Appunti di TAFP

12 agosto 2023

Premessa
I presenti appunti sono tratti dalle dispense del prof. M. Zecchin e L. Picech , ”Appunti delle lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali” con alcune integrazioni/rielaborazioni personali.

Indice

Capitolo 1: Generalità

A differenza delle assicurazioni sulla durata di vita dove:
- si utilizzano modelli probabilistici basati sulla durata di vita allo
- scopo di determinare il valore attuale atteso a carico di un contratto.

Nei fondi pensione utilizzeremo modello probabilistico per distinguere la collettività suddivisa in gruppi
Il modello si costruisce partendo da una collettività di attivi cioè da un gruppo di lavoratori o altro

Oggetto di studio Collettività di attivi

Come si esce dalla collettività degli attivi?

- Eliminazione definitiva: vedremo solo questa. Le possibili cause sono:
  - a causa di invalidità permamente: si riceve l'assegno ordinario di invalidità.
  - a causa di vecchiaia
  - a causa di morte
  - altre cause: categorie residuali.
- Eliminazione temporanea: rientra nel primo pilastro, sono gestite da una logica assistenziale attraverso la fiscalità generale. Non ce ne occuperemo.

2.Pensioni

Ipotesi: Faremo sempre riferimento ad una collettività di lavoratori.
Ipotesi: la collettività di lavoratori obbligata ad aderire ad un fondo mentre lavora.

Contributo Importo versato dai lavoratori (**attivi**) mentre lavorano in un fondo particolare (**Fondo pensione**).

Prestazioni o Benefici Corrispettivo a fronte del contributo versato dal lavoratore. Sono finanziati dai contributi.

Pensioni o rendite vitalizie di pensione Sono le prestazioni finanziate dai contributi.

Calcolo dei contributi Il più comune criterio di calcolo è quello di una percentuale (detta **Premio**, parola che confonde quindi stai attento) riferita alla retribuzione che l'attivo percepisce.

$$\text{contributo} = \text{premio} \times \text{salario}$$

Quali tipi di pensioni esistono? Segue una casistica personalmente rielaborata dalla dispensa:

- **Pensioni dirette:** Sono pensioni che tutelano gli attivi. Credo si chiamino così perché pagate direttamente dagli attivi.
  - **Pensioni di invalidità** In caso di invalidità permanente
  - **Pensioni di vecchiaia** In caso di vecchiaia
  - **Pensioni per altre cause** In caso di invalidità per altre cause
- **Pensioni indirette:** Sono pensioni che tutelano i familiari dell'attivo.
  - **Pensioni indirette** Sono pensioni rivolte al **Nucleo superstite dell'attivo** cioè ai familiari di colui che è morto
  - **Pensioni di reversibilità** Sono pensioni rivolte al **Nucleo superstite del pensionato** in quanto l'attivo ormai pensionato è deceduto

  Osservazione: Una sotto categoria della pensione in diretta allo stesso nome.
  Osservazione: Non esiste più dal 2011 la cosiddetta "pensione di anzianità"

3 Il principio di equivalenza attuariale ed i sistemi finanziari di gestione

Principio di equivalenza attuariale (o $\sim$ Condizione di equilibrio attuariale all'inizio della gestione): *Stabilisce che il valore attuariale delle prestazioni future del fondo deve essere uguale al valore attuariale dei contributi che verranno versati sul fondo.*

Sistema finanziario di gestione Diremo che avremmo fissato un sistema finanziario di gestione solo se avremo definito esattamente l'insieme dei lavoratori a cui si riferiscono i contributi e se avremo definito la regola con cui determinare i contributi. Tutto ciò allo scopo di sapere se la condizione di equilibrio attuariale sia o meno verificata.
Ci sono due tipi di finanziamento:

- **Finanziamento individuale** Lo scopo è realizzare un *equilibrio attuariale individuale*, si considera un singolo individuo. La questione è capire la modalità con cui ogni individuo deve versare i contributi per finanziare la propria pensione per realizzare tale equilibrio.
- **Finanziamento collettivo**: Lo scopo è realizzare un *equilibrio attuariale collettivo*, si considera una collettività di individui.

Osservazione. L'equilibrio individuale per tutti gli individui della collettività implica l'equilibrio collettivo.

Classificazione dei sistemi finanziari di gestione Ci sono solo due tipi di sistemi ed hanno importanti differenze fra loro:

- **Sistemi finanziari a capitalizzazione**: I contributi versati sono capitalizzati per coprire le prestazioni del fondo. (es rendita vitalizia nelle assicurazioni private). Qui invece si ha una logica di equilibrio attuariale individuale.

  L'equilibrio attuariale è raggiunto in una collettività che si *autofinanzia*.

  Solo qui avviene la formazione delle così dette *riserve*.
- **Sistemi finanziari a ripartizione**: I contributi ottenuti in ciascun anno di gestione del fondo sono interamente impiegati per la copertura delle prestazioni del fondo di quell'anno. Il sistema finanziario ripartizione non è presente nelle assicurazioni private.

  Notiamo come i beneficiari delle prestazioni, che sono i pensionati, non coincidono con coloro che pagano i contributi, cioè gli attivi.

Mutualità e solidarietà Nei fondi pensione normalmente ogni individuo versa un *premio medio*, nel senso di aliquota, che è stabilito in relazione a tutti gli assicurati indipendentemente dalla classe di rischio a cui appartengono. Si ottiene così sia la cosiddetta **mutualità** sia la cosiddetta **solidarietà**. L'effetto solidarietà è possibile in quanto per i fondi a cui ci riferiamo vige la condizione di obbligatorietà di assicurazione.

Se facciamo valutazioni a livello individuale entra in gioco la mutualità. Se facciamo valutazioni a livello collettivo entra in gioco oltre all mutualità anche la solidarietà.

In generale nelle assicurazioni private, è importante far pagare gli assicurati il cosiddetto premio ecco c'è quello col caricamento di sicurezza e non un premio diverso dovuto all'effetto mutualità. Mentre si può fare nell'assicurazione obbligatoria, qui quindi ci si può discostare dalla situazione di equilibrio individuale.

4 Il sistema dei tre pilastri

Per la storia dello sviluppo del sistema previdenziale in Italia si è andata formando una struttura a 3 livelli chiamata **sistema dei tre pilastri** che ha l'obiettivo di consentire la costituzione di elevate prestazioni pensionistiche. Questa struttura prevede

A fine anni 80 è stato anche proposto un quarto pilastro che si riferisce al lavoro a tempo parziale di individui ultrasessantenni in condizioni di remunerazione scarse.

- Primo pilastro: Ingloba i vecchi *regime generale della previdenza* e *regime speciale dipendenti pubblici*, ossia i lavoratori dei settori privati i dipendenti pubblici l'Inps e l'inpdap. È il sistema previdenziale pubblico. È obbligatorio. Eroga prestazioni di previdenza di base cioè prestazioni primarie.

Primo pilastro	Secondo pilstrato	Terzo pilastro
Previdenza pubblico Rivolta alle esigenze primarie di ex attivi	**Previdenza complementare** Rivolta a imprese o associazioni professionali	**Previdenza individuale** Costituita assicurazioni private individuali

- Secondo pilastro. Ingloba i fondi di categoria e classe dei lavoratori, ingloba. *E' la vecchia previdenza complementare.*
- Terzo pilastro: riguarda le *assicurazioni private*. È il sistema della previdenza individuale basato sulle assicurazioni private (ad esempio polizze sulla durata di vita)

A fine anni 80 è stato anche proposto un quarto pilastro che si riferisce al lavoro a tempo parziale di individui ultrasessantenni in condizioni di remunerazione scarse.

Regime previdenziale È la caratteristica con cui si **classificano** i sistemi previdenziali, ne esistono tre:

- **Regime generale (della previdenza)** è "l'insieme delle norme emanate dallo Stato per regolare con carattere di obbligatorietà l'erogazione delle prestazioni delle assicurazioni sociali e le relative contribuzioni estese a una larghissima parte della popolazione".
  - Spesso i fondi del sistema finanziario di gestione sono a ripartizione
- **Regime speciale (della previdenza)** regime che si riferisce a particolari categorie di lavoratori come ad esempio i dipendenti dello Stato o di enti pubblici.
- **Regime complementare (della previdenza)** regime che si riferisce ai lavoratori di una azienda o ad una categoria di lavoratori di particolari settori di attività.
  - Spesso i fondi pensione del regime complementare sono a capitalizzazione individuale o collettiva. In presenza o meno di condizioni di obbligatorietà di assicurazione.

5 Il metodo contributivo e il metodo retributivo per il calcolo delle pensioni

Esistono due sono i metodi per il calcolo della pensione.

- **Metodo contributivo** Le prestazioni sono commisurate ai contributi versati (occhio, ai contributi)
- **Metodo retributivo** Le prestazioni sono commisurate alla retribuzione percepita in un periodo di attività lavorativa (occhio alle retribuzioni)

Metodo contributivo Distinguiamo 2 casi a seconda che il metodo si è applicato al primo pilastro, cioè al regime generale di previdenza, oppure secondo pilastro, cioè al regime complementare:

1) Nel caso di pensione di secondo pilastro, cioè previdenza complementare, i contributi sono investiti ed il loro montante è convertito in una rendita di pensione nell'istante del pensionamento.

   Osservazione. I contributi pensioni del primo pilastro a volte non vengono "realmente" capitalizzati bensì vengono rivalutati al momento del pensionamento secondo opportuni coefficienti di rivalutazione.

   Ipotesi: un soggetto attivo ha maturato $\boxed{T}$ anni di anzianità lavorativa, il versamento dei contributi e l'erogazione delle prestazioni avvengano annualmente e anticipatamente, possiamo dunque descrivere la situazione con la formula seguente del montante:

$$C = \sum_{t=1}^{T} c_t k_t^c$$

   dove

   - $\boxed{c_1, c_2, ..., c_T}$ sono i contributi versati dall'attivo negli anni di lavoro primo, secondo, ...,T-esimo e

- $k^c_1, k^c_2, \ldots, k^c_T$ sono i fattori ricapitalizzazione con l'investimento dei corrispondenti contributi.
- C è l'importo che verrà trasformato in una rendita che verrà erogata all'attivo oppure suo nucleo superstite

La successione dei contributi viene di norma stabilita in modo tale da garantire al momento del pensionamento una rendita vitalizia in sintonia con lo spirito del primo pilastro previdenziale (ad esempio in maniera da realizzare, in media, una pensione che sia pari al 70% dell'ultimo salario con 40 anni di anzianità lavorativa).

2) **Non presente in dispensa (problema)**.
◦ Ci si può svincolare ad obiettivi e pensare a misura di premio anche molto flessibili.

Metodo retributivo In questo caso di parla di **pensione retributiva** la quale è proporzionale alla retribuzione dell'attivo, prendendo come riferimento un periodo di tempo che dipende dalla categoria di lavoratore (ad esempio gli ultimi m anni di attività lavorativa).

Il sistema previdenziale italiano La pensione è calcolata con un sistema di calcolo misto contributivo/retributivo oppure solo col contributivo.

Ipotesi per l'esempio seguente: assumiamo che la pensione retributiva dipenda dagli ultimi m anni di lavoro.

Nel caso di metodo di calcolo misto la pensione è data dalla somma delle quote, la prima calcolata col metodo retributivo e la seconda col metodo contributivo.

I) La quota del metodo retributivo dipende dalla *retribuzione pensionabile*, dalla *anzianità contributiva* e dalle *aliquote di rendimento* cioè aliquote, ossia percentuali, che si riferiscono a diverse fasce di importi.

△ La **retribuzione pensionabile** è la media aritmetica delle retribuzioni annue rivalutate in qualche modo. Si considerano solo le retribuzioni annue del periodo di riferimento per cui si fa il calcolo della pensione (come ad esempio ultimi m anni). In formule, indichiamo con

* $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(m)}$ salari che il lavoratore percepito in ciascuno degli anni considerati ai fini del calcolo della pensione
* $k^r_1, k^r_2, \ldots, k^r_m$ i corrispondenti coefficienti di rivalutazione dei salari,

allora la retribuzione pensionabile è così calcolata

$$R = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} k^r_j \, s^{(j)}$$

△ L'**anzianità contributiva** corrisponde al semplice numero di anni di attività lavorativa

△ Le **aliquote di rendimento**

⇒ La *pensione spettante per 1 anno di anzianità* $= f($retribuzione pensionabile, dalle aliquote opportune$)$

⇒ **L'importo annuo della pensione** $=$ valore della pensione per 1 anno anzianità$\times$ numero degli anni di anzianità contributiva

II) La quota del metodo contributivo si basa su due entità: la prima è una qualche rivalutazione dei contributi versati, rivalutazione che forma il *montante contributivo*, mentre la seconda riguarda la trasformazione in rendita di questo montante.

Osservazione. Il metodo per determinazione le prestazioni è indipendente dal sistema finanziario di gestione! Quindi ci sono 4 casi possibili da questo punto di vista.

	Sistema finanziario a capitalizzazione	Sistema finanziario a ripartizione
metodo contributivo		
metodo retributivo		

6 Le basi tecniche

- **Basi tecniche demografiche** Serve conoscerle per via delle diverse cause di eliminazione possibili
- **basi tecniche finanziarie** Serve conoscerle per via della valutazione di importi di denaro in epoche diverse. Infatti la pensione dipende, all'epoca del pensionamento, anche dai salari percepiti nei diversi anni di attività.
- **basi tecniche economico-salariali** Serve conoscerle per via dei salari percepiti da coloro che sono ancora attivi all'istante di valutazione

Capitolo 2. Modelli a più cause di eliminazione

Ipotesi: Consideriamo una collettività di individui analoghi (ad esempio assicurati riferiti alla stessa forma assicurativa e coetanei).

Ipotesi: Gli individui della collettività sono soggetti a una o più **uscite** (cioè **eliminazioni**) dalla collettività per una fra le diverse **cause di eliminazione**.

Osservazione. Lo studio lo studio di una collettività di rischi soggetta a più cose di eliminazione è chiamato *Teoria dei rischi concorrenti*.

△ **Collettività suddivisa in gruppi**: Ripartizione della collettività secondo specifiche caratteristiche di ciascun gruppo.

△ **Collettività unitaria** Nessuna ripartizione della collettività.

- **Collettività aperta**: Se possono esserci nuovi ingressi nella collettività.
- **Collettività chiusa**: Se possono esserci nuovi ingressi nella collettività.

Ipotesi: Lavoreremo sulla collettività chiusa (in questo capitolo).

2 Eliminazione per una sola causa.

Ipotesi: fissato un generico soggetto della collettività

- $\boxed{\mathsf{x}}$ Età del soggetto
- $\boxed{\mathsf{T}}$ Anni di vita dalla nascita fino al decesso. Valori compresi fra zero e omega
- $\boxed{\omega}$ Età estrema. Il numero di anni che nessun individuo della **continuità CONTROLLARE comunità? di attivi?** può raggiungere
- $\boxed{\mathsf{G}_\mathsf{T}(x) = Pr(\mathsf{T} \leq x)}$ Funzione di ripartizione di te (attenzione che la variabile aleatoria è T.
- $\boxed{\mathsf{S}_\mathsf{T}(x) = Pr(\mathsf{T} > x)}$ Funzione di sopravvivenza di T.

Ipotesi: $S(0) = Pr(T > 0) = 1$
Ipotesi: di non sommabilità $\lim_{x \to +\infty} S(x) = 0$
Ipotesi: $S(x)$ è derivabile $\Rightarrow \mathrm{g(x)} = -\dfrac{\mathrm{dS(x)}}{\mathrm{dx}}$

Nota terminologica (anticipazione del prossimo argomento): di seguito non è specificata, in quanto è unica a causa di uscita dalla collettività, più avanti si specificherà una causa sostituendo a mu il simbolo al Appunti di Tecnica attuariale dei fondi pensione (TAFP) 2 giugno 2023 Premessa I presenti appunti sono tratti dalle dispense del prof. M. Zecchin e L. Picech , "Appunti delle lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali" con alcune integrazioni/rielaborazioni personali. Qui di seguito puoi scaricare il file zippato col codice Latex di questi appunti (Github repository) https://github.com/ottarub98/YouActuary/tree/master/FondiIndice Capitolo 1: Generalità 3 2.Pensioni . . . . 3 3 Il principio di equivalenza attuariale ed i sistemi finanziari di gestione . . . . 4 4 Il sistema dei tre pilastri . . . . 4 5 Il metodo contributivo e il metodo retributivo per il calcolo delle pensioni . . . . 5 6 Le basi tecniche . . . . 7 Capitolo 2. Modelli a più cause di eliminazione 8 2 Eliminazione per una sola causa. . . . . 8 3. Eliminazione per più cause. . . . . 11 4 Probabilità relative ed assolute. . . . . 12 5 Relazioni approssimate tra probabilità relative ed assolute. . . . . 14 Capitolo 3. Collettività suddivisa in gruppi 15 1. Probabilità di transizione fra gruppi. . . . . 15 Capitolo 4. Lo schema I.V.S. 19 1. I gruppi nello schema I.V.S. . . . .

fa j.

- $_t\mathrm{q}_x^{\prime(\mu)} = Pr(x < T \leq x+t | T > x)$ la probabilità che un generico individuo che è nella collettività all'età x, venga eliminato dalla collettività fra le età (x,x +t]

- $_t\mathrm{p}_x^{\prime(\mu)} = Pr(T > x+t | T > x)$ la probabilità che un generico individuo che è nella collettività all'età x, sia nella collettività all'età x + t

- $_t\mathrm{p'}_x^{(\alpha_j)} = Pr\left(T > x+t, (C = \alpha_j) \,|T > x\right)$ la probabilità che un generico individuo che è nella collettività all'età x, sia nella collettività all'età x + t

  $\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr(x < T \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{_{\Delta x}q'(\mu)}{\Delta x}$ **Intensità di eliminazione** (nell'universo di una sola causa di eliminazione)

Ipotesi di non sommabilità: $\lim_{x \to +\infty} \mu(u)du = +\infty$

Notazione: Nei simboli che seguono l'apice destro significa che gli individui della collettività in esame sono soggetti ad una sola causa di eliminazione, che qui abbiamo indicato con l'apostrofo.

$$_t\mathrm{q}_\mathrm{x}^{(\mu)} +_t \mathrm{p}_\mathrm{x}^{(\mu)} = 1$$

Ipotesi: $_t\mathrm{p}_0^{\prime(\mu)} = S(t)$

Tabella 1: Relazioni (dimostrate) fra entità

	$S(\cdot)$
${}_t\mathsf{q}_\mathsf{x}^{(\mu)}$	$1-\dfrac{S(x+t)}{S(x)}$
${}_t\mathsf{p}_\mathsf{x}^{(\mu)}$	$\dfrac{S(x+t)}{S(x)}$
$\mu(x)$	$-\dfrac{d}{dx}\log(S(x))$
$S(x)$	$S(y)e^{-\int_y^x \mu(u)du}$

Osservazione (importante) sulla densità (cioè derivata di G(x)):

$$\frac{d}{dx}G(x) = S(x)\cdot\mu(x)$$

La densità g(x) scritta come prodotto fra funzione di sopravvivenza ed intensità di mortalità istantanea è così interpretabile: è la probabilità che un soggetto, essendo arrivato vivo all'età (**controllare, manca età!**) , esca dalla collettività ad età x.

Osservazione opposta: Viceversa si può esprimere $S(x)$ in funzione dell'intensità mu:

$$S(x) = S(y)e^{\left(-\int_\mathsf{y}^\mathsf{x}\mu(\mathsf{u})\mathsf{du}\right)}$$

da questa possiamo ottenere le due relazioni seguenti relazioni fra S e mu:

$$S(x+t) = S(x)e^{\left(-\int_x^{x+t}\mu(u)du\right)}$$

$$S(x) = e^{\left(-\int_0^x\mu(u)du\right)}$$

Ipotesi di non sommabilità: $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x \mu(u)du = +\infty$.

Tabella 2: Relazione fra p e q ad una causa e mu

	$\mu(\cdot)$
${}_t\mathsf{q'}_\mathsf{x}^{(\mu)}$	$1-e^{-\int_0^\mathsf{t}\mu(\mathsf{x}+\mathsf{u})\mathsf{du}}$
${}_t\mathsf{p'}_\mathsf{x}^{(\mu)}$	$e^{-\int_0^\mathsf{t}\mu(\mathsf{x}+\mathsf{u})\mathsf{du}}$

$${}_t\mathsf{q}_\mathsf{x}^{\prime(\mu)}(\mathsf{u}) = \int_0^\mathsf{t} {}_u\mathsf{p'}_\mathsf{x}^{(\mu)}\mu(\mathsf{x}+\mathsf{u})\mathsf{du}$$

2.3 Introduco la variabile elle Esprimiamo le 4 variabili p, q, mu ed S in funzione di 'elle', numero di individui nella collettività, in funzione di 'q' ed infine in funzione del numero medio degli eliminati 'd':

- $\ell(0)$ il numero, certo, di individui presenti inizialmente nella collettività;
- $\tilde{\ell}(\mathsf{x}) = \sum_{r=1}^{\ell(0)}\left|\mathsf{T}_{(\mathsf{r})} > \mathsf{x}\right|$ la variabile aleatoria che fornisce il numero di quanti fra gli $\ell(0)$ individui sono ancora nella collettività all'età x

Osservazione. Poiché posso scrivere anche così questa variabile $\tilde{\ell}(\mathsf{x}) = \sum_{r=1}^{\ell(0)} \left|\mathsf{T}_{(\mathsf{r})} > \mathsf{x}\right|$ (dove barrette verticali indichiamo la v.a. ”indicatore di evento”) allora la sua speranza matematica, (che indichiamo senza la tilde) e che è così formulata $\ell(\mathsf{x}) = \sum_{r=1}^{\ell(0)} Pr\left\{\mathsf{T}_{(\mathsf{r})} > x\right\} = \ell(0)\mathsf{S}(\mathsf{x})$ fornisce il numero medio di individui che sono ancora nella collettività all'età x (non dice la proporzione, ma il numero assoluto)

- r indica l'individuo r-esimo della collettività
- $\mathsf{T}_{(\mathsf{r})}$ la variabile aleatoria che indica la durata di appartenenza alla collettività, a partire dall'età 0 , dell' individuo r-esimo della collettività, con $\mathsf{r} = 1, 2, \ldots, \ell(0)$;

Ipotesi: Supponiamo che gli eventi $(\mathsf{T}_{(\mathsf{r})} > \mathsf{x})$ al variare di r siano equiprobabili.

Notazione: $\boxed{\mathsf{q}_\mathsf{x}^{(\mu)}} =_1 \mathsf{q}_\mathsf{x}^{(\mu)}$

- $\mathsf{d}'^{(\mu)}_\mathsf{x} = \ell(\mathsf{x}) - \ell(\mathsf{x}+1) = \mathsf{q}'^{(\mu)}_\mathsf{x}\ell(\mathsf{x})$ è il numero medio degli eliminati fra le età x e $\mathsf{x}+1$.

Tabella 3: Relazioni (dimostrate) fra p, q ed l

$_t\mathsf{p}_\mathsf{x}{}'^{(\mu)}$	$\dfrac{l(x+t)}{l(x)}$	Se $t=1$: $_1\mathsf{p}_\mathsf{x}{}'^{(\mu)} = \dfrac{l(x+1)}{l(x)}$
$_t\mathsf{q}_\mathsf{x}{}'(\mu)$	$\dfrac{l(x)-l(x+t)}{l(x)}$	Se $t=1$: $_1\mathsf{q}_\mathsf{x}{}'(\mu) = d'_x(\mu)l(x)$

- $d'^{(\mu)}_x$ È il numero medio degli eliminati fra x e x +1

Tabella 4: Legami dimostrati fra probabilità di uscita, permanenza e numero decessi con i numero medio di individui in collettività

	$\ell(\cdot)$
$_t\mathsf{q}'^{(\mu)}_\mathsf{x}$	$1 - \dfrac{\ell(x+t)}{\ell(x)}$
$_t\mathsf{p}'^{(\mu)}_\mathsf{x}$	$\dfrac{\ell(x+t)}{\ell(x)}$
$d'^{(\mu)}_x$	$\ell(x) - \ell(x+1)= \mathsf{q}'^{(\mu)}_\mathsf{x}\ell(x)$

Con la relazione ricorrente, una volta noto $\ell(0)$ e sono note le probabilità di eliminazione $q_x'^{(\mu)}$ è possibile calcolare $\ell(0), \ell(1), \ell(2), \ldots$

3. Eliminazione per più cause.

Ipotesi: una collettività chiusa di individui.
Ipotesi: fissato un intervallo di tempo, l'eliminazione può avvenire per una sola causa di eliminazione (cioè le cause di eliminazione sono incompatibili).

Scopo: la determinazione delle espressioni delle probabilità di eliminazione e di sopravvivenza per le singole cause e per qualunque causa attraverso le intensità di eliminazione per le singole cause; la determinazione dei numeri medi di eliminati, per ciascuna causa, e di quanti rimangono nella collettività in dati intervalli di tempo.

Tabella 5: Riassunto (mio) relazioni fra le 5 variabili introdotte (per una sola causa di eliminazione)

	$G(\cdot)$	$S(\cdot)$	${}_t\mathsf{p}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}$	${}_t\mathsf{q}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}$	$\mu(x)$
$G(x)$	-	$1-S(x)$	7	8	$\mu(x)S(x)$
$S(x)$	$1-G(x)$	$y \leq x \Rightarrow S(y)e^{-\int_y^x \mu(x)dx}$	3	4	$\frac{G(x)}{\mu(x)}$ o $e^{-\int_0^x \mu(u)du}$
${}_t\mathsf{p}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}$	9	$\frac{S(x+t)}{S(x)}$	-	$1-{}_t\mathsf{q}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}$	$e^{-\int_0^t u(x+u)du} = e^{-\int_x^{x+t} u(u)du}$
${}_t\mathsf{q}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}$	13	$\frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)}$	$1-_t \mathsf{p}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}$	-	$\int_0^t \mu(x+u)e^{-\int_0^u \mu(x+u)}du$
$\mu(x)$	17	$-\frac{S(x)'}{S(x)}$	19	$\mu(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}_{\Delta x}\mathsf{q}'^{(\mu)}_{\mathsf{x}}}{\Delta x}$	-

Osservazioni mie In questo nuovo contesto sembra che la Funzione di ripartizione "G(x)" è funzione di sopravvivenza "Sj(x)" non abbiano nessuna importanza. Anche se **forse** vale che $S(x) = 1 - \sum_{j=1}^{n} G_j(x) =$ "$1 - G(x)$" e "$S_j(x) = 1 - G_j(x)$".

- n Numero di cause di eliminazione
- α Ogni alfa è una possibile causa di eliminazione (per tutti).
- C Numero aleatorio. E' la causa di uscita(cioé ogni sua determinazione rappresenta una causa di uscita).
- T Numero aleatorio. Durata di permanenza nella collettività dalla età 0.
- (T, C) Coppia aleatoria.
- $\mathsf{G}_j(x) = P(T \leq x, (C = \alpha_j))$ Funzione di ripartizione congiunta della coppia aleatoria, riferita alla causa di uscita j.

Ipotesi: $\mathsf{G}_j(x)$ è derivabile

La funzione di sopravvivenza per via della incompatibilità delle cause e sfruttando la disintegrabilità è pari a $S(x) = 1 - \sum_{j=1}^{n} G_j(x)$

- ${}_t\mathsf{q}_x^{(\alpha_j)} = Pr(x < T \leq x+t, (C = \alpha_j) | T > x)$ Probabilità che un soggetto esca dalla collettività per **una causa** j, fra le età x e $x+t$ (con x+t incluso, come ovunque in questi simboli) supponendo sia vivo all'età x. Il corrispondente simbolo per le probabilità di sopravvivenza non è presente, credo che esita ma che non abbia molto senso.
- ${}_t\mathsf{q}_x^{(\alpha)} = Pr(x < T \leq x+t | T > x)$ Probabilità che un soggetto esca dalla collettività per qualsiasi causa, fra le età x e x+t supponendo sia vivo all'età x
- ${}_t\mathsf{p}_x^{(\alpha)} = Pr\{T > x+t | T > x\}$ Probabilità che un individuo sia nella collettività all'età $x+t$ subordinatamente all'ipotesi che esso sia nella collettività all'età X

3.3 Intensità di eliminazione per la causa alfa j La "a" sta per *all* nel senso di tante cause di eliminazione (ma la notazione confonde).

- $\mathsf{a}\alpha_\mathsf{j}(\mathsf{x}) = \lim_{\Delta\mathsf{x} \to 0} \frac{{}_{\Delta\mathsf{x}}\mathsf{q}_\mathsf{x}^{(\alpha_\mathsf{i})}}{\Delta\mathsf{x}}$ Intensità di eliminazione per la causa di uscita α_j. (valuto l'intensità di uscita per una causa fra le molte)

- $a\mu(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0} \frac{{}_{\Delta\mathrm{x}}\mathrm{q}_\mathrm{x}^{(\alpha)}}{\Delta\mathrm{x}}$ Intensità di eliminazione per qualunque causa

$a\mu(\mathrm{x}) = \mathrm{a}\alpha_1(\mathrm{x}) + \mathrm{a}\alpha_2(\mathrm{x}) + \ldots + \mathrm{a}\alpha_\mathrm{n}(\mathrm{x})$ (è immediata)

Tabella 6: **Relazione da valutare se tenere**

	$\mu(\cdot)$
${}_t\mathrm{p}_x^{(\alpha)}$	1
${}_t\mathrm{q}_x^{(\alpha)}$	3
${}_t\mathrm{p}_x^{(\alpha_j)}$	1
${}_t\mathrm{q}_x^{(\alpha_j)}$	3

	$\mu(\cdot)$	$a\mu(\cdot)$
${}_t\mathrm{q}'^{(\mu)}_\mathrm{x}$	$1 - e^{-\int_0^\mathrm{t} \mu(\mathrm{x}+\mathrm{u})\mathrm{du}}$	${}_\mathrm{t}\mathrm{p}_\mathrm{x}^{(\alpha)} = \exp\left(-\int_0^\mathrm{t} \mathrm{a}\mu(\mathrm{x}+\mathrm{u})\mathrm{du}\right)$
${}_t\mathrm{p}'^{(\mu)}_\mathrm{x}$	$e^{-\int_0^\mathrm{t} \mu(\mathrm{x}+\mathrm{u})\mathrm{du}}$	${}_\mathrm{t}\mathrm{q}_\mathrm{x}^{(\alpha)} = \int_0^\mathrm{t} {}_\mathrm{u}\mathrm{p}_\mathrm{x}^{(\alpha)}\mathrm{a}\mu(\mathrm{x}+\mathrm{u})\mathrm{du}\Big)$

$$ {}_\mathrm{t}\mathrm{q}_\mathrm{x}^{(\alpha_\mathrm{j})} = \int_0^\mathrm{t} {}_\mathrm{u}\mathrm{p}_\mathrm{x}^{(\alpha)}\mathrm{a}\alpha_\mathrm{j}(\mathrm{x}+\mathrm{u})\mathrm{du} $$

Che differenza c'è tra MU ed alfa J ???

- ${}_\mathrm{t}\mathrm{d}_\mathrm{x}^{(\alpha_\mathrm{j})} = l(x)_t q_x^{(\alpha_j)}$ il numero medio di eliminati per la causa α_j nell'intervallo di età (x, x+t]

$$ {}_\mathrm{t}\mathrm{q}_\mathrm{x}^{(\alpha)} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \frac{{}_\mathrm{t}\mathrm{d}_\mathrm{x}^{(\alpha_\mathrm{j})}}{\ell(\mathrm{x})} $$

4 Probabilità relative ed assolute.

Ipotesi: n cause di eliminazione incompatibili con le rispettive n intensità di eliminazione. Sia inoltre l'intensità di eliminazione per qualunque causa.

Ipotesi: n collettività ad una sola causa di uscita $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ con le rispettive n intensità di eliminazione $\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x)$.

- ${}_t\mathrm{p}_x^{(\alpha)}$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di sopravvivenza in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

- ${}_t\mathrm{q}_x^{(\alpha)}$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di eliminazione in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

- ${}_t\mathrm{q}'^{(\alpha_j)}_x$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di eliminazione in una collettività soggetta alla sola causa di eliminazione j.

- ${}_t\mathrm{p}'^{(\alpha_j)}_x$ **Probabilità assoluta** o **indipendente** o **pura** di sopravvivenza in una collettività soggetta alla sola causa di eliminazione j.

- $_tp_x^{(\alpha_j)}$ **Probabilità relativa** o **dipendente** di sopravvivenza in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.
- $_tq_x^{(\alpha_j)}$ **Probabilità relativa** o **dipendente** di eliminazione in una collettività soggetta a n cause di eliminazione.

$_tq_x^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} {}_tq_x^{(\alpha_j)}$ In una collettività soggetta ad n cause e di eliminazione la probabilità assoluta di eliminazione è la somma di tutte le probabilità relative di eliminazione.

Ipotesi: $a\alpha_j(x) = \alpha_j(x)$ per $j = 1, 2, \ldots, n$ È una ipotesi necessaria per creare un ponte fra le due seguenti situazioni: una collettività con una sola causa di eliminazione ed n collettività ciascuna delle quali è soggetto ad un'unica causa di uscita. L'intensità di eliminazione per causa j-esima nel modello con n cause di eliminazione è uguale all'intensità di eliminazione del modello di eliminazione per una sola causa.

Relazione fra probabilità assolute e relative di eliminazione (popolazione soggetta ad n cause di eliminazione)
$_tq_x^{(\underline{\alpha})} = \sum_{j=1}^{n} {}_tq_x^{(\alpha_j)}$ "in una collettività soggetta ad n cause di eliminazione la probabilità assoluta di eliminazione è la somma di tutte le probabilità relative di eliminazione"

Relazione di Karup (fra probabilità) (dimostrata) In una collettività soggetta ad n cause di eliminazione la probabilità assoluta di sopravvivenza è pari al prodotto delle probabilità assolute di sopravvivenza riferite ad una collettività soggetta una sola causa di eliminazione

$$_tp_x^{(\underline{\alpha})} = \prod_{j=1}^{n} {}_tp'^{(\alpha_j)}_x \left(= \prod_{j=1}^{n} (1 - q'^{(\alpha_j)}_x \right)$$

Conseguenze relazione di Karup
- $_tp_x^{(\underline{\alpha})} \leq_t p'^{(\alpha_j)}_x$
- $q_x^{(\alpha_j)} \leq q'^{(\alpha_j)}_x$ (vale per qualsiasi t). La probabilità di eliminazione quando esistono più cause di uscita è sempre minore uguale della probabilità di eliminazione quando esiste una sola causa di uscita.
'La probabilità assoluta di eliminazione fra le età x e x + 1 è maggiore o uguale della probabilità relativa "corrispondente" (per meglio cogliere il senso di questa condizione, si pensi al caso di tre cause di uscita, che siano "morte", "invalidità" e "vecchiaia"; la condizione si interpreta allora nel seguente modo: la probabilità di eliminazione da una collettività in cui l'unica causa di eliminazione sia la morte è non minore della probabilità di eliminazione per morte da una collettività in cui l'eliminazione possa avvenire anche per le altre due cause'.

4.3 Determino le espressioni delle probabilità relative in termini delle probabilità assolute Il motivo è disporre di relazioni che leghino valutazioni in collettività con più cause di eliminazione incompatibili on valutazioni in collettività con una sola causa di eliminazione.
$_tq_x^{(\alpha_j)} = \int_0^t \frac{d}{du}{}_uq'^{(\alpha_j)}_x \prod_{h\neq j}^{n} \left(1 -_u q'^{(\alpha_h)}_x\right)$ du che fornisce la probabilità relativa $_tq_x^{(\alpha_j)}$ in termini delle probabilità assolute (e ciò ovviamente vale $\forall j$) (vedi quaderno pg 23 per la dimostrazione)

5 Relazioni approssimate tra probabilità relative ed assolute.

Le formule appena trovate sono molto complicate. Facciamo quindi due ipotesi semplificatrici e riscriviamo i legami in modo approssimato.

1) Ipotesi di distribuzione uniforme sulle probabilità assolute: $_tq'^{(\alpha_j)}_x = t \times q'^{(\alpha_j)}_x$ per $0 \leq t \leq 1, \forall j = 1, ..., n$.

da cui $q_x^{(\alpha_j)} = \int_0^1 \frac{d}{du}{}_u q_x^{(\alpha_j)} \prod_{h \neq j}^{n} \left(1 -_u q_x'^{(\alpha_h)}\right)$ du che diventa $q_x^{(\alpha_j)} = q_x'^{(\alpha_j)} \int_0^1 \prod_{h \neq j}^{n} \left(1 - u \times q_x'^{(\alpha_j)}\right)$ du.

2) Ipotesi di intensità di eliminazione costanti: $a\alpha_j(x+t) = a\alpha_j(x) \quad 0 \leq t < 1$ da cui anche $a\mu(x+t) = a\mu(x) \quad 0 \leq t < 1$

da cui, ponendo $t = 1$, ottengo $q_x^{(\alpha_j)} = \dfrac{\log p_x' \left(\alpha_j\right)}{\log p_x^{(\alpha)}} q_x^{(\alpha)}$ che fornisce una espressione delle probabilità relative in funzione delle assolute. Si osservi che questa relazione consente anche di esprimere le probabilità assolute mediante le relative.

1') (alternativa alla 1) Ipotesi di interpolazione esponenziale: $a\alpha_j(x+u) = a\alpha_j(x) \; \forall\, 0 \leq u < 1$

da cui $q_x^{\alpha_j} = \frac{\log p_x'^{\alpha_j}}{\log p_x^{\alpha}} (1 - p_x^{(\alpha)})$. Notare che $p_x^{(\alpha)}$ sono numeri noti dalle tavole.

Capitolo 3. Collettività suddivisa in gruppi

1. Probabilità di transizione fra gruppi.

Ipotesi: collettività suddivisa in n gruppi.
Ipotesi: Ogni individuo della collettività appartiene ad un solo gruppo. Ipotesi: Ogni individuo della collettività si sposta da un gruppo all'altro secondo un meccanismo aleatorio.

- ω_i la prima età che nessun individuo può raggiungere nel gruppo i, per $i = 1, 2, \ldots, n$: quindi $\omega_i - 1$ è la massima età raggiungibile nel gruppo i.
- α l'età minima di appartenenza a ciascun gruppo, che supponiamo sia la stessa per tutti i gruppi (è la semplice generalizzazione al caso in cui queste età non sono tutte uguali) ; allora $\alpha \leq \omega_i - 1$, per ogni i.
- x l'età d'ingresso in un gruppo; per un individuo che appartenga al gruppo i è $\alpha \leq x \leq \omega_i - 1$
- t l'antidurata di appartenenza ad un gruppo.

Ipotesi per questo capitolo: l'unità di misura del tempo sia l'anno.
Ipotesi per questo capitolo: i passaggi attraverso i gruppi avvengano solo ad epoche intere.
Ipotesi per questo capitolo: ci possa essere un solo passaggio per anno.
Ipotesi per questo primo paragrafo: In particolare in supponiamo che

- il sistema di riferimento temporale sia tale che età ed epoca coincidano.

Consideriamo un individuo della collettività che è entrato nel gruppo i all'età x provenendo da un altro gruppo, e che è rimasto nel gruppo i fino all'età x + t.

Viene usata la scrittura $[x] + t$ (oppure (x, t), come scriveremo nel seguito) per tenere distinti i ruoli di x e te poter fare riferimento a tavole selezionate.

- $q^{ij}_{[x]+t}$ **Probabilità di transizione in un gruppo**. E' la probabilità che l'individuo passi (è infatti la lettera q) nel gruppo j all'età $x + t + 1$
- $p^{i}_{[x]+t}$ **Probabilità di permanenza in un gruppo**. E' la probabilità che l'individuo rimanga (è infatti la lettera p) nel gruppo i almeno fino all'età $x + t + 1$. (occhio solo i all'esponente).

La somma di questi due simboli da uno: $\Rightarrow \sum_{j \neq i} q^{ij}_{[x]+t} + p^{i}_{[x]+t} = 1$

Ipotesi: $q^{ij}_{[x]+t} = 0$ Per pura comodità.

Allora la precedente relazione diventa $\sum_{j=1}^{n} q^{ij}_{[x]+t} + p^{i}_{[x]+t} = 1$

- ${}_{u/}q^{ij}_{[x]+t}$ la probabilità che un individuo che è entrato nel gruppo i all'età x provenendo da un altro gruppo e vi è rimasto fino all'età x + t, rimanga nel gruppo i per altri u anni, ovvero fino all'età x + t + u,e passi nel gruppo j all'età x + t + u + 1.

  Per $u = 0$ risulta ${}_{0/}q^{ij}_{[x]+t} = q^{ij}_{[x]+t}$

- ${}_{u}p^{i}_{[x]+t}$ la probabilità che un individuo che è entrato nel gruppo i all'età x provenendo da un altro gruppo e vi è rimasto fino all'età x + t, rimanga ancora nel gruppo i almeno fino all'età x+t+u. (Nota che manca giustamente a probabilità riferita all'intervallo u e $u + 1$. Nota che nel simbolo manca la barra.)

  Per $u = 0$ risulta ${}_{0}p^{i}_{[x]+t} = 1$

1.3 Relazioni (alcune le ho omesse) $\mathsf{_u p^i_{[x]+t}} = \prod_{k=0}^{u-1} \mathsf{p^i_{[x]+t+k}}$ Cioè come in matematica vita, la probabilità su un intervallo di tempo differito è il prodotto delle probabilità dei singoli sotto intervalli. Inoltre vale anche che $\mathsf{_{u/}q^{ij}_{[x]+t}} =_u \mathsf{p^i_{[x]+t}\, q^{ij}_{[x]+t+u}}$ $\mathsf{_u p^i_{[x]+t}} =_{u-1} \mathsf{p^i_{[x]+t}\, p^i_{[x]+t+u-1}}$ In analogia perfetta con matematica vita, la probabilità di uscita dal gruppo J differita di u anni è come Calcolare la proprietà di rimanenza del gruppo fino ad anni con uscita nell'anno seguente.

Dalle ipotesi che le probabilità di passaggio da un gruppo ad un altro senza passaggi intermedi sono uguali per tutti gli individui della collettività, deriva che sono uguali per tutti gli individui anche le probabilità di permanenza in un gruppo.
Sottolineiamo che a partire da $q^{ij}_{[x]+t}$ si determinano $\mathsf{p^i_{[x]+t}}$, $\mathsf{_u p^i_{[x]+t}}$ e $\mathsf{_{u/}q^{ij}_{[x]+t}}$.

2 Numerosità medie dei gruppi alle varie epoche. qui $x, t \in N$

- $\ell^{i(0)}(x,t)$ il numero **certo** di individui di età x+t che sono nel gruppo i all'epoca 0, con età x d'ingresso nel gruppo i e antidurata t.
  Sono noti i numeri $\ell^{i(0)}(x,t)$ per $i = 1, 2, \dots, n$, ed ogni possibile x e t (quindi nel rispetto delle limitazioni inferiori e superiori delle età di appartenenza al gruppo i).

Scopo Siamo interessati a studiare, al tempo 0, il numero di individui di età x + t che ad un'epoca m (> 0) saranno nel gruppo i, con x età d'ingresso nel gruppo e t antidurata: si tratta di una v. a. $\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)$. Calcoleremo la sua speranza matematica nei casi di una collettività aperta e chiusa.

- m Epoca futura. (Dipende da 0 che è l'epoca di valutazione)
- i(m) Significa che all'epoca m si sta nel gruppo i
- $\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)$ al tempo 0, è una **variabile aleatoria** che esprime il numero di individui di età x + t che ad un'epoca m (> 0) saranno nel gruppo i, con x età d'ingresso nel gruppo e t antidurata. (nota che è come la vecchia notazione [x,t]).
- $\ell^{i(m)}(x,t)$=E $\left(\tilde{l}^{i(m)}(x,t)\right)$ è la speranza matematica della variabile aleatoria (nota bene: sia per collettività chiusa sia per una collettività aperta)

La durata massima di appartenenza ad un gruppo, poiché α e $\omega_i - 1$ sono le età estreme possibili di appartenenza ad un gruppo qualsiasi i è data dalla loro differenza numerica.

2.2 Vediamo il caso di una collettività chiusa. Questa collettività non ammette nuovi ingressi, cioè formata da individui entrati nella collettività soltanto all'epoca 0.
$\ell^{i(m)}(x,t)$ **Sono individui che all'epoca m hanno età x + t e si trovano nel gruppo i esattamente da t anni**; pertanto il loro ultimo ingresso nel gruppo i è avvenuto all'epoca m - t.

Osservazione. m è l'epoca di valutazione? No! l'epoca di valutazione è 0 cioè il soggetto ha x anni, **ma allora quando sappiamo che il soggetto ha x+t anni, l'istante di valutazione non è t? E' una ipotesi presa per vera? Pare di si.** Infatti scelgo l'istante (epoca) di valutazione 0 In corrispondenza a una dieta particolare, non è un istante fisso.

a) $m \le t$: Scelgo di mettere lo zero In questo caso gli individui che contribuiscono a formare la v.a. $\tilde{\ell}^{i(m)}(x,t)$ sono entrati (in età x nel gruppo i prima dell'epoca 0, sono nel gruppo i all'epoca 0 , e in quest'epoca sono nel gruppo esattamente da $t - m$ anni e pertanto il loro numero è $\ell^{i(0)}(x, t-m)$, che è noto. Poiché le probabilità di permanenza nel gruppo per tutti i possibili valori di x e t sono le stesse per tutti gli individui risulta:

$$\ell^{i(m)}(x,t) = \ell^{i(0)}(x, t-m)_m p^i_{[x]+t-m}$$

b) $m > t$: In questo caso si trova nel gruppo i all'epoca m con età x e ant ogni individuo entrato in esso all'epoca $m-t$ (che questa volta è successiva all'epoca 0) con età x e ivi rimasto per i successivi t anni. Allora per la determinazione di $\ell^{i(m)}(x,t)$ procediamo come segue.

- $\tilde{\lambda}_x^{i(m-t)}$ il numero aleatorio degli individui che entrano nel gruppo i all'epoca m - t con età x provenendo da altro gruppo

- $\lambda_x^{i(m-t)} = E\left(\tilde{\lambda}_x^{i(m-t)}\right)$ la sua speranza matematica.
  Per il suo significato, è definito per x > α (ricordiamo che la collettività è chiusa) e quindi x - α > 0.

Una volta ricordato che per 2 variabili aleatorie con un numero finito di determinazioni risulta che $E(X) = E_Y[E(X|Y)]$, allora abbiamo che: $\ell^{i(m)}(x,t) = \lambda_x^{i(m-t)} {}_t p^i_{[x]}$

- $\lambda^{i(j)(m)}(x-\tau,\tau) = \ell^{j(m-1)}(x-\tau,\tau-1)q^{ji}_{[x-\tau]+r-1}$ numero medio di individui di età x che all'epoca m sono nel gruppo i provenendo dal gruppo j, nel quale erano entrati all'età x - τ e vi erano rimasti per τ - 1 anni (fino all'epoca m - 1)

- $\lambda^{i(m)}(x-\tau,\tau) = \sum_{j=1}^{n}\lambda^{i(j)(m)}(x-\tau,\tau) = \sum_{j=1}^{n}\ell^{j(m-1)}(x-\tau,\tau-1)q^{ji}_{[x-\tau]+\tau-1}$ il numero medio di individui di età x che all'epoca m sono nel gruppo i provenendo da qualsiasi gruppo, nel quale erano entrati all'età $x-r$ e vi erano rimasti per $\tau-1$ anni (fino all'epoca $m-1$) (si ricordi che $q^{ii}_{[x]+t} = 0$)

  Infine

  - $\lambda_x^{i(m)} = \sum_{\tau=1}^{x-\alpha}\lambda^{i(m)}(x-\tau,\tau) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{x-\alpha}\ell^{j(m-1)}(x-\tau,\tau-1)q^{ji}_{[x-\tau]+\tau-1}$

  Per poter effettuare il calcolo di $\lambda_x^{i(m)}$ bisogna conoscere $\ell^{j(m-1)}(x-\tau,\tau-1)$ per ogni j e τ (che ottengo attraverso $\ell^{i(m)}(x,t)$ che consente, unita ad altre relazioni, di ottenere iterativamente tutti i valori cercati (si pone $m = 1$ al primo passo del procedimento iterativo e si determina successivamente $\ell^i(1)(x,t)$ per tutti i possibili valori di t; si continua in modo analogo per i passi successivi incrementando via via il valore di m).

$$\ell^{i(m)}(x,t) = \begin{cases} \ell^{i(0)}(x,t-m)_m p^i_{[x]+t-m} & per\, m \le t \\ \lambda_x^{i(m-t)} p^i_{[x]} & per\, m > t \end{cases}$$

  Osservazione. Abbiamo il vincolo $\ell^{i(m)}(x,t) = 0$ per $m > x+t-\alpha$ ciò poiché il numero $\ell^{i(m)}(x,t)$fa riferimento a individui che hanno età $x+t$ all'epoca m e quindi all'epoca 0 hanno età $x+t-m$, che deve essere non inferiore ad α, cioè $x+t-m \ge \alpha$, da cui $m \le x+t-\alpha$,.

2.3 Vediamo il caso di una collettività aperta. Cioè una collettività in cui si possono verificare nuovi ingressi. i numeri di nuovi ingressi di individui della stessa età x in ogni epoca sono noti.

- $\nu_x^{i(m)}$ il numero (certo) dei nuovi ingressi (cioè ingressi non dovuti a passaggi di gruppo) di età x nel gruppo i all'epoca m.

- ${}_{(1)}\ell(m)(x,t)$ numero di individui che provengono dalla collettività iniziale (cioè collettività presente all'epoca 0)

- ${}_{(2)}\ell(m)(x,t)$ numero di individui che provengono da ingressi successivi all'epoca 0

Relazione
$\ell(m)(x,t) =_{(1)} \ell(m)(x,t) +_{(2)} \ell(m)(x,t)$
se $m > x+t-\alpha$ risulta ${}_{(1)}\ell^{i(m)}(x,t) = 0$
${}_{(1)}\ell^{i(m)}(x,t)$ E' quello che abbiamo già calcolato per una collettività chiusa.

$$
{}_{(1)}\ell^{\mathrm{i(m)}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \begin{cases} \ell^{\mathrm{i}(0)}(\mathrm{x},\mathrm{t}-\mathrm{m})_{\mathrm{m}}\mathrm{p}^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}-\mathrm{m}} & per \mathrm{m} \leq \mathrm{t} \\ \lambda_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i(m-t)}}\mathrm{tp}^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{x}]} & per \mathrm{t} < \mathrm{m} \leq \mathrm{x}+\mathrm{t}-\alpha \end{cases}
$$

dove $\lambda_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i(m-t)}}$ viene determinato solamente con riferimento alla collettività presente al tempo 0.

Con riferimento ad altro numero medio, posso procedere come in modo analogo a quello visto nella collettività chiusa: ${}_{(2)}\ell^{\mathrm{i(m)}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \mu_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i(m-t)}}\mathrm{tp}^{\mathrm{i}}_{[\mathrm{x}]}$

dove $\mu_x^{\mathrm{i(m-t)}}$ è il valore medio del numero aleatorio di ingressi in età x nel gruppo i all'epoca $\mathrm{m}-\mathrm{t}$ dovuti agli ingressi nella collettività successivi all'epoca 0 dove per $\mathrm{m}=1$ è necessariamente $\mathrm{t}=0$ e chiaramente: ${}_{(2)}\ell^{i(1)}(x,0) = \mu_x^{i(1)} = v_x^{i(1)}$

Mettendo infine assieme i risultati visti, il numero medio $\ell^{i(m)}(x,t)$ è dato da:

$$
l^{i(m)}(x,t) = \begin{cases} l^{i(0)}(x,t-m)_m\mathrm{p}^i_{[x]+t+m} & m \leq t \\ \left(\lambda_x^{i(m-t)} + \mu_x^{i(m-t)}\right)_m \mathrm{p}^i_{[x]+t+m} & t < m \leq x+t-\alpha \\ \mu_x^{i(m-t)} t\mathrm{p}^i_{[x]} & m > x+t-\alpha \end{cases}
$$

Prima riga e primo addendo seconda riga si riferiscono a individui presenti in 0. Secondo addendo della seconda riga e l'ultima riga provengono da nuovi ingressi.

In questo capitolo ci siamo limitati alla trattazione del caso in cui le probabilità di passaggio attraverso i gruppi sono riferite a due dati: l'età d'ingresso nell'ultimo gruppo di appartenenza ed il numero di anni di permanenza in esso dopo l'ultimo passaggio. Si tratta di una semplificazione del caso in cui si potrebbero determinare i detti numeri in funzione di più dati, per esempio delle durate dei periodi di appartenenza agli ultimi due gruppi e così via arrivando alla situazione generale in cui si considera ogni possibile "storia completa" dei passaggi attraverso i gruppi.

Omesso appendice $\ell^{\mathrm{i(m)}}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ (caso di una collettività chiusa)

Capitolo 4. Lo schema I.V.S.

1. I gruppi nello schema I.V.S. .

E' una applicazione del modello di collettività suddivisa in gruppi.
In relazione della suddivisione in gruppi che opereremo si parla di schema di Invalidità- Vecchiaia-Superstiti (schema I.V.S.).

Gruppo 1 : gruppo degli attivi.

Gruppo 2 : gruppo dei pensionati di invalidità.

Gruppo 3 : gruppo dei pensionati di vecchiaia.

Gruppo 4 : gruppo dei pensionati per altre cause.

Gruppo 5 : gruppo dei pensionati indiretti (o **nuclei superstiti di attivo**).
L'uscita da un nucleo superstite di un suo componente può verificarsi non solo per morte ma anche perché sono venute meno le condizioni che danno diritto a far parte del nucleo stesso.

Gruppo 6 : gruppo dei pensionati di reversibilità (**nuclei superstiti di pensionato**).
L'uscita da un nucleo superstite di un suo componente può verificarsi non solo per morte ma anche perché sono venute meno le condizioni che danno diritto a far parte del nucleo stesso

Gruppo 7 : gruppo degli eliminati definitivamente.

1.2 Transizioni fra i gruppi

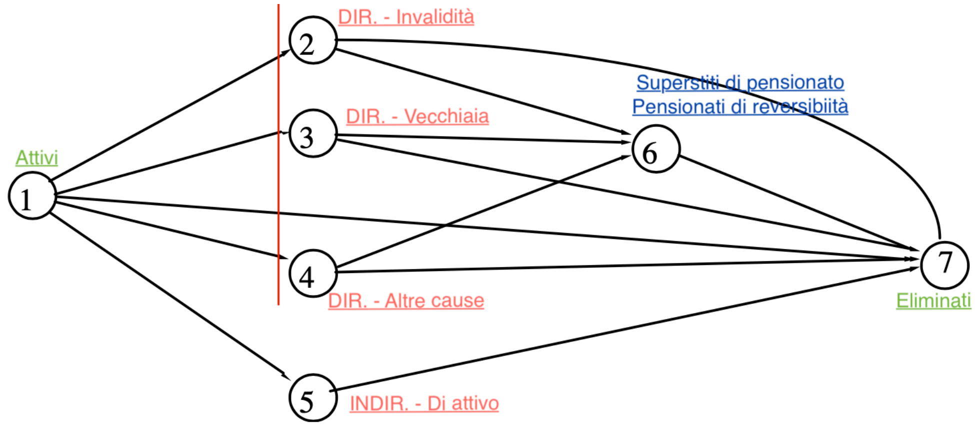

Figura 1: Grafo in cui i nodi rappresentano i gruppi e gli archi indicano le transizioni possibili

- Al gruppo 1 degli attivi si può accedere soltanto dall'esterno della collettività;
- L'accesso ai gruppi 2, 3, 4, 5, può avvenire soltanto dal gruppo 1; precisamente quando un attivo viene eliminato dal gruppo 1 per invalidità, passa nel gruppo 2, quando viene eliminato per vecchiaia passa nel gruppo 3, quando viene eliminato per altre cause passa nel gruppo 4 e infine quando viene eliminato per morte e lascia nucleo superstite origina un nucleo superstite di attivo e in questo senso "passa" nel gruppo 5;
- L'accesso al gruppo 6 può avvenire soltanto dai gruppi 2, 3, 4; analogamente a quanto si è detto nel caso precedente, quando un pensionato diretto muore lasciando nucleo superstite origina un nucleo superstite di pensionato e in questo senso "passa" nel gruppo 6.

Ipotesi: I passaggi attraverso i gruppi avvengano solo ad epoche intere, con unità di misura l'anno.
Ipotesi: I passaggi attraverso i gruppi avvengono uno alla volta, cioè ci può essere un solo passaggio all'anno.
Ipotesi: Ci riferiamo soltanto ad età intere dei soggetti.

Scopo: E' calcolare per ogni epoca m (m>0) il valore medio del numero dei componenti di ciascuno dei gruppi della collettività in esame tenendo conto dei loro passaggi attraverso i gruppi.

2. I dati.

- α l'età minima di ingresso nel gruppo 1 degli attivi;
- x l'età d'ingresso nel gruppo degli attivi $\alpha \leq x \leq \xi - 1)$ (salvo diversa indicazione)
- ξ **età di vecchiaia** la prima età ($> \alpha$) che nessun individuo può avere nel gruppo degli attivi. L'età di vecchiaia ξ in questo capitolo sarà intesa come l'età entro la quale ogni attivo passa nel gruppo dei pensionati di vecchiaia.
- t l'anzianità di assicurazione, cioè il numero di anni di appartenenza al gruppo 1 per gli individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x valgono le limitazioni $0 \leq t \leq \xi - x$
- ω_k per $k = 2, 3, 4,$ la prima età che nessun individuo del gruppo k di pensionati può raggiungere restando nel gruppo.
- τ l'anzianità di pensionamento di pensionati diretti o indiretti
- η l'anzianità di pensionamento dei pensionati di reversibilità.

Simboli ed ipotesi solo per il Gruppo 5 e Gruppo 6
Ipotesi: Solo per il gruppo 5 e gruppo 6: nucleo superstite sia in vita finché ha almeno un componente in vita.
Ipotesi: Si attribuisce al nucleo superstite un'età convenzionale somma dell'età del dante causa e del numero di anni maturati dal nucleo superstite a partire dalla morte del *dante causa*.

- *dante causa*: solo per i gruppi 5 e 6, **non chiaro se è il nucleo superstite di attivo o pensionato ad essere il dante causa del gruppo successivo (ma credo di si)**
- $\bar{\omega}$ la durata massima di vita di un nucleo superstite
- $\omega_5 = \xi + \bar{\omega}$ la prima età che nessun nucleo superstite di attivo può raggiungere nel gruppo 5
- $\omega_6 = \max\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} + \bar{\omega}$ la prima età che nessun nucleo superstite di pensionato può raggiungere nel gruppo 6

Con riferimento a pensionati derivanti da individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x e con anzianità t di assicurazione, risulta $0 \leq \tau \leq \omega_k - (x + t)$ per $k = 2, 3, 4, 5$, mentre con riferimento agli individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x, con anzianità di assicurazione t e di pensionamento τ, risulta $0 \leq \eta \leq \omega_6 - (x + t + \tau)$

Lo scopo dell'introduzione di una età convenzionale per i nuclei superstiti si fonda sul fatto che quando un individuo entra nel gruppo 1 con età x, dà origine ad una posizione tempo transita attraverso i gruppi, nel ruolo di attivo se si trova nel gruppo 1, con età $x + t (< \xi)$ nel ruolo di pensionato diretto se si trova nel gruppo $k(k = 2, 3, 4)$, con età $x + t + \tau\, (< \omega_k)$, nel ruolo di nucleo superstite di attivo se si trova nel gruppo 5, con età $x + t + \tau\, (< \omega_5)$, o infine nel ruolo di nucleo superstite di pensionato se si trova nel gruppo 6, con età $x + t + \tau + \eta\, (< \omega_6)$.

2.2 le probabilità di passaggio attraverso i gruppi sono riferite a due dati: l'età d'ingresso nell'ultimo gruppo di appartenenza ed il numero di anni di permanenza in esso dopo l'ultimo passaggi.

Osservazione: Useremo un simbolo simile a questo usato nel capitolo 3 $q^{ij}_{[x]+t}$ che indica la probabilità che un individuo entrato nel gruppo i all'età x provenendo da un altro gruppo e rimasto nel gruppo i fino alla età x+t passi nel gruppo j all'età x+t+1.

Nello schema I.V.S. abbiamo visto che non si può ritornare in un gruppo una volta che se ne sia usciti e quindi l'uscita coincide con l'*eliminazione* dal gruppo. Per questo motivo chiamiamo anche probabilità di eliminazione le probabilità di passaggio fra gruppi.

Osservazione: Le probabilità che ora introduco sono **probabilità relative di eliminazione**.

Pertanto dalla definizione di $q^{ij}_{[x]+t}$ e dalle ipotesi che abbiamo assunto sui passaggi attraverso i gruppi segue che $\forall x, t$ per semplicità indichiamo in tutti i casi con x l'età di ingresso nel gruppo e con t l'antidurata di appartenenza al gruppo:

$$\begin{cases} q^{i,1}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 1,2,3,4,5,6,7 \\ q^{ik}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 2,3,4,5,6,7 \, e \, k = 2,3,4,5 \\ q^{i,6}_{[i]+t} = 0 & \text{con } i = 1,5,6,7 \\ q^{i7}_{[x]+t} = 0 & \text{con } i = 7 \end{cases}$$

mentre possono essere diverse da 0 le rimanenti seguenti probabilità di passaggio:

- $q^{1,k}_{[x]+t}$ probabilità che un attivo, entrato nel gruppo degli attivi all'età x e rimasto in questo gruppo per t anni, transiti (o sia eliminato) nel gruppo k tra le età x+t e x+t+1, per vecchiaia (k = 3) o per altre cause (k = 4) o per morte lasciando nucleo superstite (k = 5) o per morte senza lasciare nucleo superstite (k = 7).

- $q^{k,s}_{[y]+\tau}$ probabilità che un pensionato diretto del gruppo $k(k = 2,3,4)$, entrato nel gruppo all'età y e ivi rimasto per τ anni, venga eliminato (necessariamente per morte) dal gruppo fra le età $y+\tau$ e $y+\tau+1$ lasciando nucleo superstite, se è $s = 6$, o non lasciando nucleo superstite, se è $s = 7$

- $q^{5,7}_{[y]+\tau}$ probabilità che un nucleo superstite di attivo morto all'età y, con anzianità di pensionamento di τ anni, si estingua completamente fra le età $y+\tau$ e $y+\tau+1$

- $q^{6,7}_{[z]+\eta}$ probabilità che un nucleo superstite di pensionato morto all'età z, con anzianità di pensionamento di η anni, si estingua completamente fra le età $z+\eta$ e $z+\eta+1$

3. I numeri medi

Scopo: Determinare il numero di individui che appartengono ai diversi gruppi nel tempo con riferimento alla durata di permanenza non solo nel gruppo di appartenenza ma anche nei precedenti.

Ipotesi: epoca di valutazione l'epoca 0 vogliamo studiare i seguenti numeri aleatori (alcuni già incontrati), per ogni possibile valore di x, t, τ, η:

A seguire i numeri medi (**credo, perché hanno la tilde sopra)**:

- $\tilde{\ell}^{1(m)}(x,t)$ numero di attivi di età x + t all'epoca m, con età d'ingresso nel gruppo degli attivi pari a x e antidurata t nel gruppo

- $\tilde{\ell}^{k(m)}(x,t,\tau)$ numero, all'epoca m, di pensionati di età x + t + τ, del gruppo k (per k = 2, 3, 4), o del gruppo 5 (per k = 5), con ingresso nel gruppo degli attivi all'età x, permanenza in quel gruppo uguale a t $(t \leq 1)$ e antidurata τ nel gruppo k;

- ${}^{k}\tilde{\ell}^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)$ numero, all'epoca m, di nuclei superstiti di pensionati del gruppo k$(per$k = 2,3,4$)$, derivanti da individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x, rimasti in quel gruppo t anni (con $t \geq 1$), entrati nel gruppo k dei pensionati diretti all'età $x+t$, morti all'età $x+t+\tau (\tau \geq 1)$ nuclei superstiti che hanno antidurata η nel gruppo 6;

- $\tilde{\ell}^{6(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta)=\sum_{\mathsf{k}=2}^{4}{}^{\mathsf{k}}\tilde{\ell}^{6(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta)$ numero, all'epoca m, di nuclei superstiti di pensionati diretti, entrati nel gruppo degli attivi all'età x, rimasti in quel gruppo t anni, entrati in uno dei gruppi dei pensionati diretti all'età $\mathsf{x}+\mathsf{t}$ e morti all'età $\mathsf{x}+\mathsf{t}+\tau$, aventi antidurata η nel gruppo 6

Di seguito i numeri certi (noti): Al tempo 0 i detti numeri aleatori sono certi e noti e sono rispettivamente $\ell^{1(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t}),\ell^{\mathsf{k}(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau)$ per $\mathsf{k}=2,3,4,5,{}^{\mathsf{k}}\ell^{6(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta)$ per $\mathsf{k}=2,3,4$ e $\ell^{6(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta)$

- $v_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{m})}$ il numero (certo) di nuovi ingressi di età x nel Gruppo 1 degli attivi all'epoca m, che supporremo noto.
  - corrisponde al numero $v_{\mathsf{x}}^{1(\mathsf{m})}$ introdotto nel capitolo 3
  - non abbiamo apposto l'indice del gruppo in quanto dalle ipotesi assunte in questo schema, che prevedono che ci possano essere nuovi ingressi (dall'esterno della collettività) soltanto nel gruppo degli attivi, discende che per $i\neq 1$ è: $v_x^{i(\mathsf{m})}=0$

Scopo: Partendo dalla conoscenza di questi numeri al tempo 0 e delle probabilità di passaggio attraverso i gruppi, in questo capitolo determineremo i valori medi dei numeri aleatori seguenti:

1 $\ell^{1(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t})$

2 $\ell^{\mathsf{k}(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau)\ perk=2,3,4,5$

3 ${}^{k}\ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)\ per\ k=2,3,4$

4 $\ell^{6(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta)=\sum_{k=2}^{4}{}^{\mathsf{k}}\ell^{6(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\mathsf{r},\eta)$

Per trovare i valori medi sfrutteremo molti risultati del capitolo 3.

3.2 Calcoliamoli

1) $\ell^{1(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t})=\begin{cases}\ell^{\mathsf{i}(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t}-\mathsf{m})_{\mathsf{m}}\mathsf{p}^{1}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{t}-\mathsf{m}} & per\mathsf{m}\le\mathsf{t}\\ v_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{m}-\mathsf{t})}\mathsf{t}\mathsf{p}^{1}_{[\mathsf{x}]} & per\mathsf{m}>\mathsf{t}\end{cases}$

dove ${}^{\mathsf{t}}\mathsf{p}^{1}_{[\mathsf{x}]}=\prod_{\mathsf{h}=0}^{\mathsf{t}-1}\mathsf{p}^{1}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}=\prod_{\mathsf{h}=0}^{\mathsf{t}-1}\left(1-\sum_{\mathsf{j}=1}^{7}\mathsf{q}^{1;\mathsf{j}}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}\right)=\prod_{\mathsf{h}=0}^{\mathsf{t}-1}\left(1-\left(\mathsf{q}^{1,2}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}+\mathsf{q}^{1,3}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}+\mathsf{q}^{1,4}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}+\mathsf{q}^{1,5}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}+\mathsf{q}^{1,7}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{h}}\right)\right)$

2) $\ell^{\mathsf{k}(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau)=\begin{cases}\ell^{\mathsf{k}(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau-\mathsf{m})_{\mathsf{m}}\mathsf{p}^{\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}]+\tau-\mathsf{m}} & per\mathsf{m}\le\tau\\ \lambda^{\mathsf{k}(\mathsf{m}-\tau)}(\mathsf{x},\mathsf{t})_{\tau}\mathsf{p}^{\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}]} & per\mathsf{m}>\tau\end{cases}$

dove $\lambda^{\mathsf{K}(\mathsf{m}-\tau)}(\mathsf{x},\mathsf{t})$, che è il **numero medio di nuovi ingressi** nel gruppo k all'epoca $\mathsf{m}-\tau$ (cioè il numero medio di individui che sono presenti nel gruppo k all'epoca $\mathsf{m}-\tau$, ma che non erano nel gruppo k all'epoca $\mathsf{m}-\mathsf{r}-1$) che derivano da individui entrati nel gruppo degli attivi all'età x e ivi rimasti per t anni (comprendendo quello fra l'età $\mathsf{x}-1$ e l'età x).
dove $\lambda^{\mathsf{k}(\mathsf{m}-\tau)}(\mathsf{x},\mathsf{t})=\ell^{1(\mathsf{m}-\tau-1)}(\mathsf{x},\mathsf{t}-1)\mathsf{q}^{1,\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{t}-1}$.

Alla fine otteniamo:

$$\ell^{\mathsf{k}(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau)=\begin{cases}\ell^{\mathsf{k}(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau-\mathsf{m})_{\mathsf{m}}\mathsf{p}^{\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}]+\tau-\mathsf{m}} & per\mathsf{m}\le\tau\\ \ell^{1(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t}+\tau-\mathsf{m})_{\mathsf{m}-\mathsf{r}-1/}\mathsf{q}^{1,\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}]+\mathsf{t}+\tau-\mathsf{m}}\mathsf{r}\mathsf{p}^{\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}]}per\tau<\mathsf{m}\le\mathsf{t}+\tau & \\ v_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{m}-\mathsf{t}-\tau)}\mathsf{t}_{-1/}\mathsf{q}^{1,\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}]}\mathsf{r}\mathsf{p}^{\mathsf{k}}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}]} & per\mathsf{m}>\mathsf{t}+\tau\end{cases}$$

3) ${}^{\mathsf{k}}\ell^{6(\mathsf{m})}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta)=\begin{cases}{}^{\mathsf{k}}\ell^{6(0)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau,\eta-\mathsf{m})_{\mathsf{m}}\mathsf{p}^{6}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}+\tau]+\eta-\mathsf{m}} & per\mathsf{m}\le\eta\\ {}^{\mathsf{k}}\lambda^{6(\mathsf{m}-\eta)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau)_{\eta}\mathsf{p}^{6}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}+\tau]} & per\mathsf{m}>\eta\end{cases}$

dove $\mathsf{k}^{6(\mathsf{m}-\eta)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau)=\ell^{\mathsf{k}(\mathsf{m}-\eta-1)}(\mathsf{x},\mathsf{t},\tau-1)\mathsf{q}^{\mathsf{k},6}_{[\mathsf{x}+\mathsf{t}]+\tau-1}$ è il numero medio di nuovi ingressi all'epoca $m-\eta$ nel gruppo 6 (dei nuclei superstiti di pensionati) provenienti dal gruppo k di pensionati diretti, che a loro volta derivano da attivi entrati in assicurazione all'età x, rimasti nel gruppo degli attivi per t anni, poi pensionati nel gruppo k equi rimasti per τ anni.

e dove $\eta p^{6}_{[x+t+\tau]} = \prod_{h=0}^{\eta-1}\left(1 - q^{6,7}_{[x+t+\tau]+h}\right)$.

Osservazione Come si è visto, le probabilità di eliminazione dipendono, nel modello illustrato, dall'età d'ingresso nel gruppo stesso. Ciò implica che esse si riferiscono a tavole di eliminazione selezionate. Ora, mentre ciò è importante in relazione a qualcuna delle cause di eliminazione, come ad esempio l'invalidità, non lo è usualmente per altre. Si può cioè pensare di utilizzare, per alcune delle cause di eliminazione considerate, delle tavole aggregate in cui si toglie la dipendenza dall'età d'ingresso nel gruppo in cui si considera l'eliminazione.

4) $\ell^{6(\mathrm{m})}(\mathrm{x}, \mathrm{t}, \tau, \eta)$ **(La ricavo dalle espressioni)** ${}^{k}\lambda^{6(m-\eta)}(x,t,\tau) = \ell^{k(m-\eta-1)}(x,t,\tau-1)q^{k,6}_{[x+t]+\tau-1}$ e

$$\rho(\mathrm{km})(\mathrm{x},\mathrm{t},\tau) = \begin{cases} \ell^{\mathrm{k}(0)}(\mathrm{x},\mathrm{t},\tau-\mathrm{m})_{\mathrm{m}}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}_{[\mathrm{x}+\mathrm{t}]+\tau-\mathrm{m}} & per \mathrm{m} \leq \tau \\ \ell^{1(0)}(\mathrm{x},\mathrm{t}+\tau-\mathrm{m})_{\mathrm{m}-\tau-1/}\mathrm{q}^{1,\mathrm{k}}_{[\mathrm{x}]+\mathrm{t}+\tau-\mathrm{m}}\mathrm{r}\mathrm{p}^{\mathrm{k}}_{[\mathrm{x}+\mathrm{t}]} per \tau < \mathrm{r} < \mathrm{t}+\mathrm{r} \\ v_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{m}-\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{t}-1/\mathrm{q}^{1,\mathrm{k}}_{[\mathrm{x}]}\mathrm{r}^{\mathrm{k}}_{[\mathrm{x}+\mathrm{t}]} & per \mathrm{m} > \mathrm{t}+\tau \end{cases}$$

da fare da soli in pratica

Osservazione 4.7. Al fine di proporre un modello relativamente semplice non abbiamo preso in considerazione la dipendenza dal tempo delle probabilità di passaggio attraverso i gruppi, come avevamo già fatto nel capitolo delle "Collettività suddivisa in gruppi". Osserviamo comunque che soprattutto in considerazione del trend recente della mortalità è utile il ricorso ad opportune tavole proiettate.

Capitolo 5. Il calcolo dei salari e degli oneri

1. Definizioni e ipotesi preliminari per salari e oneri individuali.

In questo capitolo parleremo dei salari che vengono percepiti dagli attivi e delle **pensioni** dette **oneri**, che vengono erogate ai pensionati.

Ipotesi: Il tempo è misurato in anni e l'anno m-esimo, con m intero, è quello che inizia all'epoca m - 1 e termina all'epoca m.
In particolare l'epoca 0 è l'istante iniziale del primo anno.
L'assicurazione inizia al tempo 0.

Ipotesi: I **salari** vengono corrisposti agli attivi **annualmente** e **anticipatamente** e dipendono dall'anzianità di assicurazione1 t e dall'epoca di riferimento, m.
Ipotesi: Le pensioni, come i salari, vengono corrisposte **annualmente** e **anticipatamente** e dipendono dall'anzianità di assicurazione maturata dall'attivo all'epoca del pensionamento, t, e dall'epoca di riferimento, m.
Ipotesi: Come fatto nel capitolo 4 anche qui la una collettività di lavoratori è omogenea per cui tutti i lavoratori hanno lo stesso salario. Ed anche tutti i pensionati hanno la stessa pensione, salvo precisazioni per le pensioni ai nuclei superstiti.

- $\boxed{s_{t+1}{}^{(m)}}$ è un numero certo. Il **salario** che viene percepito all'epoca m da un attivo che in quest'epoca matura anzianità di assicurazione t,

Nel caso in cui lo si debba valutare in un'epoca che precede l'epoca m, $s_{t+1}^{(m)}$ è un numero aleatorio che si fa dipendere, di norma, da tre fattori: *merito*, *anzianità* ed *inflazione*.

Ipotesi: $t \leq m$

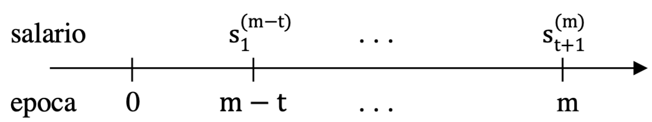

Figura 2: Figura dei salari percepiti. Dove $m - t$ è l'epoca di ingresso in assicurazione, in cui l'attivo riceve il $1°$ salario, mentre dopo t anni, all'epoca $m,$ riceve il (t +1)-esimo salario.

Generalizzazione: Se un individuo entra in assicurazione all'epoca h:

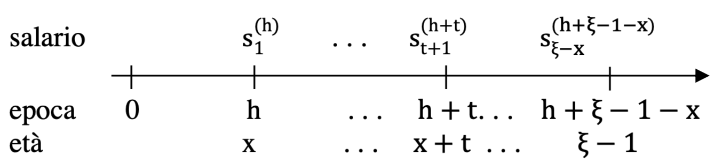

Figura 3: Salari percepiti. Se entra in assicurazione all'epoca h (e quindi in quest'epoca ha anzianità di assicurazione 0) con età x, percepisce il primo salario $s_1^{(h)}$ all'epoca h stessa, il salario $s_{1+1}^{(h+t)}$ all'epoca h + t, quando ha anzianità t (dove t = 1, 2 , ... , $\xi - 2 -$ x) e l'ultimo salario s $_{\xi-x}^{(h+\xi-1-x)}$ all'epoca h $+\xi - 1 -$ x, quando la sua anzianità è $\xi - 1 -$ x.

1.2 Cominciamo l'analisi gli oneri (cioè pensioni), in particolare le pensioni dirette.

Ipotesi: le pensioni dirette dipendano soltanto dall'epoca in cui vengono percepite e dall'anzianità lavorativa maturata.
Ipotesi: le pensioni sono le stesse per le tre cause di uscita, invalidità, vecchiaia e altre cause.

- $r_t^{(m)}$ l'importo della **pensione** spettante all'epoca m ad un pensionato diretto che deriva da un attivo che al momento del pensionamento ha maturato una anzianità lavorativa di t anni.

Osservazione. Si osservi che un individuo che entra nel gruppo degli attivi all'epoca m all'età x percepisce in quest'epoca il salario anticipato corrispondente e non può transitare in un gruppo di pensionati diretti o dar vita ad un nucleo superstite di assicurato prima dell'epoca $m + 1$, per cui la minima anzianità lavorativa che matura al momento del pensionamento è di 1 anno, per cui t può assumere i valori da 1 a $\xi - x$.

Un pensionato diretto del gruppo k di pensionati diretti $(k = 2, 3, 4)$ che deriva da un attivo che è entrato in assicurazione all'epoca h all'età x, è rimasto attivo per t anni ed è andato in pensione all'età $x + t$ all'epoca $h + t$, riceve la prima pensione $r_t^{(h+t)}$ all'epoca $h + t$ stessa (anticipatamente, in base alle ipotesi assunte, e quindi con anzianità di pensionamento 0), la pensione $r_t^{(h+t+r)}$ all'epoca $h+t+\tau$ con $\tau = 1, 2, \dots, \omega_k - 2 - (x+t)$, quando ha anzianità di pensionamento τed età $x+t+\tau$, e l'ultima pensione $r_t^{(h+\omega_k-1-x)}$ all'epoca $h+\omega_k-1-x$ (naturalmente se non esce prima dal gruppo). Graficamente:

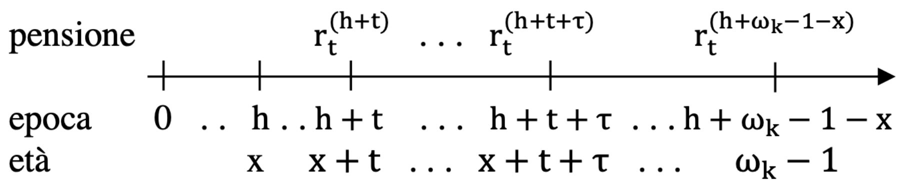

Figura 4: Pensioni percepite

Ipotesi: Supponiamo che sia "certo" il valore di r_t^m che di norma è aleatorio in quanto dipende dai salari percepiti durante l'attività lavorativa e da altre grandezze aleatorie. Come fatto per i salari.?
Osservazione: due pensionati con la stessa anzianità lavorativa t andati in pensione ad epoche diverse percepiscono all'epoca m la stessa pensione. Ipotesi per pensioni indirette e di reversibilità:

Ipotesi per pensioni indirette e di reversibilità: supponiamo che al nucleo familiare superstite di assicurato o di pensionato spetti rispettivamente una aliquota della pensione a cui avrebbe avuto diritto l'attivo deceduto o una aliquota della pensione che era percepita dal pensionato deceduto e che questa aliquota dipenda dalla composizione del nucleo stesso.

Ipotesi per pensioni indirette e di reversibilità: assumiamo che la detta aliquota sia funzione dell'età di decesso del dante causa e dell'anzianità di pensionamento del nucleo.

- $\psi(y + k, k)$ l'**aliquota media** spettante al nucleo familiare superstite di un assicurato o di un pensionato morto in età y dopo k anni dalla morte, della pensione a cui avrebbe avuto diritto l'assicurato deceduto o di cui godeva il pensionato deceduto; di norma è $0 < \psi(y + k, k) \leq 1$.

1.3 Condizioni economiche statiche e dinamiche
Ipotesi: nell'ipotesi che salari e pensioni dipendano solo da t:

- s_t salario che un attivo riceve quando matura t - 1 anni di anzianità lavorativa a pensione che spetta ad un pensionato diretto dopo t anni di attività lavorativa

- r_t la pensione che spetta ad un pensionato diretto dopo t anni di attività lavorativa

In questa situazione diciamo che ci troviamo in condizioni economiche statiche, mentre quando consideriamo anche la dipendenza da m diciamo che ci troviamo in condizioni economiche dinamiche.

1.4 l fine di pervenire a formule semplici, ma comunque significative e utili.. Ipotesi: sia le variazioni dovute all'anzianità che quelle relative all'epoca di riferimento siano riconducibili ad un tasso annuo di incremento costante e certo.

Ipotesi: incremento dovuto alla anzianità è al tasso annuo k' costante.
L'anzianità salariale è $\frac{s_t}{s_1} = (1+k')^{t-1}$ e se per i salari l'incremento relativo all'epoca di riferimento è al tasso annuo j_1, costante, risulta $s_t^{(m)} = s_t\,(1+j_1)^m$ pertanto se valgono entrambe le ipotesi si ottiene: $s_t^{(m)} = s_1\,(1+k')^{t-1}\,(1+j_1)^m$

2. Salari e oneri collettivi

Scopo: Calcolo del premio negli usuali sistemi finanziari di gestione di un fondo pensione.

Ipotesi: 0 epoca in cui si effettuano le valutazioni.
Ipotesi: $m \leq 0$ generica epoca di riferimento delle valutazioni.

Idea di base: i valori dell'ammontare dei salari e degli oneri futuri sono chiaramente aleatori. Noi ne valutiamo i valori medi rifacendoci alle ipotesi ed ai risultati del capitolo 4.

Precisamente effettuiamo le valutazioni, riferite all'epoca m:

- Caso A: *Salari* percepiti in $m > 0$ dalla collettività di attivi presenti in m
  - Oneri erogati in m ai pensionati presenti in m
    - ⋆ Fotografo in m salari ed oneri,
    - ⋆ vedo chi c'è in m con loro storia
    - ⋆ pdv epoca: **verticale**
- Caso B: Flusso di *oneri* che verranno pagati da m in poi a tutti coloro che diventeranno nuovi pensionati (sia diretti che indiretti) all'epoca m ed ai loro superstiti.
    - ⋆ Guardo flusso di oneri
    - ⋆ pagamenti che si svilupperanno in futuro
    - ⋆ vedo nuovi pensionati
    - ⋆ pdv epoca: **orizzontale**
- Caso C: Flusso dei *salari* che verranno percepiti dall'epoca m in poi dagli attivi che entrano in assicurazione all'epoca m; e il *flusso degli oneri* che saranno pagati ai pensionati da essi derivanti
    - ⋆ Guardo storia degli individui
    - ⋆ vedo nuovi attivi, e ciò che ne deriva in futuro

Pesantezza formale. Solo concetti. (non so a cosa si riferisce)

Osservazione. Le valutazioni verranno effettuate con una legge di interesse composto con tasso di interesse annuo i noto e costante o con il corrispondente fattore di attualizzazione annuo v. ?

considerando le collettività degli attivi e dei pensionati presenti all'epoca m di cui andiamo a determinare le espressioni dell'ammontare dei salari percepiti dagli attivi e dell'ammontare degli oneri erogati ai pensionati, e tenendo presente che la somma di età e anzianità non può superare $\xi - 1$ (cioè $x + t \leq \xi - 1$).

—–**CASO A (2.2)**—– CASO A a posto con i simboli "S" –

- $\mathcal{S}_{x,t}^{(m)} = \ell^{1(m)}(x,t)s_{t+1}^{(m)}$ il valore medio dell'ammontare totale dei salari che saranno percepiti all'epoca m dagli attivi di età x + t entrati nel gruppo degli attivi all'età x, all'epoca $m - t$
- $\mathcal{S}_{x}^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \mathcal{S}_{x,t}^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \ell^{1(m)}(x,t)s_{t+1}^{(m)}$ il valore medio dell'ammontare totale dei salari che saranno percepiti all'epoca m da tutti gli attivi entrati in assicurazione all'età x,

- $\boxed{{}_t\mathcal{S}(m) = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \mathcal{S}_{x,t}^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \ell^{1(m)}(x,t)s_{t+1}^{(m)}}$ il valore medio dell'ammontare dei salari che saranno percepiti all'epoca m da tutti gli attivi con anzianità lavorativa t, (occhio che qui cicla x non t)
- $\boxed{\mathcal{S}^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \mathcal{S}_x^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \ell^{1(m)}(x,t)s_{t+1}^{(m)}}$ il valore medio dell'ammontare dei salari che saranno percepiti all'epoca m da tutti gli attivi
o anche
$\mathcal{S}^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha} {}_t\mathcal{S}^{(m)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \ell^{1(m)}(x,t)s_{t+1}^{(m)}$

2.2.2 Per illustrare il meccanismo di formazione dell'importo $\mathcal{S}^{(m)}$, utilizziamo opportuni diagrammi di Lexis in cui anziché riferirci alle coppie (epoca, età), come si fa usualmente, ci riferiamo alle coppie (epoca, anzianità lavorativa) cioè mettiamo in ordinata l'anzianità lavorativa anziché l'età. Come nel seguito faremo anche in altre situazioni costruiamo un "reticolo" ai cui "nodi" associamo un opportuno importo.
Precisamente considerati gli attivi che all'epoca m hanno qualunque età e la stessa anzianità lavorativa t (che può assumere i valori da 0 a $\xi - 1 - \alpha$), al nodo (m, t) associamo l'importo ${}_t\mathcal{S}^{(m)}$

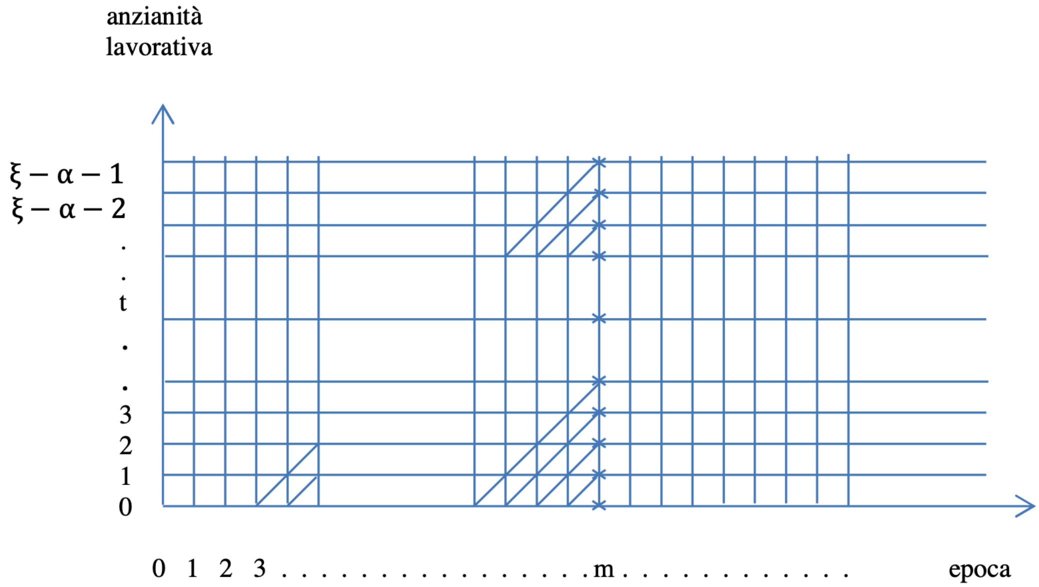

Figura 5: descrizione

2.2.3 Passiamo agli oneri (vd quaderno, in cui ho fatto meno roba. In appunti Latex ho tralasciato formule sezione 2.2.4 di zecchin

- $\boxed{\bar{\Theta}^{(m)}}$ il valore medio dell'ammontare degli oneri da erogare all'epoca m ai pensionati.
- $\boxed{\bar{\Theta}_x^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \bar{\Theta}_x^{(m)}}$ il valore medio dell'ammontare degli oneri da erogare all'epoca m ai pensionati che derivano da attivi entrati in assicurazione all'età x.
- $\boxed{{}^k\bar{\Theta}_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-(x+t)} {}^k\bar{\Theta}_{x,t,\tau}^{(m)}}$ è il valore medio del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni del gruppo k dei pensionati, per k = 2, 3, 4, 5 (quindi per pensioni dirette se k = 2, 3, 4, ed indirette se k = 5), relativi

a individui entrati in assicurazione all'età x.

Si osservi che l'età di pensionamento è x+t e la prima sommatoria, di indice t, si estende da 1 a ξ - x in quanto si tratta di oneri che derivano da attivi che sono entrati in assicurazione all'età x, da cui non possono provenire pensionati prima che sia trascorso un anno dal loro ingresso (si veda l'osservazione 5.3), e cioè quando t = 1, e al più tardi quando i detti attivi raggiungono l'età $\boxed{?}$, cioè per $t = \xi - x$. Per quanto riguarda la seconda sommatoria invece, di indice τ, si estende da 0 a $\omega_k - 1 - (x + t)$ in forza dell'ipotesi che le pensioni vengano erogate anticipatamente e quindi a partire dall'epoca del pensionamento, all'età x+t con anzianità di pensionamento 0, fino all'età $\omega_k - 1$ cioè dopo $\omega_k - 1 - (x + t)$ anni.

Dove:

- ${}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,\tau}$ per k = 2, 3, 4, sia il valore medio, rispettivamente, del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni di invalidità, di vecchiaia e per altre cause relative a pensionati che all'epoca m hanno anzianità di pensionamento τ, hanno maturato anzianità lavorativa t e sono entrati in assicurazione all'età x, per k = 5 sia il valore medio del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni ai nuclei superstiti di attivi che all'epoca m hanno anzianità di pensionamento τ, derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x e con anzianità lavorativa t;

- ${}^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,\tau,\eta}$ per k = 2, 3, 4, sia il valore medio del totale degli oneri dell'epoca m per le pensioni ai nuclei superstiti di pensionati che all'epoca m hanno anzianità di pensionamento η derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x, hanno maturato anzianità lavorativa t, che sono stati in pensione nel gruppo k per τ anni e poi sono deceduti.

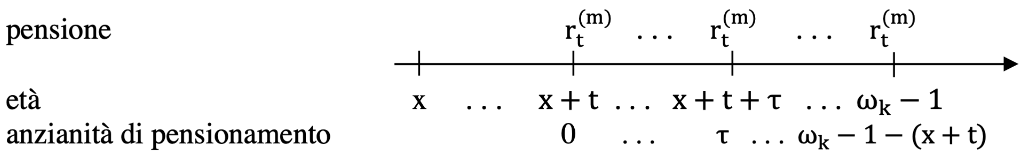

Figura 6: Grafico per capire ${}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x}$. In questo grafico sono fissati i parametri m e t e variabile il parametro τ

- $${}^{(k,6)}\overline{\Theta}^{(m)}_{x} = \sum_{t=1}^{\xi-x}\sum_{\tau=1}^{\omega_k-x-t}\sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-x-t-\tau} {}^{(k,6)}\overline{\Theta}^{(m)}_{x,t,\tau,\eta}$$ il valore medio dell'ammontare degli oneri relativi ai nuclei superstiti di pensionati all'epoca m (pensioni di reversibilità), derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x, per k = 2, 3, 4,.
  Il fatto che nella sommatoria il primo valore di τ è 1 è dovuto al fatto che: n questo caso alle osservazioni fatte per la precedente espressione degli oneri per pensioni dirette ed indirette (che spiegano il "range" dei valori di t e di η) aggiungiamo che poiché si tratta degli oneri erogati ai nuclei superstiti di pensionati che derivano da pensionati diretti di età x+t (che percepiscono, anticipatamente, la loro prima pensione all'età x+t stessa), non possono esserci nuclei superstiti da essi derivanti di età (convenzionale) inferiore a x+t+1 (cioè prima che sia trascorso un anno dall'ingresso in un gruppo di pensionati diretti, all'età x+t, dei "danti causa" dei detti nuclei superstiti) e di conseguenza non possono esserci pensioni a nuclei superstiti di pensionato per un valore di τ minore di 1.

- $$\bar{\Theta}^{(m)}_{x} = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x} + {}^{5}\,\bar{\Theta}^{(m)}_{x} + \sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_{x}$$ è il valore medio degli oneri dell'epoca m per tutte le pensioni relative a individui entrati in assicurazione all'età x

A partire dai dati noti all'epoca 0, dalle relazioni che precedono si calcola $\bar{\Theta}^{(m)}_{x}$, infatti:

- ${}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,\tau} = \ell^{k(m)}(x, t, \tau) r^{(m)}_{t} \quad per\, k = 2, 3, 4$

- ${}^{5}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,r} = \ell^{5(m)}(x,t,\tau)\psi(x+t+\tau,\tau)r^{(m)}_t$

- ${}^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,r,\eta} =^{k} \ell^{6(m)}(x,t,\tau,\eta)\psi(x+t+\tau+\eta,\eta)r^{(m)}_t$ per $per k = 2,3,4$

Inoltre:

- $\bar{\Theta}^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{k=2}^{4} {}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x} + \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} {}^{5}\bar{\Theta}^{(m)}_{x} + \sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_{x}$ dove
  - $\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{k=2}^{4} {}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x}$ è il valore medio degli oneri per i pensionati diretti allepoca m
  - $\sum_{x=\alpha}^{5} \bar{\Theta}^{(m)}_{x}$ è il valore medio degli oneri per i pensionati indiretti all'epoca m
  - $\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{k=2}^{4} (k,6)\bar{\Theta}^{(m)}_{x}$ è il valore medio degli oneri per i pensionati di reversibilità all'epoca m

2.2.4

- ${}_{s}\bar{\Theta}^{(m)} = \sum_{k=2}^{5}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=1}^{\xi-x} {}^{k}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,s} + \sum_{k=2}^{4}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1}\sum_{t=1}^{\xi-x}\sum_{\tau=1}^{\min\{s,\omega_k-(x+t)\}} {}^{(k,6)}\bar{\Theta}^{(m)}_{x,t,r,s-\tau}$ e $s = 1,2,\ldots,\omega_6 - 1 - (\alpha+1)$ l'ammontare totale degli oneri all'epoca m, relativi a pensionati con s anni di anzianità di pensionamento. (**CONTROLLARE per quali valori di k**
  Precisiamo cosa intendiamo con anni di anzianità di pensionamento:
  - nel caso dei pensionati diretti intendiamo il numero di anni di anzianità di pensionamento a partire dall'epoca del pensionamento,
  - nel caso dei pensionati indiretti intendiamo il numero di anni di anzianità di pensionamento a partire dall'epoca della morte del dante causa,
  - infine nel caso dei pensionati di reversibilità intendiamo la somma dell'anzianità maturata dal dante causa e di quella maturata dal suo nucleo superstite per cui ci possono essere oneri per pensioni di reversibilità solamente a partire dal valore s = 1 di anzianità di pensionamento (visto che il dante causa di un nucleo superstite di pensionato deve avere almeno 1 anno di anzianità).

  Illustriamo il calcolo di $\bar{\Theta}^{(m)}$ mediante un diagramma di Lexis, questa volta mettendo in ordinata l'anzianità di pensionamento, che va da 0 a $T = \omega_6 - 1 - (\alpha+1)$, ed associando al nodo (r,s) l'importo $s^{-(m)}$. Questo importo è il valore medio del totale degli oneri all'epoca m, relativi a pensionati (compresi i nuclei superstiti) con s anni di anzianità di pensionamento (quindi sono andati in pensione all'epoca $m - s$).

—–CASO B (2.3)—–

Considero la collettività costituita dai nuovi pensionati diretti o indiretti dell'epoca m di cui andiamo a determinare l'ammontare degli oneri che verranno erogati a loro e ai loro nuclei superstiti.

- $\Theta^{(m)}_x$ **Già definito!** il valore attuale medio all'epoca m del flusso degli oneri da erogare ai nuovi pensionati diretti o indiretti dell'epoca m derivanti da attivi entrati in assicurazione all'età x, e ai loro superstiti, a partire dall'epoca m e fino alla loro estinzione,

- $\Theta^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \Theta^{(m)}_x$ oppure anche il valore attuale medio all'epoca m del flusso degli oneri da erogare ai nuovi pensionati diretti o indiretti dell'epoca m, e ai loro superstiti, a partire dall'epoca m e fino alla loro estinzione.

  Oppure $\Theta^{(m)} = \sum_{s=0}^{\omega_6-1-(\alpha+1\}} s^{-(m+s)} v^{s}$ (vd sotto)

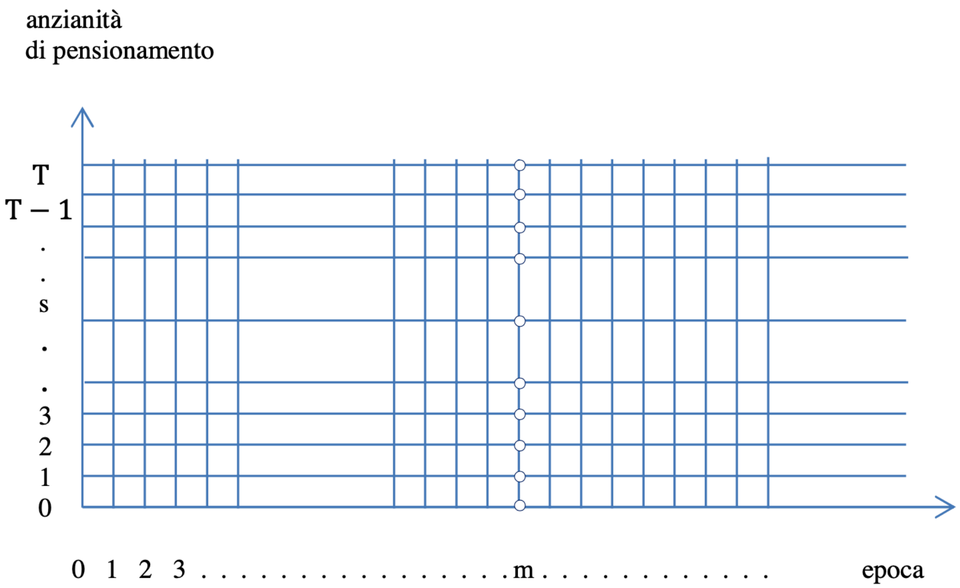

Figura 7: Il valore di $\bar{\Theta}^{(m)}$ si ottiene sommando gli importi corrispondenti ai nodi collocati sulla colonna riferita all'epoca m (quelli con il tondino), cioè gli ${}_{s}\bar{\Theta}^{(m)}$ per tutti i valori di s.

- $\boxed{{}^{k}\Theta_{x}^{(m)}}$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso delle pensioni che verranno erogate ai nuovi pensionati diretti del gruppo k dell'epoca m, per k = 2, 3, 4, e ai nuovi nuclei superstiti di attivo dell'epoca m, per k = 5, che derivano da attivi entrati in assicurazione all'età x

- $\boxed{{}^{(k,6)}\Theta_{x}{}^{(m)}}$ per k = 2, 3, 4, il valore attuale medio all'epoca m del flusso delle pensioni che verranno erogate ai nuclei superstiti (di pensionato) dei nuovi pensionati diretti del gruppo k dell'epoca m, che derivano da attivi che sono entrati in assicurazione all'età x,

$$\Rightarrow {}^{k}\Theta_{x}^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-x-t} \ell^{k(m+\tau)}(x,t,\tau) r_t^{(m+\tau)} v^{\tau}$$

$$\Rightarrow {}^{5}\Theta_{x}^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-x-t} \ell^{5(m+\tau)}(x,t,\tau) r_t^{(m+\tau)} \psi(x+t+\tau,\tau) v^{\tau}$$

$$\Rightarrow {}^{(k,6)}\Theta_{x}^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-x-t} \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-x-t-\tau} \ell^{6(m+\tau+\eta)}(x,t,\tau,\eta) r_t^{(m+\tau+\eta)} \psi(x+t+\tau+\eta,\eta) v^{\tau+\eta} \text{ per k = 2, 3, 4}$$

$$\Rightarrow \Theta_{x}^{(m)} = \sum_{k=2}^{4} {}^{k}\Theta_{x}^{(m)} + {}^{5}\Theta_{x}^{(m)} + \sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}\Theta_{x}^{(m)}$$

- $$\boxed{\Theta^{(m)} = \sum_{s=0}^{\omega_6-1-(\alpha+1)} s^{-(m+s)} v^{s}}$$

  Infatti, valutando gli oneri rispetto all'anzianità s al tempo $m+s$:
  ${}_{s}\overline{\Theta}^{(m+s)} = \sum_{k=2}^{5} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=1}^{\xi-x} {}^{k}\overline{\Theta}_{x,t,s}^{(m+s)} + \sum_{k=2}^{4} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=1}^{\min\{s,\omega_k-x-t\}} {}^{(k,6)}\overline{\Theta}_{x,t,\tau,s-\tau}^{(m+s)}$ in cui la prima sommatoria fornisce l'ammontare degli oneri per pensioni dirette ed indirette erogate all'epoca $m+s$ ai pensionati aventi anzianità di pensionamento s e quindi entrati nel gruppo k di pensionati $(k = 2,3,4,5)$ all'epoca m e la seconda sommatoria fornisce l'ammontare degli oneri per pensioni di reversibilità erogate all'epoca $m+s$

ai nuclei superstiti di pensionato che derivano da pensionati che hanno maturato anzianità $\tau(\tau \geq 1)$ di pensionamento nel gruppo ke anzianità $s-\tau$ di pensionamento nel gruppo 6 per cui i pensionati danti causa sono entrati nel gruppo k di pensionati $(\mathrm{k}=2,3,4)$ all'epoca m.

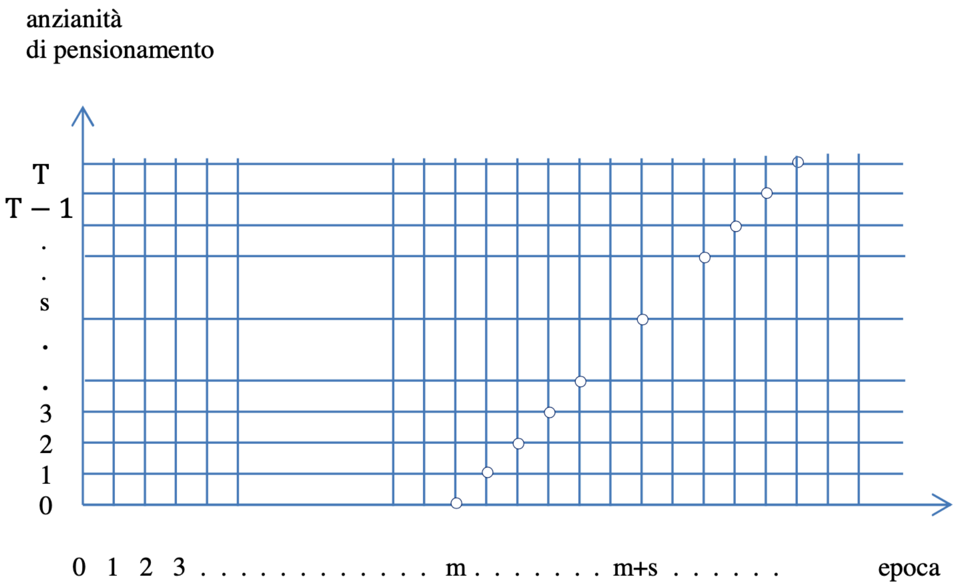

Figura 8: **da modificare testo (pg 12)** In modo analogo in Figura 5.2 illustriamo il calcolo di $\bar{\Theta}^{(\mathrm{m})}$ mediante un diagramma di Lexis, questa volta mettendo in ordinata l'anzianità di pensionamento, che va da 0 a $\mathrm{T}=\omega_6-1-(\alpha+1)$, ed associando al nodo (r, s) l'importo ${}_s\bar{\Theta}^{(\mathrm{m})}$. Questo importo è il valore medio del totale degli oneri all'epoca m, relativi a pensionati (compresi i nuclei superstiti) con s anni di anzianità di pensionamento (quindi sono andati in pensione all'epoca $\mathrm{m}-\mathrm{s}$).

ultima pagina primo quaderno $\mathrm{S}=mathrm$ GIUSTE LE DUE DEF SEGUENTI
—–CASO C (2.4)—–

- $\mathrm{S}_{\mathrm{x}}^{(\mathrm{m})}=\sum_{t=0}^{\xi-1-x} \mathcal{S}_{x,t}^{(m+t)} v^t$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso dei salari che gli attivi entrati in assicurazione all'età x all'epoca m percepiranno in tutto il periodo di attività lavorativa

- $\mathrm{S}^{(m)}=\sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \mathrm{S}_x^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso dei salari che la totalità degli attivi entrati in assicurazione all'epoca m percepirà in tutto il periodo di attività lavorativa. Oppure (passando per $S_{\mathrm{x,t}}^{(\mathrm{m})}$)
$\mathrm{S}^{(m)}=\sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha} {}_t\mathcal{S}^{(m+t)} v^t=\sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \ell^{1(\mathrm{m+t})}(\mathrm{x,t}) \mathrm{s}_{\mathrm{t+1}}^{(\mathrm{m+t})} \mathrm{v}^{\mathrm{t}}$ che ottengo ricordando che ${}_{\mathrm{t}}\mathcal{S}^{(\mathrm{m+t})}=\sum_{\mathrm{x}=\alpha}^{\xi-1-\mathrm{t}} \ell^{1(\mathrm{m+t})}(\mathrm{x,t}) \mathrm{s}_{\mathrm{t+1}}^{(\mathrm{m+t})}$.
La valutazione del valore medio dei salari in corrispondenza all'anzianità s si ottiene dall'espressione di ${}_{\mathrm{t}}\mathcal{S}^{(\mathrm{m})}$ non all'epoca m ma all'epoca $\mathrm{m}+\mathrm{t}$ da cui ottengo un'altra espressione per $S^{(m)}$ (vd sopra, la terza).

Cominciamo con il calcolo degli **oneri per le pensioni dirette**:

- $\mathrm{O}_x^{(\mathrm{m})}$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso degli oneri che saranno erogati ai pensionati derivanti dagli attivi che entreranno in assicurazione all'epoca m, all'età x

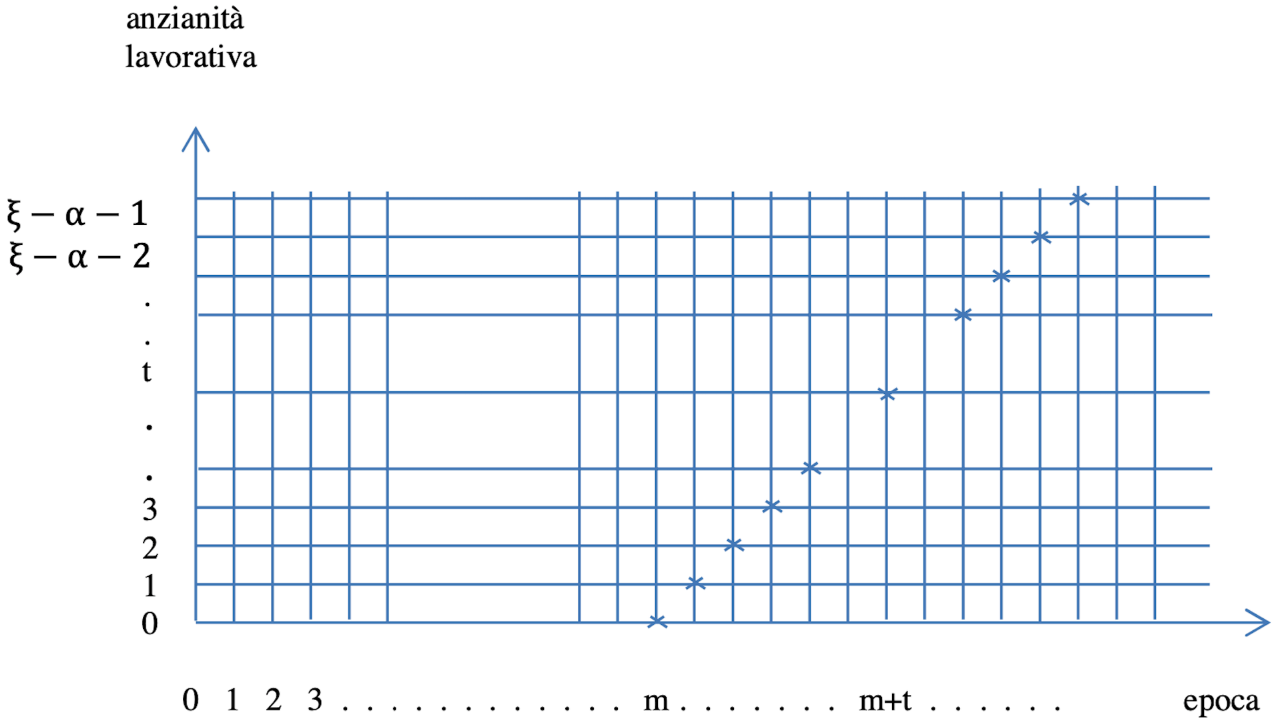

Figura 9: $\sum_{t=0}^{\xi-1-\alpha}\sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \ell^{1(m+t)}(x,t)s_{t+1}^{(m+t)}v^t$. Anche in questa situazione possiamo utilizzare un diagramma di Lexis per illustrare la formazione di $S^{(m)}$. Nel reticolo al nodo $(m+t,t)$ evidenziato con una crocetta associamo l'importo $t\mathcal{S}^{(m+t)}$, che è l'ammontare complessivo dei salari degli attivi che al tempo $m+t$ hanno anzianità lavorativa t. La somma per t da 0 a $\xi-\alpha-1$ di questi valori attualizzati al tempo m fornisce $S^{(m)}$ secondo la (5.8).

- $O^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} O_x^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m del flusso degli oneri che saranno erogati ai pensionati derivanti dal gruppo degli attivi che entreranno in assicurazione all'epoca m

Osservazione. I valori medi $\mathcal{S}_{x,t}^{(m)}, \mathcal{S}_x^{(m)}, \mathcal{S}^{(m)}, \bar{\Theta}_x^{(m)}, \bar{\Theta}^{(m)}$ si riferiscono a salari ed oneri relativi alla sola epoca m, mentre i valori medi $\Theta_x^{(m)}, \Theta^{(m)}, S_x^{(m)}, S^{(m)}, O_x^{(m)}, O^{(m)}$ sono valori attuali di salari ed oneri che si riferiscono a piu epoche.

- ${}^kO_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x}\sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-x-t} \ell^{k(m+t+\tau)}(x,t,\tau)r_t^{(m+t+\tau)}v^{t+\tau}$ il valore attuale medio del flusso degli oneri del gruppo k di pensionati (k = 2, 3, 4) derivanti dalla generazione di individui entrati in assicurazione all'età x all'epoca m.

  Oppure ${}^kO_x^{(m)} = v_x^{(m)} \sum_{t=1}^{\xi-x} {}_{t-1}p_{[x]}^1 q_{[x]+t-1}^{1,k} v^t \sum_{\tau=0}^{\omega_k-1-x-t} {}_\tau p_{[x+t]}^k r_t^{(m+t+\tau)} v^\tau$

Passiamo al calcolo degli **oneri per le pensioni indirette (gruppo 5)**:

- ${}^5O_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{\xi-x}\sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-x-t} \ell^{5(m+t+\tau)}(x,t,\tau)r_t^{(m+t+\tau)}\psi(x+t+\tau,\tau)v^{t+\tau}$ il valore attuale medio al tempo m del flusso degli oneri per pensioni indirette che saranno pagate al gruppo dei pensionati indiretti provenienti dai $v_x^{(m)}$ attivi entrati in assicurazione all'epoca m, con età x, fino all'estinzione del gruppo.

Oppure ${}^5O_x^{(m)} = v_x^{(m)} \sum_{t=1}^{\xi-x} {}_{t-1}p_{[x]}^1 q_{[x]+t-1}^{1,5} v^t \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-x-t} p_{[x+t]}^5 r_t^{(m+t+\tau)} \Psi(x+t+\tau,\tau) v^\tau$

- $\boxed{{}^{(k,6)}O_x^{(m)}} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \sum_{\tau=1}^{\omega_k-x-t} \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-x-t-\tau} \ell^{6(m+t+\tau+\eta)}(x,t,\tau,\eta) r_t^{(m+t+\tau+\eta)} \psi(x+t+\tau+\eta,\eta) v^{t+\tau+\eta}$ il valore attuale medio al tempo m del flusso delle pensioni che saranno pagate al gruppo dei superstiti di pensionato del gruppo k($k = 2,3,4$) che derivano dai $v_x^{(m)}$ attivi entrati in assicurazione all'epoca m, con età x, fino all'estinzione del gruppo, dove ${}^k\ell^{6(m+t+\tau+\eta)}(x,t,\tau,\eta) = v_x^{(m)}{}_{t-1}p_{[x]}^1 q_{[x]+t-1}^{1,k} {}_{\tau-1}p_{[x+t]}^k q_{[x+t]+r-1}^{k,6} {}_{\eta}p_{[x+t+\tau]}^6$ che consente di ricondurre il calcolo di ${}^{(k,6)}O_x^{(m)}$ solo in termini dei dati iniziali.

In conclusione il totale degli oneri relativi agli entrati in assicurazione all'età x, come nel caso delle precedenti tipologie di oneri, è esprimibile nella forma: **CONTROLLARE: MANCA L?UGUALIANZA QUI SOTTO**

$$\sum_{k=2}^{4} {}^kO_x^{(m)} + {}^5O_x^{(m)} + \sum_{k=2}^{4} {}^{(k,6)}O_x^{(m)}$$

Osservazione. Fai caso alle molte analogie fra le formule.

3. Valori medi di salari e oneri in ipotesi semplificatrici (pg 72 quaderno).

Vediamo in questo paragrafo come si possa semplificare il calcolo di $S^{(m)}$ e di $O^{(m)}$ assumendo le ipotesi (ragionevoli in molti casi pratici) introdotte nella sezione 1.3 "condizioni economiche statiche e dinamiche" e 1.4.

$s_t^{(m)} = s_t \quad e \quad r_t^{(m)} = r_t \quad \forall m$

Ipotesi: assumiamo le ipotesi semplificatrici proposte nel paragrafo 1.4, secondo cui le condizioni economiche dinamiche si riassumono nel tasso annuo di incremento j_1, costante.

$S_x^{(m)} = (1+j_1)^m v_x^{(m)} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} {}_tp_{[x]}^1 s_{t+1} (1+j_1)^t v^t$

- indicando con $\boxed{j}$ il tasso di interesse annuo corrispondente a v vale che $j = \frac{1}{v} - 1$

  e ponendo $\rho = \frac{1+j}{1+j_1} - 1 \quad e \quad v_\rho = \frac{1}{1+\rho} = \frac{1+j_1}{1+j}$ otteniamo

$$S_x^{(m)} = (1+j_1)^m v_x^{(m)} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} {}_tp_{[x]}^1 s_{t+1} v_\rho^t$$

Si osservi che la dipendenza da m si ritrova solamente nel fattore $(1+j_1)^m v_x^{(m)}$ (in particolare se $j_1 = 0$ci si riconduce alle espressioni determinate nel caso di condizioni economiche statiche).
Analoghi risultati si ottengono facilmente per gli oneri.

Capitolo 6. I coefficienti di capitalizzazione

In questo capitolo opereremo nell'ambito di condizioni economiche statiche per introdurre alcuni **valori sintetici individuali**, noti con il nome di *coefficienti di capitalizzazione*.

1. Premesse

Un simbolismo diverso! In letteratura per trattare questo problema è stato introdotto un simbolismo parzialmente diverso da quella che abbiamo fin qui usato, a cui ci adeguiamo in questo capitolo.

- ${}^{a}q_x$ la probabilità di eliminazione di un attivo per qualunque causa tra le età x e $x+1$
- ${}^{a}q_x^i$ probabilità di eliminazione di un attivo per invalidità
- ${}^{a}q_x^v$ probabilità di eliminazione di un attivo per vecchiaia
- ${}^{a}q_x^w$ probabilità di eliminazione di un attivo per altre cause
- ${}^{a}q_x^d$ le probabilità di eliminazione di un attivo per morte tra le età x e $x+1$

Ipotesi: ipotesi che le cause di eliminazione siano incompatibili

$$\Rightarrow^a q_x =^a q_x^i +^a q_x^v +^a q_x^w +^a q_x^d$$

Ipotesi: Supponiamo che il passaggio nel gruppo dei pensionati di vecchiaia possa avvenire soltanto fra le età $\xi - 1$ e ξ : si ha allora ${}^{a}q_x^v = 0$ per $x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \xi - 2,$ e risulta: **/CONTROLLARE LA "A" QUI SOTTO)**

$$aq_x = \begin{cases} a_x^i +^a q_x^w + a_x^d & perx = \alpha, \alpha + 1, \dots, \xi - 2 \\ a_x^i + a_x^v + a_x^w + a_x^d & perx = \xi - 1 \end{cases}$$

Ora poiché $\xi - 1$ è Tultima età in cui un individuo può essere attivo, si ha: e quindi anche

$${}^{a}q_{\xi-1} = 1$$

- ${}^{a}p_x$ probabilità di permanenza nella collettività degli attivi dall'età x almeno per un anno
- ${}^{a}_{t}p_x$ probabilità di permanenza nella collettività degli attivi dall'età per t anni, con $1 \leq \mathrm{t} \leq \xi - \mathrm{x}$
- ${}^{\mathrm{i}}\mathrm{q}^{\mathrm{d}}_{[\mathrm{y}]+\tau}, {}^{\mathrm{v}}\mathrm{q}^{\mathrm{d}}_{[\mathrm{y}]+\tau}, {}^{\mathrm{w}}\mathrm{q}^{\mathrm{d}}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ le probabilità di eliminazione per morte rispettivamente di un pensionato di invalidità, di vecchiaia o per altre cause tra le età $\mathrm{y} + \tau$e $\mathrm{y} + \tau + 1$
- ${}^{\mathrm{i}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{t}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}, {}^{\mathrm{v}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{t}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}, {}^{\mathrm{w}}\mathrm{p}^{\mathrm{w}}_{[\mathrm{y}]+\tau}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ **CONTROLLARE QUESTA "e" nel simbolo** rispettivamente per le probabilità di sopravvivenza per almeno uno o per almeno t anni di un pensionato di invalidità, di vecchiaia o per altre cause, entrato in pensione all'età y e rimastoci per τ anni.

Relazione $\mathrm{h}_{[\mathrm{y}]+\tau} = 1 -^{\mathrm{h}} \mathrm{q}^{\mathrm{d}}_{[\mathrm{y}]+\tau}, \quad per\mathrm{h} = \mathrm{i}, \mathrm{v}, \mathrm{w}$

- ${}^{\mathrm{F}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ probabilità di sopravvivenza per almeno m anni di un nucleo superstite di attivo di "età" y + τ e anzianità τ
- ${}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{[\mathrm{y}]+\tau}$ probabilità di sopravvivenza per almeno m anni di un nucleo superstite di attivo di "età" y + τ e anzianità τ
- ${}^{\mathrm{f}}\mathrm{p}_{[\mathrm{z}]+\eta}$ di un nucleo superstite di pensionato di "età" $z + \tau$

- $\boxed{{}^f_m p_{[z]+\eta}}$ probabilità di sopravvivenza di un nucleo superstite di pensionato di anzianità η

1.2

- $\boxed{\{\ell^a_x\}}$ **tavola di attività**
- $\boxed{\ell^a_X}$ generico elemento della tavola di mortalità

si parte dalla conoscenza delle probabilità di eliminazione dal gruppo degli attivi tra le età x e $x+1$ di un individuo di età x(con$x = \alpha, \alpha+1, \ldots, \xi-1$) per qualunque causa ${}^a q_x$, e da un valore iniziale ℓ^a_α. I successivi valori di ℓ^a_x si determinano secondo la relazione ricorrente: $\ell^a_{x+1} = \ell^a_x(1 -^a q_x)$ per cui $\frac{\ell_{x+t}}{\ell^a_X}$ è la probabilità che un individuo attivo all'età x sia attivo anche all'età $x+t$. Essendo ${}^a q_{\xi-1} = 1$ risulta $\ell^a_\xi = 0$

2. Valori medi di salari

NON MI CONVINCE IL SIGNIFICATO DI QUESTO SIMBOLO QUI SOTTO Ipotesi: Si assume $\ell^a_{[x]+t} = \ell^a_{x+t}$ (cioè si fa riferimento a tavole di attività aggregate)

- $\boxed{\ddot{a}^{(a)}_x(s)} = \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \frac{\ell^a_{x+t}}{\ell^a_x}\frac{s_{t+1}}{s_1}v^t$ il valore attuale medio dei salari annui anticipati, per unità di salario iniziale (s_1 del primo anno), che un individuo entrato in assicurazione all'età x percepirà per tutto il periodo della sua attività lavorativa.

3. Coefficienti di capitalizzazione relativi agli oneri.

- $\boxed{\ddot{a}^{(i)}_{[y]}} = \sum_{\tau=0}^{\omega_2-1-y} \frac{\ell^i_{[y]+\tau}}{\ell^i_{[y]}}v^\tau$ 3.1 Per il gruppo degli invalidi si definisce **annualità vitalizia su testa di invalido** (o **coefficiente di capitalizzazione su testa di invalido**) il valore attuale medio di una rendita annua unitaria anticipata riferita ad un invalido di età y
- $\boxed{\ddot{a}^{(v)}_y} = \sum_{\tau=0}^{\omega_3-1-y} \frac{\ell^v_{y+\tau}}{\ell^v_y}v^t$ Analogo al caso dell'annualità vitalizia su testa di invalido è quello della **annualità vitalizia su testa di vecchio** data dal seguente valore attuale medio
- $\boxed{\ddot{a}^{(ai)}_x(r)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \frac{\ell^a_{x+t-1}}{\ell^a_x}\, a\, q^i_{x+t-1}\frac{r_t}{s_1}v^t\ddot{a}^{(i)}_{x+t}$ Questo coefficiente di capitalizzazione rappresenta il valore attuale medio degli oneri relativi ad un pensionato di invalidità, che deriva da un individuo entrato in assicurazione all'età x, per unità del salario percepito all'epoca d'ingresso in assicurazione se la probabilità di eliminazione per invalidità di un attivo non dipende dall'età di ingresso nel gruppo ma solo dall'età raggiunta x + t - 1
- $\boxed{\ddot{a}^{(av)}_x(r)} = \frac{\ell^a_{\xi-1}}{\ell^a_x}\,{}^a q^v_{\xi-1}\frac{r_{\xi-x}}{s_1}v^{\xi-x}\ddot{a}^{(v)}_\xi$ Analogamente il valore attuale medio degli oneri relativi ad un pensionato di vecchiaia, che deriva da un individuo entrato in assicurazione all'età x, per unità del salario percepito all'epoca d'ingresso in assicurazione
- $\boxed{\ddot{a}^{(F)}_{[y]}(\psi)} = \sum_{\tau=0}^{\omega_5-1-y} \frac{\ell^F_{[y]+r}}{\ell^F_{[y]}}\psi(y+\tau,\tau)v^\tau$ **annualità di famiglia**: con ciò si intende il *valore attuale medio*, riferito all'età y della morte di un assicurato che lasci nucleo superstite, *della rendita unitaria di pensione ad esso erogata annualmente e anticipatamente*
- $\boxed{\ddot{a}^{(f)}_{[z]}(\psi)} = \sum_{\eta=0}^{\omega_6-1-z} \frac{\ell^f_{[z]+\eta}}{\ell^f_{[z]}}\psi(z+\eta,\eta)v^\eta$ Allo stesso modo, **annualità di famiglia**, si chiama il valore attuale medio, riferito all'età z di morte di un pensionato diretto che lasci famiglia (nucleo superstite), della rendita unitaria di pensione erogata alla famiglia stessa, annualmente e anticipatamente.

- $\boxed{\ddot{a}_x^{(aF)}(r)} = \sum_{t=1}^{\xi-x} \frac{\ell^a_{x+t-1}}{\ell^a_x} {}^a q^{dF}_{x+t-1} \frac{r_t}{s_1} v^t \ddot{a}^{(F)}_{[x+t]}(\psi)$ Con le solite precisazioni, il valore attuale medio degli oneri relativi al nucleo superstite di un assicurato che x + 1 deriva da un individuo entrato in assicurazione all'età x, *per unità del salario percepito* all'epoca d'ingresso in assicurazione. Dove,
in cui ${}^a q^{dF}_{x+t-1}$ è la probabilità che un attivo venga eliminato per morte tra le età $x+t-1$e$x+t$ lasciando nucleo superstite.in cui ${}^a q^{dF}_{x+t-1}$ è la probabilità che un attivo venga eliminato per morte tra le età $x+t-1$e$x+t$ lasciando nucleo superstite.

- $\boxed{\ddot{a}_{[y]}^{(if)}(\psi)} = \sum_{\tau=1}^{\omega_2-y} \frac{\ell^i_{[y]+\tau-1}}{\ell^1_{[y]}} {}^i q^{df}_{[y]+\tau-1} v^\tau \ddot{a}^{(f)}_{[y+\tau]}(\psi)$ è l'**assicurazione di famiglia riferita ad un invalido** (Come nel caso delle annualità di famiglia si fa riferimento ad una rendita unitaria di pensione.)
Essa fornisce il valore attuale medio degli oneri relativi al nucleo superstite di un pensionato di invalidità, entrato nel gruppo degli invalidi all'età y, essendo ${}^i q^{df}_{[y]+\tau-1}$ la probabilità che un pensionato di invalidità muoia fra l'età $y+\tau-1$ e $y+\tau$ lasciando famiglia.

- $\boxed{\ddot{a}_y^{(vf)}(\psi)} = \sum_{\tau=1}^{\omega_3-y} \frac{\ell^v_{y+\tau-1}}{\ell^v_y} {}^v q^{df}_{y+\tau-1} v^\tau \dot{a}^{(f)}_{y+r}(\psi)$ Analogamente definiamo l'**assicurazione di famiglia riferita ad un vecchio** (anche qui si fa riferimento ad una rendita unitaria di pensione) che fornisce il valore attuale medio degli oneri relativi al nucleo superstite di un pensionato di vecchiaia di età y.

- Con procedimento del tutto analogo a quello che ha condotto alla annualità di famiglia si ricavano infine le espressioni del valore attuale medio degli oneri per *pensioni di reversibilità relativi ad un attivo di età x che diventi invalido* all'età x+t e del valore attuale medio degli oneri per *pensioni di reversibilità relativi ad un attivo di età x che diventi pensionato di vecchiaia all'età x + t*.

Capitolo 7. Sistemi finanziari di gestione e calcolo dei premi.

1. Generalità

Un fondo pensioni è un fondo (o *cassa*) che, in generale, ha come scopo quello di erogare pensioni ai lavoratori appartenenti al fondo e ai loro eventuali nuclei superstiti quando essi sono colpiti da eventi che implicano la cessazione permanente della loro attività lavorativa (invalidità permanente, vecchiaia, morte, altre cause). Il fondo pensioni è alimentato da contributi che, di norma, vengono versati dai lavoratori stessi e dai loro datori di lavoro (se si tratta di dipendenti).

Faremo riferimento ad un periodo di gestione del fondo che potrà essere sia limitato che illimitato, a modelli nel tempo discreto e al caso in cui sia il pagamento degli oneri sia il versamento dei contributi avvengano annualmente e anticipatamente. Ricordiamo poi che abbiamo supposto che i contributi siano determinati come percentuale del salario di ogni attivo e che abbiamo chiamato premio la corrispondente aliquota. Come si è già detto nel capitolo 1, nel caso dei fondi pensione intervengono:

a) l'ente che gestisce il fondo pensioni,
b) gli attivi,
c) coloro che pagano i contributi, che supporremo siano soltanto gli attivi,
d) i beneficiari delle prestazioni previste dal fondo, cioè gli attivi e i loro nuclei superstiti.

2. Il principio di equivalenza attuariale.

Con riferimento ad un fissato periodo di gestione, che duri 1 anno, n anni o sia illimitato, definiamo un principio di equivalenza attuariale secondo il quale **all'inizio del periodo di gestione il valore attuale medio degli oneri che verranno erogati dal fondo deve essere uguale al valore attuale medio dei contributi che verranno versati al fondo**.

Distinguiamo due situazioni:
(a) una situazione in cui facciamo riferimento a contributi ed oneri relativi a*d un fissato numero, finito o infinito, di anni di gestione*,
(b) una situazione in cui facciamo riferimento a contributi ed oneri relativi alle generazioni di *nuovi ingressi in assicurazione per un fissato numero, finito o infinito, di anni consecutivi*.

Ipotesi: gli importi sono attualizzati secondo la legge finanziaria esponenziale con fattore annuo di attualizzazione v.

Osservazione. All'epoca 0 di inizio della gestione ci si può trovare, in generale, in una delle due seguenti situazioni:
- ci sono già individui che hanno diritto a prestazioni;
- non ci sono individui che hanno diritto a prestazioni.

2.2 Caso (a) ci riferiamo agli anni di gestione:
O_m il valore medio dell'ammontare degli oneri che verranno erogati all'epoca m
$C^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} C_x^{(m)}$ il valore medio dell'ammontare dei contributi che verranno versati all'epoca m.

Allora se il periodo di gestione del fondo è di n anni oppure di durata illimitata il principio di equivalenza attuariale è espresso da:

$$\sum_{m=0}^{n-1} C_m v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O_m v^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O_m v^m$$

2.3 Caso (b) Qui facciamo riferimento a generazioni successive di nuovi ingressi in assicurazione: $C_x^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m dei contributi che saranno versati complessivamente dagli attivi entrati nel fondo pensioni all'epoca m con età x $C^{(m)}$ il valore attuale medio all'epoca m dei contributi che saranno versati complessivamente dagli attivi entrati nel fondo pensioni all'epoca m,

$$\sum_{m=0}^{n-1} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)} v^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)} v^m$$

Nelle rispettive situazioni considerate chiameremo *condizione di equilibrio attuariale* ciascuna delle quattro uguaglianze.

3. I sistemi finanziari di gestione.

Ogniqualvolta si stabilisce un criterio per determinare i valori medi dei contributi in modo tale che sia verificata la condizione di equilibrio attuariale, si ha un sistema finanziario di gestione. Almeno idealmente ci possono essere infiniti di questi sistemi.
Si può pensare a sistemi finanziari di gestione che, pur essendo riferiti a collettività di individui, cioè di tipo collettivo, abbiano comunque le caratteristiche tipiche delle assicurazioni private e cioè siano tali da realizzare la condizione di equilibrio attuariale già a livello individuale e, a fortiori, collettivo.
Peraltro il carattere dell'obbligatorietà di cui già abbiamo parlato permette di realizzare anche sistemi finanziari che si prefiggono di ottenere l'equilibrio a livello collettivo senza che si verifichi necessariamente a livello individuale (ottenendo l'effetto della solidarietà nelle assicurazioni sociali).

Distinzioni fondamentali:

- i sistemi finanziari a **ripartizione**.
  - il sistema della ripartizione pura
  - il sistema di ripartizione dei capitali di copertura;
- i sistemi finanziari a **capitalizzazione**.
  - il sistema del premio individuale,
  - il sistema del premio per generazioni,
  - il sistema del premio medio generale.

Salvo il caso del sistema del premio individuale, si tratta di sistemi che prevedono un *premio collettivo*.

3.3 Sistemi finanziari di gestione a ripartizione I sistemi finanziari di gestione a ripartizione sono quelli in cui in ciascun anno l'ammontare dei contributi versati nel fondo nell'anno è pari all'ammontare degli oneri erogati dal fondo in quell'anno e quindi, $\forall m$

$$C_m = O_m$$

da essa segue immediatamente che risulta verificata la condizione di equivalenza attuariale.

3.3.1 Sistema finanziario della ripartizione pura quando $O u_m$ è 1 'ammontare delle pensioni da erogare all'epoca m, cioè quando $O_m = \bar{\Theta}^{(m)}$

Ipotesi: dove per semplicità **utilizziamo ancora** il simbolo $\bar{\Theta}^{(m)}$, che nel capitolo 5 abbiamo definito come *valore medio di un numero aleatorio*, anche se qui si tratta di un **numero certo**.

- $\boxed{\overline{\mathcal{P}}^{(m)}}$ il premio in questo sistema finanziario di gestione, che chiameremo *premio di ripartizione pura* per l'anno di gestione $(m, m+1)$.

- $\mathcal{S}^{(m)}$ il valore dell'ammontare dei salari che percepiscono gli attivi all'epoca m (numero erto, diversamente dal significato definito nel capitolo 5)

$$C_m = \overline{\mathcal{P}}^{(m)} \mathcal{S}^{(m)}$$

$$\overline{\mathcal{P}}^{(m)} \mathcal{S}^{(m)} = O_m \quad \text{ovvero} \quad \overline{\mathcal{P}}^{(m)} \mathcal{S}^{(m)} = \bar{\Theta}^{(m)}$$

3.3.2 Si ha invece il sistema finanziario della ripartizione dei capitali di copertura quando O_m è il valore attuale medio degli oneri che verranno erogati al gruppo dei neo-pensionati dell'anno m, e ai loro nuclei superstiti, cioè $O_m = \Theta^{(m)}$

- $\mathcal{P}^{(m)}$ il premio secondo questo sistema finanziario di gestione, che chiameremo pr*emio di copertura dei capitali*, all'epoca m, si ha $C_m = \mathcal{P}^{(m)} \mathcal{S}^{(m)}$

Osservazione 7.3. Riprendendo i simboli $\Theta^{(m)}$ e $\bar{\Theta}^{(m)}$ nel significato di valori medi dato loro nel capitolo 5, è interessante osservare che nel caso di una gestione di durata illimitata e se al tempo 0 non ci sono pensionati si prova facilmente che $\sum_{m=0}^{\infty} \Theta^{(m)} v^m = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\Theta}^{(m)} v^m$

3.4 Sistemi finanziari di gestione a capitalizzazione considereremo il sistema finanziario del premio individuale, quello del premio per generazioni e quello del premio medio generale.

Sistema finanziario di gestione a premio individuale

Consideriamo un'epoca m e in quest'epoca la collettività costituita da tutti gli individui che entrano in assicurazione all'epoca stessa, con uguale età x, cioè una coorte.

Diciamo sistema finanziario del premio individuale all'epoca m quello in cui, con il pagamento di uno stesso premio in ogni anno di attività, si realizza l'uguaglianza tra il valore attuale medio dei contributi che verranno versati dai detti assicurati a partire dall'epoca m e fintantoché sono attivi, $C_x^{(m)}$, e il valore attuale medio degli oneri che derivano dagli stessi individui, $O_x^{(m)}$.

Vale che $C^{(m)} = O^{(m)}$ da qui si riconosce immediatamente che è soddisfatta la condizione di equilibrio.

- $P_x^{(m)} = \dfrac{O_x^{(m)}}{S_x^{(m)}}$ è il premio individuale di ciascuno degli attivi

Sistema finanziario di gestione del premio per una generazione

Consideriamo ad una generica epoca m la collettività costituita da tutti gli individui che entrano in assicurazione in quest'epoca, cioè la generazione che entra in assicurazione all'epoca m. Diciamo *sistema finanziario del premio per una generazione* quello in cui, con il pagamento di uno stesso premio in ogni anno di attività, si realizza l'uguaglianza tra il valore attuale medio dei contributi che gli attivi della generazione verseranno a partire dall'epoca m fino alla loro uscita dal gruppo degli attivi, e il valore attuale medio degli oneri che derivano dagli individui della generazione stessa, cioè $C^{(m)} = O^{(m)}$ da cui rimane verificata la condizione di equilibrio.

- $P^{(m)} = \dfrac{O^{(m)}}{S^{(m)}} = \dfrac{1}{S^{(m)}} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} P_x^{(m)} S_x^{(m)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \left(\dfrac{S_x^{(m)}}{S^{(m)}} \right) P_x^{(m)}$ il premio per la generazione che entra in assicurazione all'epoca m da cui si deduce che il premio per una generazione è una media ponderata dei premi individuali per età, i pesi essendo i rapporti fra i valori attuali medi dei salari per le stesse età e il valore attuale medio dei salari dell'intera generazione.

Sistema finanziario del premio medio generale Parleremo di premio medio generale in diverse ipotesi e precisamente:

(i) con riferimento ad un numero finito di generazioni consecutive;

(ii) con riferimento ad un numero finito di anni di gestione;

(iii) con riferimento ad una gestione di durata illimitata.

Caso(i) consideriamo n generazioni di attivi che entrano in assicurazione rispettivamente alle epoche $0, 1, 2, ..., n$-1. In questo caso il sistema finanziario del *premio medio generale* è quello in cui ogni attivo delle generazioni considerate paga un premio P uguale per ogni anno di attività, che realizza l'uguaglianza tra il valore attuale medio dei contributi che verranno versati da tutti i detti attivi e il valore attuale medio degli oneri che ad essi (e ai loro superstiti) verranno erogati, data dalla (7.1"), che riportiamo: $\sum_{m=0}^{n-1} C^{(m)}v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)}v^m$ ossia $\sum_{m=0}^{n-1} PS^{(m)}v^m = \sum_{m=0}^{n-1} O^{(m)}v^m$ da cui

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} P^{(m)}S^{(m)}v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)}v^m} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{S^{(m)}v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)}v^m} \right) P^{(m)}$$

cioè P è una media ponderata dei $P^{(m)}$.

Caso (ii) : Consideriamo una gestione della durata di n anni. In questo caso il sistema finanziario del *premio medio generale* è quello in cui per ciascuno degli n anni ogni attivo paga un premio P uguale per ogni anno di attività, con cui si realizza l'uguaglianza tra il valore attuale medio dei contributi che verranno versati e il valore attuale medio degli oneri che verranno erogati negli stessi anni, cioè $C_m = P\mathcal{S}^{(m)}$ e $O_m = \overline{?}^{(m)}$.

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \overline{\mathcal{P}}^{(m)}\mathcal{S}^{(m)}v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{S}^{(m)}v^m} = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\mathcal{S}^{(m)}v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{S}^{(m)}v^m} \right) \overline{\mathcal{P}}^{(m)}$$

cioè P è una media ponderata dei $\overline{\mathcal{P}}^{(m)}$.

Caso (iii) : può essere visto come una estensione sia del caso (i) sia del caso (ii) e le condizioni di equilibrio sono rispettivamente: $\sum_{m=0}^{\infty} PS^{(m)}v^m = \sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)}v^m$, $\sum_{m=0}^{\infty} P\mathcal{S}^{(m)}v^m = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\Theta}^{(m)}v^m$ da cui si ottiene

$$P = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} O^{(m)}v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} S^{(m)}v^m} \text{ e } P = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \bar{\Theta}^{(m)}v^m}{\sum_{m=0}^{n-1} \delta^{(m)}v^m}$$

Il valore di P è lo stesso nei due casi se all'epoca 0 di inizio della gestione non ci sono individui che hanno diritto a prestazioni.

Osservazione: Si osservi che nei sistemi a ripartizione sono nettamente distinti coloro che pagano i contributi da coloro che ricevono le prestazioni mentre in quelli a capitalizzazione che abbiamo esaminato la collettività a cui compete di pagare i contributi è quella che riceverà le prestazioni.

Nota storica: Prima della seconda guerra mondiale la maggior parte dei sistemi previdenziali con assicurazione obbligatoria era gestita secondo il principio della capitalizzazione. La perdita di valore dei capitali accumulati dovuta alla forte inflazione, assieme al fatto che si era fortemente modificata la struttura demografica e al particolare contesto economico e sociale del dopoguerra, hanno portato all'abbandono del sistema a capitalizzazione vigente nei detti sistemi previdenziali sostituendolo con quello a ripartizione. Via via nel tempo chi lavora paga la pensione a chi è già pensionato e la sua pensione sarà pagata dalle future "generazioni" di lavoratori; nasce così quello che viene comunemente chiamato "*patto di solidarietà intergenerazionale*". Questo sistema è diventato quello caratteristico della previdenza sociale nelle economie avanzate.

4. Una osservazione finale: Crisi ripartizione pura

Ormai da parecchi anni il sistema finanziario della ripartizione pura è in crisi. Vediamo di evidenziarne i principali motivi con una semplice schematizzazione.

- N il numero di pensionati
- r la pensione media percepita da un pensionato
- A il numero dei lavoratori attivi
- s il salario medio percepito da un attivo.

La condizione di equilibrio attuariale secondo il sistema finanziario della ripartizione pura è allora la seguente: $(Ps)A = rN$ dove

- $P = \frac{r}{s}\frac{N}{A}$ è il premio pagato da un attivo secondo il sistema della ripartizione pura

dove $\frac{r}{s}$ è il tasso medio di sostituzione tra pensione e salario (che, nella situazione in esame, è riferito da una parte alla pensione media percepita da un pensionato e dall'altra dal salario medio di un attivo nella stessa epoca), mentre N/A è il rapporto tra numero di pensionati e di attivi; è un'analisi di questi due rapporti che consente di cogliere i motivi che possono causare problemi per il sistema di gestione a ripartizione:

- a) Per quanto riguarda il rapporto r/s osserviamo che, fermo restando il rapporto N/A, un suo aumento implica un aumento del premio P; ciò comporta che se il sistema previdenziale incrementa le prestazioni, a parità di salario medio si ha un aumento di P.
- b) Analogamente, per quanto riguarda il rapporto N/A osserviamo che, fermo restando il rapporto r/s, un suo aumento implica un aumento del premio P. Questa volta intervengono elementi di carattere demografico a creare difficoltà, in particolare il cosiddetto invecchiamento della popolazione che, sinteticamente, è la risultante di due fenomeni e cioè l'aumento della vita media e il calo della natalità. Recenti studi mostrano come questi fenomeni si presentino con particolare forza nei Paesi più evoluti.

Capitolo 8: Le riserve

1. Generalità.

Nei sistemi finanziari di gestione a *ripartizione* in ciascun anno di gestione l'ammontare dei contributi versati al fondo pensioni uguaglia l'ammontare degli oneri erogati dal fondo per le pensioni, per cui non si determina la formazione di riserve.

Però, nei sistema di *ripartizione* dei capitali di copertura può verificarsi il caso in cui sia ancora lo stesso fondo pensioni a gestire i capitali di copertura e a pagare annualmente la pensione ad ogni pensionato.

In questo capitolo esamineremo principalmente il problema della formazione di riserve nei sistemi finanziari a capitalizzazione, soprattutto del premio medio generale, con riferimento ad un *fondo pensioni con una gestione illimitata* e (salvo avviso contrario) nel caso in cui all'epoca 0 di avvio del fondo pensioni non siano presenti pensionati, ma soltanto attivi. Allora non ci sono oneri all'epoca 0, cioè $O_0 = 0$.

- $V_m = \sum_{r=m}^{\infty} O_r v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m} = \sum_{r=m}^{\infty} (O_r - C_r)\, v^{r-m}$ **Riserva matematica prospettiva** all'epoca m è data dalla differenza fra il valore attuale medio all'epoca m delle prestazioni1 che verranno erogate dal fondo dall'epoca m in poi e il valore attuale medio all'epoca m dei contributi che verranno pagati al fondo dall'epoca m in poi.

In considerazione del fatto che contributi e pensioni sono pagati anticipatamente la valutazione della riserva all'epoca m viene fatta immediatamente prima dei pagamenti dell'epoca m stessa.

Al fine della determinazione delle riserve dobbiamo riferirci all'ammontare degli oneri che in ogni anno della gestione vengono erogati dal fondo ai pensionati, cioè agli importi indicati con $\bar{\Theta}^{(m)}, \bar{\Theta}^{(m+1)}, \dots, \bar{\Theta}^{(r)}, \dots$ successione degli oneri annuali a partire dall'epoca m.
V_m si può scomporre nella somma di due riserve:

- V^a_m la **riserva prospettiva degli attivi**, detta anche **riserva per gli oneri latenti**, o riserva premi,
- V^P_m la **riserva prospettiva dei pensionati**, detta anche **riserva per gli oneri maturati**,

$$V_m = V^a_m + V^P_m = \sum_{r=m}^{\infty} \bar{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$$

2. Le riserve nei sistemi a capitalizzazione.

2.1.1 Coerentemente con la definizione generale di riserva matematica prospettiva data prima, la *riserva prospettiva degli attivi* è data dalla differenza fra il valore attuale medio all'epoca m degli oneri che competono agli attivi dall'epoca m in poi (cioè agli attivi presenti all'epoca m e a quelli che entreranno nel fondo dopo l'epoca m), e il valore attuale medio all'epoca m dei contributi che saranno versati dai detti attivi.

Ipotesi: (1) dagli attivi dell'epoca m possono derivare pensionati a partire dall'epoca m + 1
Ipotesi: (2) i neopensionati dell'epoca m + 1 derivano solo dalla generazione di attivi dell'epoca m,
Ipotesi: (3) i pensionati delle epoche successive a m + 1 potranno derivare ancora dalla generazione di attivi dell'epoca m e dalle successive generazioni di attivi.

Ne deriva che:

$$V^a_m = \sum_{r=m+1}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$$

2.1.2 La **riserva prospettiva dei pensionati** è data da $V^P_m = V_m - V^a_m = \sum_{r=m}^{\infty} \bar{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m}$ ed anche,

in forma finita, da $V^P_m = \sum_{r=0}^{T} \left(\sum_{k=r}^{T} {}_k\bar{\Theta}^{(m+r)} \right) v^r$ valore attuale medio delle pensioni spettanti a tutti e soli i pensionati vigenti all'epoca della sua valutazione (compresi, naturalmente, quelli diventati tali all'epoca m stessa.

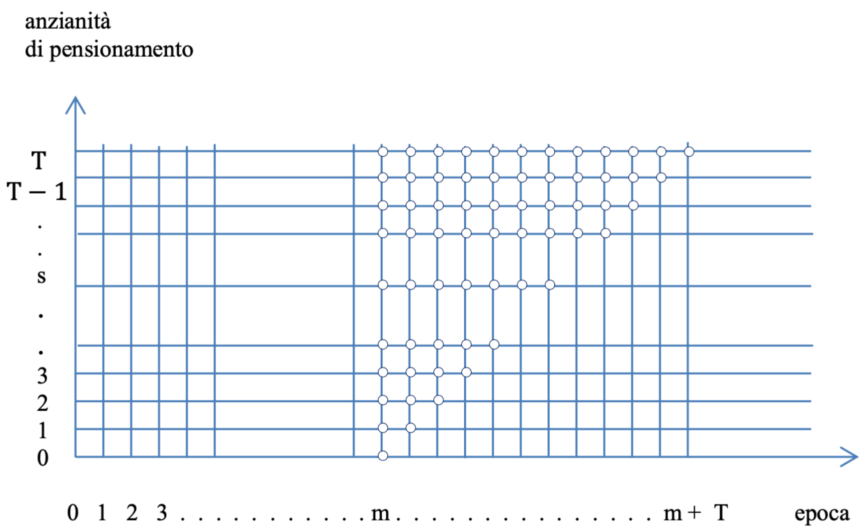

Figura 10: Situazione relativa al calcolo di V_m^P evidenziando con un puntino in grassetto i nodi a cui sono associati gli oneri che formano la riserva prospettiva dei pensionati.

Osservazione: Consideriamo il caso in cui è presente una generazione iniziale di pensionati, cioè in cui c'è un gruppo di pensionati (diretti, indiretti o di reversibilità) al momento dell'avvio del fondo. Allora la riserva prospettiva all'epoca m di questo gruppo è nulla per m > T mentre per $m \leq T$ è espressa dalla ${}_{(0)}V_m = \sum_{r=m}^{T} {}_{(0)}\bar{\Theta} v^{r-m^{(r)}} = \sum_{r=m}^{T} \left(\sum_{k=r}^{T} {}_k\bar{\Theta}^{(r)} \right) v^{r-m}$

2.3 La **riserva degli attivi** si può a sua volta scindere nelle due componenti dovute agli attivi presenti al momento delle valutazioni e agli attivi che entreranno nel fondo dopo l'epoca delle valutazioni, che sono rispettivamente

- ${}^pV_m^a$ la riserva prospettiva degli assicurati presenti
- ${}^fV_m^a$ la riserva prospettiva degli assicurati futuri

Relazioni:
$V_m^a = p_m^a + f_{V_m}^a$
$V_m^a = {}^p V_m^a + {}^f V_m^a + V_m^P$

2.4 Per la valutazione della riserva prospettiva all'epoca m procederemo secondo le seguenti due modalità:

(a) considerando anno per anno a partire dall'epoca m l'ammontare complessivo dei contributi versati e quello delle pensioni erogate e con questi dati determinando la riserva

(i) il sistema finanziario è quello del premio individuale; ${}_I C_r = \sum_{t=0}^{\min\{r,\xi-1-\alpha\}} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} P_x^{(r-t)} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)}$

(ii) l sistema finanziario è quello del premio per generazioni; ${}_G C_r = \sum_{t=0}^{\min\{r_r,\xi-1-\alpha\}} P^{(r-t)} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \delta_{x,t}^{(r)}$

(iii) il sistema finanziario è quello del premio medio generale. $C_r(P) = P \sum_{t=0}^{\min\{r,\xi-1-\alpha\}} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1-t} \mathcal{S}_{x,t}^{(r)} = P\mathcal{S}^{(r)}$

(b) considerando la collettività degli assicurati presenti all'epoca m, che chiamiamo *generazione iniziale* di assicurati all'epoca m, e le *generazioni successive* di nuovi ingressi in assicurazione, valutando per ciascuna di queste generazioni la riserva all'epoca di ingresso e attualizzandone i valori all'epoca della valutazione. 2.4.2 Passiamo ora all'espressione della riserva secondo la modalità (b) del n. 2.4. Osserviamo che la riserva prospettiva degli assicurati presenti ${}^{p}V_{m}^{a}$ è quella della generazione di assicurati che (nel n. 2.4 (b)) abbiamo chiamato generazione iniziale di assicurati all'epoca m, mentre la riserva prospettiva degli assicurati futuri ${}^{f}V_{m}^{a}$ è quella delle generazioni successive di nuovi ingressi in assicurazione dopo l'epoca m.

Con riferimento alla collettività costituita dalla coorte degli attivi di età x + t all'epoca m, entrati nel gruppo degli attivi all'età x, siano:

- $\boxed{S_{x,t}^{(m)}}$ il valore attuale medio, all'epoca m, dei salari che essa percepirà a partire dall'epoca m e fino al termine dell'attività lavorativa,
- $\boxed{C_{x,t}^{(m)}}$ il valore attuale medio dei contributi che da essa saranno versati a partire dall'epoca m,
- $\boxed{\mathrm{O}_{x,t}^{(m)}}$ il valore attuale medio, all'epoca m, degli oneri relativi ad essa ed ai suoi nuclei superstiti.

$$ {}^{p}V_{m}^{a} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(O_{x,t}^{(m)} - C_{x,t}^{(m)} \right) \text{ e } {}^{f}V_{m}^{a} = \sum_{r=m+1}^{\infty} \left(O^{(r)} - C^{(r)} \right) v^{r-m} $$

Ne segue immediatamente che quando il sistema finanziario di gestione è quello del premio individuale o del premio per generazioni la riserva ${}^{f}V_{m}^{a}$ è nulla.

Passiamo alla determinazione delle espressioni di $S_{x,t}^{(m)}$ ed $O_{x,t}^{(m)}$:

$$ S_{x,t}^{(m)} = \ell^{1(m)}(x,t) \sum_{k=t}^{\xi-1-x} k - t p_{[x]+t}^{1} s_{k+1}^{(m+k-t)} v^{k-t} $$

$$ O_{x,t}^{(m)} = \sum_{k=2}^{4} k_{x,t}^{(m)} + {}^{5}\, O_{x,t}^{(m)} + \sum_{k=2}^{4} (k,6) O_{x,t}^{(m)} $$

Ciò posto procediamo alla determinazione dell'espressione della riserva nei casi in cui il sistema finanziario di gestione sia:

(1) del premio medio generale: $\boxed{{}^{p}V_{m}^{a}(P)} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(O_{x,t}^{(m)} - PS_{x,t}^{(m)} \right)$ a **riserva prospettiva degli assicurati presenti**, è data dalla differenza fra il valore attuale medio degli oneri e quello dei contributi per la generazione di attivi presenti all'epoca m.
Per cui la riserva prospettiva degli assicurati futuri, è data da

$$ {}^{p}V_{m}^{a}(P) = \sum_{r=m+1}^{\infty} O^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m+1}^{\infty} PS^{(r)} v^{r-m} = \sum_{r=m+1}^{\infty} \left(O^{(r)} - PS^{(r)} \right) v^{r-m} $$

Osservazione. Si osservi che in generale risulta$O(r)$-$PS(r) \neq 0$, in quanto P non è, di norma, un premio di equilibrio per le singole generazioni che entrano in assicurazione via via nel tempo.

Infine la riserva totale degli attivi è: $V_{m}^{a} = \sum_{r=m+1}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_{r}(P) v^{r-m}$

(2) del premio individuale: $\boxed{{}_{I}V_{m}^{a}} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(o_{x,t}^{(m)} - P_{x}^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)} \right)$ valore della detta riserva all'epoca m,

(3) del premio per generazioni: $\boxed{{}_{G}V_{m}^{a}} = \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \left(O_{x,t}^{(m)} - P^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)} \right)$

3. Riserva dei soprapremi.

Di norma accade che se si adotta il sistema finanziario di gestione del premio medio generale relativamente ad un numero finito o no di generazioni, si determina un soprapremio rispetto a quello, di equilibrio, che competerebbe alle singole generazioni; analogamente si determina un soprapremio rispetto a quello, di equilibrio, che competerebbe a livello individuale. Ai soprapremi corrisponde una riserva, detta *riserva dei soprapremi*. Precisamente sia

- $\varepsilon_x^{(k)} = P - P_x^{(k)}$ il soprapremio (che può essere negativo, nullo o positivo) rispetto al premio individuale di un individuo che entra in assicurazione con età x all'epoca k. Determiniamo la corrispondente riserva dei soprapremi.

$V_m^a(P) =_I V_m^a - \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \sum_{t=0}^{\xi-1-x} \varepsilon_x^{(m-t)} S_{x,t}^{(m)} - \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{x=\alpha}^{\xi-1} \varepsilon_x^{(r)} S_x^{(r)} v^{r-m}$ in cui il primo termine è la riserva individuale, il secondo la riserva dei soprapremi degli assicurati presenti e il terzo è la riserva dei soprapremi degli assicurati futuri.

4. Le riserve nel sistema di ripartizione dei capitali di copertura.

Nel sistema di ripartizione dei capitali di copertura può verificarsi il caso in cui sia ancora lo stesso fondo pensioni a gestire i capitali di copertura e a pagare annualmente la pensione ad ogni pensionato, e questo determina la formazione di una riserva. $C_r = \Theta^{(r)}$ da cui segue che $V_m = \sum_{r=m}^{\infty} \bar{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} \Theta^{(r)} v^{r-m}$

Ricordando il significato di $\Theta^{(r)}$ questa differenza si riduce al valore attuale medio all'epoca m degli oneri che competono dall'epoca m in poi ai pensionati che sono andati in pensione prima dell'epoca m$(quindiall'epocamhannoalmeno 1$ anno di anzianità di pensionamento).

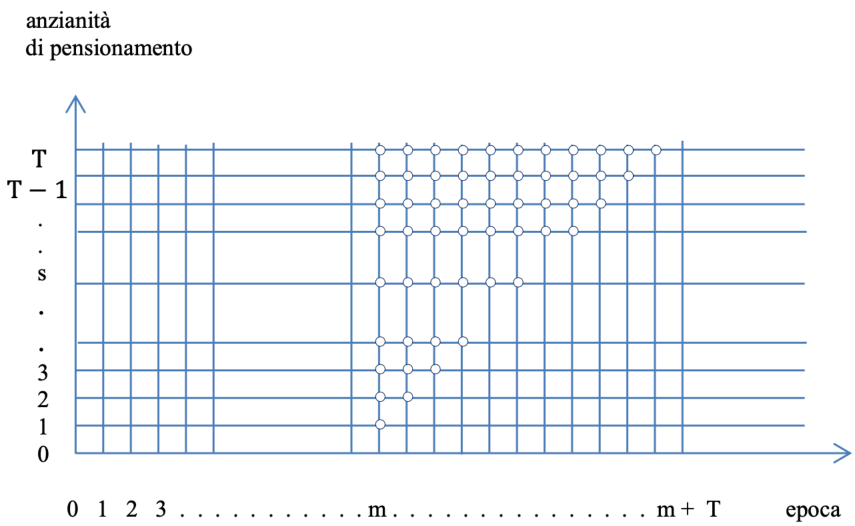

Figura 11: Osservazione 8.4. Si osservi che questa riserva non è uguale alla riserva dei pensionati V_m^P(si veda e precisamente risulta $V_m = V_m^P - \Theta^{(m)}$. Ciò è dovuto al fatto che, a differenza del caso della riserva dei pensionati V_m^P, V_m non comprende il valore attuale medio degli oneri per i nuovi pensionati dell'epoca m, $\Theta^{(m)}$, che viene coperto dall'importo C_m che entra nel fondo all'epoca m stessa.

5. Formule ricorrenti della riserva.

Da $V_m = \sum_{r=m}^{\infty} \bar{\Theta}^{(r)} v^{r-m} - \sum_{r=m}^{\infty} C_r v^{r-m}$ segue immediatamente la seguente relazione ricorrente della riserva:

$$V_{m+1} = \left(V_m + C_m - \bar{?}^{(m)} \right) (1 + j)$$

dove j è il tasso di interesse annuo corrispondente a v, cioè $v = \frac{1}{1+j}$, da cui

$$C_m = \bar{\Theta}^{(m)} + (vV_{m+1} - V_m)$$

che permette di rilevare il fatto che i contributi sono le entrate che devono coprire:
- l'ammontare degli oneri pagati all'epoca m:
$\bar{\Theta}^{(m)}$,
- il valore, all'epoca m, del salto di riserva dall'epoca m all'epoca $m+1$: $vV_{m+1} - V_m$.

Capitolo 9. Il bilancio tecnico

1. Introduzione.

Abbiamo visto che ci sono sistemi finanziari di gestione, i sistemi a ripartizione, che non danno luogo alla formazione di riserve e altri, i sistemi a capitalizzazione, che invece, in modi diversi, creano riserve. Di norma i primi sono quelli realizzati nell'ambito dei regimi generali, mentre i secondi si realizzano nei regimi complementari. Nei regimi autogestiti retti da premi medi, il bilancio tecnico di un fondo pensioni ha lo scopo di valutare se il fondo sia in equilibrio attuariale ossia se al momento delle valutazioni e con riferimento alla durata della gestione del fondo, la somma del patrimonio netto e del valore attuale medio dei contributi che verranno versati al fondo (a partire dall'epoca delle valutazioni in poi) è uguale al valore attuale medio degli oneri che saranno erogati dal fondo (a partire dall'epoca delle valutazioni in poi).

2. I prospetti del bilancio tecnico.

- **prospetto analitico**, nel quale vengono riportati tutti gli elementi utili alle valutazioni per ciascun anno della gestione futura o comunque per un certo numero di anni, se si tratta di una gestione di durata finita, oppure, se si tratta di una gestione di durata illimitata, per un numero considerevole di anni (usualmente da 20 a 50 o anche più);
  - Entrata: (1) i contributi dell'anno,
  - Entrata: (2) il rendimento del patrimonio (redditi),
- **prospetto sintetico**, in cui si riportano, all'epoca delle valutazioni, le attività e le passività riferite a tutti gli anni di gestione.
  - Uscita: (3) gli oneri per le rate di pensione dell'anno,
  - Uscita: (3') le spese generali di gestione, (nel prospetto che segue per semplicità ne considereremo direttamente la somma sotto l'unica voce *oneri*)
  - (4) il patrimonio a inizio anno. 'importo che si prevede di accumulare fino a quell'anno e che è l'importo con cui si devono fare i conti nel caso di scioglimento anticipato del fondo

2.2.1
Ipotesi: contributi ed oneri sono pagati anticipatamente,

- $\boxed{P_0}$ il patrimonio all'epoca 0, importo certo, dopo l'incasso dei contributi e l'esborso degli oneri dell'anno stesso.
- $\boxed{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1},}$ i tassi di rendimento dei capitali nel primo, secondo, terzo, $\ldots$, n-esimo anno di gestione, che assumiamo certi.

Per $k = 1, 2, ..., n$-1, siano

- $\boxed{C_k}$ il valore medio dei contributi dell'epoca k,
- $\boxed{O_k}$ il valore medio degli oneri per le rate di pensione più le spese generali di gestione dell'epoca k
- $\boxed{P_k}$ il patrimonio all'epoca k dopo l'incasso dei contributi e l'esborso degli oneri dell'anno stesso,
- $\boxed{R_k = j_{k-1} P_{k-1}}$ il rendimento del patrimonio dell'anno (k - 1, k)

Relazione:

$$P_k = P_{k-1} + C_k + R_k - O_k, \quad \text{per } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

2.2.2

- $\boxed{W_k^p}$ il valore di riferimento per i pensionati dell'epoca k (valore attuale medio delle future pensioni dei pensionati dell'epoca k),

- W_k^a il valore di riferimento per gli attivi dell'epoca k (montante dei contributi o riserva individuale),

E' possibile che si verifichi che:

i) il patrimonio accumulato all'epoca k, è non inferiore alla somma dei due detti valori di riferimento, cioè $P_k \geq W_k^p + W_k^a$. In questo caso diciamo che nell'anno in esame la garanzia nei confronti di pensionati ed assicurati è piena, e poniamo $\alpha_k = 1$ e $\beta_k = 1$

ii) il patrimonio accumulato è inferiore alla somma dei due detti valori di riferimento e allora o vale: (a) $W_k^p < P_k \leq W_k^p + W_k^a$ oppure (b) $P_k \leq W_k^p$.

Qualora sia previsto che il patrimonio disponibile sia destinato in primo luogo alla copertura degli impegni verso i pensionati vigenti e la eventuale parte rimanente alla copertura di quelli verso gli attivi , nel caso (a) risulta: $\alpha_k = 1 \text{e} \beta_k = \frac{P_k - W_k^p}{W_k^a}$ mentre nel caso (b) risulta: $\alpha_k = \frac{P_k}{W_k^p}$ e $\beta_k = 0$.

epoca	contributi	reddito	oneri	patrimonio	valori nel caso di scioglimento del fondo	
					pensionati	assicurati
0	-	-	-	P_0	-	-
1	C_1	R_1	O_1	P_1	α_1	β_1
2	C_2	R_2	O_2	P_2	α_2	β_2
...	...	...	...	...	...	...
n	C_{n-1}	R_{n-1}	O_{n-1}	P_{n-1}	α_{n-1}	β_{n-1}

Figura 12: Il prospetto analitico in base a quanto detto fin qui

2.3 Il prospetto sintetico di bilancio tecnico si può presentare in due forme che chiamiamo Prospetto A e Prospetto B:

ATTIVITA'	PASSIVITA'
- Patrimonio - Valore attuale medio dei contributi: - degli assicurati vigenti - dei nuovi ingressi in assicurazione - Totale attività - Disavanzo tecnico	- Valore attuale medio degli oneri: - per i pensionati vigenti - per gli assicurati vigenti - per i futuri ingressi in assicurazione - Totale passività - Avanzo tecnico

Figura 13: Prospetto sintetico di bilancio tecnico: Prospetto A

Nella colonna delle attività si aggiunge il *disavanzo tecnico* e in quella delle passività l'*avanzo tecnico*, che sono così definiti:

disavanzo tecnico = max{totale passività – totale attività, 0}

avanzo tecnico = max{totale attività – totale passività, 0}

ATTIVITA’	PASSIVITA’
- Patrimonio	- Riserve tecniche di: - pensionati vigenti - generazione degli assicurati vigenti - futuri ingressi in assicurazione
- Totale attività	- Totale passività
- Disavanzo tecnico	- Avanzo tecnico

Figura 14: Prospetto sintetico di bilancio tecnico: Prospetto B

Nella colonna delle attività si mette soltanto il patrimonio e in quella della passività si mettono le riserve tecniche. Si osservi che le riserve dei pensionati non sono altro che il valore attuale medio degli oneri per i pensionati.

Osservazioni:

a) se il bilancio è riferito ad un istante ”immediatamente prima” di m, il valore attuale medio degli oneri per i pensionati vigenti è la riserva prospettiva dei pensionati V^p_m, la riserva prospettiva della generazione iniziale di attivi è ${}^pV^a_m$ e quella dei futuri ingressi in assicurazione è ${}^fV^a_m$

b) nella pratica, se si fa capo al sistema finanziario del premio medio generale, di solito la riserva degli attivi vigenti risulta positiva mentre la riserva dei nuovi ingressi è spesso negativa;

c) se si è in presenza di un avanzo tecnico, ciò significa che la gestione del fondo sta andando bene e si può anche pensare ad una diminuzione del premio; se al contrario si è in presenza di un disavanzo tecnico, possibili soluzioni per riportare in equilibrio il bilancio sono quelle di aumentare il premio vigente oppure di apportare modifiche al regolamento del fondo indirizzate, ad esempio, ad una diminuzione delle prestazioni (fra queste accenniamo a quella che permetta un rallentamento della velocità di adeguamento delle pensioni alle variazioni di salario degli attivi).

3. Alcune osservazioni.

In vista della stesura del bilancio tecnico di un fondo pensioni riprendiamo e ampliamo le considerazioni relative alla valutazione della riserva.

3.1 Cominciamo ricordando che per calcolare la riserva matematica abbiamo bisogno di tre tipi di basi tecniche:

Richiami

a) basi tecniche demografiche; è costituita principalmente da una funzione di sopravvivenza riferita alla mortalità e poi, in considerazione delle altre tipiche cause di eliminazione dalla collettività degli attivi e conseguentemente dei diversi tipi di prestazioni erogate dal fondo pensioni, ci sono le basi tecniche che si riferiscono all’invalidità (o all’inabilità), alla vecchiaia ed, eventualmente, a familiari superstiti di attivo o di pensionato. Inoltre quando si considerano anche futuri ingressi, si devono fare previsioni sulla loro consistenza numerica e composizione.

b) basi tecniche finanziarie: sarebbe da considerare in condizioni di aleatorietà, ma molto spesso si riconduce ad un unico tasso di interesse annuo, il tasso tecnico.

c) basi tecniche economico-salariali: In considerazione delle relazioni che possono sussistere fra i contributi ed i salari od anche fra le pensioni ed i salari, si devono considerare basi tecniche salariali (ovvero economico- salariali), che descrivono l’andamento dei salari nel tempo.

3.2 Rischi di un fondo

- (a) **rischio demografico** ogni rischio relativo alla durata aleatoria di vita di ogni assicurato della collettività collegata al fondo pensioni; in esso si distinguono principalmente:

  - il rischio di scarti accidentali del numero di decessi dal valore atteso, che è imputabile alle normali fluttuazioni della mortalità;
  - il rischio di scarti sistematici, che è causato dal verificarsi di una mortalità strutturalmente diversa da quella attesa.

  Da ciò deriva che una tavola di sopravvivenza, anche la più recente, non permette di valutare oggi in maniera "esatta" le probabilità di decesso in tempi futuri sufficientemente lontani. Di fronte alla generale diminuzione della mortalità, quando i valori delle grandezze da riportare nel bilancio si ottengono con valutazioni che vengono effettuate senza tenere conto dei trend evolutivi della mortalità stessa, si corre il rischio di sottostimare le probabilità di sopravvivenza con la conseguenza di calcolare delle riserve matematiche che risulteranno insufficienti: è questo appunto il longevity risk. Per far fronte a questo rischio è stato proposto di usare al posto delle usuali tavole di mortalità delle tavole proiettate. Si tratta di tavole che vengono costruite estrapolando le esperienze di mortalità acquisite in precedenti periodi di osservazione in modo tale da tenere conto del trend di mortalità.

- (b) **rischio finanziario**: L'espressione rischio finanziario fa riferimento al rischio causato da fatti che riguardano il mercato in cui l'assicuratore effettua gli investimenti relativi alle riserve matematiche ed al patrimonio. Parlando di rischio finanziario si parla in particolare di rischio di tasso d'interesse che è quello dovuto alle oscillazioni del tasso di interesse in presenza di un non perfetto allineamento (matching) tra scadenze di pagamento delle prestazioni e scadenze dei titoli in cui sono investite le riserve (mismatching temporale). Il rischio di tasso riguarda, durante il periodo di attività di un assicurato, l'investimento dei contributi e delle riserve mentre durante il periodo di quiescenza riguarda l'investimento della riserva matematica che alimenta l'erogazione della pensione.

- (c) **rischio economico**: Infine con rischio economico intendiamo ogni rischio generato dall'evoluzione dello scenario economico nel quale si sviluppa, dinamicamente, lo schema previdenziale, esclusi i rischi di tipo finanziario. Questo rischio è riconducibile sostanzialmente alla dinamica salariale qualora ci sia un legame tra l'ammontare della rendita vitalizia e quello del salario, dunque in particolare per i fondi pensione a prestazione definita.

4. La stesura del bilancio tecnico.

Sintetizziamo brevemente le principali fasi del lavoro che porta alla stesura del bilancio tecnico, che sono:

- Esame del regolamento del fondo dal quale, tra l'altro, si individuano in modo preciso:

  - oloro che versano i contributi;
  - le modalità dei versamenti cioè il sistema finanziario di gestione;
  - le prestazioni fornite dal fondo;
  - i beneficiari delle prestazioni;
  - il metodo di calcolo delle prestazioni.

- Raccolta dei dati e delle basi tecniche:

  - isogna raccogliere tutti i dati utili sui pensionati del fondo e sugli attivi che vi aderiscono: sesso, dati anagrafici, composizione famigliare, ecc., e poi stabilire le tavole di eliminazione e sopravvivenza: tavole normali, tavole proiettate, ecc., con cui fare le valutazioni che, in casi particolari, devono essere costruite ad hoc;
  - per quanto riguarda le basi tecniche finanziarie la scelta di una legge finanziaria degli interessi composti può essere utile ma non la migliore per fare delle buone valutazioni; per migliorare si può allora pensare all'impiego di strutture per scadenza dei tassi di interesse;

- per quanto riguarda le basi tecniche economico salariali bisogna conoscere la scala salariale dei lavoratori afferenti al fondo e fare ipotesi sull'andamento futuro dei salari e sulle eventuali ripercussioni sull'importo delle pensioni.

- Fase di calcolo:
  - si può procedere con un approccio in cui si calcolano i valori medi dei numeri aleatori in gioco ed eventualmente altri momenti della loro distribuzione; in alternativa viene usato l'approccio della simulazione stocastica.

Capitolo 10. Approcci di simulazione stocastica per valutazioni in un fondo pensioni

(DA CONTROLLARE)

1. Introduzione

In questo capitolo per le valutazioni relative ai fondi pensione introduciamo l'approccio di calcolo della simulazione stocastica. Si tratta di un procedimento per la costruzione numerica di campioni di un processo stocastico che consente di calcolare ottime approssimazioni dei valori che si vogliono calcolare, tra cui anche i momenti successivi al primo delle variabili aleatorie in gioco o la loro distribuzione di probabilità. Questo procedimento risulta particolarmente efficace nei casi in cui sia matematicamente complessa la determinazione di questi valori. Sono stati proposti due diversi approcci al problema:

- nel primo approccio, il cosiddetto metodo **M.A.G.I.S.**, si fissa l'attenzione su un determinato periodo, tipicamente l'anno, e si procede alla simulazione delle variabili aleatorie relative al detto periodo per tutti i componenti della collettività in esame: si dice in tal caso che si è assunto il tempo come parametro operativo, in quanto le operazioni dette vanno ripetute periodo dopo periodo fino alla estinzione della collettività considerata;

- nel secondo approccio si fissa l'attenzione su un **individuo** (che diventa il parametro operativo in questo caso), attivo o pensionato, e si simulano le variabili aleatorie che riguardano lui ed il suo nucleo superstite.

2. Le linee essenziali del metodo M.A.G.I.S..

M.A.G.I.S. sta per *Metodo degli Anni di Gestione su base Individuale e per Sorteggio*, dove la parola sorteggio sta ad indicare che nel metodo si applica un procedimento di simulazione stocastica cioè, in ultima analisi, si effettua la generazione di numeri casuali (anzi, di norma, "pseudocasuali"). Questo metodo è stato proposto da A. Tomassetti negli anni '70 del secolo scorso per essere applicato alla gestione di fondi pensione, procedendo alla stima dei valori che interessano tale gestione via via in ciascuno degli anni della gestione stessa ed è per questo motivo che diciamo che il M.A.G.I.S. assume come parametro operativo il tempo. Non solo, ma si procede considerando successivamente tutti gli individui che interessano per le valutazioni, cioè in pratica gli attivi e i pensionati di ciascun gruppo di pensionati e per questo si dice che è un metodo su base individuale.
Al momento delle valutazioni oltre a età e sesso si conosce quella che viene chiamata la posizione previdenziale di ogni individuo che appartiene al fondo, che consiste in una serie di informazioni che riguardano principalmente:

(i) la posizione assicurativa, che precisa se si tratta di un attivo o di un pensionato (e quindi se l'individuo paga contributi o percepisce una pensione) e in questo secondo caso precisa il tipo di pensionato,

(ii) la composizione familiare (ai fini della valutazione delle pensioni ai superstiti),

(iii) se si tratta di un attivo la categoria lavorativa e il livello di carriera nell'ambito di tale categoria.

2.2 Per gli attivi possono verificarsi eventi che ne modificano la posizione assicurativa, cioè che ne determinano l'uscita dallo stato di attivo per morte o per pensionamento di qualche tipo, oppure eventi che ne modificano il livello di carriera (tipicamente "avanzamenti" di carriera) e inoltre possono verificarsi eventi che comportano variazioni dei salari. Analogamente per i pensionati si possono verificare eventi che comportano l'uscita dallo stato di pensionato ed eventi che comportano variazioni all'ammontare della pensione.

Per la stima di contributi ed oneri si procede allora alla simulazione degli eventi che ne determinano l'ammontare. Inoltre tramite simulazione si possono stimare parametri come ad esempio:
- il numero medio degli assicurati di ciascun anno della gestione,
- il numero medio dei pensionati di ciascun anno della gestione,

che si possono utilizzare per la valutazione di contributi ed oneri.

Osservazione. A parte l'anno in cui si fanno le valutazioni, nel quale la posizione previdenziale di ciascun individuo che partecipa al fondo è nota con certezza, negli anni successivi si assume come posizione previdenziale quella che risulta dalle simulazioni che via via si effettuano.

- Per un attivo:
  - Il primo gruppo ha il fine di stabilire la permanenza nel gruppo degli attivi o il passaggio ad altro gruppo: ciò si può fare in due modi:
    - (a) simulando un numero aleatorio con 5 determinazioni corrispondenti agli eventi: permanenza nel gruppo degli attivi, uscita per invalidità, uscita per vecchiaia, uscita per altre cause, uscita per morte,
    - (b) simulando un numero aleatorio con 2 determinazioni corrispondenti agli eventi permanenza nel gruppo degli attivi e uscita dal gruppo degli attivi; nel caso in cui si verifica l'uscita dal gruppo degli attivi si procede poi alla simulazione di un numero aleatorio con 4 determinazioni in corrispondenza alle 4 cause di uscita.
  - Il secondo gruppo riguarda la composizione familiare: vengono simulate le condizioni di appartenenza al nucleo superstite di familiari che abbiano diritto ad una pensione.
  - Il terzo gruppo riguarda il cambiamento di categoria e l'avanzamento di carriera (quando non siano dovuti solo ad automatismi deterministici) per un individuo che sia risultato rimasto nel gruppo degli attivi nel primo gruppo di simulazioni.
- Per un pensionato diretto si procede a due gruppi di simulazioni:
  - Il primo gruppo riguarda l'eventuale uscita dal gruppo dei pensionati diretti.
  - Il secondo gruppo riguarda la composizione familiare.
- Per un pensionato indiretto o di reversibilità si effettua soltanto il gruppo di simulazioni riguardante la composizione familiare per le sue conseguenze sull'aliquota di pensione del dante causa da erogare al nucleo.

Un metodo alternativo al M.A.G.I.S..

un approccio alternativo al M.A.G.I.S. per effettuare valutazioni in un fondo pensioni mediante la simulazione stocastica è quello in cui si assume come parametro operativo l'individuo.

Precisamente fissato un individuo viene simulata la sua intera storia (che comprende anche quella dei componenti di un eventuale nucleo superstite) a partire dall'epoca in cui si fanno le valutazioni. Se si tratta di un attivo, nel momento in cui intervengono cambiamenti della posizione previdenziale, cioè esce dalla collettività degli attivi, vengono considerate le conseguenti variazioni sul salario nel senso che il salario percepito fintantoché l'individuo è attivo viene a mancare quando non lo è più; chiaramente dal salario derivano poi i contributi. Se si tratta di un pensionato o di un nucleo superstite (di attivo o di pensionato) le variazioni riguardano la percezione della pensione o meno e la sua entità (ricordiamo che ai nuclei spetta una percentuale della pensione se sono soddisfatte opportune condizioni).

Come nel metodo M.A.G.I.S., all'epoca in cui si fanno le valutazioni si conoscono gli elementi che costituiscono la posizione previdenziale di tutti gli appartenenti al fondo pensioni e i corrispondenti importi di salari e pensioni.

3.2 Con riferimento ad un nucleo superstite si procede come segue: considerati separatamente i componenti del nucleo, se ne simula l'ulteriore durata di appartenenza al nucleo. Precisamente:

(1) si simula l'ulteriore durata in vita di ciascuno dei componenti del nucleo;

3.3. Con riferimento ad un pensionato diretto si procede come segue:
(1) se ne simula l'ulteriore durata in vita;
(2) si prende in esame il suo (eventuale) nucleo superstite di cui si simula la composizione nel tempo a partire dalla composizione che si conosce all'epoca della valutazione e tenendo conto del fatto che in relazione all'ulteriore durata di vita del pensionato, simulata in (1), si può essere modificata, con certezza, la composizione del nucleo superstite (si veda quanto detto nel punto (2) del n. 3.2).

3.4 Con riferimento ad un attivo si procede come segue:

(1) si simula l'ulteriore durata di appartenenza al gruppo degli attivi;
(2) si simulano gli avanzamenti di carriera nel periodo di attività;
(3) si simula la causa di uscita;

e dopo

(4') se dalla simulazione di cui al punto (3) risulta che l'attivo è diventato pensionato diretto si procede secondo quanto specificato nel precedente paragrafo 3.3;
(4") se dalla simulazione risulta che l'attivo è morto si procede secondo quanto specificato nel precedente paragrafo 3.2.

4. un modello di simulazione

In questo e nel prossimo paragrafo illustriamo sinteticamente e con qualche adattamento e modifica un modello di simulazione applicato ad un fondo pensioni proposto in uno studio di A.R. Bacinello.

4.2 Consideriamo un individuo di età x, attivo, e indichiamo con

- $\boxed{x}$ è l'età dell'attivo all'epoca delle valutazioni
- $\boxed{Z_x}$ la v.a. ulteriore durata di permanenza dell'individuo nel gruppo degli attivi. L'unità di misura di Z_x è l'anno; più precisamente diciamo che $Z_x = t$ se l'individuo è attivo all'età x + t (con t numero intero) e non lo è più all'età $x + t + 1$

Allora se indichiamo (come al solito) con

- ξ l'età di vecchiaia,

le determinazioni possibili di Z_x sono $0, 1, 2, \ldots, \xi - 1 - x$, in numero di $\xi - x$.
Siano

- $\boxed{p_1, p_2, \ldots, p_{\xi - x}}$ le rispettive probabilità, sia cioè: $p_j = Pr\left\{Z_x = j - 1\right\} \quad per j = 1, 2, \ldots, \xi - x$

e risulta $p_j =^a_{j-1} p^a_x q_{x+j-1}$ dove

- $\boxed{^a_{j-1}p_x}$ è la probabilità che un attivo di età x rimanga nel gruppo degli attivi almeno fino all'età $x + j - 1$ (ai fini della determinazione della distribuzione di probabilità di Z_x non faremo riferimento a tavole selezionate in base all'età d'ingresso in assicurazione, bensì a tavole aggregate),

Essa si può anche scrivere, in relazione alla v.a. Z_x : **CONTROLLARE SE C'è LA A IN ALTO A SX QUI SOTTO**
$_{j-1}p_x = Pr\left\{Z_x \geq j - 1\right\}$
e
CONTROLLARE SE C'è LA R IN ALTO A SX QUI SOTTO

- $E^a q_{x+j-1}$ è la probabilità che un individuo attivo all'età $x + j - 1$ non sia più nel gruppo degli attivi all'età $x + j$, e in particolare risulta:

$$p_1 = Pr\left\{Z_x = 0\right\} =^a_0 p^a_x q_x =^a q_x$$

$$p_{\xi - x} = Pr\left\{Z_x = \xi - 1 - x\right\} =_{\xi-1-x} a^a_x q_{\xi-1} =_{\xi-1-x} p_x$$

e la funzione di ripartizione di Z_x che indico con $F_{Z_x}(y)$, è data da

$$F_{Z_x}(y) = \begin{cases} 0 & per\, y < 0 \\ 1 -_{int(y)+1} {}^a p_x & per\, 0 \leq y < \xi - 1 - x \\ 1 & per\, y \geq \xi - 1 - x \end{cases}$$

dove con int(y) intendiamo la parte intera di y: infatti basterà osservare che per $0 \leq y < \xi - 1 - x$ risulta

$$F_{Z_x}(y) = Pr\{Z_x \leq y\} = 1 - Pr\{Z_x > y\} = 1 - Pr\{Z_x \geq int(y)+1\} = 1 -{}^{a}_{int(y)+1} p_x$$

e il suo grafico è di questo tipo: Questo modo di scrivere la $F_{Z_x(y)}$ molto comodo se si è in possesso di una

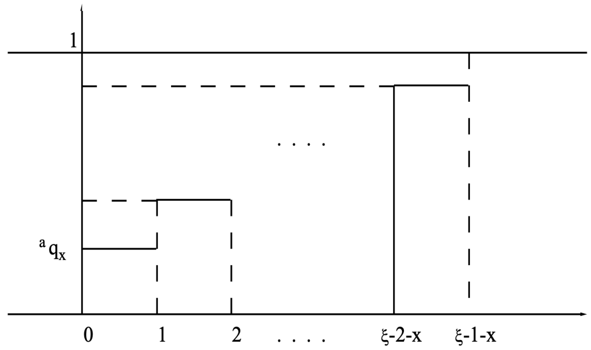

Figura 15: Grafico FdR

tavola di attività $\{\ell_x^a\}$ in quanto in tal caso si ha $F_{Z_x}(y) = 1 - \dfrac{\ell^a_{x+int(y)+1}}{\ell^a_x}$ per $0 \leq y < \xi - 1 - x$ in alternativa si può scrivere: $F_{Z_x}(y) = \sum_{j=0}^{int(y)} Pr\{Z_x = j\} = \sum_{j=0}^{int(y)} p_{j+1} = \sum_{j=0}^{int(y)} {}_j^a p_x \, {}^a q_{x+j}$

4.3 Procediamo alla simulazione di Z_x .
Se è u il numero pseudocasuale che viene generato, risulta che:

- se $0 \leq u \leq F_{Z_x}(0) ={}^a q_x$ la realizzazione simulata di Z_x è 0
- se $F_{Z_x}(0) < u \leq F_{Z_x}(1)$ la realizzazione simulata di Z_x è 1
- ...
- se $F_{z_x}(\xi - 3 - x) < u \leq F_{z_x}(\xi - 2 - x)$ la realizzazione simulata di Z_x è $\xi - 2 - x$
- se $F_{Z_x}(\xi - 2 - x) < u \leq 1$ la realizzazione simulata di Z_x è $\xi - 1 - x$

II) Tralasciamo la descrizione degli avanzamenti di carriera

III) Simulazione della causa di uscita Si distinguono i due casi:

Caso i : Se $u \leq F_{Z_x}(\xi - 2 - x) \rightarrow Z_x \leq \xi - 2 - x$ l'eliminazione può avvenire per le cause: morte, invalidità o altra causa, ma non per la causa vecchiaia.
Per determinare la causa di eliminazione (morte, invalidità o altra causa) si simula un n.a. con 3 determinazioni, con probabilità ${}^{a^*}q^d_{x+t} = \dfrac{a_q d^d tt}{a_{x+t}}, {}^{a^*} q^i_{x+t} = \dfrac{a_q i}{a_{x+t}}, {}^{a^*} q^w_{x+t} = \dfrac{a^W_{x+t}}{a_{q_x+t}}$, probabilità di eliminazione per le varie cause, condizionate al verificarsi dell'eliminazione tra le età x+t e x+t+1

caso ii: Se $u > F_{Z_x}(\xi - 2 - x) \rightarrow Z_x = \xi - 1 - x \rightarrow$ l'eliminazione può avvenire per le cause: morte, invalidità, altra causa oppure vecchiaia
Per determinare la causa di eliminazione (morte, invalidità, altra causa o vecchiaia) si simula un n.a. con 4 determinazioni, con probabilità ${}^a q^d_{\xi-1}, {}^a q^i_{\xi-1}, {}^a q^w_{\xi-1}, {}^a q^v_{\xi-1}$ probabilità di eliminazione per le varie cause.

5. Un procedimento per la simulazione del premio medio generale e dell'andamento del fondo.

Ipotesi: Consideriamo il caso della istituzione di un fondo pensioni che si riferisca solamente ad un gruppo di attivi e quindi che sia chiuso rispetto a nuovi ingressi in assicurazione.

Ipotesi: salari e pensioni costanti per tutta la durata della gestione

Ipotesi: salari e oneri pagati annualmente in via anticipata

Ipotesi: Ci siano soltanto pensioni di vecchiaia senza nuclei superstiti.

Vediamo allora come si possa utilizzare l'approccio della simulazione stocastica secondo la seconda modalità che abbiamo visto, quella che assume come parametro operativo l'individuo al fine di determinare:

Scopo: determinare il premio medio generale e l'andamento temporale del fondo.

- s_0 l'ammontare complessivo dei salari degli attivi all'epoca 0, noto,
- o_0 l'ammontare complessivo degli oneri dei pensionati all'epoca 0 , noto,
- $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \ldots, \widetilde{O}_m, \ldots$ le successioni di v.a. "oneri all'epoca t, per t = 1, 2, ... , m, ..."
- $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \ldots, \tilde{S}_m, \ldots$ "monte salari all'epoca t, per t = 0, 1, 2, ... , m, ...".

Poiché abbiamo considerato una collettività chiusa,

- $\widetilde{N}_1$ il n.a. di anni per cui saranno pagate pensioni o rimborsati contributi, quindi $\widetilde{O}_{\widetilde{N}_1} > 0$ e $\widetilde{O}_m = 0$ per $m > \widetilde{N}_1$
- $\widetilde{N}_2$ il n.a. di anni per cui saranno pagate pensioni o rimborsati contributi, quindi $\widetilde{O}_{\widetilde{N}_2} > 0$ e $\widetilde{O}_m = 0$ per $m > \widetilde{N}_2$

Ciò posto anche il,

- **premio medio generale** è una variabile aleatoria definita dalla: $\widetilde{P} = \dfrac{\sum_{m=0}^{\widetilde{N}_1} \widetilde{O}_m v^m}{\sum_{m=0}^{\widetilde{N}_2} \tilde{S}_m v^m}$

dove

- v è il fattore di attualizzazione corrispondente al tasso tecnico di interesse i, supposto noto e costante nel tempo
- $\tilde{C}_m = \widetilde{P}\tilde{S}_m$ I n.a. **contributi** all'epoca m (m=0, 1, ...)
- Il n.a. *consistenza del fondo* all'epoca m+1 (m=0, 1, ...) è così definito $\tilde{F}_{m+1} = \begin{cases} 0 \quad per\, m = 0 \\ \left(\tilde{F}_m + \tilde{C}_m - \widetilde{O}_m\right)(1+i) \quad per\, m = \widetilde{N}_2 \\ \left(\tilde{F}_m - \widetilde{O}_m\right)(1+i) \quad per\, m = \widetilde{N}_2 + 1, \ldots \\ 0 \quad per\, m = \widetilde{N}_1 + 1, \ldots \end{cases}$

Per la simulazione dell'andamento del fondo invece di simulare i n.a $\widetilde{O}_1, \widetilde{O}_2, \ldots, \widetilde{O}_m, \ldots$ successione degli oneri $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \ldots, \widetilde{S}_m, \ldots$ successione dei salari, poiché la collettività è chiusa, risulta più economico per il calcolo simulare le variazioni di salari ed oneri:

$\Delta\widetilde{O}_m = \begin{cases} \widetilde{O}_1 - o_0 & per\, m = 1 \\ \widetilde{O}_m - \widetilde{O}_{m-1} & per\, m = 2, \ldots, \widetilde{N}_1 \end{cases}$ e

$$\boxed{\Delta\tilde{S}_m} = \begin{cases} \tilde{S}_1 - s_0 & per\, m = 1 \\ \tilde{S}_m - \tilde{S}_{m-1} & per\, m = 2, \ldots, \tilde{N}_2 \end{cases}$$

da queste poi si ottengono i valori simulati di $\widetilde{O}_m, \tilde{S}_m$ e quindi $\widetilde{P}, \tilde{C}_m$ ed $\tilde{F}_m$

Siano

- n_1,
- n_2,
- $\Delta o_m, \quad m = 1, \ldots, n_1$
- $\Delta s_m, \quad m = 1, \ldots, n_2$

le determinazioni simulate dei corrispondenti n.a.,

Da queste si calcolano:

- $\boxed{o_m = o_{m-1} + \Delta o_m}$ per $m = 1, 2, \ldots, n_1$ la successione dei valori simulati degli oneri annui
- $\boxed{s_m = s_{m-1} + \Delta s_m}$ per $m = 1, 2, \ldots, n_2$ la successione dei valori simulati dei salari annui
- $\boxed{p = \frac{\sum_{m=0}^{n_1} o_m v^m}{\sum_{m=0}^{n_2} s_m v^m}}$ il valore simulato del premio medio generale
- $\boxed{c_m = p s_m}$ per $m = 1, 2, \ldots, n_2$ la successione dei valori simulati dei contributi annui

Infine si calcola il valore simulato della consistenza del fondo nelle varie epoche

$$\boxed{f_{m+1}} = \begin{cases} 0 \quad per\, m = 0 \\ (f_m + c_m - o_m)(1+i) \quad per\, m = 1, 2, \ldots, n_2 \\ (f_m - o_m)(1+i) \quad per\, m = n_2 + 1, ..., n_1 \ldots \\ 0 \quad per\, m = n_1 + 1, .. \end{cases}$$

Appendice I: Sistema pensionistico italiano

la pensione di base ai lavoratori dipendenti

Pensione di base (I pilastro):

- Legge 30 aprile 1969, n. 153,
- Decreto Legislativo 30 dicembre 1992, n. 503 (Riforma Amato),
- Legge 8 agosto 1995, n. 335 (Riforma Dini),
- Legge 27 dicembre1997, n. 449 (Riforma Prodi),
- Legge 22 dicembre 2011 (Riforma Monti-Fornero), n. 214,

Pensione complementare (II pilastro):

- Decreto Legislativo 21 aprile 1993, n. 124,
- Legge 8 agosto 1995, n. 335 (Riforma Dini),
- Legge 23 agosto 2004, n. 243,
- Decreto Legislativo 5 dicembre 2005, n. 252 e successive integrazioni nel 2006 e nel 2007

Considereremo i lavoratori dipendenti obbligatoriamente iscritti alla Assicurazione.
Generale Obbligatoria (A.G.O.), gestita dall'Istituto Nazionale della Previdenza Sociale (INPS). L'INPS incassa i contributi ed eroga le seguenti prestazioni:
1. pensione vecchiaia
2. pensione ai superstiti
3. pensione di inabilità
4. assegno di invalidità

Il sistema finanziario di gestione è a ripartizione pura, senza revisione annua del premio;pertanto non è garantito l'equilibrio attuariale.

Metodo di calcolo della pensione: Dopo la riforma Dini del 1995 e prima della riforma Monti-Fornero del 2011:
metodo retributivo
- metodo misto (retributivo e contributivo)
- metodo contributivo

Dal 1/1/2012 (riforma Monti-Fornero) metodo misto, per la quota di anzianità maturata dal 1/1/2012, anche per coloro cui si applicava il metodo retributivo.

1. La pensione di vecchiaia

Metodo di calcolo della pensione di vecchiaia (Riforma Dini, 1995):

- a) Al lavoratore che al 31/12/1995 ha maturato almeno 18 anni di contributi si applica il metodo retributivo secondo la Riforma Amato.
- b) Al lavoratore che ha iniziato a lavorare prima dell'1/1/1996 e che al 31/12/1995 ha maturato meno di 18 anni di contributi si applica il metodo misto.
  * metodo retributivo (Riforma Amato) per l'anzianità maturata fino al 31/12/1995
  * metodo contributivo per i periodi successivi al 1/1/1996

  Calcolo pro-rata: la pensione è somma di due quote, una calcolata col metodo retributivo e una col metodo contributivo.

- c) Al lavoratore che ha iniziato a lavorare dopo l'1/1/1996 si applica il metodo contributivo (Riforma Dini)

Requisiti per avere maturato il diritto alla pensione di vecchiaia:
- cessazione dal lavoro ? versati almeno 20 anni di contributi
- età: 1) fino al 2011: 65 anni di età per gli uomini 60 anni di età per le donne; 2) dopo Riforma Monti-Fornero: 66 anni per gli uomini e 62 anni per le donne, e progressivo aumento nel tempo

La pensione di vecchiaia nel sistema Misto			
Anno	**Lavoratori e Lavoratrici Settore Pubblico**	**Lavoratrici Dipendenti**	**Lavoratrici Autonome**
2012	66 anni	62 anni	63 anni e 6 mesi
2013	66 anni e 3 mesi	62 anni e 3 mesi	63 anni e 9 mesi
2014-2015	66 anni e 3 mesi	63 anni e 9 mesi	64 anni e 9 mesi
2016-2017	66 anni e 7 mesi	65 anni e 7 mesi	66 anni e 1 mese
2018	66 anni e 7 mesi		
2019-2020	67 anni		
2021-2022	67 anni e 3 mesi		
2023-2024	67 anni e 5 mesi		
2025-2026	67 anni e 9 mesi		
2027-2028	68 anni		
2029-2030	68 anni e 2 mesi		
2031-2032	68 anni e 5 mesi		
2033-2034	68 anni e 8 mesi		
2035-2036	68 anni e 10 mesi		
2037-2038	69 anni		
2039-2040	69 anni e 2 mesi		
2041-2042	69 anni e 4 mesi		
2043-2044	69 anni e 6 mesi		
2045-2046	69 anni e 8 mesi		
2047-2048	69 anni e 10 mesi		
2049-2050	70 anni		
Per il conseguimento della pensione di vecchiaia è richiesto il contestuale perfezionamento di 20 anni di contribuzione a qualsiasi titolo accreditata (15 anni per i cd. quindicenni ai sensi della Circ. Inps 16/2013).			
PensioniOggi.it			

Figura 16: Pensione vecchiaia nel sistema misto

Calcolo della pensione di vecchiaia secondo il metodo retributivo (Riforma Amato) È basato su due elementi:
- numero totale di settimane contributive accreditate (per semplicità ci riferiamo a un numero finito di anni)
- retribuzione pensionabile

Si definisce retribuzione pensionabile R la media aritmetica delle retribuzione annue opportunamente rivalutate: $R = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_j^r s^{(j)}$ dove

N è il numero degli anni di lavoro che si devono considerare ai fini del calcolo di R
$s^{(j)}$ è il salario che il lavoratore ha percepito nel j-esimo anno
k_j^r è il relativo coefficiente di rivalutazione.

La pensione annua viene determinata moltiplicando il numero di anni di contribuzione per l'ammontare della pensione annua spettante per ogni anno di anzianità contributiva.

• Pensione annua spettante per ogni anno di anzianità contributiva:
Si determina in funzione della retribuzione pensionabile R e di alcune aliquote decrescenti, secondo degli scaglioni successivi, della retribuzione pensionabile.
Siano:
s il numero di scaglioni $0 = m_1 < m_2 < \ldots < m_s$ gli importi che individuano gli scaglioni $r = (r_1, r_2, \ldots, r_s)$.
le aliquote di rendimento corrispondenti agli scaglioni

$$\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$$

$F(R, m, r)$ la pensione annua spettante per ogni anno di anzianità contributiva.
Si ha

$$F(R, m, r) = \begin{cases} r_1 R & per 0 \leq R < m_2 \\ \sum_{j=1}^{k-1} r_j \left(m_{j+1} - m_j\right) + r_k \left(R - m_k\right) & per m_k \leq R < m_{k+1} \\ & con k = 2, 3, \ldots, s-1 \\ \sum_{j=1}^{s-1} r_j \left(m_{j+1} - m_j\right) + r_s \left(R - m_s\right) & per R \geq m_s \end{cases}$$ Sia

n il numero di anni di anzianità contributiva
allora
la **pensione annua** è $P = n * F(R, m, r)$

A seguito della Riforma Amato, l'ammontare della pensione è ottenuto come somma di due quote:
- $(QP)_A$ che fa riferimento all'anzianità contributiva maturata al 31/12/1992 ed è calcolata in base alla normativa precedente sulla retribuzione pensionabile $(RP)_A$ secondo gli scaglioni di retribuzione pensionabile $\underline{m}_A$ e le aliquote di rendimento $\underline{r}_A$
- $(QP)_B$ che fa riferimento all'anzianità contributiva acquisita dopo il 31/12/1992 ed è calcolata sulla retribuzione pensionabile $(RP)_B$ secondo gli scaglioni di retribuzione pensionabile $\underline{m}$ B e le aliquote di rendimento $\underline{r}_B$ $P = (QP)_A + (QP)_B$

Calcolo della retribuzione pensionabile
$(RP)_A$ è calcolato come media dei salari degli ultimi 5 anni di attività lavorativa, rivalutati in base agli indici ISTAT del costo della vita per la "scala mobile" dei lavoratori del settore industria, ma escludendo dalla rivalutazione i salari percepiti nell'anno di decorrenza della pensione e nell'anno immediatamente precedente. Siano
m l'epoca di pensionamento
s_z il salario percepito all'epoca z, posticipatamente
f_z l'indice ISTAT del costo della vita per la "scala mobile" dei lavoratori del settore industria alla fine dell'anno z

$$(RP)_A = \frac{1}{5}\left(\frac{f_{m-1}}{f_{m-4}} s_{m-4} + \frac{f_{m-1}}{f_{m-3}} s_{m-3} + \frac{f_{m-1}}{f_{m-2}} s_{m-2} + s_{m-1} + s_m\right)$$

Calcolo della retribuzione pensionabile
Per il calcolo di $(RP)_B$ la Riforma Amato ha stabilito quanto segue:
- per coloro che al 31/12/1992 hanno maturato più di 15 anni di anzianità, la retribuzione pensionabile è calcolata sulle retribuzioni degli ultimi 10 anni di lavoro
- per coloro che al 31/12/1992 non hanno maturato più di 15 anni di anzianità, la retribuzione pensionabile è calcolata sulle retribuzioni degli anni che intercorrono tra il 31/12/1992 ed il mese precedente la decorrenza della pensione e di non più di 5 anni degli ultimi anni di contribuzione precedenti il 31/12/1992
- per coloro che sono entrati dopo il 31/12/1992 (e prima del 31/12/1995) il calcolo è basato sulle retribuzione di tutto il periodo di contribuzione

- i salari vanno rivalutati in base alla variazione annua dell'indice dei prezzi al consumo per le famiglie di impiegati ed operai, aumentata dell'1%; vanno esclusidalla rivalutazione i salari percepiti nell'anno di decorrenza della pensione e nell'anno immediatamente precedente.

Siano
m l'epoca di pensionamento
S_z il slario percepito all'epoca z
p_z indice dei prezzi al consumo per le famiglie di impiegati ed operai alla fine dell'anno z
$\overline{n}$ numero di anni di contribuzione di cui si deve tener conto per il calcolo della retribuzione pensionabile
Si ha: $(RP)_B = \frac{1}{n}\left[\sum_{k-2}^{\overline{n}-1} s_{m-(\overline{n}+1-k)} \prod_{j-1}^{\overline{n}-k}\left(\frac{p_{m-j}}{p_{m-j-1}}+0.01\right)+s_{m-1}+s_{m\cdot}\right]$

Per definire gli scaglioni di retribuzione pensionabile si fa riferimento ad un **tetto pensionabile** T, importo che aumenta di anno in anno secondo una regola stabilita dalla legge. Riportiamo nelle seguenti tabelle gli scaglioni di retribuzione pensionabile.

RETRIBUZIONE PENSIONABILE $(RP)_A$	ALIQUOTA DI RENDIMENTO (%) PER IL CALCOLO DI $(QP)_A$	RETRIBUZIONE PENSIONABILE $(RP)_B$	ALIQUOTA DI RENDIMENTO (%) PER IL CALCOLO DI $(QP)_B$
da 0 a T	2.00	da 0 a T	2.00
da T a 1.33·T	1.50	da T a 1.33·T	1.60
da 1.33·T a 1.66·T	1.25	da 1.33·T a 1.66·T	1.35
oltre 1.66·T	1.00	da 1.66·T a 1.90·T	1.10
		oltre 1.90·T	0.90

Figura 17: Scaglioni di retribuzione pensionabile s

In base alla $F(R, m, \underline{r})$ si determinano:
$F((RP)_A, \underline{m}_A, \underline{r}_A)$ importo della pensione spettante per un anno di anzianità contributiva relativo a $(QP)_A$
$F((RP)_B, m_B, r_B)$ mporto della pensione spettante per un anno di anzianità contributiva relativo a $(QP)_B$

Dopo la riforma Monti-Fornero (2011): Si considerano ancora gli anni di contribuzione: n_A il numero di anni di contribuzione precedenti il 31/12/1992 n_B gli anni di contribuzione successivi al 31/12/1992 ma fino al 31/12/2011

per gli anni di contribuzione dal 1/1/2012 si determina una terza quota di pensione calcolata sulla base del metodo contributivo.

Calcolo della pensione di vecchiaia secondo il metodo contributivo (Riforma Dini) La determinazione della pensione avviene sulla base dei contributi versati al fondo dall'assicurato durante tutto il periodo di attività lavorativa, opportunamente rivalutati (montante contributivo individuale).

Per la determinazione dei contributi si applica alla retribuzione annua imponibile una aliquota, chiamata **aliquota di computo**, che per gli iscritti all'A.G.O. è pari al 33L'aliquota di computo è virtuale e non effettiva (per il 2017 l'aliquota effettiva è 33% a carico del datore di lavoro e 9,19% a carico del lavoratore). La legge prevede di considerare la contribuzione nei limiti di un massimale annuo indicizzato e fissato per il 1996 in lire 132.000.000.

Riguardo al **montante contributivo individuale** la legge stabilisce quanto segue: "Ai fini della determinazione del montante contributivo individuale si applica alla base imponibile l'aliquota di computo nei casi che danno luogo a versamenti, ad accrediti o ad obblighi contributivi e la contribuzione così ottenuta si rivaluta su base composta al 31 dicembre di ciascun anno, con esclusione della contribuzione dello stesso anno, al tasso di capitalizzazione." (Comma 8, art. 1 della legge 8/8/1995, n.335). "Il tasso annuo di capitalizzazione è dato dalla variazione media quinquennale del prodotto interno lordo (PIL) nominale, appositamente calcolata dall'Istituto nazionale di statistica (ISTAT), con riferimento al quinquennio precedente l'anno da rivalutare. (...)" (Comma 9, art. 1 della legge 8/8/1995, n.335).

l tasso annuo di capitalizzazione di cui parla la legge è dunque una media geometrica mobile: è la radice quinta della variazione complessiva del PIL che si è verificata nel quinquennio immediatamente precedente l'anno da rivalutare.

2. La pensione di vecchiaia

Se il lavoratore va in pensione all'epoca m, con n anni di anzianità contributiva, i salari percepiti posticipatamente dai quali vengono prelevati i contributi sono $S_{m-n+1} \quad , \ldots , \quad S_m$.

Siano
γ aliquota di computo
g_z il PIL nominale al tempo z
I montanti contributivi maturati sono

$$M_{t+1} = \gamma s_{t+1} + M_t \left(\frac{g_{t-1}}{g_{t-6}} \right)^{\frac{1}{5}} \quad \text{per } t = m - n, \ldots, m - 1; \quad \text{con } M_{m-n} = 0$$

Il montante contributivo individuale all'epoca m, di pensionamento, è dato da:

$$M_m = \gamma s_m + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \gamma s_k \left(\prod_{j=1}^{5} \frac{g_{m-j-1}}{g_{k-j-1}} \right)^{\frac{1}{5}}$$

Per ottenere la rata di pensione si moltiplica il montante contributivo per un coefficiente di trasformazione che varia con l'età di pensionamento.
Sia
k_x x il coefficiente di trasformazione per un pensionato di età x
la rata di pensione è $P = k_x M_m$

I coefficienti di trasformazione dal 01/01/1996, dal 01/01/2010 e dal 01/01/2013

ETA' DI PENSIONAMENTO x	COEFFICIENTE DI TRASFORMAZIONE (%) k_x		
	fino al 31/12/2009	dal 01/01/2010	dal 01/01/2013
57	4.720	4.419	4.304
58	4.860	4.538	4.416
59	5.006	4.664	4.535
60	5.163	4.798	4.661
61	5.334	4.940	4.796
62	5.514	5.093	4.940
63	5.706	5.257	5.094
64	5.911	5.432	5.259
65	6.136	5.620	5.435
66		5.620	5.624
67		5.620	5.826
68		5.620	6.046
69		5.620	6.283
70		5.620	6.541

Figura 18: Coefficienti di trasformazione per la pensione di vecchiaia

?? 3 Pensione di anzianità - pensione anticipata

Prima della riforma Monti-Fornero si parlava di pensione di anzianità quando erano soddisfatti opportuni requisiti di età e di anzianità lavorativa Con la nuova normativa si parla di pensione anticipata e sono previste penalizzazioni percentuali sulla quota retributiva dell'importo della pensione.

I requisiti per conseguire la Pensione Anticipata nel Sistema Misto

Anni	Uomini	Donne	Lavoratori Precoci in Specifiche Condizioni Meritevoli di Tutela (Uomini e Donne) *	Penalizzazione
I requisiti esposti valgono sia per i lavoratori dipendenti, anche del pubblico impiego, che per gli autonomi				
2012	42 anni e 1 mese (pari a 2188 settimane)	41 anni e 1 mese (pari a 2136 settimane)	-	Sì **
2013	42 anni e 5 mesi (pari a 2205 settimane)	41 anni e 5 mesi (pari a 2153 settimane)	-	Sì **
2014	42 anni e 6 mesi (pari a 2210 settimane)	41 anni e 6 mesi (pari a 2158 settimane)	-	Si **
2015			-	No
2016	42 anni e 10 mesi (pari a 2227 settimane)	41 anni e 10 mesi (pari a 2175 settimane)	-	No
2017			41 anni (pari a 2132 settimane) [1]	No
2018				no, soppressa definitivamente dalla legge di bilancio 2017
2019-2020	43 anni e 3 mesi	42 anni e 3 mesi	41 anni e 5 mesi	
2021-2022	43 anni e 6 mesi	42 anni e 6 mesi	41 anni e 8 mesi	
2023-2024	43 anni e 8 mesi	42 anni e 8 mesi	41 anni e 10 mesi	
2025-2026	44 anni	43 anni	42 anni e 2 mesi	
2027-2028	44 anni e 3 mesi	43 anni e 3 mesi	42 anni e 5 mesi	
2029-2030	44 anni e 5 mesi	43 anni e 5 mesi	42 anni e 7 mesi	
2031-2032	44 anni e 8 mesi	43 anni e 8 mesi	42 anni e 10 mesi	
2033-2034	44 anni e 11 mesi	43 anni e 11 mesi	43 anni e 1 mese	
2035-2036	45 anni e 1 mese	44 anni e 1 mese	43 anni e 3 mesi	
2037-2038	45 anni e 3 mesi	44 anni e 3 mesi	43 anni e 5 mesi	
2039-2040	45 anni e 5 mesi	44 anni e 5 mesi	43 anni e 7 mesi	
2041-2042	45 anni e 7 mesi	44 anni e 7 mesi	43 anni e 9 mesi	
2043-2044	45 anni e 9 mesi	44 anni e 9 mesi	43 anni e 11 mesi	
2045-2046	45 anni e 11 mesi	44 anni e 11 mesi	44 anni e 1 mese	
2047-2048	46 anni e 1 mese	45 anni e 1 mese	44 anni e 3 mesi	
2049-2050	46 anni e 3 mesi	45 anni e 3 mesi	44 anni e 5 mesi	

PensioniOggi.it

Gli adeguamenti a partire dal 2019 sono stimati in base allo scenario demografico Istat 2011 (**gli adeguamenti definitivi potrebbero risultare inferiori a quelli esposti**); ** La penalità consisteva in un taglio dell'1-2% se il lavoratore andava in pensione anticipata prima del 62° anno di età. La penalità non si applicava, comunque, se la contribuzione era composta da sola prestazione effettiva di lavoro piu' alcuni tassativi periodi di contributi figurativi (cfr: articolo 6, comma 2-quater Dl 216/2011). A partire dal 1° gennaio 2016 gli assegni colpiti dal taglio sono stati comunque *"depenalizzati"*. **1)** a partire dal 1° maggio 2017.

*Definizione del Lavoro Precoce : Si tratta dei lavoratori che hanno **almeno 12 mesi di contribuzione** per periodi di lavoro effettivo precedenti il raggiungimento del **diciannovesimo anno di età** e che si trovano in una delle seguenti condizioni: **a)** sono in **stato di disoccupazione** a seguito di cessazione del rapporto di lavoro per licenziamento, anche collettivo, dimissioni per giusta causa o risoluzione consensuale nell'ambito della procedura di cui all'articolo 7 della legge 15 luglio 1966, n. 604, e hanno concluso integralmente la prestazione per la disoccupazione loro spettante da almeno tre mesi; **b) assistono, al momento della richiesta e da almeno sei mesi, il coniuge o un parente di primo grado convivente con handicap** in situazione di gravità ai sensi dell'articolo 3, comma 3, della legge 5 febbraio 1992, n. 104; **c)** hanno una **riduzione della capacità lavorativa, accertata dalle competenti commissioni per il riconoscimento dell'invalidità civile, superiore o uguale al 74 per cento; d)** sono lavoratori dipendenti di cui alle professioni indicate sotto che svolgono, al momento del pensionamento, **da almeno sei anni in via continuativa attività lavorative per le quali è richiesto un impegno tale da rendere particolarmente difficoltoso e rischioso** il loro svolgimento in modo continuativo ovvero sono lavoratori che soddisfano le condizioni di cui all'articolo 1, commi 1, 2 e 3, del decreto legislativo 21 aprile 2011, n. 67 (mansioni usuranti o lavoratori notturni).

Mansioni Difficoltose o Rischiose**: 1) Operai dell'industria estrattiva, dell'edilizia e della manutenzione degli edifici; 2) conduttori di gru, di macchinari mobili per la perforazione nelle costruzioni; 3) conciatori di pelli e pellicce; 4) conduttori di convogli ferroviari e personale viaggiante; 5) conduttori di mezzi pesanti e camion; 6) professioni sanitarie infermieristiche ed ostetriche ospedaliere con lavoro organizzato in turni; 7) addetti all'assistenza personale di persone in condizioni di non autosufficienza; 8) Insegnanti della scuola dell'infanzia e educatori degli asili nido; 9) facchini, addetti allo spostamento merci ed assimilati; 10) personale non qualificato addetto a servizi di pulizia; 11) operatori ecologici e altri raccoglitori e separatori rifiuti.**

Figura 19: Requisiti per pensione di anzianità nel sistema *misto*

?? 4 La pensione ai superstiti

La pensione ai superstiti può essere:
- di reversibilità, a seguito del decesso di un pensionato diretto
- indiretta, a seguito della morte di un lavoratore e in presenza di opportuni requisiti di assicurazione e di contribuzione

Possono far parte di un nucleo superstite di assicurato o di pensionato:
- il coniuge, anche se separato (con eccezioni) o divorziato
- i figli, se sono: minori di 18 anni, studenti con età compresa fra i 18 e i 21 anni (se a carico del genitore e non svolgono attività lavorativa), studenti universitari per la durata del corso legale di laurea e non oltre i 26 anni, inabili e a carico del genitore;
- i genitori (in mancanza di coniuge e figli)
- i fratelli (in mancanza di coniuge, figli e genitori).

La pensione a coniuge e a figli superstiti è pari al:
- 60% per il coniuge,

I requisiti per conseguire la Pensione Anticipata nel sistema Contributivo			
Anni	**Uomini***	**Donne***	**Oppure****
2012	42 anni e 1 mese (pari a 2188 settimane)	41 anni e 1 mese (pari a 2136 settimane)	63 anni
2013	42 anni e 5 mesi (pari a 2205 settimane)	41 anni e 5 mesi (pari a 2153 settimane)	63 anni e 3 mesi
2014	42 anni e 6 mesi (pari a 2210 settimane)	41 anni e 6 mesi (pari a 2158 settimane)	
2015			
2016	42 anni e 10 mesi (pari a 2227 settimane)	41 anni e 10 mesi (pari a 2175 settimane)	63 anni e 7 mesi
2017			
2018			
2019-2020	43 anni e 3 mesi	42 anni e 3 mesi	64 anni
2021-2022	43 anni e 6 mesi	42 anni e 6 mesi	64 anni e 3 mesi
2023-2024	43 anni e 8 mesi	42 anni e 8 mesi	64 anni e 5 mesi
2025-2026	44 anni	43 anni	64 anni e 9 mesi
2027-2028	44 anni e 3 mesi	43 anni e 3 mesi	65 anni
2029-2030	44 anni e 5 mesi	43 anni e 5 mesi	65 anni e 2 mesi
2031-2032	44 anni e 8 mesi	43 anni e 8 mesi	65 anni e 5 mesi
2033-2034	44 anni e 11 mesi	43 anni e 11 mesi	65 anni e 8 mesi
2035-2036	45 anni e 1 mese	44 anni e 1 mese	65 anni e 10 mesi
2037-2038	45 anni e 3 mesi	44 anni e 3 mesi	66 anni
2039-2040	45 anni e 5 mesi	44 anni e 5 mesi	66 anni e 2 mesi
2041-2042	45 anni e 7 mesi	44 anni e 7 mesi	66 anni e 4 mesi
2043-2044	45 anni e 9 mesi	44 anni e 9 mesi	66 anni e 6 mesi
2045-2046	45 anni e 11 mesi	44 anni e 11 mesi	66 anni e 8 mesi
2047-2048	46 anni e 1 mese	45 anni e 1 mese	66 anni e 10 mesi
2049-2050	46 anni e 3 mesi	45 anni e 3 mesi	67 anni
Gli adeguamenti a partire dal 2019 sono stimati in base allo scenario demografico Istat 2011; * Nel sistema contributivo non è mai previsto il taglio dell'1-2% qualora non siano stati perfezionati i 62 anni al momento della decorrenza della pensione. ** A condizione che ci siano almento **20 anni di contributi effettivi** (cioè con esclusione della contribuzione figurativa) e l'importo dell'assegno risulti non inferiore a 2,8 volte il valore dell'assegno sociale (circa 1250 euro al mese).- **PensioniOggi.it**			

Figura 20: Requisiti per pensione di anzianità nel sistema *contributivo*

- 80% al coniuge e un figlio,
- 100% al coniuge e due figli.

La pensione complementare

Nell'ambito della previdenza complementare (II pilastro) si distinguono:

- **fondi a contributo definito**

È fissata la misura dei contributi da versare al fondo pensioni, la cui capitalizzazione fornisce il montante maturato dal quale si determinano le prestazioni. La prestazione finale non è conosciuta a priori e dipende dalla gestione finanziaria

- **fondi a prestazione definita** o beneficio definito

È fissato l'obiettivo pensionistico. I contributi vengono calcolati in funzione di tale obiettivo e devono garantire l'equilibrio della gestione (principio di equilibrio attuariale).
Fanno riferimento o al livello del reddito (piano a prestazione aggiuntiva) o al livello di previdenza obbligatoria (piano a prestazione integrativa)

Alla fase di accumulo del capitale, di natura prettamente finanziaria (ogni iscritto ha un suo conto individuale nel quale confluiscono i contributi versati ed i rendimenti conseguenti al loro investimento), segue la fase di erogazione della pensione, di natura assicurativa.

Destinatari della previdenza complementare sono:
- i lavoratori dipendenti pubblici e privati,
- i soci lavoratori e i lavoratori di cooperative di produzione e lavoro,

- i lavoratori autonomi e i liberi professionisti

Per le prime due categorie soltanto a forme a contribuzione definita.
Per i lavoratori autonomi e liberi professionisti anche fondi a prestazione definita.
Il sistema finanziario della capitalizzazione: i contributi versati da ciascun lavoratore sono investiti per far fronte al pagamento delle prestazioni future.
Le prestazioni previste sono le seguenti:
- prestazioni di vecchiaia, al compimento dell'età pensionabile prevista nel regime obbligatorio di appartenenza (purché iscritto al fondo pensioni da almeno 5 anni),
- prestazioni di anzianità, alla cessazione del rapporto di lavoro dopo almeno 15 anni di appartenenza al fondo e con età non inferiore di oltre 10 anni a quella del pensionamento di vecchiaia (nel regime obbligatorio).

Prestazioni erogate integralmente sotto forma di rendita (da una compagnia di assicurazioni o da fondo stesso se autorizzato) oppure in parte sotto forma di rendita e in parte mediante la liquidazione di un importo non superiore al 50% del montante maturato.

Il **finanziamento** dei fondi pensione è costituito da tre componenti:
- il contributo del lavoratore,
- il contributo del datore di lavoro,
- la trasformazione del TFR

Il TIl Trattamento di Fine Rapporto (TFR) è un importo, accantonato annualmente dal datore di lavoro, che viene liquidato al lavoratore al momento della cessazione del rapporto di lavoro. (TFR) è un importo, accantonato annualmente dal datore di lavoro, che viene liquidato al lavoratore al momento della cessazione del rapporto di lavoro.

Il contributo del lavoratore per i lavoratori dipendenti viene stabilito in percentuale della retribuzione assunta a base della determinazione del TFR.

Per i lavoratori già attivi all'entrata in vigore del D.Lgs. n.124/93 è prevista la destinazione di una quota del TFR al fondo pensione (stabilita dalle fonti istitutive del fondo) mentre per i neoassunti tutto il TFR viene destinato al fondo pensione.

Si distinguono due tipi di fondi:
- i fondi negoziali: si possono iscrivere agli appartenenti ad una categoria di lavoratori o ad una azienda che lo ha costituito.
- i fondi aperti (istituiti da assicurazioni, banche, società di intermediazione mobiliare, società di gestione di fondi comuni di investimento): vi possono aderire tutti i lavoratori.