Simboli di TAFP

August 12, 2023

Capitolo 1: Generalità

Capitolo 2. Modelli a più cause di eliminazione

- $\boxed{\mathsf{x}}$ Età del soggetto
- $\boxed{\mathsf{T}}$ Anni di vita: dalla nascita fino al decesso. Valori compresi fra zero e omega
- $\boxed{\omega}$ Età estrema. Il numero di anni che nessun individuo della continuità può raggiungere
- $\boxed{\mathsf{G}(x) = Pr(\mathsf{T} \leq x)}$ Funzione di ripartizione di te (attenzione che la variabile aleatoria è T.
- $\boxed{\mathsf{S}(x) = Pr(\mathsf{T} > x)}$ Funzione di sopravvivenza di T.
- $\boxed{{}_t\mathsf{q}_x'^{(\mu)} = Pr(x < T \leq x + t | T > x)}$ la probabilità che un generico individuo che è nella collettività all'età x, venga eliminato dalla collettività nell'intervallo (x,x +t]
- $\boxed{{}_t\mathsf{p}_x'^{(\mu)} = Pr(T > x + t | T > x)}$ la probabilità che un generico individuo che è nella collettività all'età x, sia nella collettività all'età x + t
- $\boxed{{}_t\mathsf{p}'^{(\alpha_j)}_x = Pr\left(T > x + t, (C = \alpha_j) \, | T > x\right)}$ la probabilità che un generico individuo che è nella collettività all'età x, sia nella collettività all'età x + t
- $\boxed{\ell(0)}$ il numero, certo, di individui presenti inizialmente nella collettività;
- $\boxed{\tilde{\ell}(\mathsf{x}) = \tilde{\ell}(\mathsf{x}) = \sum_{r=1}^{\ell(0)} \left|\mathsf{T}_{(\mathsf{r})} > \mathsf{x}\right|}$ la variabile aleatoria che fornisce il numero di quanti fra gli $\ell(0)$ individui sono ancora nella collettività all'età x
- $\boxed{\mathsf{r}}$ indica l'individuo r-esimo della collettività
- $\boxed{\mathsf{T}_{(\mathsf{r})}}$ la variabile aleatoria che indica la durata di appartenenza alla collettività, a partire dall'età 0 , dell' individuo r-esimo della collettività, con r $= 1, 2, \ldots, \ell(0);$

- $q_x^{(\mu)} = {}_1 q_x^{(\mu)}$

- $d_x^{(\mu)}$ è il numero medio degli eliminati fra le età x e x$+1$ risulta $d_x^{(\mu)} = \ell(x) - \ell(x+1) = q_x'^{(\mu)} \ell(x)$.

- n Numero di cause di eliminazione

- α Ogni alfa è una possibile causa di eliminazione (per tutti).

- C Numero aleatorio. E' la causa di uscita(cioé ogni sua determinazione rappresenta una causa di uscita).

- T Numero aleatorio. Durata di permanenza nella collettività dalla età 0.

- (T, C) Coppia aleatoria.

- $G_j(x) = P\left(T \leq x, (C = \alpha_j)\right)$ Funzione di ripartizione congiunta della coppia aleatoria, riferita alla causa di uscita j.

- ${}_t q_x^{(\alpha_j)} = Pr\left(x < T \leq x + t, (C = \alpha_j) \,|T > x\right)$ Probabilità che un soggetto esca dalla collettività per **una causa** j, fra le età x e $x + t$ supponendo sia vivo all'età

- ${}_t q_x^{(\alpha)} = Pr(x < T \leq x + t|T > x)$ Probabilità che un soggetto esca dalla collettività per qualsiasi causa, fra le età x e x+t supponendo sia vivo all'età x

- ${}_t p_x^{(\alpha)} = Pr\{T > x + t|T > x\}$ Probabilità che un individuo rimanga nella collettività... eccetera

- $a\alpha_j(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{{}_{\Delta x} q_x^{(\alpha_j)}}{\Delta x}$ Intensità di eliminazione per la causa di uscita α_j. (valuto l'intensità di uscita per una causa fra le molte)

- ${}_t d_x^{(\alpha_j)}$ il numero medio di eliminati per la causa α nell'intervallo di età (x, x+t]

4 Probabilità relative ed assolute.

- ${}_t p_x^{(\alpha)}$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di sopravvivenza in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

- ${}_t q_x^{(\alpha)}$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di eliminazione in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

- ${}_t q'^{(\alpha_j)}_x$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di eliminazione in una collettività soggetta alla sola causa di eliminazione j.

- $_{t}\mathrm{p}'^{(\alpha_j)}_{x}$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di sopravvivenza in una collettività soggetta alla sola causa di eliminazione j.

- $_{t}\mathrm{p}^{(\alpha_j)}_{x}$ **Probabilità relativa** o **dipendente** di sopravvivenza in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

- $_{t}\mathrm{q}^{(\alpha_j)}_{x}$ **Probabilità relativa** o **dipendente** di eliminazione in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

Capitolo 3. Collettività suddivisa in gruppi

- ω_{i} la prima età che nessun individuo può raggiungere nel gruppo i, per $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$: quindi $\omega_{\mathrm{i}} - 1$ è la massima età raggiungibile nel gruppo i.

- α l'età minima di appartenenza a ciascun gruppo, che supponiamo sia la stessa per tutti i gruppi (è la semplice la generalizzazione al caso in cui queste età non sono tutte uguali) ; allora $\alpha \leq \omega_{\mathrm{i}} - 1,$ per ogni i.

- x l'età d'ingresso in un gruppo; per un individuo che appartenga al gruppo i è $\alpha \leq \mathrm{x} \leq \omega_{\mathrm{i}} - 1$

- t l'antidurata di appartenenza ad un gruppo.

- $\mathrm{q}^{\mathrm{ij}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}}$ la probabilità che l'individuo passi nel gruppo j all'età $\mathrm{x} + \mathrm{t} + 1$

- $\mathrm{p}^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}}$ **Probabilità di permanenza in un gruppo**. E' la probabilità che l'individuo rimanga nel gruppo i almeno fino all'età $\mathrm{x} + \mathrm{t} + 1$. (occhio solo i all'esponente).

- $_{\mathrm{u}/}\mathrm{q}^{\mathrm{ij}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}}$ la probabilità che un individuo che è entrato nel gruppo i all'età x provenendo da un altro gruppo e vi è rimasto fino all'età x + t, rimanga nel gruppo i per altri u anni, ovvero fino all'età x + t + u,e passi nel gruppo j all'età x + t + u + 1.

  Per $u = 0$ risulta $_{0/}\mathrm{q}^{\mathrm{ij}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}} = \mathrm{q}^{\mathrm{ij}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}}$

- $_{\mathrm{u}}\mathrm{p}^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}}$ la probabilità che un individuo che è entrato nel gruppo i all'età x provenendo da un altro gruppo e vi è rimasto fino all'età x + t, rimanga ancora nel gruppo i almeno fino all'età x+t+u.

  Per $u = 0$ risulta $_{0}p^{i}_{[x]+t} = 1$

- $\ell^{\mathrm{i}(0)}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ il numero di individui di età x+t che sono nel gruppo i all'epoca 0, con età x d'ingresso nel gruppo i e antidurata t.
  Sono noti i numeri $\ell^{\mathrm{i}(0)}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ per $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$, ed ogni possibile x e t (quindi nel rispetto delle limitazioni inferiori e superiori delle età di appartenenza al gruppo i).

- $\boxed{\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)}$ al tempo 0, è una variabile aleatoria che esprime il numero di individui di età x + t che ad un'epoca m (> 0) saranno nel gruppo i, con x età d'ingresso nel gruppo e t antidurata

- E $\left(\tilde{l}^{i(m)}(x,t)\right)$ = $\boxed{\ell^{i(m)}(x,t)}$ speranza matematica della variabile aleatoria (**sia per collettività chiusa che aperta?**

- $\boxed{\tilde{\lambda}_x^{i(m-t)}}$ il numero aleatorio degli individui che entrano nel gruppo i all'epoca m − t con età x provenendo da altro gruppo

- $\boxed{\lambda_x^{i(m-t)}} = E\left(\tilde{\lambda}_x^{i(m-t)}\right)$ la sua speranza matematica.
  Per il suo significato, è definito per x > α (ricordiamo che la collettività è chiusa) e quindi x − α > 0.

- $\boxed{\lambda^{i(j)(m)}(x-\tau,\tau)}$, con $0 < \tau \leq x - \alpha$ numero medio di individui di età x che all'epoca m sono nel gruppo i provenendo dal gruppo j, nel quale erano entrati all'età x − τ e vi erano rimasti per τ − 1 anni (fino all'epoca m − 1), risulta:

$$\lambda^{i(j)(m)}(x-\tau,\tau) = \ell^{j(m-1)}(x-\tau,\tau-1)q^{ji}_{[x-\tau]+r-1}$$

- $\boxed{\lambda^{i(m)}(x-\tau,\tau)}$ il numero medio di individui di età x che all'epoca m sono nel gruppo i provenendo da qualsiasi gruppo, nel quale erano entrati all'età $x - r$ e vi erano rimasti per $\tau - 1$ anni (fino all'epoca $m - 1$)

2.3 Vediamo il caso di una collettività aperta.

- $\boxed{v_x^{i(m)}}$ il numero (certo) dei nuovi ingressi (cioè ingressi non dovuti a passaggi di gruppo) di età x nel gruppo i all'epoca m.

- $\boxed{{}_{(1)}\ell(m)(x,t)}$ numero di individui che provengono dalla collettività iniziale (cioè collettività presente all'epoca 0)

- $\boxed{{}_{(2)}\ell(m)(x,t)}$ numero di individui che provengono da interessi successivi all'epoca 0

Capitolo 4. Lo schema I.V.S.

Gruppo 1 : gruppo degli attivi.

Gruppo 2 : gruppo dei pensionati di invalidità.

Gruppo 3 : gruppo dei pensionati di vecchiaia.

Gruppo 4 : gruppo dei pensionati per altre cause.

Gruppo 5 : gruppo dei pensionati indiretti (o **nuclei superstiti di attivo**).
L'uscita da un nucleo superstite di un suo componente può verificarsi non solo per morte ma anche perché sono venute meno le condizioni che danno diritto a far parte del nucleo stesso.

Gruppo 6 : gruppo dei pensionati di reversibilità (**nuclei superstiti di pensionato**).
L'uscita da un nucleo superstite di un suo componente può verificarsi non solo per morte ma anche perché sono venute meno le condizioni che danno diritto a far parte del nucleo stesso

Gruppo 7 : gruppo degli eliminati definitivamente.

1.2 Transizioni fra i gruppi

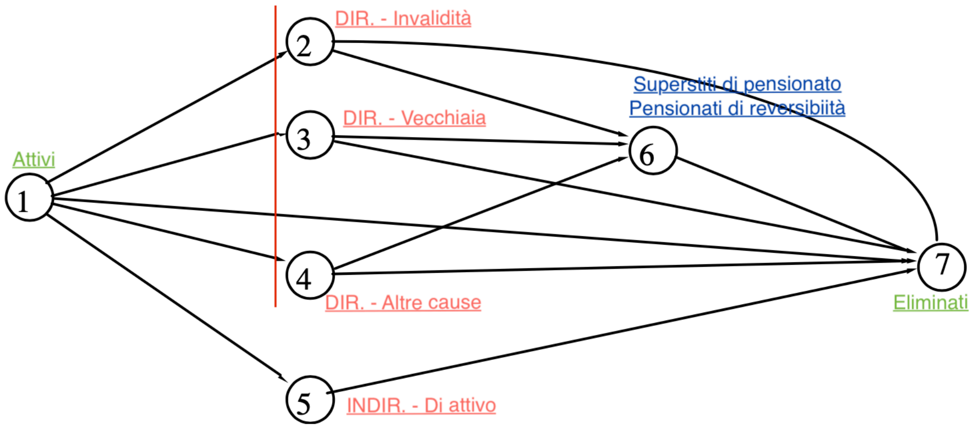

Figure 1: Grafo in cui i nodi rappresentano i gruppi e gli archi indicano le transizioni possibili

2. I dati.

- α l'età minima di ingresso nel gruppo 1 degli attivi;
- ξ **età di vecchiaia** la prima età ($> \alpha$) che nessun individuo può avere nel gruppo degli attivi. L'età di vecchiaia ξ in questo capitolo sarà intesa come l'età entro la quale ogni attivo passa nel gruppo dei pensionati di vecchiaia.
- x l'età d'ingresso nel gruppo degli attivi $\alpha \leq$ x $\leq \xi - 1)$ (salvo diversa indicazione)
- t l'anzianità di assicurazione, cioè il numero di anni di appartenenza al gruppo 1 per gli individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x valgono le limitazioni$0 \leq t \leq \xi -$ x
- ω_k per $k = 2, 3, 4,$ la prima età che nessun individuo del gruppo k di pensionati può raggiungere restando nel gruppo.
- τ l'anzianità di pensionamento di pensionati diretti o indiretti
- η l'anzianità di pensionamento dei pensionati di reversibilità.
- *dante causa*: solo per i gruppi 5 e 6, **non chiaro se è il nucleo superstite di attivo o pensionato ad essere il dante causa del gruppo successivo (ma credo di si)**

- $\bar{\omega}$ la durata massima di vita di un nucleo superstite

- $\omega_5 = \xi + \bar{\omega}$ la prima età che nessun nucleo superstite di attivo può raggiungere nel gruppo 5

- $\omega_6 =$ max $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} + \bar{\omega}$ la prima età che nessun nucleo superstite di pensionato può raggiungere nel gruppo 6

- $q^{1,k}_{[x]+t}$ probabilità che un attivo, entrato nel gruppo degli attivi all'età x e rimasto in questo gruppo per t anni, transiti (o sia eliminato) nel gruppo k tra le età x+t e x+t+1, per vecchiaia (k = 3) o per altre cause (k = 4) o per morte lasciando nucleo superstite (k = 5) o per morte senza lasciare nucleo superstite (k = 7).

- $q^{\mathrm{k,s}}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ probabilità che un pensionato diretto del gruppo k(k $= 2, 3, 4)$, entrato nel gruppo all'età y e ivi rimasto per τ anni, venga eliminato (necessariamente per morte) dal gruppo fra le età y $+$ rey $+$ r $+ 1$ lasciando nucleo superstite, se è s $= 6$, o non lasciando nucleo superstite, se è s $= 7$

- $\mathrm{q}^{5,7}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ probabilità che un nucleo superstite di attivo morto all'età y, con anzianità di pensionamento di τ anni, si estingua completamente fra le età y $+ \tau$ e $y + \tau + 1$

- $q^{6,7}_{[z]+\eta}$ probabilità che un nucleo superstite di pensionato morto all'età z, con anzianità di pensionamento di η anni, si estingua completamente fra le età z $+ \eta$ e z $+ \eta + 1$

3. I numeri medi

- $\tilde{\ell}^{1(\mathrm{m})}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ numero di attivi di età x + t all'epoca m, con età d'ingresso nel gruppo degli attivi pari a x e antidurata t nel gruppo

- $\tilde{\ell}^{\mathrm{k(m)}}(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \tau)$ numero, all'epoca m, di pensionati di età x + t + τ, del gruppo k (per k = 2, 3, 4), o del gruppo 5 (per k = 5), con ingresso nel gruppo degli attivi all'età x, permanenza in quel gruppo uguale a t $(t \leq 1)$ e antidurata τ nel gruppo k;

- ${}^{\mathrm{k}}\tilde{\ell}^{6(\mathrm{m})}(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \tau, \eta)$ numero, all'epoca m, di nuclei superstiti di pensionati del gruppo k$(per$k $=$ 2,3,4), derivanti da individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x, rimasti in quel gruppo t anni $($con$t \geq 1)$, entrati nel gruppo k dei pensionati diretti all'età x $+$ t, morti all'età x $+$ t $+ \tau (\tau \geq 1)$ nuclei superstiti che hanno antidurata η nel gruppo $6;$

- $\tilde{\ell}^{6(\mathrm{m})}(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \tau, \eta) = \sum_{\mathrm{k}=2}^{4} {}^{\mathrm{k}}\tilde{\ell}^{6(\mathrm{m})}(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \tau, \eta)$ numero, all'epoca m, di nuclei superstiti di pensionati diretti, entrati nel gruppo degli attivi all'età x, rimasti in quel gruppo t anni, entrati in uno dei gruppi dei pensionati diretti all'età x $+$ t e morti all'età x $+$ t $+ \tau$, aventi antidurata η nel gruppo 6

- $\boxed{v_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{m})}}$ il numero (certo) di nuovi ingressi di età x nel Gruppo 1 degli attivi all'epoca m, che ! supporremo noto.
- corrisponde al numero $v_{\mathsf{x}}^{1(\mathsf{m})}$ introdotto nel capitolo 3

Capitolo 5. Il calcolo dei salari e degli oneri

1. Definizioni e ipotesi preliminari per salari e oneri individuali.

- $\boxed{{s_{t+1}}^{(\mathsf{m})}}$ è un numero certo. Il **salario** che viene percepito all'epoca m da un attivo che in quest'epoca matura anzianità di assicurazione t,
- $\boxed{\mathsf{r}_{\mathsf{t}}^{(\mathsf{m})}}$ l'importo della **pensione** spettante all'epoca m ad un pensionato diretto che deriva da un attivo che al momento del pensionamento ha maturato una anzianità lavorativa di t anni.
- $\boxed{\psi(\mathsf{y}+\mathsf{k},\mathsf{k})}$ l'**aliquota media** spettante al nucleo familiare superstite di un assicurato o di un pensionato morto in età y dopo k anni dalla morte, della pensione a cui avrebbe avuto diritto l'assicurato deceduto o di cui godeva il pensionato deceduto; di norma è $0 < \psi(\mathsf{y}+\mathsf{k},\mathsf{k}) \leq 1$.

2. Salari e oneri collettivi

2.2.3 Passiamo agli oneri - CASINO IN CLASSIFCA SIMBOLI, DA SISTEMARE SU FILE APPUNTI

- $\boxed{\bar{\Theta}^{(\mathsf{m})}}$ il valore medio dell'ammontare degli oneri da erogare all'epoca m ai pensionati.
- $\boxed{\bar{\Theta}_{x}^{(\mathsf{m})} = \sum_{\mathsf{x}=\alpha}^{\xi-1} \bar{\Theta}_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{m})}}$ il valore medio dell'ammontare degli oneri da erogare all'epoca m ai pensionati che derivano da attivi entrati in assicurazione all'età x.
- $\boxed{{}^{\mathsf{k}}\overline{\Theta}_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{m})} = \sum_{\mathsf{t}=1}^{\xi-\mathsf{x}} \sum_{\tau=0}^{\omega_{\mathsf{k}}-1-(\mathsf{x}+\mathsf{t})} {}^{\mathsf{k}}\overline{\Theta}_{\mathsf{x},\mathsf{r},\mathsf{r}}^{(\mathsf{m})}}$ è il valore medio del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni del gruppo k dei pensionati, per k = 2, 3, 4, 5 (quindi per pensioni dirette se k = 2, 3, 4, ed indirette se k = 5), relativi a individui entrati in assicurazione all'età x.

  Dove:

- $\boxed{{}^{\mathsf{k}}\bar{\Theta}_{\mathsf{x},\mathsf{t},\mathsf{r}}^{(\mathsf{m})}}$ per k = 2, 3, 4, sia il valore medio, rispettivamente, del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni di invalidità, di vecchiaia e per altre cause relative a pensionati che all'epoca m hanno anzianità di pensionamento τ, hanno maturato anzianità lavorativa t e sono entrati in assicurazione all'età x, per k = 5 sia il valore medio del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni ai nuclei superstiti di attivi che all'epoca m hanno anzianità di pensionamento τ, derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x e con anzianità lavorativa t;

- $^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,\tau,\eta}$ per k = 2, 3, 4, sia il valore medio del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni ai nuclei superstiti di pensionati che all'epoca m hanno anzianità di pensionamento η derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x, hanno maturato anzianità lavorativa t, che sono stati in pensione nel gruppo k per τ anni e poi sono deceduti.

- $^{(k,6)}\overline{\Theta}^{(m)}_x = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-x-t\omega_6-1-x-t-\tau} \sum_{\eta=0}^{(k,6)} \overline{\Theta}^{(m)}_{x,r,r,\eta}$ il valore medio dell'ammontare degli oneri relativi ai nuclei superstiti di pensionati all'epoca m (pensioni di reversibilità), derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x, per k = 2, 3, 4,.

- $\bar{\Theta}^{(m)}_x = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_x +^{5} \bar{\Theta}^{(m)}_x + \sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_x$ è il valore medio degli oneri dell'epoca m per tutte le pensioni relative a individui entrati in assicurazione all'età x

- $\Theta^{(m)}_x$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso degli oneri da erogare ai nuovi pensionati diretti o indiretti dell'epoca m derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x, e ai loro superstiti, a partire dall'epoca m e fino alla loro estinzione,

- $\Theta^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \Theta^{(m)}_x$ oppure anche il valore attuale medio all'epoca m del flusso degli oneri da erogare ai nuovi pensionati diretti o indiretti dell'epoca m, e ai loro superstiti, a partire dall'epoca m e fino alla loro estinzione.

  Oppure $\Theta^{(m)} = \sum_{s=0}^{\omega_6-1-(\alpha+1\}} s^{-(m+s)} v^s$ (vd sotto)

- ${}^{k}\Theta^{(m)}_x$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso delle pensioni che verranno erogate ai nuovi pensionati diretti del gruppo k dell'epoca m, per k = 2, 3, 4, e ai nuovi nuclei superstiti di attivo dell'epoca m, per k = 5, che derivano da attivi entrati in assicurazione all'età x

- $^{(k,6)}\Theta_X{}^{(m)}$ per k = 2, 3, 4, il valore attuale medio all'epoca m del flusso delle pensioni che verranno erogate ai nuclei superstiti (di pensionato) dei nuovi pensionati diretti del gruppo k dell'epoca m, che derivano da attivi che sono entrati in assicurazione all'età x,

- $\Theta^{(m)} = \sum_{s=0}^{\omega_6-1-(\alpha+1\}} s^{-(m+s)} v^s$

3. Valori medi di salari e oneri in ipotesi semplificatrici (pg 72 quaderno).

Capitolo 6. I coefficienti di capitalizzazione

- ${}^{a}q_x$ la probabilità di eliminazione di un attivo per qualunque causa tra le età x e $x+1$

- ${}^{a}q_x^i$ probabilità di eliminazione di un attivo per invalidità
- ${}^{a}q_x^v$ probabilità di eliminazione di un attivo per vecchiaia
- ${}^{a}q_x^w$ probabilità di eliminazione di un attivo per altre cause
- ${}^{a}q_x^d$ le probabilità di eliminazione di un attivo per morte tra le età x e $x+1$
- ${}^{a}p_x$ probabilità di permanenza nella collettività degli attivi dall'età x almeno per un anno
- ${}^{a}_{t}p_x$ probabilità di permanenza nella collettività degli attivi dall'età per t anni, con $1 \leq \mathrm{t} \leq \xi - \mathrm{x}$
- ${}^{\mathrm{F}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ probabilità di sopravvivenza per almeno m anni di un nucleo superstite di attivo di "età" y + τ e anzianità τ
- ${}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ probabilità di sopravvivenza per almeno m anni di un nucleo superstite di attivo di "età" y + τ e anzianità
- ${}^{\mathrm{f}}\mathrm{p}_{[\mathrm{z}]+\eta}$ di un nucleo superstite di pensionato di "età" $z+\tau$
- ${}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{[\mathrm{z}]+\eta}$ probabilità di sopravvivenza di un nucleo superstite di pensionato di anzianità η
- $\{\ell_{\mathrm{x}}^{\mathrm{a}}\}$ **tavola di attività**
- ℓ_X^a generico elemento della tavola di mortalità

2. Valori medi di salari

- $\ddot{\mathrm{a}}_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{a})}(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{t}=0}^{\xi-1-\mathrm{x}} \frac{\ell_{\mathrm{x}+\mathrm{t}}^{\mathrm{a}}}{\ell_{\mathrm{x}}^{\mathrm{a}}} \frac{\mathrm{s}_{\mathrm{t}+1}}{\mathrm{s}_1} \mathrm{v}^{\mathrm{t}}$ il valore attuale medio dei salari annui anticipati, per unità di salario iniziale (s_1 del primo anno), che un individuo entrato in assicurazione all'età x percepirà per tutto il periodo della sua attività lavorativa.

3. Coefficienti di capitalizzazione relativi agli oneri.

- $\ddot{\mathrm{a}}_{[\mathrm{y}]}^{(\mathrm{i})} = \sum_{\tau=0}^{\omega_2-1-\mathrm{y}} \frac{\ell_{[\mathrm{y}]+\tau}^{\mathrm{i}}}{\ell_{[\mathrm{y}]}^{\mathrm{i}}} \mathrm{v}^{\tau}$
- $\ddot{\mathrm{a}}_{\mathrm{y}}^{(\mathrm{v})} = \sum_{\tau=0}^{\omega_3-1-\mathrm{y}} \frac{\ell_{\mathrm{y}+\tau}^{\mathrm{v}}}{\ell_{\mathrm{y}}^{\mathrm{v}}} \mathrm{v}^{\mathrm{t}}$ Analogo al caso dell'annualità vitalizia su testa di invalido è quello della **annualità vitalizia su testa di vecchio** data dal seguente valore attuale medio

- $\ddot{a}_x^{(ai)}(r) = \sum_{t=1}^{\xi-x} \frac{\ell^a_{x+t-1}}{\ell^a_x}\ a\ q^i_{x+t-1} \frac{r_t}{s_1} v^t \ddot{a}^{(i)}_{x+t}$ Questo coefficiente di capitalizzazione rappresenta il valore attuale medio degli oneri relativi ad un pensionato di invalidità, che deriva da un individuo entrato in assicurazione all'età x, per unità del salario percepito all'epoca d'ingresso in assicurazione se la probabilità di eliminazione per invalidità di un attivo non dipende dall'età di ingresso nel gruppo ma solo dall'età raggiunta x + t - 1

- $\ddot{a}_x^{(av)}(r) = \frac{\ell^a_{\xi-1}}{\ell^a_x}\ {}^a q^v_{\xi-1} \frac{r_{\xi-x}}{s_1} v^{\xi-x} \ddot{a}^{(v)}_{\xi}$ Analogamente il valore attuale medio degli oneri relativi ad un pensionato di vecchiaia, che deriva da un individuo entrato in assicurazione all'età x, per unità del salario percepito all'epoca d'ingresso in assicurazione

- $\ddot{a}_{[y]}^{(F)}(\psi) = \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-y} \frac{\ell^F_{[y]+r}}{\ell^F_{[y]}} \psi(y+\tau,\tau) v^\tau$ **annualità di famiglia**: con ciò si intende il *valore attuale medio*, riferito all'età y della morte di un assicurato che lasci nucleo superstite, *della rendita unitaria di pensione ad esso erogata annualmente e anticipatamente*

- $\ddot{a}_{[z]}^{(f)}(\psi) = \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-z} \frac{\ell^f_{[z]+\eta}}{\ell^f_{[z]}} \psi(z+\eta,\eta) v^\eta$ Allo stesso modo, **annualità di famiglia**, si chiama il valore attuale medio, riferito all'età z di morte di un pensionato diretto che lasci famiglia (nucleo superstite), della rendita unitaria di pensione erogata alla famiglia stessa, annualmente e anticipatamente.

- $\ddot{a}_x^{(aF)}(r) = \sum_{t=1}^{\xi-x} \frac{\ell^a_{x+t-1}}{\ell^a_x}\ {}^a q^{dF}_{x+t-1} \frac{r_t}{s_1} v^t \ddot{a}^{(F)}_{[x+t]}(\psi)$ Con le solite precisazioni, il valore attuale medio degli oneri relativi al nucleo superstite di un assicurato che x + 1 deriva da un individuo entrato in assicurazione all'età x, *per unità del salario percepito* all'epoca d'ingresso in assicurazione. Dove,
in cui ${}^a q^{dF}_{x+t-1}$ è la probabilità che un attivo venga eliminato per morte tra le età $x+t-1$e$x+t$ lasciando nucleo superstite.in cui ${}^a q^{dF}_{x+t-1}$ è la probabilità che un attivo venga eliminato per morte tra le età $x+t-1$e$x+t$ lasciando nucleo superstite.

- $\ddot{a}_{[y]}^{(if)}(\psi) = \sum_{\tau=1}^{\omega_2-y} \frac{\ell^i_{[y]+\tau-1}}{\ell^1_{[y]}}\ {}^i q^{df}_{[y]+\tau-1} v^\tau \ddot{a}^{(f)}_{[y+\tau]}(\psi)$ è l'**assicurazione di famiglia riferita ad un invalido** (Come nel caso delle annualità di famiglia si fa riferimento ad una rendita unitaria di pensione.)
Essa fornisce il valore attuale medio degli oneri relativi al nucleo superstite di un pensionato di invalidità, entrato nel gruppo degli invalidi all'età y, essendo ${}^i q^{df}_{[y]+\tau-1}$ la probabilità che un pensionato di invalidità muoia fra l'età $y+\tau-1$ e $y+\tau$ lasciando famiglia.

- $\ddot{a}_y^{(vf)}(\psi) = \sum_{\tau=1}^{\omega_3-y} \frac{\ell^v_{y+\tau-1}}{\ell^v_y}\ {}^v q^{df}_{y+\tau-1} v^\tau \dot{a}^{(f)}_{y+r}(\psi)$ Analogamente definiamo l'**assicurazione di famiglia riferita ad un vecchio** (anche qui si fa riferimento ad una rendita unitaria di pensione) che fornisce il valore attuale medio degli oneri relativi al nucleo superstite di un pensionato di vecchiaia di età y.

- Con procedimento del tutto analogo a quello che ha condotto alla annualità di famiglia si ricavano infine le espressioni del valore attuale medio degli oneri per *pensioni di reversibilità relativi ad un attivo di età x che diventi invalido* all'età x+t e del valore attuale medio degli oneri per *pensioni di reversibilità relativi ad un attivo di età x che diventi pensionato di vecchiaia all'età x + t.*

Capitolo 7. Sistemi finanziari di gestione e calcolo dei premi.

- $\boxed{\overline{\mathcal{P}}^{(m)}}$ il premio in questo sistema finanziario di gestione, che chiameremo *premio di ripartizione pura* per l'anno di gestione $(m, m+1)$.

- $\boxed{\mathcal{S}^{(m)}}$ il valore dell'ammontare dei salari che percepiscono gli attivi all'epoca m (numero erto, diversamente dal significato definito nel capitolo 5)

- $\boxed{\mathcal{P}^{(m)}}$ il premio secondo questo sistema finanziario di gestione, che chiameremo pr*emio di copertura dei capitali*, all'epoca m, si ha $C_m = \mathcal{P}^{(m)}\mathcal{S}^{(m)}$

- $\boxed{P_x^{(m)}} = \dfrac{O_x^{(m)}}{S_x^{(m)}}$ è il premio individuale di ciascuno degli attivi

4. Una osservazione finale: Crisi ripartizione pura

- $\boxed{N}$ il numero di pensionati

- $\boxed{r}$ la pensione media percepita da un pensionato

- $\boxed{A}$ il numero dei lavoratori attivi

- $\boxed{s}$ il salario medio percepito da un attivo.

- $\boxed{P} = \dfrac{r}{s}\dfrac{N}{A}$ è il premio pagato da un attivo secondo il sistema della ripartizione pura

Capitolo 8: Le riserve

1. Generalità.

- $\boxed{V_m} = \sum_{r=m}^{\infty} 0_r v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r)\, v^{r-m}$ **Riserva matematica prospettiva** all'epoca m è data dalla differenza fra il valore attuale medio all'epoca m delle prestazioni1 che verranno erogate dal fondo dall'epoca m in poi e il valore attuale medio all'epoca m dei contributi che verranno pagati al fondo dall'epoca m in poi.

- $\boxed{V_m^a}$ la **riserva prospettiva degli attivi**, detta anche **riserva per gli oneri latenti**, o riserva premi,

- $\boxed{V_m^P}$ la **riserva prospettiva dei pensionati**, detta anche **riserva per gli oneri maturati**,

2. Le riserve nei sistemi a capitalizzazione.

- ${}^{p}V^{a}_{m}$ la riserva prospettiva degli assicurati presenti
- ${}^{f}V^{a}_{m}$ la riserva prospettiva degli assicurati futuri

(a) considerando anno per anno a partire dall'epoca m l'ammontare complessivo dei contributi versati e quello delle pensioni erogate e con questi dati determinando la riserva

(i) il sistema finanziario è quello del premio individuale; ${}_{I}C_{r} = \sum_{t=0}^{\min\{r,\xi-1-\alpha\}} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} P_{x}^{(r-t)} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)}$

(ii) I sistema finanziario è quello del premio per generazioni; ${}_{G}C_{r} = \sum_{t=0}^{\min\{r_r,\xi-1-\alpha\}} P^{(r-t)} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \delta_{x,t}^{(r)}$

(iii) il sistema finanziario è quello del premio medio generale. $C_{r}(P) = P \sum_{t=0}^{\min\{r,\xi-1-\alpha\}} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)} = P\mathcal{S}^{(r)}$

(b) considerando la collettività degli assicurati presenti all'epoca m, che chiamiamo *generazione iniziale* di assicurati all'epoca m, e le *generazioni successive* di nuovi ingressi in assicurazione, valutando per ciascuna di queste generazioni la riserva all'epoca di ingresso e attualizzandone i valori all'epoca della valutazione.
2.4.2 Passiamo ora all'espressione della riserva secondo la modalità (b) del n. 2.4. Osserviamo che la riserva prospettiva degli assicurati presenti ${}^{p}V^{a}_{m}$ è quella della generazione di assicurati che (nel n. 2.4 (b)) abbiamo chiamato generazione iniziale di assicurati all'epoca m, mentre la riserva prospettiva degli assicurati futuri ${}^{f}V^{a}_{m}$ è quella delle generazioni successive di nuovi ingressi in assicurazione dopo l'epoca m.

Con riferimento alla collettività costituita dalla coorte degli attivi di età x + t all'epoca m, entrati nel gruppo degli attivi all'età x, siano:

- $S_{x,t}^{(m)}$ il valore attuale medio, all'epoca m, dei salari che essa percepirà a partire dall'epoca m e fino al termine dell'attività lavorativa,
- $C_{x,t}^{(m)}$ il valore attuale medio dei contributi che da essa saranno versati a partire dall'epoca m,
- $O_{x,t}^{(m)}$ il valore attuale medio, all'epoca m, degli oneri relativi ad essa ed ai suoi nuclei superstiti.

(1) del premio medio generale: ${}^{p}V^{a}_{m}(P) = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(O_{x,t}^{(m)} - PS_{x,t}^{(m)} \right)$ a **riserva prospettiva degli assicurati presenti**, è data dalla differenza fra il valore attuale medio degli oneri e quello dei contributi per la generazione di attivi presenti all'epoca m.

(2) del premio individuale: $\boxed{{}_{I}V_m^a} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(o_{x,t}^{(m)} - P_x^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)} \right)$ valore della detta riserva all'epoca m,

(3) del premio per generazioni: $\boxed{{}_{G}V_m^a} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(0_{x,t}^{(m)} - P^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)} \right)$

3. Riserva dei soprapremi.

- $\boxed{\varepsilon_x^{(k)}} = P - P_x^{(k)}$

il soprapremio (che può essere negativo, nullo o positivo) rispetto al premio individuale di un individuo che entra in assicurazione con età x all'epoca k. Determiniamo la corrispondente riserva dei soprapremi.