightarrow P_r(N(t+h)-N(t)=0) = 1 - P_r(N(t+h)-N(t)=1) - P_r(N(t+h)-N(t) \geq 2)$$

$$= 1 - (2h + o(h)) - o(h)$$

$$= 1 - 2h + o(h)$$

$$= P_0(t)(1 - 2h + o(h)) \quad | P_0(t) - \lambda h P_0(t+h) o(h) \quad \text{per l'assunzione II e III.}$$

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = P_0(t) \left(-\frac{2h}{h} + \frac{o(h)}{h} \right) \quad | \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = P_0(t) \left(\frac{-2h}{h} + \frac{o(h)}{h} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P_0(t) & -2 & 0 \end{array}$$

$$h \rightarrow 0^+$$

$P_0(t)$ è una probabilità quindi $0 \leq P_0(t) \leq 1$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -2P_0(t)$$

$\Rightarrow P_0$ ammette derivate da finita in t

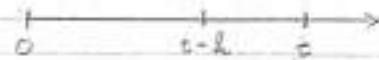
$t > 0$

$$P_0(t) = \Pr(N(t)=0)$$

$$= \Pr(N(t-h)=0, N(t)-N(t-h)=0)$$

$$= \Pr(N(t-h)=0) \Pr(N(t)-N(t-h)=0)$$

$$= P_0(t-h) (1-2h+\sigma^2(h))$$



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (1-2h+\sigma^2(h)) = 1$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
1 0 0

H. per un segno

\exists intorno di zero in cui il segno è costante

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} P_0(t-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} P_0(t) \cdot \frac{1}{1-2h+\sigma^2(h)}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
P_0(t) 1

in un opportuno intorno di 0

$$= P_0(t)$$

la funz. è ct. a ∞

$$\frac{P_0(t) - P_0(t-h)}{h} = P_0(t-h) \left[\underbrace{\frac{-2h}{h} + \frac{\sigma^2(h)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ P_0(t)}} \right]$$

$\downarrow \quad \downarrow$
-2

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P_0(t) - P_0(t-h)}{h} = -2P_0(t)$$

$$h \rightarrow 0^+$$

P_0 ammette derivata se finita in t

Limite da sin e da de sono finiti e uguali $\Rightarrow P_0$ è derivabile in t

$$P_0'(t) = -2P_0(t) \quad \forall t$$

La derivabilità
implica la
costanza

$\Rightarrow P_0$ è continua

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\ln P_0(t) \right] = -2$$

\Rightarrow è una primitiva di -2

$$\Rightarrow \ln P_0(t) = -2t + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Scissa d'
exp.

OCCHIOTTO!

Si può dividere?

$$\text{Se } \rightarrow \text{ sì } \circledast \quad P_0(t) > 0$$

$$P_0(t) = e^{-2t} e^C = \lambda e^{-2t} \quad \lambda > 0$$

$$P_0(0) = P_0(N(0)=0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = P_0(0) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\neq \lambda \quad \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\Rightarrow P_0(t) = e^{-t} \quad t \geq 0$$

(*)

$$P_0(0) = 1$$

$P_0(\cdot)$ continua

$\Rightarrow \exists I_0^+ : P_0(t) > 0$ (la funzione non è funz. c.c.) del cui interno

quindi t.c. $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$A = \{t \geq 0 \mid P_0(t) > 0\} = \{t \geq 0 \mid P_0(t) = e^{-\lambda t}\}$$

• $A \neq \emptyset$ (contiene I_0^+)

• A è intervallo

$$t_1, t_2 \in A \Rightarrow \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \in A$$

$$\alpha \in [0,1]$$

$$t_1 < t_2$$

$$N(t_2) = 0 \Rightarrow N(t_1) = 0$$

$P_0(t)$ è monotona non decrescente.
(vedi anche classifica monotona)

• Aumento illimitato: $A = [0; +\infty[$

per cui avendo A aumento limitato

$$\Rightarrow \exists T = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} P_0(t) = e^{-\lambda T}$$

$$\lim_{t \rightarrow T^+} P_0(t) = 0$$

ASSURDO! (P_0 è continua)

quindi non può essere
aumento limitato.

• $n \geq 0$

$$\text{(confronto dim che } P_n(t) = P_0(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad t \geq 0)$$

$$n=0 \rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$$

$$n \geq 1 \rightarrow P_n(t) = P_0(N(t)=n) = ? \quad t \geq 0$$

diviso $t \geq 0, \lambda > 0$

$$P_0(t+\Delta) = P_0(N(t+\Delta)=n)$$



$$\begin{aligned}
 & [N(t+2) = m] = [A(t+2) = m \wedge \Omega] \\
 & \quad \rightarrow [A(t+2) - A(t) = 0] \vee [A(t+2) - A(t) = 1] \vee [A(t+2) - A(t) = 2] \\
 & \quad \text{event: center} \\
 & = [A(t+2) = m \wedge A(t+2) - A(t) = 0] \vee [A(t+2) = m \wedge A(t+2) - A(t) = 1] \vee [A(t+2) = m \wedge A(t+2) - A(t) = 2] \\
 & \quad \uparrow \\
 & = [A(t) = m \wedge A(t+2) - A(t) = 0] + [A(t) = m-1 \wedge A(t+2) - A(t) = 1] + \textcircled{E}
 \end{aligned}$$

TS-07-10-2013 (6.02E) 2nd sett

$$\frac{P_m(t+h) - P_m(t)}{h} = P_m(t) \left[\frac{-2X}{h} + \frac{\sigma(h)}{h} \right] + P_{m+1}(t) \left[\frac{2X}{h} + \frac{\sigma(h)}{h} \right] + \frac{P_0(t)}{h}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $P_m(t)$ -2 0 $P_{m+1}(t)$ 2 0 0 $h \rightarrow 0^+$
 \downarrow \downarrow
 $-2P_m(t)$ $2P_{m+1}(t)$

$$P_r(\varepsilon) \leq P_r(N(t+\delta) - N(t) \geq 2) = s(\delta)$$

$$0 \leq \frac{P_r(E)}{\lambda} \leq \frac{\sigma(2)}{\lambda}$$

\downarrow \downarrow $\lambda \rightarrow 0^+$ \Rightarrow $\frac{P_r(E)}{\lambda} \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow 0^+$)

$$\Rightarrow \exists \text{ finite } \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{P_m(t+\delta) - P_m(t)}{\delta} = -2P_m(t) + 2P_{m-1}(t)$$

$\Rightarrow P_m(\cdot)$ ammette derivate da finita int

analogamente si prova che $P_n(z)$ ammette derivate su finite in t di ordine

$\Rightarrow P_{\text{in}}(z)$ is dominant in the

$$P_m^1(z) = -2P_0^1(z) + 2P_{m-1}^1(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall m \geq 1 \quad (\text{A})$$

SISTEMA DI KOGOROV

$(P_m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ definite su $[0; +\infty]$ t.c. $P'_m(t) = -2P_m(t) + 2P_{m+1}(t)$ $\forall t > 0$

1) $P'_m(t) + 2P_m(t) = 2P_{m+1}(t)$ / e^{2t} moltiplico per per i membri

2) $e^{2t} [P'_m(t) + 2P_m(t)] = e^{2t} [2P_{m+1}(t)]$

3) $\frac{d}{dt} [e^{2t} P_m(t)] = 2e^{2t} P_{m+1}(t)$ (B)

equivalente
 $\textcircled{A} \Leftrightarrow \textcircled{B}$

mostriamo che la famiglia di funz. $(P_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$, definita su $[0; +\infty]$ t.c. valgono (3)
 quando $P_0(t) = e^{-2t}$ $t > 0$, è tale che

$$\boxed{P_n(t) = e^{-2t} \frac{(2t)^n}{n!} \quad t > 0}$$

Dimostrazione per
 induzione per

Basi: $n=1$

$$\boxed{P_1(t) = e^{-2t} (2t)}$$
 da dim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{2t} P_1(t)] &= 2e^{2t} P_1(t) \\ &= 2e^{2t} e^{-2t} = 2 \end{aligned}$$

con $n=1$ abbiamo dimostrato che

$$P_1(t) = e^{-t} \cdot \frac{dt}{1!}$$

$$e^{2t} P_1(t) = 2t + c \quad c \in \mathbb{R} \quad \boxed{\text{hantica}}$$

$$P_1(t) = e^{-2t} [2t + c]$$

$$P_1(0) = P_1(1)(0) = 0 \quad \text{dimostra} \quad \boxed{c=0}$$

$$= e^{-2t} [0t + c] = c$$

$$\Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow P_1(t) = e^{-2t} 2t$$

La base è dimostrata

ipotesi induttiva: $P_{n-1}(t) = e^{-2t} \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!}$ supponiamo vero

$$\frac{d}{dt} [e^{2t} P_{n-1}(t)] = 2e^{2t} e^{2t} \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= 2 \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$\frac{d}{dt} \frac{(2t)^{n-1}}{n} = \frac{(2t)^n}{n}$ è somma di $\sum_{k=1}^n 2^k t^{n-k}$

$$\Rightarrow e^{2t} P_n(t) = 2 \frac{(2t)^n}{n} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$P_n(t) = e^{2t} \left[\frac{(2t)^n}{n!} + c \right]$$

$$\begin{aligned} P_n(0) &= P_n(1)(0) = m = 0 \\ &= 1 \\ &\Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_n(t) = e^{2t} \frac{(2t)^n}{n!}$$

processo induttivo provato

Allora dimostriamo che:

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di Poisson con intensità λ

$$\Rightarrow P_m(t) = P_n(N(t)=m) = e^{2t} \frac{(2t)^m}{m!} \quad \forall m \geq 0$$

TEOREMA

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di Poisson è un proc. ad incrementi stazionari

cioè per s, t $s < t$ il m.a. $N(t) - N(s)$ ha legge che dipende da $t-s$ e non da t, s separati.

TEOREMA

Sia (1) $\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di Poisson di intensità λ

mentre $\tau > 0$, posto $N^{(\tau)}(t) = N(\tau+t) - N(\tau)$

il proc. (2) $\{N^{(\tau)}(t), t \geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità λ

cioè il nuovo processo risulta probabilisticamente equivalente a quello originario

NOTA:

proveremo che (2) soddisfa gli axiomi I, II, III, IV

OSS:

$$s < t \quad N^{(\tau)}(t) - N^{(\tau)}(s) = \text{incremento di (2) relativo a } [s, t]$$

$$= N(\tau+t) - N(\tau) - [N(\tau+s) - N(\tau)]$$

$$= N(\tau+t) - N(\tau+s) \quad \text{incremento di (1) relativo a } [s, t]$$

$$s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_m < t_m$$

$$\tau+s_1 < \tau+t_1 \leq \tau+s_2 < \tau+t_2 \leq \dots \leq \tau+s_m < \tau+t_m$$

gli incrementi relativi ad intervalli disgiunti di (2) sono anche incrementi relativi ad intervalli disgiunti di (1)

\Rightarrow (2) è proc. di incrementi indipendenti

\Rightarrow pn (2) m.a. unica I

$$\bullet \Pr(N^{(n)}(t+\Delta t) - N^{(n)}(t) = 1) = \Pr(N(\tau + \frac{1}{n} + \Delta t) - N(\tau + \frac{1}{n}) = 1) \\ = 2\Delta t \sim \sigma(\Delta t) \quad \text{per la II di (1)}$$

\Rightarrow (2) verifica su I

$$\bullet \Pr(N^{(n)}(t+\Delta t) - N^{(n)}(t) \geq 2) = \Pr(N(\tau + \frac{1}{n} + \Delta t) - N(\tau + \frac{1}{n}) \geq 2) \\ = \sigma(\Delta t) \quad \text{per la II di (1)}$$

\Rightarrow (2) verifica su II

$$\bullet \Pr(N^{(n)}(0) = 0) = \Pr(\emptyset) = 1 \quad \Rightarrow \text{(2) verifica su IV}$$

$N^{(n)}(0) = 0$ evidentemente

\Rightarrow (2) è process. di Poisson con intensità λ

$$\Rightarrow N^{(n)}(t) \sim \text{Poi}(2t) \quad \text{per il terzo visto in precedenza}$$

$$N(\tau + t) - N(\tau) \sim \text{Poi}(2t)$$

la distrib. che dipende da t e non da τ

$$\Rightarrow s < t \quad N(t) - N(s) \sim \text{Poi}(2(t-s))$$

Esempio:

$$N(t+1) - N(t) \sim \text{Poi}(2) \quad \text{ci dà valore 2 come num. di arrivi in un intervallo di ampiezza unitaria}$$

$$\mathbb{E}[N(t+1) \cdot N(t)] = 2$$

dato $m > 0$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m \in \mathbb{R}$, $i_1 \leq \dots \leq i_m \in \mathbb{N}$



$$\Pr(N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_m) = i_m) =$$

$$= \Pr(N(t_1) = i_1, N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1, \dots, N(t_m) - N(t_{m-1}) = i_m - i_{m-1}) =$$

$$= \Pr(N(t_1) = i_1) \Pr(N(t_2) - N(t_1) = i_2 - i_1) \dots \Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = i_m - i_{m-1})$$

$$= \frac{\lambda^{i_1}}{i_1!} \frac{e^{-\lambda t_1}}{t_1!} \cdot \frac{\lambda^{i_2-i_1}}{i_2-i_1!} \frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{(t_2-t_1)!} \dots \frac{\lambda^{i_m-i_{m-1}}}{i_m-i_{m-1}!} \frac{e^{-\lambda(t_m-t_{m-1})}}{(t_m-t_{m-1})!}$$

TEOREMA

Il proc. di Poisson è markoviano, cioè:

Esiste $m \in \mathbb{N}$, $0 < t_1 < \dots < t_m \in \mathbb{R}$, $i_1, i_2, \dots, i_{m-1} \in \mathbb{N}$

$$\Pr(N(t_m) = j \mid N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_{m-1}) = i_{m-1}) =$$

$$= \Pr(N(t_m) = j \mid N(t_{m-1}) = i_{m-1}) \quad \text{contro solo l'ultimo evento}$$

\rightarrow dipende da $i_{m-1}, j, t_m - t_{m-1}$

DIM:

$$\Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = j - i_{m-1} \mid N(t_1) = i_1, \dots, N(t_{m-1}) = i_{m-1}) =$$

$$[t_{m-1}, t_m] \quad N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_{m-1}) = i_{m-1}, N(t_m - t_{m-1}) = j - i_{m-1}$$

$$[0, t_1] \quad [t_1, t_2] \quad [t_{m-1}, t_m]$$

$$= \Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = j - i_{m-1}) \quad \text{per assioma I}$$

$$\Pr(N(t_m) = j \mid N(t_{m-1}) = i_{m-1}) = \Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = j - i_{m-1} \mid N(t_{m-1}) = i_{m-1})$$

$$[t_{m-1}, t_m]$$

$$= \Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = j - i_{m-1}) \quad \text{per assioma I}$$

\Rightarrow nega la tesi

TS-03-10-2013 (3 ore)

$\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di conteo

$T_m =$ "tempo di attesa per l'arrivo m -esimo"

$$T_0 = 0$$

$\{T_m, m \geq 0\}$ processo dei tempi di attesa

$\{X_m, m \geq 0\}$ processo degli arrivi markoviani a m. dist.

$\{X_m, m \geq 0\}$ processo dei tempi di interventi



OSS:

$$Y_1 = T_1$$

$$T_n = W_1 + \dots + W_n \quad \text{e.g.}$$

$$N(t) = \text{card} \{ n \geq 1 \mid T_n \leq t \} = \text{card} \{ n \geq 1 \mid W_1 + \dots + W_n \leq t \}$$

$$= \sum_{n \geq 1} [T_n \leq t] \quad \text{indicator variable}$$

$$N(t) = n \Leftrightarrow T_n \leq t \wedge T_{n+1} > t$$

$$\Leftrightarrow T_n \leq t < T_{n+1}$$

$\{N(t), t \geq 0\}$ processus de Poisson con intensité 2

$$F_{W_1}(t) = P_r(W_1 \leq t) \quad t \geq 0$$

$$= P_r(T_1 \leq t)$$

$$= 1 - P_r(T_1 > t)$$

$$[T_1 > t] = [N(t) = 0]$$

$$P_r(N(t) = 0) = e^{-2t}$$

$$= 1 - e^{-2t}$$

//

RICHIAMO

$$X \sim \exp(\rho) \quad \rho > 0$$

$$f_x(x) = \rho e^{-\rho x} \quad x \geq 0$$

$$F_x(x) = 1 - e^{-\rho x} \quad x \geq 0$$

$$E(X) = 1/\rho$$

$$V(X) = 1/\rho^2$$

$$m_x(t) = \frac{\rho}{\rho-t} \quad t < \rho$$

//

$$\Rightarrow Y_1 = T_1 \sim \exp(2)$$

TEOREMA

$\{Y_i, i \geq 0\}$ proc. de Poisson con int. 2

$$\Rightarrow \{Y_1, Y_2, \dots\} \text{ i.i.d., } Y_m \sim \exp(2) \quad \forall m$$

$$T_m = W_1 + \dots + W_m$$

$$m_{T_m}(t) = \prod_{i=1}^m m_{W_i}(t)$$

$$= \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{2-t} \right) = \left(\frac{1}{2-t} \right)^m \quad t < 2 \quad \text{è f.g.m. di una Gamma}(m, 2)$$

$$\Rightarrow T_m \sim \text{Gamma}(m, 2)$$

$$\frac{f_{T_m}(t)}{f_T(t)} = \frac{2^m}{T(m)} t^{m-1} e^{-2t} \quad t > 0$$

\Rightarrow una distib. Erlangiana $(m, 2)$
 $(m \in \mathbb{N})$

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intenità 2

abbiamo visto che vale il sistema anomatico

Ⓐ I, II, III, IV

ma non è l'unico modo per definire un proc. di Poisson con int. 2
 anche anche:

Ⓑ 1. = I

2. dati $s < t$, $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(2(t-s))$

3. = IV

Ⓐ \Leftrightarrow Ⓑ

AIM:

Ⓐ \Rightarrow Ⓑ è banale

Ⓑ \Rightarrow Ⓑ

I. $P_r(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) \quad \Delta t > 0$

$$\text{I} \Leftrightarrow \text{II. } \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P_r(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = 2$$

$$N(t+\Delta t) - N(t) \sim \text{Pois}(2\Delta t)$$

$$\frac{P_r(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = e^{-2\Delta t} \cdot \underbrace{\frac{2\Delta t}{\Delta t}}_{2} \quad \Delta t \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t} = 2 \Leftrightarrow \text{II}$$

$$\text{II } \Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = 1 - \Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 0) - \Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)$$

$$= 1 - e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda t} \cdot 2\lambda t$$

$$\frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2)}{\Delta t} = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{\Delta t} - \frac{e^{-2\lambda t} \cdot 2\lambda t}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0^+]{} \frac{2}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{\Delta t} = 2 \cdot \frac{e^{-2\lambda t} - 1}{-2\lambda t} \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0^+]{} 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Pr(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2)}{\Delta t} = 0 \Leftrightarrow \text{III}$$

e vale anche:

○ sia $\{W_1, W_2, \dots\}$ un processo di m.a. iid con $W_i \sim \exp(2)$

noto $T_n = W_1 + \dots + W_n$ e $N(t) = \text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}$

$\Rightarrow \{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson con intensità 2

Ⓐ \Leftrightarrow Ⓑ \Leftrightarrow Ⓒ

DEF

sia $\{W_1, W_2, \dots\}$ p.zs di m.a. iid

noto $T_n = W_1 + \dots + W_n$ e $N(t) = \text{card}\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}$

$\{N(t), t \geq 0\}$ è detto PROCESSO DI RINNOVAMENTO o DEI RINNOVI

$\{N(t), t \geq 0\}$ può essere visto come un processo di arrivo dei rinnovi per:

- una qualsiasi distribuzione
- un'operazione di corretti controlli

tuttavia se consideriamo un processo di Poisson possono nascere alcuni problemi dovuti alle ipotesi restrittive del questo processo:

- indipendenza degli incrementi: può non essere ragionevole
(es: malattie infettive \rightarrow contagio; incendi boschivi \rightarrow stagione secca, ecc.)
- stazionarietà: altra ipotesi piuttosto forte
(es: episodi di siccità nel breve periodo, freq. annuale decrecente nel lungo degli anni, ...)
- incrementi hanno distrib. di Poisson: la media e la varianza non sempre nella
pratica coincidono
c'è un problema di sovrapposizione che viene catturato dalla formula esatta.
Risulta quindi necessario introdurre modelli analoghi a quello di Poisson in cui vengano allentati i vincoli di volta in volta

PROCESSO DI POISSON NON OMogeneo

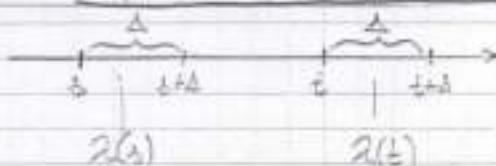
$\{N(t), t \geq 0\}$ processi di conteggio
vulgari I, II, III e

le II è condito da $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$

$$\text{II}' \quad \Pr(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \boxed{\lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)}$$

2.7 misura e integrabile in ogni intervallo

2. fatto di proporzionalità dipende da $\frac{1}{t}$



si prova che:

$$\text{se } \Delta t \quad N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\mu(t) - \mu(s))$$

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda(u) du$$

\Rightarrow la legge di $N(t) - N(s)$ dipende da t, s

$$\mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \lambda(u) du$$

• $\lambda(t)$ è detta FUNZIONE DI INTENSITÀ DEL PROCESSO

• $\mu(t)$ è la FUNZIONE DEL VALORE ATTESO DEL PROCESSO

come dimostrazione:

havet $m, n, t \in \mathbb{R}$

$$P_m(s, t) = \Pr(N(t) - N(s) = m)$$

$P_m(\cdot, t)$ viene studiata come funz. di s

OSS:

• se $\lambda(t) = \lambda \neq t \Rightarrow$ proc. di Poisson omogeneo

$$\mu(t) = \lambda t$$

• se $\lambda(t)$ non costante \Rightarrow proc. di Poisson non omogeneo

$$\bullet \mu(0) = 0$$

$$\bullet t > 0 \Rightarrow \mu(t) > 0$$

• $\mu(\cdot)$ strettamente crescente

$$t_1 < t_2 \quad \int_0^{t_2} \lambda(u) du = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(u) du + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(u) du$$

• $\mu(\cdot)$ è continua (fraz. integrale di una funz. integrabile)

• $\mu(\cdot)$ è derivabile se $\lambda(\cdot)$ è continua

$$\mu'(t) = \lambda(t)$$

(A)

I, II, III, IV

(B)

$$1. = I$$

$$3. = IV$$

2' $\exists \mu(t)$ funz. definita su $[0, +\infty]$ con $\mu(0) = 0$, $\mu(t) > 0 \forall t > 0$,

$\mu(t)$ strettamente crescente, continua, soluz. unica $\mu(t) = \int_0^t \lambda(u) du$

$$\Leftrightarrow \mu(t) - \mu(s) = \int_s^t (\lambda(u) - \lambda(s)) du \quad \forall t > s$$

COLLEGAMENTI TRA PROC. DI POISSON OMogenei E NON OMogenei

essere $\{N(t), t \geq 0\}$ pr. di Poisson con intensità $\lambda=1$

essa $\mu(\cdot)$ funz. con caratteristica della funz. valore atteso
quindi $\tilde{N}(t) = N(\mu(t))$

$\Rightarrow \{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ è pr. di Poisson non omogeneo con funz. valore
atteso $\mu(\cdot)$

OSS:

$$s < t \quad \tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = N(\mu(t)) - N(\mu(s))$$

ogni incremento del process $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$

è anche incremento del proc. $\{N(t); t \geq 0\}$

combinando l'intervallo

Se consideriamo incrementi del proc. $\tilde{N}(t)$ relativi ad interv. disgiunti
otteniamo incrementi relativi ad interv. disgiunti del proc. $N(t)$ (per monotonia)

\Rightarrow il processo $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ è ad incrementi indipendenti

(se fissa un num. arbitrario finito di incrementi del proc. $\tilde{N}(t)$ su interv. disgiunti,
può vedere questi incrementi come incrementi del proc. $N(t)$ su interv. disgiunti che
non sono indipendenti per axioma I).

\Rightarrow vale 1.

$s < t$

$$\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) = N(\mu(t)) - N(\mu(s)) \sim \text{Poi}(\mu(t) - \mu(s)) \quad (\lambda=1)$$

\Rightarrow vale 2'.

$$\tilde{N}(0) = N(\mu(0)) = N(0)$$

$$\Pr(\tilde{N}(0)=0) = \Pr(N(0)=0) = 1$$

\Rightarrow vale 3.

TS-11-10-2013 (10 pts)

o sia $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ proc. di Poisson non omogeneo con funz. valore attesa $\mu(t)$
cioè μ definita su $[0; +\infty]$

$$\mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0 \quad t > 0$$

$\mu(\cdot)$ strettamente crescente, s.t. continua

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) = +\infty$$

$$\text{poniamo } N(t) = \tilde{N}(\mu^*(t))$$

$\Rightarrow \{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson con intensità $\lambda=1$

$$\mu(\cdot): [0; +\infty] \ni I \longrightarrow \mu(I) \text{ ins. immagine}$$

$$\mu(\cdot) \text{ strettamente crescente} \Rightarrow \exists \mu^*: \mu(I) \rightarrow [0; +\infty]$$

Inoltre garantita da $\mu(I) = [0; +\infty]$

$$\begin{aligned} \mu(\cdot) &\text{ è def. in un interv.} \\ \mu(\cdot) &\text{ è continua} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\Rightarrow \mu \text{ assume tutti i valori tra } \inf \mu(I) \text{ e } \sup \mu(I) \\ &\inf \mu(I) = \min \mu(I) = 0 \\ &\sup \mu(I) = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu(\cdot) = [0; +\infty]$$

guardiamo all'omologa ③

- provare:
 1. incrementi indip.
 2. $\forall s < t \quad N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(t-s) \quad (2.1)$
 3. $P_r(N(0)=0)=1$

se valgono $\Rightarrow \{N(t); t \geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità 1

noi abbiamo per $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$

1. incrementi indip.

2. $\forall s < t \quad \tilde{N}(t) - \tilde{N}(s) \sim \text{Pois}(\mu(t) - \mu(s))$

3. $P_r(\tilde{N}(0)=0)=1$.

OSS.

$N(t) - N(s)$ incr. del proc. ② $\{N(t), t \geq 0\}$ su $[s, t]$

$$N(t) - N(s) = \tilde{N}(\mu^*(t)) - \tilde{N}(\mu^*(s)) \quad \text{con } \mu^*(s) < \mu^*(t)$$

incr. del proc. ① $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$

- gli incr. del proc. ② relativi ad interv. disgiunti sono anche incr. del proc.

① relativi ad interv. disgiunti

$$s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots$$

$$\mu^*(s_1) < \mu^*(t_1) < \mu^*(s_2) < \mu^*(t_2) < \dots$$

il proc. ① è ad incr. indip. \Rightarrow proc. ② soddisfa axioma 1.

$$s < t \quad N(t) - N(s) = \tilde{N}(\mu^*(t)) - \tilde{N}(\mu^*(s)) = \tilde{N}(T) - \tilde{N}(S)$$

$$\text{per 2: } \tilde{N}(T) - \tilde{N}(S) \sim \text{Poi}(\mu(T) - \mu(S))$$

$$\mu(\mu^*(s)) - \mu(\mu^*(s))$$

$$t - s$$

$$\Rightarrow N(t) - N(s) \sim \text{Poi}(t-s)$$

ved. 2. per proc. ②

$$N(0) = \tilde{N}(\mu^*(0)) = \tilde{N}(0)$$

$$\Pr(N(0)=0) = \Pr(\tilde{N}(0)=0) = 1 \quad \text{per 3.}$$

\Rightarrow ② verifica 3.

È possibile passare da un proc. di Poisson omogeneo ad uno non omogeneo
e viceversa tramite una trasformazione deterministica del tempo

PROCESSI MISTURE DI POISSONIANI

cioè l'indip. somma degli incrementi

sia $\{N(t), t \geq 0\}$ proc. di conteo

sia $\lambda > 0$ parametro determinato (numero attese di arrivi/ di eventi)

• λ è determinazione possibile di λ

$\{N(t) | \lambda = \infty, t \geq 0\}$ è proc. di Poisson con intensità ∞

• è s ragionata la distrib di prob di λ ($F_\lambda = f_\lambda$)

\Rightarrow è s ragionata la legge del processo $\{N(t), t \geq 0\}$

NM:

E è evento logicamente dipendente da $\{N(t), t \geq 0\}$

$$\text{es: } E = [N(t) = n]$$

$$E = [N(t_1) = x_1, \dots, N(t_m) = x_m]$$

(a) λ con determinazioni x_1, \dots, x_m

$$\Pr(\lambda = x_i) = p_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

$$\Pr(E) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\Pr(\lambda = x_i)}_{p_i} \underbrace{\Pr(E | \lambda = x_i)}_{\text{è nasc in un nro di Poisson con int nro } x_i}$$

$\forall E$ logic dip. riusc a trovare le prob di E tramite combinazioni somme/misure

\Rightarrow trova la legge del processo

$$\Pr(E|H) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\Pr(\lambda = x_i | H)}_{\Pr(\lambda = x_i) \Pr(H | \lambda = x_i)} \Pr(E | H, \lambda = x_i)$$

$$\frac{\Pr(\lambda = x_i) \Pr(H | \lambda = x_i)}{\Pr(H)}$$

$$\Pr(H) = \sum_{j=1}^m p_j \Pr(H | \lambda = x_j)$$

(b) $\lambda \sim F_\lambda$

$$\Pr(E) = \int_0^\infty \underbrace{\Pr(E | \lambda = x)}_{\text{prob in un nro di Poisson con int nro } x} dF_\lambda(x)$$

\hookrightarrow prob in un nro di Poisson con int nro x

$\lambda \sim F_\lambda$ è detta di densità f_λ

$$\Pr(E) = \int_0^\infty \Pr(E | \lambda = x) f_\lambda(x) dx$$

$$\Pr(E|H) = \int_0^\infty \Pr(E | H, \lambda = x) dF_\lambda(x)$$

se $F_{\lambda H}$ ammette densità $f_{\lambda H}(x)$

$$\Pr(E|H) = \int_0^{+\infty} \Pr(E|H, \lambda=x) f_{\lambda H}(x) dx$$

$$= \frac{\int_A(x) \Pr(H|\lambda=x)}{\Pr(H)}$$

$$\Pr(H) = \int_0^{+\infty} \Pr(H|\lambda=x) f_\lambda(x) dx$$

\Rightarrow si può assegnare la legge del processo $\{N(t), t \geq 0\}$

tal processo è detto PROCESSO MISTURA DI POISSONIANI CON MISTURANTE F_λ

[PROBLEMINO]

$$N(t) | \lambda=\infty \quad \Pr(\lambda=\infty)=0 \quad \text{qui creare diragis}$$

$$\rightarrow \{N(t), t \geq 0\}$$

$\lambda > 0$ param. costante

a $\{N(t), t \geq 0\}$ assegniamo \mathbb{P}_λ (legge d'un proc di Poisson con int. λ) $\forall x$ determina da λ

E evento logico dip. da $\{N(t), t \geq 0\}$

$$\rightarrow \Pr_\lambda(E)$$

es:

$$\Pr_\lambda(E) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \quad \text{se } E = [N(t)=m]$$

$$\Pr(E) = \int_0^{+\infty} \Pr_\lambda(E) dF_\lambda(x)$$

TEOREMA

sia $\{N(t), t \geq 0\}$ processo mistura di poissoniani con misturante F_λ

\Rightarrow il proc. è ad incrementi stazionari

DIM:

$$s < t \quad \Pr(N(t)-N(s)=m) = \int_0^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)|\lambda=x) dF_\lambda(x)$$

$$\Pr(N(t+1) - N(t) \mid \lambda = x) = e^{-x} \frac{(x)^m}{m!}$$

dipende da $t-s$, non da t,s
 \Rightarrow è prob di incrementi stazionari

in particolare

$$N(t+1) - N(t) \stackrel{d}{=} N(1)$$

es:
 prob. mistura di poissoniani con misturante Gamma(α, β) (dotta di densità)

$$\Pr(N(t+1) - N(t) = m) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\Pr(N(t+1) - N(t) \mid \lambda = x)}_{\frac{e^{-x}}{m!} x^m} \underbrace{f_\lambda(x)}_{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}} dx$$

Misture di Poisson
 con unif. Π
 cui devo una
 funzione d'
 densità

bivariata

la costante di normalizzazione per la Gamma($\alpha+m, \beta+1$)

è: $\frac{p^\alpha}{m! \Gamma(\alpha)}$ che è reciproco dell'integrale

$$= \frac{p^\alpha}{m! \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+m)}{(p+1)^{\alpha+m}} = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{p+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{p+1}\right)^m}_{\text{densità di una Binomiale negativa}}$$

// RICHIAMO

$$N \sim \text{Bin Neg.}(\alpha, p)$$

$$\begin{aligned} \alpha > 0 \\ 0 < p < 1 \\ q = 1-p \end{aligned}$$

$$\Pr(N=m) = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} p^m q^m$$

$$E(N) = \alpha, \frac{q}{p}$$

$$\text{Var}(N) = \alpha, \frac{q}{p}$$

//

$$\Rightarrow N(t+1) - N(t) \sim \text{Bin Neg.} \left(\alpha, \frac{q}{p+1} \right)$$

$$E[N(t+1) - N(t)] = \infty \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p+1}{p} = \frac{\infty}{p}$$

$$V_N[N(t+1) - N(t)] = \infty \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(p+1)^2}{p^2} = \frac{\infty}{p} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$\delta < t$

$$\begin{aligned} \Pr(N(t) - N(s) = m) &= \int_0^{+\infty} \Pr(N(t) - N(s) = m | N(x) = x) f_{N(t)}(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x(t-s)} \frac{(x(t-s))^m}{m!} \cdot \frac{p^x}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1-px} dx \\ &= \frac{p^{\alpha}(t-s)^m}{m! \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+m-1} e^{-x(p+t-s)} dx \\ &= \frac{p^{\alpha}(t-s)^m}{m! \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+m)}{(p+t-s)^{\alpha+m}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{p}{p+t-s}\right)^\alpha \left(\frac{t-s}{p+t-s}\right)^m \end{aligned}$$

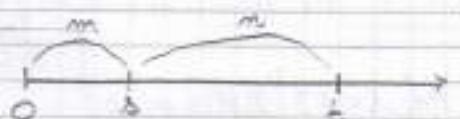
$$\Rightarrow N(t) - N(s) \sim \text{BinNeg} \left(\infty, \frac{p}{p+t-s} \right)$$

\Rightarrow La distribuzione degli incrementi non è necessariamente una Poisson

DIM: non indipendenza degli incrementi

es:

$$\delta < t \quad \Pr(N(t) - N(s) = m | N(s) = m) = ?$$



$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\Pr(N(t) - N(s) = m | N(s) = m \wedge \lambda = x)}_{\Pr(N(t) - N(s) = m | \Delta = x)} dF$$

$$\Pr(N(t) - N(s) = m | \Delta = x)$$

non indip. degli incrementi ma
poco da Poisson

$$\tilde{e}^{-x(t-s)} \frac{(x(t-s))^m}{m!} \text{ non dipende da } m$$

dipende da m

\Rightarrow in generale tale prob.
dipende da m

2)

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 & \text{con } p_1 \\ \lambda_2 & \text{con } p_2 \end{cases} \quad p_1 > 0 \quad p_1 + p_2 = 1$$

$$Pr(N(t) - N(s) = m \mid N(s) = m) = \sum_{i=1}^2 Pr(\lambda = \lambda_i \mid N(s) = m) \underbrace{Pr(N(t) - N(s) = m \mid N(s) = m, \lambda = \lambda_i)}_{\frac{e^{\lambda_i(t-s)}}{m!} \frac{(\lambda_i(t-s))^m}{m!}} \leftarrow$$

$$Pr(\lambda = \lambda_i \mid N(s) = m) = \underbrace{Pr(\lambda = \lambda_i) Pr(N(s) = m \mid \lambda = \lambda_i)}_{\sum_{j=1}^2 Pr(\lambda = \lambda_j) Pr(N(s) = m \mid \lambda = \lambda_j)} \quad \begin{matrix} \text{no dipende} \\ \text{da } m \end{matrix}$$

$$= \frac{p_i e^{-\lambda_i s} (\lambda_i s)^m}{\sum_{j=1}^2 p_j e^{-\lambda_j s} (\lambda_j s)^m} \quad \leftarrow \text{dipende da } m$$

VERIFICA

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = 0.1 \quad \lambda_2 = 0.2$$

$$s = 1 \quad t = 2$$

$$m = 0$$

$$Pr(N(2) - N(1) = 0 \mid \lambda = 0.1) = e^{-0.1} \approx 0.9048$$

$$Pr(N(2) - N(1) = 0 \mid \lambda = 0.2) = e^{-0.2} \approx 0.8187$$

$$Pr(\lambda = 0.1 \mid N(1) = m) = \begin{cases} \frac{0.5 e^{-0.1}}{0.5(e^{-0.1} + e^{-0.2})} \approx \frac{0.3048}{1.7235} & m=0 \\ \frac{0.5 (e^{-0.1} \cdot 0.1)}{0.5(e^{-0.1} \cdot 0.1 + e^{-0.2} \cdot 0.2)} \approx \frac{0.0305}{0.2542} & m=1 \end{cases}$$

$$Pr(\lambda = 0.2 \mid N(1) = m) = \begin{cases} \frac{0.5 e^{-0.2}}{0.5(e^{-0.1} + e^{-0.2})} \approx \frac{0.8187}{1.7235} & m=0 \\ \frac{0.5 (e^{-0.2} \cdot 0.2)}{0.5(e^{-0.1} \cdot 0.1 + e^{-0.2} \cdot 0.2)} \approx \frac{0.1637}{0.2542} & m=1 \end{cases}$$

\Rightarrow da questi risultati si giunge a verificare dietro, quindi l'esponente dipende dal valore di m .

OSS:

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo mistura di poissoniani con misura F_λ

$\{N(t) | \lambda = \alpha, t = 0\}$ proc. di Poisson con int. α

$N(t) | \lambda = \alpha \sim \text{Poi}(\alpha t)$

$$E[N(t) | \lambda = \alpha] = \alpha t$$

$$\bullet E[N(t)] = \int_0^{+\infty} E(N(t) | \lambda = \alpha) dF_\lambda(\alpha)$$

$$= t \int_0^{+\infty} \alpha dF_\lambda(\alpha) = \lambda t$$

$$E(\lambda) = \lambda$$

$$\lambda = E(N(1)) = E(N(t+1) - N(t))$$

num. attesi di arrivi in
interv. unitario

$$E[N(t) - N(s)] = \lambda(t-s)$$

$$\bullet U = \frac{\lambda}{E(\lambda)} = \frac{\lambda}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2U$$

$E(U) = 1$ si probabile non assegnare una
intensità \rightarrow si introduce un param.
di disturbo U con media unitaria

Proteus mistura di poissoniani con misurante di varianza matematica unitaria

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di conteo

U m.a. con $E(U) = 1$

per determinazione di U $\{N(t) | U=u, t \geq 0\}$ proc. di Poisson con int. $2u, u > 0$

si assegna la legge F_U di U

$$\lambda = E(N(t+1) - N(t))$$

2)

misurenti sia $U \sim \text{Gamma}(\alpha, \infty)$

$$E(U) = 1$$

$$V_{\text{m}}(U) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 \Pr(N(t+1) - N(t) = m) &= \int_0^{+\infty} \underbrace{\Pr(N(t+1) - N(t) = m \mid U=u)}_{\frac{u}{\alpha+2}} \lambda(u) du \\
 &= \frac{\alpha^m}{m! T(\alpha)} \lambda^m \int_0^{+\infty} u^{m-1} e^{-\alpha-2} e^{-\alpha u} du \\
 &\quad \text{L'insieme di una Gamma } (\alpha+m, \alpha+2) \\
 &= \left[\frac{(\alpha+2)^{\alpha+m-1}}{T(\alpha+m)} \right] \\
 &= \frac{\alpha^m}{m! T(\alpha)} \lambda^m \cdot \frac{T(\alpha+m)}{(\alpha+2)^{\alpha+m}} \\
 &= \frac{T(\alpha+m)}{m! T(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\alpha+2} \right)^{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha+2} \right)^m \\
 &\Rightarrow N(t+1) - N(t) \sim \text{Binomiale} \left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+2} \right)
 \end{aligned}$$

$$E[N(t+1) - N(t)] = \alpha \cdot \frac{2}{\alpha+2} \cdot \frac{\alpha+2}{\alpha} = 2$$

$$\text{Var}[N(t+1) - N(t)] = \alpha \cdot \frac{2}{\alpha+2} \cdot \frac{(\alpha+2)^2}{\alpha^2} = \frac{2(\alpha+2)}{\alpha} = 2 + \frac{2^2}{\alpha}$$

$t < t'$

$$\begin{aligned}
 \Pr(N(t') - N(t) = m) &= \int_0^{+\infty} \underbrace{\Pr(N(t') - N(t) = m \mid U=u)}_{\frac{u}{\alpha+2(t-t')}} \lambda(u) du \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(t-t')} \frac{(2u(t-t'))^m}{m!} \frac{\alpha u^{\alpha-1} e^{-\alpha u}}{T(\alpha)} du \\
 &= \frac{\alpha^m}{m! T(\alpha)} (2(t-t'))^m \int_0^{+\infty} u^{m-1} e^{-\alpha(t-t'+2(t-t'))u} du \\
 &= \frac{\alpha^m}{m! T(\alpha)} (2(t-t'))^m \cdot \frac{T(\alpha+m)}{(\alpha+2(t-t'))^{\alpha+m}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N(t) - N(t) \sim \text{Binomiale} \left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+2(t-t')} \right)$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- ST. YIKOSH (2002), "Non Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes", SPRINGER
 S.M. ROSS (1993), "Stochastic Processes", KLUWER

MONELLO CLASSICO DELLA TEORIA COLLETTIVA DEL RISCHIO (1950)

CRAMER-LUNDGREN

Si considera la gestione dell'attività assicurativa su più periodi / esercizi

0

Si intuisce su:

- corrispondenza dei premi
- dotazione iniziale di capitale
- gestione riassicurativa

Le decisioni vengono fatte sulla base del criterio delle probabilità di rovina.

Consideriamo un portafoglio di rischi "analogni"

O: risparmio iniziale

R > 0: dotazione iniziale di capitale (riserva iniziale)

si poniamo in uno schema a tempo continuo

P(t): montepremi incassato in $[0, t]$ S(t): risarcimento totale in $[0, t]$ $R(t) = R + P(t) - S(t) \quad t \geq 0$ capitale in dotazione in t

\{R(t), t \geq 0\} processo della riserva / surplus

si assume $P(t) = ct$, $c > 0$ num. cost.

$$P(t+1) - P(t) = c \quad \forall t$$

 $\rightarrow c$: montepremi incassato in ogni interv. unitario

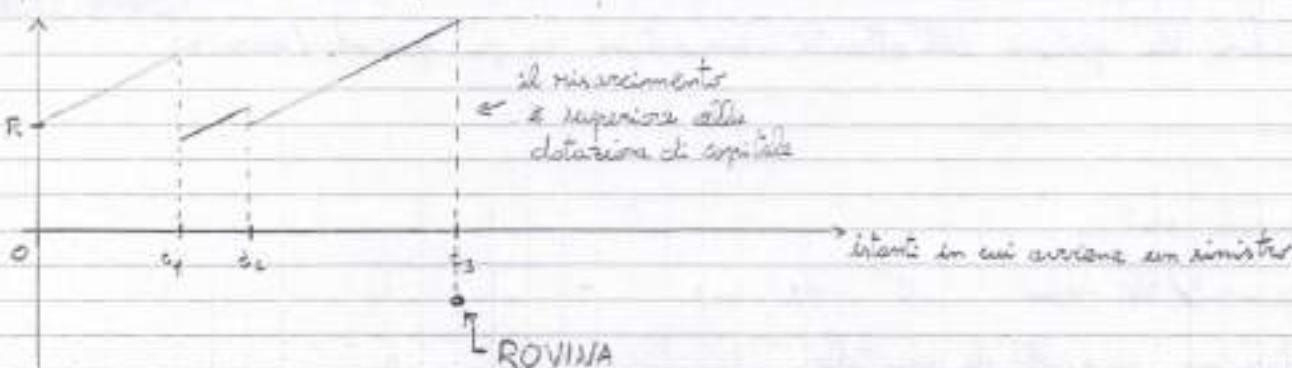
Stiamo costruendo un modello molto semplice:

- non si considerano spese
- non si tiene conto della redditività prodotta da eventuali investimenti dei premi
- non si considerano dividendi o distribuzioni
- i risconti vengono risarciti immediatamente
- il volume di affari è fijo nel tempo

...

$$\{R(t) = R + ct - S(t), t \geq 0\} \quad \text{processo della riserva}$$

possibili traiettorie del processo:



DEF: ROVINA

$$(a) \quad \mathbb{V}_{t \geq 0} (R(t) < 0) = \mathbb{V}_{t \geq 0} (R + ct - S(t) < 0)$$

$$(b) \quad T = \inf \{t \geq 0 \mid R(t) < 0\}$$

$\{R(t), t \geq 0\}, P$

t finale $R(t, \cdot) : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \mapsto R(t, \omega)$$

finale $\omega \in P$

$\{t \geq 0, R(t; \omega)\}$ realizzazione/traiettoria del proc. corrispondente a ω

$$\{t \geq 0 \mid R(t; \omega) < 0\} = \emptyset$$

$\neq \emptyset, \Rightarrow$ ins. inferiore limitato

$$\exists \inf \{t \geq 0 \mid R(t; \omega) < 0\}$$

$\forall \emptyset \neq \omega \text{ s.t. } \inf \emptyset = +\infty$

$A, B \subset \mathbb{R} \quad A, B \neq \emptyset \Rightarrow \inf \text{ limitato}$

$A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$

$\emptyset \subset B \quad \forall B \subset \mathbb{R} \Rightarrow +\infty = \inf \emptyset \geq \inf B \quad \forall B \text{ inf. lim.} = \mathbb{R}$

$$T = \inf \{t \geq 0 \mid R(t) < 0\} \quad \underline{\text{ISTANTE DELLA ROVINA}} \quad \underline{\text{RUIN TIME}}$$

primo istante in cui il processo assume valore negativo

$\forall T < +\infty \Rightarrow \text{ROVINA}$

DEF: PROBABILITÀ ASINTOTICA DI ROVINA / PROBABILITÀ DI ROVINA

• si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO CONTINUO, a partire da un capitale iniziale R :

$$\psi(R) = \Pr_{t \geq 0} \left(\bigvee_{t \geq 0} (R(t) < 0) \right) = \Pr_t (T < +\infty) \quad \text{evento } A(R)$$

è un indicatore di rischiosità del portafoglio. Oggetto della pura gestione tecnica nella pratica si guarda ad un orizzonte temporale ampio (ex. 20 anni) ma non ad orizzonti temporali illimitati, e la verifica viene fatta in tempo discreto (ex. ogni 3 o 6 mesi).

• si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (T periodi), a TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(R, T) &= \Pr \left(R(1) < 0 \vee \dots \vee R(T) < 0 \right) \\ &= \Pr_{\substack{0 \leq t \leq T \\ t \in \mathbb{N}}} \left(\bigvee_{t \in \mathbb{N}} (R(t) < 0) \right) \quad \text{evento } B(R, T) \end{aligned}$$

• si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (T periodi) a TEMPO CONTINUO a partire da un capitale iniziale R :

$$\bar{\psi}(R, T) = \Pr_{0 \leq t \leq T} \left(\bigvee_{t \geq 0} (R(t) < 0) \right) \quad \text{evento } A(R, T)$$

• si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R :

$$\tilde{\psi}(R) = \Pr_{\substack{t \geq 0 \\ t \in \mathbb{N}}} \left(\bigvee_{t \geq 0} (R(t) < 0) \right) \quad \text{evento } B(R)$$

Relazioni tra gli eventi:

$$B(R, T) \Rightarrow A(R, T) \Rightarrow A(R)$$

$$\bar{\psi}(R, T) \leq \psi(R, T) \leq \psi(R)$$

$$B(R, T) \Rightarrow B(R) \Rightarrow A(R)$$

$$\bar{\psi}(R, T) \leq \bar{\psi}(R) \leq \psi(R)$$

$$T_1 < T_2$$

$$A(R, T_1) \Rightarrow A(R, T_2)$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\Pr(A(B, T))}{\Pr(R, T)} = \Pr(\bigvee_{t \geq 0} A(t, T)) = \Pr(A(R))$$

Noti ci concentriamo sulla $\Pr(R)$

$$\Pr(R) = \Pr\left(\bigvee_{t \geq 0} (R + at - S(t) < 0)\right)$$

→ dipende da:

- R
- a
- $\{S(t), t \geq 0\}$ proc. stazionario del risarcimento cumulativo

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

$N(t)$ = num. sinistri che alpinano il portafoglio in $[0, t]$

Y_h = risarcimento per il sinistro h -esimo

→ IMPOSTAZIONE AL TIPO COLLETTIVO

OSS:

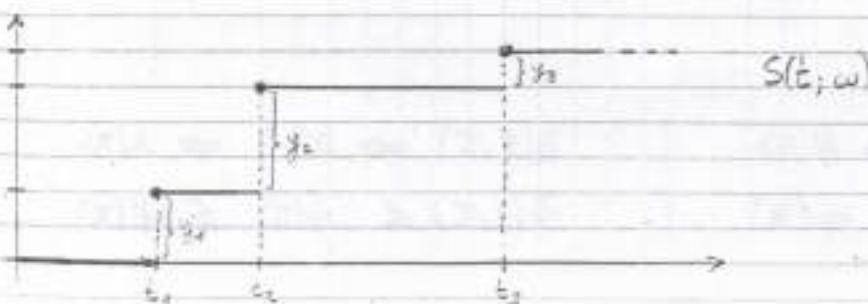
$w_h^{(0)}$ non si verifica l' h -esimo sinistro $w_h^{(0)} \rightarrow 0$

$w_h^{(1)}$ si verifica l' h -esimo sinistro con $w_h^{(1)} \rightarrow y$ impatto del risarcimento non a y

due processi:

$\{N(t), t \geq 0\}$ numero di arrivo dei sinistri

$\{Y_1, Y_2, \dots\}$ processo dei risarcimenti



$\{N(t), t \geq 0\}$ $\{S(t), t \geq 0\}$ } PROCESSO DI RISCHIO

DEF: PROBABILITÀ ASINTOTICA DI ROVINA / PROBABILITÀ DI ROVINA

• si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO CONTINUO, a partire da un capitale iniziale R :

$$\psi(R) = \Pr_{t \geq 0} \left(\bigvee_{t \geq 0} (R(t) < 0) \right) = \Pr(T < +\infty) \quad \text{evento } A(R)$$

è un indicatore di rischiuto del portafoglio. Oggi alla guida gestione tecnica nella pratica si guarda ad un orizzonte temporale annuo (a. 20 anni) ma non ad orizzonti temporali illimitati, e la verifica viene fatta in tempo discreto (a. ogni 3 o 6 mesi)

• si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (T periodi), a TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R :

$$\bar{\psi}(R, T) = \Pr \left(R(1) < 0 \vee \dots \vee R(T) < 0 \right) \\ = \Pr_{\substack{0 \leq t \leq T \\ t \in \mathbb{N}}} \left(\bigvee_{t \in \mathbb{N}} (R(t) < 0) \right) \quad \text{evento } B(R, T)$$

• si dice PROB. DI ROVINA in un ORIZZONTE LIMITATO (T periodi) a TEMPO CONTINUO a partire da un capitale iniziale R :

$$\psi(R, T) = \Pr_{0 \leq t \leq T} \left(\bigvee_{t \in \mathbb{N}} (R(t) < 0) \right) \quad \text{evento } A(R, T)$$

• si dice PROB. ASINTOTICA DI ROVINA in TEMPO DISCRETO a partire da un capitale iniziale R :

$$\tilde{\psi}(R) = \Pr_{\substack{t \geq 0 \\ t \in \mathbb{N}}} \left(\bigvee_{t \in \mathbb{N}} (R(t) < 0) \right) \quad \text{evento } B(R)$$

Relazioni tra gli eventi:

$$B(R, T) \Rightarrow A(R, T) \Rightarrow A(R)$$

$$B(R, T) \Rightarrow B(R) \Rightarrow A(R)$$

$$\tilde{\psi}(R, T) \leq \psi(R, T) \leq \psi(R)$$

$$\tilde{\psi}(R, T) \leq \tilde{\psi}(R) \leq \psi(R)$$

$$T_1 < T_2$$

$$A(R, T_1) \Rightarrow A(R, T_2)$$

IPOTESI PROBABILISTICHE

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ .

$\{Y_1, Y_2, \dots\} \neq m, m \geq 0$

H evento logico dep. de $\{N(t), t \geq 0\}$ che implica le si sono verificate almeno m unità di indice $m+1, \dots, m+n$

$Y_{m+1}|H, \dots, Y_{m+n}|H$ sono iid
con distrib. che non dipende da m, n, H

sea F_Y la funz. di ripartizione di tale distrib.

↳ interpretabile come la funz. di ripartiz. del risarcimento ~~quindi~~ in ipotesi che il numero si sia verificato

OSS:

$$X = \sum_{h=1}^N Y_h \quad N \sim Y_h \quad \omega_h^{(0)} \rightarrow 0$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \omega_h^{(1)} \rightarrow y$$

$\forall m \geq 0 \quad Y_1|N=m, \dots, Y_m|N=m$ iid

$\underset{i \leq m}{Y_i|N=m}$ ha legge che non dipende da n

$$Y_i|N=m \sim F_Y$$

$$Y_i|N \geq i \sim F_Y$$

IPOTESI ALTERNATIVA

$\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ .

$\{Y'_1, Y'_2, \dots\}$ iid e indip. da $\{N(t), t \geq 0\}$

$$\sum_{h=1}^{N(t)} Y'_h \quad \{S(t), t \geq 0\}$$

formalmente si ottengono le stesse conclusioni probabilistiche ma le Y'_h non possono essere interpretate come risarcimenti

NOTA ZIONE

$E(Y) = E(Y_1|H)$ con H evento da garantire che l'azionamento si verifica

$$V_{n-}(Y) = V_{n-}(Y_1|H) \quad \text{con } H = \text{azionamento si verifica}$$

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) < +\infty$$

$$E(Y^k) = E[(Y|H)^k]$$

$$E(Y) = \mu$$

$$E(Y^k) = \mu_k$$

(*) $\forall t \quad S(t) \sim \text{Poisson-composta} (2t, F_Y)$

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

verificare che:

-(1') $\forall m > 0 \quad Y_1|N(t)=m, \dots, Y_m|N(t)=m \quad \text{i.i.d.}$

-(2') $Y_n|N(t)=m \quad (h \leq m)$ ha legge che non dipende da n , funz di riport F_Y

-(3) $N(t) \sim \text{Poi}(2t)$

(1) $[N(t)=m] = H$ evento da garantire che si sono verificati m riuniti in $[0,t]$
evento progressivamente dipendente da $\{N(t), t \geq 0\}$

$$\Rightarrow Y_1|N(t)=m, \dots, Y_m|N(t)=m \quad \text{i.i.d. f.m.}$$

(2) H garantisce che i riuniti si sono verificati

$$\Rightarrow Y_1|H, \dots, Y_m|H \quad \text{i.i.d. con } F_Y \text{ non dipendente da } m$$

(3) $\{N(t), t \geq 0\}$ è processo di Poisson

$$\Rightarrow N(t) \sim \text{Poi}(2t)$$

// RICHIAMO

$$X = \sum_{h=1}^N Y_h \quad \text{distribuzione composta}$$

$$E(X) = E(N)E(Y)$$

$$V_{n-}(X) = E(N)V_{n-}(Y) + V_{n-}(N)E(Y)^2$$

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(N=n) F_Y(x)$$

→ convoluzione n-riuniti
valore in x della funz. di riport F_Y
numero di n riuniti che si è verificati
di riuniti F_Y

//

$$E(S(t)) = E(N(t)) E(Y) \\ = 2t \cdot \mu_1 = 2\mu_1 t$$

$$Var(S(t)) = E(N(t)) Var(Y) + Var(N(t)) E(Y)^2 \\ = 2t Var(Y) + 2t E(Y)^2 = \lambda t \cdot (Var(Y) + E^2(Y)) = \lambda t (E(Y^2) - E(Y) + \mu_2) \\ = 2t \cdot E(Y^2) = 2\mu_2 t$$

$$F_{S(t)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{Pr(N(t)=m)}_{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}} F_Y^{\text{m times}}(x)$$

$$E(R(t)) = E(R + ct - S(t)) \\ = R + ct - E(S(t)) \\ = R + ct - 2\mu_1 t = R + (c - 2\mu_1)t$$

$c - 2\mu_1 > 0$ La retta viene alzata da t

$$Var(R(t)) = Var(R + ct - S(t)) \\ = Var(S(t)) = 2\mu_2 t$$

(**) $\{S(t), t \geq 0\}$ è processo ad incrementi stazionari
verificare che $\forall s, t \quad s < t \Rightarrow S(t) - S(s)$ ha legge che dipende da $t-s$

Per: $s < t, \quad s > 0$

$$F_{S(t)-S(s)}(x) = Pr(S(t)-S(s) \leq x)$$



$\{N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n, \quad m, n \in \mathbb{N}\}$ è partizione di Ω

$$Pr(S(t)-S(s) \leq x) = \sum_{m,n}^{\infty, \infty} Pr(N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n) Pr(S(t)-S(s) \leq x | N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=n)$$

// RICHIAMO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$$\sum_{m,n}^{\infty, \infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) \quad \text{se } a_{m,n} \geq 0$$

$$\Pr(N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=m) = \Pr(N(s)=m) \Pr(N(t)-N(s)=m)$$

$$\Pr(S(t)-S(s) \leq x \mid N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=m) =$$

$$= \Pr\left(\sum_{h=1}^{N(s)} Y_h - \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h \leq x \mid N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=m\right)$$

$$= \Pr\left(\sum_{h=1}^m Y_h - \sum_{h=1}^m Y_h \leq x \mid N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=m\right)$$

$$= \Pr\left(\sum_{h=m+1}^{m+m} Y_h \leq x \mid \underbrace{N(s)=m \wedge N(t)-N(s)=m}\right)$$

evento logico: dim. da $\{N(t_i), i \geq 0\}$

implica che ai tempi state i ragionamenti $Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots, Y_{2m}$

$$= \Pr((Y_{m+1}|H) + \dots + (Y_{2m}|H) \leq x) = F_Y(x)$$

$$\Pr(S(t)-S(s) \leq x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \Pr(N(s)=m) \Pr(N(t)-N(s)=m) F_Y(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(s)=m) \cdot \Pr(N(t)-N(s)=m) F_Y(x) \right)$$

— non dipende da m .

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\Pr(N(s)=m) \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)=m) F_Y(x) \right)$$

— non dipende da m

$$= \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \Pr(N(s)=m) \right] \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)=m) F_Y(x) \right]$$

$$\Pr\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \Pr(N(s)=m)\right) = \Pr(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr(N(t)-N(s)=n) F_Y(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} F_Y(x)$$

dipende da $(t-s)$, non da t, s

\Rightarrow incrementi stazionari

$S(t)-S(s)$ ha distrib. Poisson-composta $(\lambda(t-s), F_Y)$

(****) $\{S(t), t \geq 0\}$ è processo ad incrementi indipendenti

Perche se $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$

grazie che $S(t_1)-S(s_1), \dots, S(t_n)-S(s_n), \dots, S(t_m)-S(s_m)$ sono

nz. stocasticamente indipendenti

0 t_1 t_2 \dots t_m t_{m+1} \dots t_n t_{n+1} \dots t_m t_n

verificiamo che $F(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m F(x_i)$
 $S(t_1)-S(a_1), \dots, S(t_m)-S(a_1) \quad i=1 \quad S(t_1)-S(a_1)$
 $\underbrace{\dots}_{\sim D_{t_1-a_1} \text{ comp}(2(t_1-a_1), F)}$

$$[N(a_1)=m_1, N(t_1)-N(a_1)=m_1, \dots, N(t_m)-N(a_1)=m_1, \dots, N(t_m)-N(a_m)=m_m] = \\ = H(m_1, m_2, \dots, m_m, m_1, m_2, \dots, m_m, m_1, \dots, m_m)$$

$\Rightarrow \{H(m_1, m_2, \dots, m_m, m_m) : m_1, m_2, \dots, m_m, m_m \in \mathbb{N}\}$ è partizione di Ω

$$F(x_1, \dots, x_m) = \Pr_{S(t_1)-S(a_1), \dots, S(t_m)-S(a_1)}(S(t_1)-S(a_1) \leq x_1, \dots, S(t_m)-S(a_1) \leq x_m)$$

$$= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_m} P_{\textcircled{1}}(H(m_1, m_2, \dots, m_m)) P_{\textcircled{2}}(\bigcap_{i=1}^m (S(t_i)-S(a_i) \leq x_i) \mid H(m_1, m_2, \dots, m_m))$$

$$\textcircled{1} = \prod_{i=1}^m P_{\textcircled{1}}(N(a_i) - N(t_{i+1}) = m_i) P_{\textcircled{1}}(N(t_i) - N(a_i) = m_i) \quad \text{con } t_0 = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ consider } S(t_i) - S(a_i) \mid H(m_1, m_2, \dots, m_m, m_m) =$$

$$= \sum_{h=1}^{N(a_i)} Y_h - \sum_{h=1}^{N(t_i)} Y_h \mid H(m_1, m_2, \dots, m_m) \\ \text{H} \Rightarrow [N(a_i) = m_i] \quad m_i = m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1} \\ \text{H} \Rightarrow [N(t_i) = m_i + m_i] \\ = \sum_{h=m_{i-1}+1}^{m_i+m_i} Y_h \mid H(m_1, m_2, \dots, m_m)$$

$$S(t_1)-S(a_1) \mid H, \dots, S(t_i)-S(a_i) \mid H, \dots, S(t_m)-S(a_m) \mid H$$

è funz. di

è funz. di

è funz. di

$$Y_{m_1+1}, Y_{m_1+2} \mid H; \dots; Y_{m_{i-1}+1}, Y_{m_{i-1}+2} \mid H, \dots, Y_{m_i+1}, Y_{m_i+2} \mid H$$

H implica che i risultati si sono verificati

\Rightarrow per ipotesi del modello: $\forall a_1, \dots, a_m \quad Y_{m_1+1}, \dots, Y_{m_m+1} \mid H$ sono strettamente indip.

$\Rightarrow S(t_1)-S(a_1) \mid H, \dots, S(t_m)-S(a_m) \mid H$ sono strettamente indipendenti quelli costruiti a partire da $m \times m$ indipendenti da un'esa disgiunta

$$\Rightarrow \textcircled{2} = \prod_{i=1}^n \Pr(S(t_i) - S(t_{i-1}) \leq x_i \mid H(m_1, m_2, \dots, m_n))$$

$$= \prod_{i=1}^n \Pr((Y|t_1) + \dots + (Y|t_i) \leq x_i) = \prod_{i=1}^n F_Y(x_i)$$

TS-18-10-2013

ASCENDE

16 pag

da m_i dipende
da t_i , questo: da t_i dipende solo
questo

con cui gli altri m_j, m_k

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_m) &= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n}^{+\infty} \left[\Pr(N(t_1) = m_1) \Pr(N(t_2) - N(t_1) = m_2) \cdot F_Y(x_1) \right. \\ &\quad \cdot \Pr(N(t_3) - N(t_2) = m_3) \Pr(N(t_4) - N(t_3) = m_4) \cdot F_Y(x_2) \cdot \\ &\quad \cdot \dots \cdot \Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = m_m) \Pr(N(t_m) - N(t_1) = m_1) \cdot F_Y(x_m) \Big] = \\ &= \sum_{m_1=0}^{+\infty} \Pr(N(t_1) = m_1) \sum_{m_2=0}^{+\infty} \Pr(N(t_2) - N(t_1) = m_2) \cdot F_Y(x_1) \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{m_3=0}^{+\infty} \Pr(N(t_3) - N(t_2) = m_3) \Pr(N(t_4) - N(t_3) = m_4) \cdot F_Y(x_2) \cdot \\ &\quad \cdot \dots \cdot \sum_{m_m=0}^{+\infty} \Pr(N(t_m) - N(t_{m-1}) = m_m) \Pr(N(t_m) - N(t_1) = m_1) \cdot F_Y(x_m) = \\ &= \prod_{i=1}^m \left[\sum_{m_i=0}^{+\infty} \Pr(N(t_i) - N(t_{i-1}) = m_i) \cdot F_Y(x_i) \right] \end{aligned}$$

è somma delle prob.
di una partizione
quindi rule 1

stesso discorso per le
altre: m_1, m_2, \dots, m_m

è il valore in x_i della funz. di ripartiz.
della distrib. Pois-comp. ($\lambda(t_i - t_{i-1})$, F_Y),
cioè della distrib. di $S(t_i) - S(t_{i-1})$

$$\Rightarrow F(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m F(x_i)$$

$\Rightarrow S(t_1) - S(t_0), \dots, S(t_m) - S(t_{m-1})$ sono m.a. indip.

Il processo $\{S(t), t \geq 0\}$ è detto PROCESSO POISSON COMPOSTO (2.5)

in quanto verifica $(*)$, $(**)$, $(***)$.

Consideriamo un incremento annuo

$$S(t+1) - S(t) \stackrel{d}{=} S(1) \sim \text{Pois-comp.}(\lambda, F_Y)$$

$$\rightarrow E[S(t+1) - S(t)] = 2E[Y] = 2\mu \quad \text{incremento atteso per il poisson comp. in un intervallo unitario}$$

$$\text{Var}[S(t+1) - S(t)] = 2E[Y^2] = 2\mu^2$$

Considerando un incremento generico $S(t) - S(s)$

$$\begin{aligned} E[S(t) - S(s)] &= 2(t-s)E[Y] = 2\mu(t-s) \\ \text{Var}[S(t) - S(s)] &= 2(t-s)E[Y^2] = 2\mu^2(t-s) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{perché } S(t) - S(s) \sim \text{Pois-comp.}(2(t-s), F_Y) \end{array} \right.$$

OSS:

proviamo che l'ip. $P(t) = ct$, $c > 0$, è giustificata.

• principio di equità

$$P(t) = E(S(t)) = 2t\mu_1 = 2\mu_1 t = ct \Leftrightarrow c = 2\mu_1$$

calcolando i premi con il principio di equità si ha $P(t) = ct$, $c = 2\mu_1$

• criterio della speranza matematica

$$P(t) = E(S(t)) + \beta E(S(t)) = 2\mu_1 t + \beta 2\mu_1 t = 2\mu_1(1+\beta)t$$

\uparrow
 $\beta > 0$ nell'incertezza
di misurazione

$$= ct \quad c = 2\mu_1(1+\beta)$$

• criterio della varianza

$$P(t) = E(S(t)) + \beta \text{Var}(S(t)) = 2\mu_1 t + \beta 2\mu_1 t = 2(\mu_1 + \beta\mu_2)t$$

\uparrow
 $\beta > 0$ nell'incertezza
di misurazione

$$= ct \quad c = 2(\mu_1 + \beta\mu_2)$$

avendo $P(t) = E(S(t))$

$$P(t) > E(S(t)) \Leftrightarrow c > 2\mu_1$$

misuramento atteso in
ogni intervallo unitario

In generale si ha un corrispondente di misurazione se $c > 2\mu_1$, cioè se i premi incassati in un intervallo unitario sono superiori al misuramento atteso in ogni intervallo unitario, e quindi:

$$P(t) - P(A) > E[S(t) - S(A)]$$

COEFFICIENTE DI ADJUSTAMENTO

una considerazione:

$$\gamma(R) = \Pr_{t \geq 0} (\forall (R + ct - S(t) < 0)) \quad \text{non è possibile calcolare in forma chiusa}$$

Il coefficiente di aggiustamento consente di ottenere una limitazione superiore per $\gamma(R)$ probabilità assoluta di rovina.

nella TCR $\{R(t) = R_0 + ct - S(t), t \geq 0\}$

consideriamo le seguenti ulteriori ipotesi

(a) $c > 2\mu_1$ (esistono serie di misur. rispetto al quale è così)

$c = 2\mu_1(1-\lambda)$ $\lambda > 0$ nell'incertezza di misur.

(b) F_Y sia dotata di fgm.

sia $y = \sup\{t \geq 0 \mid m_Y(t) < +\infty\} \rightarrow [0, y[$ il massimo intervallo dove fgm è finita

// RICHIAMO —

$X \geq 0$

$$m_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} dF_X(u) = e^t \int_0^{\infty} e^{xu} du \in \mathbb{R}$$

$$m_X(0) = 1$$

si dice che la distrib. di X è dotata di fgm se:

$$\exists I_0^+ : \forall t \in I_0^+ \quad m_X(t) < +\infty \quad I_0^+ \text{ intervallo positivo di zero}$$

(se la distrib. è dotata di fgm, allora tutti i momenti attesi sono finiti)

$\Rightarrow m_X(\cdot)$ è derivabile in un intorno di 0 e

$$m_X^{(n)}(0) = E(X^n) \quad n \in \mathbb{N}$$

es:

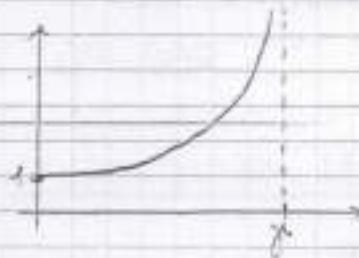
$$F_Y \sim \text{Gamma}(\alpha, p) \rightarrow m_Y(t) = \left(\frac{p}{p-\alpha}\right)^{\alpha} \quad t < p \rightarrow \text{l'intervallo è } [0, p[$$

$$F_Y \sim \exp(p)$$

$$\rightarrow m_Y(t) = \frac{p}{p-\alpha} \quad t < p \rightarrow \text{l'intervallo è } [0, p[$$

se abbiamo un n.a. a rapporto limitato $\Rightarrow y = +\infty$

$$(c) \lim_{t \rightarrow y^-} [2m_Y(t) - (2+ct)] = +\infty$$

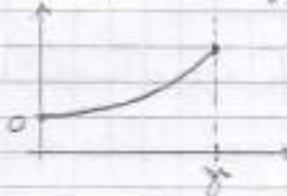


idea:

per avere $\lim = +\infty$ allora
 $2m_Y(t)$ deve avere $\lim = +\infty$.

\rightarrow si escludono le fgm che tendono ad un num. finito in y^- (ad es. la
distrib. di Cauchy)

ma non si prendono fgm del tipo:



Sotto queste ipotesi consideriamo la seguente PROPOSIZIONE

dati le ip. TCR, (a), (b), (c)

L'equazione in t : $2+ct = 2m_Y(t) \quad t \in [0, y[$ ammette una ed una
unica soluzione positiva

$$\exists! \alpha > 0 \text{ t.c. } 2 + \alpha t = 2m_y(t)$$

$$2 + \alpha t = 2m_y(t) \quad t \in [0, y[\quad \underline{\text{EQUAZIONE AGGIUSTATA}}$$

$\alpha, \alpha > 0$ COEFFICIENTE DI AGGIUSTAMENTO

$t=0$ è anche una soluz., ma stiamo garantendo che ci sia anche una soluz. positiva

TEOREMA: DISUGUAGLIANZA DI LUNDBERG

$$\{R(t), t \geq 0\} \quad \text{TCR + (a), (b), (c)}$$

$$\Rightarrow \gamma(R) \leq e^{-\alpha R} \quad \text{con } \alpha \text{ coeff. di aggiustamento}$$

prob. assintotica di
nominata

non dimostriamo il teorema, ma dimostriamo l'esistenza e l'unicità di α

DIM:

$$\text{sia } g_1(t) = 2 + \alpha t \quad t \in [0, y[$$

$$g_2(t) = 2m_y(t)$$

studiare $g_2(t)$:

$$\bullet g_2(0) = 2m_y(0) = 2$$

$$\bullet g_2 \text{ è derivabile in } 0, \quad g_2'(0) = 2m_y'(0) = 2/\mu$$

$\circ g_2$ è strettamente convessa

$$\forall t_1, t_2 \in [0, y[, \quad \forall \delta \in]0, 1[, \quad \text{posto } \bar{\delta} = 1 - \delta$$

$$\Rightarrow g_2(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) \leq \delta g_2(t_1) + \bar{\delta} g_2(t_2)$$

$$g_2(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) = \int_0^{\infty} e^{-(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2)y} dF_y(y)$$

$$e^{-(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2)y} = e^{\delta(t_1 y) + \bar{\delta}(t_2 y)} < \delta e^{\delta t_1 y} + \bar{\delta} e^{\delta t_2 y} <$$

monotonia e

linearietà integr.

$\delta(t_1 y) + \bar{\delta}(t_2 y)$ è mistura di $t_1 y$ e $t_2 y$
 e^x funz. strett. convessa

$$\rightarrow \int_0^{\infty} e^{-(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2)y} dF_y(y) < \delta \int_0^{\infty} e^{\delta t_1 y} dF_y(y) + \bar{\delta} \int_0^{\infty} e^{\delta t_2 y} dF_y(y)$$

$$2m_y(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) < \delta 2m_y(t_1) + \bar{\delta} 2m_y(t_2)$$

$$\Rightarrow g_2(\delta t_1 + \bar{\delta} t_2) < \delta g_2(t_1) + \bar{\delta} g_2(t_2)$$

misurato per 2-3

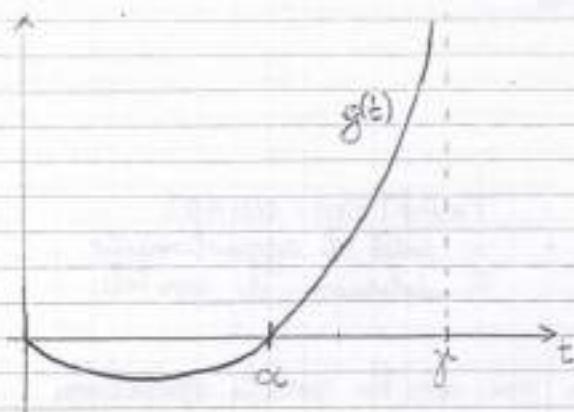
TS-21-10-2013 | (13 ore) 4^a sett.

$$g_1(t) = 2 + \alpha t$$

$$g_2(t) = 2m_y(t)$$

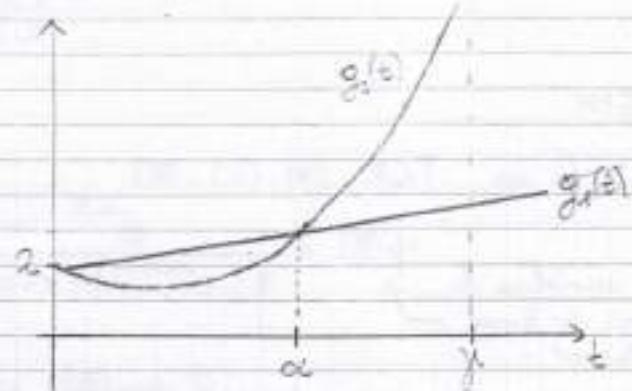
$$g(t) = g_2(t) - g_1(t)$$

$$t \in [0, \infty]$$



$$2 + \alpha t = 2m_y(t)$$

$\exists! \alpha > 0$ radice dell'eq.



$$g_1(t) = 2 + \alpha t$$

$$\alpha = 2\mu/(1+\lambda) \quad \lambda > 0$$

$$g_2'(0) = 2\mu < \alpha$$

$$\lambda = \varepsilon [N(t+1) - N(t)]$$

$$\varepsilon = P(t+1) - P(t) = 2\mu/(1+\lambda) \quad \lambda > 0$$

$$m_y(t) \rightsquigarrow F_y \quad \begin{matrix} \text{L'eq. ha soluz.} \\ \text{di } F_y \end{matrix}$$

α dipende da λ, μ, F_y

$$2 + \alpha t = 2m_y(t) \Leftrightarrow 2 + 2\mu/(1+\lambda)t = 2m_y(t)$$

$$1 + \mu/(1+\lambda)t = m_y(t) \rightarrow \text{l'eq. dipende solo da } \lambda, F_y$$

finora F_y, λ (non finita $g_2(t)$)

se λ diminuisce $\Rightarrow \alpha$ decresce



Esempio:

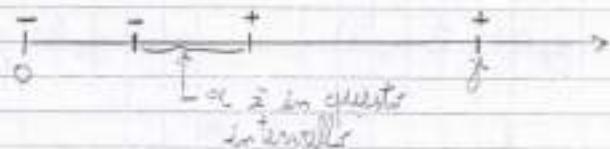
$$F_y \sim \exp(0)$$

$$\varepsilon(\gamma) = \mu = \frac{1}{\gamma} \quad m_y(t) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad t < 0$$

$$\text{e) seguitamente: } 1 + \frac{1}{\gamma} (1+\lambda)t = \frac{2}{\gamma - 1} \quad \rightarrow t_1 = 0$$

$$t_2 = 0 \quad \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\gamma}{1+\lambda} = \infty$$

$g(t) = 0$ si può cercare tramite procedimenti numerici con la tecnica di
direzioni.



TEOREMA

seggono le ip. TCR, (a), (b), (c)

$$\eta(R) = \frac{e^{-\alpha R}}{E[e^{-\alpha R(\tau)} | \tau < +\infty]}$$

quad. asintotica di
rovina in tempo
continuo

$$T = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}$$

α coeff di aggiustamento
 R dotazione di capitale

I risultati si trovano non ha portata operativa

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \eta(R) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha R}}{E[e^{-\alpha R(\tau)} | \tau < +\infty]}$$

$L = \min(-\infty) \rightarrow \min(0) = 1$

$R(\tau) | \tau < +\infty$

$$= 1 \quad \forall R > 0$$

$X = R(\tau) | \tau < +\infty$
 $E[e^{-\alpha X}]$ valgono in
 \rightarrow delle form
 $\alpha \times$

$$\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \eta(R) = 1 \quad \forall R > 0$$

Se i premi non sono caricati rispetto ai premi equi allora la prob. asintotica
di rovina è uguale a 1.

TEOREMA

TCR, (a), (b), (c)

$\Rightarrow \eta(R)$ soddisfa l'eq:

$$\eta'(R) = \frac{1}{2} \eta(R) - \frac{1}{2} \int \eta(R-y) dF_y(y) - \frac{1}{2} [1 - F_y(R)] \quad R > 0$$

(eq. integro-differenziale)

Questi risultati sono operativi nel caso $F_y \sim \exp(\beta)$

$$\eta(R) = \frac{1}{1+\beta} e^{-\alpha \tilde{R}}$$

Tonze la distib. esponenziale non si arriva ad un risultato in forma
chiusa.

DISEQUAZIONE DI LINDBERG

$$\psi(R) \leq \bar{e}^{-\alpha R}$$

α eff di aggiornamento (dip da δ e F_Y)

R deteriorazione di capitale

questa diseq. è utile se $\bar{e}^{-\alpha R} < 1$.

più grande è α

più grande è R

} \rightarrow più piccola è la limitazione superiore

APPLICAZIONI

p_0 fisso, deve avere $\psi(R) \leq p_0$ (a. $p_0 = 0.01$)

- fissa $F_Y, R \rightarrow$ si può lavorare solo su α

$$\psi(R) \leq \underbrace{\bar{e}^{-\alpha R}}_{\downarrow} \leq p_0$$

$$-\alpha R \leq \ln p_0$$

$$-\alpha \leq \frac{\ln p_0}{R}$$

$$\alpha \geq -\frac{\ln p_0}{R}$$

si ha $\alpha \leq -\frac{\ln p_0}{R}$ se invece: $1 + (1+\delta)\mu \cdot \left(-\frac{\ln p_0}{R}\right) = m_Y \left(-\frac{\ln p_0}{R}\right)$

$$\alpha = \left[\left(m_Y \left(-\frac{\ln p_0}{R} \right) - 1 \right) / \left(-\mu \frac{\ln p_0}{R} \right) \right] - 1$$

$$\Rightarrow \alpha \geq \left[\left(m_Y \left(-\frac{\ln p_0}{R} \right) - 1 \right) / \left(-\mu \frac{\ln p_0}{R} \right) \right] - 1$$

si può lavorare su α entro i limiti imposti dal mercato

- fissa $F_Y, \alpha \rightarrow$ si può lavorare solo su R

$$\psi(R) \leq \bar{e}^{-\alpha R} \leq p_0$$

$$-\alpha R \leq \ln p_0$$

$$R \geq -\frac{\ln p_0}{\alpha}$$

si può lavorare su R entro i limiti imposti dagli strumenti

• fissa: $R, \delta \rightarrow$ si potrebbe agire solo su F_y , ma come?

restringere i rischi lo permette di restare nel principio della prob. di rischio, ma ciò è estremamente limitativo

poniamo poi che il profitto sia già acquisito $\Rightarrow F_y$ è già fissata

$$\{R(t) = R + ct - S(t), t \geq 0\}$$

$$S(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h$$

calcolo si fa da $2+ct = I_m(t)$ e tutto è OK

L'unica cosa da resto è cercare una copertura riacquistiva.

EFFETTO DELLA RIASSICURAZIONE

consideriamo una copertura riacquistativa:

Y_h impegno originario della cedente

$y(Y_h)$ impegno al netto della riacquisto $0 \leq y(y) \leq y \leq F_y$

$S_{ced}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} y(Y_h)$ riacquisto totale a carico della cedente al netto dei contributi da parte del riacquistatore

$S_{riacq}(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} (Y_h - y(Y_h))$ contributi totali a carico del riacquistatore

o:

- RIASSICURAZIONE IN QUOTA

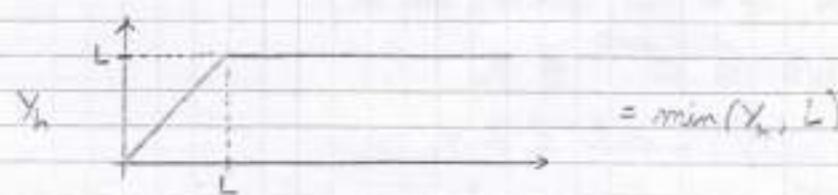
$$0 \leq a \leq 1 \quad Y_h$$

$$y(X_h) = a Y_h$$

$$Y_h - y(Y_h) = (1-a) Y_h$$

- EXCESS OR LOSS (X_L)

$$L > 0$$



$\{S(t), t \geq 0\}$: $\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intervallo Δ
 $\{Y_1, Y_{m+1}\} \sim H_{m,m,H} \quad Y_{m+1}, Y_{m+1}|H \text{ ind. con } F_{Y_{m+1}}|H$

\rightarrow è proc. Poisson-composto (λ, F_Y)

- considera $\{S_{\text{cad}}(t), t \geq 0\}$: $\{N(t), t \geq 0\}$ stesso proc. di poisson
 $\{Y_1, Y_{m+1}\} \sim H_{m,m,H} \quad Y_{m+1}|H, \dots, Y_{m+n}|H \text{ ind. con } F_{Y_{m+n}}|H \text{ non dip. da } m, n, H$

\rightarrow è proc. Poisson-composto ($\lambda, F_{Y_{m+n}}$)

$$\begin{aligned} E[S_{\text{cad}}(t+1) - S_{\text{cad}}(t)] &= 2E[Y] \\ E[Y] &= \int_0^\infty y p(y) dF_{Y_{m+n}} \end{aligned}$$

- considera $\{S_{\text{riserv}}(t), t \geq 0\}$: $\{N(t), t \geq 0\}$
 $\{Y_1 - p(Y_1), Y_2 - p(Y_2), \dots\} \sim F_{Y-p(Y)}$

\rightarrow è proc. Poisson-composto ($\lambda, F_{Y-p(Y)}$)

$$E[S_{\text{riserv}}(t+1) - S_{\text{riserv}}(t)] = 2E[Y - p(Y)]$$

$P_{\text{riserv}}(t)$ = montepremi pagato dalla cedente in $[0, t]$ al risicatore
 $= c_n t \quad c_n > 0$ premi pagati al ris. in un intervallo unitario

$$c_n = (1 + q) 2E[Y - p(Y)] \quad q > 0 \text{ coefficiente di corrispondenza di riserva per il risicatore}$$

$\{R_{\text{cad}}(t), t \geq 0\}$

$$\begin{aligned} R_{\text{cad}}(t) &= R + ct - c_n t - S_{\text{cad}}(t) \\ &= R + (c - c_n)t - S_{\text{cad}}(t) \end{aligned}$$

ovviamente si ricorre alla risicazione se i premi al netto della ris.
non mandano le prob. di somma a 1

$$c - c_n > E[S_{\text{cad}}(t+1) - S_{\text{cad}}(t)]$$

$$(1 + q) 2\mu - (1 + q) 2E[Y - p(Y)] > 2E[Y - p(Y)]$$

$$\Rightarrow R + (c - c_n)t = R_{\text{max}}(t)$$

risolvendo troviamo α_{rad} radice dell'eq.

$$m_{\mu(y)}(t) = E[e^{tY}] = \int_0^{\infty} e^{ty} dF_Y(y)$$

Caso CLASSIFICAZIONE IN QUOTA

$$R_{\text{rad}}(t) = R + (\alpha - \alpha_n)t - S_{\text{rad}}(t)$$

$$\alpha = (1+\beta)2\mu \quad \beta > 0, \mu = E(Y)$$

$$\alpha_n = (1+\frac{\beta}{q})2E[(1-\alpha)Y]$$

$$= (1+\frac{\beta}{q})2(1-\alpha)\mu$$

$$\alpha - \alpha_n > 2E[Y] = 2\alpha\mu \quad \text{visto}$$

$$(1+\beta)2\mu - (1+\frac{\beta}{q})(1-\alpha)2\mu > 2\mu$$

$$(1+\beta) - (1+\frac{\beta}{q}) > \alpha - (1+\frac{\beta}{q})\alpha$$

$$\beta - \frac{\beta}{q} > -\frac{\beta}{q}\alpha$$

$$\alpha > 1 - \frac{\beta}{q}$$

se fosse $\alpha \leq \frac{\beta}{q}$ il vincere sarebbe $\alpha > 0$, ma non si può vincere tutto il premio

$$2 + (\alpha - \alpha_n)t = 2m_{\mu(y)}(t)$$

$$= m_Y(at)$$

TS-22-10-2013 (20 sec)

α_{rad} è radice operativa di: $2 + (\alpha - \alpha_n)t = 2m_{\mu(y)}(t)$

$$2 + [(1+\beta)2\mu - (1+\frac{\beta}{q})2(1-\alpha)\mu]t = 2m_Y(at)$$

da:

$$F_Y \sim \exp(p) \quad E(Y) = \mu = \frac{1}{p} \quad m_Y(t) = \frac{p}{p-t} \quad t < p$$

$$\text{ma } at = \frac{p}{q} \Rightarrow \alpha > 0$$

$$2 + [(1+\beta)2\mu - (1+\beta)(1-\alpha)2\mu]t = 2 \cdot \frac{p}{p-at} \quad at < p$$

$$2 + [(1+\beta)2\mu(1-\alpha)]t = 2 \cdot \frac{p}{p-at} \quad /2 \quad 2 > 0$$

$$1 + (1+\beta)\mu t = \frac{p}{p-at}$$

$$p-at + (1+\beta)\mu t (2-at) = p$$

$$-\alpha t + (1+\beta) \mu t - (1+\beta) \mu^2 t^2 = 0$$

$t = 0$

$$\frac{\mu - \beta}{\beta}$$

$$-1 + (1+\beta) - (1+\beta) \mu t = 0 \quad (\text{la linea non è } t=0)$$

$$\partial_t - (1+\beta) \mu t = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{\alpha \mu} \cdot \frac{\partial}{1+\beta} = \alpha_{\text{ced}}$$

se $\alpha = 1$ la cedente trattiene tutto il rischio

$$\alpha_{\text{ced}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{1+\beta} = \alpha$$

α_{ced} cresce al decrescere di α , quindi α_{ced} decresce

al diminuire della quota di ratizzazione si abbassa la quota attutitoria di rischio

CASE EXCESS OF LOSS

$L \geq 0$ minimo: Y_h

$$\begin{cases} \min(Y_h, L) = y(Y_h) & \text{cedente} \\ \max(0, Y_h - L) = Y_h - y(Y_h) & \text{risicuratore} \end{cases}$$

$$E[y(Y)] = E[\min(Y, L)]$$

$$= \int_0^L F_Y(y) dy \quad F_Y = 1 - F_Y \text{ funzione della coda}$$

$$E[Y - y(Y)] = E[\max(0, Y - L)]$$

$$= \int_L^{+\infty} F_Y(y) dy$$

$$\begin{aligned} m_{y(Y)}(t) &= E[e^{tY}] = \int_0^{+\infty} e^{ty} dF_Y(y) \\ &= \int_0^L e^{ty} dF_Y(y) + \underbrace{\int_L^{+\infty} e^{ty} dF_Y(y)}_{e^{tL}(1 - F_Y(L))} \end{aligned}$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- T. HIKOSA (2002), "Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes", Springer.
- KAS, M. (2001), "Modern Actuarial Risk Theory", Kluwer.
- ELLIOT, CHAPMANER, "Mathematics for Insurance Non-Life", Economica (2002).
- KUOYAN, M. (1998), "Cor Nobile: from Beta to Gamma", Wiley.

TARIFFAZIONE BASATA SULL'ESPERIENZA

Quando si ha un portafoglio di rischi si è soliti dividere tal portafoglio in più classi sulla base di diverse variabili e parametri, per poi assegnare ad ogni classe, detta CLASSE TARIFFATIVA, un premio che tenga conto delle classificazioni elaborate. Tale procedura è detta TARIFFAZIONE o PERSONALIZZAZIONE A PRIORI, anche perché si guarda a caratteristiche comuni a tutti gli assicurati di una stessa classe senza tener conto delle diverse storie di essi.

In alcuni ambiti tale fare è seguito da una seconda procedura detta TARIFFAZIONE o PERSONALIZZAZIONE A POSTERIORI BASATA SULL'ESPERIENZA

Si fanno degli conti sul premio agli assicurati che non presentano rischi, mentre per quelli che causano rischi viene agganciato l'importo del premio. Si va così sul principio che la storia assicurativa dell'individuo rivela caratteristiche non osservabili a priori.

MERIT RATING o EXPERIENCE RATING

Si parla da un premio collettivo relativo alla classe ad un premio individuale maggiormente connesso alla situazione dell'individuo.

Ci sono tre possibili strade:

- APPIOCCIO BAYESIANO
- TEORIA DELLA CREDIBILITÀ
- SISTEMI BONUS/MALUS

//RICHIAMO

$$(P, \mathcal{F}, P(\cdot))$$

P partizione di Ω
 P è-algebra
 $P(\cdot)$ misura di prob.

Y m.a. Y): $P \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile

$\exists E(Y)$ finita

$$U = U(\cdot): P \rightarrow \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$$
 misurabile

→ visione immagine

$E(Y|U)$ operazione matematica di Y condizionata alle \mathcal{G} -algebre indotte da U

$$E[E(Y|U)] = E(Y)$$

OSS:

Y, U

$Y|U=u$ con legge simegnata

simegnata la legge a U .

$$P(Y \leq y) = \int_{\mathbb{X}} P(Y \leq y | U=u) dF_U(u)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}(Y | U=u) dF_U(u)$$

se è data una funzione di regressione $\mathbb{E}[Y|U= \cdot] : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{con } \mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}(Y | U=u) dF_U(u)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|U)]$$

$$P \xrightarrow{U(\cdot)} \mathbb{X} \xrightarrow{\mathbb{E}(Y|U=\cdot)} \mathbb{R}$$

$$\omega \quad U(\omega) = u \quad \mathbb{E}[Y|U=u]$$

$\exists \mathbb{E}(Y^2)$ finita $\rightarrow \mathbb{E}(Y^2|U)$

$$\text{poniamo } V_{\pi}(Y|U) = \mathbb{E}(Y^2|U) - \mathbb{E}(Y|U)^2$$

$$E[V_{\pi}(Y|U)] = \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y^2|U)]}_{\mathbb{E}(Y^2)} - \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|U)^2]$$

$$V_{\pi}[\mathbb{E}(Y|U)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|U)^2] - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|U)]^2}_{\mathbb{E}(Y)^2}.$$

$$\rightarrow E[V_{\pi}(Y|U)] + V_{\pi}[\mathbb{E}(Y|U)] = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|U)^2] + \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|U)^2] - \mathbb{E}(Y)^2 \\ = V_{\pi}(Y)$$

$$V_{\pi}(Y) = E[V_{\pi}(Y|U)] + V_{\pi}[\mathbb{E}(Y|U)]$$

FORMULA DI SCOMPOSIZIONE
DELLA VARIANZA

APPROCCIO BAYESIANO ALLA PERSONALIZZAZIONE IN BASE ALL'ESPERIENZA

Consideriamo una collezione di rischi "analogni" ed indipendenti

Indichiamo l'esperienza i-esima della collezione

Y_{i1}, Y_{i2}, \dots processo storistico a parametri dinamici da m.a. di interesse

$Y_{it} =$ valore al della grandezza di interesse per l'i-esimo soggetto nel periodo $[t-1, t]$

$$Y_{it} = \begin{cases} N_{it} & \text{num. sinistri nel periodo } t \\ X_{it} & \text{risarcimento tot. nel periodo } t \end{cases} \quad \text{per i-esimo assicurato}$$

U_i : parametro di rischio e componente di stazarietà per i-esimo soggetto
tante conto del profilo di rischi dell'i-esimo assicurato, non osservabile

- Per determinazione di U_i è assegnata la Legge F_{U_i} del processo

$$\{Y_{i1}|U_i=u; Y_{i2}|U_i=u; \dots\}$$

- sia assegnata la Legge di U_i (F_{U_i}, f_{U_i})

⇒ risulta assegnata la Legge del pro. $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$

$$P_E(E) = \int P_E(E|U_i=u) dF_{U_i}(u)$$

"analoga"

$F_{U_i}, F_{U_1}, f_{U_i}$ sono le medesime per ogni assicurato della collezione
e il processo $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ ha la stessa Legge (F_U, f_U) $\forall i$
 $\{Y_{i1}|U_i=u\} \stackrel{d}{=} \{Y_j|U_j=u\} \quad \forall u$, con legge F_U

- indipendenza

$\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ siano storicamente indipendenti \nexists i
inoltre \nexists i, j $Y_i|U_i=u, Y_j|U_j=u, \dots$ siano storicamente indipendenti
per fare valutazioni sull'i-esimo assicurato non dovranno uscire dagli altri
→ bisogna l'attenzione su un generico individuo della collezione
(comethiamo l'indice i)

$$Y_1, Y_2, \dots$$

U

$\nexists u \quad Y_1|U=u, Y_2|U=u, \dots$ sono storicamente indip. con Legge assegnata
è assegnata la Legge di U

$$F(y_1, \dots, y_m) = P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m)$$

Y_1, \dots, Y_m

$$= \int P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_m \leq y_m | U=u) dF_U(u)$$

$$= \prod_{j=1}^m P(Y_j \leq y_j | U=u) \neq \prod_{j=1}^m \int P(Y_j \leq y_j | U=u) dF_U(u)$$

in generale

da cui si vede che gli Y_1, Y_2, \dots non sono stocasticamente indipendenti

→ La storia individuale di rintracci è rilevante ai fini della valutazione probabilistica del processo di interesse

TS-25-10-2013 (22 ore)

$E(Y_{T+1})$ è il premio a priori / collettivo

se conosciamo $U=u \rightarrow E(Y_{T+1}|U=u)$ possiamo fare una valutazione più corretta che tiene conto dell'effettiva storia individuale dell'assurto

$\mu_{T+1}(u)$ premio individuale

tuttavia U non è mai osservabile

$\rightarrow E(Y_{T+1}|U) = \mu_{T+1}(U)$ premio individuale è obiettivo
ci è un condizionamento alla C-dyna indotta da U

si potrebbe volerare il premio individuale in $T+1$ basandosi sull'esperienza dell'individuo in esame ottenendo quindi una stima di $E(Y_{T+1}|U)$

$$E(Y_{T+1}) \xrightarrow{Y_1, \dots, Y_T} \hat{E}(Y_{T+1}|U)$$

$$E[Y_{T+1}] = E[E(Y_{T+1}|U)] = E[\mu_{T+1}(U)] \text{ premio a priori con } F_U$$

$$\text{ma } H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T) \text{ con } P(H_T) > 0$$

$$E[Y_{T+1}|H_T] = \int y_j dF_{Y_{T+1}|H_T}(y_j) \text{ esperienza matematica a posteriori}$$

$$= \int E(Y_{T+1}|H_T, U=u) dF_{U|H_T}(u) = E[\mu_{T+1}(U)|H_T]$$

$$\hat{E}(Y_{T+1}|U=u)$$

$$\mu_{T+1}(u)$$

premio a posteriori bayesiano

con $F_{U|H_T}$

se la distribuzione di U è dotata di densità f_U

$$E[Y_{t+1} | H_T] = \dots$$

$$= \int \mu_{t+1}(u) f_U(u) du \\ = \underbrace{\int_U}_{f_U(u)} \mu_{t+1}(u) \Pr(H_T | U=u) = \Pr(H_T)$$

qui in generale

$$E[Y_{t+1} | Y_1, \dots, Y_T] = E[\mu_{t+1}(U) | Y_1, \dots, Y_T] \quad \text{stimatore Bayesiano del premio individuale in } T+1$$

se K è un'algebra di \mathcal{F}

$$E(X | K) = E[E(X | \mathcal{F}) | K]$$

$$E[Y_{t+1} | Y_1, \dots, Y_T] = E[E(Y_{t+1} | Y_1, \dots, Y_T, U) | Y_1, \dots, Y_T]$$

$$= \mu_{t+1}(U) = E(Y_{t+1} | U) \quad \text{non indip. condizionate}$$

$$\rightarrow E[\mu_{t+1}(U) | Y_1, \dots, Y_T] = \tilde{\mu}_{t+1}(U)$$

// RICHIAMO

Y_1, \dots, Y_T ma osservabili

X ma non osservabile

possiamo trovare una $g(Y_1, \dots, Y_T)$ stima di X con un "errore minimo"?

errore come misura dell'errore $E[(X - g(Y_1, \dots, Y_T))^2]$ perché quadratica attira

errore quindi una funz. $g(\cdot)$ che minimizza la

$$\rightarrow \text{trova che } g(Y_1, \dots, Y_T) = E(X | Y_1, \dots, Y_T)$$

$$X = \mu_{t+1}(U)$$

$$\Rightarrow E[\mu_{t+1}(U) | Y_1, \dots, Y_T] = \tilde{\mu}_{t+1}(U)$$

questo stimatore è la $g(Y_1, \dots, Y_T)$ che minimizza la perdita quadratica stima

PROCESSO POISSON-GAMMA PER IL PROCESSO DI ARRIVO NEI SINISTRI

effettua molti "analoga" al indipendenti

in tutti individui

Nell'ultimo processo a parameter discreto, Ne numerosi sinistri in [0, 1, 2]

il parameter aleatorio di nascita

- * Fu determinazione di $N_1|U=u, N_2|U=u, \dots$ n.e. ind
- * Fu $N_i|U=u \sim \text{Poi}(2u) \geq 0$
- * $U \sim \text{Gamma}(\alpha, \alpha) \geq 0$
- * "Analoga" $\rightarrow \alpha, 2$ non dipendenza dell'individuo in esame, cioè valgono le stesse conclusioni probabilistiche per ogni soggetto della collettività

OSS: QUANDO GENERALE

i, j 2 soggetti

$U_i \neq U_j$ ma $U_i \stackrel{d}{=} U_j$ a priori per ipotesi

$$E[Y_{i,m}] = E[\mu_{i,m}(U_i)] = E[\mu_{j,m}(U_j)] = E[Y_{j,m}]$$

ovvero $H_{i,r} \cap H_{j,r}$

$Y_{i,m}|H_{i,r}$ dipende da $U_i|H_{i,r}$ ma $U_i|H_{i,r} \stackrel{d}{\neq} U_j|H_{j,r}$ a posteriori
 $Y_{j,m}|H_{j,r}$

$$E(U) = 1 \quad V_{\alpha}(U) = \frac{1}{\alpha}$$

$$E(N_i|U=u) = 2u \quad \text{perché già l'anno t se ne conosce } U=u$$

$$E(N_i|U) = 2U \quad \text{premi individuale collettivo}$$

$$\begin{aligned} E(N_i) &= E[E(N_i|U)] \\ &= E[2U] = 2E(U) = 2 \quad \text{premi collettivo in ogni anno} \end{aligned}$$

α è legato alle varianze di U

al crescere di α , la varianza di U decresce, cioè la collettività è "più omogenea", i premi individuali sono meno dispersi

al diminuire di α , la varianza di U cresce, cioè la collettività è "più eterogenea", i premi individuali sono più dispersi

$$V_{\alpha}(N_i) = E[V_{\alpha}(N_i|U)] - E[U]^2 \quad \begin{matrix} \text{(sol formula)} \\ \text{compon. Va} \end{matrix}$$

$$= 2 + \frac{2^2}{\alpha}$$

$N_i \sim \text{Beta}(\alpha, \alpha)$ in pratica

PROCESSO POISSON - GAMMA (α, ∞)

punto T, m_1, \dots, m_T

$$\begin{aligned}
 \Pr(N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_T} = m_T) &= \int \underbrace{\Pr(N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_T} = m_T | U=u)}_{\prod_{t=1}^T \Pr(N_t = m_t | U=u)} \underbrace{dF_U(u)}_{f_U(u) du} \\
 &= \int_0^\infty \prod_{t=1}^T \frac{e^{-2u} (2u)^{m_t}}{m_t!} f_U(u) du \\
 &= \int_0^\infty e^{-2uT} \frac{(2u)^{\sum m_t}}{\prod_{t=1}^T t!} \cdot \frac{\infty}{T(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u} du \\
 &= \frac{\alpha^\alpha}{T(\alpha) \prod_{t=1}^T t!} \int_0^\infty u^{\alpha + \sum m_t - 1} e^{-u(\alpha + 2T)} du \\
 &\quad \text{nella Gamma } (\alpha + \sum m_t, \alpha + 2T) \\
 &= \frac{\alpha^\alpha}{T(\alpha) \prod_{t=1}^T t!} \cdot \frac{2^{\sum m_t}}{\Gamma(\alpha + \sum m_t)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \sum m_t)}{(\alpha + 2T)^{\alpha + \sum m_t}}
 \end{aligned}$$

OSS:

$$\bullet \prod_{t=1}^T \Pr(N_t = m_t) = \prod_{t=1}^T \frac{T(\alpha + m_t)}{T(\alpha) m_t!} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2} \right)^{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha + 2} \right)^{\sum m_t}$$

$$N_t \sim \text{BinNeg} \left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{in generale } \Pr(N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_T} = m_T) \neq \prod_{t=1}^T \Pr(N_t = m_t)$$

$\Rightarrow \{N_t, t=1, 2, \dots\}$ non è un processo di n.z. stocasticamente indipendente

• considero (t_1, \dots, t_T) permutazione di $(1, \dots, T)$

$$\text{trovo che } \Pr(N_{t_1} = m_1, \dots, N_{t_T} = m_T) = \Pr(N_1 = m_1, \dots, N_T = m_T)$$

$$\Rightarrow (N_{t_1}, \dots, N_{t_T}) \stackrel{d}{=} (N_1, \dots, N_T)$$

$\Rightarrow \{N_t, t=1, 2, \dots\}$ è un processo membrabile

valutare N_{T+1}

$$E(N_{T+1}) = 2$$

premio collettivo

$$E(N_{T+1} | U) = 2U$$

premio individuale

$$H_T = (N_{t=m_1}, \dots, N_{t=m_T})$$

$$\begin{aligned} E(N_{T+1} | H_T) &= \int_0^{+\infty} E(N_{T+1} | H_T, U=u) dF_{U|H_T}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} E(N_{T+1} | U=u) dF_{U|H_T}(u) \\ &= \int_0^{+\infty} 2u dF_{U|H_T}(u) = 2 \int_0^{+\infty} u dF_{U|H_T}(u) \\ &= 2E[U|H_T] \end{aligned}$$

$$f_U(u) = \frac{f_U(u) Pr(H_T | U=u)}{Pr(H_T)} \propto f_U(u) Pr(H_T | U=u)$$

$$f_U(u) Pr(H_T | U=u) = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u} \cdot \frac{e^{-2uT} (2u)^{\sum m_t}}{\prod m_t!}$$

$\propto u^{\alpha + \sum m_t - 1} e^{-(\alpha + 2T)u}$ numero di una Gamma $(\alpha + \sum m_t, \alpha + 2T)$

$$\Rightarrow U|H_T \sim \text{Gamma}(\alpha + \sum m_t, \alpha + 2T)$$

$$E[U|H_T] = \frac{\alpha + \sum m_t}{\alpha + 2T}$$

OSS:

$$U \sim \text{Gamma}(\alpha, \alpha)$$

$$U|H_T \sim \text{Gamma}(\alpha + \sum m_t, \alpha + 2T)$$

è sempre una gamma ma con i parametri aggiornati

$$\begin{aligned} E(N_{T+1} | H_T) &= 2 \cdot \frac{\alpha + \sum m_t}{\alpha + 2T} \quad \text{dipende da } 2, \alpha, T, \sum m_t \\ &= 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 2T} + \frac{\sum m_t}{\alpha + 2T} \cdot \frac{2T}{2T} \\ &= 2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 2T} + \frac{\sum m_t}{T} \end{aligned}$$

Il premio a posteriori può essere visto come una combinazione convessa di 2 premi collettivi a pari $\sum m_t$ numero medio corso de sinistri.

mento, stessa prob per il num medio dell'anno $T+1$

→ è una particolare FORMULA DI CREDIBILITÀ

1- β_T decrese al crescere di T (a parità del resto)

⇒ $\exists \tau$ crece al crescere di T : $\exists \tau \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1$

via via che passa il tempo si dà peso sempre maggiore alla s. t. dell'esperienza individuale

2- α_T decrese al crescere di T (a parità del resto)

α "grande" → la collettività dei rischi è più omogenea e quindi si dà meno peso alla s. t. dell'esperienza individuale

α "piccolo" → la collettività dei rischi è piùeterogenea e quindi si dà maggior peso alla s. t. dell'esperienza individuale

TS-28-10-2013 (24 ore) 5[°] SETT

ASPECTO NEGATIVO

della storia individuale (m_1, \dots, m_T) coni u. $\frac{\sum_{t=1}^T m_t}{T}$ rispetto
 T -uple diverse portano allo stesso risultato

a: $(1, 0, 0, \dots, 0)$

$(0, 0, 0, \dots, 1)$ due storie differenti, lo stesso risultato → stesso premio

cioè è dovuto al fatto che il parametro di rischio α è supposto costante nel tempo (in altri modelli lo si fa variare)

$$C_{\text{REV}}(H_T) = \frac{E(N_{T+1}|H_T)}{E(N_{T+1})} \quad \text{COEFFICIENTE DI AGGIORNAMENTO o DI REVISIONE}$$

$$\rightarrow E(N_{T+1}|H_T) = E(N_{T+1}) C_{\text{REV}}(H_T)$$

se $C_{\text{REV}}(H_T) > 1$ → premio individuale maggiore del premio collettivo

se $C_{\text{REV}}(H_T) < 1$ → " " " minore " "

$$C_{\text{REV}}(H_T) = \frac{\alpha + \sum_{t=1}^T m_t}{\alpha + 2T}$$

$$C_{\text{REV}}(H_T) > 1 \Leftrightarrow \alpha + \sum_{t=1}^T m_t > \alpha + 2T$$
$$\sum_{t=1}^T m_t > 2T$$

num rischi osservati > num attesi da s. t.

$$E(N_{T+1}|H_T) = \sum_{t=1}^T E(N_t) = 2T$$

considerat due intrebari i, j

$$\mathbb{E}(N_{i,\tau+1}) = \mathbb{E}(N_{j,\tau+1}) = 2 \quad \text{stato premio a priori}$$

$$\begin{aligned} E[E(N_{i+T+1} | U_i)] &= E[2U_i] \\ E[E(N_{j+T+1} | U_j)] &= E[2U_j] \end{aligned}$$

$$E(N_{\omega, \tau+1} | H_{\omega, \tau}) = 2 E(U_\omega | H_{\omega, \tau})$$

$$E(N_{j+1:n} | H_{1:T}) = 2 \cdot E(U_j | H_{1:T})$$

14 3 14

da Florentia primaria
a protectori

in September

230

CLASSE 1 : proc. Poisson-gamma (I_1, α)

CLASSE 2: " " " $(2, \infty)$

$$2_1 < 2_n$$

Le riduzioni di premio per la classe 1 sono più piccole rispetto a quelle della classe 2, gli aggiorni per la classe 1 sono più piccoli rispetto a quelli della classe 2.

gli avvocati delle due classi sono giudicati "bravi" → se sbagliano pregano di più
 2 "attivi" → se sbagliano però mai lo aspettano
 ovviamente il premio a priori per la classe 1 è inferiore di quelli della classe 2.

Note \sim Binney ($c\alpha$; $\frac{\alpha}{\sim+2}$)

$$N_{t+1} | H_T \sim \text{Bin}(N_T, \left(\alpha + \sum_{\tau=1}^T \frac{\alpha + \lambda T}{\alpha + 2(\tau+1)} \right)) \quad H_T = (N_1=m_1, \dots, N_T=m_T)$$

$$\Pr(N_{t+1} = m \mid H_t) = \int \Pr(N_{t+1} = m \mid H_t, U = u) dF_{U \mid H_t}(u)$$

Tella pratica 2 e ci sono molte più in un'ottica Bayesiane i parametri incogniti sono m.a. → considera 1. e 2. m.a.

$\lambda_1 = \mu, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ i.e.

$$N_2 \mid U = u, \lambda = 2, \Lambda = \infty \sim \text{Pois}(2u)$$

• If $\lambda = \lambda_0$, $\lambda = \alpha \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$.

(1, A) con legge assegnata.

nella pratica si utilizza un'approssimazione empirica

λ, α non sono mai "certi" (non sono m.a.)

→ stima dei dati

$$P_r(N_{T+1} = m | H_T) = \frac{P_r(N_{T+1} = m, H_T)}{P_r(H_T)}$$

$$\begin{aligned} P_r(N_{T+1} = m, H_T) &= \int P_r(H_T, N_{T+1} = m | U = u) dF_U(u) \\ &= \int \prod_{t=1}^T \frac{(2u)^{m_t} e^{-2u}}{m_t!} \cdot \frac{(2u)^{\sum_{t=1}^T m_t} e^{-2u}}{m!} \cdot \frac{\alpha^{m+1} u^{m+1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)} du \\ &= \int \frac{(2u)^{\sum_{t=1}^T m_t + m}}{\prod_{t=1}^T m_t!} \cdot \frac{\alpha^{m+1} u^{m+1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\alpha)} du \quad) \text{ ind} \\ &= \frac{2^{\sum_{t=1}^T m_t + m}}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^T m_t!} \int u^{\alpha + \sum_{t=1}^T m_t + m - 1} e^{-\alpha u} du \\ &= \frac{2^{\sum_{t=1}^T m_t + m}}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^T m_t!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t + m)}{(\alpha + 2(T+1))^{m+1}} \quad (\lambda, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t + m)}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^T m_t!} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2(T+1)} \right)^{\sum_{t=1}^T m_t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_r(N_{T+1} = m, H_T)}{P_r(H_T)} &= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t + m)}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^T m_t!} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2(T+1)} \right)^{\sum_{t=1}^T m_t} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^T m_t!}{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t)} \cdot \frac{(\alpha/2)^{\sum_{t=1}^T m_t}}{\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t + m)}{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t) m!} \cdot \left(\frac{\alpha + 2T}{\alpha + 2(T+1)} \right)^{\sum_{t=1}^T m_t} \left(\frac{2}{\alpha + 2(T+1)} \right)^m \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t + m)}{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t) m!} \cdot \left(\frac{\alpha + 2T}{\alpha + 2(T+1)} \right)^{\alpha + \sum_{t=1}^T m_t} \left[\left(\frac{2}{\alpha + 2(T+1)} \right)^m + 2T \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_{T+1} | H_T \sim \text{Bin}(\text{Nag}(\alpha + \sum_{t=1}^T m_t, \frac{\alpha + 2T}{\alpha + 2(T+1)}))$$

considerati due individui i, j

$$E(N_{i,T+1}) = E(N_{j,T+1}) = \lambda \quad \text{stesse premesse a priori}$$

$$E[E(N_{i,T+1})] \quad \text{(1) vedi riferimenti}$$

$$E[E(N_{i,T+1})] = \Pr(N_{i,T+1} = m | H_T) = \int \Pr(N_{i,T+1} = m | H_T, U=u) dF_{U|H_T}(u) =$$

$$H_{i,T} \quad E \quad \Pr(N_{i,T+1} = m | H_T, U=u) = \Pr(N_{i,T+1} = m | U=u) \quad \text{indip. } N_i | U=u \quad i=1,2,\dots$$

$$H_{j,T} \quad E \quad U | H_T \sim \text{gamma}(\alpha + \sum_{t=1}^T n_t, \beta + 2T) \quad N_j | U=u \sim \text{Bin}(2\lambda u)$$

$$\underline{\text{Dempster:}} \quad = \int \Pr(N_{i,T+1} = m | U=u) f_U(u) du$$

$$\text{CLASSE 1:} \quad = \int \frac{(2u)^m}{m!} \frac{e^{-2u}}{\Gamma(\alpha + 2T)} \frac{u^{\alpha + \sum_t n_t} e^{-u(\alpha + 2T)}}{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t)} du$$

$$\text{CLASSE 2:} \quad$$

$$\text{le riduzioni} \quad = \frac{2^m (\alpha + 2T)}{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t) m!} \int u^{\alpha + \sum_t n_t + m - 1} e^{-u(\alpha + 2(T+1))} du$$

dove 2,

della classe 2

$$\text{gli avverut.} \quad = \frac{2^m (\alpha + 2T)}{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t) m!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t + m)}{(\alpha + 2(T+1))^{\alpha + \sum_t n_t + m}}$$

$$\text{ovviamente} \quad = \frac{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t + m)}{\Gamma(\alpha + \sum_t n_t) m!} \cdot \left(\frac{\alpha + 2T}{\alpha + 2(T+1)} \right)^{\alpha + \sum_t n_t} \left(\frac{\lambda}{\alpha + 2(T+1)} \right)^m$$

$$N_{i,T+1} \sim \text{Bin}$$

$$N_{i,T+1} | H_T \sim \text{Bin}$$

$$\Rightarrow N_{i,T+1} | H_T \sim \text{Bin Neg} \left(\alpha + \sum_t n_t; \frac{\alpha + 2T}{\alpha + 2(T+1)} \right)$$

$$\Pr(N_{i,T+1} = m)$$

Tutta pratica

incognita λ

$$N_i | U=u$$

$$N_i | U=u,$$

$$U | \lambda = \lambda \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$$

(λ, β) con lunga aste

nella pratica si utilizza una approssimazione empirica

λ, α non sono mai "certi" (non sono m.a.)

↳ stima dei dati

STIMA DI (λ, α)

n_i richi osservati per T anni

N_{iz} m.a. sinistri per l'anno t dell' i -esima assicurata $i=1, \dots, n$

U_i parametro cl. di rischio per i -esima assicurata

m_{iz} determinazione di N_{iz} osservata

- $(U_1, N_{11}, N_{12}, \dots), \dots, (U_n, N_{n1}, N_{n2}, \dots), \dots, (U_T, N_{T1}, N_{T2}, \dots)$ iid
- $(U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots)$

$$\left. \begin{array}{l} N_{iz} | U_i = u, N_{iz} = m_{iz}, \dots \text{ iid} \\ N_{iz} | U_i = u \sim \text{Poi}(\lambda u) \\ U_i \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda) \end{array} \right\} (N_{iz}, N_{iz}, \dots) \sim \text{m.p. Poisson-gamma } (\lambda, \alpha)$$

$$L(\lambda, \alpha) = \prod_{i=1}^n \Pr(N_{iz} = m_{iz}, \dots, N_{iT} = m_{iT}; \lambda, \alpha)$$
$$= \prod_{i=1}^n \frac{T(\alpha + \sum z_{iz})}{T(\alpha) T(m_{iz}!)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2T} \right)^{\alpha} \left(\frac{2}{\alpha + 2T} \right)^{\sum z_{iz}}$$

FUNZIONE DI
VEROSIMIGLIANZA

notazione:

$$m_z = \sum_{i=1}^T m_{iz}$$

$$m_z = \sum_{i=1}^n m_{iz} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T m_{itz}$$

$$\ell(\lambda, \alpha) = \ln L(\lambda, \alpha)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\ln \frac{T(\alpha + m_{iz})}{T(\alpha)} - \ln T(m_{iz}!) + \alpha(\ln \alpha - \ln(\alpha + 2T)) + m_{iz}(\ln 2 - \ln(\alpha + 2T)) \right]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ell(\lambda, \alpha) \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\lambda, \alpha) \right) = 0$$

$$\frac{\partial L(\theta, \alpha)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left[-\alpha \frac{1}{\alpha+2T} T + m_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2T} T \right) \right]$$

$$= \frac{-\alpha T}{\alpha+2T} n + \frac{m}{2} - \frac{1}{\alpha+2T} T m$$

$$\frac{-\alpha T}{\alpha+2T} n + \frac{m}{2} - \frac{T m}{\alpha+2T} = 0$$

$$\frac{-\alpha 2T n + m \alpha + m \alpha T - T m 2}{2(\alpha+2T)} = 0 \Leftrightarrow -Tn 2 + m = 0$$

$$2 = \frac{m}{Tn}$$

FREQUENZA SINISTRA
stimata sul goniofotogramma

OSS: (per trovare $\hat{\alpha}$)

$$\frac{T(\alpha+m)}{T(\alpha)} = \frac{(\alpha+m-1) \dots \alpha \cdot T(\alpha)}{T(\alpha)}$$

Questo modello permette di avere risultati relativamente semplici

$$N_z | U=u \sim \text{Pois}(2u)$$

$$U \sim \text{gamma}(\alpha, \alpha) \Rightarrow U | H_+ \sim \text{gamma}\left(\alpha + \sum_{i=1}^n r_i; \alpha + 2T\right)$$

ASPECTI NEGATIVI DELL'APPROCCIO BAYESIANO

- bisogna adeggiare la Legge del processo $Y_1 | U=u, Y_2 | U=u, \dots$
" " " " " di U

→ è necessaria una specificazione completa in termini probabilistici e questa è una richiesta molto forte

- tranne la Legge di $U | H_+$ (la posteriore) qui non c'è un "prior"
- un cliente può avere grosse difficoltà a capire l'approccio Bayesiano
→ problema commerciale

APPROCCIO NELLA TEORIA DELLA CREDIBILITÀ ALLA PERSONALIZZAZIONE

BASATA SULL'ESPERIENZA INDIVIDUALE

Consideriamo una collezione di rischi "analogni" ed indipendenti

Quisiamo un particolare indirizzo della collezione (mettiamo m rischi)

Y_1, Y_m spaziano strettamente a parità di durata da m a M (l'intervallo per l'intervallo considerato)

Un parametro α di rischio legato all'arrivo (tira fuori dal popolo dei

\forall la determinazione di U siano $Y_1|U=u, Y_2|U=u, \dots$ m.a. strettamente indip.

$E(Y_{t+1}|U)$ premio individuale

considero una funzione del processo di osservazione piuttosto semplice, tipo

$$\alpha_0 + \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t \quad \text{polinomio di 1° grado}$$

in modo da poter stimare il meglio possibile in questo senso il premio individuale $E(Y_{t+1}|U) = \mu_{t+1}(U)$

\rightarrow minimizzare la perdita quadratica attesa:

$$\min_{\alpha_0, \dots, \alpha_T} E \left[(\mu_{t+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t)^2 \right]$$

$$\text{perché } Q(\alpha_0, \dots, \alpha_T) = E \left[(\mu_{t+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t)^2 \right]$$

$$= \int_{U, Y_1, \dots, Y_T} (\mu_{t+1}(u) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t y_t)^2 dF(u, y_1, \dots, y_T) \quad \text{integro. multipla}$$

il modello probabilistico sia tale da soddisfare le condizioni di derivabilità sotto il segno di integrale

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} &= \int 2(\mu_{t+1}(u) - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t y_t)(-1) dF_{U, Y_1, \dots, Y_T}(u, y_1, \dots, y_T) \\ &= -2 E[\mu_{t+1}(U) - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t Y_t] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 0 \Leftrightarrow E[\mu_{t+1}(U)] - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t E(Y_t) = 0$$

$$E[E(Y_{t+1}|U)] = E(Y_{t+1})$$

$$E(Y_{t+1}) = \alpha_0 + \sum_t \alpha_t E(Y_t)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_h} &= \int 2(\mu_{t+1}(u) - \alpha_0 - \sum_t \alpha_t y_t)(-y_h) dF_{U, Y_1, \dots, Y_T}(u, y_1, \dots, y_T) \quad h=1, \dots, T \\ &= -2 E[\mu_{t+1}(U) Y_h - \alpha_0 Y_h - \sum_t \alpha_t Y_t Y_h] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_h} = 0 \Leftrightarrow E[\mu_{t+1}(U) Y_h] = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_t \alpha_t E(Y_t Y_h) \quad h=1, \dots, T$$

$$= E[E(\mu_{t+1}(U) Y_h | U)] = E[\mu_{t+1}(U) E(Y_h | U)]$$

$$= E[\underbrace{E(Y_{t+1}|U) E(Y_h|U)}_{E(Y_{t+1} Y_h | U)}] = E(Y_{t+1} Y_h) \quad \text{indip. } Y_t | U$$

$$E(Y_{t+1} Y_h) = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_t \alpha_t E(Y_t Y_h) \quad h=1, \dots, T$$

TS-29-10-2013 (25 ore)

$$\begin{cases} E(Y_{t+1}) = \alpha_0 + \sum_t \alpha_t E(Y_t) & \cdot (-E(Y_t)) \text{ è normale} \\ E(Y_{t+1} | Y_t) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^T \alpha_t E(Y_t | Y_t) & t=1, \dots, T \end{cases}$$

$$E(Y_{t+1} | Y_t) - E(Y_{t+1}) E(Y_t) = \sum_t \alpha_t [E(Y_t | Y_t) - E(Y_t) E(Y_t)]$$

$$\text{Cov}(Y_{t+1}, Y_t) = \sum_t \alpha_t \text{Cov}(Y_t, Y_t)$$

↓ rettangolo

$$\begin{cases} E(Y_{t+1}) = \alpha_0 + \sum_t \alpha_t E(Y_t) \end{cases}$$

SISTEMA NORMALE

$$\begin{cases} \text{Cov}(Y_{t+1}, Y_t) = \sum_t \alpha_t \text{Cov}(Y_t, Y_t) & t=1, \dots, T \end{cases}$$

→ trova $(\alpha_0^*, \dots, \alpha_T^*)$ soluzione del sistema

$$\tilde{\mu}_{t+1}^{(\text{cred})} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^T \alpha_t^* Y_t$$

STIMATORE INDIVIDUALE DI CREDIBILITÀ
LINEARE DEL PREMIO INDIVIDUALE IN T+1

ci sono dei vantaggi rispetto all'approccio Bayesiano:

- il sistema si risolve guardando ai momenti prima e secondo del processo $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ → è necessaria una specificazione decisamente minore

a. lo stimatore è funzione lineare di Y_1, \dots, Y_T

$$\begin{aligned} \bullet E[\tilde{\mu}_{t+1}^{(\text{cred})}] &= \alpha_0^* + \sum_{t=1}^T \alpha_t^* E(Y_t) \\ &= E[Y_{t+1}] = E[\mu_{t+1}(u)] \end{aligned}$$

→ lo stimatore è non distorto

$$\bullet Q_1(\alpha_0, \dots, \alpha_T) = E[(Y_{t+1} - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t)^2]$$

$$Q_2(\alpha_0, \dots, \alpha_T) = E[(E(Y_{t+1} | Y_1, \dots, Y_T) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t)^2]$$

rivulta che $(\alpha_0^*, \dots, \alpha_T^*) = \begin{cases} \text{argmin } Q_1 \\ \alpha_0, \dots, \alpha_T \\ \text{argmin } Q_2 \\ \alpha_0, \dots, \alpha_T \end{cases}$

$$H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$$

$$\tilde{\mu}_{t+1}^{(\text{cred})}(H_T) = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^T \alpha_t^* y_t$$

MODELLO DI BÜHLMANN (1967)

collattività di rischio

per l'-esimo individuo: Y_{i1}, Y_{i2}, \dots processo dei dati di interesse

U_i parametro aleatorio di rischio

- $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$ iid al variare di i
- finito μ , σ^2 determinazione di U_i $Y_{it} | U_i = u, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots$ iid

$$E[Y_{it} | U_i = u] = \mu(u) \\ \text{Var}[Y_{it} | U_i = u] = \sigma^2(u)$$

non c'è dipendenza né da t né da i
 $\rightarrow \mu(\cdot), \sigma^2(\cdot)$ comuni a tutti i rischi della collattività
 sono supporti finiti

consideriamo:

$$E(Y_{it}) = E[E(Y_{it} | U_i)] = E[\mu(U_i)] \triangleq \mu \quad \text{premio a priori}$$

$$E[\text{Var}(Y_{it} | U_i)] = E[\sigma^2(U_i)] \triangleq \sigma^2$$

$$\text{Var}[E(Y_{it} | U_i)] = \text{Var}[\mu(U_i)] \triangleq \alpha \quad \begin{array}{l} \text{dipendenza della distribuzione di probabilità} \\ \text{del premio a priori} \end{array} \\ \text{collattività omogenea} \rightarrow \alpha \text{ "piccoli"} \quad \alpha > 0 \\ \text{"eterogenea" } \rightarrow \alpha \text{ "grandi"}$$

OSS:

$$\text{Var}(Y_{it}) = E[\text{Var}(Y_{it} | U_i)] + \text{Var}[E(Y_{it} | U_i)] \\ = \sigma^2 + \alpha$$

finito un avvicinato "compatto" (omettiamo α)

$$\cdot E(Y_t) = \mu \quad t = 1, \dots, T+1$$

$$\cdot \text{Var}(Y_t) = \sigma^2 \quad t = 1, \dots, T$$

$$\cdot \text{Cov}(Y_t, Y_h) = ? \quad t \neq h$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_h) = E(Y_t Y_h) - E(Y_t) E(Y_h)$$

$$E(Y_t Y_h) = E[E(Y_t Y_h | U)] \\ = E[E(Y_t | U) E(Y_h | U)] = E[\mu^2(U)]$$

$$E(Y_t) = E[\mu(U)] = E(Y_h)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_h) &= E[\mu(u)] - (E[\mu(u)])^2 \\ &= \sqrt{\text{Var}[\mu(u)]} = \sigma \end{aligned}$$

$t \neq h$

$$\rightarrow \text{Cov}(Y_t, Y_h) = \sigma \quad t \neq h$$

SISTEMA NORMALE

$$\begin{cases} \mu = \alpha_0 + \sum_{t=1}^T (\alpha_t / \mu) \\ (\alpha = \alpha_k (T+1) + \sum_{t \neq k} (\alpha_t / \alpha)) \quad k=1, \dots, T \\ \alpha = \alpha_k \cdot r + \alpha \sum_t \alpha_t / \alpha \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_t \alpha_t = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ 1 = \alpha_k \cdot k + \sum_t \alpha_t \quad k = \frac{n}{\alpha} \quad k=1, \dots, T \end{array} \right.$$

$$\alpha_k \cdot k = 1 - 1 + \frac{\alpha_0}{\mu} \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^T \alpha_k = \frac{\alpha_0 \cdot T}{\mu \cdot k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_0}{\mu \cdot R} \cdot T = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ \alpha_k = \frac{\alpha_0}{\mu \cdot k} \quad k=1, \dots, T \end{array} \right.$$

$$\alpha_0 \left(\frac{T}{\mu k} + \frac{k}{\mu k} \right) = 1 \Leftrightarrow \alpha_0 = \mu \frac{k}{T+k}$$

$$\left\{ \alpha_0^* = \frac{\mu k}{T+k} \right.$$

$$\left(\alpha_k^* = \frac{\mu k}{T+k} \cdot \frac{1}{\mu k} = \frac{1}{T+k} \quad k=1, \dots, T \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{T+1}^{\text{pred}} &= \alpha_0^* + \sum_{t=1}^T \alpha_t^* Y_t \\ &= \mu \frac{k}{T+k} + \sum_{t=1}^T Y_t \cdot \frac{1}{T+k} \\ &= \mu \underbrace{\frac{k}{T+k}}_{1-\frac{1}{T+1}} + \underbrace{\frac{\sum_{t=1}^T Y_t}{T}}_{\frac{1}{T+1}} \end{aligned}$$

combinazione lineare convessa

grande a
piccolo

stima puro

opinione analogia all'opinione

Bayesian con modello Lasso-gamma

$$H_r = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$$

$$P_{T+1}^{\text{ord}}(H_T) = \mu \cdot \frac{h}{T+1} + \bar{z}_T \cdot \frac{1}{T+1} \rightarrow \text{PESO o FATTORE di ORDINABILITÀ}$$

z_T dipende da T :

crece al crescere di T

$$z_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 1$$

z_T dipende da $h = \frac{x}{\alpha}$:

se a crece (nisi stergogenita), h decrece e z_T crece

OSS:

abbiamo trovato α_i^* tutti uguali, potremmo apprenderlo?

$$Y_1|U=u, Y_2|U=u, \dots \text{ iid}$$

$\Rightarrow \{Y_1, Y_2, \dots\}$ è processo recombinaibile

$$(Y_1, \dots, Y_T) \stackrel{d}{=} (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_T}) \quad (i_1, \dots, i_T) \text{ permutazione di } (1, \dots, T)$$

la teoria della credibilità è nata su due intuizioni

$$P_{T+1}(H_T), \quad H_r = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$$

due strade: $\begin{cases} \mu & \text{guardare alla collettività ponendone gli elementi "bravi"} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t & \text{guardare al singolo individuo facendo vedere la mutualità} \end{cases}$
e mettere di trovare una via di mezzo tramite mistura:

$$\mu(1-z_T) + \frac{\sum_{t=1}^T y_t}{T} z_T = z_T \in [0, 1]$$

ma come scegliere z_T ? sono stati sviluppati varie appross.

Giblmann ha inquadrato il problema in un'ottica Bayesiana

per sviluppare il modello è necessario conoscere μ, v, α

\rightarrow si ricava dai dati

STIMA DEI PARAMETRI (μ, v, α)

è richiesto avervi circa n anni

$$(U_1, Y_{11}, Y_{12}, \dots)$$

$$y_{11}, y_{12}, \dots \quad t = 1, \dots, n$$

$(U_1, Y_{11}, Y_{12}, \dots), \dots, (U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots), \dots, (U_n, Y_{n1}, Y_{n2}, \dots)$ i.i.d.

$$Y_{i1} | U_i = u, Y_{i2} | U_i = u, \dots \text{ i.i.d.}$$

$$E[Y_{i1} | U_i = u] = \mu(u)$$

$$\text{Var}[Y_{i1} | U_i = u] = \sigma^2(u)$$

// RICHIAMO

W_1, \dots, W_n i.i.d

$$E(W_i) \triangleq E(W)$$

$$\text{Var}(W_i) \triangleq \text{Var}(W)$$

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i \quad E(\bar{W}) = E(W)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W})^2 \quad E(S^2) = \text{Var}(W)$$

//

$$\hat{Y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{it}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T Y_{it}$$

$$E(\tilde{\mu}) = \mu$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i$$

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{y}_{it}$$

$\hat{\mu}$ è la stima di μ

TECNICA ATTUARIALE
DELLE ASSICURAZIONI
DANNI

②

INTAUNTA

$$\bullet \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \right].$$

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \left[E \left(\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2 \mid U_i \right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\text{Var}(Y_{it} \mid U_i)] = \sigma^2$$

// RICHIAMO //

$Y_{it} \mid U_i = u, \dots, Y_{iT} \mid U_i = u$ iid con aspettativa matematica e varianza finite

$\rightarrow \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_{it} \mid U_i = u - \bar{Y}_i \mid U_i = u)^2$ è stimatore non distorto della comune varianza

$$\Rightarrow E \left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_{it} \mid U_i = u - \bar{Y}_i \mid U_i = u)^2 \right] = \text{Var}(Y_{i1} \mid U_i = u)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (y_{it} - \hat{\mu}_i)^2 \right]}_{\hat{\sigma}^2}$$

$\hat{\sigma}^2$ è stima di σ^2

• per il parametro α (varianza di valori attesi)

vedo se $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$ è uno stimatore non distorto

$$\bar{Y} = \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i \quad \bar{Y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{it}$$

$$E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \right] = \text{Var}(\bar{Y}_i) \text{ varianza dei m.a. attesi:}$$

$$\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_i, \dots, \bar{Y}_n$$

funz. di Y_{11}, \dots, Y_{1T} funz. di Y_{i1}, \dots, Y_{iT} funz. di Y_{n1}, \dots, Y_{nT}
m.a. stoc. indip. m.a. stoc. indip. m.a. stoc. indip.

gli \bar{Y}_i ($i=1, \dots, n$) sono funz. stoc. iniziali disgiunte di m.a. i.i.d

$\Rightarrow \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ i.i.d

$$\text{Var}(\bar{Y}_i) = E[\text{Var}(\bar{Y}_i \mid U_i)] + \text{Var}[E(\bar{Y}_i \mid U_i)]$$

$$= E \left[\text{Var} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{it} \mid U_i \right) \right] + \text{Var} \left[E \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_{it} \mid U_i \right) \right]$$

$$= E \left[\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \text{Var}(Y_{it} \mid U_i) \right] + \text{Var} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(Y_{it} \mid U_i) \right]$$

$$\begin{aligned} &= E\left[\frac{1}{T^2} T \nu(U_i)\right] + \text{Var}\left[\frac{1}{T} \cdot T \mu(U_i)\right] \\ &= \frac{1}{T} E[\nu(U_i)] + \text{Var}[\mu(U_i)] = \frac{1}{T} \cdot \nu + \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2\right] = \frac{1}{T} \cdot \nu + \alpha \neq \alpha$$

non è quindi uno stimatore non distorto di α , ma possiamo aggiustarlo

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - \frac{1}{T} \tilde{\nu}$$

$$\text{infatti } E[\hat{\alpha}] = \frac{1}{T} \cdot \nu + \alpha - \frac{1}{T} E(\tilde{\nu}) = \alpha$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_i - \bar{\mu})^2 - \frac{1}{T} \hat{\nu}$$

$\hat{\alpha}$ è lo stima di α

tuttavia nella ipotesi del modello abbiamo posto $\alpha > 0$, mentre potrebbe capitare che $\hat{\alpha}$ risulti nullo o negativo (sottraggo $\frac{1}{T} \tilde{\nu}$)

il modello risulterebbe incompatibile con i dati

nella pratica qui accadeva da si usi $\hat{\alpha} = \max(\hat{\alpha}, 0)$

($\alpha = 0 \rightarrow$ non c'è dimensione sul premio a priori, la collaterità è perfettamente omogenea)

una volta calcolati $\hat{\mu}_i, \hat{\nu}, \hat{\alpha}$ si trova

$$\widetilde{\mu}_{i+1}(U_i)^{\text{cred}} = \hat{\mu} \frac{T}{T+\hat{\lambda}} + \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Y_{it}\right) \frac{\hat{\lambda}}{T+\hat{\lambda}} \quad \hat{\lambda} = \frac{\hat{\nu}}{\hat{\alpha}}$$

↳ stima del premio individuale di credibilità

PROCESSO DI POISSON SEMIPARAMETRICO PER IL NUMERO DI SINISTRI

collaterità di rischi

per l' i -esimo individuo: N_{i1}, N_{i2}, \dots processo dei numeri di arrivo di interventi
 U_i : parametro elastico di rischio

- $(U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots)$ ind. di variaz. di i

- dato z , γ u determinazione di U_i

$N_{i1}|U_i=z, N_{i2}|U_i=z, \dots$ ind.

• $N_{it} | U_i = u \sim \text{Poi}(2u)$ 20

• $E(U_i) = 1 \quad \text{Var}(U_i) = \sigma^2$

quale sarebbe μ , v , a ?

$$E[N_{it} | U_i = u] = 2u = \mu(u) \quad \text{in questo caso è lineare}$$

$$\text{Var}[N_{it} | U_i = u] = 2u = v(u)$$

$$\mu = E[E(N_{it} | U_i)] = E[2U_i] = 2 \quad \text{premio relativo (come nel processo Poisson-gamma)}$$

$$v = E[\text{Var}(N_{it} | U_i)] = E[2U_i] = 2$$

$$a = \text{Var}[E(N_{it} | U_i)] = \text{Var}[2U_i] = 2^2 \sigma^2$$

sono soddisfatte le ipotesi del modello di Bühlmann, e in più si è ipotizzato che $N_{it} | U_i = u \sim \text{Poi}(2u)$, 20

possiamo quindi calcolare $\hat{\lambda}$, $\hat{\alpha}$

$$\rightarrow \widetilde{\mu}_{t+1}(U_i) = \mu \frac{T}{T+\hat{\lambda}} + \frac{\sum n_{it}}{T} \cdot \frac{\hat{\lambda}}{T+\hat{\lambda}} \quad \hat{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\hat{\lambda}}{\sum \hat{\lambda}_i} = \frac{1}{\sum \hat{\lambda}_i}$$

→ stima di $E[Y_i + | U_i]$ premio individuale

ASPECTI NEGATIVI DEL MODELLO DI BÜHLMANN

in questo modello si è ipotizzato che:

$\forall u \quad Y_{i1} | U_i = u, Y_{i2} | U_i = u, \dots$ siano i.i.d

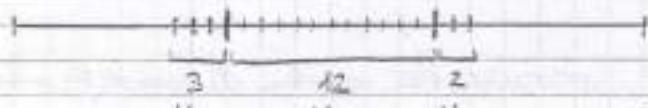
ma l'identica distribuzione può creare dei problemi

es. 1:

$Y_{it} = H_{it}$ num di sinistri per l'assurso accurato nell'anno t nel periodo

di esposizione

1 2 3



→ i tempi di esposizione sono diversi

è poco ragionevole considerare gli H_{it} identicamente distribuiti proprio per il fatto che i tempi di esposizione sono differenti

es. 2:

$Y_{it} = X_{it}$ risarcimento totale per l'i-esimo assicurato nell'anno t, a
valore netto con V_{it} valore assicurato

anche in questo caso l'identica distribuzione risulta essere poco ragionevole
perché X_{it} è legato a V_{it} che può cambiare nel tempo

es. 3:

$Y_{it} = \bar{X}_{it}$ risarcimento totale per l'i-esimo portafoglio nell'anno t, con
montepremi P_{it} (il rischio è il portafoglio)

se P_{it} varia di anno in anno difficilmente \bar{X}_{it} saranno identicamente
distribuiti

appare quindi evidente la necessità di definire un modello che non preveda
l'identica distribuzione degli $Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots \neq u$

MODELLO DI BÜHLMANN-STRAUSS (1970)

collettività di rischi

per il rischio i-esimo: Y_{i1}, Y_{i2}, \dots processo dei n.a. di intrate

U_i parametro aleatorio di rischio

- $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$ strettamente indipendenti
- U_i strettamente distribuiti $\neq i$
- finiti i

$\neq u$ determinazione di $U_i; Y_{i1}|U_i=u, Y_{i2}|U_i=u, \dots$ strettamente indipendenti

$$\exists \text{ finiti } \left\langle E[Y_{it}|U_i=u] = \mu(u) \quad \mu(u) \text{ non dipende da } t \right.$$

$$\left. \text{Var}[Y_{it}|U_i=u] = \frac{\nu(u)}{m_{it}} \quad \nu(u) \text{ non dipende da } i, t \right.$$

m_{it} misura di esposizione o volume
è un num. carte, un dato

es. 1: $H_{it} =$ num. di risconti rischio i-esimo, anno t nel periodo di esposizione

$$Y_{it} = \frac{H_{it}}{\exp_{it}} \quad \exp_{it} = \text{tempo di esposizione rischio i-esimo, anno t}$$

num. risconti per unità di esposizione

trova da:

$$E\left(\frac{M_{it}}{\exp_{it}} \mid U_i = u\right) = \mu(u)$$

$$\text{Var}\left(\frac{M_{it}}{\exp_{it}} \mid U_i = u\right) = \frac{\nu(u)}{\exp_{it}} \rightarrow \text{varia con il tempo (dipende da } t\text{)}$$

es. 2:

X_{it} risarcimento totale i-esimo rischio, anno t , con V_{it} valore attuale

$$Y_{it} = \frac{X_{it}}{V_{it}} \quad \text{tasso di premio}$$

trova da:

$$E\left(\frac{X_{it}}{V_{it}} \mid U_i = u\right) = \mu(u)$$

$$\text{Var}\left(\frac{X_{it}}{V_{it}} \mid U_i = u\right) = \frac{\nu(u)}{V_{it}}$$

es. 3:

\bar{X}_{it} risarcimento totale i-esimo portafoglio, anno t , montepremi P_{it}

$$Y_{it} = \frac{\bar{X}_{it}}{P_{it}}$$

accoglie la ipotesi che:

$$E\left(\frac{\bar{X}_{it}}{P_{it}} \mid U_i = u\right) = \mu(u)$$

$$\text{Var}\left(\frac{\bar{X}_{it}}{P_{it}} \mid U_i = u\right) = \frac{\nu(u)}{P_{it}}$$

consideriamo:

$$E[Y_{it}] = E[\epsilon(Y_{it} | U_i)] = E[\mu(U_i)] \triangleq \mu \quad \text{premio a priori}$$

$$E[\text{Var}(Y_{it} | U_i)] = \left[\frac{1}{m_{it}} \nu(U_i) \right] = \frac{1}{m_{it}} E[\nu(U_i)] = \frac{1}{m_{it}} \nu$$

$$\epsilon[\nu(U_i)] \triangleq \nu \quad \text{non dipende da } i$$

$$\Rightarrow \nu = E[m_{it} \text{Var}(Y_{it} | U_i)]$$

$$\text{Var}[E(Y_{it} | U_i)] = \text{Var}[\mu(U_i)] \triangleq \alpha \quad \text{non dipende da } i$$

$$E[Y_{t+1} | U_t] = \mu(U_t) \quad \text{premio individuale}$$

consideriamo il sistema normale (ommittiamo indice i)

$$(U, Y_1, Y_2, \dots) \quad m_t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Y_{t+1}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^T \alpha_t E(Y_t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cov}(Y_{t+1}, Y_h) = \sum_{t=1}^T \alpha_t \text{Cov}(Y_t, Y_h) \quad h=1, \dots, T \end{array} \right.$$

troveremo i val. $\alpha_0^*, \dots, \alpha_T^*$ che ci permettono di calcolare le stime dei crediti del premio individuale:

$$\widetilde{\mu}_{T+1}^{cal} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^T \alpha_t^* Y_t$$

$$E(Y_t) = \mu \quad t=1, \dots, T, T+1$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= E[\text{Var}(Y_t | U)] + \text{Var}[E(Y_t | U)] \\ &= \frac{1}{m_t} \sigma^2 + \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_h) = E(Y_t Y_h) - E(Y_t) E(Y_h)$$

$$\stackrel{t \neq h}{=} E[\mu(U)^2] - E[\mu(U)]^2 = \text{Var}[\mu(U)] = \alpha$$

$$E(Y_t Y_h) = E[E(Y_t Y_h | U)] = E[E(Y_t | U) E(Y_h | U)] \quad \text{per indip. } Y_1 | U, Y_2 | U, \dots$$

$$= E[\mu(U) \cdot \mu(U)] = E[\mu(U)^2] \quad \text{momento secondo del premio individuale}$$

$$E[Y_t] = E[E(Y_t | U)] = E[\mu(U)] = E[E(Y_h | U)] = E[X_h]$$

per sviluppare il sistema normale abbiamo bisogno dei parametri μ, ν, α
che supponiamo conegniuti

il sistema diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \alpha_0 + \mu \sum_t \alpha_t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_L \cdot \left(\frac{1}{m} \sigma^2 + \alpha \right) + \sum_{t \neq h} (\alpha_t \alpha) \quad h=1, \dots, T \end{array} \right.$$

$$\alpha = \alpha_L \cdot \frac{1}{m} \sigma^2 + \alpha \sum_t \alpha_t / \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha} \alpha_t = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha_L \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma^2}{\alpha} + \sum_t \alpha_t \quad h=1, \dots, T \end{array} \right.$$

$$\alpha_h \frac{1}{m} h = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \Leftrightarrow \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu} \cdot \frac{m_h}{h}$$

$$\rightarrow \sum_{h=1}^T \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu} \sum_{h=1}^T m_h \quad \sum_{h=1}^T m_h = m$$

$$= \frac{\alpha_0}{\mu} m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_0}{\mu} m = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu} \cdot \frac{m_h}{h} \end{array} \right.$$

$$\frac{\alpha_0}{\mu} m + \frac{\alpha_0}{\mu} = 1 \Leftrightarrow \alpha_0 \left(\frac{m}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \mu \frac{1}{m+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0^* = \mu \cdot \frac{1}{m+1} \\ \alpha_h^* = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{m_h}{h} = \frac{m_h}{m+1} \quad h=1, \dots, T \end{array} \right.$$

TS-DS-11-2013 (30 ORE)

$$\widetilde{\mu}_{T+1}(z) = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^T \alpha_t^* Y_t$$

stima di $E(Y_{T+1}|U)$ minimi quadrati

$$= \mu \cdot \frac{1}{m+1} + \sum_{t=1}^T \frac{m_t}{m+1} Y_t$$

$$= \mu \cdot \frac{1}{m+1} + \left(\sum_{t=1}^T \frac{m_t}{m} Y_t \right) \cdot \frac{m}{m+1}$$

combinazione convessa

memoria minima
 $E(Y_{T+1})$

$1-z_T$

\uparrow
fusione ponderata
(di Y_t con peso $\frac{m_t}{m}$) = \bar{Y}_T

$$H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$$

$$\widetilde{\mu}_{T+1}(H_T) = \mu \cdot \frac{1}{m+1} + \sum_{t=1}^T \frac{m_t}{m} y_t \cdot \frac{m}{m+1}$$

\Rightarrow dipende da m :

al crescere di m , $1-z_T$ decresce $\rightarrow z_T$ cresce

\Rightarrow dipende da $h = \frac{1}{z_T}$:

a crescere, h decresce $\rightarrow z_T$ cresce

considero i-esimo individuo:

$$\tilde{\mu}_{i,t}(0_i) = \mu \frac{h}{m_{i,t} + h} + \left(\sum_{z=1}^T \frac{m_{iz}}{m_{i,t}} Y_{iz} \right) \frac{m_{i,t}}{m_{i,t} + h} \quad m_{i,t} = \sum_{z=1}^T m_{iz}$$

il peso di credibilità dipende
dell'individuo

STIMA DEI PARAMETRI

Per sviluppare il modello è necessario disporre di μ , ν , α : li si stima dai dati.

Supponiamo di disporre di osservazioni per n rischi della collettività osservati ciascuno per T anni:

$$Y_{it} \rightarrow y_{it} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, n \\ t=1, \dots, T \end{matrix}$$

m_{izt}

noto:

$$m_{i,t} = \sum_{z=1}^T m_{izt} \quad m_{..} = \sum_{i=1}^n m_{i,t}$$

$$\bar{Y}_i = \sum_{t=1}^T \frac{m_{izt}}{m_{i,t}} Y_{it} \quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{i,t}}{m_{..}} \bar{Y}_i$$

- $\tilde{\mu} = \bar{Y}$

$$\bullet \tilde{\nu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\underbrace{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T m_{izt} (Y_{it} - \bar{Y}_i)^2}_{\tilde{\sigma}_i^2} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i^2$$

$$\bullet \tilde{\alpha} = \frac{m_{..}}{m_{..}^2 - \sum_{i=1}^n (m_{i,t})^2} \left[\sum_{i=1}^n m_{i,t} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 - (n-1) \tilde{\nu} \right]$$

Esempio:

	ANNO 1	ANNO 2	ANNO 3	ANNO 4
C RISARCIMENTO L TOTALE	12'000	15'000	17'000	21'460.28
A S MISURA DI S ESPOSIZIONE	50	60	70	90
E RISARCIMENTO TOT. 1 PER UNITÀ DI ESPOSIZ.	240	250	242.86	233.45

	ANNO 1	ANNO 2	ANNO 3	ANNO 4
RISARCIMENTO TOTALE	30.000	36.000	28.000	21.990,42
MISURA DI ESPOSIZIONE	150	160	120	100
RISARCIMENTO TOT. PER UNITÀ DI ESPOSIZ.	200	225	233,33	219,90

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 180 & \bar{y}_1 &= 244,44 & \hat{\mu} &= 226,23 \\
 m_2 &= 430 & \bar{y}_2 &= 218,60 & \hat{\sigma} &= 21,878 \\
 m_3 &= 610 & \bar{y} &= 226,23 = \hat{\mu} & \hat{\sigma} &= 247,64 \\
 z_{13} &= 0,671 & z_{23} &= 0,83
 \end{aligned}$$

PROCESSO POISSON MISTURA SEMIPARAMETRICO CON COMPONENTI DI REGRESSIONE

lettività di rischi

per l'-esimo individuo: N_{it}, N_{it}, \dots numero dei n. di interventi

U_{it} parametri elettori di rischi

- $(U_{it}, N_{it}, N_{it}, \dots)$ storicamente indipendente al numero di i
- U_1, U_2, \dots identicamente distribuiti

finora i , \neq a determinazione di U_i

$N_{1t} | U_i = u, N_{2t} | U_i = u, \dots$ storicamente indipendenti

- $N_{it} | U_i = u \sim \text{Poi}(2_{it} \mu)$
- $E(U_i) = 1 \quad \text{Var}(U_i) = \tau^2$

$$E(N_{it} | U_i = u) = 2_{it} u$$

$$E(N_{it} | U_i) = 2_{it} U_i$$

$$E(N_{it}) = E[E(N_{it} | U_i)]$$

$$= 2_{it} E(U_i) = 2_{it} t$$

il num. attivo annuo di sinistri dipende dall'ancurato
 (i) è dall'anno (t)

→ non c'è autocorrelazione

$$\text{rapporto } Y_{it} = \frac{N_{it}}{2_{it}}$$

$$E(Y_{it} | U_i = u) = E\left(\frac{N_{it}}{\lambda_{it}} | U_i = u\right) = \frac{1}{\lambda_{it}} \cdot \lambda_{it} u = u$$

$$\mu(u) = u$$

$$Var(Y_{it} | U_i = u) = Var\left(\frac{N_{it}}{\lambda_{it}} | U_i = u\right) = \frac{1}{\lambda_{it}^2} \cdot \lambda_{it} u = \frac{u}{\lambda_{it}}$$

$$Var(u) = u$$

$$m_{it} = \lambda_{it}$$

\rightarrow per i processi $(U_i, Y_{it}, Y_{i,t+1})$ $i=1,\dots,n$ sono soddisfatti le ipotesi del modello Bühlmann-Straub

$$\mu = E[E(Y_{it} | U_i)] = E[U_i] = 1$$

$$v = E[\lambda_{it} \cdot Var(Y_{it} | U_i)] = \lambda_{it} \cdot E\left(\frac{U_i}{\lambda_{it}}\right) = 1$$

$$\alpha = Var[E(Y_{it} | U_i)] = Var(U_i) = \zeta^2$$

dati λ_{it}, ζ^2

$$E[Y_{i,t+1} | U_i] \text{ premio individuale } \mu(U_i)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_{i,t+1}(U_i) &= \frac{1}{\zeta^2} \left(\sum_{t=1}^T \lambda_{it} + \frac{1}{\zeta^2} \right)^{-1} + \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_{it}}{\sum_{t=1}^T \lambda_{it}} \cdot Y_{it} \cdot \frac{\sum_{t=1}^T \lambda_{it}}{\sum_{t=1}^T \lambda_{it} + \frac{1}{\zeta^2}} \\ &= \frac{1}{\zeta^2 \sum_{t=1}^T \lambda_{it} + 1} + \frac{\sum_{t=1}^T N_{it}}{\sum_{t=1}^T \lambda_{it}} \cdot \frac{\zeta^2 \sum_{t=1}^T \lambda_{it}}{\zeta^2 \sum_{t=1}^T \lambda_{it} + 1} \\ &= \frac{1 + \zeta^2 \sum_{t=1}^T N_{it}}{1 + \zeta^2 \sum_{t=1}^T \lambda_{it}} \end{aligned}$$

$$E[N_{i,t+1} | U_i] = E[\lambda_{i,t+1} \cdot Y_{i,t+1} | U_i]$$

$$= \lambda_{i,t+1} \cdot E[Y_{i,t+1} | U_i]$$

$$\widetilde{E}(N_{i,t+1} | U_i) = \lambda_{i,t+1} \cdot \frac{1 + \zeta^2 \sum_{t=1}^T N_{it}}{1 + \zeta^2 \sum_{t=1}^T \lambda_{it}}$$

$$E(N_{i,t+1})$$

premio a priori

fornisce l'adeguamento rispetto
l'esperienza

CREDIBILITÀ ESATTA

- $(U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots)$ iid. $\neq i$

- $\neq u$ determinazione di U_i

$Y_{i1}|U_i = u, Y_{it}|U_i = u, \dots$ strettamente indipendenti con le leggi sull'oggetto

- U_i abbia legge degenerata

Ottiamo visto da per stimare $E(Y_{i,T+1}|U_i)$ premio individuale si usa lo stesso
stimate Bayesiano $E(Y_{i,T+1}|Y_{i1}, \dots, Y_{iT})$.

può accadere che $E(Y_{i,T+1}|Y_{i1}, \dots, Y_{iT}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^T \alpha_t Y_t$

se lo stimatore è l'aveva il premio Bayesiano e quello di credibilità coincide
 \rightarrow si dice che si ha CREDIBILITÀ ESATTA o APPROCCIO BAYESIANO
ESATTO

- $Y_{it}|U_i = u \sim \frac{p(y)}{q(y)}$ famiglia esponenziale lineare

- $U_i \sim \frac{1}{c(\alpha, \beta)} e^{-\alpha u - \beta}$ α, β parametri
 $c(\alpha, \beta)$ costante di normalizzazione

$$H_T = (Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{iT} = y_{iT})$$

$$\begin{aligned} f_{U_i|H_T}(u) &\propto f_{U_i}(u) \prod_{t=1}^T f_{Y_{it}|U_i=u}(y_{it}) \propto \\ &\propto q(u)^{-h} e^{-\alpha u - \beta} e^{-\alpha \sum_{t=1}^T y_{it}} q(u)^{-T} = q(u)^{-h - \alpha b(h) + \sum_{t=1}^T y_{it}} \end{aligned}$$

$$f_{U_i}(u) \propto q(u)^{-h} e^{-\alpha u - \beta}$$

$$f_{U_i|H_T}(u) \propto q(u)^{-h - \alpha b(h) + \sum_{t=1}^T y_{it}}$$

famiglia coniugate naturali:

stessa famiglia di distribuzione ma con
i parametri aggiornati

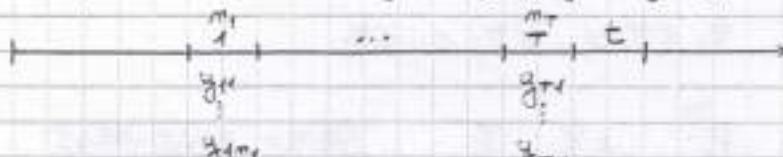
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- KLUGMAN, ALTZ (1993), "Loss Models: from Data to Decision", WILEY
- T. MIKOSH (2004), "Non-Life Insurance Mathematics: an introduction with stochastic processes", SPRINGER
- BENJIT, CHARPENTIER (2002), "Mathématiques de l'Assurance Non-Vie", ECONOMICA
- BÜHLMANN, GISLER (2005), "A course in Probability Theory and its Application", SPRINGER

TS-08-11-2013 (32 ore)

SISTEMI BONUS-MALUS

Consideriamo un punto foglio riportato in classi tariffarie
t anno di calendario, i classi tariffarie, T anni di osservazione
 H_T = storia di sinistri

$$P_e^{(a)}(H_T) = f(P_t^{(a)}; m_1, \dots, m_T; y_{11}, \dots, y_{1T}; y_{21}, \dots, y_{2T}; \dots; y_{T1}, \dots, y_{TT})$$


Si potrebbe valutare il premio individuale guardando oltre che all'anno e alla classe tariffaria anche al num. annuo di sinistri e ai singoli importi di risarcimenti per ciascun sinistro, ma questa valutazione è piuttosto pesante.
Modelli alternativi più semplici:

$\tilde{f}(P_e^{(a)}, m_1, \dots, m_T) \rightarrow$ classi tariffarie, anno, num. sinistri per ciascun anno passato

$g(P_e^{(a)}, m_T, f(m_1, \dots, m_{T-1})) \rightarrow$ classi tariffarie, anno, num. sinistri dell'anno precedente e riferiti sul num. sinistri anni precedenti

In questo modo è possibile suddividere le classi tariffarie in ulteriori classi di merito, in cui:

$$(C_{t+1}, N_{t+1}) \rightarrow C_t$$

ovvero la classe dell'anno t dipende dalla classe dell'anno t-1 e del num. di sinistri avvenuti nell'anno t-1

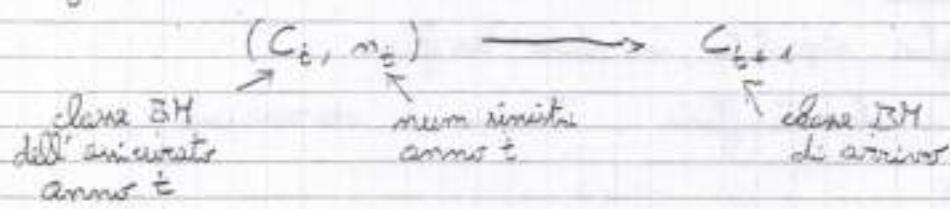
Si guarda solo al numero di sinistri e non agli importi di risarcimento perché, oltre che essere più semplice, uno stesso sinistro può provocare danni molto diversi ed inoltre il num. di sinistri è conosciuto quasi subito.

Per costruire un sistema di questo tipo è necessario definire:

- classi di merito o classi BM, 1, ..., J
- regole di ingresso: jà classe di ingresso (cioè per un nuovo sinistro)

che per un assicurato giunto da un'altra compagnia)

- regole evolutive o di transizione



- scala dei coefficienti di premio

CLASSE COEFF. PREMIO

1 γ_1

$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_j \leq \dots \leq \gamma_J$

⋮

⋮

⋮

J γ_J

$$P_{t,i,j}^{\text{BH}} = P_{t,i} \cdot \gamma_j$$

PREMIO BONUS-MALUS

anno t, classe tariff. i, classe BH

$P_{t,i}$ = premio di riferimento o premio base

$$\text{spese } P_{t,i} = P_b \cdot \gamma_i \quad \text{"relatività"}$$

premio di riferimento
di portafoglio anno t

legato alla classe
tariff. i

✓ $\gamma_j < 1 \Rightarrow P_{t,i,j}^{\text{BH}} < P_{t,i}$ → rientro nel premio base, CLASSE DI BONUS

$\gamma_j > 1 \Rightarrow P_{t,i,j}^{\text{BH}} > P_{t,i}$ → aggravio sul premio base, CLASSE DI MALUS

può esserci un h.t.c. $\gamma_h = 1 \Rightarrow P_{t,i,h}^{\text{BH}} = P_{t,i}$ CLASSE BH DI RIFERIMENTO

SISTEMA "MINISTERIALE" (RCA)

in vigore in Italia prima della liberalizzazione tariffaria

12 CLASSI

$j_0 = 14$

$h = 13$

i γ_i

1 0.5

13 1

12 1.15

1 1

18 2

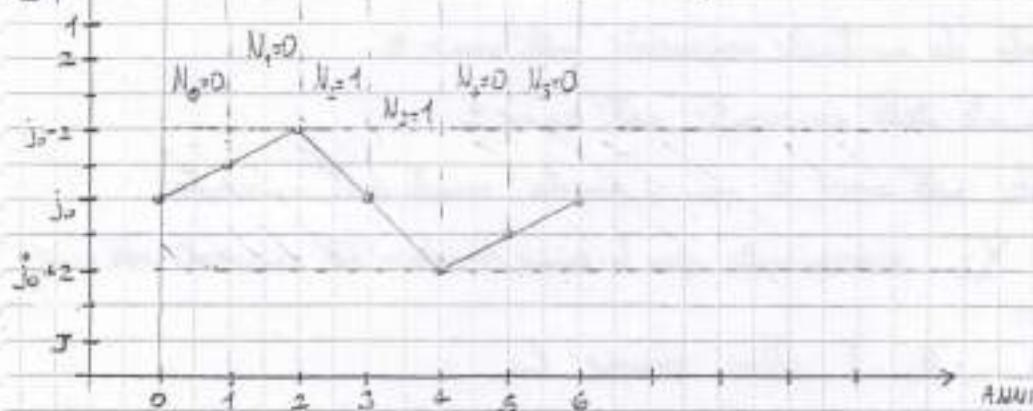
$$C_{t+1} = \begin{cases} C_t - 1 & N_t = 0 \\ C_t + 2 & N_t = 1 \\ C_t + 5 & N_t = 2 \\ C_t + 8 & N_t = 3 \\ C_t + 11 & N_t \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{nuovi correttamenti } C_{t+1} = \begin{cases} \max(C_t - 1, 1) & N_t = 0 \\ \min(C_t + 5), 13 & N_t = 1, 2, 3 \\ \min(C_t + 11, 13) & N_t \geq 4 \end{cases}$$

OSS:

poniamo che si osservi una frequenza minuti pari a $\frac{1}{3}$ (cioè 1 minuto ogni 3 anni).

CLASSA
BM



con un ministro ogni 3 anni l'assicurato si trova sempre in una classe tra $j_0 - 2$ e $j_0 + 2$

se la freq. minuti è $< \frac{1}{3} \Rightarrow$ l'assicurato tende a spostarsi nelle classi di bonus !

se " " " è $> \frac{1}{3} \Rightarrow$ " " " " " di malus ↳

in Italia si osserva una freq. minuti complessiva di 0,07 che è ben minore di $\frac{1}{3} \rightarrow$ la gran parte degli assicurati tende a spostarsi nelle classi di bonus in breve tempo.

→ non si differenziano più i premi in modo efficace

→ il sistema presta non è più in equilibrio finanziario

se all'interno di una classe tariffaria si pone un unico premio uguale per tutti allora si ha la massima solidarietà (tutti pagano più del cavo, almeno meno)

se invece si personalizza molto si ha una solidarietà minima

in tutte le tariffe si vuole che ci sia un giusto equilibrio tra solidarietà e personalizzazione per evitare fenomeni di antiselezione

essendo presente un aggravio di premio in caso di ministro, può accadere che l'assicurato profiti da ciò il domo per evitarlo → autohippoderazione tuttavia aggravii troppo pesanti potrebbero portare l'assicurato ad antiselezionarsi e a evitare di denunciare minuti portando sempre più soggetti a premio più elevante nelle classi di Bonus.

ALCUNI INDICATORI PER VALUTARE SISTEMI BH

collettività di rischi "omogenei per caratteristiche rispetto a priori"

→ si concentriamo su una claire tariffaria (ometto indice i)

P_t premio base

C_t classe BH occupata da un finito assicurato nell'anno t

N_t num. sinistri causati dall'assicurato nell'anno t

X_t riacquisto totale nell'anno t per i sinistri causati dall'assicurato

$$X_t = \sum_{h=1}^{N_t} Y_{t,h} \quad Y_{t,h} \text{ riacquisto per } h\text{-esimo sinistro dell'assicurato nell'anno } t$$

se conosce $(C_1, N_1, N_2, \dots, N_{t-1})$ allora conosce C_t

per studiare il processo $\{C_1, C_2, \dots\}$ è necessario formulare ipotesi probabili

o leghe sul processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$

$$N_t | N_1=m_1, \dots, N_{t-1}=m_{t-1}; Y_{11}=y_{11}, \dots, Y_{1n_1}=y_{1n_1}; Y_{21}=y_{21}, \dots, Y_{2n_2}=y_{2n_2}, \dots \stackrel{d}{=} N_t | N_1=m_1, \dots, N_{t-1}=m_{t-1}$$

Basta conoscere il numero di sinistri di ciascun anno, non serve conoscere gli importi di tutti i riacquisti di ciascun sinistro

$X_t \sim$ distrib. comune

$$E(X_t) = E(N_t) E(Y_t) \quad E(N_t) = \text{num. medio di sinistri anno } t$$

$E(Y_t) = \text{riacquisto medio per sinistro anno } t$ in ipote
che il sinistro si sia verificato

DISTRIBUZIONE DI C_t

$$P_r(C_t=j) \quad j=1, \dots, J$$

come evolve tale probabilità al varire di t ?

dipende dalla legge di $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$ e delle regole di formazione

$$b_t = \sum_{j=1}^J P_j Y_j P_r(C_t=j) \quad \text{COEFFICIENTE MEDIO DI PREMIO}$$

premio atteso anno t con $P_t=1$

$$\tilde{\Pi}_t = \begin{cases} P_t Y_1 & \text{con } P_r(C_t=1) \\ \vdots & \vdots \\ P_t Y_J & \text{con } P_r(C_t=J) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\Pi}_t] = \sum_{j=1}^J P_t \tilde{\Pi}_j \Pr(C_t=j)$$

$$= P_t \cdot b_t$$

Come si comportano P_t , $\Pr(C_t=j)$?

$$\Pr(C_1=1) \longrightarrow \Pr(C_t=1) \quad \text{le prob. delle domande minime aumentano}$$

$$\Pr(C_1=J) \quad \Pr(C_t=J) \quad \text{le prob. delle domande massime diminuiscono}$$

$\Rightarrow b_t$ decresce al crescere di t

Supponiamo di conoscere $\Pr(C_1=1), \dots, \Pr(C_t=J)$ (stimate del portafoglio)

$$\text{finiamo } P_t \text{ t.c. } \sum_{j=1}^J P_t \tilde{\Pi}_j \Pr(C_t=j) = \mathbb{E}(X_t)$$

ovvero P_t garantisce un equilibrio tecnico

$$P_t \stackrel{(e)}{=} P_1 \quad \text{premio di equilibrio}$$

poniamo $\mathbb{E}(X_t)$ costante con t (situazione di stazionarietà)

b_t decresce con t

$$P_t = P_1 = P_1^{(e)}$$

$$\rightarrow \text{premio atteso in } t: \sum_{j=1}^J P_1^{(e)} \tilde{\Pi}_j \Pr(C_t=j) = P_1^{(e)} b_t < P_1^{(e)} b_1 = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_t)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^J P_1^{(e)} \tilde{\Pi}_j \Pr(C_t=j) < \mathbb{E}(X_t)$$

quindi non c'è più equilibrio tecnico (per supponendo $\mathbb{E}(X_t)$ fisso e costante)

L'assicuratore quindi dovrà aumentare il premio di equilibrio di anno in anno per mantenere l'equilibrio tecnico (se non c'è non può sperare)

\rightarrow L'assicuratore non avrà le spese che si era aspettato

finché un assicurato nell'anno $t=1$

clama BM & coeff. $\tilde{\Pi}_2$

non commette rimbalzo in $t>1$ in lui

$$j < 2 \Rightarrow \tilde{\Pi}_j < \tilde{\Pi}_2$$

Ci si aspetta uno scatto di: $1 - \frac{\tilde{\Pi}_j}{\tilde{\Pi}_2}$

ma se in $t=1$: $P_t \gamma_k$

in $t>1$: $P_t \gamma_j$ $P_t > P_i$

$$\Rightarrow \frac{P_t \gamma_k - P_t \gamma_j}{P_t \gamma_k} = 1 - \frac{P_t}{P_1} \frac{\gamma_j}{\gamma_k} < 1 - \frac{\gamma_j}{\gamma_k}$$

Lo monte è minore di quello che ci aspettava

Esempio:

$t=1$ classi BH 14 $\gamma_{14} = 1.15$

nuova scintilla per 5 anni

$t=6$ classi BH 9 $\gamma_9 = 0.78$

ci si aspetta uno monte di: $1 - \frac{0.78}{1.15} \approx 0.32$

$$0.22 < 0.32$$

ma se $P_6 = 1.15 P_1$, lo monte è: $1 - 0.78 = 0.22$

Lo monte è minore

In alcuni casi può accadere che $P_t \gamma_k > P_t \gamma_{14}$, e quindi oltre a non avere lo monte che ci si aspettava si ha anche un aggravio di premio rispetto al primo anno.

in caso di nule BH differenti (diverso numero di classi) invece che b_t si usa

$$\frac{b_t - \gamma_{\min}}{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}}$$
 perché b_t tiene conto anche delle nule

Ottieniamo visto che i premi di equilibrio $P_t^{(e)}$ sono tali che:

$$\sum_{j=1}^J P_t^{(e)} \gamma_j \Pr(L_t=j) = E(X_t)$$

e abbiamo anche visto che:

essendo b_t decrescente con $t \downarrow$ allora i $P_t^{(e)}$ devono crescere con t crescente.

Per volutare questo indicatore è necessario fornire una volutazione posta.

Utilizzando processi $\{C_t, N_t, N_{t+1}, \dots\}$, e più fiori ciò si ricorre alle CATENE DI MARKOV.

DEF: PROCESSO MARKOVIANO

considerato un processo stocastico $\{C_1, C_2, \dots\}$ a parametrazione discreta C_t il quale abbia un numero finito di determinazioni possibili $\{1, 2, \dots, S\}$ - vediamo per ogni t , tale processo è detto **PROCESSO MARKOVIANO** se:

$$\text{det} K_{t+1} = (C_t=j_1, \dots, C_{t-1}=j_{t-1})$$

$\forall i, j, t, K_{t+1}$ risulta che

$$\Pr(C_{t+1}=j | C_t=i, K_{t+1}) = \Pr(C_{t+1}=j | C_t=i)$$

ovvero la valutazione probabilistica di C_{t+1} dipende esclusivamente dall'informazione più recente sul processo.

DEF: CATENA MARKOVIANA

considerato un processo markoviano $\{C_1, C_2, \dots\}$, tale processo è detto **CATENA MARKOVIANA** se:

$$\Pr(C_{t+1}=j | C_t=i) = p_{ij}$$

ovvero tale probabilità condizionata è la medesima per ogni epoca (non dipende da t) (la prob. di trovare dello stato i allo stato j non cambia mai)

La matrice $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1S} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2S} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{S1} & p_{S2} & \dots & p_{SS} \end{bmatrix}$, cioè la matrice delle $p_{ij} > 0$ probabilità

è detta **MATRICE DELLE PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE**.

È una matrice stocastica, infatti: $\sum_{j=1}^S p_{ij} = \sum_{j=1}^S \Pr(C_{t+1}=j | C_t=i) = 1$

TS-11-11-2013 (34 ore) 7^a SETTIMANA

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_t &= (\Pr(C_t=1), \dots, \Pr(C_t=S)) \\ &= (\alpha_t^{(1)}, \dots, \alpha_t^{(S)}) \end{aligned}$$

se conosce $\underline{\alpha}_1 = P$

\Rightarrow puoi trovare $\underline{\alpha}_2$

DIH:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_2 & \xrightarrow{j\text{-esimo elemento di } \underline{\alpha}_2} \\ \underline{\alpha}_2 & \quad \alpha_2(j) = \Pr(C_2=j) \\ & = \sum_{i=1}^J \Pr(C_1=i) \Pr(C_2=j | C_1=i) = \sum_{i=1}^J \alpha_1(i) p_{ij} \end{aligned}$$

j-esimo elemento di $\underline{\alpha}_1 P$

$$\Rightarrow \underline{\alpha}_2 = \underline{\alpha}_1 P$$

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_3 & \quad \alpha_3(j) = \Pr(C_3=j) \\ & = \sum_{i=1}^J \Pr(C_2=i) \Pr(C_3=j | C_2=i) = \sum_{i=1}^J \alpha_2(i) p_{ij} \end{aligned}$$

j-esimo elemento $\underline{\alpha}_2 P$

$$\Rightarrow \underline{\alpha}_3 = \underline{\alpha}_2 P = \underline{\alpha}_1 P^{(2)}$$

$$P^{(2)} = P \times P$$

...

$$\underline{\alpha}_t = \underline{\alpha}_{t-1} P = \underline{\alpha}_1 P^{(t-1)}$$

$$P^{(t-1)} = \underbrace{P \times P \times \dots \times P}_{t-1 \text{ volte}}$$

In una catena markoviana, anche se $\underline{\alpha}_1 P$, rimane ancora la legge del processo

considerata $P^{(\tau)}$ $\tau \in \mathbb{N}$ $\tau \geq 2$

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(\tau)} & \text{ elemento di posto } ij \text{ di } P^{(\tau)} \\ \Rightarrow p_{ij}^{(\tau)} & = \Pr(C_{t+\tau}=j | C_t=i) \quad \forall t \end{aligned}$$

DIH:

$$\Pr(C_{t+2}=j | C_t=i) = \sum_{h: (C_{t+1}=h, C_t=i) \neq \emptyset} \Pr(C_{t+2}=j | C_t=i, C_{t+1}=h) \quad h=1, \dots, J$$

$$= \sum_{h: (C_{t+1}=h, C_t=i) \neq \emptyset} \Pr(C_{t+1}=h | C_t=i) \Pr(C_{t+2}=j | C_{t+1}=h, C_t=i)$$

$$\Pr(C_{t+1}=h | C_t=i) = p_{ih}$$

$$\Pr(C_{t+2}=j | C_{t+1}=h, C_t=i) = ?$$

// RICHIAMO -

$$\begin{aligned}
 P_r(E|H) &= P_r(E \wedge H|H) = \sum_i P_r(E \wedge H_i|H) = \sum_i P_r(H_i|H) P_r(E|H_i \wedge H) \\
 H &= \bigvee H_i \quad \text{somma logica di} \\
 H_i \wedge H_j &= \emptyset \quad \text{eventi a due a due} \\
 &\quad \text{incompatibili} \\
 &= \sum_i P_r(H_i|H) P_r(E|H_i) \\
 &\quad \text{non dipende da } i \\
 &= p \sum_i P_r(H_i|H) = 1 \\
 &= p
 \end{aligned}$$

$$(C_{t+1} = h, C_t = z) = \bigvee_{K_{t-1}} (C_{t+1} = h, C_t = z, K_{t-1})$$

L'eventi a due a due
incompatibili

$$\Rightarrow \Pr(C_{t+2} = j | C_{t+1} = h, C_t = i) = \sum_{k_{t+1}} \Pr(C_{t+1} = h, C_t = i, k_{t+1} | C_{t+2} = j, C_t = i) * \\ \cdot \underbrace{\Pr(C_{t+2} = j | C_{t+1} = h, C_t = i, k_{t+1})}_{\Pr(C_{t+2} = j | C_{t+1} = h)} \\ = p_{ij} \overline{\sum_{k_{t+1}} \Pr(\dots)}$$

$$\Pr(C_{t+1} = j | C_t = i) = \sum_{h: (C_{t+1} = h, C_t = i) \neq \emptyset} p_{ih} p_{hj} = p_{ij}^{(2)} \text{ per elementi di posto } ij \text{ della matrice } P^{(2)}$$

per indicazione!

bere : ist wenn die $\Pr(C_{t+2} = j | C_t = i) = p_{ij}^{(2)} \neq 0$

ipotesi induktiva: via verso che $\Pr(C_{t+\tau-1} = j | C_t = i) = p_{ij}^{(\tau-1)}$ f.t

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Pr(C_{t+\tau} = j | C_t = i) &= \sum_h \Pr(C_{t+\tau} = h, C_{t+\tau-1} = h | C_t = i) \\ &= \sum_h \underbrace{\Pr(C_{t+\tau} = h | C_t = i)}_{P_{ih}} \underbrace{\Pr(C_{t+\tau} = j | C_{t+\tau-1} = h, C_t = i)}_{P_{hj}} \\ &= p_j^{(\tau)} \quad \forall t \end{aligned}$$

DEF: CATENA MARKOVIANA REGOLARE

considerata una catena markoviana e la successione $P, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(t)}$ delle matrici di transizione, tale catena è detta CATENA MARKOVIANA REGOLARE se esiste t_0 : $\forall t \geq t_0$ risulta $p_{ij}^{(t)} > 0 \quad \forall i, j$

cioè pur di fare un certo numero di passi, a partire da un qualsiasi stato del sistema si ha sempre probabilità positiva di raggiungere un qualsiasi altro stato del sistema (e $P^{(t)}$ non hanno zero al loro interno)

TEOREMA DI MARKOV

In una catena markoviana regolare

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ij}^{(t)} = u_j > 0 \quad (\text{non dipende da } j)$$

$$\sum_{j=1}^J u_j = 1$$

trovare $U = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & \dots & u_J \end{bmatrix}$ è una matrice stocastica

CONSEGUENZA

$$\underline{\alpha}_t = \underline{\alpha}_1 P \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \underline{\alpha}_1 U \quad (\text{faccio il limite della matrice elemento per elemento})$$

$$\underline{\alpha}_1 U = \underline{\alpha}_1 = (u_1, \dots, u_J)$$

$$\underline{\alpha}_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \underline{\alpha}_1 \quad \underline{\alpha} \text{ vettore non dipendente da } t$$

asintoticamente si raggiunge una situazione di stazionarietà

$$\Pr(C_{\infty} = j) = u_j$$

$$\underline{\alpha}_t = \underline{\alpha}_{t-1} \cdot P$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & t \rightarrow +\infty & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} = \underline{\alpha} P \\ \sum_{j=1}^J u_j = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} = \underline{\alpha} P \\ \sum_{j=1}^J u_j = 1 \end{array} \right. \quad \text{risolvendo questo sistema si trova la distribuzione} \\ \text{asintotica (trovo } \underline{\alpha})$$

Vediamo ora un primo modello per la valutazione probabilistica del processo $\{C_1, N_1, N_2, \dots\}$

MODELLO (A)

- $\forall j$ determinazione di C_j

$$N_1 | C_1 = j, N_2 | C_1 = j, \dots \text{ i.i.d}$$

- $N_j | C_1 = j$ ha legge che non dipende da j

$$\Pr(N_j = m | C_1 = j) = p_m \quad m = 0, 1, \dots$$

- è assegnata la legge di C_1 : concreto $\Pr(C_1 = j) \quad j = 1, \dots, J$

$\Rightarrow \{C_1, C_2, \dots\}$ è una catena markoviana (una rete)

$$\Pr(C_t = j) = \alpha_t = \alpha_j P^{(t-1)}$$

$$b_t = \sum_j \gamma_j \Pr(C_t = j)$$

$$P_t^{(e)} : \sum_j P_t^{(e)} \gamma_j \Pr(C_t = j) = E(X_t) \\ = E(N_t)E(Y_t)$$

$$E(N_t) = \sum_j \Pr(C_1 = j) \underbrace{E(N_1 | C_1 = j)}_{\sum_m m p_m}$$

guardiamo alle ipotesi:

- $N_1 | C_1 = j, N_2 | C_1 = j, \dots$ i.i.d

→ stazionarietà, può essere un problema se si guarda ad anche temporali piuttosto lunghi, ma per pochi anni può andare bene

→ indipendenza, ipotesi piuttosto forte, difficilmente si tiene conto della zolla dove inizia e non del num. di semini precedenti

- $\Pr(N_1 = m | C_1 = j) = p_m$

→ altra ipotesi forte, si aspetta una diversa resistenza per le differenti semei BM

PROPOSIZIONE:

nel modello (a) $P_r(N_t=m|K_t) = p_m \quad \forall t, m, K_t$

$$K_t = (C_1=j_1, \dots, C_t=j_t)$$

finiti m, t, K_t

prova a due a due incompatibile

$$K_t = (C_1=j_1, \dots, C_t=j_t) = \bigvee_{\substack{H_{t+1} \\ H_{t+1}(C_1=j_1, \dots, H_{t+1}) \Rightarrow K_t}} (C_1=j_1, \dots, \underbrace{N_t=m, \dots, N_{t+1}=m}_{H_{t+1}})$$

es: sistema ministrile

$$(C_1=17, C_2=16) = (C_1=17, N_1=0)$$

$$\underline{(C_1=17, C_2=18)} = (C_1=17, N_1=1) \vee (C_1=17, N_1=2) \vee (C_1=17, N_1=3) \vee (C_1=17, N_1 \geq 4)$$

$$P_r(N_t=m|K_t) = \sum_{H_{t+1}} \underbrace{P_r(C_t=j_t, H_{t+1}|K_t)}_{=1} \underbrace{P_r(N_t=m|C_t=j_t, H_{t+1})}_{P_m} \quad \text{per ogni condizionata}$$

$$= p_m$$

PROPOSIZIONE

nel modello (a) il processo delle classi $\{C_1, C_2, \dots\}$ è una catena markoviana

finiti $i, j, t, K_{t+1} = (C_1=j_1, \dots, C_{t+1}=j_{t+1})$

$$P_r(C_{t+1}=j|C_t=i, K_{t+1}) = \sum_m P_r(C_{t+1}=j, N_t=m|C_t=i, K_{t+1})$$

$$= \sum_m \underbrace{P_r(N_t=m|C_t=i, K_{t+1})}_{\text{non dipende da } K_{t+1} \text{ e da } t} \underbrace{P_r(C_{t+1}=j|C_t=i, K_{t+1}, N_t=m)}_{\substack{\text{conta solo } (C_t, N_t) \\ \text{non dipende da } K_{t+1} + \text{da } t \\ \text{ma solo}}} \quad \text{da } t$$

$\xrightarrow{\text{da } t}$

$\xrightarrow{\text{da } K_{t+1}}$

$\xrightarrow{\text{da } N_t}$

$$\triangleq \alpha(i, j)$$

$$P_r(C_{t+1}=j|C_t=i) = \sum_{K_{t+1}} P_r(C_{t+1}=j, K_{t+1}|C_t=i)$$

$$= \sum_{K_{t+1}} \underbrace{P_r(K_{t+1}|C_t=i)}_{=1} \underbrace{P_r(C_{t+1}=j|C_t=i, K_{t+1})}_{\alpha(i, j)}$$

$$= \alpha(i, j)$$

$$\Rightarrow P_r(C_{t+1}=j|C_t=i, K_{t+1}) = P_r(C_{t+1}=j|C_t=i) = \alpha(i, j) = p_i; \quad \text{non dipende da } t$$

TS - 12-11-2013 (36 ore)

$$\underline{\alpha}_t = (\Pr(C_1=j), \dots, \Pr(C_t=j), \dots, \Pr(C_s=j))$$

$\frac{1}{\underline{\alpha}} (0, \dots, 1, \dots, 0)$ se tutti nuovi assicurati

$$\hat{\Pr}(C_t=j) = \frac{\text{num. assicurati dove BH}}{\text{num. totale assicurati}}$$

Ex: sistema ministeriale

p_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	17	18
1	p_0	0	p_1	0	0	p_2	0	0	p_3	...	0	0
2	p_0	0	0	p_1	0	0	p_2	0	0	...	0	0
3	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	p_0	$1-p_0$

$= P$

p_m probabilità sull'evoluzione (prob. di commettere un reato) $m=0, 1, \dots$

$$\hat{p}_m = \frac{\text{num. assicurati che hanno rapporto m reato}}{\text{num. totale assicurati}}$$

$$\Pr(C_t=j)$$

$$\underline{\alpha}_t = \underline{\alpha}_0 P^{(t-1)}$$

$$b_t = \sum_{j=1}^J \hat{p}_j \Pr(C_t=j)$$

$$\begin{aligned} P_t^{(e)} : \sum_j P_t^{(e)} \hat{p}_j \Pr(C_t=j) &= E(X_e) \\ &= E(N_e) E(Y_e) \end{aligned}$$

Ex: sistema ministeriale

$$\underline{\alpha}_1 = (0, 0, \dots, \underset{14}{1}, \dots, 0) \quad (\text{tutti nuovi assicurati il primo anno})$$

$$p_0 = 0.93176$$

$$E(Y_t) = 3000$$

$$p_1 = 0.06339$$

$$p_2 = 0.00433$$

$$p_3 = 0.00042$$

$$p_4 = 0.00007$$

$$p_5 = 0.00003$$

$$p_m = 0 \quad m \geq 6$$

MODELLO C

- γ_j determinazione di C_1 , γ_u determinazione di U

$N_1 | C_1 = j, U = u; N_2 | C_1 = j, U = u, \dots$ i.i.d

- $N_1 | C_1 = j, U = u \sim Po(\lambda_j, u) \quad \lambda_j > 0$

• $U | C_1 = j \sim \text{gamma}(\alpha, \alpha)$ (la distribuzione del parame^tro di rinculo è comune a tutta la collettivit^a)

- now eseguite $P(C_1 = j) \quad j = 1, \dots, J$

il processo $\{N_1, N_2, \dots\} | C_1 = j$ è un processo Poisson-gamma (λ_j, α)

$\{N_1, N_2, \dots\}$ è mistura di processi Poisson-gamma con misturante $P(C_1 = j) \quad j = 1, \dots, J$

con questo modello si può tener conto di più aspetti quali:

- ingresso nuovi assicurati
- autoliquidazione

...

FUNZIONI O INDICI PER VALUTARE IL GRADO DI PERSONALIZZAZIONE BH

consideriamo alcuni premi per l'anno t

- $P_t \pi_{C_t}$ PREMIO BH
- $E(X_t)$ PREMIO A PRIORI, non c'è personalizzazione
- $E(X_t | U)$ PREMIO INDIVIDUALE, massima personalizzazione
- $E(X_t | X_1, \dots, X_{t-1})$ PREMIO BAYESIANO, ma con sistema BH non conosciamo X_1, \dots, X_{t-1}
 $\hookrightarrow E(X_t | C_t)$ PREMIO A POSTERIORI, consente una buona personalizzazione

$$A = E[(E(X_t) - P_t \pi_{C_t})^2]$$

$$= \sum_{j=1}^J P_t(C_t = j) (E(X_t) - P_t \pi_{C_t})^2$$

se risulta A minimo allora si ha buona personalizzazione

$$B = E[(E(X_t | U) - P_t \pi_{C_t})^2]$$

$$= \iint (E(X_t | U=u) - P_t \pi_{C_t})^2 dF_{U|C_t}(u, j) \quad \text{se risulta B minimo allora si ha una buona personalizzazione}$$

$$C = E[(E(X_t | C_t) - P_t \pi_{C_t})^2]$$

$$= \sum_{j=1}^J P_t(C_t = j) (E(X_t | C_t = j) - P_t \pi_{C_t})^2$$

PREDICTIVE ACCURACY
vale lo stesso che per B

$$\lambda_1 = \left(\frac{A}{A+B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } h=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \rightarrow \text{non c'è personalizzazione}$$

$\lambda_2 = \frac{B}{A+B} \Rightarrow \lambda_2=1 \rightarrow \text{c'è la massima personalizzazione}$

$$\lambda_2 = \left(\frac{B}{A+C} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{se } A=0 \Rightarrow \lambda_2=0 \rightarrow \text{non c'è personalizzazione}$$

$\text{se } C=0 \Rightarrow \lambda_2=1 \rightarrow \text{c'è una scarsa personalizzazione}$

COSTRUZIONE DI SCALE BM

meno sui segnati: - num. dati ($j=1, \dots, J$, h dati di riferimento)

- regole evolutive

è necessario calcolare la scala, cioè i λ_j

si fa riferimento solo a $\{N_1, N_2, \dots\}$ premio di arrivo dei sinistri

poniamo che al primo anno tutti gli assicurati sono nella classe di ingresso

$$P(C_1=j) = \begin{cases} 0 & j \neq j_0 \\ 1 & j=j_0 \end{cases}$$

approccio Bayesiano:

U param. d. da riferis.

• $N_1|U=u, N_2|U=u, \dots$ strettamente indipendenti con legge assegnata

• U con legge assegnata

considero $E(N_i|U)$ premio individuale e $f(C_i)$ premio BM (è funzione di C_i)

si può pensare di minimizzare, scegliendo un'opportuna f , la differenza in media quadratica tra i due premi

$$\min_{f \in \mathcal{F}} E[(E(N_i|U) - f(C_i))^2]$$

$$\text{trov } f^*(C_i) = E[E(N_i|U)|C_i] \\ = E[N_i|C_i]$$

$$E[N_i|C_i] = E[\underbrace{E(N_i|C_i, U)}_{E(N_i|C_i) \text{ pur indipendente condizionato su } U}|C_i]$$

$E(N_i|C_i)$ pur indipendente condizionato su U

$$\lambda_i = \frac{f^*(C_i)}{f^*(h)} = \frac{E(N_i|C_i=j)}{E(N_i|h=j)} \quad \text{NORBERG (1976)}$$

si ottiene una scala che varia da 0 a 1 ma
dipende da molti fattori

$$\min_{f \in \mathcal{F}} E \left[(N_t - f(C_t))^+ \right] = f^* = E(N_t | C_t)$$

BORGAN, HOEN, NORBERG (1981)

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \underbrace{\sum_{t=1}^T \omega_t E[(N_t - f(C_t))^+]}_{Q(f(1), \dots, f(T))} \quad \omega_t > 0$$

$$f^*(j) = \frac{\sum \omega_t \Pr(C_t=j) E(N_t | C_t=j)}{\sum \omega_t \Pr(C_t=j)}$$

$$\pi_j = \frac{f^*(j)}{f^*(n)}$$

TS - 15 - 11 - 2013 (38 ORE)

COENE, DORAY (1996)

$$E(N_t | H_{t-1}) \text{ premio Bayesiano} \quad H_{t-1} = (N_1 = m_1, \dots, N_{t-1} = m_{t-1})$$

$$E(N_t | H_{t-1}) = E(N_t) \cdot \frac{E(N_t | H_{t-1})}{E(N_t)}$$

premio a priori
(collettivo)

$\xrightarrow{\text{eff. di revisione}} \text{Bayesiano}$

o: Poiss-gamma (λ, α)

$$\frac{\alpha + \sum_i m_i}{\alpha + t-1}$$

$$H_{t-1} \rightarrow C_t = j(m_1, \dots, m_{t-1})$$

La storia di rimborso determina la classe BM

$$P_t \cdot \pi_{j(m_1, \dots, m_{t-1})} \text{ premio BM}$$

premio di riferimento

componente legata alla storia di rimborso

→ c'è una sorta di analogia tra i due premi

$$\min_{\pi_1, \dots, \pi_T} \sum_{t=1}^T \sum_{m_1, \dots, m_{t-1}} \Pr(C_{t,0} = j(m_1, \dots, m_{t-1})) \left(\frac{E(N_t | H_{t-1})}{E(N_t)} - \pi_{j(m_1, \dots, m_{t-1})} \right)^2$$

si parla pure dei vincoli quali:

$$\pi_j \leq \pi_{j+1}$$

$$\pi_A, A, \pi_B, B$$

$$\sum_j \pi_j \Pr(C_{t,0} = j) = 1 \Rightarrow \sum E(N_{t,0}) \pi_j \Pr(C_{t,0} = j) = E(N_{t,0})$$

riparare i premi non
copre il rimborsamento
attivo esistente
(bilanciamento a regime)

Nei modelli vita finora si è posta un'ipotesi di stazionarietà per il processo di arrivo dei sinistri. Ne, No, ...

Ciò non risulta essere un problema se si guarda al breve periodo (2-3 anni), ma per durate superiori relativamente agli assicurati passano ad altre classi tariffarie nelle quali in genere il processo di arrivo sinistri è differente rispetto a altri classi tariffarie, il che rende poco plausibile l'ipotesi di stazionarietà.

→ per ovviare al problema si può pensare ad una stabilità del numero di assicurati all'interno delle classi nei vari anni (ogni assicurato che esce da quella classe tariffaria è rimpiazzato da un altro che entra)

→ oggi la tecnica di inserire un altro indicatore che tenga conto dell'evoluzione della classe tariffaria per un finito assicurato del portafoglio:

I_t classe tariffaria anno t

C_t " BH " t

N_t num. sinistri " t

X_t riacquisto " t

→ considerare $\Pr(C_t=j | I_t=k)$

$$\text{può } \Pr(C_t=j) = \sum_k \Pr(I_t=k) \Pr(C_t=j | I_t=k)$$

In ipotesi di stabilità di portafoglio si può porre $I_t = I$, cioè non dipendente dal tempo

Non abbiamo trattato solo a livello di classe tariffaria, non a livello di portafoglio (ogni classe tariffaria ha la sua scelta)

BIBLIOGRAFIA

- LEMAIRE J. (1995), "Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance", KLUWER
- DENNIT, altri (2007), "Statistical Modeling of Claim Counts", WILEY

Prima di procedere con il prossimo capitolo, introduciamo una nozione di funzione inversa che generalizza la funzione di funzione inversa per le funzioni di ripartizione.

$F(\cdot)$ è FUNZIONE DI RIPARTIZIONE se:

- $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$
- monotona non decrescente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- continua a destra

$\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$ è FUNZIONE DELLE CODE:

- $\bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$
- monotona non crescente
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{F}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{F}(x) = 0$
- continua a sinistra

data F , se era invertibile allora si può dare un significato a F^{-1} funz. inversa ma se F non è invertibile?

$$\text{pongo } \hat{F}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\} \quad p \in [0,1]$$

$$p=0$$

$$\hat{F}(0) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 0\} = \inf \mathbb{R} = -\infty$$

$$p=1$$

$$\hat{F}(1) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\}$$

$$\text{se } F(x) < 1 \quad \forall x \Rightarrow \hat{F}_1 = \emptyset$$

per convenzione $\inf \emptyset = +\infty$

se $\hat{F}_1 \neq \emptyset$, siamo subito in tale insieme risulta infornante limite, cioè
 $\exists \bar{x}: \bar{x} \leq x \quad \forall x \in \hat{F}_1$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1\} \quad (\text{F non può superare il 1})$$

finire un intervallo di \mathbb{R} - I_0 (intervallo) t.c. $1 \notin I_0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \exists I_{+\infty}: \forall x \in I_{+\infty} \quad F(x) \in I_0$$

$$\text{sia } \bar{x} \in I_{+\infty} \Rightarrow F(\bar{x}) < 1 = F(x) \quad \forall x \in A_1$$

$$\Rightarrow \bar{x} < x \quad \forall x \in A_1 \text{ per monotonia } F(\cdot)$$

$\Rightarrow A_1$ è inferiormente limitato

$$\Rightarrow \exists \inf A_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{quindi } F^*(1) = \inf_{\mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1\} \leftarrow \begin{array}{c} +\infty \\ \mathbb{R} \end{array} \quad A_1 \neq \emptyset$$

$$p \in]0,1[$$

$$F^*(p) = \inf_{A_p} \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$$

si prova che $A_p \neq \emptyset$

finire un intervallo di \mathbb{R} - I_1 (intervallo) t.c. $p \notin I_1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \exists I_{+\infty}: \forall x \in I_{+\infty} \quad F(x) \in I_1$$

$$\text{sia } x' \in I_{+\infty} \Rightarrow F(x') > p$$

$$\Rightarrow x' \in A_p \Rightarrow A_p \neq \emptyset$$

si prova che A_p è inferiormente limitato

procedimento analogo al caso $p=1$ (dove escludere p da I_0)

$$\Rightarrow \exists \inf A_p \in \mathbb{R}$$

$$\text{quindi } F^*(p) = \inf_{\mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\} \in \mathbb{R} \quad p \in]0,1[$$

$$F^*: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

DEF: FUNZIONE INVERSA GENERALIZZATA

Data F funzione di ripartizione, la funzione $F(p) = \inf_{\mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$

$p \in [0,1]$, con la convenzione che $\inf \emptyset = +\infty$, è detta **FUNZIONE INVERSA GENERALIZZATA** (o funzione quantile) della F .

PROPRIETÀ

1) sia $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < F(x) < 1\}$

$F|_B$ strettamente crescente

$F|_B : B \rightarrow F(x)$ è invertibile.

$\tilde{F}^+ \triangleq F|_B^{-1} : F(B) \rightarrow B$

se F non è invertibile, \tilde{F}^+ è l'inversa dove essa è definita (su restrizioni)

sia $p \in F(B) \Rightarrow \tilde{F}^+(p) = \tilde{F}^+(p)$

mostriamo che $A_p = \{x \mid F(x) \geq p\} = \{x \mid x \geq \tilde{F}^+(p)\}$

\supset

sia $x' : x' \geq \tilde{F}^+(p) \Rightarrow F(x') \geq F(\tilde{F}^+(p)) = p \Rightarrow x' \in A_p$

\subset

sia $x'' \in A_p \Rightarrow F(x'') \geq p$

se $x'' \in B, F(x'') \in F(B) \Rightarrow \tilde{F}^+(F(x'')) = x'' \geq \tilde{F}^+(p) \Rightarrow x'' \in \{x \mid x \geq \tilde{F}^+(p)\}$

se $x'' \notin B \Rightarrow F(x'') = 1 > p \Rightarrow x'' \geq \tilde{F}^+(p) \Rightarrow x'' \in \{x \mid x \geq \tilde{F}^+(p)\}$

$$\left. \begin{array}{l} F(x'') = 0 \vee F(x'') = 1 \\ F(x'') \geq p > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(x'') = 1$$

$$\tilde{F}^+(p) = \inf \{x \mid F(x) \geq p\} = \inf [\tilde{F}^+(p), +\infty[= \tilde{F}^+(p)$$

per gli x t.c. $F(x) \neq 0, 1$, se è definita $\tilde{F}^+(p) \Rightarrow \tilde{F}^+(p) = \tilde{F}^+(p)$

dove la $F \neq 0, 1$, se strettamente crescente e continua $\Rightarrow \tilde{F}^+ = \tilde{F}^{-1}$

2) F sia funzione di ripartizione continua a tratti con salti in $x_1 < x_2 < \dots$

ripartiamo $[0, 1] = [0, F(x_1)] \cup [F(x_1), F(x_2)] \cup \dots \cup [F(x_{n-1}), F(x_n)] \cup \dots$

sia $p \in [0, 1]$

$\exists i : p \in [F(x_{i-1}), F(x_i)]$

$$\tilde{F}^+(p) = x_i$$

$$A_p = \{x \mid F(x) \geq p\} = \{x \mid x \geq x_i\}$$

\supset

$x' : x' \geq x_i \Rightarrow F(x') \geq F(x_i) \geq p \Rightarrow x' \in A_p$

$$A \subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c$$

$$x'' \notin \{x | x > x_i\} \Rightarrow x'' < x_i$$

$$F(x'') \leq F(x_{i+1}) < p \Rightarrow x'' \notin A_p$$

$$\overset{*}{F}(p) = x_i \Leftrightarrow F(x_{i+1}) < p \leq F(x_i)$$

TS - 18 - 11 - 2013 (40 ore) 8^a SETTIMANA

3) se $A_p = \{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq p\} \neq \emptyset \Rightarrow A_p$ intervallo superiormente illimitato

se $p \in]0, 1[\Rightarrow A_p \neq \emptyset$

$$\text{poniamo } F^*(p) \triangleq 2 \in \mathbb{R}$$

poniamo che $\forall x > 2 \Rightarrow x \in A_p$ (cioè A_p superiormente illimitato)

$$\text{finché } x > 2 = \inf A_p \Rightarrow \exists x' \in A_p \text{ t.c. } x' < x$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow F(x') \leq F(x) \\ &p \leq F(x') \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow F(x) > p \quad \forall x > 2 \\ \Rightarrow x \in A_p \quad \forall x > 2 \end{array} \right.$$

per quanto ma rappresentare se $p \in]0, 1[$

$$A_p = \begin{cases}]2, +\infty[& \text{è comunque una semiretta superiormente illimitata} \\ [2, +\infty[& \end{cases}$$

se $p=0 \Rightarrow A_0 = \mathbb{R}$ (\mathbb{R} è sup-ill.)

$$\text{se } p=1 \Rightarrow \begin{cases} A_1 \neq \emptyset & \text{nella verifica fatta per } p \in]0, 1[\\ A_1 = \emptyset & A_1 \text{ è intervallo degenero} \end{cases}$$

4) F^* è continua a sinistra

LEMMA:

$$(i.1) \quad F(F^*(p)) \geq p \quad \forall p \in]0, 1[$$

$$(i.2) \quad F^*(F(x)) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

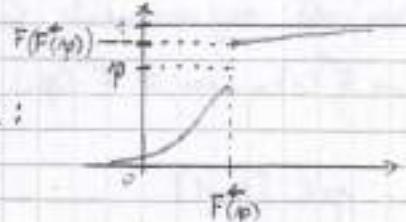
(i.3) F^* è monotona non decrescente

$$(i.4) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in [0, 1] \quad F(x) \geq p \Leftrightarrow x \geq F^*(p)$$

DIM:

(i.1) fissiamo $p \in [0,1]$, $F^*(p) = 2 \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = F(2) \\ F|_{x>2} \geq p \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} F(2) \geq p \Leftrightarrow F(F^*(p)) \geq p \end{array} \right.$$



in generale non vale l'uguaglianza:

NB! $2 \in A_p \Rightarrow A_p = [2, +\infty[$

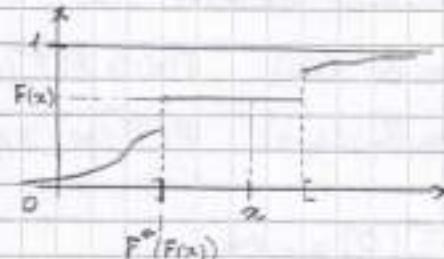
$\forall p \in [0,1], A_p \neq \emptyset \Leftrightarrow F^*(p) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(F^*(p)) = 1$ nella stessa ragionamento di sopra

(i.2) fissato $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0,1]$

$$\left. \begin{array}{l} F^*(F(x)) = \inf \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq F(x)\} \\ x \in \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq F(x)\} \\ \inf \{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geq F(x)\} \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow F^*(F(x)) \leq x$$

in generale non vale l'uguaglianza:



(ii.2) $\forall p_1, p_2 \in [0,1], p_1 < p_2 \Rightarrow F^*(p_1) \leq F^*(p_2)$

risorto $p_1, p_2 \in [0,1], 0 < p_1 < p_2 < 1$

$$A_{p_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p_1\}$$

$$A_{p_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p_2\}$$

$$\inf A_{p_1} = F^*(p_1)$$

$$\inf A_{p_2} = F^*(p_2)$$

$$x \in A_{p_2} \Rightarrow F(x) \geq p_2 > p_1$$

$$\Rightarrow F(x) > p_1 \Rightarrow x \in A_{p_1}$$

$$\Rightarrow A_{p_2} \subset A_{p_1}$$

$$\Rightarrow \inf A_{p_2} \geq \inf A_{p_1}$$

$$F^*(p_2) \geq F^*(p_1)$$

caso $p_1=0$, $p_2>p_1=0$

$$F^*(0) = -\infty \leq F^*(p_2) \quad \forall p_2 > 0$$

caso $p_2=1$, $p_1 < p_2=1$

$$\begin{array}{l} A_{p_2} \neq \emptyset \rightarrow \text{valore ragionevole fatto per } p_1, p_2 \in [0,1] \\ A_{p_2} = \emptyset \rightarrow F^*(1) = +\infty \geq F^*(p_1) \quad \forall p_1 < 1 \end{array}$$

(caso) fissato $x \in \mathbb{R}$, $p \in [0,1]$

$$\Rightarrow \exists x \quad F(x) \geq p$$

vorremo calcolare $F^*(F(x))$, $F^*(p)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{per la (ii)} \quad F^*(F(x)) \geq F^*(p) \\ \text{per la (i.e.)} \quad F^*(F(x)) \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow x \geq F^*(p)$$

$$\Leftarrow \exists x \geq F^*(p)$$

$$\text{quindi } p \in [0,1] \Rightarrow F^*(p) \in \mathbb{R}$$

vorremo calcolare $F(x)$, $F(F^*(p))$

$$\left. \begin{array}{l} \text{per la (ii)} \quad F(x) \geq F(F^*(p)) \\ \text{per la (i.e.)} \quad F(F^*(p)) \geq p \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) \geq p$$

$$\text{caso } p=0 \Rightarrow F^*(0) = -\infty$$

$$x \geq -\infty \Rightarrow F(x) \geq 0 = p$$

$$\text{caso } p=1$$

$$\begin{array}{l} A_{p_1} = \emptyset \Rightarrow F^*(1) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} : x > +\infty \quad (\text{entità da dimostrare}) \\ A_{p_1} \neq \emptyset \rightarrow \text{valore ragionevole fatto per } p \in [0,1] \\ \Rightarrow F(x) \geq F(F^*(1)) = 1 \end{array}$$

OSS:

è possibile dare altre definizioni per la nozione di funzione inversa generalizzata:

noi abbiamo visto: $F^*(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq p\}$

altri definizioni: $F^{**}(p) = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq p\}$

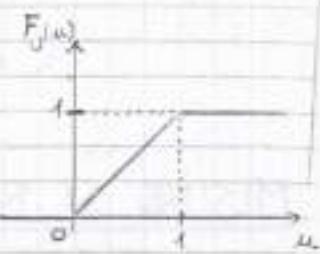
$$F^{(1-\alpha)} = \alpha F^*(p) + (1-\alpha) F^{**}(p) \quad \alpha \in [0,1]$$

// RICHIAMO

$U \sim \text{unif}(0,1)$

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & u \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u & 0 \leq u < 1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$



TEOREMA

sia F una funzione di ripartizione, U r.v. $\sim \text{unif}(0,1)$ con determinazioni in $[0,1]$. Considerate $X' = F^*(U)$ m.a.

$$\Rightarrow F_{X'}(\cdot) = F(\cdot)$$

cioè a partire da una data funzione di ripartizione è possibile costruire un m.a. che abbia come funz. di ripartizione quella data inizialmente tramite l'inversa generalizzata relativa alla funzione di ripartizione di una uniforme.

DIM:

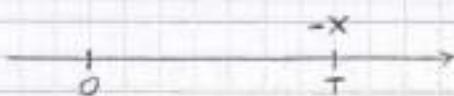
fixed $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{X'}(x) &= \Pr(X' \leq x) = \Pr(F^*(U) \leq x) \\ &\stackrel{(1)}{=} \Pr(U \leq F(x)) = F_U(F(x)) = F(x) \end{aligned}$$

DEF: RISCHIO

Diciamo RISCHIO un m.a. $X \geq 0$ che rappresenta un importo che un assicuratore dovrà spiegare (ad una data futura T) a fronte di:

- un rischio
- un contratto
- un portafoglio di contratti



TEOREMA

dato un rischio X : $E(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) < +\infty$

$$\Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x) dx \quad \bar{F}_X = 1 - F_X$$

DIM:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^x dz \right] d\bar{F}_X(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} \left[\int_y^{+\infty} dF_x(x) \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F_x(y)) dy = \int_0^{+\infty} F_x(y) dy \end{aligned}$$

MISURE DI RISCHIO

REF: MISURA DI RISCHIO

Diciamo MISURA DI RISCHIO in un insieme di rischi \mathcal{X} , un funzionale

$$\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

tali che dato $X \in \mathcal{X}$, $\rho(X)$ sia l'ammontare di capitale del quale il detentore delle posizioni finanziarie X deve disporre affinché una tale situazione risulti accettabile sia per un controllore interno o per un controllore esterno.

\mathcal{X} insieme dei rischi

\mathcal{A} insieme dei no. che sono "accettabili", regole di accettabilità

$$\rho_A(x) = \inf_{\mathcal{A}} \{\alpha \geq 0 : -X + \alpha \in \mathcal{A}\}$$

// RICHIAMO: PRINCIPI DI CALCOLO DEL PREMIO

$$\Pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

\mathcal{X} insieme dei raccordamenti per contratti

$X \in \mathcal{X} \rightarrow \Pi(X)$ premio: richiesta di capitale per accettare di gestire X

$\Pi(X) > E(X)$ corrispondente di ricchezza

OSS:

c'è misura di rischio tali da:

$$X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$$

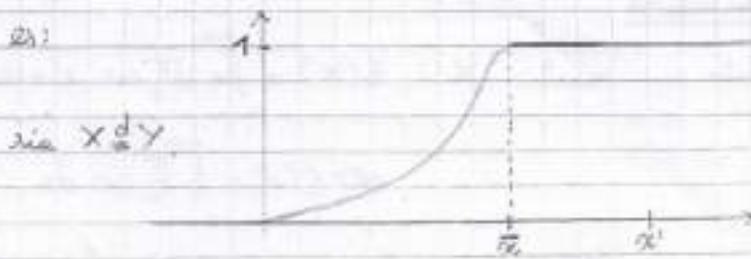
ma ciò può essere un problema, es:

X a determinazioni in $[0, \bar{x}]$

$Y \geq 0$

$$(X=x) = \emptyset, \quad (Y=x) \neq \emptyset$$

$P(X=x) = P(Y=x) = 0$, entrambi gli eventi siano possibile, ma il secondo è comunque possibile



DEF: MISURA COERENTE DI RISCHIO

Una misura di rischio p definita su \mathcal{X} è una MISURA COERENTE DI RISCHIO

$$\Leftrightarrow \textcircled{1} \quad p(X+c) = p(X) + c \quad \forall X \in \mathcal{X}, c \in \mathbb{R}, X+c \in \mathcal{X} \quad \text{TRASLATIVITÀ}$$

$$\textcircled{2} \quad p(aX) = a p(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, a > 0, aX \in \mathcal{X} \quad \text{OMOGENEITÀ POSITIVA}$$

$$\textcircled{3} \quad p(X+Y) \leq p(X) + p(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}, X+Y \in \mathcal{X} \quad \text{SUBADDITIVITÀ}$$

$$\textcircled{4} \quad X \leq Y \Rightarrow p(X) \leq p(Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{X} \quad \text{MONOTONIA}$$

COMMENTI:

$$\textcircled{1} \quad X \rightarrow \text{più generare -}X \quad X+c \rightarrow \text{più generare -}X, generare di meno -c
chiedo $p(X)$ chiedo $p(X) + c$$$

$$\text{se vale } \textcircled{1}: p(X-p(X)) = p(X) - p(X) = 0$$

il rischio $X-p(X)$ non richiede altro capitale, è più accettabile

$$\textcircled{2} \quad X \text{ in } \mathbb{E} \quad aX \text{ in } \mathbb{B} = X \text{ in } \mathbb{E}$$

chiedo $p(X)$ in \mathbb{E} chiedo $p(aX)$ in $\mathbb{B} = p(X)$ in \mathbb{E}

tuttavia a potrebbe essere così grande da generare un problema di liquidità-sobrietà

TS - 19-11-2013 (42 ore)

$$\textcircled{3} \quad \exists X, Y : p(X+Y) > p(X) + p(Y)$$

risulterebbe più conveniente dividere l'impegno tra due parti

→ una compagnia avranno potrebbe essere indotta a riportare la copertura tra più controllate per avere soggetti ad un minor risparmio di rischiabilità

$$\textcircled{4} \quad X_{\omega_1} \leq Y_{\omega_1}, \forall \omega \in \Omega$$

se con X in ogni caso si paga meno che con Y è obbligatorio ovviamente richiedere meno capitale

$$(\textcircled{4b}) \quad P_{-}(X \leq Y) = 1 \Rightarrow p(X) \leq p(Y) \quad \text{MONOTONIA "PIÙ DEbole")}$$

Spesso si considera la proprietà $\textcircled{1}$ invece che la $\textcircled{4}$

OSS:

considera $E(X) = E(X)$

- $E(X+c) = E(X) + c \quad c \in \mathbb{R}$, intuit.
- $E(aX) = aE(X) \quad a \in \mathbb{R}$, intuit
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

La sparsanza matematica è una misura coerente di rischio, ^{tuttavia} se considerata come principio di calcolo del premio si possono fare misurazioni errate (assenza variabilità, ecc...)

MISURE DI RISCHIO BASATE SU SCENARI

Σ insieme dei rischi, ora definiti su P , \mathcal{Q} è σ -algebra su P

Ω insieme non vuoto di misure di probabilità su \mathcal{Q}

$$P(X) = \sup \{E_Q(X), Q \in \Omega\} \quad \text{WORST-CASE SCENARIO}$$

$\begin{matrix} \text{sparsanza} \\ \text{matematica di } X \\ \text{calcolata con } Q \end{matrix}$

$\begin{matrix} \text{misura di probabilità} \\ \text{calcolata con } Q \end{matrix}$

In questo contesto la sparsanza è una misura coerente di rischio

MISURA DI RISCHIO DEL VALUE-AT-RISK (VaR)

dato $X \geq 0$, $p \in [0, 1]$

è dato VALUE-AT-RISK (VaR) di X al livello (di confidenza) p :

$$\text{VaR}[X; p] = F_x^+(p)$$

$$= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_x(x) \geq p\}$$

ne Σ insieme dei rischi, finora $p \in [0, 1]$

$$p(\cdot) = \text{VaR}[\cdot, p] \text{ in } \Sigma$$

$$p(x) = \text{VaR}[X, p]$$

$$P_p(X > \text{VaR}[X, p]) = 1 - F_x(\text{VaR}[X, p])$$

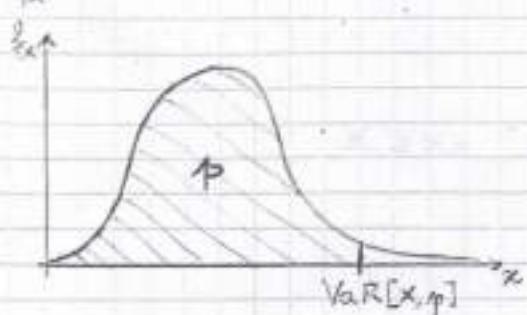
$$= 1 - F_x(F_x^+(p)) \leq 1 - p$$

SOLVENCY!

$$p = 0.995$$

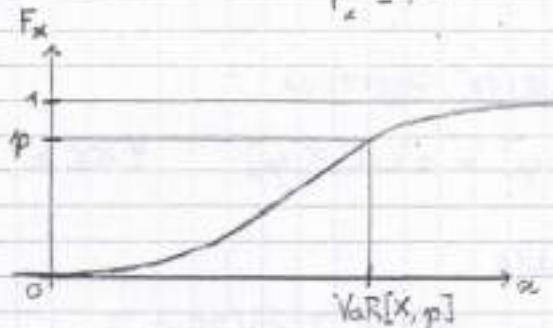
$X \geq 0$ altra distribuzione detta di densità:

$$f_X(x) > 0, \quad x \geq 0$$



$F_X(\cdot)$ d. strettamente crescente

$$F_X^{-1} = F^{-1}$$



- se $\text{VaR}[X, p]$ ha la stessa dimensione di X (noi consideriamo impon)
- se $X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow \text{VaR}[X, p] = \text{VaR}[Y, p]$

PROPRIETÀ DEL VAR

\mathcal{X} insieme di rischi, $p \in]0, 1[$, $\rho(\cdot) = \text{VaR}[\cdot, p]$

(a) NO-RIPOFF

• esiste $H \in \mathbb{R}$ certo t.c. $X \leq H \Rightarrow \text{VaR}[X, p] \leq H$

• $X \leq H \Rightarrow P_r(X \leq H) = 1 = F_X(H)$

$$p < 1 \Rightarrow p < F_X(H) \stackrel{\text{(def)}}{\Leftrightarrow} F_X^{-1}(p) \leq H$$

$$\Leftrightarrow \text{VaR}[X, p] \leq H$$

• esiste $\max[X]$, massima determinazione possibile di $X \Rightarrow \text{VaR}[X, p] \leq \max[X]$

(b) TRASLATIVITÀ

• $\text{VaR}[X + c, p] = \text{VaR}[X, p] + c \quad \forall X \in \mathcal{X}, c \in \mathbb{R}$ certo, $X + c \in \mathcal{X}$

"In \mathbb{R} $a = b \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \Leftrightarrow b \leq x$ "

$$\begin{aligned} \text{finito } x \in \mathbb{R} \quad \text{VaR}[X + c, p] \leq x &\Leftrightarrow F_{X+c}^{-1}(p) \leq x \\ &\stackrel{\text{(def)}}{\Leftrightarrow} p \leq F_{X+c}(x) \end{aligned}$$

$$F_{X+c}(x) = P_r(X + c \leq x)$$

$$= P_r(X \leq x - c) = F_X(x - c)$$

$$\Rightarrow p \leq F_X(x - c) \stackrel{\text{(def)}}{\Leftrightarrow} F_X^{-1}(p) \leq x - c$$

$$\Leftrightarrow \text{VaR}[X, p] \leq x - c$$

$$\Leftrightarrow \text{VaR}[X, p] + c \leq x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{VaR}[x + c, p] \leq x \Leftrightarrow \text{VaR}[x, p] + c \leq x$$

$$\Rightarrow \text{VaR}[x + c, p] = \text{VaR}[x, p] + c$$

(c) OMOGENEITÀ POSITIVA

$$\circ \text{VaR}[\alpha X, p] = \alpha \text{VaR}[X, p] \quad \forall X \in \mathbb{X}, \alpha > 0, \alpha X \in \mathbb{X}$$

(d) MONOTONIA

$$\circ X \leq Y \Rightarrow \text{VaR}[X, p] \leq \text{VaR}[Y, p]$$

$$X \leq Y \Rightarrow F_X(x) \geq F_Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) \leq P(X \leq x) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$Y \leq x \Rightarrow X \leq x$$

$$\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} \supset \{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) \geq p\}$$

$$\text{via } x \in \{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) \geq p\}$$

$$\Rightarrow F_Y(x) \geq p \Rightarrow F_X(x) \geq p$$

$$\Rightarrow x \in \{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}$$

$$\Rightarrow \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} | F_Y(x) \geq p\}$$

$$F_Y^*(p) \geq F_X^*(p)$$

$$\text{VaR}[Y, p] \geq \text{VaR}[X, p]$$

$$(d') F_X(x) \geq F_Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{VaR}[Y, p] \geq \text{VaR}[X, p]$$

SOMMINANZA STOCHASTICA
DEL PRIMO LIVELLO

$$\text{se } P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow F_X \geq F_Y \Rightarrow \text{VaR}[Y, p] \geq \text{VaR}[X, p]$$

$$\text{per } H = (X \leq Y)$$

$$P_H(H) = 1 \quad P_H(\bar{H}) = 0$$

$$P_H(X > x) = P_H(X > x \wedge H) + \underbrace{P_H(X > x \wedge \bar{H})}_{=0}$$

$$P_H(Y > x) = P_H(Y > x \wedge H)$$

$$X > x \wedge H \Rightarrow Y > x \wedge H$$

$$P_H(X > x \wedge H) \leq P_H(Y > x \wedge H)$$

$$P_H(X > x) \leq P_H(Y > x) \Leftrightarrow 1 - F_X(x) \leq 1 - F_Y(x)$$

$$\Rightarrow F_X(x) \geq F_Y(x)$$

(e) NON INTRODUCE CARICAMENTI INGIUSTIFICATI

una misura di rischio $\rho(\cdot)$ non introduce carichiamente ingiustificati

$$\Leftrightarrow X \stackrel{d}{=} \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ con } \Rightarrow \rho(X) = \bar{x}$$

$$X \neq \bar{x}, \forall p \in [0, 1]$$

$$F_x^*(p) = \bar{x} \Rightarrow \text{Var}[X, p] = \bar{x}$$

OSS:

una misura di rischio $\rho(\cdot)$ introduce un caricamento di sicurezza se $\forall X$
 $\rho(X) > E(X)$

- il $\text{Var}[X, p]$ non soddisfa tale proprietà: $\exists X, p$ t.c. $\text{Var}[X, p] \leq E(X)$

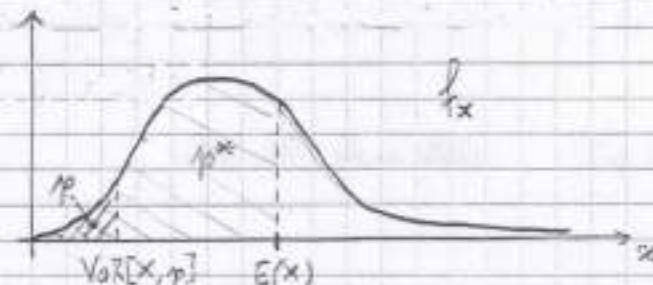
esempio:

$$X \in \mathbb{R}, E(X) < +\infty$$

$$F_x(E(X)) = p^* \in [0, 1]$$

$$\text{finita } p < p^* \Rightarrow \text{Var}[\cdot, p]$$

$$\text{Var}[X, p] = F_x^*(p) \stackrel{(\omega)}{\leq} F_x^*(p^*) = F_x(F(E(X))) \stackrel{(L)}{\leq} E(X)$$



- il $\text{Var}[X, p]$ non soddisfa la proprietà di sub-additività

esempio:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

	X	Y	X+Y	$P(\omega)$
ω_1	10	10	20	0.2
ω_2	20	40	60	0.3
ω_3	40	20	60	0.4

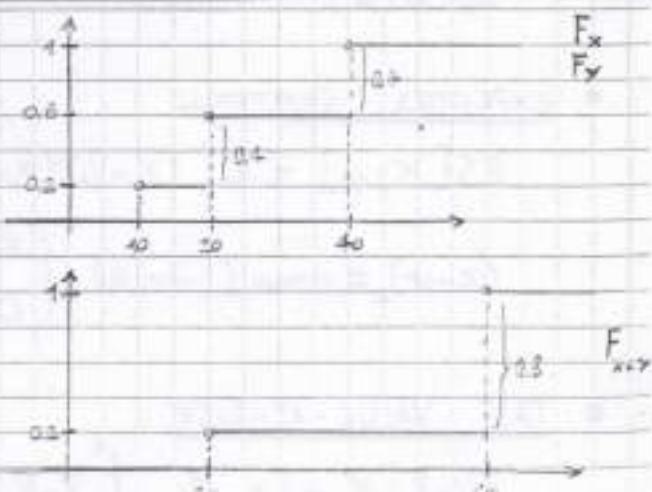
$$p=0.6$$

$$\text{Var}[X, 0.6] = \text{Var}[Y, 0.6] = 20$$

$$\text{Var}[X+Y, 0.6] = 60$$

$$\Rightarrow \text{Var}[X+Y, 0.6] > \text{Var}[X, 0.6] + \text{Var}[Y, 0.6]$$

$$60 > 40$$



CAPITALE DI RISCHIO BASATO SUL VAR

$$X \in \mathbb{R}, X \geq 0$$

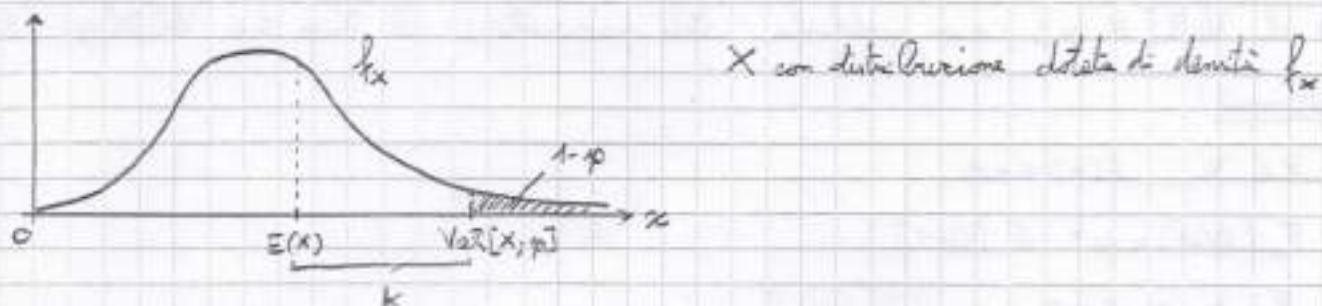
Punto $p \in [0,1]$ livello di confidenza

Il CAPITALE DI RISCHIO per X al livello p è:

$$k = \text{Var}[X; p] - E(X)$$

$$\Pr(X > E(X) + k) = \Pr(X > \text{Var}[X; p]) \leq 1-p$$

$$\Pr(K + E(X) - X < 0) \leq 1-p \quad (\rightarrow \text{probabilità di rovina})$$



MISURE DI RISCHIO BASATE SUL VALUE-AT-RISK

\mathcal{X} insieme di rischi, $p \in [0,1]$

• CONDITIONAL TAIL EXPECTATION

$$\text{CTE}[X; p] = E(X | X > \text{Var}[X; p]) \quad (\text{detto anche TAIL VAR})$$

• MEAN EXCESS FUNCTION

$$e_x(\text{Var}[X; p]) = E(X - \text{Var}[X; p] | X > \text{Var}[X; p])$$

$$e_x(r) = E(X - r | X = r)$$

• EXPECTED SHORTFALL

$$\text{ES}[X; p] = E[(X - \text{Var}[X; p])_+]$$

$$(x - r)_+ = \max(-r, 0) = \begin{cases} x - r & x - r \geq 0 \\ 0 & x - r < 0 \end{cases}$$

• TAIL VALUE-AT-RISK

$$\text{TVaR}[X; p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 \text{Var}[X; t] dt$$

TS - 22-11-2013 (44 pag)

OSS: RELAZIONI TRA LE MISURE DI RISCHIO BASATE SUL VaR

$$\bullet \text{ES}[X; p] = E[(X - \text{VaR}[X; p])_+]$$

$$\text{VaR}[X; p] \triangleq V$$

$$\begin{aligned} E[(X - V)_+] &= P_{-}(X \leq V) E[(X - V)_+ | X \leq V] + P_{-}(X > V) E[(X - V)_+ | X > V] \\ &= P_{-}(X > V) E[X - V | X > V] \\ &\stackrel{!}{=} P_{-}(X > V) e_x(v) \end{aligned}$$

$$\text{ES}[X; p] = P_{-}(X > \text{VaR}[X; p]) e_x(\text{VaR}[X; p])$$

$$e_x(\text{VaR}[X; p]) = \frac{E[X; p]}{1 - F_x(\text{VaR}[X; p])}$$

$$\bullet \text{CTE}[X; p] = E(X | X > \text{VaR}[X; p])$$

$$\begin{aligned} &= E(X | X > V) = E(X - V | X > V) + V \\ &\stackrel{!}{=} e_x(V) + V \end{aligned}$$

$$\text{CTE}[X; p] = \text{VaR}[X; p] + e_x(\text{VaR}[X; p])$$

$$= \text{VaR}[X; p] + \frac{E[X; p]}{1 - F_x(\text{VaR}[X; p])}$$

$$\bullet \text{ES}[X; p] = E[(X - V)_+]$$

$U \sim \text{Unif}(0,1) \quad F_x^*(u) \triangleq x$

$$\stackrel{!}{=} E[(F_x^*(U) - V)_+]$$

$$\stackrel{!}{=} E[(F_x^*(U) - F_x^*(p))_+]$$

$$\stackrel{!}{=} \int_0^1 (F_x^*(u) - F_x^*(p))_+ du$$

$$u < p \Rightarrow F_x^*(u) \leq F_x^*(p) \Rightarrow (F_x^*(u) - F_x^*(p))_+ = 0$$

$$u \geq p \Rightarrow F_x^*(u) \geq F_x^*(p) \Rightarrow (\dots)_+ = F_x^*(u) - F_x^*(p)$$

$$\stackrel{!}{=} \int_p^1 (F_x^*(u) - F_x^*(p)) du$$

$$\stackrel{!}{=} \int_p^1 F_x^*(u) du - F_x^*(p)(1-p)$$

$$\frac{ES[X; p]}{1-p} = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR[X; u] du - VaR[X; p]$$

$$= TVaR[X; p] - VaR[X; p]$$

$$TVaR[X; p] = VaR[X; p] + \frac{ES[X; p]}{1-p}$$

$$CTE[X; p] = VaR[X; p] + \frac{ES[X; p]}{\underbrace{1 - F_x(VaR[X; p])}_{\begin{cases} u \geq p \\ u \leq 1-p \end{cases}}}$$

$\exists x_0 \in]F_x(x_0), F_x(x_0)[\neq \emptyset \Rightarrow TVaR[X; p] \neq CTE[X; p]$

altrimenti $\Rightarrow TVaR[X; p] = CTE[X; p]$

$\approx F_x$ è continua $\Rightarrow TVaR[X; p] = CTE[X; p] \quad \forall p \in]0, 1[$

OSS:

• si può provare che il TVaR:

- è misura corrente di rischio
- soddisfa il no-riproff
- non introduce caricamenti ingiustificati
- introduce un caricamento di sicurezza

• in generale il $CTE[X; p]$ non soddisfa la sub-additività

(tale proprietà vale se F_x è continua, cioè $CTE = TVaR$)

CAPITALE DI RISCHIO BASATO SUL TVaR

$X \in \mathbb{X}, x \geq 0, p \in]0, 1[$

Il capitale di rischio basato sul TVaR di X al livello p è:

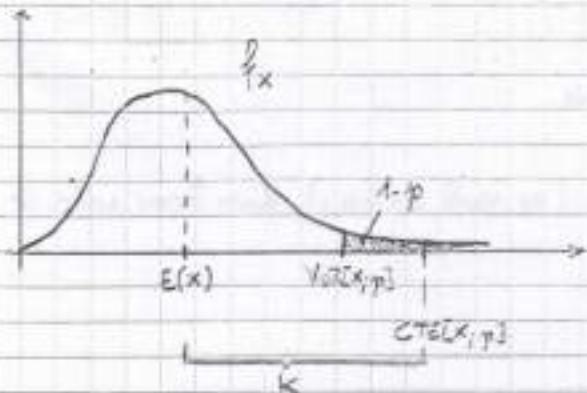
$$k = TVaR[X; p] - E(X)$$

$$P_r(X > e(x) + k) = P_r(X > TVaR[X; p])$$

$$| TVaR[X; p] \geq VaR[X; p]$$

$$\leq P_r(X > VaR[X; p]) \leq 1-p$$

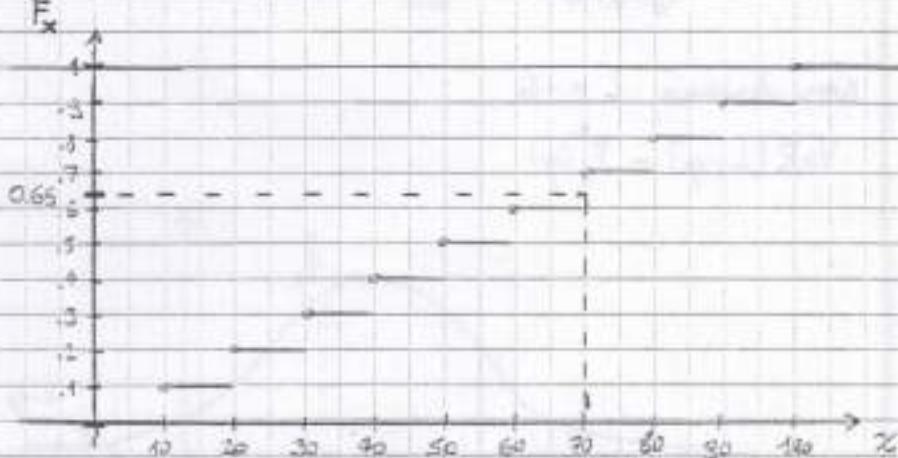
X con distribuzione detta di densità f_X :



$$\begin{aligned} \text{TVaR}[X; p] &= \text{CTE}[X; p] \\ &= \mathbb{E}[X | X > \text{Var}[X; p]] \end{aligned}$$

Esempio:

	X	$P(\omega)$	$E(X) = 55$	$p = 0.65$
ω_1	10	$\frac{1}{10}$		
ω_2	20	$\frac{1}{10}$		
ω_3	30	$\frac{1}{10}$		
ω_4	40	$\frac{1}{10}$		
ω_5	50	$\frac{1}{10}$		
ω_6	60	$\frac{1}{10}$		
ω_7	70	$\frac{1}{10}$		
ω_8	80	$\frac{1}{10}$		
ω_9	90	$\frac{1}{10}$		
ω_{10}	100	$\frac{1}{10}$		



$$\text{Var}[X; 0.65] = 70$$

$$\text{CTE}[X; 0.65] = \mathbb{E}(X | X > 70)$$

$$= (80 + 90 + 100) \cdot \frac{1}{3} = 90$$

$$\mathbb{E}_x(\text{Var}[X; 0.65]) = \mathbb{E}(X - 70 | X > 70)$$

$$= \mathbb{E}(X | X > 70) - 70 = 90 - 70 = 20$$

$$\text{ES}[X; 0.65] = \mathbb{E}[(X - 70)_+]$$

$$= (10 + 20 + 30) \cdot \frac{1}{10} = 6$$

$$\text{TVaR}[X; 0.65] = \text{Var}[X; 0.65] + \frac{\text{ES}[X; 0.65]}{0.35}$$

$$= 70 + \frac{6}{0.35} \approx 87.14$$

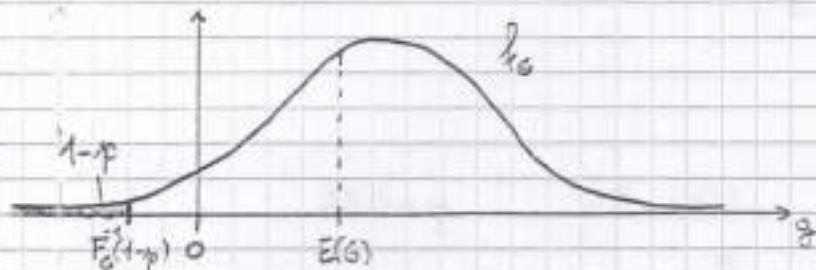
OSS:

dato $X \geq 0$, $p \in [0, 1]$, $\text{VaR}[X; p]$

consideriamo G , guadagno per il detentore

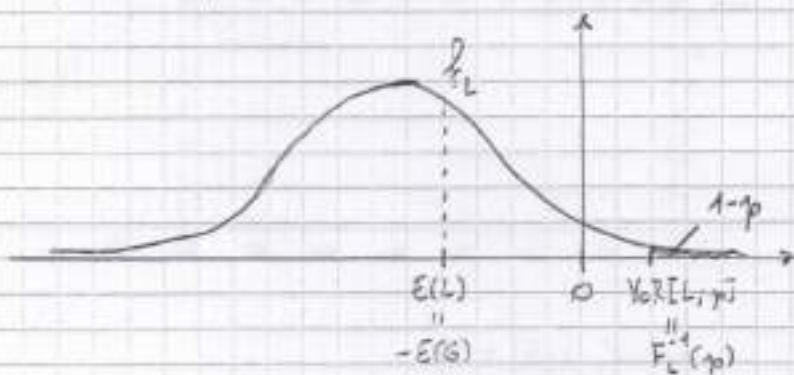
$$G \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0 \rightarrow \text{tre casi possibili: si vuole evitare di finire troppo sotto lo zero}$$

ma G con distribuzione dotata di densità



consideriamo $L = -G$

$$\text{VaR}[L; p] = F_L^*(p)$$



per distribuzione dotata di densità:

$$\text{VaR}[L; p] = F_L^*(p) = -F_G^*(1-p)$$

$$F_L^*(p) = -F_G^*(1-p)$$

CAPITALE DI RISCHIO BASATO SUL VaR

$$1) P_r(K+G < 0) \leq 1-p$$

$$K = \text{VaR}[L; p]$$

$$P_r(\text{VaR}[L; p] + G < 0) = P_r(\text{VaR}[L; p] - L < 0)$$

$$= P_r(L > \text{VaR}[L; p]) = 1 - \underbrace{F_L(\text{VaR}[L; p])}_{F_L(F_L^*(p))} \leq 1-p$$

$$2) \Pr(K+G < E(G)) \leq 1 - p$$

$$K = E(G) + \text{Var}[L; p]$$

MISURA DI RISCHIO DI VANG

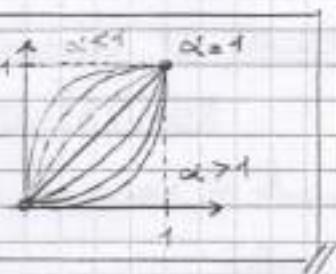
\mathbb{X} insieme di rischi, $\varrho > 0$ (cost)

$$\rho_{\varrho}(x) = \int_0^{+\infty} (\bar{F}_x(u))^{\frac{1}{\varrho}} du \quad x \in \mathbb{X}, \quad \bar{F}_x = 1 - F_x$$

$$\text{poniamo } F_{\varrho}(x) = 1 - (\bar{F}_x(x))^{\frac{1}{\varrho}}$$

$$\text{se } \bar{F}_x(x) = 0 \Rightarrow F_{\varrho}(x) = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & x \in]0, 1[, \alpha > 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



$$0 \leq F_{\varrho}(x) \leq 1$$

F_{ϱ} è monotona non decrescente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\varrho}(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\varrho}(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_{\varrho}(x) = 1 - (\bar{F}_x(x_0))^{\frac{1}{\varrho}} \\ = F_{\varrho}(x_0)$$

$\rightarrow F_{\varrho}(x) \geq 0$ a destra

$\Rightarrow F_{\varrho}$ è funzione di ripartizione

$$(X \leq x) = \emptyset \Rightarrow F_x(x) = 0 \Rightarrow F_{\varrho}(x) = 0$$

$$(X \leq x) = \Omega \Rightarrow F_x(x) = 1 \Rightarrow F_{\varrho}(x) = 1$$

$$(X \leq x) = (X \leq y) \Rightarrow F_x(x) = F_x(y) \Rightarrow F_{\varrho}(x) = F_{\varrho}(y)$$

} condizioni necessarie perche' F_{ϱ} sia funz di ripartiz per X

$\Rightarrow F_{\varrho}$ è soluziozione/funz di ripartizione coerente per X

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x d\bar{F}_x(x) = \int_0^{+\infty} \bar{F}_x(x) dx$$

$$\mathbb{E}_{\varrho}(X) = \int_0^{+\infty} x d\bar{F}_{\varrho}(x) = \int_0^{+\infty} \bar{F}_{\varrho}(x) dx = \int_0^{+\infty} ((\bar{F}_x(x))^{\frac{1}{\varrho}}) dx$$

$$\bar{F}_{\varrho}(x) = 1 - F_x(x) = (\bar{F}_x(x))^{\frac{1}{\varrho}}$$

OSS:

$$\text{se } q > 1 \Rightarrow \frac{1}{q} < 1$$

$$1 - F_x(x) < (1 - F_x(x))^{1/q}$$

$$\Rightarrow 1 - F_x(x) <$$

$$\int_0^{\infty} (1 - F_x(x)) dx < \int_0^{\infty} (1 - F_x(x))^{1/q} dx$$

a meno che la funz. di ripartiz. abbia un
salto di ampiezza unitaria

$$E(X) < E_q(X) = P_q(X)$$

↪ La misura introduce un caricamento di sicurezza positivo

$P_q(\cdot) \quad q > 1 \quad \text{PRINCIPIO DI CALCOLO DEL PREMIO DI WANG}$

RISK-ADJUSTED PRINCIPLE

→ si ha un caricamento di sicurezza implicito (se non si modifica la funz. di ripartizione iniziale)

$$1 - F_x(x) < (1 - F_x(x))^{1/q}$$

$$P(X > x) < P_q(X > x) \rightarrow \text{c'è più mano nella coda}$$

→ valutazione più prudentiale

MISURE DI RISCHIO DI WANG GENERALIZZATE

Ξ insieme di nodi

g funzione definita in $[0, 1]$ non decrescente t.c. $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(1)=1 \end{cases}$ - DISTORTION FUNCTION

$$\text{def } P_g(X) = \int_0^{\infty} g(\bar{F}_x(x)) dx \quad (\text{se } g(x) = x^q \rightarrow \text{WANG})$$

PROPRIETÀ P_g

- no repoff
- traslatabilità
- omogeneità positiva
- monotonia
- non introduce caricamenti ingiustificati

se la g è crescente:

- \hat{F}_Y sub-additiva
- \hat{F}_Y introduce un acciamento di riserva

BIBLIOGRAFIA

- DENUIT, altri (2005), "Actuarial Theory for Dependent Risk Measures, Order and Models", VILLE.
- MC NEIL, altri (2005), "Quantitative Risk Management", PRINCETON S. in FINANCIAL MATHEMATICS

TS - 25-11-2013 (46 ore) 2^a SETTIMANA ASSUNTE

VALUTAZIONI MEDIANTE SIMULAZIONE STOCASTICA

$Y = \varphi(X)$ con F_X conosciuta

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF_X(x)$$

$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\varphi(X) \leq y) \rightarrow$ non sempre facile da calcolare

$Y = \varphi(X_1, \dots, X_n) = \varphi(\underline{X})$ con $F_{\underline{X}}$ conosciuta

\rightarrow può essere molto difficile valutare Y

$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots)$ con $(X_1, X_2, \dots) \sim \mathcal{T}$ (processo stocastico)

\rightarrow situazione ancora più complicata

es: $X = \sum_{i=1}^N Y_i$, $X = \varphi(N, Y_1, Y_2, \dots)$

$(N, Y_1, Y_2, \dots) \sim \mathcal{T}$

$\left[\begin{array}{l} \cdot Y_i | N=m, Y_1, \dots, Y_{i-1} \sim \text{iid } f_{m>0} \\ \cdot Y_i | N=m \text{ ha legge che non dipende da } m \end{array} \right]$

$\rightarrow P(N=m) \quad m=0, 1, \dots$

$\rightarrow F_Y$

$F_X(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \Pr(N=m) F_Y^{(m)}(x) \rightarrow$ dal punto di vista operativo è un bel problema calcolare questa funz. di ripartizione

Il metodo della SIMULAZIONE STOCASTICA consiste nel sostituire un ente aleatorio da tipo

\underline{X} num. aleatorio

$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vettore aleatorio

(X_1, X_2, \dots) processo stocastico

per il quale è assegnata una valutazione probabilistica, con un altro ente aleatorio che riproduce lo stesso stato di incertezza, al quale risponde di assegnare le stesse valutazioni probabilistiche dell'ente originale.

$$X \sim F_X \rightarrow X' \text{ t.c. } F_{X'} = F_X$$

$$\underline{X} \sim F_{\underline{X}} \rightarrow \underline{X}' \text{ t.c. } F_{\underline{X}'} = F_{\underline{X}}$$

$$(X_1, X_2, \dots) \sim \mathbb{G} \rightarrow (X'_1, X'_2, \dots) \sim \mathbb{G}$$

perché risultano osservabili:

x'

$\underline{x}' = (x'_1, \dots, x'_m)$

(X'_1, X'_2, \dots)

} Le determinazioni di queste entità sono dette DETERMINAZIONI SIMULATE dell'ente aleatorio originale

Considero $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$, $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim F_X$

se $\underline{X}' = (X'_1, \dots, X'_n)$ simula $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$

$$Y' = \varphi(\underline{X}'), \quad Y' \stackrel{d}{=} Y$$

allora Y' simula Y

Se \underline{X}' è osservabile, cioè posso osservare il valore \underline{x}'

$$y' = \varphi(\underline{x}') \in \text{DETERMINAZIONE SIMULATA di } Y$$

Supponiamo di avere $Y = \varphi(\underline{X})$ con $\underline{X} \sim F_X$ e niamo in difficoltà per

calcolare $E(Y)$, $V_{\text{ar}}(Y)$, F_Y . $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$, $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim F_X$

se X'_1, \dots, X'_n sono vettori aleatori stocasticamente indipendenti che simulano \underline{X}

($\Leftrightarrow X'_i \stackrel{d}{=} X_i \quad \forall i=1, \dots, n$) allora:

$$Y'_1 = \varphi(X'_1), \dots, Y'_n = \varphi(X'_n) \rightarrow \text{transformati di vettori aleatori stoc. indip.}$$

$$\rightarrow \text{ma. stoc. indip.} \rightarrow \text{simulante } Y$$

$\rightarrow Y'_1, \dots, Y'_n$ è un CAMPIONE della distribuzione F_Y

quindi posso costruirne:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y'_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X'_i) \quad \text{stimatori non distorti e consistenti di } E(Y)$$

se gli X'_1, \dots, X'_n sono osservabili allora:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X'_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y'_i \rightarrow \hat{E}(Y)$$

per la covarienza tra le stime:

$$\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (y_i^* - \bar{y}) \sum_{k=1}^{m-1} (y_k^* - \bar{y}) = \text{stima non distorta di } \text{Var}(Y)$$

se gli X_1, \dots, X_m sono osservabili

$$\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (y_i^* - \bar{y})^2 \rightarrow \hat{\text{Var}}(Y)$$

se no:

$$y_1^*, \dots, y_m^* \rightarrow E(y) = \frac{\text{card}\{y_i^* | y_i^* \leq y\}}{m}$$

funz. di ripartizione empirica da preso
prendere come stima della funz. di
ripartizione di Y

$$\rightarrow \hat{F}_Y$$

Dobbiamo quindi avere:

- un ente aleatorio che possa essere simulato
- tecnica efficiente, possa ottenere molte determinazioni stimate

SIMULAZIONE DI UN NUMERO ALEATORIO

Supponiamo di avere $X \sim F_X$, deve costruire un m.a. con stessa funzione di
ripartizione:

$$X' = F_X^{-1}(U) \quad U \sim \text{Unif}(0,1) \Rightarrow X' \sim F_X, \text{ cioè } X' \text{ simula } X$$

se U è osservabile e x è la sua determinazione allora:

$$x' = F_X^{-1}(u) \text{ è una DETERMINAZIONE SIMULATA DI } X$$

In particolare:

- se F_X è invertibile $X' = F_X^{-1}(U) \Rightarrow x' = F_X^{-1}(u)$
- se F_X è costante a tratti $X' = F_X^{-1}(U) = x_* \Leftrightarrow F_x(x_{*-1}) < U \leq F_x(x_*)$



se $u \in [F_x(x_{*-1}), F_x(x_*)] \rightarrow x_*$ è determinazione simulata di X

più in generale

$$x' = \inf\{x | F_x(x) > u\} = \hat{F}_x(u)$$

Se abbiamo bisogno di più determinazioni similate indipendenti possiamo fare riferimento ad una sequenza:

$$U_1, U_2, \dots \text{ i.i.d } U_i \sim \text{unif}(0,1)$$

$X'_1 = F_x^*(U_1), X'_2 = F_x^*(U_2), \dots$ sequenza di n.a.i.d che simulano X
 u_1, u_2, \dots valori osservati di U_1, U_2, \dots

$x'_1 = F_x^*(u_1), x'_2 = F_x^*(u_2), \dots$ seq. di determinate similità di X che possiamo prendere come valori osservati di un campione di X

OSS: come costruire una sequenza di n.a. osservabile

Tutti i software hanno generatori di numeri pseudo-casuali, cioè algoritmi che generano sequenze di numeri $u_1, u_2, \dots \in [0,1]$ che possono essere considerati come valori osservati di U_1, U_2, \dots i.i.d $\sim \text{unif}(0,1)$

es: in R

`runif(n, 0, 1)`

→ calcolare media e varianza campionaria di 100 o 1000 num. generati e andare a confrontarle con media e varianza della distrib. uniforme

$$F_x^{-1} \rightarrow x' = F_x^{-1}(u)$$

→ prende $U(0,1)$, non riesce a calcolare l'inversa (anche la diretta in forma chiusa)

Lo stesso vale per $N(\mu, \sigma^2)$ o la gamma (α, β)

La funz. di ripart. non è calcolabile in forma chiusa, è problematica anche per una funz. di rip. ortante a tratti.

Ciò in genere dàci fare $x' = F_x^{-1}(u)$, il che può essere molto complicato da calcolare

Il problema si risolve andando a sfruttare particolari algoritmi che ci consentono di fare la simulazione.

SIMULAZIONE DI UN VETTORE ALEATORIO o DI UN PROCESSO STOCHASTICO A PASSI

DISCRETO

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim F_{\underline{X}}$$

$(X_1, X_2, \dots) \sim \mathbb{P}$ processo con leggi singole

1) X_1, X_2, \dots stocasticamente indip.

→ Dato assegnare le marginali

U_1, U_2, \dots i.i.d. $\sim \text{unif}(0,1)$

$$\Rightarrow X'_1 = F_{x_1}^{-1}(U_1), \quad X'_2 = F_{x_2}^{-1}(U_2), \dots$$

X'_1, X'_2, \dots s.t. indip. perché trasformate di m.a. stoc. indip.

$$X'_1 \neq X_1, \quad X'_2 \neq X_2$$

allora (X'_1, X'_2, \dots) simula (X_1, X_2, \dots)

se u_1, u_2, \dots sono numeri pseudo-casuali e quindi determinazioni di U_1, U_2, \dots

$$\Rightarrow X'_1 = F_{x_1}^{-1}(u_1), \quad X'_2 = F_{x_2}^{-1}(u_2), \dots \text{ determinazione simulata dell'ente originale}$$

$(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$ è una determ. simulata di X

se voglio più simulazioni devo ripetere il processo

2) X_1, X_2, \dots m.a. non strettamente indipendenti (bisogna tenere conto dei legami probabilistici, non basta azzardare le marginali)

se U_1, U_2, \dots i.i.d. $\sim \text{unif}(0,1)$ e u_1, u_2, \dots determinazioni:

$$F_{x_1}^{-1}(u_1) = X'_1, \quad F_{x_2|x_1=x'_1}^{-1}(u_2) = X'_2, \quad F_{x_3|x_1=x'_1, x_2=x'_2}^{-1}(u_3) = X'_3, \dots$$

si prova che $(X'_1, X'_2, X'_3, \dots)$ è determinazione simulata dell'ente originale

OSS:

si può procedere in modo sequenziale: si calcola x'_1 , a partire da x'_1 si costruisce una determ. simulata di X_2 , det. $x'_1 = x'_2$ si può costruire una determ. simulata di X_3 , e così via

SIMULAZIONE DI $N(0,1)$

$W \sim N(0,1)$ come simulare W ?

$$F_w^{-1}(u) = W' \quad u \sim \text{unif}(0,1) \rightarrow W' \text{ simula } W$$

tuttavia non è possibile calcolare F_w in forma chiusa, bisogna scrivere un algoritmo

ALGORITMO DI BOX-MÜLLER

U_1, U_2 i.i.d. $\sim \text{unif}(0,1)$

$$W_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$W_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

W_1, W_2 i.i.d. $\sim N(0,1)$

SIMULAZIONE:

- generare U_1, U_2 num pseudo-casuali

- calcolare $w_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$ determ. sim. di W_1

$$w_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2) \quad \sim \sim \sim W_2$$

$(U_1, U_2) \rightarrow w_1, w_2$ } in questo modo ho più determ. similate di W_1, W_2
 $(U'_1, U'_2) \rightarrow w'_1, w'_2$

Ese: in R

ga rnorm(n, 0, 1)

→ sfruttare l'algoritmo di B-M per calcolare più determ. similate in modo da poter ottenere i momenti primi, poi simulare con l'algoritmo di dotazione nel software e confrontare

SIMULAZIONE 3) $N(\mu, \sigma^2)$

se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ considero $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

posto $W = \frac{X-\mu}{\sigma}$ abbiamo $X = \sigma W + \mu \quad W \sim N(0,1)$

se W' rimula $W \rightarrow X' = \sigma W' + \mu$ rimula X

SIMULAZIONE:

- generare w' determ. similate di $N(0,1)$

con algoritmo B-M

rnorm(...)

- calcolare $x' = \sigma w' + \mu$ determ. sim. di $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

SIMULAZIONE 4) $LN(\mu, \sigma)$

$X \sim LN(\mu, \sigma) \Leftrightarrow \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$

posto $Y = \ln X \Rightarrow X = e^Y \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

se Y' rimula $Y \rightarrow X' = e^{Y'}$ rimula X

SIMULAZIONE:

- generare w' d'urm. simuletta di $\mathcal{U}(0,1)$
- calcolare $y' = \zeta w' + \mu$ d'urm. simuletta di $\mathcal{N}(\mu, \zeta^2)$
- calcolare $x' = e^{y'}$ d'urm. simuletta di $X \sim \mathcal{N}(\mu, \zeta)$

SIMULAZIONE DI $\text{GAMMA}(\alpha, \beta)$

- $X \sim \exp(\beta)$ ($\alpha=1$) $\beta > 0$ esponenziale

$$F_x(x) = 1 - e^{-\beta x} \quad x \geq 0$$

↳ strutt. crescente \Rightarrow invertibile

$$\tilde{F}_x(x) = F_x^{-1}(x) \quad x > 0, \quad F_x^{-1}(u) \quad u \in [0,1[$$

$$1 - e^{-\beta x} = u \rightarrow e^{-\beta x} = 1 - u$$

$$\rightarrow -\beta x = \ln(1-u) \rightarrow x = -\frac{1}{\beta} \ln(1-u)$$

$$\tilde{F}_x^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta} \ln(1-u) \quad u \in [0,1[$$

$$\text{se } U \sim \text{unif}(0,1) \Rightarrow 1-U \sim \text{unif}(0,1)$$

$$\rightarrow x' = -\frac{1}{\beta} \ln(1-U) \text{ simula } X$$

$$\rightarrow x'' = -\frac{1}{\beta} \ln(U) \text{ simula } X$$

SIMULAZIONE:

- generare u
- calcolare $x' = -\frac{1}{\beta} \ln(1-u)$ o $x'' = -\frac{1}{\beta} \ln(u)$ d'urm. simuletta di $X \sim \exp(\beta)$

- $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ ($\alpha = m \in \mathbb{N}$) erBogiana

$$f_x(x) = \frac{\beta^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\beta x} \quad x > 0$$

// RICHIAMO: proprietà fam gamma

$$X_1, \dots, X_m \text{ iid } \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$$

$X_1 + \dots + X_m \sim \text{gamma}(m\alpha, \beta)$ La fam. gamma è chiusa per sommazione m-zima

$$\text{se } X_1, \dots, X_m \text{ iid } \sim \exp(\beta) \Rightarrow X_1 + \dots + X_m \sim \text{gamma}(m, \beta)$$

$N(t) = \text{card} \{ m \geq 1 \mid T_m \leq t \}$ come a dire:

se $m \geq 1$: $N(t) = m \iff T_m \leq t \quad e \quad T_{m+1} > t$

$$\iff T_m \leq t < T_{m+1}$$

$$\iff \underbrace{W_1 + \dots + W_m}_{\substack{\text{tempo d'attesa per} \\ \text{l'arrivo} \\ \text{esimo}}} \leq t < \underbrace{W_1 + \dots + W_m + W_{m+1}}_{\substack{\text{tempo d'attesa per l'arrivo} \\ \text{esimo+1}}}$$

tempo d'attesa per
l'arrivo esimo

tempo d'attesa per l'arrivo esimo+1

TS-26-11-2013 [45 pag] 15-16

se $m=0$: $N(t) = 0 \iff W_1 > t$ (l'istante t precede il primo intertempo)

\Rightarrow riesce ad esprimere $N(t)$ con il numero degli intertempi:

$$N(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m \mid N(t) = m \mid = 0 \cdot \mid t < W_1 \mid + \sum_{m \geq 1} m \mid W_1 + \dots + W_m \leq t < W_1 + \dots + W_{m+1} \mid$$

soluzioni di queste
indicate: $\hat{z} = 1$

\hookrightarrow caso $m=0$

$$N(1) \sim \text{Poi}(2): \quad N(1) = 0 \mid 1 < W_1 \mid + \sum_{m \geq 1} m \mid W_1 + \dots + W_m \leq 1 < W_1 + \dots + W_{m+1} \mid$$

\hookrightarrow funz. del numero
degli intertempi

se $\{W'_1, W'_2, \dots\}$ simula $\{W_1, W_2, \dots\}$ possiamo trovare un num. che simula $N(t)$ applicando la stessa funzione che applichiamo al numero degli interarrivi per trovare $N(t)$

se U_1, U_2, \dots iid $\sim \text{unif}(0,1)$ allora:

$$\left\{ -\frac{1}{2} \ln U_1, -\frac{1}{2} \ln U_2, \dots \right\} \text{ simula } \{W_1, W_2, \dots\}$$

$$N' = 0 \cdot \left| 1 < -\frac{1}{2} \ln U_1 \right| + \sum_{m \geq 1} m \left| -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \ln U_i \leq 1 < -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m+1} \ln U_i \right|$$

N' simula $N \sim \text{Poi}(2)$

$$N=0 \iff 1 < -\frac{1}{2} \ln U_1 \iff -2 > \ln U_1 \iff e^{-2} > U_1$$

$$N=m \iff -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \ln U_i \leq 1 < -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m+1} \ln U_i$$

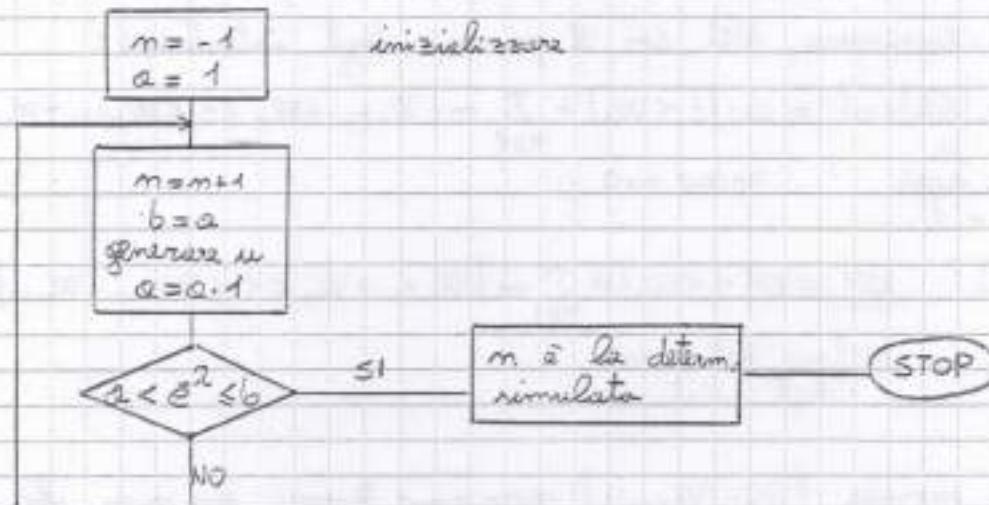
$$\iff \sum_{i=1}^m \ln U_i \leq -2 < \sum_{i=1}^{m+1} \ln U_i \iff \prod_{i=1}^m U_i > e^{-2} > \prod_{i=1}^{m+1} U_i$$

SIMULAZIONE:

$U_1 < \varepsilon^2 \Rightarrow 0 \text{ è detm. simulata di } N$

- generare u_1
 - altrimenti
- generare u_2
 - $u_1 u_2 < \varepsilon^2 \leq u_1 \Rightarrow 1 \text{ è detm. simulata di } N$
 - altrimenti
- generare u_3
 - ...

DIAGRAMMA A BLOCCHI:



SIMULAZIONE $N \sim \text{BinNeg}$

N i parametri obiettivi (quelli solitamente indicati con Θ)

$$\lambda > 0, \alpha > 0$$

$$N | \Theta = \lambda \sim \text{Poi}(\lambda \cdot \alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \Theta \sim \text{gamma}(\alpha, \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow N \sim \text{BinNeg}(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}) \quad E(N) = \lambda \quad V_N(N) = \lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha + \lambda}$$

L'idea è quella di simulare il vettore (Θ, N) , ma in questo caso non si ha l'indipendenza, quindi si procede con una simulazione sequenziale

SIMULAZIONE:

- simulare Θ : generare u e calcolare $\hat{F}_\Theta(u) = \lambda^u$
- $N | \Theta = \lambda \sim \text{Poi}(\lambda \cdot \alpha)$: si può simulare n da una $\text{Bi}(\lambda \cdot \alpha)$.
(ad esempio con l'algoritmo visto prima)

n è detm. simulata di una BinNeg

SIMULAZIONE DI X - POISSON COMPOSTA

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i$$

$\forall m > 0 \quad Y_1|N=m, \dots, Y_m|N=m$ i.i.d.

- $Y_i|N=m$ ha legge che non dipende da $i \in m$

F_Y : distrl. del risparmio per sinistro in ip. che il sinistro si sia verificato

$$\bullet N \sim \text{Poi}(2)$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Poisson Composta}(2, F_Y)$$

formalmente è possibile scrivere F_X , ma ciò non è operativamente

$$X = \varphi(N, Y_1, Y_2, \dots)$$

simulare questo processo per poi ottenere una determinata simulazione di X

METODO DIRETTO

Non esistono indipendenze nel processo. Bisogna procedere sequenzialmente

• simulare N : generare n e calcolare $F_Y(u) = n$ (e usare un algoritmo)

• $Y_1|N=n \sim F_Y$, deve simulare $Y_1|N=n$: $F_Y^{-1}(u_1) = y'_1$

• $Y_2|N=n, Y_1=y'_1 \stackrel{d}{=} Y_2|N=n \sim F_Y$: $F_Y^{-1}(u_2) = y'_2$

• simulare $Y_3|N=n, \dots, Y_m|N=n$ che sono i.i.d.: generare u_3, \dots, u_m e calcolare

$$\begin{matrix} F_Y(u_3) & \dots & F_Y(u_m) \\ y'_3 & \dots & y'_m \end{matrix}$$

Così facendo si è simulato tutto il processo in quanto:

$Y_h|N=n=0 \rightarrow (n, y'_1, \dots, y'_m, 0, 0, \dots)$ è determinata simulazione di $\{N, Y_1, Y_2, \dots\}$

• calcolare $x' = y'_1 + \dots + y'_m$ determinazione simulata di X

OSS:

Il metodo diretto può essere un processo molto lungo.

Esistono algoritmi che si basano sull'approssimazione della distribuzione Poisson-Composta.

• APPROXIMAZIONE WILSON-HILFERTY

$X \sim \text{Poisson-Gamma}(2, \gamma_x)$

$$F_x, \mu_x, \tau_x, \gamma_x = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_x)^2]}{\gamma_x^2} \text{ wif di asimmetria}$$

$$F_x(x) \approx \phi\left(2\left(\frac{x-\mu_x}{\gamma_x}\right)\right) \quad x > 0$$

$$\text{avendo } h(t) = C_1 + C_2 f t + C_3 t^3$$

$$C_1 = \frac{1}{6} \gamma_x - \frac{6}{\gamma_x}$$

$$C_2 = 3 \left(\frac{2}{\gamma_x}\right)^3$$

$$C_3 = \frac{2}{\gamma_x}$$

La $\phi(h(\frac{x-\mu_x}{\gamma_x}))$ è un'approssimazione pensata per la gamma, ma può andare bene anche per la Poisson-Gamma.

OSS:

perché deve essere $x > 0$?

$$\Pr(X=0) > 0 : N=0 \Rightarrow X=0 \Rightarrow 0 < \Pr(N=0) \leq \Pr(X=0)$$



L'approssimazione è buona se $\gamma_x \leq 1$, e se x non è troppo distante da μ_x , cioè x si trova in I_{μ_x} intorno di μ_x .

SIMULAZIONE:

$$W \sim \mathcal{U}(0,1)$$

che si tratta ora

$$\begin{aligned} \phi\left(h\left(\frac{x-\mu_x}{\gamma_x}\right)\right) &= \Pr\left(W \leq h\left(\frac{x-\mu_x}{\gamma_x}\right)\right) = \Pr\left(h^{-1}(W) \leq \frac{x-\mu_x}{\gamma_x}\right) \\ &= \Pr\left(\tau_x h^{-1}(W) + \mu_x \leq x\right) = F_{h^{-1}(W)+\mu_x}(x) \end{aligned}$$

$$\rightarrow F_x(x) \approx F_{h^{-1}(W)+\mu_x}(x)$$

approssimazione eguale in distrib.: $X \stackrel{d}{=} \tau_x h^{-1}(W) + \mu_x$

- calcolare $\mu_x = \mathbb{E}(Y)$

$$\zeta_x = \sqrt{2\mathbb{E}(Y^2)}$$

$$\gamma_x = \frac{\mathbb{E}(Y^2)}{\sqrt{2\mathbb{E}(Y^2)}}^2$$

- simulare $W \sim N(0,1)$ e trovare w' (ad es. con Box-Muller)

- calcolare $x' = \zeta_x \cdot h^{-1}(w') + \mu_x$ che può essere presa come determinata di X

$$w = C_1 + C_2(t + C_3)^3$$

$$(t + C_3)^3 = \frac{w - C_1}{C_2} \rightarrow t + C_3 = \left(\frac{w - C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow t = \left(\frac{w - C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{3}} - C_3$$

$$\Rightarrow h(w) = \frac{(w - C_1)^{\frac{1}{3}}}{C_2} + C_3$$

• APPROSSIMAZIONE NORMA! - POYKIR

$X \sim \text{Poisson-Compound}(2, F_x) \quad \mu_x, F_x, f_x$

$$F_x(x) \approx \Phi \left(-\frac{3}{\sqrt{f_x}} + \sqrt{\frac{9}{f_x^2} + 1 + \frac{6}{f_x} \cdot \frac{x - \mu_x}{\sqrt{f_x}}} \right) \quad x > 0$$

L'approssimazione è migliore in un intorno I_{μ_x} per $f_x \leq 1$

se $W \sim N(0,1)$ allora:

$$\mu_x + \zeta_x W + \frac{\zeta_x \chi_x (w^2 - 1)}{6} \stackrel{d}{\sim} X$$

SIMULAZIONE:

- calcolare μ_x, F_x, f_x

- simulare $W \sim N(0,1)$ e trovare w'

- calcolare $x' = \mu_x + \zeta_x w' + \frac{\zeta_x \chi_x (w'^2 - 1)}{6}$ che può essere presa come determinata di X

BIBLIOGRAFIA

- POYKIN, PANTIKAINEN, PESONEN (1991), "Practical Risk Theory for Actuaries", CHAPMAN HALL

X numerosi eventi per un portafoglio in un finestr' intervallo

$X \sim \text{Poisson-Compound}(\lambda, F_x)$

$$K = \underline{\text{Var}}[X; p] - E(X) \quad \rightarrow \text{si calcola facilmente}$$

$$\hookrightarrow = \hat{F}_m(p), \text{ serie di } F_m \text{ che non è facile da calcolare}$$

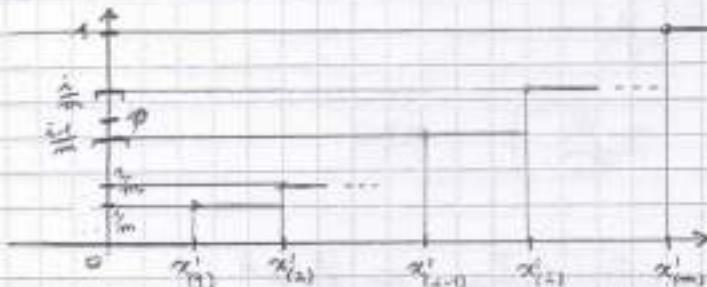
ottenere m determin. simulati: x_1^*, \dots, x_m^*

$$\hat{F}_m = F_m \quad F_m(x) = \frac{\text{card}\{x_i^* \mid x_i^* \leq x\}}{m}$$

quello quindi stimare il Var :

$$\hat{\text{Var}}[X; p] = \hat{F}_m(p) \quad \text{uso i quantili di ordine } p \text{ della funz. d'ripart. empirica}$$

$$\text{ad } x_{(1)}^* < x_{(2)}^* < \dots < x_{(m)}^*$$



$$\hat{F}_m(p) = x_{(1)}^* \Leftrightarrow F_m(x_{(i-1)}) \leq p \leq F_m(x_{(i)})$$

$$\Leftrightarrow \frac{i-1}{m} \leq p \leq \frac{i}{m}$$

$$\Leftrightarrow i-1 \leq mp \leq i \quad \text{dove } i \text{ è il più piccolo intero dopo } mp$$

es: $p=0.995$

$m=1000$

$$\rightarrow \hat{\text{Var}}[X; p] = x_{(995)}$$

SIMULAZIONE DI UN PROCESSO DI POISSON

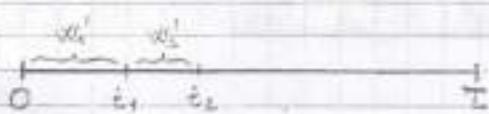
$\{N(t), t \geq 0\}$ il processo è equivalente con $\{W_1, W_2, \dots\}$ e ad $\exp(\lambda)$

in va a simulare $\{W_1, W_2, \dots\}$

$\{X_1^*, W_2, \dots\}$ simula $\{W_1, W_2, \dots\}$

$$\rightarrow ad esempio \left\{-\frac{1}{2} \ln U_1, -\frac{1}{2} \ln U_2, \dots\right\}$$

ci si trova in un intervallo finito $[0, T]$



SIMULAZIONE:

- simulare $w_1 \rightarrow w_1'$ $\begin{cases} w_1' > T \Rightarrow m(t) = 0 & 0 \leq t < T \rightarrow \text{STOP} \\ w_1' \leq T \Rightarrow m(t) = 0 & 0 \leq t < t_1 \end{cases}$

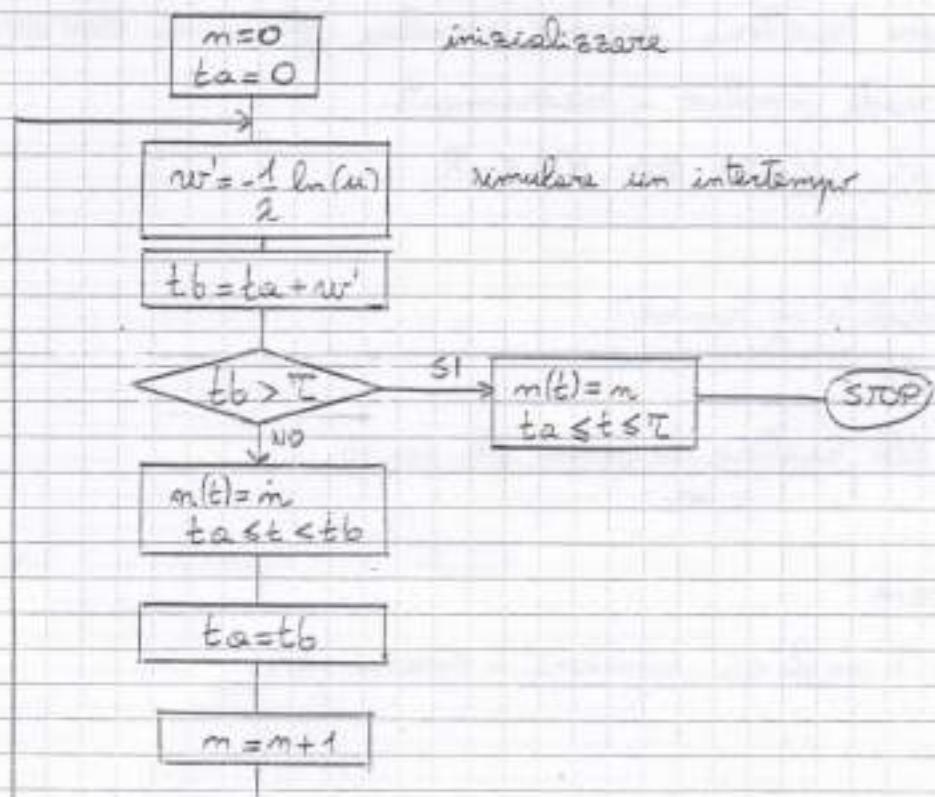
simulare $w_2 \rightarrow w_2'$

- $\begin{cases} t_2 = t_1 + w_1' > T \Rightarrow m(t) = 1 & t_1 \leq t < T \\ t_2 \leq T \Rightarrow m(t) = 1 & t_1 \leq t < t_2 \end{cases}$

simulare $w_3 \rightarrow w_3'$...

Ci si ferma quando simulando un ulteriore intertempo si supera T

DIAGRAMMA A BLOCCHI



TS - 25 - 11 - 2013 (50 ORE) - ASSEGNO

VALUTAZIONE NELLA PROBABILITÀ DI ROVINA NELLA TCR

$$R(t) = R + ct - S(t)$$

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

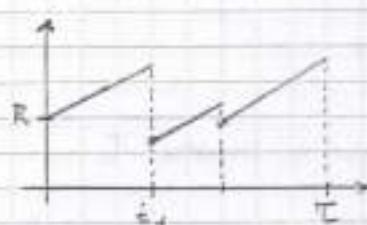
• $\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson con intensità λ

• $\{Y_1, Y_2, \dots\} | H, n, m$ i.i.d. con F_Y che non dipende da H, n, m

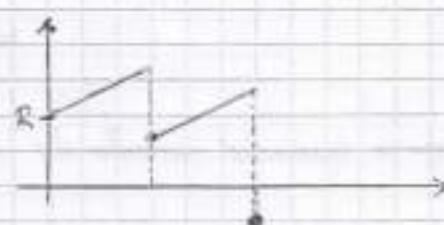
→ $S(t)$ processo ad incrementi indipendenti e stazionari \sim Poisson-Composta

$$\psi(R) = \Pr_{t \geq 0} (R(t) < 0)$$

$$\psi(R, T) = \Pr_{0 \leq t \leq T} (R(t) < 0)$$



ex: traiettoria che
non porta alla
rovina



ex: traiettoria
che porta
alla rovina

Se vogliamo stimare una traiettoria dovranno simulare gli istanti dove avvengono i ruinisti e per questi simulare i rincari.

$$R(t) < 0 \Leftrightarrow R + ct - S(t) < 0 \Leftrightarrow \Delta(t) < -R$$

Per stimare la probabilità di rovina:

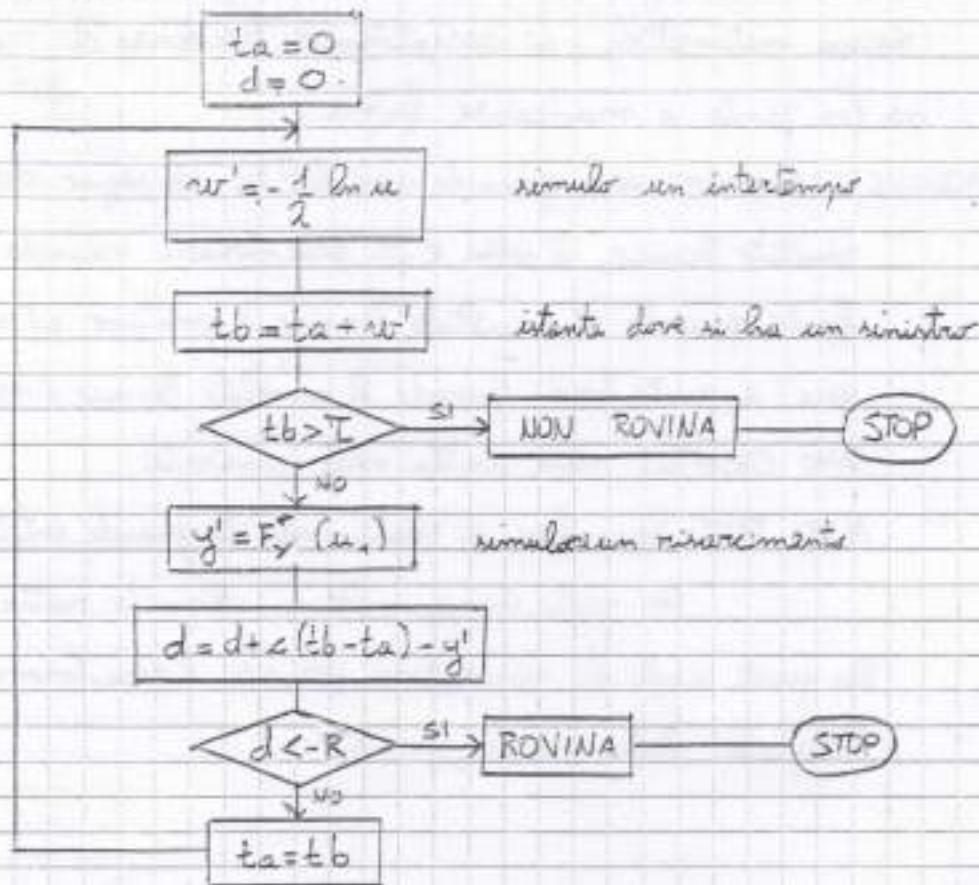
m traiettorie simulate

$$\hat{\psi}(R, T) = \frac{\text{num delle traiettorie che portano alla rovina}}{m}$$

SIMULAZIONE TRAIETTORIA

Simulare gli istanti e su di essi sommare i rincari

DIAGRAMMA A BLOCCHI



BIBLIOGRAFIA:

- NE MUY, CHARPENTIER (2004), "Mathématique de l'assurance non-vie", ECONOMICA per l'esame: per ogni distribuzione provare a fare differenti simulazioni con gli algoritmi dati e quelli proposti dal software, fare confronti tra la stima empirica e momento terzi

RISERVE TECNICHE

Le riserve tecniche non sono libere da impegni come le riserve patrimoniali che si colloca nel patrimonio netto: Le riserve tecniche infatti sono debiti verso gli assicurati e quindi si trovano nella passività.

- RISERVA PREMII: massa per coprire risconti a spese future già contratti già stipulati
- RISERVA SINISTRI: Stima di quanto l'assicuratore dovrà pagare in futuro per risconti già verificati negli esercizi o in esercizi precedenti

- **RISERVA SENESGENZA:** per assicurazioni malattia su base polienniale, è una riserva matematica, si accantonano eccedenze di premi per far fronte a mancanze future
 - **RISERVA DI PEREQUAZIONE:** essendo una grande variabilità del segno del risultato tecnico, l'idea è di accantonare creando un fondo quando il risultato tecnico è positivo ed attingere a questo fondo quando il risultato tecnico è negativo
 - **RAMO CREDITO:** viene scritta nella prossimità
 - **ALTRI RAMI:** Danno freq. di rischi ma di grande entità
(es: rischi energia nucleare, calamità naturali)
- Per questi rischi la normativa prevede l'accantonamento integrale della riserva premi.

OSS:

La riserva di perequazione non esisterà più nel momento in cui entrerà in vigore SOLVENCY II: si vuole che nel bilancio vengano scritte le attività e le prossimità reali, quindi si sporterà questa riserva nel capitale di rischio

- a) Ci concentreremo sulle riserve premi e riserve risconti commentando le relative normative.

RISERVA PREMI

a) RISERVA PER FRAZIONI DI PREMI

METODO PRO RATA TEMPORIS

$R_p(1)$: riserva premi alla chiusura dell'esercizio



In 1 si accantona la parte di premi che andrà a coprire la durata residua del contratto

$$R_p(1) = \sum_{h=1}^n P_h^T (1-\alpha') \cdot t_h$$

METODO PRO RATA TEMPORIS
(α' spese di acquisizione)

Ese: contratto stipulato il 1° ottobre: $P_h^T (1-\alpha') \frac{9}{12}$

OSS: GIUSTIFICAZIONE METODO PRO RATA TEMPORIS

Per un finito individuo consideriamo $\{X(t), t \geq 0\}$ processo di risarcimenti in $[0, t]$

IPOTESI:

- $\{N(t), t \geq 0\}$ processo di Poisson (2)
- $\{Y_1, Y_2, \dots\} | H, \dots, Y_{n-1} | H$ iid F_Y

$$\Rightarrow X(t) = \sum_{h=1}^{N(t)} Y_h \quad X(t) \sim \text{Pois-comp}(2t, F_Y)$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ processo ad incr. indip. e staz.

(sono le stesse ip. per $S(t)$ nella TCR)

visto che: $E[X(t+1) - X(t)] = 2E(Y) = E[X(1)]$

in riferimento ad una durata t :

$$E[X(t)] = 2tE(Y) = tE[X(1)]$$

L'incremento atteso nel corso di un anno

Il fronte di un premio sarà incassato per un anno, per una durata non dura t il premio sarà $tE[X(1)]$

Mettendo via la porzione di premio necessaria a coprire la durata residua del contratto

Le ipotesi della TCR giustificano il metodo di calcolo delle riserve rispetto pro rata temporis. L'otto quindi c'è l'idea di un processo ad incrementi indipendenti e stazionari.

* METODO FORFETARIO

$$\bar{P}(1) = \sum_{h=1}^n \bar{P}_h^T \quad \text{non si deducono le spese}$$

- $P^*(1) = 0.35$ rischi avanti nell'esercizio
- ≈ 0.40 RCI
- ≈ 0.15 per rischi di breve durata

CONFRONTO TRA I DUE METODI

$$R_p(1) = \sum_{h=1}^T P_h^*(1-\alpha') t_h$$

Supponiamo che tutti i contratti siano stipulati a metà esercizio



$$\rightarrow R_p(1) = (1-\alpha') \frac{1}{2} \sum_{h=1}^T P_h^* \approx 35\% P^*(1)$$

$\alpha' \approx 0.30 \quad P^*(1)$

→ Il metodo forfettario vale in cui si abbia una certa uniformità nella stipulazione dei contratti

Si può usare il metodo forfettario se:

$$0 < \frac{RF - RPRT}{RPRT} \leq 0.02$$

RF = riserva metoda forfettario

RPRT = riserva per rate temporanee

Che intende la l'assicuratore ad usare il metodo forfettario o il metodo per rate temporanee? Il fatto è che la riserva tecnica sono: - fiscalmente deducibili
- non di passività

Si decide quindi quale metodo è "più comodo", basta che poi sia precisato nell'allegato del bilancio.

es: premio pagato in un'unica soluzione in via anticipata



metodo PRT: $P_1 \cdot \frac{3}{6}$

b) RISERVA PER RISCHI IN CORSO

Può accadere che alla chiusura dell'esercizio l'assicuratore valuti che le riserve calcolate per le rate future non siano adeguate per coprire rischi in corso futuri (ad es. è aumentata la freq. sinistri o è aumentata l'inflazio-

$R_p(1) + \text{rate future di premi} \rightarrow \text{INSUFFICIENTI}$

Può anche accadere che l'investimento della nuova riva sia sovravalutato.
In generale si considera questa riva quando cambiano i parametri in base ai quali si era costruita la tariffa.

Si può quindi considerarla un metodo di correzione del metodo pro rata temporis (che ad al non considera la stagionalità).

• METODO ANALITICO

 In t inciso P^T premio da applicare in base alla tariffa che ha applicato sulla base di osservazioni precedenti.

In 1 cambia lo stato di informazione, valuto la tariffa in questo nuovo stato di informazione e può accadere che $P^T' > P^T$

→ si era calcolata $RPRT = P^T(1-\alpha')t$, ma in 1 si valuta che in realtà serve $RPRT = P^T'(1-\alpha')t$

si pone la differenza nella riva per rischi in corso:

$$RRC = [P^T - P^T'](1-\alpha')\frac{t}{2}$$

• METODO SEMPLIFICATO

consideriamo un indice di rintracciabilità:

$$\frac{\text{(pagato + riservato + mese diretta di liquidazione per sinistri dell'anno)}}{P^T(1)(1-\alpha') + R_p(0) - R_p(1)} = \frac{S}{P}$$

→ sotto sinistra dell'eq.
riserva per
frizioni di premio

→ sotto indice di competenza dell'eq.
detto la mese di acquisizione

⇒ $\frac{S}{P}$ COSTO MEDIO PER UNITÀ DI MONTEPREMI

Nell'anno successivo avrò:

$$R_p(1) + \text{rate futura}$$

(contratti stipulati l'anno precedente)

stima dei premi che avrà il prossimo anno per i sinistri che verificheranno il prossimo anno per i contratti dell'anno corrente

$$\frac{S}{P} (R_p(1) + \text{rate futura})$$

stima del costo dei sinistri che graveranno nell'anno $t+1$ per contratti stipulati nell'anno t

$$\frac{S}{P} (R_p(1) + \text{rate future}) - (R_p(1) + \text{rate future})$$

RISERVA PER RISCHI IN CORSO

alla chiusura dell'esercizio in corso si stima un'insufficienza della riserva premi, si metterà questa differenza nella riserva per rischi in corso.

TS-02-12-2013 (52 ore) 10^a SETTIMANA L-10

RISERVA SINISTRI

$R_s(1)$ stima di ciò che l'assicuratore dovrebbe pagare per sinistri avvenuti nell'esercizio e in esercizi precedenti e non ancora pagati

Bisogna determinare quando e quanto si pagherà

$$R_s(1)$$

INSR → Surrender But Not Reported (terribile), sinistri avvenuti nell'esercizio e non ancora denunciati

Bisogna tener conto di quando si pensa di finire il pagamento in modo da tener conto dell'inflazione.

In corso sia prevista una franchigia (che dovrebbe essere a carico dell'assicurato) anch'essa deve essere messa a riserva.

METODO DELL'INVENTARIO e CASE RESERVE

"La riserva deve essere, in linea di principio, valutata separatamente per ciascun risparmio" (Codice del Licenziazione, art 33, comma 3)

Si fa una valutazione soggettiva del liquidatore per ciascuna polizza aperta.

La valutazione delle riserve è importante per il controllo interno

VALUTAZIONE DI TIPO TECNICO-ATTUARIALE

C'è stata un'apertura delle valutazioni, prima l'unico metodo era quello dell'inventario. L'apertura delle valutazioni delle riserve è voluta dal Regolatore per indurre le compagnie assicuratrici a valutare le riserve in metodo multifase:

- 1^a FASE: strutture liquidative che valutano i risparmi con il metodo dell'inventario

- 2^a FASE: strutture di impresa che analizzano la stima dell'inventario effettuando valutazioni di tipo tecnico-attuariale

INFLAZIONE

L'inflazione di cui bisogna tener conto è la CLAIM INFLATION

- INFIAZIONE MONETARIA NEL SETTORE

(es: RCA, inflazione sui prezzi di scambio e sugli stipendi del settore auto)

- SUPER-IMPOSED INFLATION

variazione del costo dei risconti per motivi differenti dall'inflazione

(es: motivi giuridici o Regolatori, come variazioni del 5% al 10% degli interosi sulla riserva)

Quale sono i risconti per i quali vengono accantonate riserve?

Per un risconto che abbia incertezza chiara, con responsabilità e risarcimenti chiaramente strutturati, è nell'interesse dell'assicuratore chiudere il caso il prima possibile.

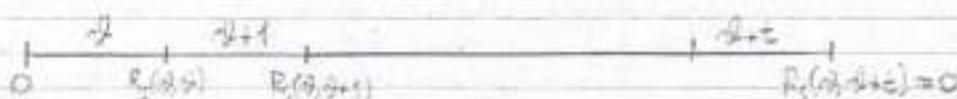
Non vengono pagati subito tutti gli altri risconti

PROCESSO DI SMONTAMENTO DELLA RISERVA SINISTRI



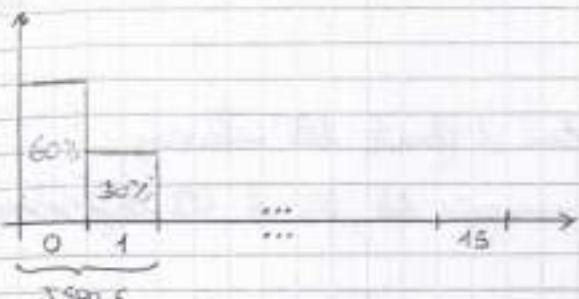
Bisogna aggiornare $R_t(t,t)$ in $R_{t+1}(t,t+1)$

Quale andamento avrà questa valutazione? I risconti verranno pagati nel tempo quindi un andamento decrescente fino ad arrivare a 0



t = durata del processo di montamento della riserva sinistri

- Ti sono:
- RAMI A BREVE SMONTAMENTO, $t = 4,5$ anni (ex. grandine)
- RAMI A LUNGO SMONTAMENTO, $t = 10,15$ anni (ex. RC, rami con RC)



In RC comunque la percentuale dei sinistri pagati nell'anno corrente e nell'anno successivo è molto alta, ciò che cambia è il costo medio per sinistro, che può essere di 3500€ per i sinistri da vengono chiusi subito, mentre può arrivare a 150.000€ per i sinistri che vengono chiusi fino a 15 anni di differenza.

METODI STATISTICO-ATTUARIALI PER LA VALUTAZIONE DELLA RISERVA SINISTRI

Forniscono una valutazione globale per il portafoglio.

È possibile ripartire questa metodologia in due grandi categorie:

• METODI DETERMINISTICI

Tecniche (algoritmiche) nate su basi empiriche che forniscono una stima puntuale

• METODI BASATI SU MODELLI STOCASTICI

Alla chiave dell'esercizio si dà la valutare numeri aleatori e quindi formulare un modello probabilistico quando è dato per stimare i valori del modello; questi metodi consentono di avere informazioni molto più utili come quale stima avere (esperienza matematica, percentile) e quanto è valida tale stima;

Anche nella pratica attuariale è diventato importante fare riferimento a modelli stocastici.

SCHEMA GENERALE

Riassumendo riferimento ad una tipologia di sinistri con mercati caratteri di analogia. Supponiamo che la data di valutazione per questa tipologia di sinistri sia il 31/12/R

i: PERIODO DI ORIGINE di un sinistro

↳ l'anno entro il quale si trova la data di accadimento o di denuncia del sinistro, o la restituzione delle polizze che ha avuto il sinistro

anno, semestre, quadrimestre, ... (dipende da come si frazione l'anno)

I sinistri con periodo di origine i nonono essere pagati in:

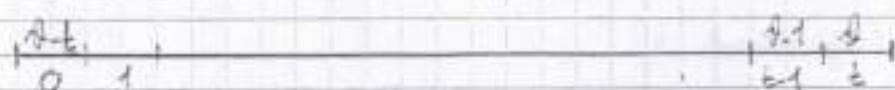
i, i+1, ..., i+t PERIODI DI PAGAMENTO

t: DURATA DEL PROCESSO DELLA RISERVA

Indichiamo con $j = 0, \dots, t$ PERIODO DI DIFFERIMENTO o SVILUPPO

↳ strettamente usate per i

Per indicare del particolare periodo J , si introduce una codifica numerica:



i sinistri di quest'anno dovrebbero essere chiusi in t , ma non si può escludere che qualche sinistro non sia chiuso in t , le cosiddette code

Si introducono quindi alcune GRANDEZZE DI INTERESSE per la valutazione delle riserve:

X_{ij} "grandezza di interesse" periodo di origine i , periodo di diff. j (anno)

- P_{ij} PAGAMENTI INCREMENTALI: importo complessivamente pagato con differimento j per sinistri con periodo (anno) di origine i (quindi importi pagati in $i+j$)

- C_{0j} : PAGAMENTI CUMULATI: importo complessivamente pagato per rinvio con periodo (anno) di origine $i =$ differimento $\leq j$

$$C_{0j} = \sum_{h=0}^j P_{0h}$$

- P_{ij}^* : (finalized) importo che è stato complessivamente pagato per rinvio con periodo di origine i e chiuso con differimento j (si tiene conto che possono esserci pagamenti intermedi)

- C_{ij}^* : importo complessivamente pagato per rinvio con periodo di origine i , chiuso con differimento $\leq j$

- $\frac{P_{ij}}{w_{ij}}$: pagamento incrementale rapportato ad una misura di inflazione
 w_{ij} può dipendere solo da i :

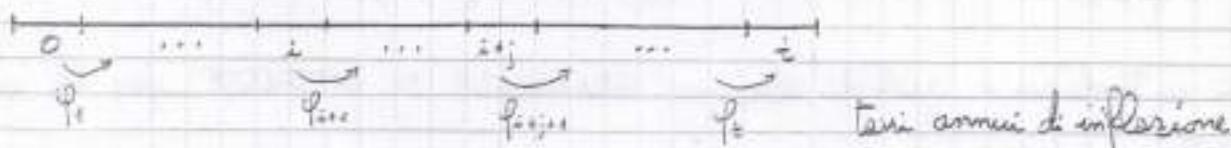
$$\frac{P_{ij}}{w_{ij}} = w_i \quad \begin{matrix} \text{anni di competenza dell'anno di origine } i \\ \text{num. dei rinvii} \end{matrix}$$

- $\frac{C_{ij}}{w_{ij}}$: pagamento cumulato rapportato ad una misura di inflazione

- P_{ij}^* : pagamento incrementale rettificato rispetto all'inflazione

P_{ij} è l'importo nominale mentre P_{ij}^* esprime P_{ij} tutti a valori correnti di un dato anno (*tipicamente t*)

possiamo definirlo come pagamento incrementale di rinvio con anno di origine t , effettuato con differimento j a valori correnti nell'anno t



$$P_{ij}^* = P_{ij} (1 + f_{i+1}) \cdot \dots \cdot (1 + f_t) \quad \text{dove l'inflazione è la CLAIM INFLATION}$$

$$C_{ij}^* = \sum_{h=0}^j P_{ih}^*$$

- I_{ij} : INCURRED LOSSES (= CLAIMS): stima effettuata alla data i della somma dei pagamenti $i+j$ del cato ultimo per i sinistri che hanno anno di origine i
 $I_{ij} = C_{ij} + \text{stima inventario per i pagamenti futuri di sinistri di origine } i \text{ che alla data } i+j \text{ sono ancora aperti}$
 → dato ormai, importo che è stato già pagato
- N_{ij} : numero di pagamenti effettuati con differenti j per sinistri con periodo di origine i
 num. di importi che di origine il importo P_{ij}
 N_{ij} danno origine a C_{ij}
- D_{ij} : numero di sinistri con periodo di origine i denunciati con diff. j
 e' possono essere molte altre grandezze di interesse

In generale si ha la grandezza di interesse X_{ij} e si può quindi costruire la tabella:

	0	1	...	j	...	$t-1$	t	
0	*	*			*	*		
1	*				*			
:								
i				X_{ij}				
:								
$t-1$	*	*						
t	*	*						

TABELLA DI RUN-OFF o SVILUPPO

* dati di cui si dispone

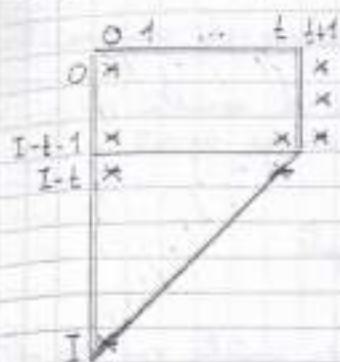
→ sulla diagonale $i+j=t$

→ TRIANGOLO DI RUN-OFF

in $i=t$ si ha un solo dato

Gli elementi che si trovano su una riga sono pagamenti che hanno lo stesso periodo di origine, su una stessa colonna hanno lo stesso periodo di differimento, sulla diagonale hanno lo stesso periodo di pagamento

• Tuttavia si può avere una struttura a trapezio ovvero a triangolo:



STRUTTURA A TRAPEZIO

mostrano OR_t : stima di quanto si deve ancora pagare per i rientri con periodo di origine 0 o precedenti non ancora chiusi in t , quindi con periodo di differenza $> t$

TS - 03-12-2013 (S4 n. 2)

MODelli STOCASTICI

gli X_{ij} grandezze di intersa sono considerati numeri aleatori

x_{ij} in \square e \square sono i valori osservati degli X_{ij} ($i+j \leq t$)

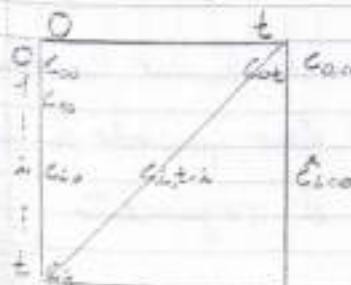
Viene introdotto un modello probabilistico per gli X_{ij} , tramite i dati α_{ij} si stimano i parametri del modello a partire dai quali si procede a stimare i valori non noti del triangolo inferiore

METODI DETERMINISTICI

si considerano gli X_{ij} come semplici numeri, ma nel triangolo di run-off e nel trapezio, per la parte non nota si introduce un modello deterministico e un algoritmo di stima

METODO DELLA CATENA (CHAIN LADDER) (deterministico)

$C_{ij} > 0$ pagamenti cumulati



OR_t : stima dell'importo da pagare dopo t per rientri del periodo con origine 0 e dato saggio (stima a gradi)

$$\text{proposizione } C_{0,0} = C_{0,t+1} = C_0 + R_t \quad \text{COSTO ULTIMO NEL PERIODO N}$$

ORIGINE 0

se $C_{0,0}$ foro noto si ha:

$$R_i = C_{0,0} - C_{0,t+1} \quad \text{riserva minima per scambi di origine i}$$

$$R = \sum_{i=0}^t R_i \quad \text{riserva di portafoglio}$$

$$\text{stima } \hat{C}_{0,0} \text{ per poter stimare } \hat{R}_i = \hat{C}_{0,0} - \hat{C}_{0,t+1}$$

e quindi $\hat{R} = \sum_{i=0}^t \hat{R}_i$

IPOTESI:

$$\frac{C_{0,j}}{C_{0,j+1}} \triangleq f_{j+1} \quad Y_{0,j}$$

sia non dipende da i

f: fattore di sviluppo = development factor o rate ratio

$$\Leftrightarrow C_{0,j} = C_{0,j+1} f_{j+1}$$

PROPOSIZIONE

$$\exists f_0, \dots, f_t \text{ t.c. } \frac{C_{0,j}}{C_{0,j+1}} = f_{j+1} \quad Y_{0,j} \Leftrightarrow \exists \alpha_0, \dots, \alpha_t, R_0, \dots, R_{t+1}$$

t.c. $R_{0,j} = \alpha_j \cdot r_j \quad Y_{0,j}$

DIM:

$$\Leftarrow C_{0,j} = \sum_{h=0}^j R_{0,h} = \sum_{h=0}^j \alpha_j \cdot r_h$$

$$= \alpha_j \sum_{h=0}^j r_h \quad Y_{0,j}$$

$$\frac{C_{0,j}}{C_{0,j+1}} = \frac{\alpha_j \sum_{h=0}^j r_h}{\alpha_{j+1} \sum_{h=0}^{j+1} r_h} \triangleq f_{j+1} \quad (\text{non dipende da i})$$

\Rightarrow

$$C_{0,j}$$

$$C_{0,j+1} = C_{0,j} \cdot f_j$$

$$C_{0,j+2} = C_{0,j+1} \cdot f_{j+1} = C_{0,j} \cdot f_j \cdot f_{j+1}$$

...

$$C_{0,t+1} = C_{0,t} \cdot f_t = C_{0,0} \prod_{h=0}^t f_h$$

$$C_{0,j} = C_{0,t+1} \cdot \frac{1}{\prod_{h=j}^t f_h} \quad Y_{0,j}$$

$$P_{ij} = C_{i,j} - C_{i,j-1} = C_{i,t+1} \cdot \frac{1}{\prod_{h=j}^t f_h} - C_{i,t+1} \cdot \frac{1}{\prod_{h=j+1}^t f_h}$$

$$= C_{i,t+1} \left[\frac{1}{\prod_{h=j}^t f_h} - \frac{1}{\prod_{h=j+1}^t f_h} \right] \triangleq \alpha_i \pi_j$$

$$\sum_{j=0}^{t+1} \pi_j = 1$$

$$\pi_j > 0$$

$\} \rightarrow$ si possono vedere gli π_j come aliquote

$$P_{ij} = \alpha_i \pi_j \quad \forall i, j$$

I pagamenti incrementali sono esprimibili con un modello multipletario: un fattore dipende solo dall'origine i e l'altro fattore dipende solo dal differimento.

il costo ultimo $C_{i,t+1}$ è un' aliquota (del costo ultimo) riferita al differ.

HIPOTESI FORTE: le aliquote non dipendono dall'origine i , sono fisse nel tempo \rightarrow si presupponga una stabilità nel processo di smontamento della riserva (il che nella pratica è poco plausibile, specie nel lungo periodo)

se vengono forniti $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_t$ stime di fattori di sviluppo allora si può riempire la tabella \rightarrow PROIEZIONE

$$\hat{C}_{i,t-i+1} = C_{i,t-1} \cdot \hat{f}_{t-i}$$

$$\hat{C}_{i,\infty} = C_{i,t-1} \cdot \prod_{h=t-i}^t \hat{f}_h$$

$$\hat{\pi}_i = \hat{C}_{i,\infty} - C_{i,t-1} = C_{i,t-1} \left(\prod_{h=t-i}^t \hat{f}_h - 1 \right)$$

Come stimare i fattori di sviluppo?

$$C_{i,j} = C_{i,j-1} \cdot f_{j-1} \quad \forall i, j$$

$$\sum_{i \in I} C_{i,j} = \sum_{i \in I} (C_{i,j-1} f_{j-1}) = f_{j-1} \sum_{i \in I} C_{i,j-1}$$

$$\hat{P}_{j-1} = \frac{\sum_{i=1}^t C_{i,j}}{\sum_{i=1}^t C_{i,j-1}}$$

$$\hat{P}_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}} = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1} + \frac{C_{t-j}}{C_{t-j,j-1}}}{\sum_{i=0}^{t-j} C_{i,j-1}}$$

media ponderata delle
 $\frac{C_0}{C_{0,j-1}}, \dots, \frac{C_{t-j}}{C_{t-j,j-1}}$

$$= \sum_{i=0}^{t-j} w_i^{(j)} \left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \right)$$

$$\sum_{i=0}^{t-j} w_i^{(j)} = 1 \quad w_i^{(j)} > 0$$

$$\min_{i=0, \dots, t-j} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \leq \hat{P}_{j-1} \leq \max_{i=0, \dots, t-j} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$$

OSSI:

$$P_{i,j} = \alpha_i \cdot n_j$$

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,j-1}} = \frac{n_j}{n_{j-1}} = \bar{P}_{j-1}$$

$$\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} = \frac{P_{i,j}}{P_{i,j-1}} \quad \forall i, j$$

$$C_{i,j} = C_{i,t+1} \cdot \frac{1}{\prod_{k=j}^t P_k} \stackrel{!}{=} b_j \quad b_{t+1} = 1 \quad b_j \leq b_{t+1}$$

CLAIMS DEVELOPMENT
PATTERN o FATTORI DI
GROSSING UP

si potrebbe stimare gli \hat{P}_{j-1} con:

$$\hat{P}_{j-1} = \sum_{i=0}^{t-j} \bar{w}_i^{(j)} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$$

oppure come media aritmetica

$$\bar{w}_i^{(j)} = \frac{1}{t-j+1}$$

stima worst case

$$\hat{P}_{j-1} = \max_{i=0, \dots, t-j} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$$

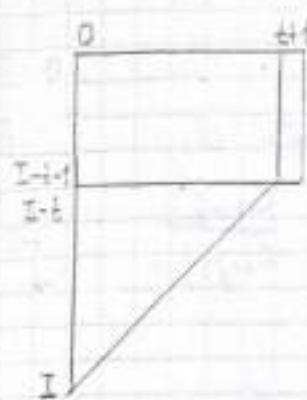
METHOD LINK RATIO

ipotesi base del metodo della catena

media ponderata di differenti

$$\hat{P}_t = \frac{C_{0,0,0}}{C_{0,t}} \quad C_{0,0,0} = C_{0,t} + \alpha R_t$$

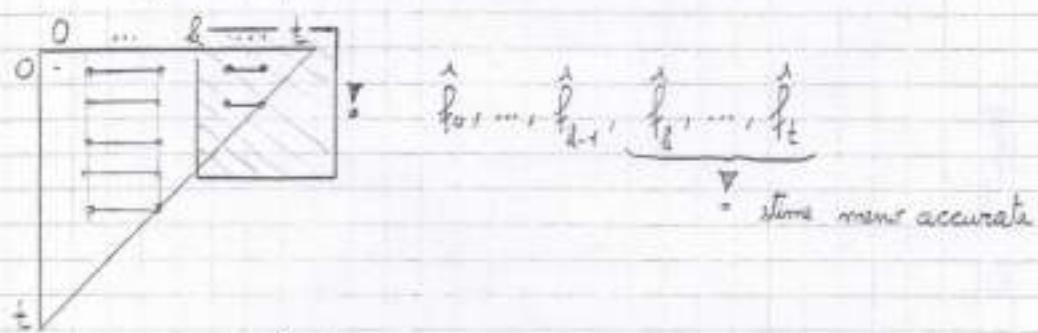
Per dati di tipo:



$$\hat{f}_t = \sum_{i=0}^{I-t-1} \bar{w}_i^{(t)} \frac{c_{i,t}}{c_{i,t}}$$

OSS:

Nella parte finale della tabella di run-off le stime sugli \hat{f}_j (gli ultimi) sono meno accurate perché fatti su un numero minore di dati.



$$h(j) = \alpha b^{j-k+1} \quad j = k-1, \dots, t$$

$$\min_{\alpha, b} \sum_{j=k-1}^t [h(j) - \hat{f}_j]^2 \rightarrow \hat{\alpha}, \hat{b}$$

$$\hat{f}_k^* = \hat{\alpha} \hat{b}, \quad \hat{f}_{k+1}^* = \hat{\alpha} \hat{b}^2, \dots$$

$$\ln h(j) = \alpha + \beta(j - k + 1)$$

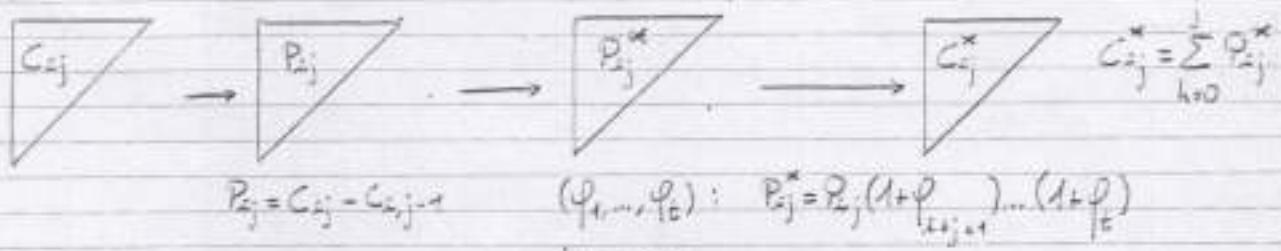
CRITICHE ALLA STABILITÀ DELLE ALQUOTE

$$P_j = \alpha + \gamma_j \quad Y_{ij}$$

Il modello intuisce una certa stabilità degli γ_j in quanto essi dipendono solo dal periodo di differimento e non dal periodo di origine, tuttavia può accadere che:

- non sono dati ambi nei tempi di interesse
- l'ancoraggio tende ad agire su diverse tipologie di affari (altri settori)
- l'inflazione non sia costante

Risolvendo il problema dell'infissione si può ricorrere al METODO DELLA
CATENA MODIFICATO



anni ammessi
di infissione

ma C_{ij}^* non è accettabile dunque base del metodo della catena

$$\sum_{i=0}^m C_{i,j-1}^* = f_{j-1} \rightarrow \hat{C}_{i,j-1}^*$$

$$\frac{O_i}{P_i} \rightarrow \hat{P}_{i,j}^* \xrightarrow{\text{STIMA } b_i} \hat{P}_{i,j} \quad \hat{P}_{i,j} = \hat{P}_{i,j}^* (1 + \varphi_{i+1}) \dots (1 + \varphi_{t+j})$$

$$\hat{R}_c = \sum_{j \geq t+1} \hat{P}_{i,j}$$

ai

copy

st

TECNICA ATTUARIALE
DELLE ASSICURAZIONI
DANNI

③

tintaUNITA'

METODO DI SEPARAZIONE o DI TAYLOR (ARITMETICO)• P_{ij}

modello: $P_{ij} = \alpha_i \cdot n_j \cdot 2^{i+j}$

dipende solo
dell'origine dipende solo
dal differimento dipende solo dal
periodo di pagamento

OSS:

$$\text{se } 2^{i+j} = 2 \quad Y_{ij} \Rightarrow P_{ij} = 2 \alpha_i n_j \quad \text{modello noto come CL (Chain Adder)}$$

Con 2^{i+j} si introduce un fattore dependente del anno di pagamento che va a disturbare la stabilità del processo di montante della riserva

DATI:

• $\boxed{P_{ij}}$ $i = 0, \dots, t$ $j = 0, \dots, t$ $i+j \leq t$

- una grandezza per i diversi anni di origine che dà una misura di esposizione
 - n_i numero rientri anno i
 - R_i premi di competenza anno i
 - altri
- R_0 riserva per rientri con origine 0 che verranno pagati dopo t

OBIETTIVO: Stimare $R_0 = \left(\sum_{j=t-i+1}^t P_{ij} \right) + R_i$

INTERPRETAZIONE DEI PARAMETRI:

si può sempre supporre senza perdita di generalità che $\sum_{j=0}^t n_j = 1$
poniamo $\alpha_i = m_i$

In ipotesi che il costo medio per rientro si sia mantenuto costante in termini reali ma sia aumentato come impatto monetario nominale per via di inflazione

se μ = costo medio per rientro a valori correnti da $i=0$

$$m_i = " " " " " " " " " " \mu + i \mu$$

$$2_{t+j} = \mu(1+\varphi_1) \dots (1+\varphi_{t+j}) \quad \varphi_i = \text{tasso di inflazione anno } i$$

$$= M P_{t+j} \rightarrow \text{tasse di adattamento (da 0 a } \infty)$$

$$P_{t+j} = \frac{m_j}{m_t} \mu P_{t+j} n_j$$

corte fine del periodo
di origine è espresso a valori
correnti dell'anno 0

corte ultime del periodo
di origine è espresso a
valori correnti dell'anno $t+j$

$$P_{t+j} = m_j n_j 2_{t+j}$$

ALGORITMO DI STIMA DEI PARAMETRI:

(1) dai dati disponibili nella tabella di riferimento si vanno a stimare:

$$n_0, \dots, n_t, 2_{t+1}, 2_{t+2}, \dots$$

$$\hat{P}_{t+j} = m_j \hat{n}_j \hat{2}_{t+j} \quad m_j \text{ è un dato}$$

\hat{n}_j è dato stimato

mancano $\hat{2}_{t+j}$

(2) stimare $2_{t+1}, 2_{t+2}, \dots$

(3) stimare n_t

(1)

consideriamo $\frac{P_{t+j}}{m_j} \triangleq s_{t+j} \quad t+j \leq t \rightarrow s_{t+j} \text{ è un dato}$

il corrispondente di s_{t+j} è $n_j 2_{t+j}$

	0	1	...	$t-1$	t
0	$n_0 2_0$	$n_1 2_1$	\dots	$n_{t-1} 2_{t-1}$	$n_t 2_t$
1	$n_0 2_1$	$n_1 2_2$	\dots	$n_{t-1} 2_{t-1}$	$n_t 2_t$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
i	$n_0 2_i$	$n_1 2_{i+1}$	\dots	$n_{t-1} 2_{t-i}$	$n_t 2_{t-i}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
t	$n_0 2_t$	$n_1 2_{t+1}$	\dots	$n_{t-1} 2_{t+t-1}$	$n_t 2_{t+t}$

	0	1	...	$t-1$	t
0	$n_0 2_0$	$n_1 2_1$	\dots	$n_{t-1} 2_{t-1}$	$n_t 2_t$
1	$n_0 2_1$	$n_1 2_2$	\dots	$n_{t-1} 2_{t-1}$	$n_t 2_t$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
i	$n_0 2_i$	$n_1 2_{i+1}$	\dots	$n_{t-1} 2_{t-i}$	$n_t 2_{t-i}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
t	$n_0 2_t$	$n_1 2_{t+1}$	\dots	$n_{t-1} 2_{t+t-1}$	$n_t 2_{t+t}$

In ipotesi che $\sum_{j=0}^t n_j = 1$

nella classe tutti gli elementi hanno lo stesso π_i

gli elementi che si trovano su una stessa diagonale hanno tutti lo stesso fattore λ_i

ALGORITMO

- si guardano gli elementi dell'ultima diagonale degli α_{ij} e dell'ultima diagonale degli $\pi_j \lambda_{ij}$ e si fanno le somme:

$$\sum_{i+j=t} \alpha_{ij} \quad \sum_{j=0}^t (\pi_j \lambda_j) = \lambda_t \quad \sum_{j=0}^t \pi_j = \hat{\pi}_t$$

$$\rightarrow \hat{\lambda}_t = \frac{\sum \alpha_{ij}}{\sum_{i+j=t} \pi_j}$$

Ad es., $\pi_t \lambda_t$

$$\hat{\pi}_t : \hat{\pi}_t \hat{\lambda}_t = \delta_{0t}$$

$$\rightarrow \hat{\pi}_t = \frac{\delta_{0t}}{\hat{\lambda}_t}$$

- si guarda alle diagonali precedenti

$$\sum_{i+j=t-1} \alpha_{ij} \quad \sum_{j=0}^{t-1} (\pi_j \lambda_{t-1}) = \lambda_{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} \pi_j = \lambda_{t-1} (1 - \hat{\pi}_t)$$

$$\rightarrow \hat{\lambda}_{t-1} = \frac{\sum \alpha_{ij}}{1 - \hat{\pi}_t}$$

$$\hat{\pi}_{t-1} : \lambda_{0,t-1} + \lambda_{1,t-1} = \hat{\pi}_{t-1} (\hat{\lambda}_{t-1} + \hat{\lambda}_t)$$

$$\rightarrow \hat{\pi}_{t-1} = \frac{\delta_{0,t-1} + \delta_{1,t-1}}{\hat{\lambda}_{t-1} + \hat{\lambda}_t}$$

- passo h

$$\lambda_h = \frac{\sum_{i+j=h} \alpha_{ij}}{1 - \sum_{i+j=t} \pi_j}$$

$$\pi_h = \frac{\sum_{i=0}^{t-h} \alpha_{ih}}{\sum_{i=0}^h \hat{\lambda}_i}$$

ora abbiamo $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_t, \hat{\lambda}_{t+1}, \dots, \hat{\lambda}_h$

mentre le stime di $\lambda_1, \dots, \lambda_{t+h}$

(2)

- consideriamo $\frac{\hat{z}_t}{\hat{z}_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} = (1+\varphi_t)$ con le tute deflazioni tra $t-1$ e t



- partendo dai $\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_0}, \dots, \frac{\hat{z}_t}{\hat{z}_{t-1}}$ che abbiamo stimato

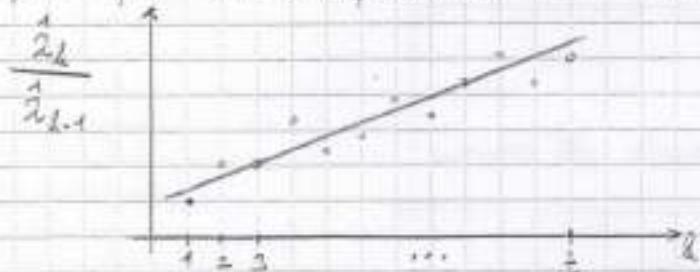
→ possiamo passare a $(1+\hat{\varphi}_1), \dots, (1+\hat{\varphi}_t)$

→ stime sui turi di inflazione passati

si potrebbero avere le stime sull'inflazione futura (fornite da fonti esterne) per stimare

- i \hat{z}_{t+h} futuri: $\frac{\hat{z}_{t+h}}{\hat{z}_t} = 1 + \hat{\varphi}_{t+h}$

oppure base delle estrapolazioni dei dati passati (o modello lineare)



$$f(t) = a + bt$$

$$\min_{a,b} \sum_{t=1}^T \left(f(t) - \frac{\hat{z}_t}{\hat{z}_{t-1}} \right)^2 \rightarrow \hat{a}, \hat{b}$$

$$\frac{\hat{z}_{t+h}}{\hat{z}_t} = f(t+h) \rightarrow \hat{z}_{t+h} = f(t+h) \hat{z}_t$$

a seconda di come si dispongono i punti sul grafico si valuta che tipo di modello adattare (lineare, esponenziale, ...)

(3) stimare la coda \hat{R}_t

in ipotesi che: $\hat{R}_t = P_{t+h+1} = m_z r_{t+h} \hat{z}_{t+h+1}$

(tutto ciò che non è stato pagato con differimento t lo si paga con $t+1$)

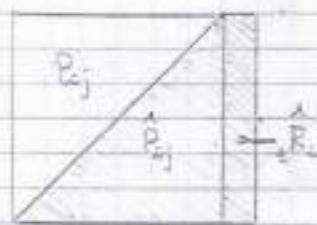
nell'ipotesi (2) si procede fino a \hat{z}_{T+h+1}

non abbiamo stimato r_{t+h+1}

ma $\hat{R}_t = m_z r_{t+h} \hat{z}_{t+h+1}$

$$\frac{\hat{R}_t}{R_t} = \frac{m_z r_{t+h} \hat{z}_{t+h+1}}{m_z r_{t+h} z_{t+h+1}} \Rightarrow \hat{R}_t = \frac{m_z}{m_z} \cdot \frac{\hat{z}_{t+h+1}}{z_{t+h+1}} R_t$$

$$\rightarrow \hat{R}_i = \frac{m_i}{m} \cdot \frac{\hat{L}_{i+k+1}}{\hat{L}_{i+k}} \cdot \hat{R}_0$$



$$\hat{P}_i = m_i \hat{L}_i \hat{L}_{i+k} \quad i \leq t$$

$$\hat{R}_i = \left(\sum_{j=k-i+1}^k \hat{P}_j \right) \cdot \hat{R}_0$$

METODO DEL LOSS RATIO SEMPLICE

$$i = 0, \dots, t$$

dipendenza di conoscere i PC_i : premi di competenza

// RICHIAMO: PREMI DI COMPETENZA

$$\begin{array}{c} t \\ \vdots \\ 0 \end{array} \quad PC_i = P(1) + R_p(0) - R_p(1)$$

premi destinati a coprire i rischi dell'esercizio

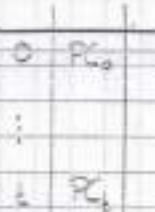
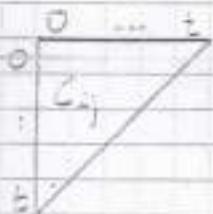
//

$C_{i,00} \neq C_{i,i+k}$ = costo complessivo dei rischi con origine in

punto $L_i = \frac{C_{i,00}}{PC_i}$ ULTIMATE LOSS RATIO prezzo di origine in

$$C_{i,00} = L_i \cdot PC_i$$

DATI:



L_i ultimate loss-ratio in $i = 0, \dots, t$

dati esterni davanti: - del mercato
- da un modello
- altro...

$$\hat{C}_{i,00} = \hat{L}_i \cdot PC_i = L_i \cdot PC_i$$

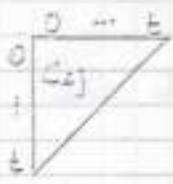
$$\hat{L}_i = l_i$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,00} - C_{i,i+k} = \hat{L}_i \cdot PC_i - C_{i,i+k}$$

Questo metodo è utilizzabile in caso ci siano pochi dati disponibili (in alternativa molti dati esterni e poche informazioni sulla compagnia)

METODO DI BORNHEUTTER - FERGUSON

DATI:



0	μ_i	l_{ij}
:	:	:
t	μ_t	l_t

l_i : ultimato link ratio (valo esterni).

MODELLO:

$$C_{ij} = \mu_i b_j \quad \mu_i = C_{i00}$$

b_j : aliquota del costo ultimo per pagamento con differimento minore uguale a j

non dipende da i anno di origine, ma solo da j

$$b_j \leq b_{j+1}, \quad b_{j+1} = b_{\infty} = 1$$

$$R_i = C_{i00} - C_{i,i-1}$$

$$= \mu_i - \mu_i b_{i-1} = \mu_i (1 - b_{i-1}) \quad i = 0, \dots, t$$

STIMA:

- μ_0, \dots, μ_t (dati esterni)

- $b_0, \dots, b_t, b_{t+1} = 1$

$$\hat{\mu}_i = \hat{l}_i \mu_i = l_i \mu_i \quad \text{stima che non dipende da } C_{ij}$$

OSSI: nel diagramma ladder

$$C_{ij} = C_{i00} \frac{1}{\prod_{k=j}^t l_k}$$

$$\hat{b}_{ij}^{cl} = \frac{1}{\prod_{k=j}^t l_k} \quad \text{si stimano i link ratio con il metodo della catena}$$

$$C_{i00}^{DF} = C_{i,t+1} + R_i$$

$$= C_{i,t+1} + \underbrace{\hat{\mu}_i (1 - \hat{b}_{i,t+1}^{cl})}_{l_i \mu_i (1 - \hat{b}_{i,t+1}^{cl})}$$

$$l_i \mu_i (1 - \hat{b}_{i,t+1}^{cl})$$

$$\text{perciò } i_1 < i_2 \Rightarrow \frac{1}{t} - i_1 > \frac{1}{t} - i_2$$

$$\frac{\hat{r}_{i+1}^{cc}}{a_t - i_{t+1}} > \frac{\hat{r}_t^{cc}}{b_t - i_t}$$

$$1 - \frac{\hat{r}_t^{cc}}{b_t - i_t} < 1 - \frac{\hat{r}_{t+1}^{cc}}{a_t - i_{t+1}}$$

qui si evita il pericolo di sovramonto della riserva oraria perché si da alla stima esterna

TS-09-12-2013 (58 ore) 11^ settimana

$$\hat{R}_i^{cc} = C_{i,t+1} \left(\prod_{h=t+1}^t \hat{f}_h^{-1} \right)$$

$$\hat{C}_{i+1}^{cc} = C_{i+1,t+1} \left(\prod_{h=t+1}^t \hat{f}_h \right)$$

La riserva rintracciata nel CL dipende da $C_{i,t+1}$ ultimo pagamento

→ si rischia di sovramontare la riserva se l'ultimo pagamento è piccolo
(cioè può accadere specialmente verso la fine, quando manca poco da pagare)

Il secondo fattore $(\prod_{h=t}^t \hat{f}_h)^{-1}$ aggiusterebbe lo che se le ipotesi sottostanti al metodo della catena forse già tenute conto ($P_h = \text{cost.}$, $\mathbb{E} r_h = 1$), ma queste ipotesi sono giuntate fatte

$$\hat{R}_i^{cc} = \mu_i (1 - \hat{b}_{i+1}^{cc})$$

\checkmark P.R. → ricavato dai dati delle tabelle di run-off
 μ_i stima esterna

In questo modo la riserva non prende l'ultimo dato disponibile ma una stima esterna.

$$\hat{C}_i^{cc} = C_{i,t+1} + \mu_i (1 - \hat{b}_{i+1}^{cc})$$

Il costo ultimo tiene conto dei dati delle tabelle di run-off e della stima esterna.

I dati esterni perdono però man mano che ci si avvicina al completo run-off.

CREDIBLE CLAIMS RESERVING METHODS

$$\hat{C}_{i+1} = \alpha_1 \hat{C}_{i+1}^{CL} + (1-\alpha_1) \hat{C}_{i+1}^{BP}$$

dipende da



dipende da

$$\hat{C}_i \approx \hat{\mu}_i$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i+1} - \underline{C}_{i+1}$$

$$= \alpha_1 C_{i+1} + (1-\alpha_1) C_{i+1}$$

$$= \alpha_1 \hat{R}_i^{CL} + (1-\alpha_1) \hat{R}_i^{BP}$$

come scegliere gli α_i ?

$$\text{BENKTANDER - HONINEN: } \alpha_i = \hat{b}_{i+1}$$

tanto più la generazione è vicina al run-off tanto più pesa si dà alla \hat{R}_i^{CL}

METODO DI FISHER-LANGE

si usa per proiettare sia il numero di pagamenti che i pagamenti

MODELLO:

$$P_{ij}^* = m_{ij} \cdot \tau_j^*$$

m_{ij} = numero di sinistri con periodo di origine i chiusi con differimento j

$$\tau_j^* = \frac{P_{ij}^*}{m_{ij}}$$

dipende solo dal differimento j;

è la quota di P_{ij}^* indipendentemente attribuita a ciascuno dei sinistri con origine i chiusi in $i+j$

guardando a τ_j^* si nota una discrepanza tra numeratore e denominatore:

- un sinistro chiuso in $i+j$ potrebbe essere stato pagato parzialmente in periodi precedenti

- un pagamento fatto in $i+j$ non è detto chiude il sinistro in $i+j$

DATI:

$$\bullet P_{ij}^*$$

$$P_{ij} \rightarrow P_{ij}^* = P_{ij}(1+\varphi_{i+1}) \dots (1+\varphi_j)$$

$$i+j \leq t$$

~~m_{ij}~~ \rightarrow numero dei sinistri dell'assalto i

~~i < t~~

$\therefore R_i = 0$ (min w rows code)

Per proiettare i P_{ij} servono:

- La proiezione dei m_{ij}

- La stima dei $\hat{\tau}_j^*$

MODELLO A per m_{ij}

$$m_{ij} = \phi_j m_i \quad \forall i, j \quad (\text{modello moltiplicativo})$$

$$\rightarrow \phi_j = \frac{m_{ij}}{m_i} \quad \begin{array}{l} \text{SPEED OF FINALIZATION} \\ \text{quota di sinistri con origine i chiusi in } \hat{\tau}_j^* \\ \text{non dipende da } i \end{array}$$

①

$$\text{funtz: } \sum_{i \in I} m_{ij} = \sum_{i \in I} \phi_j m_i$$

$$= \phi_j \sum_{i \in I} m_i \rightarrow \phi_j = \frac{\sum_{i \in I} m_{ij}}{\sum_{i \in I} m_i}$$

$$\hat{\phi}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} m_{ij}}{\sum_{i=0}^{t-j} m_i} \quad (m_{i,t-j} \text{ è sulla diagonale})$$

②

stima di $\hat{\phi}_j$ usando il CL per f_{ij} (f_{ij} ipotesi d base sono le stime, modello moltiplicativo)

$$\frac{m_{ij}}{m_{i,t-j}} = \frac{\phi_j m_i}{\phi_{j-1} m_i} = \frac{\phi_j}{\phi_{j-1}} \stackrel{a}{=} f_{j-1}$$

Con entrambe le variazioni la somma dei dati e della stima sul numero di sinistri è diversa dal numero totale di sinistri

$$m_i + \hat{m}_i \neq m_i$$

Fischiata si prova di non considerare gli m_i e quindi di stimarli con il CL: $\hat{\phi}_j \hat{m}_i = \hat{f}_{ij} \quad i \in I$

OSS:

$$\text{valga } m_{ij} = \phi_j m_i \quad \forall i, j$$

$$\text{consideriamo: } \sum_{h=1}^t m_{ih} = \sum_{h=1}^t (\phi_h m_i) = m_i \sum_{h=1}^t \phi_h$$

$$\frac{m_{ij}}{\sum_{h=1}^t m_{ih}} = \frac{\phi_j m_i}{m_i \sum_{h=1}^t \phi_h} = \frac{\phi_j}{\sum_{h=1}^t \phi_h} \triangleq \gamma_j$$

$$\Rightarrow m_{ij} = \gamma_j \sum_{h=1}^t m_{ih}$$

$$= \gamma_j [m_i - \sum_{h=0}^{j-1} m_{ih}]$$

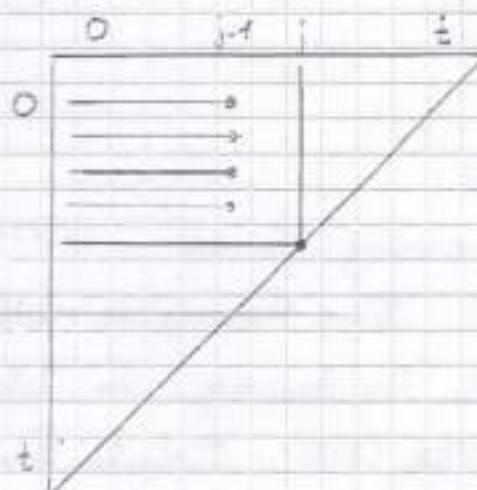
MODELLO B per m_{ij}

$$m_{ij} = \gamma_j [m_i - \sum_{h=0}^{j-1} m_{ih}]$$

$$\sum_{i \in I} m_{ij} = \sum_{i \in I} (\gamma_j [m_i - \sum_{h=0}^{j-1} m_{ih}])$$

$$= \gamma_j \sum_{i \in I} (m_i - \sum_{h=0}^{j-1} m_{ih})$$

$$\hat{\gamma}_j = \frac{\sum_{i \in I} m_{ij}}{\sum_{i \in I} (m_i - \sum_{h=0}^{j-1} m_{ih})}$$



PROIEZIONE m_{ij} :

$$\hat{m}_{i, t-i+1} = \hat{\gamma}_j (m_i - \sum_{h=0}^{t-i} m_{ih})$$

$$m_{i, t-i+1} = \gamma_{t-i+1} (m_i - \sum_{h=0}^{t-i} m_{ih})$$

$$\Rightarrow \hat{m}_{i, t-i+1} = \hat{\gamma}_{t-i+1} (m_i - \sum_{h=0}^{t-i} m_{ih} - \hat{m}_{i, t-i+1})$$

$$\hat{m}_{ij} = \hat{\eta}_j \left(m_i - \sum_{h=0}^{t-i} m_{ih} - \sum_{h=t-i+1}^t \hat{m}_{ih} \right) \quad i+j > t$$

si può dimostrare che: $\sum_{h=0}^{t-i} m_{ih} + \sum_{h=t-i+1}^t \hat{m}_{ih} = m_i$

STIME DI $\hat{\eta}_j^*$:

$$P_j^* = m_{ij} \hat{\eta}_j^*$$

$$\sum_{i \in I} P_j^* = \hat{\eta}_j^* \sum_{i \in I} m_{ij}$$

$$\rightarrow \hat{\eta}_j^* = \frac{\sum_{i \in I} P_j^*}{\sum_{i \in I} m_{ij}}$$

PROIEZIONE \hat{P}_{ij}^* :

$$\hat{P}_{ij}^* = \hat{m}_{ij} \hat{\eta}_j^* \quad i+j > t$$

$$\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ij}^* (1 + \varphi_{i+1}) \dots (1 + \varphi_{t+i})$$

$$\hat{R}_i = \sum_{j=t-i+1}^t \hat{P}_{ij}$$

BIBLIOGRAFIA:

- "Claim Reserving Manual", INSTITUTE AND FACULTY OF ACTUARIES
- TAYLOR (1986), "Claim Reserving in Non-Life Insurance", NORTH HOLLAND
- TAYLOR (2000), "Loss Reserving. The Actuarial Perspective", KLUWER
- WÜTHRICH, MERZ (2008), "Stochastic Claim Reserving Methods in Insurance", WILEY

RISERVE PER SINISTRI IBNR (INCURRED BUT NOT REPORTED o TARZIUNI)

alla chiusura dell'esercizio si deve fare una stima di quanto si dovrà pagare in futuro per sinistri accaduti ma non ancora denunciati.



Un esempio: molti sinistri e eventi catastrofici che si verificano in prossimità della chiusura dell'esercizio.

Cos' accadeva che lo stesso sinistro non riguardava l'assicurato (es: fatti o danni nella seconda casa), oppure che il sinistro produce dei danni che non si manifestano molto tempo dopo (es: esposizione all'ambiente).

Altri casi:

- COASSICURAZIONE: un pool di assicuratori si accorda per coprire una quota di rischiamenti comuni

compagnie A copre il 70%

" B " = 20%

" C " " 10%

A ha il contatto con gli assicurati (delega a pochi)

L'assicurato denuncia ad A, se A non comunica subito per B e C il sinistro è IBNR

- RIASSICURAZIONE XL: un sinistro denunciato è stimato avere oltre la priorità, quindi la cedente non comunica il sinistro al riassicuratore; se poi però ci si rende conto che la priorità è stata superata allora il sinistro è IBNR per il riassicuratore

ESEMPIO: RCA

90% dei sinistri denunciati nell'esercizio

4% " " sono IBNR, ma solitamente sono quasi tutti denunciati nei primi mesi dell'esercizio successivo.

TS-10-12-2013 (59)

2

t

ci si pone alla chiusura dell'esercizio

OSS:

DIFERIMENTO DEI PAGAMENTI

	0	1	...	t	t+1
0					
1					
2					
3					
4					
5					
=					

C_{ij}

\hat{C}_{i00}

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i00} - C_{i,t+1}$$

$$\hat{R} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{R}_i$$

se l'anno di origine corrisponde all'anno di accadimento del sinistro

$\Rightarrow \hat{C}_{\text{IBNR}}$ contiene in sé la componente IBNR

è la stima di quanto si pagherà in futuro per sinistri accaduti nell'anno i

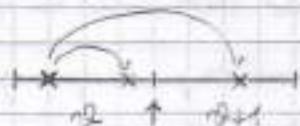
se l'anno di origine è l'anno di denuncia del sinistro

$\Rightarrow \hat{C}_{\text{IBNR}}$ è la stima del corte complessivo per sinistri denunciati in i
i sinistri IBNR non sono valutati nella riserva

METODI DI STIMA DELLA RISERVA IBNR

(1) Durea differimento della denuncia

il sinistro viene denunciato nello stesso esercizio o al massimo in quello successivo



$n_{(i-1)}^{\text{IBNR}}$ = numero di sinistri IBNR alla chiusura dell'esercizio $i-1$

$m_{(i-1)}$ = " totale di sinistri " " " " " $i-1$

$C_{\text{IBNR}}^{*} c_{(i-1)} =$ stima del corte medio per sinistri IBNR alla chiusura di $i-1$ valutato a
valori correnti alla chiusura di $i-1$

IPOTESI

• $\frac{n_{(i-1)}^{\text{IBNR}}}{m_{(i-1)}} = p$ la proporzione di sinistri IBNR è costante (es: 4% in PIA)

• $C_{\text{IBNR}}^{*} c_{(i-1)} = C^*$ il corte medio è costante

Supponiamo di disporre di dati per un certo numero di anni

... , $i-2$, $i-1$, i ,

$n_{(i-h)}^{\text{IBNR}}$ $h=1, 2, \dots$ alla chiusura di $i-h$ è un dato, è conosciuto

$m_{(i-h)}$ " " " " " " "

$$\rightarrow \hat{p} = \sum_h w_h \frac{n_{(i-h)}^{\text{IBNR}}}{m_{(i-h)}} \quad \text{con } \sum_h w_h = 1 \quad \text{per non negativi da sommare}$$

$w_h > 0$

$$m_{\text{BSR}}(t) = pm(t) = p(m_{\text{BSR}}(t) + m_0(t))$$

$m(t)$ numero di vinti denunciati
in t

$$m_{\text{BSR}}(t)(1-p) = pm_0(t)$$

$$m_{\text{BSR}}(t) = \frac{1-p}{1-p} m_0(t) \rightarrow \hat{m}_{\text{BSR}}(t) = \frac{1}{1-p} m_0(t)$$

$$\sum_h w_h^* C_{\text{BSR}}(t-h) = \hat{C}^* \quad \sum_h w_h^* = 1 \quad w_h^* \geq 0$$

$$\hat{R}_{\text{BSR}} = \hat{m}_{\text{BSR}}(t) \hat{C} \quad \hat{C}^* \rightarrow \hat{C} \text{ tenendo conto dell'inflazione}$$

(2)

d differenza massima della denuncia rispetto l'anno di accadimento

$$\frac{d-d}{0}, \dots, \frac{d-1}{d-1}, \frac{d}{d}$$

furto l'anno i $i=0, \dots, d$

denuncia in $i+j$ $i+j \leq d$, j differenza della denuncia

I_{ij}^{BSR} stima alla diurna di t del cato ultimo dei vinti avvenuti nell'anno i
 BSR alla diurna di i e denunciati con differenza j

		DIFERIMENTO DENUNCIA		
		1	...	d
A	0	I_{01}^{BSR}	\dots	I_{0d}^{BSR}
	1	I_{11}^{BSR}	\dots	I_{1d}^{BSR}
B	2	I_{21}^{BSR}	\dots	I_{2d-2}^{BSR}
	3	I_{31}^{BSR}	\dots	I_{3d-3}^{BSR}
C	d-1	$I_{d-1,1}^{\text{BSR}}$	\dots	$I_{d-1,d-1}^{\text{BSR}}$
	d		\vdots	

può accaderci:

$$\frac{I_{ij}^{\text{BSR}}}{I_{i,j-1}^{\text{BSR}}} \triangleq f_{i,j-1} \quad \text{cioè il rapporto non dipende da } i \\ - \text{ipotesi dell'algoritmo per il C} \\ \text{si può sfruttare quel metodo}$$

si ritrovano gli $\hat{I}_{ij}^{\text{BSR}}$ $i+j > d$

per la riga d si forma una media a partire delle colonne rappresentanti

→ tutti i metodi utilizzati per la stima della nuova vinta potrebbero essere utilizzati per la stima della nuova BSR quindi si

ritengono addirittura le ipotesi previste dai modelli

(3)

si introduce una grandezza che fornisce una misura di esposizione al fenomeno IBNR

considera l'anno i , la misura di esposizione riferita all'anno i . La misura $H(i)$ può avere:

• base sui premi

- monetari (premi di competenze, premi contabilizzati,...)
- non monetari (num di polizze rinnovate,...)

• base sui sinistri

- monetari (importo pagato per sinistri denunciati nell'esercizio, importo riservato per sinistri dell'esercizio già denunciati,...)
- non monetari (numero di sinistri non denunciati)

Esempi:

• breve differimento della denuncia (max 1 anno)



ipotesi:

$$\frac{I_{t-h}}{H(t)} = \hat{p} \quad \text{il rapporto ora dipende da } i, \text{ è proporzionale alla misura di esposizione}$$

stima $\hat{p} = \sum w_j \frac{I_{t-h,j}}{H(t-h)}$

$$\Rightarrow \hat{I}_{t-h} = \hat{p} H(t)$$

METODO DI TARRELL

$$R(t) = \frac{I_{t-h}}{H(t)} = \frac{m^{(t-h)}_{t-h+1}}{m^{(t-h)}_{t-h+1}} \cdot \frac{C^{(t)}}{C^{(t-h)}}$$

(1) $m^{(t-h)}_{t-h+1}$ = num. dei sinistri denunciati negli ultimi S mesi dell'esercizio t

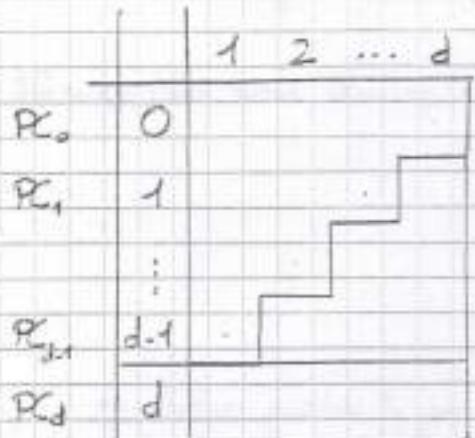
(2) $C^{(t-h)}$ = stima del costo medio per un sinistri denunciato con età $t-h$

$$H(z) = m_{z,z+1,z}^{(2)} C_{z,z+1,z}^{(2)}$$

stima del costo complessivo per sinistra denuncia
negli ultimi 3 mesi dell'anno i

$$\frac{1}{\rho} = \frac{I_{1,2-1,1}^{\text{EUR}}}{H(2-1)}$$

- d differenza massima delle denunce rispetto l'anno di accadimento



$$\frac{I_{1,j}^{\text{EUR}}}{PC_j} = \pi_j$$

$$I_{1,j}^{\text{EUR}} = \pi_j \cdot PC_1$$

$$\hat{\pi}_j = \sum_{i=0}^{d-1} \frac{I_{1,j}^{\text{EUR}} w_i}{PC_1} \quad \sum w_i = 1 \quad w_i \geq 0$$

stimare gli $\hat{\pi}_j$ si può riempire il triangolo inferiore

$$i+j > d$$

$$\hat{I}_{1,j}^{\text{EUR}} = \hat{\pi}_j \cdot PC_1$$

$$\sum_{j=d-i+1}^d (\hat{\pi}_j \cdot PC_1) = \hat{R}_{\text{EUR}, i}$$

TS-13-12-2013 | (6) o.m.

REQUISITI DI SOLVIBILITÀ

- È fondamentale che le imprese di assicurazione siano in grado di far fronte agli impegni assunti
- Nell'impresa assicuratrice si ha l'inerzia del processo costi-rischi
 - è necessario un controllo pubblico sulla attività assicurativa
 - è necessaria una Regolazione assicurativa
- Tutto ciò è privato a titolo degli assicurati.

Sono meccanismi delle garanzie finanziarie:

- RISERVE TECNICHE (capital reserves da impegno, è un debito verso gli assicurati)

- CAPITALE LIBERO DA IMPEGNI (in Italia con detto MARGINE DI SOLVIBILITÀ)

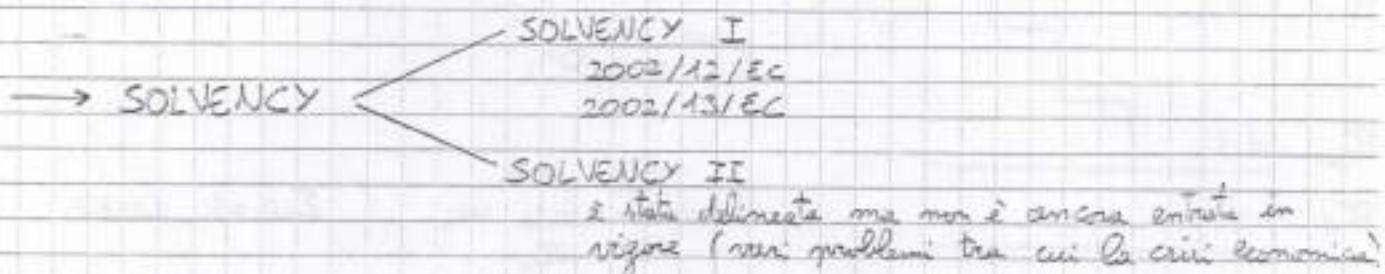
quali sono da bilancio?
quale quantità minima?
quali altri ammessi?)

} → il Regolatore ha definito tutto ciò!

DIRETTIVA EU 23/239/CE

- rossi di bilancio
- entità minima
- attività a copertura
- azioni dell'autorità di vigilanza (AV)

Tuttavia tali misure sono risultate essere inadeguate e quindi sono state approvate delle modifiche nel tempo:



Attualmente è attiva SOLVENCY I

MARGINE DI SOLVIBILITÀ DISPONIBILE (MSD)

che era una anticipo minima, detta MARGINE DI SOLVIBILITÀ RICHIESTO (MSR)

Se una compagnia ottiene dall'AV la licenza ad operare in ambito europeo deve entro l'anno $t+1$ avere al suo disposizione la soffia minima prevista alla fine dell'anno t

$$\begin{array}{c} \rightarrow t \quad t+1 \\ | \qquad | \\ \text{MSD}(t+1) \\ \uparrow \\ \text{MSR}(t+1) \end{array}$$

MSD($t+1$): patrimonio dell'impresa libero da qualsiasi onere possibile nel bilancio di t è composto da tre parti:

I [PATRIMONIO NETTO

II [capitali con diverse rettifiche

III [" " rettifiche, richiedendo l'autorizzazione dell'AV in via transitoria

es: del proprietario DIPOL

$$\Delta = + \begin{cases} \text{CAP. SOCIALE VERSATO} \\ \text{RISERVE PATRIMONIALI} \\ \text{RIPORTO DI UTILI} \end{cases} - \begin{cases} \text{PROVVISORI DI ACQUISIZIONE} \\ \text{ATTIVI IMMATERIALI} \\ \text{AZIONI o QUOTE PROPRIE} \\ \text{PERDITE DI ESERCIZIO} \\ \text{PERDITE PORTATE A NUOVO} \end{cases}$$

MSR($\alpha+1$)

• importo calcolato in relazione ai premi

$P^*(\alpha)$ premi lordi contabilizzati nell'esercizio α

$$A = \min \{ P^*(\alpha), \alpha \} \quad B = P^*(\alpha) - A$$

$$\alpha = 57.500.000 \text{ €}$$

$$0.18A + 0.16B = \begin{cases} 0.18P^*(\alpha) & P^*(\alpha) \leq \alpha \\ 0.18\alpha + 0.16P^*(\alpha) - 0.16\alpha & P^*(\alpha) > \alpha \end{cases}$$

$$0.16P^*(\alpha) + 0.02\alpha < 0.18P^*(\alpha)$$

per non penalizzare le imprese con grande volume di affari

$P^*(\alpha)$ per i ramo 11, 12, 13 (R.C. aeromobili, R.C. marittimi, R.C. generali)

$$P^*(\alpha) = \sum_{i=11,12,13} P_i^*(\alpha) + \sum_{i=11,12,13} P_i^*(\alpha) (1+0.50)$$

↑ è prevista una maggiorazione del 50% perché tali rami sono più rischiosi

• importi calcolati in relazione ai risconti

$S(\alpha)$ media delle competenze risparmiate degli esercizi α , $\alpha-1$, $\alpha-2$

$$S(\alpha) = \frac{1}{3} (CS(\alpha) + CS(\alpha-1) + CS(\alpha-2))$$

CS = competenza risparmio

$$CS(\alpha) = S(\alpha) + R_s(\alpha) - R_s(\alpha-1) \quad (-\text{versamento delle riserve})$$

versamento
risparmiando

riserva risparmio
fine $\alpha-1$

riserva risparmio
fine $\alpha-1-\alpha$

$$= \frac{1}{3} [S(\alpha) + R_s(\alpha) - R_s(\alpha-1) + S(\alpha-1) + R_s(\alpha-1) - R_s(\alpha-2) + S(\alpha-2) + R_s(\alpha-2) - R_s(\alpha-3)]$$

$$\bar{S}(t) = \frac{1}{3} [S(t) + S(t-1) + S(t-2) + R_s(t) - R_s(t-3)]$$

Se l'impresa esce da esclusività e prevalentemente nei rami grandi, tempi, ghi, eccitò la media si fa negli ultimi 7 anni.

$$A_{\min} \{ \bar{S}(t), a^* \} \quad B^* = \bar{S}(t) - A^*$$

$$a^* = 40'300'000$$

$$0.26A + 0.23B = \begin{cases} 0.26\bar{S}(t) & \bar{S}(t) \leq a^* \\ 0.23\bar{S}(t) + 0.03a^* & \bar{S}(t) > a^* \end{cases}$$

$L < 0.26\bar{S}(t)$

per non penalizzare le imprese con grandi volumi di affari

$$\bar{S}^{(z)}(t) (1+0,50) \quad z = 11, 12, 13 \quad (\text{rami più redditizi})$$

$$MSR(t+1) = \max \{ 0.18A + 0.16B; 0.26A^* + 0.23B^* \} \max \{ 0.5; p(t) \}$$

$$p(t) = \frac{CSN(t) + CSN(t-1) + CSN(t-2)}{CS(t) + CS(t-1) + CS(t-2)} \quad \text{grado di conservazione}$$

$$CSN(t) = [S(t) - \frac{1}{n}S(t)] + [R_s(t) - R_s(t-1)] - [nR(t) - nR(t-1)]$$

\rightarrow riacquisto a carico del risicatore \rightarrow riacquisto riunito a carico del risicatore

se l'impresa non si riacquista:

$$p(t) = 1$$

$$\Rightarrow MSR(t+1) = \max \{ 0.18A + 0.16B; 0.26A^* + 0.23B^* \}$$

se l'impresa si riacquista

$$p(t) < 1$$

$$\Rightarrow MSR(t+1) < \max \{ \dots, \dots \}$$

$$\text{se } p(t) > 0.5 \Rightarrow \max \{ 0.5, p(t) \} = p(t)$$

$$\text{se } p(t) < 0.5 \Rightarrow \max \{ 0.5, p(t) \} = 0.5$$

\rightarrow esendendo con grande ricorso alla riacquisto (il portafoglio è vuoto!)

\rightarrow spese comunque un livello minimo

se $MSR(\theta+1)$ risulta essere d'importo inferiore al $MSR(\theta)$ allora l'impresa non può ricevere in bilancio $MSR(\theta+1)$ ma deve fare degli aggiustamenti.

QUOTA DI GARANZIA

è stabilita una quota di garanzia così definita:

$$Q = \max \left\{ \frac{1}{3} MSR(\theta+1), c \right\}$$

per i rami 10, 11, 12, 13, 14, 15 (R.C. auto, R.C. aeronautica, R.C. marittima, R.C. generale, R.C. crediti, R.C. cauzioni) $c = 3'500'000 \text{ €}$

\bullet $HSD(\theta+1) > MSR(\theta+1) \rightarrow$ situazione tranquilla

$\Delta Q < HSD(\theta+1) < MSR(\theta+1) \rightarrow$ l'AV. richiede un piano di riconoscimento alla compagnia

$\Delta HSD(\theta+1) < Q \rightarrow$ l'AV. richiede un piano di riconoscimento in ottimismo termine

La formula per il calcolo del $MSR(\theta+1)$ è stata elaborata sulla base del Modello della Teoria del Rischio monoperiodale individuale:

- un finito portafoglio di rischi "analogo"
- un finito esercizio

R dotazione di capitale

P premi

$$G = P - E - S$$

E spese

→ relato alla gestione tecnica nell'esercizio

S riconoscimento per rischi

$P(R+G < 0) = P(G < -R)$ probabilità di rovina nell'esercizio

→ è necessario un mod. probabilistico per G

notio $G = \sum_{i=1}^m G_i$ con $m =$ num. di polizze in portafoglio

$G_i =$ relato alla gestione tecnica di ciascun contratto

si possono considerare le conclusioni dette dal Teorema sul Limite Centrale

TEOREMA SUL LIMITE CENTRALE

X_1, X_2, \dots r.v. i.i.d. con $\text{Var}(X_i) < +\infty$

$$\text{punto } S_m = \sum_{i=1}^m X_i, \quad S_m^* = \frac{S_m - E(S_m)}{\sqrt{\text{Var}(S_m)}}$$

$$\Rightarrow S_m^* \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{\text{in law}} N(0,1)$$

$$F_{S_m^*}(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \Phi(x) \quad \forall x, \quad \Phi \text{ funz. di ripartizione di } N(0,1)$$

$$\text{per } m \text{ elevato} \quad F_{S_m^*}(x) \approx \Phi(x)$$

Esestione delle generalizzazioni del TLC che, a partire da m.a. stocasticamente indipendenti ma non necessariamente identicamente distribuiti, purché uno di essi non abbia una varianza troppo elevata, permettono di giungere alle stesse conclusioni circa tale approssimazione:

G_1, G_2, \dots i.i.d.

$$\frac{G - E(G)}{\sqrt{\text{Var}(G)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$P_r(G < -R) = P_r\left(\frac{G - E(G)}{\sqrt{\text{Var}(G)}} < -\frac{R + E(G)}{\sqrt{\text{Var}(G)}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{R + E(G)}{\sqrt{\text{Var}(G)}}\right)$$

$$I \stackrel{\Delta}{=} \frac{R + E(G)}{\sqrt{\text{Var}(G)}} \quad \text{INDICE DI STABILITÀ RELATIVA DEL PORTAFOGLIO}$$

se I cresce, $-I$ decresce, $\Phi(-I)$ dunque \approx probabilità di rovina

I dipende da: $R \rightarrow$ dotazione di capitale

$E(G) \rightarrow$ caricoamento di sicurezza

$\sqrt{\text{Var}(G)} \rightarrow$ risarcimento

se non c'è risarcimento in risarcimento:

$$G = D - S \quad \text{Var}(G) = \text{Var}(S)$$

se c'è risarcimento in risarcimento:

$$G_n = D - P_n - \alpha S \quad \alpha < 1$$

$$\text{Var}(G_n) = \text{Var}(\alpha S)$$

$$= \alpha^2 \text{Var}(S) < \text{Var}(S)$$

TS - 16 - 12 - 2013 (6.2 ecc) (2^a SETTIMANA)

Essere un livello ρ_p (limite) probabilità accettabile di rovina, allora I deve essere tale che: $\Phi(-I) = \rho_p$

$$-I = \Phi^{-1}(\rho_p)$$

$$I = -\Phi^{-1}(\rho_p) = -z_{\rho_p}$$

↳ quantile di ordine ρ_p della $N(0,1)$

All'epoca di elaborazione di tel formula si erano analizzate delle compagnie presenti sul mercato europeo e si era posto $\rho_p = 3\%$ ($= 0.003$, 3 per mille)

$$z_{\rho_p} \approx -2.75$$

in compagnie

1

i P_i^T $E(G_i)$ $\zeta(G_i)$ \rightarrow i-esima compagnia

⋮
m

R_i deve essere tale che $\frac{R_i + E(G_i)}{\zeta(G_i)} = -z_{\rho_p}$

$$R_i = -[z_{\rho_p} \zeta(G_i) + E(G_i)]$$

si è guardato a:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m -\frac{[z_{\rho_p} \zeta(G_i) + E(G_i)]}{P_i^T} \approx 0.18 \quad \text{rapporto in media tra dotazione di capitale e montepremi}$$

$$\Rightarrow \text{MSR: } 0.18 P(\beta)$$

$\frac{S}{D} = 0.70$ è visto come un buon risultato di gestione

$\approx \frac{S}{D} > 0.70$ allora è visto "come un malfatto"

$$\Rightarrow D = \frac{1}{0.70} S \Rightarrow 0.18 D = \frac{0.18}{0.70} S$$

$$= 0.26 S$$

$$\Rightarrow \text{MSR: } 0.26 S(\beta)$$

Questo modello però è giudicato inadeguato:

- Le formule si basano soprattutto sul volume dell'offerta non sulla fonte di rischio (non si tiene conto del rischio finanziario né di rischi tecnici come il rischio di recessione, il rischio di prezzo, ecc... né di rischi operativi)
- Le formule sono basate su numeri fissi

La struttura di SOLVENCY I comprende, oltre quelli aggiuntamente, le direttive del '73

→ ci si orienta a SOLVENCY II che è molto più adeguato

IAS / IFRS

International Accounting Standards (IAS)

International Financial Reporting Standards (IFRS)

• Obiettivo delle imprese sono importanti per: investitori, mercato, avvocati, A.V., controlli interni, ...

→ è fondamentale che i bilanci siano scritti in modo adeguato alla struttura dell'impresa e che siano confrontabili tra di loro

nel 1973 nasce lo IASC (I.A.S. Committee) con lo scopo di creare un sistema standard per la contabilità d'azienda → IAS

nel 2001 cambia in IASB (I.A.S. Board) → IFRS

Si vuole arrivare a rendicontare che meno il più trasparente ed il più confrontabile possibile

Nel 1997 si era iniziato un lavoro sulla rendicontazione in ambito assicurativo assumendo il modello contabile ASSET/LIABILITY (attivo/passivo), ovvero valutare gli attivi e i passivi per poi farne la differenza ed trovare il risultato d'esercizio.

Come criterio di valutazione si indicava il metodo del FAIR VALUE (valore corrente): "corrisponde al prezzo in attività quel suo membro

o una parzialità estinta in una transazione tra tanti che non sono partite informate e disponibili allo scambio, ovvero il prezzo di mercato.

Questo sistema di valutazione, per quanto riguarda il settore assicurativo, dovrebbe entrare in vigore in UE nel 2005, ma le compagnie si sono fortemente opposte (come valutare le riserve a prezzi di mercato?)

Allora si sono aperte due fasi:

- FASE I, terminata con IFRS4 - Insurance Contracts (dal 31/03/2007, in vigore dal 2005)
- FASE II, prima progettata, poi bloccata in attesa di SOLVENCY II

IFRS4

- si definisce:
 - contratto assicurativo (rendicontare con IAS/IFRS per contratti assicurativi)
 - strumento finanziario (rendicontare con IAS/IFRS per strumenti finanziari)
 - altro (rendicontare con IAS/IFRS per altro)
- underwriting: dividere la componente assicurativa da quella finanziaria
- nei rotti danni:
 - vietato accantonare riserve di preparazione e riserve per rischi catastrofici (in quanto parzialità non effettivamente nata)
 - reinvestire gli importi al fondo della riacurazione (una parzialità mai è stata anche se si è riacurata)
 - eseguire LAT, Liability Adequacy Test (verificare l'adeguatezza delle provviste scritte in bilancio)
 - non il resto come in precedenza

Dal 2005 è obbligatorio rispettare questi principi solo per i bilanci consolidati (quelli di gruppo) ma non per quelli individuali

FASE II

DSOP 2004 }
 DP maggio 2007 } documenti della IASB

Tali principi vengono applicati ai conti di bilancio indipendentemente da chi li emette.

Restano le conclusioni della fase I, ma si introduce il principio del FAIR VALUE: tutto ciò che è trattato sul mercato deve essere valutato a prezzo di mercato (anche la grandezza tipo: ben di interesse...). Per le cose non presenti sul mercato c'è l'affermazione che un equivalente presente sul mercato (sempre che ci sia) oppure in mancanza di quest'ultimo si procede in un altro modo:

- STIMARE I FLUSSI FUTURI per tutti gli strumenti possibili
 - descrizione (modelli stocastici)
 - valutare la ripartizione matematica di ogni flusso futuro
- TIME VALUE OF MONEY
 - attualizzare i flussi attesi (usando tassi di mercato per strumenti finanziari con analogo timing e volatilità, adattando attenzio risk-free)
- MARGINI PER IL RISCHIO (MARKET VALUE MARGIN)
 - rischio di prezzi (rischio della variazione associata al valore attuale, dovuto al fatto che il valore attuale solitamente è differente dal valore atteso)
 - rischio di tempo (i parametri sono stocastici da data, c'è sempre un rischio)
 - rischio di modelli (usare un modello non adeguato)
- usare indicatori della dispersione della distribuzione (si misura)
 - Logica VaR : $MVM = VaR[X; \alpha] - E(X)$
 - TVaR ; $MVM = TVaR[X; \alpha] - E(X)$
- conto del capitale (SOLVENCY II)
 - a fronte di possibilità di un canto capitale di rischio che ha un costo per gli investitori (perché deve essere tenuto ferme)

→ volutamente questo costa il capitale allocato a fronte delle perdite

3) flussi dovrebbero essere valutati in questo modo:

- (i) risarcimenti per sinistri denunciati ma non ancora pagati (reported claims)
- (ii) " " " " avvenuti " " " denunciati (IBNR)
- (iii) " " " " futuro per contratti già in essere
- (iv) spese di gestione dei punti (i) (ii) (iii)

OSS:

(i)+(iii) è ciò che ora entra nella riserva sinistri (+ le spese di gestione per tali due punti)

TS - 17 - 12 - 2013 (65 ore)

relativa al SOLVENCY II

dopo PREMIUM e RESERVE RISK (pag. 3)

$$P_p(Y > \text{VaR}[Y; p]) = 1-p$$

$$= P_p(\ln Y > \ln \text{VaR}[Y; p])$$

$$= P_p\left(\frac{\ln Y - \mu}{\sigma} > \frac{\ln \text{VaR}[Y; p] - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\sigma \sim N(0,1)$$

L quantile di ordine 0.995 di $N(0,1)$

$$\Rightarrow \frac{\ln \text{VaR}[Y; p] - \mu}{\sigma} = N_{0.995}$$

$$\ln \text{VaR}[Y; p] = \sigma N_{0.995} + \mu$$

$$\text{VaR}[Y; p] = e^{\sigma N_{0.995}} e^{\mu}$$

$$= e^{\sqrt{\ln(\zeta^2+1)} N_{0.995} - \frac{1}{2} \ln(\zeta^2+1)}$$

$$= \frac{\exp\{N_{0.995} \sqrt{\ln(\zeta^2+1)}\}}{\sqrt{\zeta^2+1}}$$

$$\tilde{k} = \frac{e^{N_{0.995} \sqrt{\ln(\zeta^2+1)}}}{\sqrt{\zeta^2+1}} - 1 = D(\zeta)$$

RR₁

$\{P_{ij}, i=0, \dots, t; j=0, \dots, t\}$ modello storico per i pagamenti incrementali
 alla chiusura dell'esercizio t si voluta $R_j(t)$ a partire dalla stima data dal
 modello



La $R_j(t)$ deve far fronte ai pagamenti da sulla diagonale
 ($\downarrow P_{ij} : i+j=t+1, i=0, \dots, t$)