



# Studienarbeit

## Untersuchung des Active Contour Algorithmus zur Segmentierung von Strukturen realer computertomographischer Daten

Name:	You, Diyu
Geb. am:	04.04.1992
In:	China
Matr. Nr.:	4560588
Studiengang:	Allgemeiner und Konstruktiver Maschinenbau
Abgabetermin:	25.07.2017
Betreuer:	Dr. Ing. Stefen Holzhausen M. Sc. Stefan Dahlke

### Aufgabenstellung zur Studienarbeit (Aufbaustudium)

im Studiengang: Maschinenbau  
in der Studienrichtung: Allgemeiner und Konstruktiver Maschinenbau  
Name des Studenten: Diyu You  
Matrikel-Nummer: 4560588

**Thema:** Untersuchung des *Active Contour Algorithmus* zur Segmentierung von  
Strukturen realer computertomographischer Daten

**Use oft the *Active Contour Algorithm* for segmentation of structures of real x-ray data**

Die Segmentierung von Strukturen in computertomographischen Daten gewinnt durch die Verwendung von virtuellen Methoden im Bereich Reverse Engineering oder der medizinischen Implantatplanung zunehmend an Bedeutung. Besonders schwierig ist die Situation bei stark überstrahlten, artefaktbehafteten CT-Datensätzen. Dort versagen reine schwellwertbasierte Verfahren wie bspw. der Marching Cubes Algorithmus und liefern Daten die aufwendig manuell Nachbearbeitet werden müssen. Im Rahmen der Arbeit soll das *Active Contur Verfahren* zur Detektion von Grenzflächen in CTBildern untersucht werden. Dazu ist das Verfahren und seine verschiedenen Varianten zu untersuchen und eine geeignete Variante in der Programmiersprache C# zu implementieren. Ferner soll anhand verschiedener realer Daten die Eignung zur Segmentierung untersucht werden.

Betreuer: Dr. Ing. Stefan Holtzhausen  
M. Sc. Stefan Dahlke  
ausgegeben am: 24. Januar 2017  
einzureichen am: 25. Juli 2017 (Bearbeitungszeit: 26 Wochen)

## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Hilfsmittel als angegeben verwendet habe. Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Ort:

Datum:

Unterschrift:

---

# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis .....	III
Abbildungsverzeichnis .....	V
1 Einleitung und Problemstellung .....	1
1.1 Motivation .....	1
1.1.1 Entwicklung der Bildsegmentierung.....	2
1.2 Zielsetzung .....	4
1.3 Methodik und Arbeitsprogramm .....	5
2 Stand der Technik .....	6
2.1 Parametric Active Contour.....	6
2.1.1 Die klassische Active Contour.....	6
2.1.2 Vor- und Nachteile der Snakes .....	8
2.1.3 Balloon Snakes .....	9
2.1.4 B-Snakes.....	10
2.1.5 GVF-Snakes.....	11
2.2 Geometrische Active Konturen.....	12
2.2.1 Evolutionstheorie der Kurven.....	12
2.2.2 Level Set Methode .....	15
2.2.3 Mumford-Shah Funktional und Chan-Vese Verfahren.....	18
2.3 Geodesic Active Contours .....	19
3 Numerische Lösung und Programmierung.....	21
3.1 Implementierung des klassischen Active Contour Modells.....	21
3.1.1 Initialisierung .....	22
3.1.2 Berechnung des Energiefunktionales .....	23
3.1.3 Minimierung des Energiefunktionales und Pseudocode .....	26
3.1.4 Auswahl der Parameter und der Startkontur .....	27
3.2 Variante der Active Contour.....	28
3.2.1 Ursache und Lösung der Nachteile von Snakes .....	29
3.2.2 Numerische Lösung der Variante.....	31
3.2.3 Erklärung der Parameter.....	32
3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode.....	35
3.3.1 Initialisierung der Level-Set Funktion.....	36
3.3.2 Dirac- und Heaviside-Funktionen .....	37
3.3.3 Berechnung der Level-Set Funktion .....	38
3.3.4 Erklärung der Parameter und Pseudocode .....	40
3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes .....	42
3.4.1 Morphologische Operatoren .....	42
3.4.2 Annäherung der Level-Set Funktion .....	44
3.4.3 Erklärung der Parameter und des Attraktion-Terms .....	49
4 Vergleichung der Verfahren .....	58
4.1 Das klassische Active Contour und die Variante.....	58
4.2 Level-Set Methode und morphologische Snakes .....	59

4.3 Variante und morphologische Snakes.....	60
5 Zusammenfassung .....	63
Literaturverzeichnis .....	65
Anhang .....	68

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1-1: Drei Schichten der Bildtechnik .....	1
Abbildung 1-2: Segmentierungsergebnis der Level-Set Methode.....	2
Abbildung 2-2: Tangentialvektor und Normalvektor auf der Kurve .....	13
Abbildung 2-3: in tangentialer Richtung $T_{p,t}$ und normaler Richtung $N(p,t)$ zerlegte Geschwindigkeit.....	14
Abbildung 2-4: Verformung der Kurve bei verschiedenen Parametern $\beta$ .....	15
Abbildung 2-5: Level-Set Funktionen bei verschiedenen $n$ .....	16
Abbildung 2-6: vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion und Nullstelle der Level-Set Funktion	16
Abbildung 3-1: Ablaufdiagramm der klassischen Active contour .....	22
Abbildung 3-2: Initialisierungsergebnisse .....	23
Abbildung 3-3: Startkontur und Kontrollpunkte.....	23
Abbildung 3-4: Verformung der Kurve unter dem Einfluss der internen Energie .....	24
Abbildung 3-5: 8 benachbarten Bildpunkte eines Kontrollpunktes .....	26
Abbildung 3-6: Einfluss von verschiedenen Parametern auf der Verformung der Kurve .....	28
Abbildung 3-7: Einfluss der Startkontur auf den Ergebnissen.....	28
Abbildung 3-8: lokale Konvergenz.....	30
Abbildung 3-9: Ablaufdiagramm der Variante .....	32
Abbildung 3-10: Segmentierungsergebnisse bei verschiedenen $\lambda$ .....	33
Abbildung 3-11: Segmentierungsergebnisse bei positivem und negativem $wline$ .....	34
Abbildung 3-12: Segmentierungsergebnisse bei gleichen $\lambda$ aber verschiedenen $wline$ .....	35
Abbildung 3-13: Ablaufdiagramm der Chan-Vese Funktion .....	36
Abbildung 3-14: Funktionsgraph der idealen Heaviside- und Dirac-Funktion .....	37
Abbildung 3-15: Funktionsgraph der Heaviside- und Dirac-Funktion bei verschiedenen Parametern .....	38
Abbildung 3-16: Nullstelle der Level-Set Funktion .....	38
Abbildung 3-17: Vorwärts-, Rückwärts- und zentralen Differenzenquotienten.....	39
Abbildung 3-18: Segmentierungsergebnisse unter dem Einfluss von $\lambda_1$ .....	41
Abbildung 3-19: Basisoperatoren Erosion und Dilation.....	43
Abbildung 3-20: Vorgehensweise von Öffnen und Schließen .....	44
Abbildung 3-21: vier Liniensegmente im Filter .....	47
Abbildung 3-22: Vorgehensweise von morphologischen Operatoren $IShu$ , $SIhu$ und $ISh \circ SIh$ .....	48
Abbildung 3-23: Einfluss des Balloon-Terms auf den Ergebnissen bei ungeeigneten $\lambda_2$ .....	51
Abbildung 3-24: Einfluss von Basisoperatoren auf der Segmentierung.....	51
Abbildung 3-25: Einfluss des Parameters $v$ auf die Kurve.....	52
Abbildung 3-26: Entfernung von isolierten Inseln durch die Ballonkraft.....	52
Abbildung 3-27: Funktionsweise des Attraktion-Terms.....	54
Abbildung 3-28: Verformung der Kurve bei verschiedenen Parametern .....	55
Abbildung 3-29: Ergebnisse der automatischen Segmentierung mit den neu definierten $c_1$ und $c_2$ bei verschiedenen Parametern .....	56
Abbildung 3-30: Ablaufdiagramm der morphologischen Snakes .....	57

Abbildung 4-1: Vergleich zwischen der Variante und der klassischen Active Contour.....	59
Abbildung 4-2: Vergleich zwischen der Chan-Vese Methode und der morphologischen Snakes .....	60
Abbildung 4-3: Vergleich der Variante der klassischen Active Contour und den morphologischen Snakes beim Segmentieren des Bildes mit geringer Kontrast .....	60
Abbildung 4-4: Objekt mit ungleichmäßigen Intensitäten .....	61
Abbildung 4-5: Vergleich zwischen den morphologischen Snakes und der Variante beim Segmentieren des Objektes mit ungleichmäßigen Intensitäten .....	61

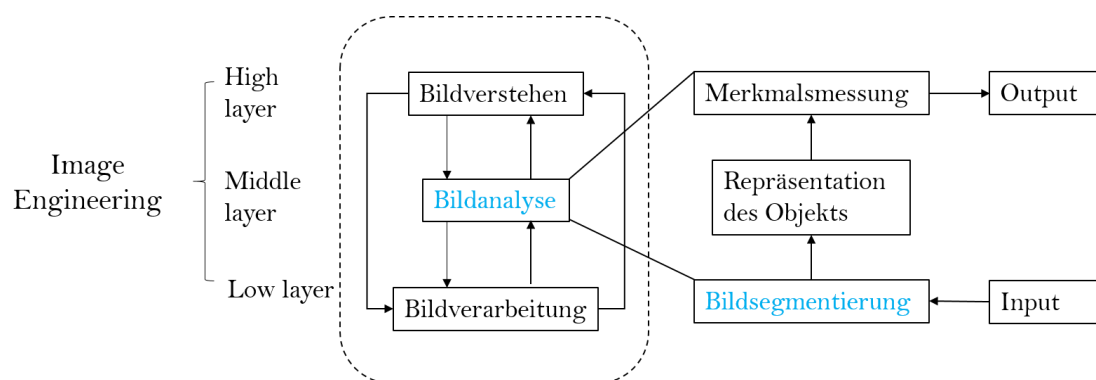
# Kapitel 1

## 1 Einleitung und Problemstellung

### 1.1 Motivation

Image Engineering lässt sich in 3 Schichten einteilen: Bildverarbeitung (low layer), Bildanalyse (middle layer) und Bildverstehen (high layer), wie auf der Zeichnung unten gezeigt [1].

Bildsegmentierung ist ein Teilgebiet des maschinellen Sehens und der Vorgang der Detektion jedes einzelnen Bildpunktes, ob sie zu einem von uns interessierenden zusammenhängenden Regionen gehören. Bildpunkte, die ähnliche Eigenschaften haben, werden zu einer Gruppe zusammengefasst. Bildsegmentierung soll verschiedene Bildpunkte entsprechend einem bestimmten Homogenitätskriterium zu sinnvollen Objekten zusammenfassen. Das Ziel liegt darin, die bestimmten Bildobjekte mit Verfahren aus Kanten- und Flächendetektion vom Hintergrund oder voneinander zu trennen. Dadurch werden die uns interessierenden Objekt extrahiert, um eine leichtere Weiterverarbeitung durchführen zu können [2].

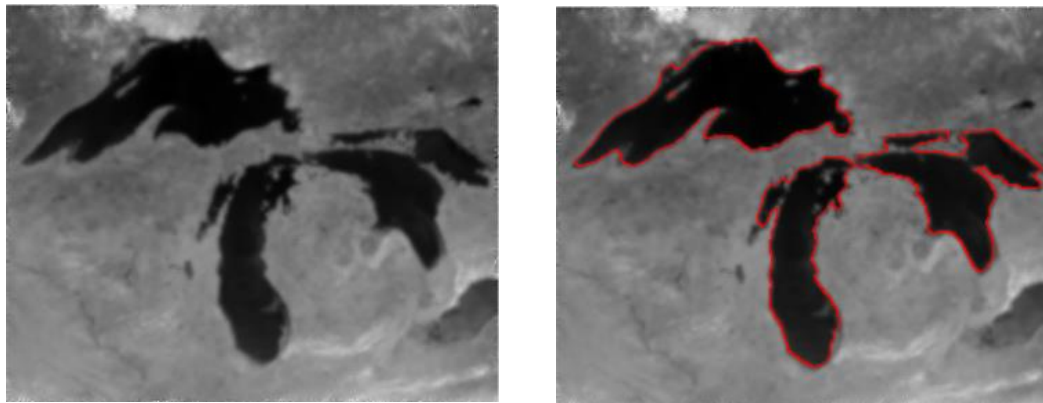


**Abbildung 1-1:** Drei Schichten der Bildtechnik

Bildsegmentierung hat seit Jahren eine große Bedeutung in zahlreichen Gebieten der Wissenschaft. In der Verkehrswissenschaft dient sie zur Erkennung von Autos, Fußgängern und Verkehrszeichen. Ebenso wird die Bildsegmentierung in der Geographie z.B. zur Detektion der Städte, Flüsse, Seen, Straßen und Gebäude von



Luftaufnahmen verwendet. Das unten abgebildete Bild (1-2) wurde mit der Level-Set-Methode segmentiert.



**Abbildung 1-2:** Segmentierungsergebnis der Level-Set Methode

In der Schrifterkennung ist die Segmentierung ein wichtiges Hilfsmittel zur Handschrifterkennung. In der Robotik dient die Segmentierung zur Erkennung von Wegen, um für den autonomen Roboter Hindernisse zu vermeiden. Besonders in der Medizin hat die Segmentierung großen Wert für die Bereiche Computertomographie, MR-Untersuchung, Ultraschall, und PET, wie z.B. zur Erkennung der Gewebeanomalien, Skelette und Organe. Die weite Anwendung der Bildsegmentierung weckte aber auch das Bedürfnis für effiziente Algorithmen.

Das manuelle Segmentierungsverfahren ist die einfachste Methode. Dies wird normalerweise in zweidimensionalen Bildern eingesetzt, um Bildern mit hohem Rauschen und sehr geringem Kontrast zu verarbeiten oder Segmentierungsergebnisse zu korrigieren. Der ganze Vorgang ist sehr abhängig von der Kontrolle des Benutzers. Bei der Analyse von dreidimensionalen Bildern ist die manuelle Segmentierung sehr zeitaufwendig und ungenau. Deswegen gibt es viele Versuche, eine vollautomatische modellbasierte Segmentierung zu realisieren. Aufgrund der Vielfältigkeit von Bildern, der unterschiedlichen Anforderungen an Objekte sowie der Variabilität zwischen den Beobachtern wurde ein allgemein anwendbares vollautomatisches Segmentierungsverfahren noch nicht gefunden. Dies macht die Forschung nach effizienten automatischen Segmentierungsverfahren deutlich. Deshalb wird das parameterbasierende automatische Segmentierungsverfahren in den nächsten Jahren eine wichtige Rolle spielen [3] [4].

### 1.1.1 Entwicklung der Bildsegmentierung

Bis zum heutigen Tag gibt es eine große Menge von automatischen Segmentierungsverfahren. Oft werden sie in pixelorientierte Verfahren, kantenorientierte Verfahren, regionenorientierte Verfahren, modellbasierte Verfahren und Texturorientierte Verfahren eingeteilt.

Pixelorientierte Verfahren überprüfen jeden einzelnen Bildpunkt eines Graustufenbilds, ob er größer als ein bestimmter Wert ist. Hierbei werden alle Bildpunkte in zwei Gruppen eingeteilt und erhält man ein Binärbild. Die Segmente stehen keinen Zusammenhang miteinander und können nicht durch die Umgebung beeinflusst werden, deshalb sind pixelorientierte Verfahren im Allgemeinen einfach und zeitsparend zu berechnen. Die Festlegung des Schwellwertes ist die Voraussetzung der Methode z.B. k-Means-Algorithmus, der maximalen Entropie-Methode und der Otsu-Methode. In vielen Fällen sind die verbreitetsten Verfahren globales Schwellenwertverfahren [5] und Histogramm-Schwellenwertverfahren [6].

Im Bild sind Kanten grundlegende Merkmale. Eigentlich befinden sich Objektkonturen immer auf Kanten im Bild. Mit Verfahren wie dem Sobel-Operator, Robert-Operator, Prewitt-Operator und Laplacian-Operator lassen sich von Kanten abhängige Bildpunkte finden, auf denen die Gradientenwerte groß sind. Mit Kantenverfolgungsalgorithmen ist eine Objektkontur oder mindestens eine zusammenhängende Kante aus diesen diskreten Bildpunkten zu erzeugen. Ein populäres Verfahren ist das Live-Wire-Verfahren von E. Mortensen, W. A. Barrett und J. K. Udupa [7]. Ebenfalls ein sehr bekanntes Verfahren ist die Wasserscheidentransformation, mit der sich immer geschlossene Kantenzüge finden lassen [8].

Regionenorientierte Verfahren beobachten nicht den einzelnen Bildpunkt, sondern Punktmengen. Dadurch werden die Punktmengen verändert und Objekte gefunden. Ein häufig verwendetes Verfahren ist das Region-Growing Verfahren [9]. Dieses Verfahren basiert vor allem auf der Annahme, dass die benachbarten Bildpunkte innerhalb des Objekts ähnliche Intensitätswerte haben. Eine übliche Vorgangsweise besteht darin, einen Bildpunkt mit seinen benachbarten Bildpunkten zu vergleichen. Wenn das Ergebnis ein Ähnlichkeitskriterium erfüllt ist, wird der Punkt der Region hinzugefügt.

Modellbasierte Verfahren beruhen auf der Annahme, dass Strukturen von gesuchten Objekten Ähnlichkeiten z.B. ähnliche geometrische Form besitzen. Daher kann man nach einem probabilistischen Modell suchen, um die Verformung von gesuchten Objekten zu erklären und dann beim Segmentieren eines Bilds Einschränkungen unter Verwendung dieses Verfahrens zu setzen. Dafür gibt es einige bekannte Methoden wie z.B. \_Deformable-Templates Methode [10], Active Contour [11], Active Appearance Models [12] und Level-Set-Methode [13].

Texturorientierte Verfahren werden verwendet, um Objekten vom Hintergrund zu trennen, die keine ähnlichen Intensitätswerte, sondern eine einheitliche Textur besitzen. Mit dem Verfahren wird das gesuchte Objekt segmentiert und nicht in eine Reihe von kleinen Regionen zerlegt. Diese Verfahren lassen sich außerdem zur Verbesserung oder Korrektur von Ergebnissen mit anderen Verfahren verwenden. Dazu gehören Methoden wie Concurrence-Matrizen (Haralick-Matrizen),

Textureenergiemaße (Texture-Energy-Measure), Lauflängenmatrizen (Run-Length-Matrix), fraktale Dimensionen und Maße und Markov-Zufallsfelder (MRF).

Obwohl bis zum heutigen Tag über tausende Methoden zur Segmentierung entwickelt worden, entwickelt sich die Bildsegmentierung sehr langsam und es wurde in den letzten Jahren noch kein Durchbruch erzielt. Ein wichtiges Problem liegt darin, dass kein einheitliches theoretisches Modell oder Verfahren gefunden wurde, um die Forschung und Anwendung von Segmentierungsalgorithmen zu leiten. Die aktuelle Forschung ist auf die Verbesserung und Kombination von ursprünglichen Algorithmen, Einführung einer neuen mathematischen Theorie und Verarbeitung spezieller Bilder (CT-Daten, Radarbild, 3D-Bild etc.) konzentriert.

Ein auf Evolutionstheorie der Kurven und partiellen Differentialgleichungen basierendes Segmentierungsverfahren unter dem Namen Active Contour Models (Snakes) wurde 1987 von Kass et al. [11] vorgestellt und ist populär in der Computervision geworden. Das Active Contour Model kann verstanden werden als ein von einem Energiefunktional kontrollierte, durch Bildkräfte und Zwangskräfte beeinflusste, sich der Objektkontur nähernde, verformbare Spline. Ein wichtiger Vorteil liegt darin, dass das Model die Segmentierung des Objekts durch Integration von a-priori-Wissen (Vorwissen) über die Form und andere Besonderheiten wie z.B. Homogenität der Bildpunkte und Stetigkeit der Objektkonturen ermöglicht. Deswegen hat das Model zur Segmentierung von verschiedenen Objekten eine gute Anpassungsfähigkeit. Nach fast dreißigjähriger Forschung haben auf Active Konturmodelle basierende Segmentierungsverfahren ein vollständiges theoretisches System geschaffen und sind ein wichtiger Zweig der Bildverarbeitung geworden.

## 1.2 Zielsetzung

Im Bereich Reverse Engineering oder der medizinischen Implantatplanung wird das Objekt schichtweise mit Röntgenstrahlen durchleuchtet. Aus den durch die Verwendung von virtuellen Methoden erzeugten CT-Daten lässt sich mit Hilfe der 3D-Rekonstruktion-Technologie ein dreidimensionales Bild rekonstruieren. Dort spielt die Segmentierung von Strukturen eine wichtige Rolle, um ein hochgenaues 3D-Bild zu rekonstruieren. Bei der Anwendung von 3D-Rekonstruktions-Software wie bspw. MIMICS, Amira und Spmpleware benötigen auf reinen Schwellwertverfahren und Region-Growing-Verfahren basierende Segmentierungsverfahren eine aufwendige manuelle Nachbearbeitung und können einige bestimmte Anforderungen nicht erfüllen.

- Im Rahmen der Arbeit sollen die folgenden Ziele zusammengestellt werden:
- Untersuchung des Active Contour Verfahrens zur Detektion von Grenzflächen in CT-Bildern.

- Untersuchung verschiedener Varianten des Active Contour Verfahrens.
- Implementierung des Active Contour Verfahrens und einer geeigneten Variante in der Programmiersprache C#
- Untersuchung der Eignung dieser Verfahren zur Segmentierung anhand verschiedener realer Daten.

### 1.3 Methodik und Arbeitsprogramm

Zum Erreichen der Zielsetzung führt die Arbeit nachfolgende Schritten durch:

- Implementierung von Snakes in der Programmsprache C# und Untersuchung der Eignung zur Segmentierung von CT-Daten.
- Verbesserung des Algorithmus des Active Contour.
- Gleichzeitige Segmentierung des Objektes durch zwei Splines
- Untersuchung der Level-Set-Methode zur Segmentierung.
- Implementierung des auf der Level-Set-Methode und der Chan-Vese-Methode basierenden Verfahren und Untersuchung der Eignung zur Segmentierung von CT-Daten.
- Vergleich der oben erwähnten Verfahren.

# Kapitel 2

## 2 Stand der Technik

Obwohl das Active Contour Modell einige Nachteile hat, wird es im medizinischen Bereich zur Segmentierung von Bildern mit hohem Rauschen, schwankender Intensität und schwachem Kontrast weit verwendet. Das Active Contour Model beruht auf durch eine partielle Differentialgleichung beschriebenen parametrischen Kurven, die durch die Minimierung der Summe von internen und externen Energien verformt werden und sich an die gesuchte Objektkontur anpassen. Deren Startform muss bei der Initialisierung manuell um das gesuchte Objekt herum eingestellt werden. Das Active Contour Modell lässt sich exakt nach der verschiedenen Beschreibung der Kurven in Parametric Active Contour Model und Geometric Active Contour Model einteilen. Im Vergleich zum Parametric Active Contour Modell ist ein Vorteil des Geometric Active Contour Modells, dass sich Objekte mit komplexen Topologien vom Bild besser segmentieren lassen. In diesem Kapitel wird ein Überblick über das Active Contour Modell und seine existierenden Varianten gegeben.

## 2.1 Parametric Active Contour

Die ursprüngliche Form des Parametric Active Contour Modells wurde 1988 von Kass et al. vorgestellt [11]. Ein wichtiger Vorteil dieses Modells liegt darin, dass a-priori-Wissen zur Segmentierung berücksichtigt wird. Seit der Veröffentlichung wurde eine große Anzahl von Varianten zur Optimierung der ursprünglichen Form und Anpassung an verschiedenen Problemstellungen entwickelt wie z.B. Balloon Snakes [14], B-Snakes [15], T-Snakes [16] und Dual Snakes [17]. Diese Varianten dienen zur Optimierung von Energiefunktionalen, können jedoch zwei wesentliche Probleme dieses Modells nicht lösen: hohe Empfindlichkeit [14] gegenüber der Startkontur und unmögliche topologische Veränderungen wie Zusammenfügen und Trennen der Kontur [18].

### 2.1.1 Die klassische Active Contour

Die klassische Active Contour (s.g. Snakes) ist ein vom Energiefunktional kontrolliertes, verformbares Spline, welches während des Optimierungsprozesses durch die auf dem Spline einwirkenden internen und externen Kräfte verformt wird und sich an die Kante des gesuchten Objektes anpasst. Die parametrische Form des Splines wird in zweidimensionalen Bildern wie folgt definiert:

$$v(s) \in R \rightarrow R^2 \quad 2-1$$

$$v(s) = (x(s), y(s)), s \in [0,1] \quad 2-2$$

wobei  $x$  und  $y$  die Funktionen der Koordinaten sind und  $s$  ein Konturparameter ist. Zur Beschreibung einer geschlossenen Kontur erfüllt es die folgende Bedingung:

$$v(0) = v(1) \quad 2-3$$

Um die Verformung der Kontur zu steuern, wird ein Energiefunktional eingeführt. Während der Minimierung der Energie bewegt sich die Kontur in Richtung des gesuchten Objektes. Dabei sind die Parameter des Energiefunktionales so auszuwählen, dass das Minimum der Energie mit der Kontur des gesuchten Objektes korrespondiert. Das Energiefunktional kann man wie folgt definieren:

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{snake}(v(s)) ds \quad 2-4$$

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{int}(v(s)) + E_{image}(v(s)) + E_{con}(v(s)) ds \quad 2-5$$

Wobei wird die externe Energie  $E_{ext}$  als  $E_{ext} = E_{image} + E_{con}$  die Summe der Bildenergie und der Einschränkungenergie definiert. Die interne Energie  $E_{int}$  wird von den Eigenschaften der Kontur wie z.B. Stetigkeit, Glattheit und Krümmung beeinflusst und lässt sich wie folgt beschreiben:

$$E_{int}(v(s)) = \int_0^1 \alpha(s) \frac{|v(s)'|^2}{2} + \beta(s) \frac{|v(s)''|^2}{2} ds \quad 2-6$$

Hierbei können  $\alpha(s)$  und  $\beta(s)$  als Funktionen oder Konstante definiert und eine individuelle Gewichtung eingestellt werden. Die erste Ableitung der parametrischen Kurve beschreibt die Elastizität bzw. die Stetigkeit und die zweite Ableitung die Biegesteifigkeit bzw. die Krümmung der Kontur.

Die Bildenergie ist gegeben durch:

$$E_{image}(v(s)) = w_{line} E_{line} + w_{edge} E_{edge} + w_{term} E_{term} \quad 2-7$$

Die Linienbildenergie  $E_{line}$ , die Kantenbildenergie  $E_{edge}$  und das Terminierungsfunktional  $E_{term}$  werden mit den vom Nutzer definierten Parametern  $w_{line}$ ,  $w_{edge}$  und  $w_{term}$  gewichtet. Hierbei ist  $E_{line}$  einfach die Bildintensität.

$$E_{line} = I(x, y) \quad 2-8$$

Bei positiven Parameter  $w_{line}$  bewegt sich die Kurve in Richtung der geringeren Bildintensität und bei negativem Parameter in Richtung der höheren Bildintensität im

Vergleich zur durchschnittlichen Bildintensität.

Zur Erkennung der Kante eines Objektes spielt der Term  $E_{edge}$  eine wichtige Rolle. Die Kantenbildenergie ist eine auf dem Bildgradienten basierende Funktion. Dabei wird die Kurve an die Konturen angezogen, wo sich große Bildgradienten befinden. Es wird wie folgt ausgedrückt:

$$E_{edge} = -|\nabla I(x, y)|^2 \quad 2-9$$

Eine Variante bei der Verwendung von Skalenraum ist:

$$E_{edge} = -|G_\sigma * \nabla^2 I|^2 \quad 2-10$$

wobei  $G_\sigma$  ein Gaußscher Operator mit Standardabweichung ist.

Beim Einsatz des Terminierungsfunktionales  $E_{term}$  werden alle möglichen endgültigen Positionen gefunden. Auf diesen Positionen bekommt der Term  $E_{term}$  einen geringen Wert. Das Terminierungsfunktional sieht folgendermaßen aus:

$$E_{term} = \frac{\partial \theta}{\partial n_\perp} = \frac{C_{yy}C_x^2 - 2C_{xy}C_xC_y + C_{xx}C_y^2}{(C_x^2 + C_y^2)^{3/2}} \quad 2-11$$

$$C(x, y) = G_\sigma(x, y) * I(x, y) \quad 2-12$$

$$\theta = \tan^{-1}(C_y/C_x), \quad n = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad n_\perp = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad 2-13$$

Zur Feststellung der Kontur des gesuchten Objektes muss die Energie der Kontur  $E_{snake}^*$  das Minimum erreichen. In der Variationsrechnung lässt sich die Minimierung des Energiefunktionales mit Hilfe der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung durchführen. Stellt man die Parameter des Energiefunktionales konstant ein, wird die Lösung wie folgt dargestellt:

$$\alpha v(s)'' + \beta v(s)'''' + \nabla E_{ext} = 0 \quad 2-14$$

### 2.1.2 Vor- und Nachteile der Snakes

Das klassische Active Contour Model bietet zahlreiche elegante Möglichkeiten. Durch Verwendung des Active Contour Modells ist es möglich, dass die Vollständigkeit des gesuchten Objektes bei der Segmentierung von Objekten mit Lücken gewährleistet werden kann. Vom Verwender definierte Zwangskräfte und eingestellte Parameter können die Bewegung der Kurve beeinflussen und dadurch kann das Modell an verschiedene Anforderungen adaptiert werden. Außerdem ist das Modell auf Grund der Einwirkung von internen Kräften robust gegenüber Rauschen.

Trotzdem besitzt das Modell auch eine Reihe von Nachteilen:

-Auf Grund der lokalen Konvergenz des Modells kann die Bewegung der Kurve bei einem lokalen Energieminimum stoppen. Dazu besitzen Snakes eine hohe Sensitivität gegenüber der Initialkontur, die vom Verwender nahe an der gesuchten Objektkontur gesetzt werden muss.

-Die zweite Ableitung der parametrischen Kurve beschreibt die Krümmung der Kontur und beeinflusst die Biegsamkeit. Dabei wird die Krümmung minimiert. Beim Segmentieren von konkaven Objekten sind diese Segmentierungsergebnisse nicht ideal.

-Die Gewichtungparameter hängen nicht nur von dem Hintergrund des Bildes, sondern auch von der Konturform bzw. der Objektform ab. Beim Segmentieren von verschiedenen Bildern lassen sich die geeigneten Gewichtungparameter aufwendig auswählen.

-Ein Snake ist eine kontinuierliche Kurve. Während der Energieminimierung ist eine topologische Änderung wie z.B. Zusammenfügen und Trennen unmöglich.

### 2.1.3 Balloon Snakes

Wenn die Startkontur bei der Initialisierung vom gesuchten Objekt entfernt gesetzt wird, wird die Kontur nicht vom Objekt angezogen und wahrscheinlich in einem lokalen Minimum konvergieren. Wenn die Startkontur innerhalb des gesuchten Objektes initialisiert wird und dort die Bildintensität gleichmäßig ist, wird außerdem die Kontur auf einen Punkt schrumpfen. Um die oben genannten Probleme zu lösen, wurde das Balloon snakes Model im Jahre 1991 von Cohen entwickelt [14]. Basierend auf dem klassischen Active Contour Model wird die Einschränkungsenergie  $E_{con}$  als Balloon Kraft  $f_{Balloon}$ , die die Verformungsrichtung der Kontur angibt, definiert. Dadurch kann sich die Kontur wie ein Ballon verformen. Die Balloon Kraft wird wie folgt bezeichnet:

$$f_{Balloon} = k_1 \vec{n}(s) - k \frac{\nabla P}{||\nabla P||} \quad 2-15$$

wobei wird die Balloon Kraft durch zwei Parameter  $k_1$  und  $k$  gewichtet. Das Vorzeichen des Parameters  $k_1$  kontrolliert die Verformungsrichtung und die Größe der Bewegungsgeschwindigkeit. Bei einem negativen Wert von  $k_1$  schrumpft die Kontur zusammen und sucht das Minimum innerhalb der Kontur. Im Gegensatz dazu expandiert die Kontur bei einem positiven Wert von  $k_1$ .  $\nabla P$  beschreibt die Differenz der Bildintensität mit seinen vierundzwanzig benachbarten Bildpunkten. Wenn der Parameter  $k$  mit einem großen Wert angegeben wird, besitzt die Kontur eine hohe Sensibilität gegenüber Kanten. Hierbei wird das Potential  $P(v(s))$  folgendermaßen definiert:



$$P(v(s)) = -|\nabla I(x, y)|^2 \quad 2-16$$

Beim Balloon Snakes Model verringert sich die Sensitivität gegenüber der Initialisierung und die lokale Konvergenz wird verbessert.

### 2.1.4 B-Snakes

Das B-Snakes Model, welches von Menet et al. entwickelt wurde [15], ist eine aus stückweise definierten B-Splines zusammengesetzte Kontur. Unter dem B-Spline lässt sich ein durch Polynomfunktionen approximiertes Kurvensegment verstehen [19]. Zur Beschreibung der Verformung der Kontur wird die aus B-Splines zusammengesetzte Kurve  $Q(u)$  aus einer von Kontrollpunkten  $V_i$  gewichteten Linearkombination  $B_{i,k}$  definiert. Die mathematische Formulierung lautet wie folgt:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n V_i B_{i,k}(u) \quad 2-17$$

Hierbei bezeichnet  $u$  den Konturparameter und  $k$  die vom Benutzer ausgewählte Polynomordnung. Die Linearkombination  $B_{i,k}$  ist eine normierte, stückweise definierte Basis-Funktion, welche folgendermaßen definiert wird:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & : u_{i-1} \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad 2-18$$

$$N_{i,k} = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+k-1} - u_{i-1}} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_i} N_{i+1,k-1}(u) \quad 2-19$$

Bei B-Snakes Model wird nur die interne Energie verändert und die B-Snakes Energiefunktion wie folgt berechnet:

$$E^{B-Snakes} = E_{int}^{B-Snakes} + E_{ext} \quad 2-20$$

$$E_{int}^{B-Snakes} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha \cdot (V_i(B_{i,k}(u)))' + \beta (V_i(B_{i,k}(u)))'' \quad 2-21$$

Man kann davon ausgehen, dass die interne Energie nicht durch die Punkte auf der Kurve, sondern durch die Kontrollpunkte minimiert wird. Jedes Kurvensegment lässt sich nur von seinen benachbarten Kontrollpunkten bestimmen, deswegen kann das Model eine bessere lokale Konvergenz erreichen und konkave Objekte gut segmentieren. Weil B-Splines aus Polynomfunktionen definiert werden, ist die gesamte Kontur  $(k - 1)$ -mal stetig differenzierbar. Wenn  $k$  gleich drei ist bzw. ein kubisches B-Spline, ist die 2. Ableitung der gesamten Kurve stetig. Damit ist es möglich, die Krümmung der Kontur kontinuierlich zu berechnen. Beim feinen Segmentieren

kann das Model durch den Einsatz von zwei gleichen Kontrollpunkten eine Ecke erzeugen. Trotzdem ist die aufwendige manuelle Nacharbeitung notwendig, um bessere Segmentierungsergebnisse zu gewinnen.

Das unten abgebildete Bild (2-1) zeigt den Verlauf einer von B-Spline kontrollierten Kurve.

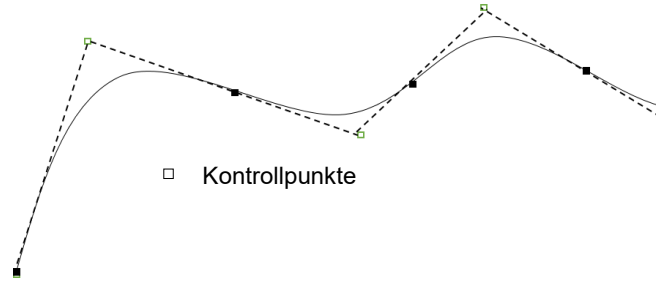


Abbildung 2-1: Kontrollpunkte auf der B-Spline

### 2.1.5 GVF-Snakes

GVF-Snakes, welche von Xu und Prince 1998 [20] entwickelt wurden, hatten Probleme der klassischen Snakes wie z.B. eine nicht zu weit von gesuchten Objekten entfernte Startkontur und schlechte Segmentierung von konkaven Objekten gut gelöst. Basierend auf der Helmholtz-Differentialgleichung hatte das GVF-Snakes Model die externe Kraft der klassischen Snakes neu definiert. Die neue externe Kraft nannte man Gradient Vector Flow. Die Energieminimierung der klassischen Snakes erfolgt mit Hilfe der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung:

$$\alpha v(s)'' + \beta v(s)'''' + \nabla E_{ext} = 0 \quad 2-22$$

Darunter ist eine Bilanzgleichung von interner Kraft und externer Kraft zu verstehen:

$$f_{int}(v(s)) + f_{ext}(v(s)) = 0 \quad 2-23$$

dabei wird das Gradient Vector Flow  $f_{ext}(v(s))$  als ein Vektorfeld  $\tilde{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$  definiert. Alle Vektoren im Vektorfeld zeigen immer auf die nächste Kante. Bei einem großen Wert befindet sich der Vektor in der Nähe von Kanten und bei einem geringen Wert weit weg von Kanten oder in einer homogenen Region. Das Vektorfeld wird durch die Minimierung der folgenden Energiefunktion bestimmt.

$$\varepsilon = \iint \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla e|^2 |\tilde{v} - \nabla e|^2 dx dy \quad 2-24$$

dabei bezeichnet  $e$  eine auf den Bildpixeln  $I(x, y)$  basierende edge-map-Funktion und ist durch die folgenden Gleichungen gegeben.

$$\begin{aligned}
 e^{(1)}(x, y) &= -I(x, y) & 2-25 \\
 e^{(2)}(x, y) &= -G_\sigma(x, y) * I(x, y) & 2-26 \\
 e^{(3)}(x, y) &= -|\nabla I(x, y)|^2 & 2-27 \\
 e^{(4)}(x, y) &= -|\nabla(G_\sigma(x, y) * I(x, y))|^2 & 2-28
 \end{aligned}$$

Die Energiefunktion  $\varepsilon$  lässt sich mit einem Variationsansatz lösen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\mu \nabla^2 u - (u - e_x)(e_x^2 + e_y^2) = 0 \quad 2-29$$

$$\mu \nabla^2 v - (v - e_y)(e_x^2 + e_y^2) = 0 \quad 2-30$$

$\nabla^2$  ist der Laplace Operator

Mit Hilfe des Gradient Vector Flow hat die Externe Kraft von GVF-Snakes einen großen Einwirkungsbereich, dadurch muss die Startkontur nicht in der Nähe vom gesuchten Objekt gesetzt werden und die Kontur kann sich in homogenen Regionen zu der nächsten Kante bewegen. Auf Grund der Eigenschaft des Vektors bzw. der Angabe der Größe und Richtung zum selben Zeitpunkt kann die Kontur abhängig vom Vektorfeld selbst entscheiden, ob sie schrumpfen oder wachsen soll. In der Nähe von Kanten haben die Vektoren große Werte und es wirken starke externe Kräfte auf die Kontur, dadurch lassen sich konkave Objekte gut segmentieren. Das Gradient Vector Flow ist sensitiv gegenüber Rauchen, deswegen hat das Verfahren Probleme dünne und lange Objekte zu segmentieren. Weiterhin wird die Initialisierung des Gradient Vector Flow und die Minimierung der Energiefunktion mittels der Variationsrechnung und der Integration realisiert. Dabei ist das GVF-Snakes Model zeitaufwendiger als das klassische Active Contour Model.

## 2.2 Geometrische Active Konturen

Die ursprüngliche Form des Geometric Active Contour Models, welche auf der Evolutionstheorie der Kurven und Level-Set Methode basiert, wurde gleichzeitig mit dem klassischen Active Contour Model im Jahre 1988 von Osher und Sethian [13] entwickelt. Diese Verfahren bieten eine Möglichkeit, n-dimensionale Objekte im  $(n + 1)$ -dimensionalen Raum darzustellen und zu segmentieren. Dabei lassen sich Konturen von gesuchten Objekten als Nullstelle einer  $(n + 1)$ -dimensionalen Funktion auffassen. Geometric Active Contour hat den Vorteil gegenüber Parametric Active Contour, dass die Kontur topologische Veränderungen durchführen kann.

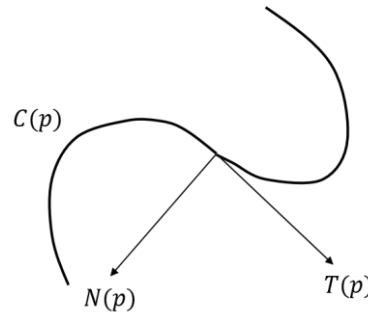
### 2.2.1 Evolutionstheorie der Kurven

Mittels der Evolutionstheorie der Kurven wird die Verformung der Kurve im Verlauf der Zeit durch die Normalvektoren und die Krümmungen der Kurve dargestellt. Dabei zeigt der Normalvektor die Bewegungsrichtung der Kurve und die Krümmung beschreibt die

lokale Abweichung der Kurve von einer Geraden. Bei dieser Theorie wird eine glatte und abgeschlossene Kurve im zweidimensionalen euklidischen Raum als eine parametrische Gleichung definiert:

$$C(p) = (x(p), y(p)), p \in [0, 1] \quad 2-31$$

Abbildung (2-2) zeigt einen Tangentialvektor  $T(p)$  und einen Normalvektor  $N(p)$  auf einer Kurve. Die Vektoren  $T(p)$  und  $N(p)$  sind Einheitsvektoren.



**Abbildung 2-2:** Tangentialvektor und Normalvektor auf der Kurve

Aus der ersten Ableitung von  $C(p)$  ergibt sich

$$C'(p) = \frac{\partial C(p)}{\partial p} = (x'(p), y'(p)) \quad 2-32$$

$$T(p) = \frac{C'(p)}{|C'(p)|} = \left( \frac{x'(p)}{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}, \frac{y'(p)}{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}} \right) \quad 2-33$$

Der Normalvektor ist immer senkrecht zum Tangentialvektor. Dies führt zur Gleichung  $T(p) \times N(p) = 0$ . Daraus ergibt sich mit  $(T(p))$  der Normalvektor

$$N(p) = \left( \frac{-y'(p)}{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}}, \frac{x'(p)}{\sqrt{x'(p)^2 + y'(p)^2}} \right) \quad 2-34$$

Die Länge zwischen dem Startpunkt  $C(0)$  und dem Endpunkt  $C(1)$  kann durch die Integration berechnet werden.

$$L = \int_0^1 |C'(p)| dp = 1 \quad 2-35$$

Daraus ergibt sich  $T(p) = C'(p)$ . Die zweite Ableitung der parametrischen Kurve beschreibt den Krümmungsgrad der Kurve und kann durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$|C'(p)| = \langle C'(p), C'(p) \rangle = 1 \quad 2-36$$

$$\frac{\partial |C'(p)|}{\partial p} = \frac{\partial \langle C'(p), C'(p) \rangle}{\partial p} = 2C'(p) \times C''(p) = 0 \quad 2-37$$

Man kann davon ausgehen, dass die zweite Ableitung  $C''(p)$  senkrecht zur ersten Ableitung  $C'(p)$  und parallel zum Normalvektor  $N(p)$  ist. Dabei wird  $C''(p)$  folgendermaßen definiert:

$$C''(p) = K(p)N(p) \quad 2-38$$

Dabei lässt sich die Krümmung  $K(p)$  durch folgende Gleichung berechnen:

$$K(s) = \frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad 2-39$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(p)}{x'(p)}, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{y''(p)x'(p) - x''(p)y'(p)}{x'(p)^3} \quad 2-40$$

$$K(p) = \frac{x'(p)y''(p) - y'(p)x''(p)}{(x'(p)^2 + y'(p)^2)^{3/2}} \quad 2-41$$

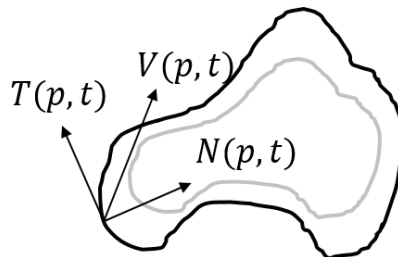
Um die Bewegung der Kurve zu beschreiben, wird eine zeitliche Komponente in der parametrischen Kurve hinzugefügt. Die Bewegungsgleichung der Kurve  $C(p, t)$  und ihre Geschwindigkeit  $V(p, t)$  werden wie folgt definiert:

$$C(p, t) = (x(p, t), y(p, t)) \quad 2-42$$

$$\frac{\partial C(p, t)}{\partial t} = V(p, t) \quad 2-43$$

dabei lässt sich die im zweidimensionalen Raum definierte Geschwindigkeit in Komponenten zerlegen: in tangentialer und normaler Richtung. Das Bild (2-3) unten zeigt die in tangentialer Richtung und normaler Richtung zerlegte Geschwindigkeit. Nach Umformen der Differentialgleichungen ergibt sich:

$$\frac{\partial C(p, t)}{\partial t} = \alpha T(p, t) + \beta N(p, t) \quad 2-44$$

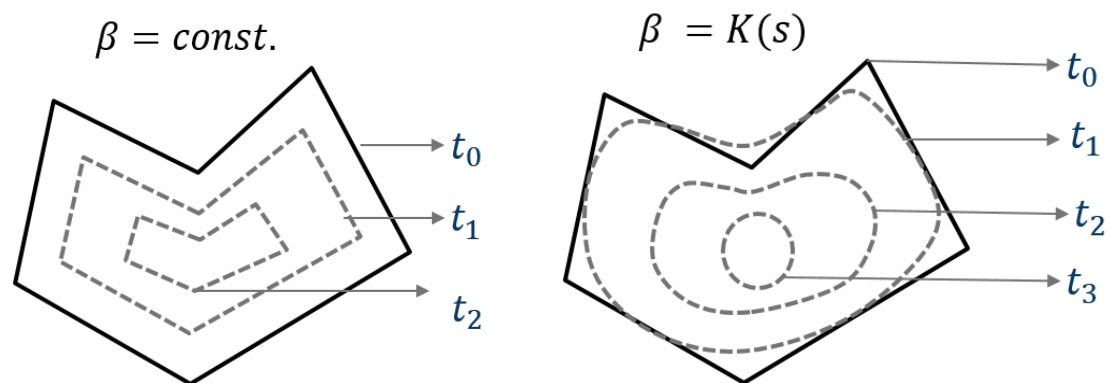


**Abbildung 2-3:** in tangentialer Richtung  $T(p, t)$  und normaler Richtung  $N(p, t)$  zerlegte Geschwindigkeit

Die Tangentialgeschwindigkeit hat keinen Einfluss auf der Verformung der Kurve, sondern verändert nur die Parametrisierung der Kurve. Deshalb lässt sich die Evolutionsgleichung vereinfachen zu

$$\frac{\partial C(p, t)}{\partial t} = \beta N(p, t) \quad 2-45$$

dabei bezeichnet der Parameter  $\beta$ , welcher vom Benutzer gesetzt wird, die Größe der Geschwindigkeit. Das unten abgebildete Bild (2-4) zeigt die Verformung einer abgeschlossenen Kurve bei verschiedenen Parametern  $\beta$ .



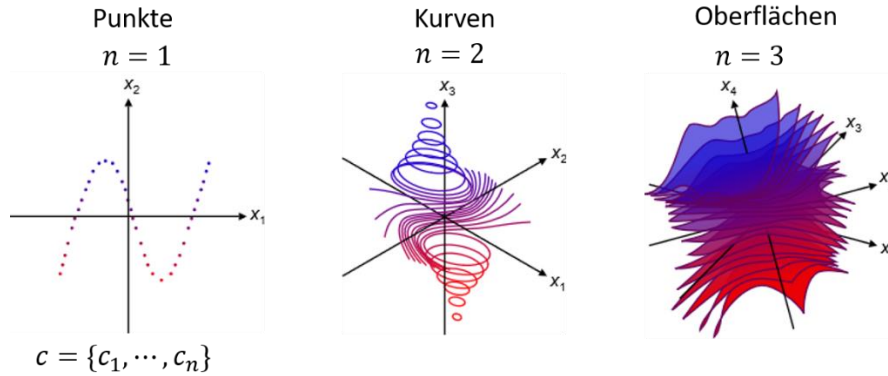
**Abbildung 2-4:** Verformung der Kurve bei verschiedenen Parametern  $\beta$

### 2.2.2 Level Set Methode

Bei der Level-Set Methode werden Konturen oder Oberflächen nicht explizit wie bei dem klassischen Active Contours Model dargestellt, sondern implizit als Nullstellenmenge einer höherdimensionalen Funktion bzw. Level-Set Funktion definiert. Die topologische Veränderung einer niederdimensionalen Kurve ist mittels einer höherdimensionalen Funktion einfach zu realisieren. Aus Level-Set Funktionen definierte Konturen oder Oberflächen werden wie folgt beschrieben:

$$L_c(f) = \{(x_1, \dots, x_n) | f(x_1, \dots, x_n) = c\}, c \text{ ist const.} \quad 2-46$$

dabei bezeichnet  $n$  die Raumdimensionen. Das Bild (2-5) unten zeigt einige Level-Set Funktionen bei verschiedenen  $n$ .

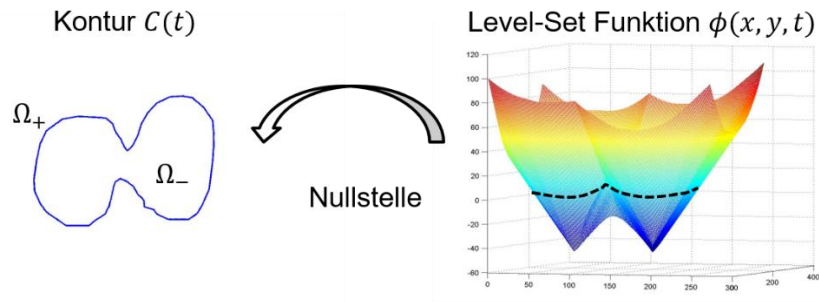


**Abbildung 2-5:** Level-Set Funktionen bei verschiedenen  $n$

Zur Bildsegmentierung wird eine zeitliche Komponente hinzugefügt, um die Verformung der Konturen zu beschreiben. Die zweidimensionale Kontur  $C(t)$  ist dann durch die Bestimmung der Nullstellenmenge der Level-Set Funktion gegeben:

$$C(t) = \{(x, y) | \phi(x, y, t) = 0\} \quad 2-47$$

dabei wird die Level-Set Funktion  $\phi(x, y, t)$  üblicherweise bei der Bildsegmentierung als eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion definiert. Ein Beispiel dazu wird im Bild (2-6) unten gezeigt.



**Abbildung 2-6:** vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion und Nullstelle der Level-Set Funktion

Die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion ist wie folgt definiert:

$$\phi(x, y, t) = \begin{cases} \text{dist}((x, y), C) & (x, y) \in \Omega_+ \\ 0 & (x, y) \in C \\ -\text{dist}((x, y), C) & (x, y) \in \Omega_- \end{cases} \quad 2-48$$

$$\text{dist}((x, y), C) = \min_{(x_i, y_i) \in C} \left\{ \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right\} \quad 2-49$$

Wie im Bild (2-6) dargestellt wird, wird die Teilmenge  $\Omega_+$  als Außenbereich der Kontur und die Teilmenge  $\Omega_-$  als Innenbereich bezeichnet [21]. Die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion besitzt die Eigenschaften, dass der Gradient immer in die Richtung

des größten Anstiegs der Funktionswerte zeigt und die Größe des Gradienten immer gleich eins ist. Der Gradient der Level-Set Funktion ist im zweidimensionalen euklidischen Raum definiert als

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \quad 2-50$$

In der Nullstelle zeigt der Gradient  $\nabla\phi$  in die normale Richtung der Kontur, deswegen lässt sich der Normalvektor der Kontur  $N$  mittels der Level-Set Funktion definieren als:

$$N = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad 2-51$$

Ebenfalls wird die Krümmung wie folgt dargestellt:

$$K = \nabla \cdot N = -\text{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) \quad 2-52$$

$$K = -\frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \quad 2-53$$

$$\phi_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \phi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right), \quad \phi_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) \quad 2-54$$

Durch die Entwicklung der Level-Set Funktion kann die Verformung einer Kurve im Verlauf der Zeit als die Verformung einer Oberfläche beschrieben werden. In der Evolutionsgleichung der Kurve wird das Parameter  $\beta$  als eine Geschwindigkeitsfunktion  $F$ , welche die Verformungsgeschwindigkeit kontrolliert, definiert. Die Ableitung der Verformung nach der Zeit lautet:

$$\frac{\partial\phi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \quad (\text{Nullstelle}) \quad 2-55$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \langle \nabla\phi, \frac{\partial C}{\partial t} \rangle \quad 2-56$$

Aus Gleichung (2-56) ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (2-45) das nachfolgende Ergebnis:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\langle \nabla\phi, FN \rangle = -\langle \nabla\phi, -F \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \rangle = F|\nabla\phi| \quad 2-57$$

Auf Grund der Gleichung (2-57) wurden zahlreiche Geschwindigkeitsfunktionen [22] [23] [24] [25] entwickelt, um Bilder besser zu segmentieren.



### 2.2.3 Mumford-Shah Funktional und Chan-Vese Verfahren

Das Mumford-Shah Funktional wurde 1989 von David Mumford und Jayant Shah [26] vorgestellt, um ein Optimalitätskriterium für die Bildsegmentierung zu entwickeln. Bei diesem Verfahren wird ein binäres Bild  $u$  als eine zweidimensionale Matrix  $\Omega$ , die das Maß und die Bildintensität des Bildes widerspiegeln kann, definiert. Jedes Element der Matrix beschreibt den Grauwert des entsprechenden Bildpunktes, der von 0 (schwarz) bis 255 (weiß) ist. Bei der Bildsegmentierung wird das Bild von einer verformbaren Kontur  $C$  in den Innenbereich  $w$  und den Außenbereich  $\Omega \setminus w$  eingeteilt. Durch die Minimierung des nachfolgenden Energiefunktionals wird das beste Segmentierungsergebnis bei der Segmentierung eines teilweise glatten Bildes gewonnen.

$$F^{MS}(u, C) = \lambda \iint_{\Omega} (u(x, y) - u_0(x, y))^2 dx dy + \iint_{\Omega \setminus C} \nabla u(x, y)^2 dx dy + \mu \int_C |C(p)| dp \quad 2-58$$

Dabei sind die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  positive Konstanten. Der erste Term beschreibt die Homogenität des Vordergrundes und des Hintergrunds, der zweite Term die Fläche des Innenbereiches und der dritte Term die Länge der Kontur. Bei der Minimierung des Mumford-Shah Funktionals liegt eine Schwierigkeit, die minimal partition problem heißt darin, dass die Aufteilung einer Menge von natürlichen Zahlen auf zwei Haufen erfolgen muss, so dass die Differenz der Summe der Zahlen in beiden Haufen möglichst klein ist. Um das Problem zu lösen, wurde 1995 eine diskrete Approximation von Gobbino [27] und 1998 eine finite difference approximation von Chambolle [28] entwickelt.

Ein Active Contours Without Edges Verfahren, welche 2001 von Chen und Vese [29] entwickelt wurde, lieferte eine numerische Approximation des Mumford-Shah Funktionals mit Hilfe der Level-Set Methode, der expliziten finiten Differenzen, der partiellen Differentialgleichung, der Heaviside-Funktion und der Dirac-Funktion. Bei diesem Verfahren kann das Mumford-Shah Funktional wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} F^{MS}(c_1, c_2, C) = & \mu \cdot Length(C) + v \cdot Area(inside(C)) \\ & + \lambda_1 \int_{inside(C)} u_0(x, y) - c_1^2 dx dy + \\ & \lambda_2 \int_{outside(C)} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy \end{aligned} \quad 2-59$$

Wobei  $c_1$  und  $c_2$  die durchschnittlichen Bildintensitäten des Innenbereiches und des Außenbereiches sind. Wie in Kapitel 2.2.2 erwähnt, kann die Kontur als die Nullstelle einer Level-Set Funktion  $\phi = 0$  definiert werden. Der Innenbereich wird von  $\phi > 0$  und der Außenbereich von  $\phi < 0$  dargestellt. Die Heaviside-Funktion  $H(z)$  und Dirac-Funktion werden definiert als:

$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z \geq 0 \\ 0, & \text{if } z < 0 \end{cases}, \quad \delta_0(z) = \frac{d}{dz} H(z) \quad 2-60$$

Unter der Verwendung der Heaviside- und Dirac-Funktion lässt sich das Mumford-Shah Funktional wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} F^{MS}(c_1, c_2, C) = & \mu \int_{\Omega} \delta(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| dx dy + v \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy \\ & + \lambda_1 \int_{\Omega} u_0(x, y) - c_1^2 H(\phi(x, y)) dx dy + \\ & \lambda_2 \int_{\Omega} u_0(x, y) - c_2^2 (1 - H(\phi(x, y))) dx dy \end{aligned} \quad 2-61$$

Die numerische Approximation der Heaviside- und Dirac-Funktion wird definiert als:

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon}(z) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \right) & 2-62 \\ \delta_{\varepsilon} &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + z^2} \right) & 2-63 \end{aligned}$$

Zur Minimierung des Mumford-Shah Funktional ergibt sich aus der Gleichung (2-61) mittels der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung die nachfolgende Level-Set Funktion:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) [\mu \cdot \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - v - \lambda_1 (u_0 - c_1)^2 + \lambda_2 (u_0 - c_2)^2] \quad 2-64$$

## 2.3 Geodesic Active Contours

Basierend auf der Level-Set Methode, der klassischen Active Contours und der Geodäsie wurden die Geodesic Active Contours von Caselles et. al. [25] 1997 entwickelt. Beim Geodesic Active Contour lässt sich die Geschwindigkeitsfunktion  $F$  neu definieren und die Kontur des gesuchten Objektes als eine Höhenlinie auf der Level-Set Funktion beschreiben. Dabei können topologische Änderungen wie z.B. Zusammenfügen und Trennen der Kontur realisiert werden. Dieses Verfahren bietet die Möglichkeit, dass der Anwender keine Startkontur bei der Initialisierung setzen kann.

Bei diesem Verfahren wird eine neue Kurvenlänge  $L_R$ , welche mit einer auf Bildeigenschaften basierenden Funktion  $g$  gewichtet wird, im Riemannschen Raum wie folgt definiert:

$$L_R = \int_0^1 g(|I(C(p))|) |C'(p)| dp \quad 2-65$$

Dabei ist die Kurvenlänge eine Riemannsche Metrik und die Gewichtung  $g$  wird definiert als:

$$g(I(x, y)) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma(x, y) * I(x, y)|^2} \quad 2-66$$

Zur Minimierung der Gleichung (2-65) ergibt sich unter Verwendung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung [30] das nachfolgende Ergebnis:

$$\frac{dC(t)}{dt} = g(I)KN - \langle \nabla g(I), N \rangle N \quad 2-67$$

Dabei ist die Kurve  $C$  eine Funktion der Zeit  $t$  und eines Parameters  $p$ . Diese Gleichung (2-67) kann mittels der Level-Set Funktion ausgedrückt werden, wobei die Verformung der Kurve nicht mehr von der Parametrierung der Kurve  $C$  abhängig ist. Aus der Gleichung (2-67) ergibt sich unter der Verwendung der Gleichung (2-56) die nachfolgende Level-Set Funktion:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(I)K|\nabla \phi| + \langle \nabla g(I), \nabla \phi \rangle \quad 2-68$$

Dabei lässt sich die Geschwindigkeitsfunktion als  $F = g(I)K - \langle \nabla g(I), N \rangle$  darstellen. Dabei kann man davon ausgehen, dass die Verformungsgeschwindigkeit der Kontur in einer homogenen Region oder an den sich auf einer geraden Linie befindenden Punkten sehr niedrig ist. Dazu wird eine Konstante  $c$  der Gleichung (2-68) hinzugefügt, um die Verformungsgeschwindigkeit zu erhöhen. Die Gleichung der Geodesic Active Contours lautet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(I)(c + K)|\nabla \phi| + \langle \nabla g(I), \nabla \phi \rangle \quad 2-69$$

# Kapitel 3

## 3 Numerische Lösung und Programmierung

In diesem Kapitel werden sowohl die im vorherigen Kapitel erwähnten Gleichungen des Active Contours Modells, der Level-Set Methode, des Chan-Vese Verfahrens und der Variante der klassischen Active Contour als auch ihre numerische Implementierung genauer beschrieben. Dabei wird im Detail darauf eingegangen, wie die Modelle umgesetzt und erweitert werden, um CT-Bilder zu segmentieren.

### 3.1 Implementierung des klassischen Active Contour Modells

Eine einfache numerische Implementierung des klassischen Active Contours Modells ist durch die Iteration das Energiefunktionales zu minimieren. Die geschlossene Startkontur besteht aus zahlreichen Kontrollpunkten, die manuell vom Anwender im Bild gesetzt werden. Basierend auf dem Greedy-Algorithmus, welche 1992 von William [31] entwickelt wurde, werden die Summe der internen Energie, der Bildenergie und der Einschränkungenergie von den acht benachbarten Bildpunkten eines Kontrollpunktes mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode berechnet. Nach dem Vergleich wird jeder Kontrollpunkt zu dem Bildpunkt bewegt, der eine minimale Energie besitzt. Das folgende Ablaufdiagramm (siehe Abb. 3-1) zeigt schematisch die Vorgehensweise bei der Iteration.

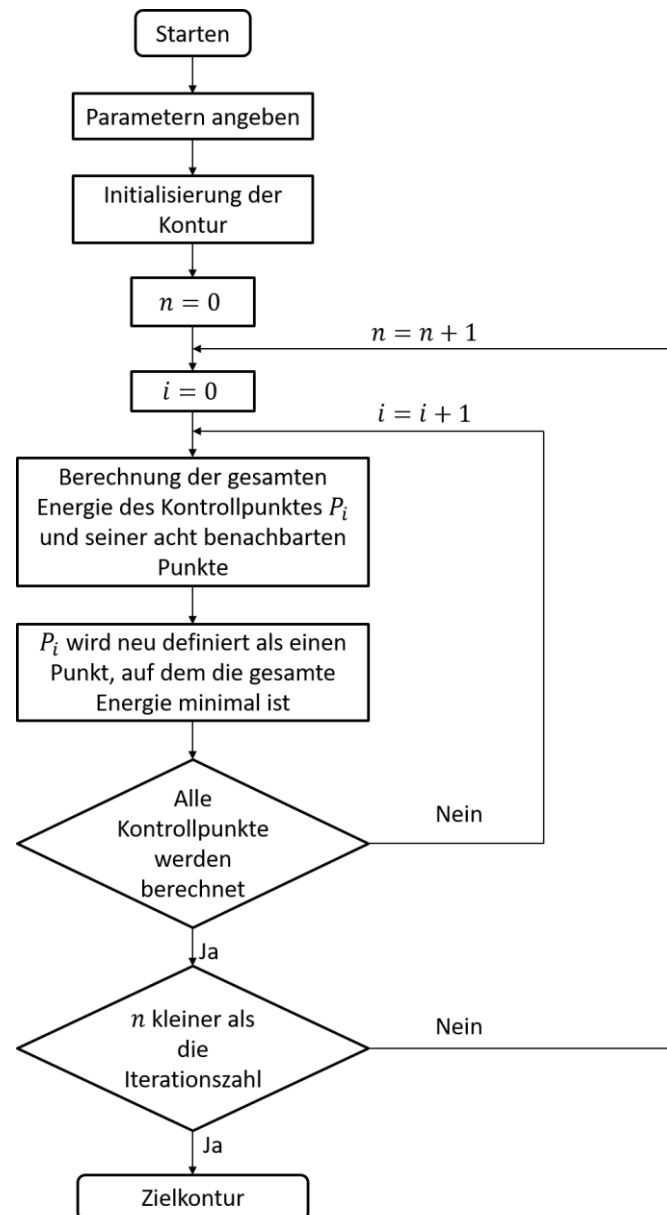


Abbildung 3-1: Ablaufdiagramm der klassischen Active contour

### 3.1.1 Initialisierung

Bei der Initialisierung wird ein farbiges Bild in ein Grauwertbild umgewandelt und mit Hilfe des Gauß-Filters weichgezeichnet. Bei der Umwandlung in ein Grauwertbild werden sowohl alle wichtigen Merkmale für die Bildsegmentierung gewährleistet als auch die Berechnungskomplexität erheblich verringert. In diesem Fall lässt sich ein farbiges Bild mit der nachfolgenden Formel (3-1) in ein Grauwertbild umwandeln.

$$\text{Grauwert} = 0,299 \times \text{Rotanteil} + 0,587 \times \text{Grünanteil} + 0,114 \times \text{Blauanteil} \quad 3-1$$

Weil das klassische Active Contours Modell eine hohe Intensivität gegenüber Rauschen besitzt, ist das Weichzeichnen des Bilds vor dem Segmentieren notwendig.

### 3.1 Implementierung des klassischen Active Contour Modells

Eine typische Softwarelösung zur Weichzeichnung ist die Gaußsche Weichzeichnung, welche mit Hilfe des Gauß-Filters und einer Mathematischen Funktion, die Faltung, auch Konvolution heißt, realisiert wird. Das weichgezeichnete Bild  $f$  kann als die Faltung  $g * G$  beschrieben werden, wobei die Matrix  $G$  der Gauß-Filter und  $g$  das Grauwertbild ist. Der Gauß-Filter wird wie folgt definiert:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

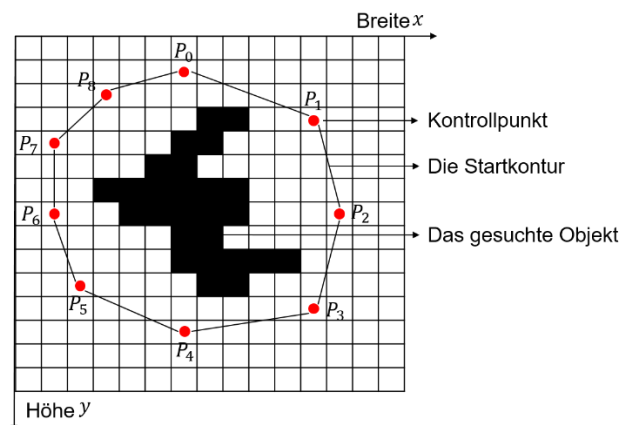
Die Ergebnisse der Initialisierung werden in folgender Abbildung (3-2) gezeigt.



**Abbildung 3-2:** Initialisierungsergebnisse

#### 3.1.2 Berechnung des Energiefunktionales

Vor der Berechnung des Energiefunktionales muss eine Startkontur, die aus eine Menge von Kontrollpunkten  $P_i$  besteht, auf dem Bild gesetzt werden. Die Position der Kontrollpunkte lässt sich durch das auf der Breite und Höhe des Bildes basierende Koordinationssystem feststellen. Die Kontrollpunkte  $P_i$  werden als  $P_i = (x_i, y_i)$  definiert. Eine Startkontur sieht wie folgt aus (siehe Abb. 3-3):



**Abbildung 3-3:** Startkontur und Kontrollpunkte

### 3.1 Implementierung des klassischen Active Contour Modells

Zur Berechnung des die Gleichung (2-5) beschreibenden Energiefunktionals müssen die interne Energie  $E_{int}(v(s))$  und die Bildenergie  $E_{image}(v(s))$  teilweise berechnet werden.

**Die interne Energie**  $E_{int}(v(s))$  wird als die Summe der ersten und zweiten Ableitung der Kontur ausgedrückt. Auf Grund der Finite-Differenzen-Methode lässt sich die erste und zweite Ableitung der Kontur bei der Bildsegmentierung wie folgt definieren:

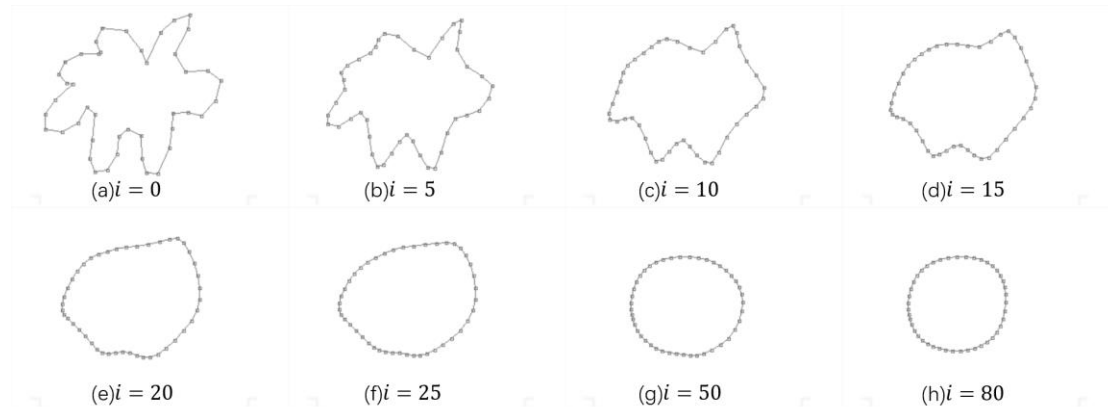
$$v(s)' = \frac{dv}{ds} = \frac{|P_{i+1} - P_{i-1}|^2}{2} \quad 3-2$$

$$v(s)'' = \frac{d^2v}{ds^2} = \frac{|P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}|^2}{2} \quad 3-3$$

Hierbei beschreibt der Term  $|P_{i+1} - P_{i-1}|$  die Entfernung zwischen zwei Kontrollpunkten  $P_{i+1}$  und  $P_{i-1}$ . Ebenso kann der Term  $|P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}|$  durch die Verwendung der nachfolgenden Gleichung berechnet werden.

$$|P_1 + P_2 + \dots + P_n| = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2} \quad 3-4$$

Durch die Minimierung der internen Energie wird die Länge der Kontur verkürzt und die Kontur schrumpft wie eine Membran zusammen. Abbildung (3-4) zeigt den Einfluss der internen Energie auf die Kontur.



**Abbildung 3-4:** Verformung der Kurve unter dem Einfluss der internen Energie

**Die Bildenergie**  $E_{image}(v(s))$  besteht aus der Linienbildenergie  $E_{line}$ , der Kantenbildenergie  $E_{edge}$  und dem Terminierungsfunktional  $E_{term}$ . Gewichtet werden diese Energien mit den Gewichtsparametern  $w_{line}$ ,  $w_{edge}$  und  $w_{term}$ .

Die Linienbildenergie wird einfach als die Bildintensität  $E_{line} = I(x, y)$  definiert und mit dem Parameter  $w_{line}$  gewichtet, der kontrolliert, ob die Kontur zur dunklen oder hellen Region im Vergleich zur durchschnittlichen Intensität der Kontrollpunkte angezogen wird. Beispielsweise wird die Kontur bei einem positiven Wert zur dunklen Region und bei einem negativen Wert zur hellen Region angezogen.

### 3.1 Implementierung des klassischen Active Contour Modells

Die Kantenbildenergie, welche durch den Bildgradienten als  $E_{edge} = -|\nabla I(x, y)|^2$  definiert wird, wird verwendet, um Bildkanten zu extrahieren. Auf einer deutlichen Kante erreicht der Beitrag des Bildgradienten das Maximum und die Kantenbildenergie das Minimum.

In einem zweidimensionalen Bild hat der Gradient die nachfolgende Darstellung.

$$\nabla I(x, y) = \frac{\partial I}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial I}{\partial y} \vec{y} \quad 3-5$$

Dabei wird der Beitrag des Gradientenvektors  $\nabla I$  in  $x$ -Richtung als  $I_x$  und in  $y$ -Richtung als  $I_y$  definiert. Dadurch kann die Kantenenergie als  $E_{edge} = |I_x^2 + I_y^2|$  definiert werden. Die beiden Terme lassen sich durch die nachfolgenden diskreten Funktionen berechnen.

$$I_x = -I_{x-1,y-1} - 2I_{x-1,y} - I_{x-1,y+1} + I_{x+1,y-1} + 2I_{x+1,y} + I_{x+1,y+1} \quad 3-6$$

$$I_y = -I_{x-1,y-1} - 2I_{x,y-1} - I_{x+1,y-1} + I_{x-1,y+1} + 2I_{x,y+1} + I_{x+1,y+1} \quad 3-7$$

Mittels des Sobel-Operators können die  $I_x$  und  $I_y$  Matrizen durch die Verwendung der nachfolgenden Faltungen berechnet werden.

$$I_x = S_x * I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * I \quad 3-8$$

$$I_y = S_y * I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * I \quad 3-9$$

Das Terminierungsfunktional  $E_{term}$  zieht die Kontur zu den Ecken, wo eine deutliche Bogenform mit einer großen Krümmung extrahiert werden kann. Die Deutlichkeit der Bogenform bzw. die Gradienten der auf der Bogenform liegenden Bildpunkte und die Größe der Krümmung beeinflussen den Beitrag des Terminierungsfunktionales. Bewegt sich die Kontur zu einer Ecke, erreicht das Terminierungsfunktional einen großen Wert und beendet die Verformung. Wie in den Gleichungen (3-2) und (3-3) dargestellt, kann die erste partielle Ableitung durch die Verwendung des zentralen Differenzenquotienten wie folgt berechnet werden:

$$C_x = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{x+1,y} - C_{x-1,y}}{2} \quad 3-10$$

$$C_y = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C_{x,y+1} - C_{x,y-1}}{2} \quad 3-11$$

Auf Grund der Finite-Differenzen-Methode wird eine bessere Approximation der zweiten partiellen Ableitung wie folgt beschrieben:



$$C_{xx} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = C_{x-1,y} - 2C_{x,y} + C_{x+1,y} \quad 3-12$$

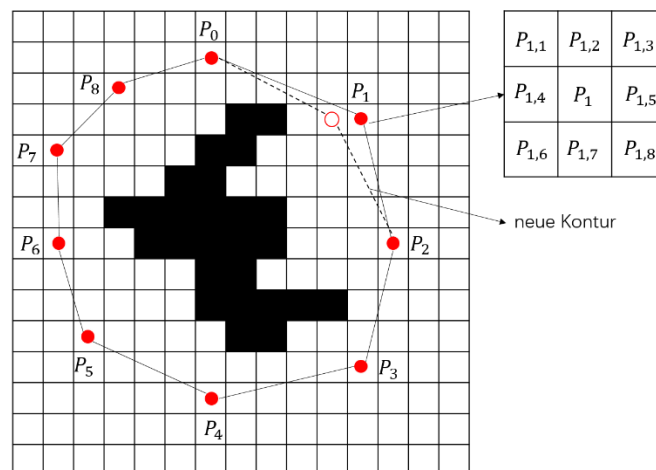
$$C_{yy} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = C_{x,y-1} - 2C_{x,y} + C_{x,y+1} \quad 3-13$$

$$C_{xy} = \frac{\partial C}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right) = C_{x-1,y-1} - C_{x-1,y+1} - C_{x+1,y+1} + C_{x+1,y-1} \quad 3-14$$

$$E_{image}(x, y) = w_{line}E_{line}(x, y) + w_{edge}E_{edge}(x, y) + w_{term}E_{term}(x, y) \quad 3-15$$

$$E_{snake}^* = \sum_{i=0} (E_{int}(v(s)) + E_{image}(x_i, y_i)) \quad 3-16$$

Die Minimierung der gesamten Energie  $E_{snake}$  wird durch die Verwendung des Greedy-Algorithmus realisiert. Bei jeder Iteration (d. h. bei jedem Schritt) versucht die Kontur nur ein lokales Minimum neben einem Kontrollpunkt zu finden. Beispielsweise werden die 8 benachbarten Bildpunkte eines Kontrollpunktes  $P_i$  wie die nachfolgende Abbildung (3-5) als  $P_{i,j}$ ,  $j \in \{1,2,\dots,8\}$  definiert. Jeder Bildpunkt  $P_{i,j}$  bildet mit den anderen Kontrollpunkten eine neue visuelle Kontur. Für jede visuelle Kontur wird die gesamte Energie  $E_{snake,j}$  durch die Gleichung (3-16) berechnet. Der ursprüngliche Kontrollpunkt  $P_i$  wird von dem Punkt, dessen gesamte Energie die minimale von  $E_{snake,j}$  und  $E_{snake}$  ist, ersetzt. Wenn sich alle Kontrollpunkte nicht mehr bewegen, endet der Verlauf der Iteration.



**Abbildung 3-5:** 8 benachbarten Bildpunkte eines Kontrollpunktes

### 3.1 Implementierung des klassischen Active Contour Modells

Die nachfolgende Pseudocode beschreibt den Verlauf der Iteration.

*start*

*Initialisierung ()*

*Eingabe: die Startkontur, die Parameter und Anzahl der Iteration  $n$*

*Berechnung der Bildenergie  $E_{image}(x, y)$*

*for  $k = 0 : n$*

*for  $i = 0 : \text{Anzahl der Kontrollpunkte}$*

$E_{int} = 0, E_{image} = 0, E_{gsm} = 0, E_{Snake} = \infty$

*for  $j = 0 : 9$*

*for  $t : \text{Anzahl der Kontrollpunkte}$*

*Berechnung der Terme  $v(s)'$  und  $v(s)''$*

$E_{int} = E_{int} + 0.5 * v(s)'^2 + 0.5 * v(s)''^2$

$E_{image} = E_{image} + E_{image}(x_t, y_t)$

*end for*

$E_{gsm} = E_{int} + E_{image}$

*if  $E_{gsm} < E_{Snake}$*

$E_{Snake} = E_{gsm}$

$P_{ersatz} = P_{i,j}$

*end if*

*end for*

$P_i = P_{ersatz}$

*end for*

*Ausgabe: die neue Kontur*

*If keine Verformung der Kontur*

*break*

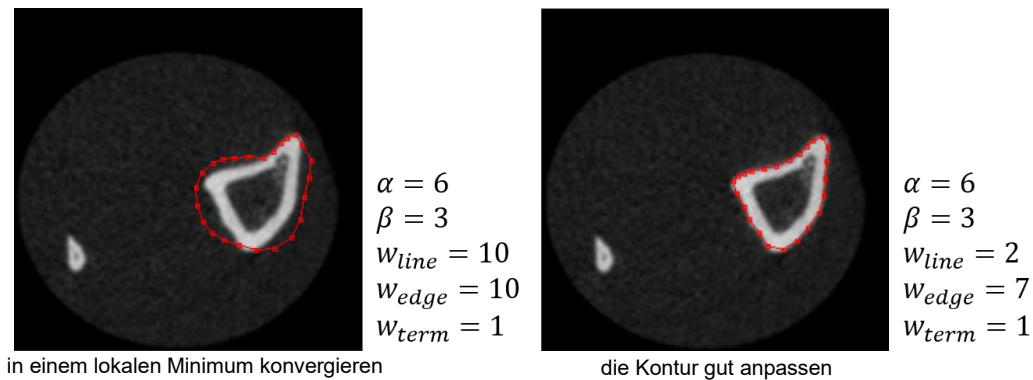
*end if*

*end for*

*end*

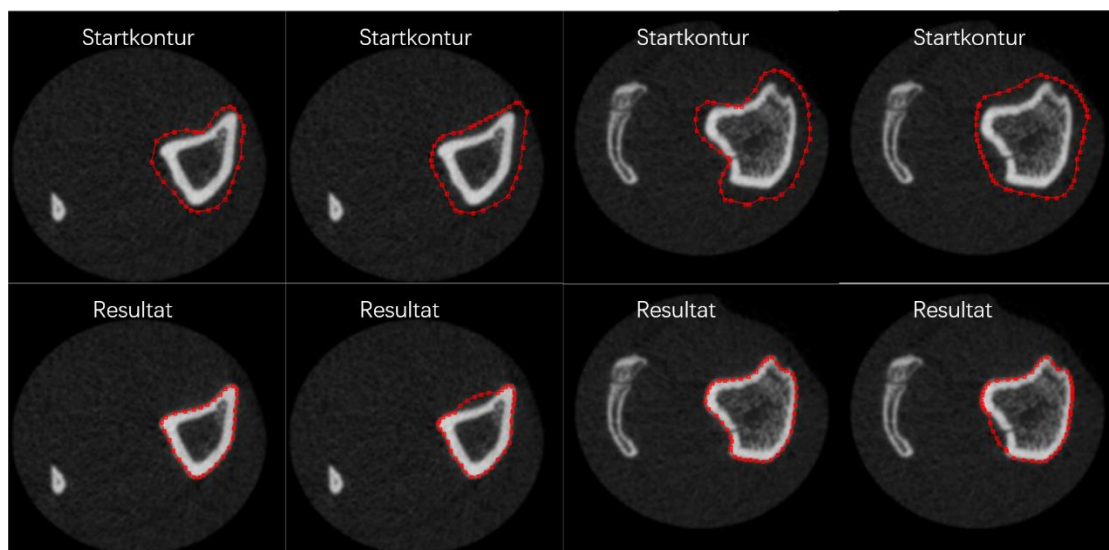
#### 3.1.4 Auswahl der Parameter und der Startkontur

Die Verformung der Snakes wird von den vom Anwender eingegebenen Parametern kontrolliert. Bei ungeeigneten Eingabewerten für Parameter kann die Kontur des gesuchten Objekts nicht detektiert werden. Die auf der Bildinformation basierenden Kräfte sind nur auf die Parameter  $w_{line}$ ,  $w_{edge}$  und  $w_{term}$  angewiesen. Bei großen Eingabewerten dieser Parameter kann die Kurve wegen niedriger interner Kräfte in einem lokalen Minimum konvergieren. Beispielsweise wirken die Kanten bei einem großen Eingabewert für  $w_{edge}$  starke Widerstände auf die Kurve aus, indem die Kurve weit weg von der Kontur des gesuchten Objekts stoppen kann. Die Abbildung (3-6) zeigt den Einfluss dieser Parameter auf die Kurve.



**Abbildung 3-6:** Einfluss von verschiedenen Parametern auf der Verformung der Kurve

Wie im Kapitel 2.1.2 erwähnt, besitzen Snakes eine hohe Sensitivität gegenüber der Startkontur und es ist schwer konkaven Objekte zu segmentieren. Deswegen muss Die Startkontur nahe an dem gesuchten Objekt gesetzt werden. Die nachfolgende Abbildung (3-7) zeigt die Segmentierungsergebnisse bei verschiedenen Startkonturen und den gleichen Parametern.



**Abbildung 3-7:** Einfluss der Startkontur auf den Ergebnissen

Dabei kann man davon ausgehen, dass bei der Segmentierung des konkaven Objekts die Startkontur nahe bei dem konkaven Teil des Objekts gesetzt werden muss.

## 3.2 Variante der Active Contour

Ein Großer Nachteil der Klassischen Active Contour liegt darin, dass bei der Segmentierung die topologische Veränderung unmöglich ist. Die Kurve ist nicht in der Lage sich aufzuteilen oder zusammenzufügen. Ein weiteres Problem ist die lokale Konvergenz. Zur Minimierung des Energiefunktionalen werden nur Bildpunkte, die sich

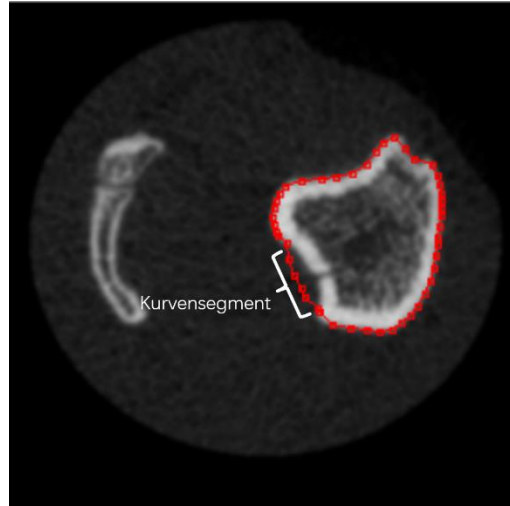
in der Nähe der Kurve befinden, berechnet. Deshalb besitzen Snakes eine hohe Sensitivität gegenüber der Startkontur. Um diese Nachteile zu überwinden, wird eine auf der klassischen Active Contour basierende Variante entwickelt.

### 3.2.1 Ursache und Lösung der Nachteile von Snakes

Bei der klassischen Active Contour wird die verformbare Kontur als eine kontinuierliche Kurve definiert, die aus zahlreiche Kontrollpunkte besteht. Unter der Verformung der Kurve versteht man die Bewegung der Kontrollpunkte. Die Verbindung zwischen zwei Kontrollpunkte verändert sich nicht, deshalb ist die topologische Veränderung der Kurve unmöglich. Um die topologische Veränderung zu realisieren, kann die Kurve ähnlich der Level-Set Methode als die Grenze von zwei Bereichen bzw. Innerbereich und Außerbereich definiert werden. Durch das Zusammenfügen und Trennen des Innerbereiches wird die topologische Veränderung der Kurve ermöglicht.

Zur Initialisierung der Startkontur lässt sich die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion anwenden. Der Abstand zwischen jedem Bildpunkt und den Punkten auf der Startkontur wird berechnet. Die Menge von Bildpunkten, deren Funktionswert  $dist((x, y), C)$  positiv ist, werden als das Innerbereich definiert. Die Komplexität dieser Berechnungsmethode ist  $O(n^2)$ . Um die Berechnungszeit zu reduzieren, wird eine auf dem morphologischen Operator Dilation basierende Initialisierungsmethode entwickelt. Aufgrund einer Nullmatrix  $u(x, y)$  werden zuerst die Punkte am Rande des Bildes als  $u(x, y) = 1$  und die Punkte auf der Startkontur immer als  $u(x, y) = 0$  definiert und danach wird der morphologische Operator Dilation durchgeführt. Zum Schluss werden alle Bildpunkte im Innerbereich als  $u(x, y) = 0$  und im Außerbereich als  $u(x, y) = 1$  markiert. Im Vergleich zur vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion reduziert die Komplexität dieser Initialisierungsmethode von  $O(n^2)$  auf  $O(n)$ .

Auf Grund des Einflusses der zweiten Ableitung der Parametrischen Kurve erreicht das Energiefunktional bei der Position in der nachfolgenden Abbildung (3-8) das Minimum. In der Nähe von den Bildpunkten auf dem Kurvensegment bleibt die Bildenergie  $E_{image}$  fast unverändert, d.h. das Kurvensegment konvergiert in einem lokalen Minimum.



**Abbildung 3-8:** lokale Konvergenz

Zum Lösen des Problems lässt sich eine neue Bildenergie wie folgt definieren.

$$E_{image}^* = \int_{\Omega} (\lambda E_0^* - E_{image}(x, y)) dx dy \quad 3-17$$

$$E_{image}(x, y) = w_{line} E_{line}(x, y) + w_{edge} E_{edge}(x, y) + w_{term} E_{term}(x, y) \quad 3-18$$

Dabei ist  $E_0^*$  der Durchschnittswert von  $E_{image}(x, y)$  des Innerbereiches oder des Außerbereiches ist. Dadurch basiert die Energieminimierung nicht nur auf den Bildpunkten in der Nähe der Kurve, sondern auf allen Bildpunkten innerhalb oder außerhalb der Kurve. Deshalb wird die Sensitivität gegenüber der Startkontur erheblich verringert.

Beim Segmentieren von konkaven Objekten sind Segmentierungsergebnisse der klassischen Active Contour nicht ideal. Die Ursache liegt bei der internen Energie. Auf Grund der internen Energie  $E_{int}$  verformt sich die Kurve wie ein Ballon. Wenn die Kurve auf einer konkaven Kontur klebt, besitzt die zweite Abteilung der Kurve einen großen Wert. Bei der Minimierung der internen Energie verhindert sie die Bewegung des Kurvensegmentes zum konkaven Teil des gesuchten Objektes. Die wichtigsten Funktionen der internen Energie bestehen darin, die Schrumpfung und Expansion der Kurve zu kontrollieren und die Kurve zu glätten. Diese Funktionen lassen sich durch die Verwendung von morphologischen Operatoren erfüllen.

Die Funktion der ersten Ableitung, die die Schrumpfung und Expansion der Kurve kontrolliert, ist ähnlich der morphologischen Basisoperatoren bzw. Erosion und Dilation. Die Funktion der zweiten Ableitung, welche die Kurve glätten kann, lässt sich durch den Operator  $IS_h \circ SI_h$  erfüllen. Diese morphologischen Operatoren werden im Kapitel 3.4 ausführlich beschrieben.

### 3.2.2 Numerische Lösung der Variante

Die Bewegung der Kurve wird durch die Verformung des Innerbereiches ( $u = 0$ ) und Außerbereiches ( $u = 1$ ) beschrieben. Nach  $n$ -Iterationen wird die Funktion  $u$  als  $u^n$  ausgerückt. Nach jeder Iteration wird die Funktion  $u^{n+1}$  wie folgt definiert.

Expansion:

$$E_0^{außen} = \sum_x \sum_y E_{image}(x, y) u(x, y) \quad 3-19$$

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = \begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = 0 & \text{if } \lambda E_0^{außen} - E_{image}(x, y) > 0 \\ u^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = 1 & \text{else} \end{cases} \quad 3-20$$

$$u^{n+1}(x, y) = (IS_h \circ SI_h u^{n+\frac{1}{2}})(x, y) \quad 3-21$$

Schrumpfung:

$$E_0^{innen} = \sum_x \sum_y E_{image}(x, y) (1 - u(x, y)) \quad 3-22$$

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = \begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = 1 & \text{if } \lambda E_0^{innen} - E_{image}(x, y) > 0 \\ u^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = 0 & \text{else} \end{cases} \quad 3-23$$

$$u^{n+1}(x, y) = (IS_h \circ SI_h u^{n+\frac{1}{2}})(x, y) \quad 3-24$$

Das folgende Ablaufdiagramm zeigt schematisch die Vorgehensweise bei der Iteration.

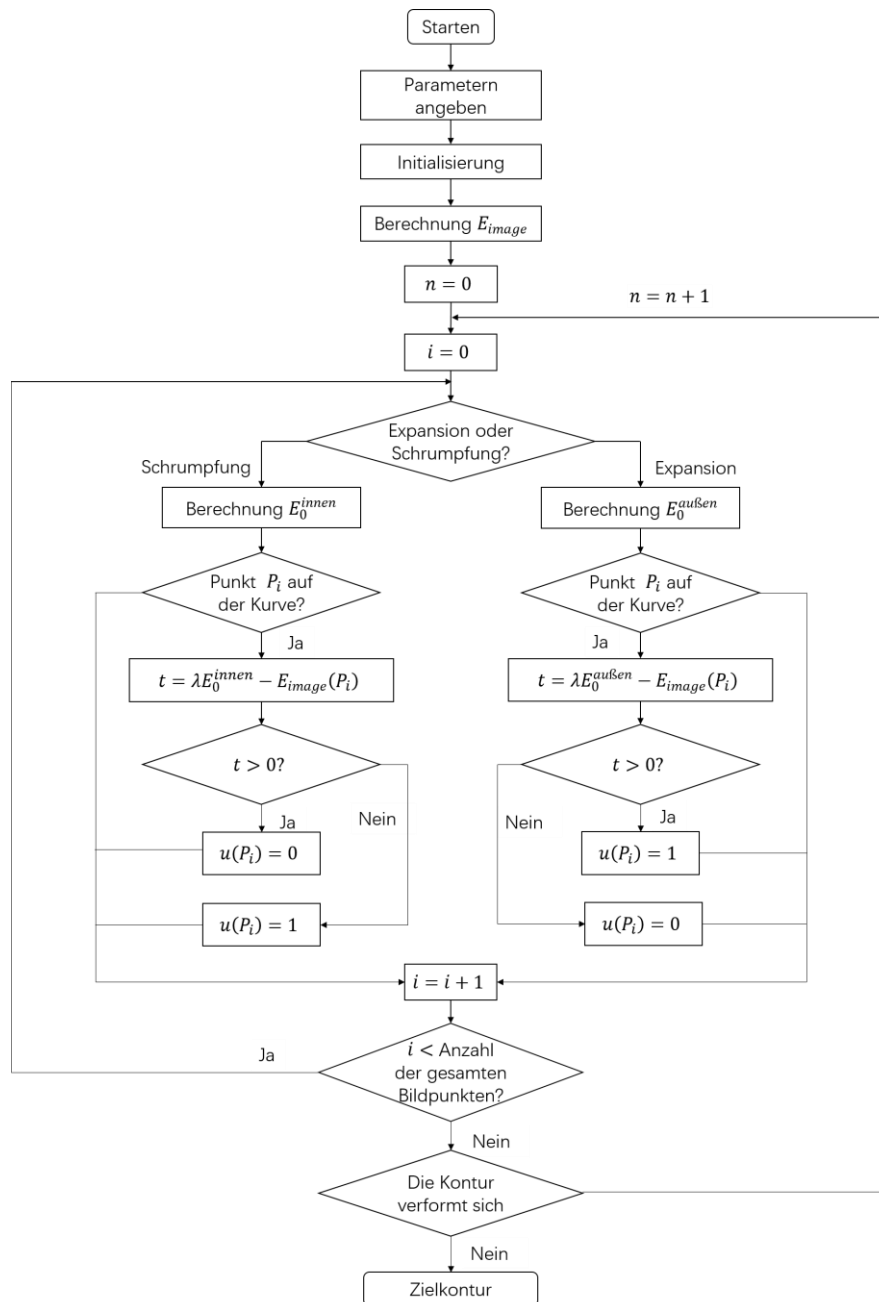


Abbildung 3-9: Ablaufdiagramm der Variante

Ähnlich der klassischen Active Contour kann der Anwender zu jeder Zeit entscheiden, ob die Kurve schrumpfen oder expandieren soll.

### 3.2.3 Erklärung der Parameter

Zur Berechnung der Bildenergie-Matrix müssen drei Parameter  $w_{line}$ ,  $w_{edge}$  und  $w_{term}$  eingegeben werden. Das Terminierungsfunktional  $E_{term}$  zieht die Kurve zu den Ecken, wo eine deutliche Borgenform mit einer großen Krümmung detektiert werden kann. Die Berechnung des Terminierungsfunktionales basiert auf den

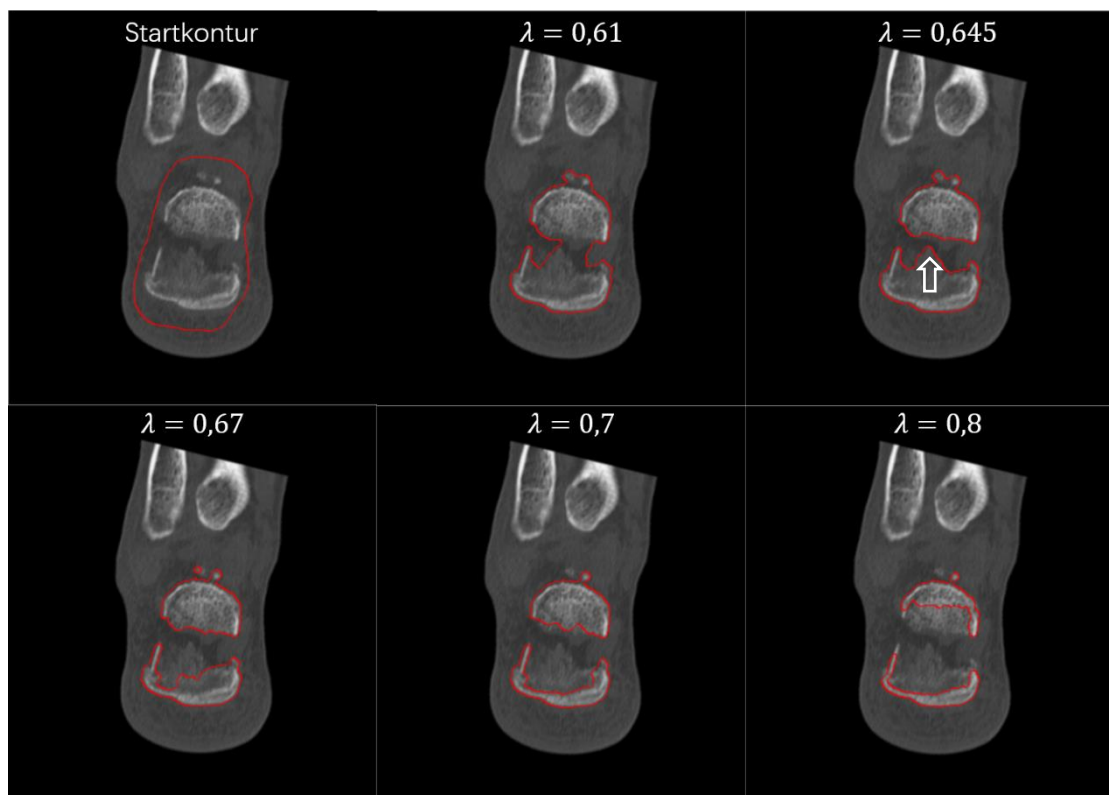
Gradienten des Bildes. Wo das Terminierungsfunktional einen großen Wert besitzt, hat der Gradient des entsprechenden Punktes gleichfalls einen großen Beitrag, der die weitere Bewegung der Kurve verhindert. Das Terminierungsfunktional hat keinen Einfluss auf das Segmentierungsergebnis, deshalb wird der Parameter auf null eingestellt.

Die Gleichung  $\lambda E_0^{au\beta en} - E_{image}(x, y) > 0$  lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$(\lambda E_{line}^{au\beta en} - E_{line}(x, y)) + \frac{w_{edge}}{w_{line}} (\lambda E_{edge}^{au\beta en} - E_{edge}(x, y)) > 0 \quad 3-25$$

Dabei kann man davon ausgehen, dass nur das Verhältnis von  $w_{edge}$  und  $w_{line}$  das Ergebnis der Gleichung beeinflusst. Aus diesem Grund kann der Parameter  $w_{edge}$  konstant auf eins eingestellt werden.

Der Parameter  $\lambda$  beeinflusst die Sensitivität der Kurve gegenüber den Gradienten. Bei einem großen Wert von  $\lambda$  verringert sich die Sensitivität gegenüber den Gradienten, d.h. die Kurve könnte wahrscheinlich die Kontur des gesuchten Objektes überqueren. Die nachfolgende Abbildung (3-10) zeigt den Einfluss von  $\lambda$  bei konstantem  $w_{line} = 1$ .



**Abbildung 3-10:** Segmentierungsergebnisse bei verschiedenen  $\lambda$

Bei  $\lambda = 0,645$  lässt sich die in der Abbildung (3-10) markierten schwache Kante



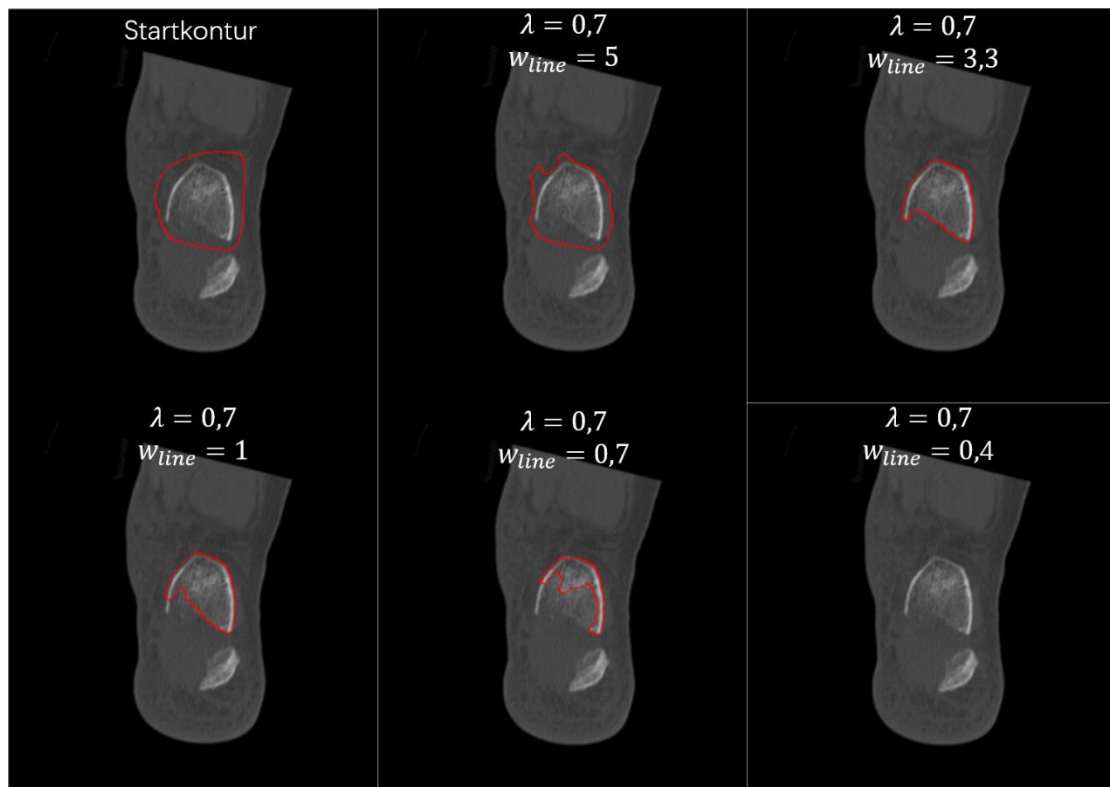
detektieren. Aber bei  $\lambda = 0,67$  überquert die Kurve diese schwache Kante.

Die Linienbildenergie  $E_{line}$  bzw. die Bildintensität wird durch den Parameter  $w_{line}$  gewichtet. Bei einem großen Wert von  $w_{line}$  ist die Sensitivität der Kurve gegenüber den Bildintensitäten hoch. Dabei wird die Kurve bei Punkten, auf den die Intensität hoch oder niedrig ist, stoppen. Wenn ein positiver Parameter für den Parameter  $w_{line}$  eingegeben wird, wird die Kurve ein helles Objekt suchen. Bei einem negativen Wert detektiert die Kurve die Kontur des dunklen Objektes. Wie die nachfolgende Abbildung (3-11) zeigt, verformt sich die Kurve nicht bei einem positiven Wert von  $w_{line} = 1$ . Wenn ein negativer Wert eingegeben wird, kann die Kontur detektiert werden.



**Abbildung 3-11:** Segmentierungsergebnisse bei positivem und negativem  $w_{line}$

Die nachfolgende Abbildung (3-12) zeigt den Einfluss der Größe von  $w_{line}$  auf dem Segmentierungsergebnis.



### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode

---

**Abbildung 3-12:** Segmentierungsergebnisse bei gleichen  $\lambda$  aber verschiedenen  $w_{line}$

Man kann ausgehen, dass sich der Widerstand der hellen Bildpunkte gegen die Kurve bei der Reduzierung von  $w_{line}$  verringert. Bei  $w_{line} = 0,4$  wird keine Kontur detektiert.

### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode

Die auf dem Mumford-Shah Funktional basierende Chan-Vese Methode approximiert die im Kapitel 2.2.3 erwähnte diskrete Funktion (2-59) durch die Anwendung der Dirac- und Heaviside- Funktion, bei denen sich die Minimierung des Mumford-Shah Funktionales durch die Level-Set Methode realisieren lässt. Bei der Initialisierung wird auf Grund der Startkontur eine Level-Set Oberfläche durch die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion erzeugt. Die Startkontur wird als die Nullstelle der Level-Set Funktion definiert. Bei jeder Iteration verformt sich die Level-Set Oberfläche unter der Wirkung der auf der Kontur und der Bildinformation basierenden Kräfte. Ebenso verformt sich die von der Nullstelle beschriebene Kontur. Das folgende Ablaufdiagramm zeigt schematisch die Vorgehensweise bei der Iteration (siehe Abb. 3-13).

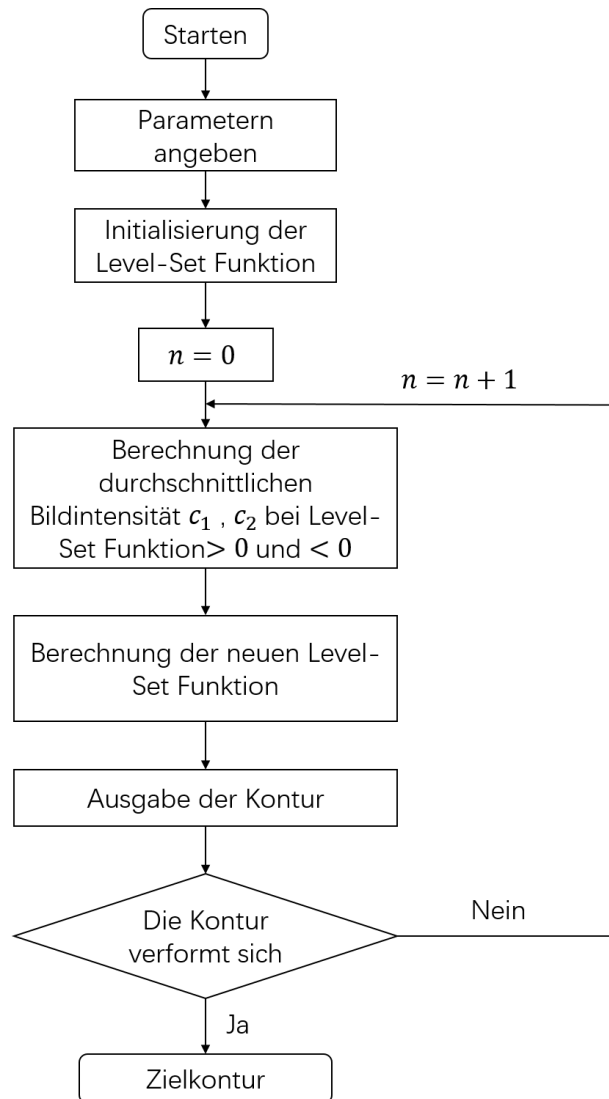


Abbildung 3-13: Ablaufdiagramm der Chan-Vese Funktion

#### 3.3.1 Initialisierung der Level-Set Funktion

Bei der Initialisierung wird die Level-Set Funktion als die im Kapitel 2.2.2 erwähnte vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion definiert. Dabei liegt die Schwierigkeit allerdings darin, wie man entscheidet, zu welchem Bereich ein Bildpunkt gehört. Der Außenbereich und der Innenbereich einer unregelmäßigen manuell gesetzten Startkontur sind durch die Programmierung schwer zu definieren. Dazu werden zwei durchführbare Lösungen vorgestellt:

- Wegen der niedrigen Sensitivität dieses Verfahrens lässt sich die Startkontur als eine regelmäßige Form wie z.B. Kreis und Quadrat definieren.

- Durch die Anwendung der morphologischen Operatoren kann der Außenbereich der Startkontur markiert werden.

### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode

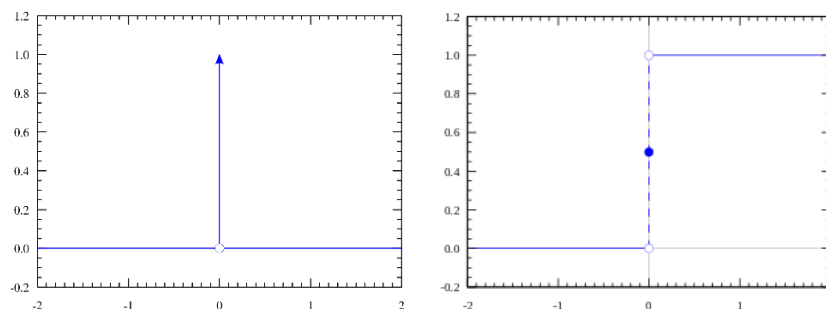
Beispielweise kann die Level-Set Funktion einer kreisförmigen Startkontur mit den Koordinaten des Kreismittelpunkts  $(x_0, y_0)$  und dem Radius  $r$  wie folgt initialisiert werden:

$$\phi(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r \quad 3-26$$

Dadurch wird die Berechnungszeit stark verringert. Die zweite Lösung wurde im Kapitel (3.2) vorgestellt.

#### 3.3.2 Dirac- und Heaviside-Funktionen

Um die Kontinuität der Kurve bei der Verformung der Level-Set Oberfläche zu gewährleisten und den Außenbereich und den Innenbereich zu definieren, werden Dirac- und Heaviside-Funktionen angewendet. Bei einem positiven Wert der Level-Set Funktion bzw. dem Außenbereich ist der Beitrag der Heaviside-Funktion auf dem entsprechenden Bildpunkt gleich eins. Ebenso zeigt der Beitrag 0 der Heaviside-Funktion den Innenbereich. Die Grenze zwischen dem Außenbereich und dem Innenbereich lässt sich als eine Menge von Punkten, auf denen die Ableitung der Heaviside-Funktion nicht gleich null ist, definieren. Hierbei beschreibt die Dirac-Funktion in der Mathematik die Ableitung der Heaviside-Funktion. Die Abbildung (3-14) zeigt die ideale Heaviside-Funktion und die Dirac-Funktion in zweidimensionalen Raum.



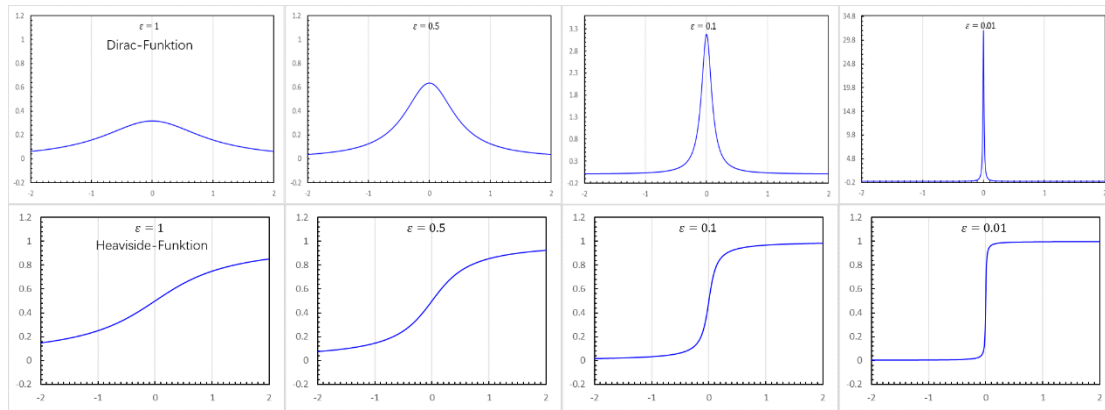
**Abbildung 3-14:** Funktionsgraph der idealen Heaviside- und Dirac-Funktion

Zur Approximation der Dirac- und Heaviside-Funktion wurde zahlreiche Gleichungen entwickelt. Hierbei werden die im Kapitel 2.2.3 erwähnten Funktionen (2-64) angewendet.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) [\mu \cdot \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - v - \lambda_1 (u_0 - c_1)^2 + \lambda_2 (u_0 - c_2)^2] \quad 3-27$$

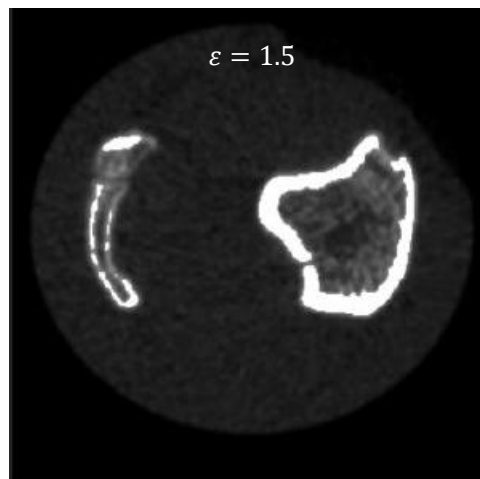
Die Abbildung (3-15) zeigt den Einfluss des Parameters  $\varepsilon$  auf dem Funktionsgraph.

### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode



**Abbildung 3-15:** Funktionsgraph der Heaviside- und Dirac-Funktion bei verschiedenen Parametern

Dabei kann man davon ausgehen, dass der Parameter  $\varepsilon$  kleiner als 0.1 ausgewählt werden soll, da sonst Bildpunkte außerhalb der Kurve einen großen Einfluss auf die Level-Set Oberfläche haben und die Nullstelle der Level-Set Funktion nicht genau die Kurve beschreiben kann. Wie die im Kapitel 2.2.3 erwähnte Gleichung zeigt, verformt die Level-Set Oberfläche sich idealerweise nur auf den Positionen, wo sich die Kurve befindet. Genauer gesagt, verformt sich die ganze Oberfläche gleichzeitig bei einem großen Wert von  $\varepsilon$ . Das kann zum Auftauchen von vielen isolierten Inseln führen. In der nachfolgenden Abbildung (3-16) ist zu sehen, dass es keine kontinuierliche Kurve auf der Nullstelle der Level-Set Funktion gibt.



**Abbildung 3-16:** Nullstelle der Level-Set Funktion

#### 3.3.3 Berechnung der Level-Set Funktion

Die Level-Set Funktion ist eine partielle Differentialgleichung. Aufgrund der Finite-Differenzen-Methode wird die Differentialgleichung durch die Anwendung von Differenzengleichungen approximiert, die mittels verschiedener Algorithmen gelöst werden können. Zur Lösung der Differentialgleichung mit Differenzengleichungen wird das explizite Euler-Verfahren üblicherweise angewendet. Hierbei wird die Level-Set

### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode

Funktion durch den Vorwärts-Differenzenquotienten angenähert. Der Vorwärts-Differenzenquotient für die Level-Set Funktion lautet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = L(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \dots) \quad 3-28$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = L(\phi_{i,j}^n, D^x \phi_{i,j}^n, D^y \phi_{i,j}^n, \dots) \quad 3-29$$

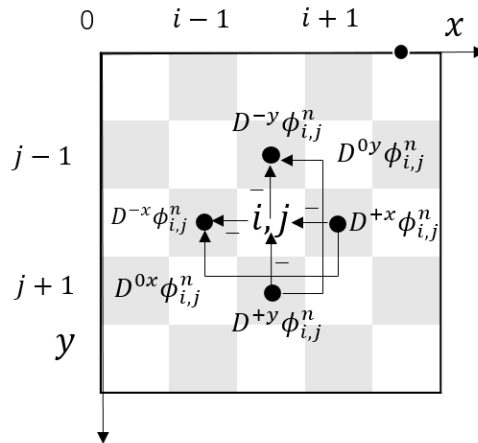
Dabei wird  $n$  als die Anzahl der Iterationen definiert.  $\phi_{i,j}^0$  beschreibt die initiale Level-Set Funktion.  $\Delta t$  ist ein vom Benutzer eingegebenes, kleines Zeitintervall, das die Verformungsgeschwindigkeit der Level-Set Oberfläche und die Genauigkeit beeinflusst. Obwohl man eine genaue Funktion bei einem kleinen Wert von  $\Delta t$  bekommen kann, wird sich die Berechnungszeit erheblich verlängern. Bei jedem Iterationsschritt lässt sich die Level-Set Funktion wie folgt berechnen.

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \Delta t L(\phi_{i,j}^n, D^x \phi_{i,j}^n, D^y \phi_{i,j}^n, \dots) \quad 3-30$$

Hierbei kann  $D$  als Vorwärts-Differenzenquotient, Rückwärts-Differenzenquotient oder zentraler Differenzenquotient definiert werden. Der Vorwärts-  $D^{+x}$ , Rückwärts-  $D^{-x}$  und zentrale Differenzenquotient  $D^{0x}$  werden wie folgt ausgedrückt.

$$\begin{aligned} D^{-x} \phi_{i,j}^n &= \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x} & D^{-y} \phi_{i,j}^n &= \frac{\phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n}{\Delta y} \\ D^{+x} \phi_{i,j}^n &= \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i,j}^n}{\Delta x} & D^{+y} \phi_{i,j}^n &= \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j}^n}{\Delta y} \\ D^{0x} \phi_{i,j}^n &= \frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} & D^{0y} \phi_{i,j}^n &= \frac{\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \end{aligned} \quad 3-31$$

Die Abbildung (3-17) zeigt schematisch den Vorwärts-, Rückwärts- und zentralen Differenzenquotienten.



**Abbildung 3-17:** Vorwärts-, Rückwärts- und zentraler Differenzenquotient.

### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode

Die Krümmung der Kurve  $K_{i,j}^n$  lässt sich gleichfalls durch Differenzenquotienten approximieren. Die numerische Lösung der Krümmung lautet:

$$K_{i,j}^n = \text{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad 3-32$$

$$K_{i,j}^n = D^{-x} \left( \frac{D^{+x} \phi_{i,j}^n}{\sqrt{(D^{+x} \phi_{i,j}^n)^2 + (D^{0y} \phi_{i,j}^n)^2}} \right) + D^{-y} \left( \frac{D^{+y} \phi_{i,j}^n}{\sqrt{(D^{0x} \phi_{i,j}^n)^2 + (D^{+y} \phi_{i,j}^n)^2}} \right) \quad 3-33$$

In der Gleichung (3-27) werden  $c_1$  und  $c_2$  als die durchschnittliche Bildintensität von Bildpunkten außerhalb und innerhalb der Kurve definiert. Sie kann durch die Anwendung der Heaviside-Funktion wie folgt ausgedrückt werden.

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} u_0(x, y) H(\phi(x, y)) dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy} \quad 3-34$$

$$c_2 = \frac{\int_{\Omega} u_0(x, y) (1 - H(\phi(x, y))) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi(x, y))) dx dy} \quad 3-35$$

Dabei lautet die numerische Lösung:

$$c_1^n = \frac{\sum_i \sum_j u_0(i, j) H(\phi_{i,j}^n)}{\sum_i \sum_j H(\phi_{i,j}^n)} \quad 3-36$$

$$c_2^n = \frac{\sum_i \sum_j u_0(i, j) (1 - H(\phi_{i,j}^n))}{\sum_i \sum_j (1 - H(\phi_{i,j}^n))} \quad 3-37$$

Zusammenfassend kann daher die Level-Set Funktion folgendermaßen berechnet werden.

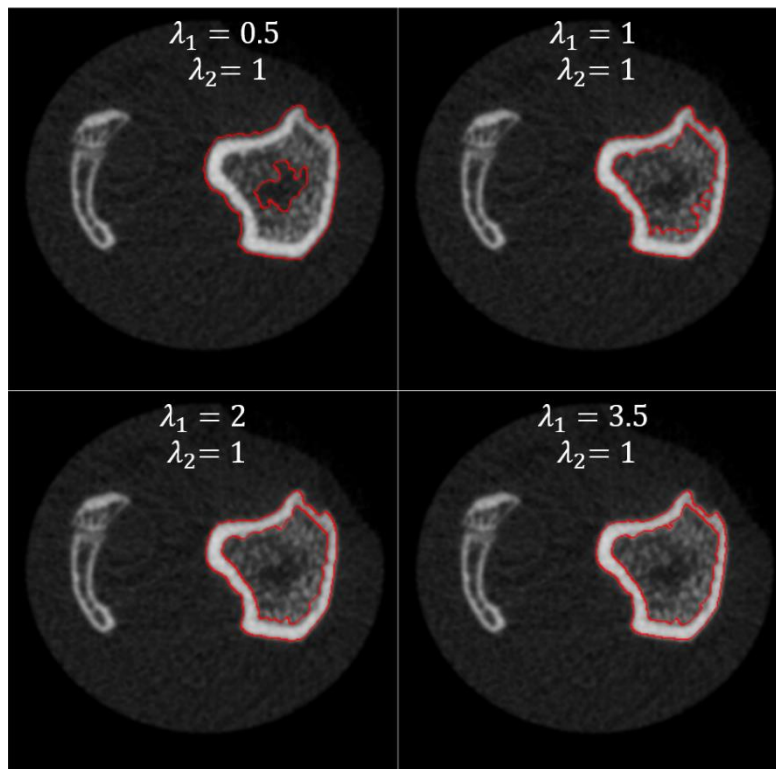
$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \Delta t \cdot \delta(\phi_{i,j}^n) [\mu \cdot K_{i,j}^n - v - \lambda_1 (u_0(i, j) - c_1^n)^2 + \lambda_2 (u_0(i, j) - c_2^n)^2] \quad 3-38$$

#### 3.3.4 Erklärung der Parameter und Pseudocode

Vor der Initialisierung der Level-Set Funktion müssen die Parameter  $\Delta t$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  eingegeben werden. Das Zeitintervall  $\Delta t$  kann daher als Schrittweite verstanden werden. Bei einer großen Schrittweite verformt sich die Level-Set Oberfläche schnell. Dies führt aber dazu, dass Details des gesuchten Objekts ignoriert werden können. Wenn die Kurve sich nach einigen Iterationen immer noch nicht verformt, kann man versuchen die Schrittweite zu vergrößern. Die Krümmung  $K_{i,j}^n$  wird durch den Parameter  $\mu$  gewichtet, der die Kontraktionskraft kontrolliert. Bei einem großen Wert

### 3.3 Numerische Lösung der Chan-Vese Methode

von  $\mu$  verringert sich die Sensitivität der Kurve gegenüber Rauschen. Wie die im Kapitel 2.2.3 erwähnte Gleichung (2-64) zeigt, wird die Fläche in der geschlossenen Kurve mit dem Parameter  $v$  gewichtet. Das heißt, der Parameter  $v$  kontrolliert den Einfluss der Fläche in der Kurve auf die Verformungsgeschwindigkeit. Ähnlich wie der Parameter  $\mu$  verringert sich die Sensitivität der Kurve gegenüber Rauschen bei einem großen Wert von  $v$ . Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beeinflussen die Homogenität des Innenbereiches und des Außenbereiches. Bei einem kleinen Wert von  $\lambda_1$  oder einem großen Wert von  $\lambda_2$  besitzt der Innenbereich der Kurve eine niedrige Homogenität. Die nachfolgende Abbildung (3-18) zeigt den Einfluss der Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  auf die Konturen.



**Abbildung 3-18:** Segmentierungsergebnisse unter dem Einfluss von  $\lambda_1$

Der Pseudocode sieht wie folgend aus:

**Start**

*Eingabe:* die Startkontur, die Parameter  $\Delta t$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und Anzahl der Iterationen  $n$

*Initialisierung der Level-Set Oberfläche*  $\phi(i, j)$

*for*  $k = 0 : n$

*Berechnung der Dirac-*  $\delta(i, j)$  *und Heaviside-Funktion*  $H(i, j)$

*Berechnung der Matrizen*  $D^{-x}, D^{-y}, D^{+x}, D^{+y}, D^{0x}, D^{0y}$  *und*  $K(i, j)$

*Berechnung*  $c_1$  *und*  $c_2$

*for*  $i = 0 : \text{Breite des Bilds}$

*for*  $j = 0 : \text{Länge des Bilds}$

$$\phi(i, j) = \phi(i, j) + \Delta t \cdot \delta(i, j) [\mu \cdot K(i, j) - v - \lambda_1 (u_0(i, j) - c_1)^2 + \lambda_2 (u_0(i, j) -$$



```
 $c_2)^2]$   
    end for  
end for  
Ausgabe: die Nullstelle der Level-Set Funktion  
If keine Veränderung der Level-Set Funktion  
    Break  
end if  
end for  
end
```

## 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

Die morphologische Snakes, welche basierend auf den morphologischen Operatoren im Jahr 2010 von Álvarez L, Baumela L, et al. [32] entwickelt wurden, zielen darauf ab, eine schnelle, einfache und stabile Annäherung an die Level-Set Funktion zu liefern. Bei den morphologischen Snakes wird die Level-Set Oberfläche als eine Heaviside-Funktion definiert. Jeder Punkt auf der Level-Set Oberfläche besitzt entweder den Wert 0 oder den Wert 1. Unter der Level-Set Oberfläche versteht man ein Binärbild, welches die Verwendung von morphologischen Operatoren ermöglicht. Die Konturen werden als die Grenze von 0 und 1 definiert.

### 3.4.1 Morphologische Operatoren

In der Bildverarbeitung spielen Morphologische Operatoren eine wichtige Rolle. Sie werden zur Beschreibung, zur Analyse oder zur Veränderung der Strukturen von Binärbildern und Grauwertbildern verwendet. Zwei morphologische Basisoperatoren sind die Erosion und die Dilatation. Aus der Kombination dieser Basisoperatoren ergeben sich die Opening- und Closing-Operator. Die Funktion aller morphologischen Operatoren basiert auf einem Strukturelement  $B \subset \mathbb{R}^2$ . Das Strukturelement ist eine zweidimensionale Matrix. Der sich in der Mitte der Matrix befindende Punkt ist der Bezugspunkt und wird durch das Zeichen  $\otimes$  gekennzeichnet. Die nachfolgenden Matrizen zeigen die oft genutzten Strukturelemente.

Vierer-Nachbarschaft: 
$$B = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & \otimes & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

Achter-Nachbarschaft: 
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \otimes & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bei der Grauwertbildverarbeitung funktionieren die Erosion und die Dilation mit einem

### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

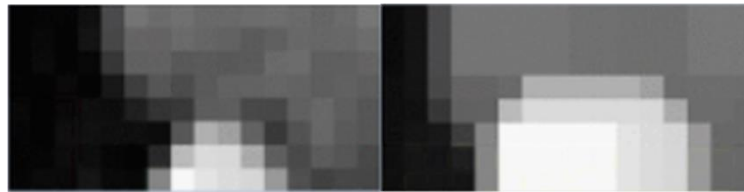
Strukturelement ähnlich einem Minimum- und Maximum-Filter. Jeder zu untersuchende Bezugspunkt auf dem Bild  $u$  wird mit allen seinen Nachbarschaften verglichen und als das Maximum oder Minimum definiert. Bei der Erosion werden die dunklen Regionen verkleinert und die helleren vergrößert. Bei der Dilation werden die dunklen Regionen vergrößert und die helleren verkleinert. Die zwei Basisoperatoren lassen sich wie folgt definieren.

$$\text{Dilation: } (D_h u)(x) = u \oplus X = \sup_{y \in hB} u(x - y) \quad 3-39$$

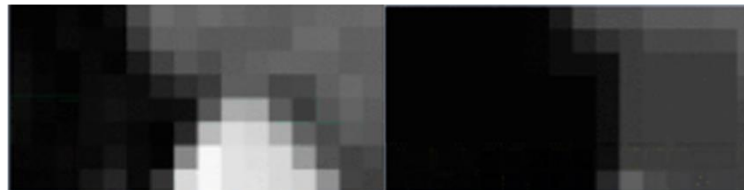
$$\text{Erosion: } (E_h u)(x) = u \ominus X = \inf_{y \in hB} u(x - y) \quad 3-40$$

Hierbei ist der Parameter  $h$  der Radius des Operators und  $B$  das Strukturelement. Die nachfolgende Abbildung (3-19) zeigt die Ergebnisse der Erosion und der Dilation unter der Verwendung eines  $5 \times 5$  Strukturelements.

Erosion



Dilation



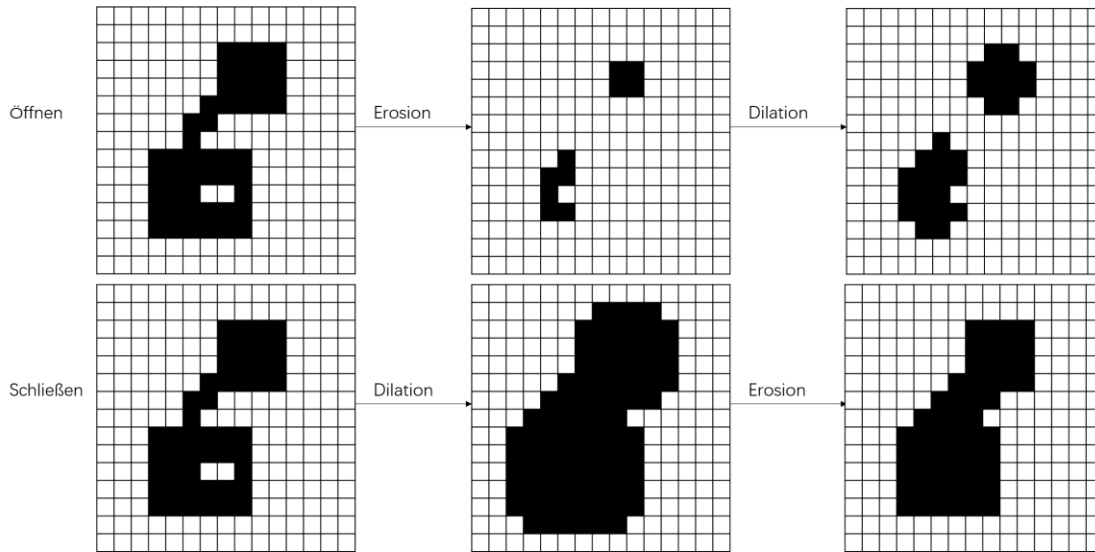
**Abbildung 3-19:** Basisoperatoren Erosion und Dilation

Aus der Kombination der morphologischen Basisoperatoren ergeben sich zwei weitere Operatoren Öffnen und Schließen. Das Öffnen wird durch zwei Schritten realisiert: Erosion vom Bild  $u$  mit dem Strukturelement  $B$ , danach Dilation des Ergebnisses der Erosion mit dem gleichen Strukturelement  $B$ . Ebenso wird das Schließen als Dilation vom Bild  $u$  mit dem Strukturelement  $B$ , danach Erosion des Ergebnisses der Dilation mit dem Strukturelement  $B$ . Das Öffnen und das Schließen sind definiert als:

$$\text{Öffnen: } (u \ominus X) \oplus X \quad 3-41$$

$$\text{Schließen: } (u \oplus X) \ominus X \quad 3-42$$

Das Öffnen entfernt kleine Objekte aus dem Vordergrund des Bildes und platziert sie im Hintergrund. Das Schließen entfernt kleine Löcher im Vordergrund und verändert kleine Inseln im Hintergrund in den Vordergrund. Beide Operatoren können das Objekt glätten. Die nachfolgende Abbildung (3-20) zeigt die Vorgehensweise von Öffnen und Schließen:



**Abbildung 3-20:** Vorgehensweise von Öffnen und Schließen

### 3.4.2 Annäherung der Level-Set Funktion

In diesem Kapitel werden die partiellen Differentialgleichungen von Geodesic Active Contour und Mumford-Shah Funktion durch die Verwendung von morphologischen Operatoren gelöst. Die partielle Differentialgleichung von Geodesic Active Contour lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(I)|\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + g(I)|\nabla u|v + \nabla g(I) \nabla u \quad 3-43$$

Die rechte Seite der Gleichung kann von links nach rechts in drei Teile aufgeteilt werden: Glätten-Term  $g(I)|\nabla u| \operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$ , Balloon-Term  $g(I)|\nabla u|v$  und Attraktion-Term  $\nabla g(I) \nabla u$ . Alle diese Terme lassen sich durch morphologische Operatoren annähern und die Lösung der partiellen Differentialgleichung wird durch die Kombination von morphologischen Operatoren realisiert.

Um die lokale Konvergenz zu vermeiden wird die Nullstelle der Level-Set Funktion als eine binäre stückweise konstante Funktion definiert:

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{0,1\} \quad 3-44$$

Jeder Punkt  $P$  innerhalb der Kurve besitzt den Wert 1, bzw.  $u(p) = 1$  und  $u(p) = 0$  für jeden Punkt außerhalb der Kurve. Die morphologischen Operatoren werden auf die Level-Set Oberfläche  $u$  einwirken und die Kurve implizit verändern.

Die Level-Set Funktion  $u(t+h, x)$  wird als  $D_h u(t, x)$  definiert. Aus dem Verhalten der Basisoperatoren kann man davon ausgehen, dass  $D_h u(t, x)$  die Lösung der nachfolgenden partiellen Differentialgleichung ist.

### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = |\nabla u(t, x)| \quad 3-45$$

Auf Grund der Finite-Differenzen-Methode kann man das überprüfen.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t + h, x) - u(t, x)}{h} = |\nabla u(t, x)| \quad 3-46$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{D_h u(t, x) - u(t, x)}{h} = |\nabla u(t, x)| \quad 3-47$$

Ähnliches gilt für die Erosion.  $u(t + h, x) = E_h u(t, x)$  ist die Lösung der nachfolgenden partiellen Differentialgleichung.

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = -|\nabla u(t, x)| \quad 3-48$$

Im Balloon-Term kontrolliert der Faktor  $g(I)$  die Stärke der Balloonkraft auf dem Kurvensegment. Bei einem großen Wert von  $g(I)$  befindet sich dieses Kurvensegment entfernt von dem gesuchten Objekt und die Balloonkraft besitzt auf diesem Kurvensegment einen großen Beitrag. Andererseits, wenn das Kurvensegment sich nahe zum gesuchten Objekt befindet, wird die Balloonkraft einen kleinen Einfluss auf dem Kurvensegment haben. Bei der Segmentierung wird die partielle Differenzgleichung diskretisiert und dann gelöst. Der Bewegungsabstand jedes Kurvensegmentes ist unabhängig von der Größe von  $g(I)$  und konstant gleich eins. Deswegen kann die Einwirkung des Faktors  $g(I)$  durch einen Schwellwert  $\theta$  diskretisiert werden. Wenn  $g(I)$  größer als  $\theta$  ist, verformt sich die Kontur basierend auf der Balloonkraft. Der Balloon-Term kann durch die folgenden morphologischen Operatoren approximiert werden.

$$u^{n+1}(x_i) = \begin{cases} D_h u(x_i) & \text{if } g(I)(x_i) > \theta \text{ und } v > 0 \\ E_h u(x_i) & \text{if } g(I)(x_i) > \theta \text{ und } v < 0 \\ u^n(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-49$$

Zur Annäherung des Glätten-Terms wurde das Catta-Dibos-Koepfler-Schema [33] 1995 von Catté F, Dibos F et al. entwickelt. Ähnlich dem morphologischen Operatoren Opening und Schießen wurden zwei neue Operatoren folgendermaßen definiert.

$$(IS_h u)(x) = \inf_{B \in \mathcal{B}} \sup_{y \in x+hB} u(y) \quad 3-50$$

$$(SI_h u)(x) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \inf_{y \in x+hB} u(y) \quad 3-51$$

wobei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Liniensegmente mit der Länge 2, die am Ursprung von  $\mathbb{R}^2$  zentriert sind, ist. Die Menge von vier diskreditierten Segmenten, die sich am Ursprung

### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

befinden, lautet:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} \{(0,0), (1,0), (-1,0)\}, \\ \{(0,0), (0,1), (0,-1)\}, \\ \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}, \\ \{(0,0), (1,-1), (-1,1)\}, \end{array} \right\} \quad 3-52$$

Der mittlere Operator lautet:

$$(F_h u)(x) = \frac{(IS_h u)(x) + (SI_h u)(x)}{2} \quad 3-53$$

Hierbei ist der Operator  $(F_h u)(x)$  kein morphologischer Operator. Nach dem Catta-Dibos-Koepfler-Schema hat der mittlere Operator  $(F_h u)(x)$  eine wichtige Eigenschaft:

$$(F_h u)(x) = u(x) + h^2 \frac{1}{4} |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) (x) + O(h^3) \quad 3-54$$

Bei einem kleinen Beitrag von  $h$  wird die Gleichung (3-55) folgendermaßen ausgedrückt:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(F_{\sqrt{4h}} u)(x) - u(x)}{h} = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) (x) \quad 3-55$$

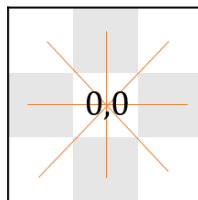
Auf Grund dem Beweis, welcher im Jahr 2010 von Álvarez L, Baumela L, Henríquez P, et al. entwickelt wurde, lässt sich der mittlere Operator bei einem kleinen Beitrag von  $h$  durch die Kombination von morphologischen Operatoren  $IS_h u$  und  $SI_h u$  approximieren.

$$IS_{h/2} \circ SI_{h/2} u \approx \frac{IS_h u + SI_h u}{2} \quad 3-56$$

$$F_{\sqrt{4h}} = IS_{\sqrt{h}} \circ SI_{\sqrt{h}} \quad 3-57$$

Dabei kann  $IS_{h/2} \circ SI_{h/2} u$  als  $(IS_{h/2} t)(x)$  und  $t(x) = (SI_{h/2} u)(x)$  definiert werden.

Die Operatoren  $IS_h u$  und  $SI_h u$  basieren auf einem  $3 \times 3$  Filter, der folgendermaßen ausgedrückt wird. Am Mittelpunkt des Filters befindet sich vier Liniensegmente (siehe Abb. 3-21), die in der Menge  $\mathcal{B}$  beschrieben werden.



**Abbildung 3-21:** vier Liniensegmente im Filter

Beim Operator  $IS_h u$  ist der Bezugspunkt gleich Eins, wenn es ein Liniensegment in der Menge  $\mathcal{B}$  gibt, auf jedem Punkt des Liniensegmentes der Beitrag der Level-Set Funktion gleich eins ist, sonst gleich Null. Beim Operator  $SI_h u$  ist der Bezugspunkt gleich Null, wenn es ein Liniensegment in der Menge  $\mathcal{B}$  gibt, auf jedem Punkt des Liniensegmentes der Beitrag der Level-Set Funktion gleich Null ist, sonst gleich eins. Die Pseudocode sieht wie folgt aus:

$IS_h()$

```

if (( $u[i - 1, j - 1] == 1 \ \&\& \ u[i, j] == 1 \ \&\& \ u[i + 1, j + 1] == 1$ ) ||
    ( $u[i, j - 1] == 1 \ \&\& \ u[i, j] == 1 \ \&\& \ u[i, j + 1] == 1$ ) ||
    ( $u[i - 1, j + 1] == 1 \ \&\& \ u[i, j] == 1 \ \&\& \ u[i + 1, j - 1] == 1$ ) ||
    ( $u[i - 1, j] == 1 \ \&\& \ u[i, j] == 1 \ \&\& \ u[i + 1, j] == 1$ ))
{
     $u[i, j] = 1$ ;
}
else
{
     $u[i, j] = 0$ ;
}

```

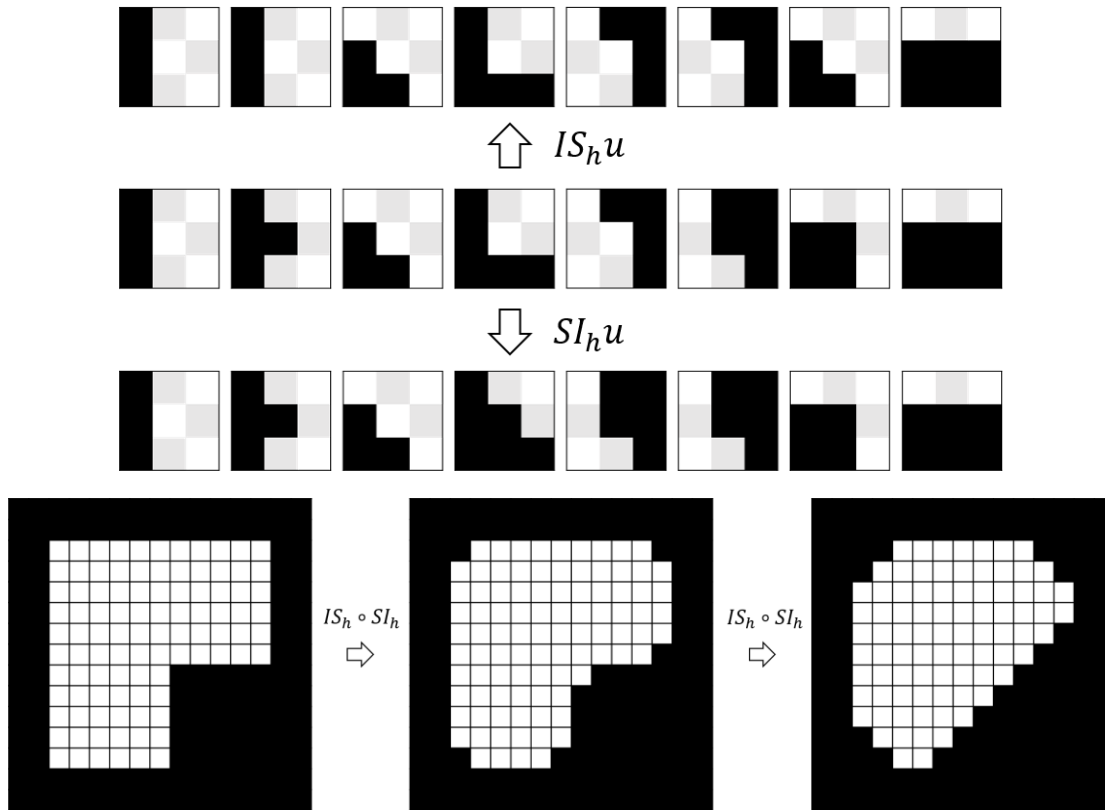
$SI_h()$

```

if (( $u[i - 1, j - 1] == 0 \ \&\& \ u[i, j] == 0 \ \&\& \ u[i + 1, j + 1] == 0$ ) ||
    ( $u[i, j - 1] == 0 \ \&\& \ u[i, j] == 0 \ \&\& \ u[i, j + 1] == 0$ ) ||
    ( $u[i - 1, j + 1] == 0 \ \&\& \ u[i, j] == 0 \ \&\& \ u[i + 1, j - 1] == 0$ ) ||
    ( $u[i - 1, j] == 0 \ \&\& \ u[i, j] == 0 \ \&\& \ u[i + 1, j] == 0$ ))
{
     $u[i, j] = 0$ ;
}
else
{
     $u[i, j] = 1$ ;
}

```

Dabei kann man davon ausgehen, dass der Operator  $SI_h u$  nur auf weißen Pixeln und  $IS_h u$  nur auf schwarzen Pixeln funktioniert. Die nachfolgende Abbildung (3-22) zeigt die Vorgehensweise von  $IS_h u$ ,  $SI_h u$  und  $IS_h \circ SI_h$ :



**Abbildung 3-22:** Vorgehensweise von morphologischen Operatoren  $IS_h u$ ,  $SI_h u$  und  $IS_h \circ SI_h$

Ähnlich dem Balloon-Term kontrolliert der Faktor  $g(I)$  die Stärke der Glättung auf dem Kurvensegment. Bei einem großen Wert von  $g(I)$  befindet sich dieses Kurvensegment entfernt von dem gesuchten Objekt und unter der Einwirkung des Glätten-Term verformt sich die Kurve wie eine Membran. Der Glätten-Term lässt sich durch einen Schwellwert  $\theta$  diskretisieren und durch den morphologischen Operator  $IS_h \circ SI_h$  wie folgt approximieren:

$$u^{n+1}(x_i) = \begin{cases} (IS_h \circ SI_h u^n)(x_i) & \text{if } g(I)(x_i) > \theta \\ u^n(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-58$$

Der Attraktion-Term funktioniert nur, wenn die Kurve sich in der Nähe der Kontur des gesuchten Objektes befindet, und er zieht die Kurve zur Kante des Objektes. Bei einem negativen Beitrag von  $\nabla g(I)$  liegt die Kurve außerhalb des Objektes und die Level-set Funktion  $u(x_i)$  auf dem entsprechenden Bildpunkt  $x_i$  wird auf den Wert „0“ gesetzt. Ebenso, wenn  $\nabla g(I)$  positiv ist, wird der Level-Set Funktion auf dem Wert „1“ gesetzt. Deshalb kann der Attraktion-Term durch die nachfolgende Gleichung approximiert werden:

$$u^{n+1}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \nabla g(I)(x_i) \nabla u^n(x_i) > 0 \\ 0 & \text{if } \nabla g(I)(x_i) \nabla u^n(x_i) < 0 \\ u^n(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-59$$

### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

Die partielle Differentialgleichung von Geodesic Active Contour ist die Addition von allen drei Termen und kann durch die Kombination der Näherungsgleichungen gelöst werden [32]. Bei jeder Iteration funktionieren alle drei Terme schrittweise auf der Level-Set Funktion. Die Level-Set Funktion wird nach n-Iterationen als  $u^n$  ausgedrückt.  $u^{n+1}$  wird folgendermaßen definiert:

$$u^{n+\frac{1}{3}}(x_i) = \begin{cases} D_h u(x_i) & \text{if } g(I)(x_i) > \theta \text{ und } v > 0 \\ E_h u(x_i) & \text{if } g(I)(x_i) > \theta \text{ und } v < 0 \\ u^n(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-60$$

$$u^{n+\frac{2}{3}}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \nabla g(I)(x_i) \nabla u^{n+\frac{1}{3}}(x_i) > 0 \\ 0 & \text{if } \nabla g(I)(x_i) \nabla u^{n+\frac{1}{3}}(x_i) < 0 \\ u^{n+\frac{1}{3}}(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-61$$

$$u^{n+1}(x_i) = \begin{cases} (IS_h \circ SI_h u^{n+\frac{2}{3}})(x_i) & \text{if } g(I)(x_i) > \theta \\ u^{n+\frac{2}{3}}(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-62$$

Die Reihenfolge der Näherungsgleichungen hat nur einen schwachen Einfluss auf die Segmentierung.

Ähnlich dem Geodesic Active Contour lässt sich die Mumford-Shah Funktion durch die Verwendung von  $IS_h$  und  $SI_h$  approximieren. Die partielle Differentialgleichung von Mumford-Shah Funktion lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \left( \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - v - \lambda_1 (I - c_1)^2 + \lambda_2 (I - c_2)^2 \right) \quad 3-63$$

Die rechte Seite der Gleichung kann von links nach rechts in drei Teile aufgeteilt werden: Glätten-Term  $\mu |\nabla u| \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|)$ , Balloon-Term  $v |\nabla u|$  und Attraktion-Term  $|\nabla u| (\lambda_1 (I - c_1)^2 - \lambda_2 (I - c_2)^2)$ . Mittels der Annäherungsgleichungen (3-59) und (3-60) kann die Mumford-Shah Funktion wie folgt gelöst werden:

$$u^{n+\frac{1}{3}}(x_i) = \begin{cases} D_h u(x_i) & \text{if } v < 0 \\ E_h u(x_i) & \text{if } v > 0 \end{cases} \quad 3-64$$

$$u^{n+\frac{2}{3}}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } (\lambda_1 (I - c_1)^2 - \lambda_2 (I - c_2)^2) \nabla u^{n+\frac{1}{3}} > 0 \\ 1 & \text{if } (\lambda_1 (I - c_1)^2 - \lambda_2 (I - c_2)^2) \nabla u^{n+\frac{1}{3}} < 0 \\ u^{n+\frac{1}{3}}(x_i) & \text{else} \end{cases} \quad 3-65$$

$$u^{n+1}(x_i) = (IS_h \circ SI_h u^{n+\frac{2}{3}})(x_i) \quad 3-66$$

#### 3.4.3 Erklärung der Parameter und des Attraktion-Terms

Bei einer großen Anzahl der Parameter wird die Arbeitsbelastung des Anwenders



### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

erheblich erhöht und die Genauigkeit der Segmentierung verringert. Deshalb wird es in diesem Kapitel versucht die Anzahl der Parameter zu verringern. Im Vergleich zur Geodesic Active Contour hat die Mumford-Shah Funktion eine größere Anzahl der Parameter. Deswegen wird die Kurve der Mumford-Shah Funktion einfacher vom Anwender kontrolliert. In diesem Kapitel werden die Parameter der Mumford-Shah Funktion diskutiert.

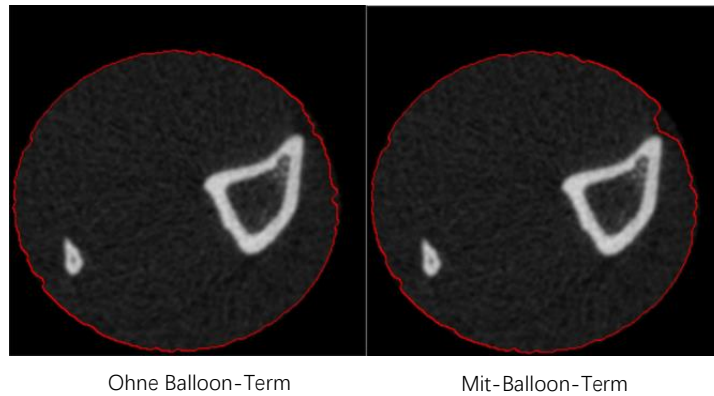
Der Glätten-Term, der Balloon-Term und der Attraktion-Term in der Mumford-Shah Funktion werden mit den Parametern  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gewichtet. Von der Gleichung (3-64) ausgehend sieht man, dass die Funktion des Glätten-Terms bei der morphologischen Annäherung nicht auf die Größe von  $\mu$  angewiesen ist. Deswegen kann der Parameter  $\mu$  auf einem konstanten Wert „1“ gesetzt werden.

Auf Jedem Punkt der Kurve wird der Wert des Attraktion-Terms berechnet. Mittels des Ergebnisses der Berechnung wird entschieden, zu welchen Regionen (innerhalb oder außerhalb der Kurve) der entsprechende Punkt gehört. Die Verformung der Kurve ist unabhängig von der Größe des Attraktion-Terms. Das einzige Kriterium ist das Vorzeichen des Attraktion-Terms. Dazu kann der Attraktion-Term wie folgt ausgedrückt werden:

$$(I - c_1)^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (I - c_2)^2 \quad 3-67$$

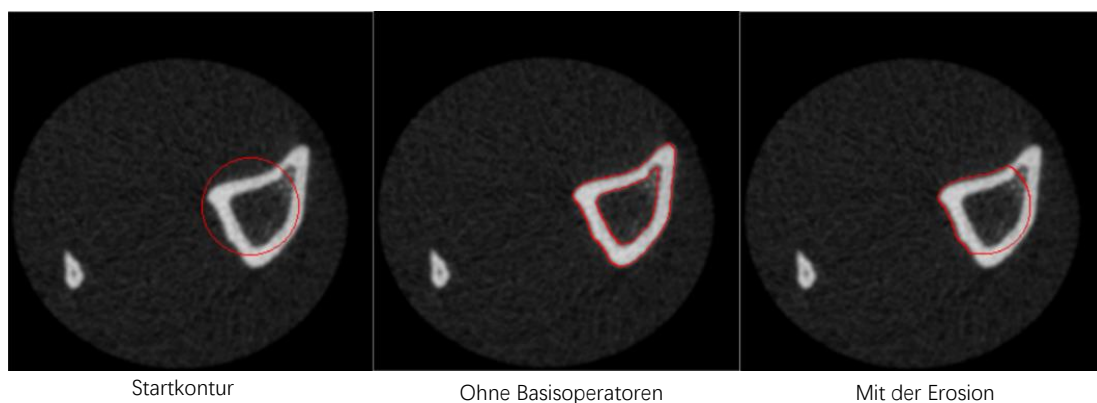
Dabei kann man davon ausgehen, dass das Vorzeichen des Attraktion-Terms nur auf das Verhältnis von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  angewiesen ist. Zur Vereinfachung des Attraktion-Terms lässt sich der Parameter  $\lambda_1$  auf einem konstanten Wert „1“ setzen.

Der Balloon-Term bietet eine zusätzliche konstante Kraft, die die Kurve nach innen oder außen zieht. Dadurch verformt die Kurve sich wie ein Ballon. Bei den morphologischen Snakes funktioniert der Balloon-Term nur, wenn sich die Kontur weit weg von dem gesuchten Objekt befindet. Dabei wird nur die Verformungsgeschwindigkeit erhöht. Bei den morphologischen Snakes kann die Kurve nicht in einem lokalen Minimum konvergieren, da die Verformung der Kurve auf allen Bildpunkten basiert. Das Ende der Verformung ist nur auf den Attraktion-Term angewiesen. Die nachfolgende Abbildung (3-23) zeigt, dass die Kurve bei einem ungeeigneten Parameter  $\lambda_2$  nicht vom Balloon-Term nach innen gezogen werden kann.



**Abbildung 3-23:** Einfluss des Balloon-Terms auf den Ergebnissen bei ungeeigneten  $\lambda_2$

Deshalb sind die morphologischen Operationen Erosion und Dilation bei Segmentierung von Objekten, welche eine deutliche Kontur haben, nicht notwendig. Außerdem wird die Kurve durch die Verwendung der Erosion und Dilation nur nach innen oder außen gezogen, da der Anwendungsbereich des morphologischen Operators gleich mit dem von  $\nabla u$  ist. Die Abbildung (3-24) zeigt die Einschränkung des Basisoperators für die Verformung der Kurve mit dem gleichen Parameter  $\lambda_2$ .

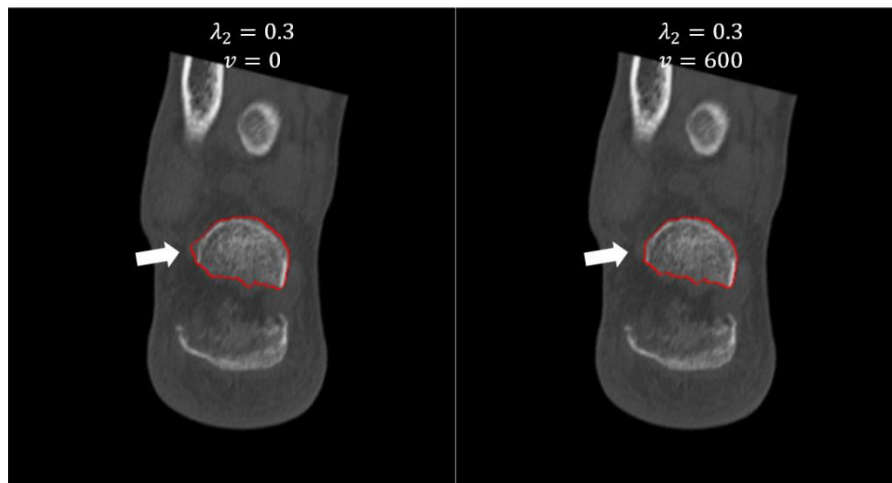


**Abbildung 3-24:** Einfluss von Basisoperatoren auf die Segmentierung

Dafür liegt eine mögliche Lösung darin, dass die Attraktion-Term wie folgt definiert wird:

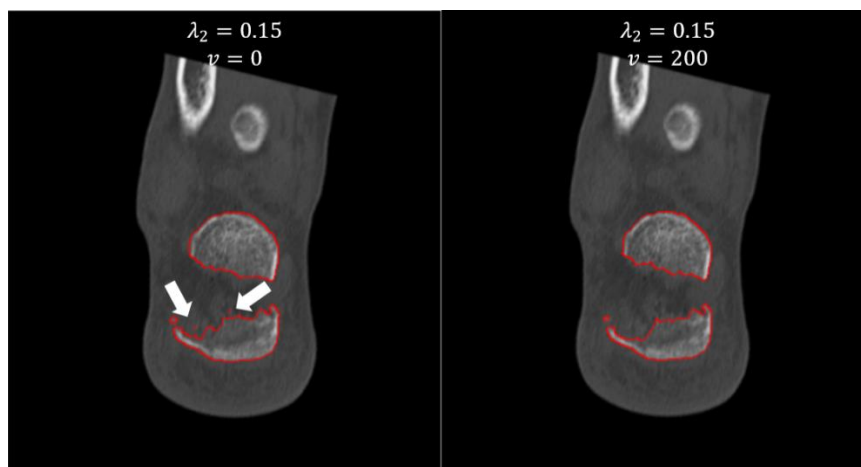
$$(I - c_1)^2 - \lambda_2(I - c_2)^2 + v \quad 3-68$$

In der Gleichung (3-69) liefert der Parameter  $v$  eine vom Verwender kontrollierbare Kraft, die bei einem positiven Beitrag von  $v$  die Kurve nach innen zieht. Obwohl die Ballonkraft bei der Segmentierung des Bildes mit hohem Kontrast keine wichtige Rolle spielt, kann sie bei der Segmentierung des Bildes mit geringem Kontrast einen positiven Effekt bringen. Die nachfolgende Abbildung (3-25) zeigt den Einfluss des Parameters  $v$  auf die Kurve. Bei  $\lambda_2 = 0.3, v = 0$  klebt die Kurve nicht eng genug auf der Kontur des Objektes. Bei  $\lambda_2 = 0.3, v = 600$  zieht die Ballonkraft die Kurve nach innen und die Kurve klebt eng auf der Kontur des Objektes.



**Abbildung 3-25:** Einfluss des Parameters  $v$  auf die Kurve

darüber hinaus kann auch die Ballonkraft bei der Segmentierung des Bildes mit geringen Kontrast isolierte Inseln entfernen. Die nachfolgende Abbildung (3-26) zeigt die Segmentierungsergebnisse bei  $v = 0$  und  $v = 200$ :



**Abbildung 3-26:** Entfernung von isolierten Inseln durch die Ballonkraft

Durch die Berechnung des Attraktion-Term wird entschieden, ob ein Bildpunkt zum Innern oder Außen der Kurve gehört. Um geeignete Parameter  $\lambda_2$  und  $v$  einzugeben, wird die Funktionsweise des Attraktion-Terms bei der Segmentierung schrittweise erklärt.

Die Abbildung (3-27-a) zeigt die Position der Startkontur. Die Intensitäten auf den Punkten und die durchschnittlichen Intensitäten des Innenbereiches und Außenbereiches sind  $P_A = 202$ ,  $P_B = 32$ ,  $P_C = 63$ ,  $c_1 = 57,23$  und  $c_2 = 25,7$ . Der Parameter  $\lambda_2$  wird auf den Wert „1“ und  $v$  auf „0“ eingestellt. Von der Gleichung (3-66) ausgehend sieht man, dass bei  $I < 41,47$  der Bildpunkt  $P$  zum Außenbereich der

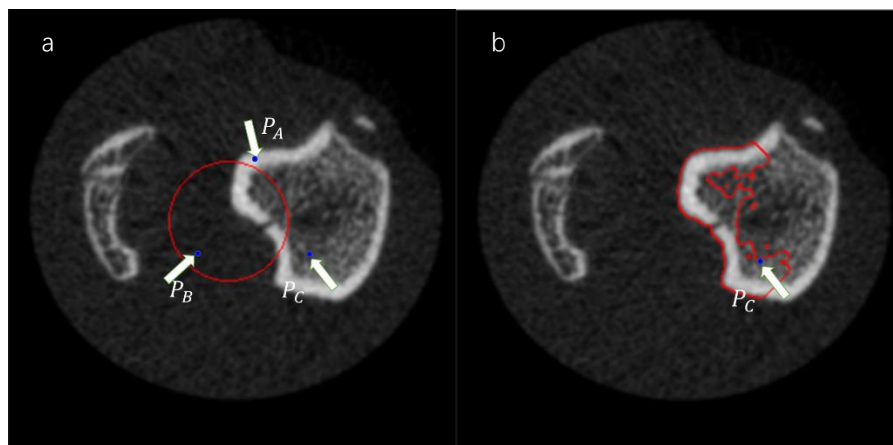
### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

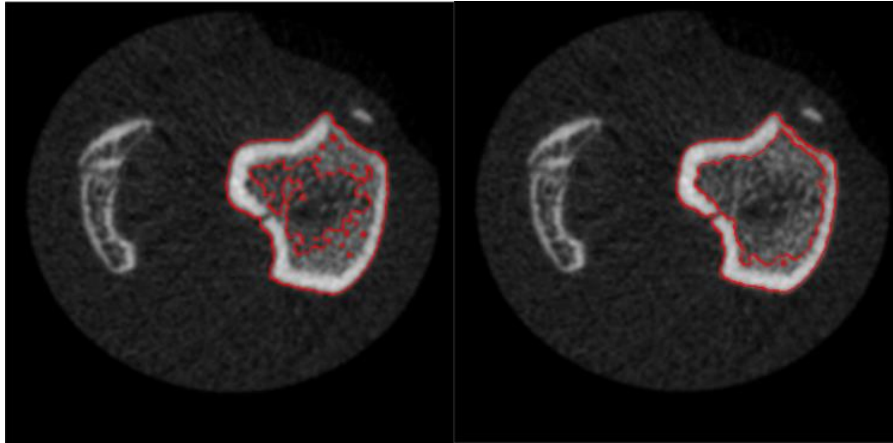
Kurve und bei  $I > 41,47$  zum Innenbereich gehört. D.h. die Kurve wird mehrere helle Bildpunkte umfassen.

Die Abbildung (3-27-b) zeigt die Form der Kurve nach 50-Iterationen. Während sich die durchschnittlichen Intensitäten des Innenbereiches  $c_1$  von 57,23 auf 127,96 erhöhen, bleibt  $c_1$  fast unverändert mit dem Wert „23,52“. Die Grenze erhöht sich von 41,47 auf 75,74. Dabei gehört der Punkt  $P_C$  nicht mehr zum Innenbereich der Kurve.

Die Abbildung (3-27-c) zeigt die Form der Kurve nach 140-Iterationen. Die Verformung wird gestoppt. Wie aus Abbildung ((3-27-c) zu sehen ist, ist die Kontur innerhalb des Knochens doch undeutlich.  $c_1 = 124,04$  und  $c_2 = 22,26$  bleiben fast unverändert. In diesem Fall soll man den Parameter  $\lambda_2$  verringern, um eine deutliche Kontur innerhalb des Knochens zu bekommen. Bei einem geringen Wert von  $\lambda_2$  erhöht sich die Grenze und verringert sich die Fläche des Innenbereiches. Bei  $\lambda_2 = 0,7$  erhöht sich die Grenze auf 77,68 und bei  $\lambda_2 = 0,5$  auf 81,88. Die Balance der Gleichung (3-64) wird gestört und die Kurve wird sich weiter verformen.

Wie Aus Abbildung (3-27-d) zu sehen ist, wird die Kontur des gesuchten Objektes detektiert. Die Kurve verformt sich zuerst bei  $\lambda_2 = 0,2$  und danach bei  $\lambda_2 = 0,58$ . Dabei erhöht sich die Grenze auf 94,48,  $c_1$  auf 150,5 und  $c_2$  bleibt fast unverändert mit dem Wert von 22,2.





**Abbildung 3-27:** Funktionsweise des Attraktion-Terms

Wie die Abbildung (3-28-a) unten zeigt, ist es schwierig bei der Segmentierung eines Bildes, dessen Kontrast zwischen dem Objekt und dem Hintergrund geringer ist, geeignete Parameter zu wählen. Das Objekt befindet sich innerhalb der Startkontur. Durch Veränderung der Parameter wird die Kontur des Fußknochens detektiert.

Bei  $\lambda_2 = 1$  wird die Kontur des Fußes nach 140-Iterationen detektiert, wie die Abbildung (3-28-b) zeigt. Die Intensitäten von vier Bildpunkten haben die folgenden Werte:  $P_A = 75, P_B = 118, P_C = 56, P_D = 190$ . Wenn man den Parameter von 1 auf 0.1 verringert, ergibt sich bei  $c_1 = 84,8$  und  $c_2 = 0.36$  aus Gleichung (3-66) das nachfolgende Ergebnis: Wenn die Intensität eines Bildpunktes in dem Intervall  $f$  zwischen 123,8 und 64,5 liegt, gehört der Punkt zum Innerbereich der Kurve. Um das Intervall zu vergrößern, kann man den Parameter  $v$  verringern.

Bei der Segmentierung muss man den Parameter  $\lambda_2$  im Intervall zwischen 0.03 und 0.3 langsam einstellen, um die untere Grenze größer als 100 bleiben, sonst wird die Kurve die Kontur der Knochen überqueren. Nach 80-Iterationen sieht das Ergebnis wie in der nachfolgenden Abbildung (3-28-c) aus. Dabei ist das Intervall (82, 189). Die durchschnittlichen Intensitäten haben die Werte:  $c_1 = 111,21$  und  $c_2 = 19,97$ . Im Vergleich zu der durchschnittlichen Intensität des ganzen Fußes (85,28) ist der Wert von  $c_2$  zu klein. Aus der Gleichung (3-66) ergibt sich die Länge des Intervalls  $(m, n)$ :

$$m - n = \frac{2\sqrt{(c_1 - \lambda_2 c_2)^2 - (1 - \lambda_2)(c_1^2 - \lambda_2 c_2^2 + v)}}{(1 - \lambda_2)} \quad 3-69$$

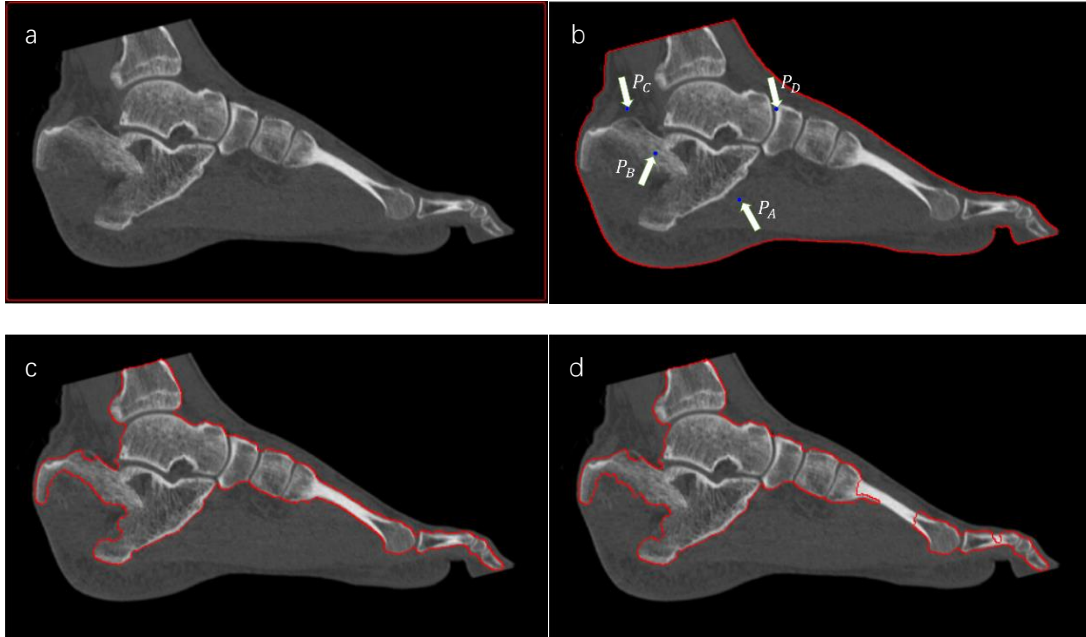
Dabei kann man davon ausgehen, dass sich bei einem kleinen Wert von  $c_2$  die Länge des Intervalls verringert. Das führt dazu, dass die Kurve die hellen Bildpunkte (Knochen) überqueren wird, wie die Abbildung (3-28-d) zeigt. Die Ursache liegt darin, dass bei der Berechnung die durchschnittliche Intensität des Außenbereiches von dem schwarzen Hintergrund verdünnt wird. Deswegen lassen sich die durchschnittlichen Intensitäten  $c_1$  und  $c_2$  folgendermaßen umdefinieren:

### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

$$P(I) = \begin{cases} 0 & \text{if } I(i,j) = 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases} \quad 3-70$$

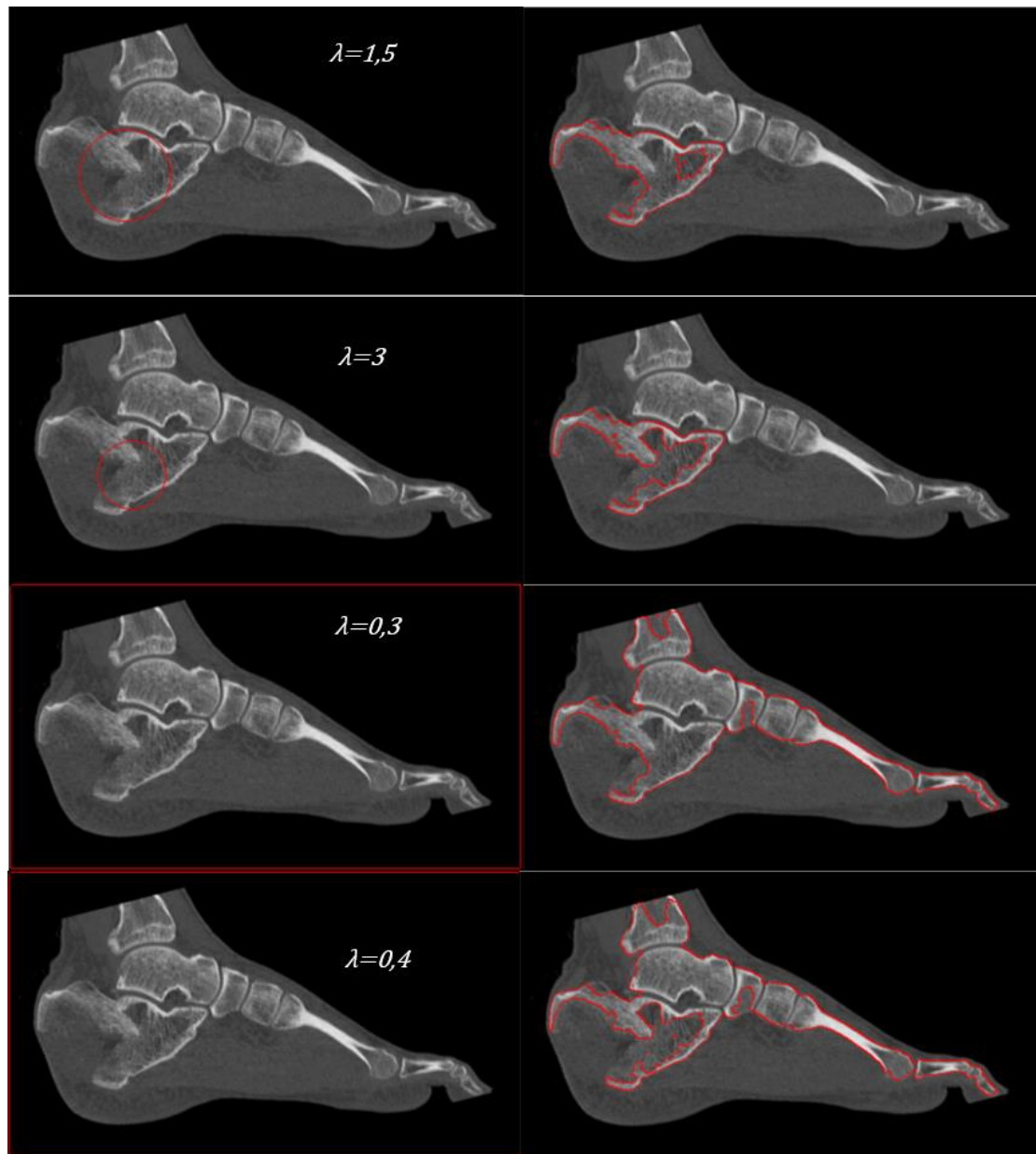
$$c_1^n = \frac{\sum_i \sum_j u_0(i,j) H(\phi_{i,j}^n)}{\sum_i \sum_j H(\phi_{i,j}^n) P(I)} \quad 3-71$$

$$c_2^n = \frac{\sum_i \sum_j u_0(i,j) (1 - H(\phi_{i,j}^n))}{\sum_i \sum_j (1 - H(\phi_{i,j}^n)) P(I)} \quad 3-72$$



**Abbildung 3-28:** Verformung der Kurve bei verschiedenen Parametern

Mittels der neu definierten  $c_1$  und  $c_2$  zeigt die nachfolgende Abbildung (3-29) die Ergebnisse bei automatischer Segmentierung.



**Abbildung 3-29:** Ergebnisse der automatischen Segmentierung mit den neu definierten  $c_1$  und  $c_2$  bei verschiedenen Parametern

Das folgende Ablaufdiagramm zeigt schematisch die Vorgehensweise der morphologischen Snakes (siehe Abbildung 3-30).

### 3.4 Numerische Lösung der morphologischen Snakes

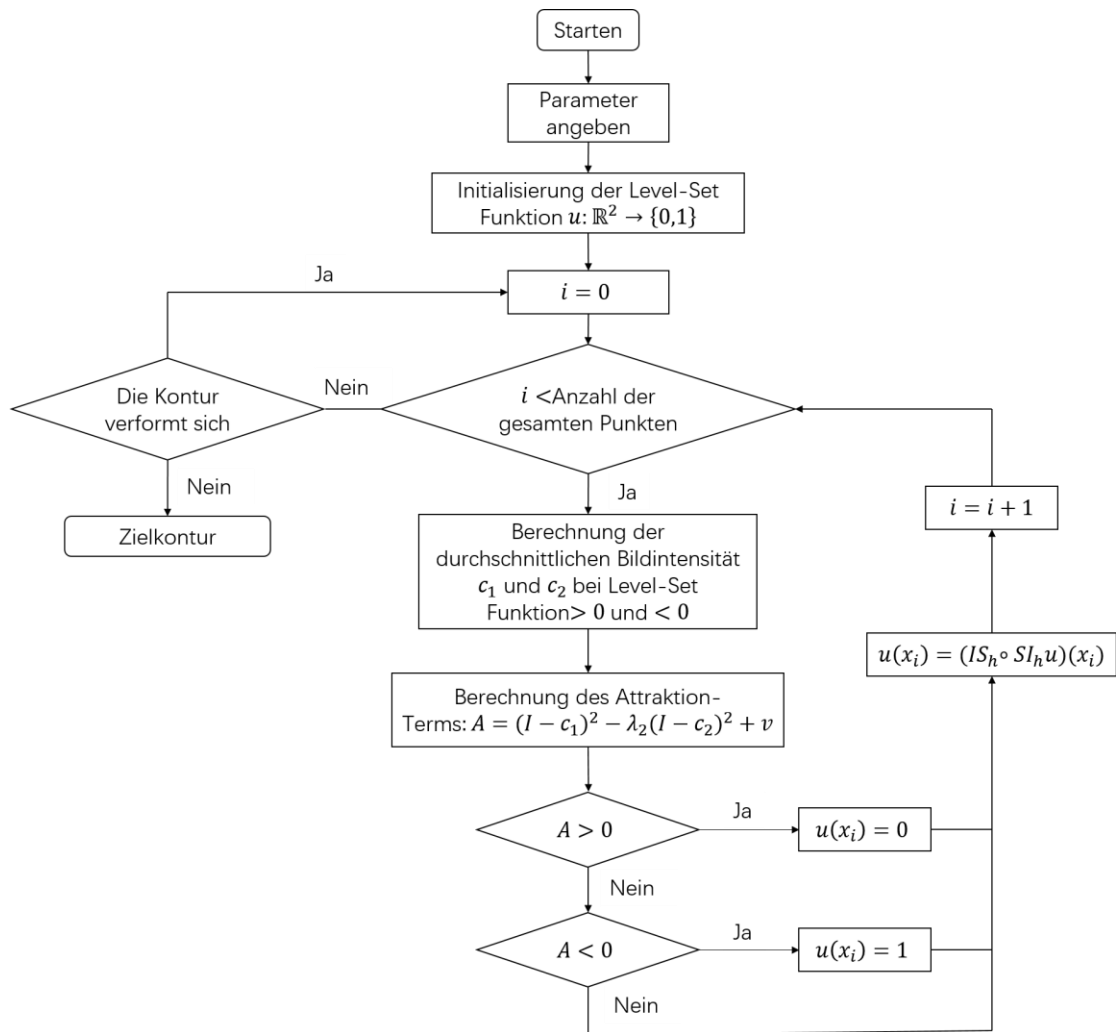


Abbildung 3-30: Ablaufdiagramm der morphologischen Snakes



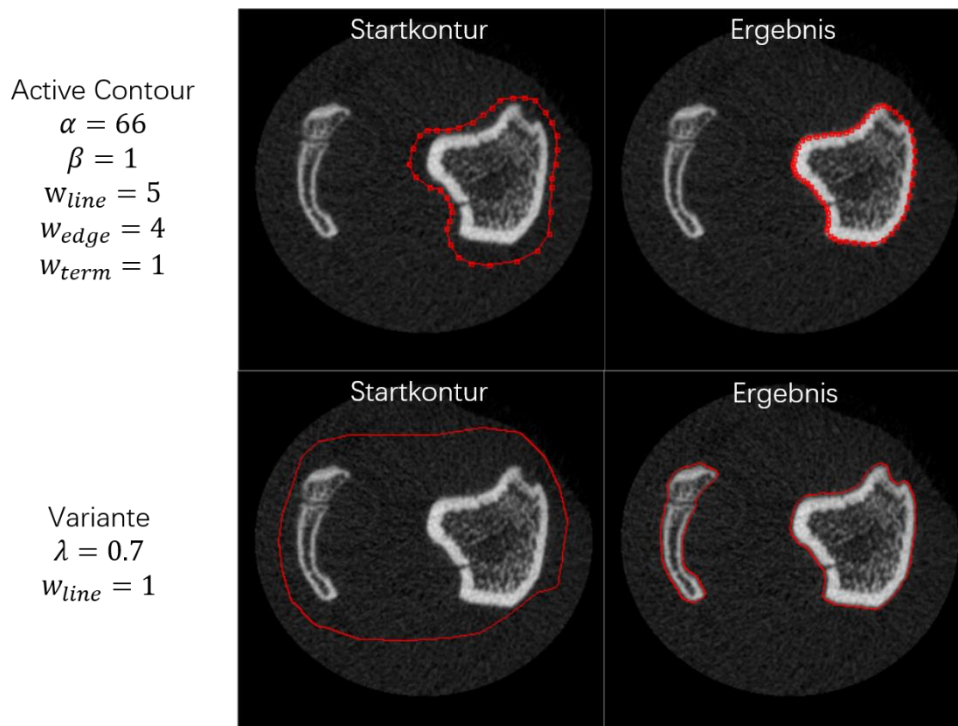
# Kapitel 4

## 4 Vergleichung der Verfahren

In diesem Kapitel werden die Nachteile und Vorteile der vier erwähnten Segmentierungsmethoden miteinander verglichen

### 4.1 Das klassische Active Contour und die Variante

Die im Abschnitt 3.2 erwähnte Variante ist dafür entwickelt worden, die Nachteile (bzw. unmögliche topologische Veränderung, hohe Sensitivität gegenüber der Startkontur, lokale Konvergenz usw.) der klassischen Active Contour zu überwinden. Durch die Verwendung dieser Methode ist die topologische Veränderung der Kurve bei der Segmentierung möglich. Die Kurve wird von den durchschnittlichen Intensitäten und Gradienten des Objektes zu stärkeren Kanten gezogen. Da es sein kann, dass der Anwender die Startkontur entfernt von dem Objekt setzt. Außerdem wird die Berechnungskomplexität durch das neu definierte Energiefunktional von  $O(n^3)$  auf  $O(n^2)$  verringert. D.h. bei der gleichen Berechnungszeit hat die Variante eine hohe Genauigkeit. Bei der klassischen Active Contour muss der Anwender vor dem Segmentieren fünf Parameter eingeben. Normalerweise kostet die Parameterauswahl viel Zeit und deshalb ist eine automatische Segmentierung fast unmöglich. Die Variante reduziert die Anzahl der Parameter von fünf auf zwei. Das vereinfacht die Parameterauswahl. Die nachfolgende Abbildung (4-1) zeigt das Segmentierungsergebnis des gleichen Bildes bei beiden Methoden.



**Abbildung 4-1:** Vergleich zwischen der Variante und der klassischen Active Contour

Bei der auf den Kontrollpunkten basierenden klassischen Active Contour werden nur die sich in der Nähe der Kontrollpunkte befindende Bildpunkte berechnet. D.h. viele Bildinformationen werden ignoriert.

## 4.2 Level-Set Methode und morphologische Snakes

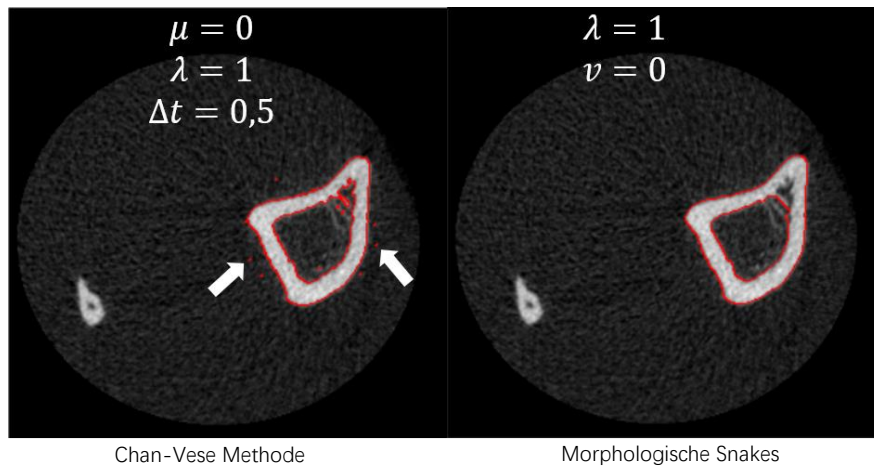
Die im Abschnitt 3.3 und 3.4 erwähnten Chan-Vese Methode und morphologische Snakes basieren auf der gleichen Mumford-Shah Funktion. Die Chan-Vese Methode lässt sich als die mathematische Lösung der Mumford-Shah Funktion und die morphologischen Snakes als die morphologische Lösung sehen. Die morphologische Snakes wurden dafür entwickelt, die Berechnungszeit zu verringern und die Kontinuität der Kurve zu gewährleisten.

Die Komplexität beider Methoden ist  $O(n^2)$ . Aber die Berechnungszeit der Durchführung des morphologischen Operators ist weniger als die der Heaviside- und Dirac-Funktion. Beispielsweise ist die Berechnungszeit von 100-maligen Iterationen bei der Verarbeitung eines  $300 \times 300$  Bildes mit der Level-Set Method 118s aber mit den morphologischen Snakes nur 58s.

Die Chan-Vese Methode hat eine hohe Sensitivität gegenüber Rauschen, das viele isolierte Inseln auf der Nullstelle schafft. Aber mittels des Operators  $IS_h \circ SI_h$  lässt sich die Kontinuität der Kurve bei der Segmentierung gewährleisten. Die nachfolgende Abbildung (4-2) zeigt die Ergebnisse bei Verwendung der Level-Set Methode und der

### 4.3 Variante und morphologische Snakes

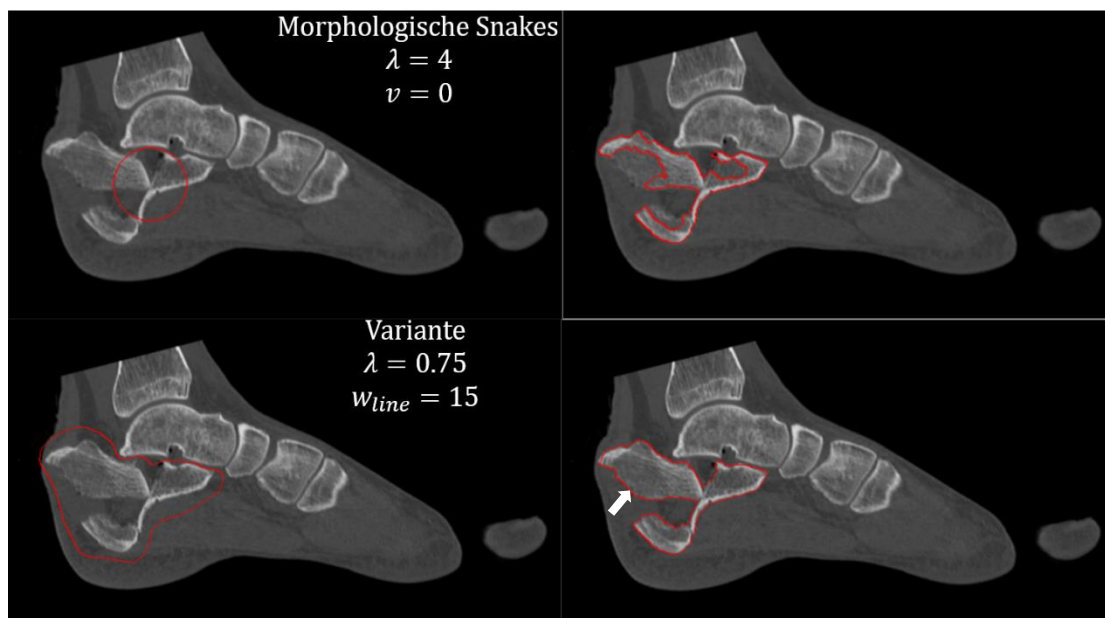
morphologischen Snakes. Wie aus Abbildung (4-2) zu sehen ist, gibt es bei der Chan-Vese Methode viele isolierte Inseln in der Nähe der Kurve.



**Abbildung 4-2:** Vergleich zwischen der Chan-Vese Methode und den morphologischen Snakes

### 4.3 Variante und morphologische Snakes

Beim Segmentieren des Bildes mit niedrigem Kontrast können beide Methoden die Konturen des gesuchten Objektes gut detektieren, wie die nachfolgende Abbildung (4-3) zeigt.



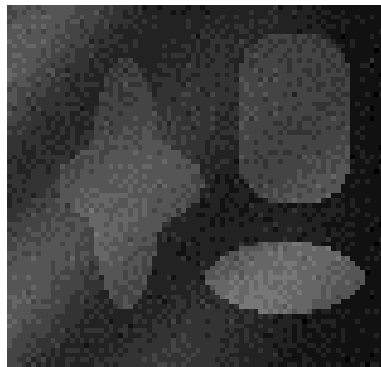
**Abbildung 4-3:** Vergleich der Variante der klassischen Active Contour und den morphologischen Snakes beim Segmentieren des Bildes mit geringer Kontrast

Bei der Minimierung des Energiefunktionales werden von der Variante nicht nur die

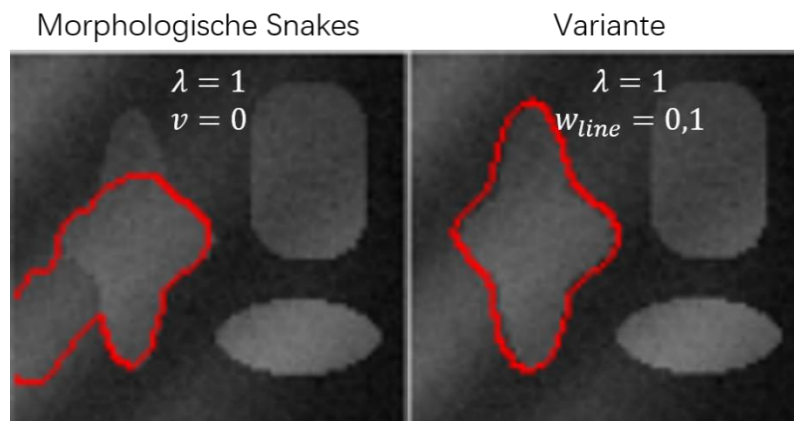
### 4.3 Variante und morphologische Snakes

Bildintensität, sondern auch die Gradienten berechnet. Dadurch kann die Kurve der Variante bei der in der Abbildung markierten Position, wo die Bildintensitäten ähnlich dem Hintergrund sind, stoppen. Aber bei den morphologischen Snakes wird die Kurve einfach diese schwache Kante überqueren.

Die morphologischen Snakes sind nicht in der Lage, Objekte mit inhomogener Intensität zu segmentieren. Wie aus Abbildung (4-4) zu sehen ist, sind die Intensitäten des steinförmigen Objektes ungleichmäßig. Bei den morphologischen Snakes lässt sich die Kontur des steinförmigen Objektes nicht detektieren. Die Abbildung (4-5) zeigt die Segmentierungsergebnisse bei den morphologischen Snakes und der Variante.



**Abbildung 4-4:** Objekt mit ungleichmäßigen Intensitäten



**Abbildung 4-5:** Vergleich zwischen den morphologischen Snakes und der Variante beim Segmentieren des Objektes mit ungleichmäßigen Intensitäten

Dabei kann die schwache Kante des Objektes von der Variante detektiert werden. Die Berechnungszeit von 100-maligen Iterationen bei der Verarbeitung eines 350×374 Bildes mit der Variante ist 84s und mit den morphologischen Snakes 80s. Es gibt sehr kleine Unterschiede, da die Komplexität beider Methoden  $O(n^2)$  ist.

Im Vergleich zu morphologischen Snakes hat die Variante einen wesentlichen Nachteil: bei jedem Iterationsschritt darf die Kurve der Variante nur schrumpfen oder wachsen. Die Verformungsrichtung ist auf dem vom Anwender eingegebenen Befehl

## 4.3 Variante und morphologische Snakes

---

angewiesen. Obwohl die Bewegung der Kurve dadurch besser gesteuert werden kann, erhöht sich die Komplexität der automatischen Segmentierung.

# Kapitel 5

## 5 Zusammenfassung

Die Active Contour spielt eine wichtige Rolle bei der Bildsegmentierung. Auf Grund der Active Contour wurden zahlreiche verschiedene Segmentierungsmethoden für unterschiedliche Situationen entwickelt. In dieser Arbeit wurden drei Segmentierungsmethoden, nämlich die klassische Active Contour, die Level-Set Methode und die morphologischen Snakes ausführlich dargestellt. Bei der Segmentierung von CT-Bildern mit einfarbigem Hintergrund wurde der Algorithmus der auf der Mumford-Shah Funktion basierenden morphologischen Snakes verbessert. Außerdem wurde eine neue Variante der klassischen Active Contour, welche Nachteile der klassischen Active Contour wie z.B. topologische Veränderung, lokale Konvergenz und hohe Berechnungskomplexität überwinden kann, entwickelt.

Die klassische Active Contour hat Probleme bei der Segmentierung von konkaven Objekten. Die Kurve der klassischen Active Contour hat eine große Sensitivität gegenüber der Startkontur, deswegen muss man die Startkontur bei der Initialisierung in der Nähe vom gesuchten Objekt setzen. Bei der Energieminimierung werden nur die sich neben den Kontrollpunkten befindenden Punkte berechnet. Das führt zur kurzen Berechnungszeit aber niedrigen Genauigkeit. Auf diesem Grund ist das klassische Active Contour für die Kantendetektion in CT-Bildern ungeeignet.

Die morphologischen Snakes haben im Vergleich zur Level-Set Methode viele Vorteile z. B. geringere Anzahl der Parameter, kurze Berechnungszeit und gute Kontinuität der Kurve. D. h. auf Grund der gleichen partiellen Differenzgleichung sind die morphologischen Snakes eine bessere Lösung. Wie im Abschnitt 3.4.2 dargestellt, sind die morphologischen Snakes durch die Verwendung von verschiedenen partiellen Differenzgleichungen in der Lage, die Verformung der Kurve zu kontrollieren. Bei der Segmentierung von Objekten, bei denen signifikante Unterschiede zum Hintergrund bestehen, können die morphologischen Snakes Konturen dieser Objekte automatisch detektieren. Außerdem lassen sich die ähnliche Merkmale besitzenden Objekte mit gleichen Parametern durch die morphologischen Snakes automatisch segmentieren. Allerdings können die Konturen von inhomogenen Objekten (wie die Abbildung (4-5) zeigt) durch die Verwendung der auf Mumford-Shah basierenden morphologischen Snakes nicht detektieren werden. Um solche Objekte zu segmentieren, kann man die Variante der klassischen Active Contour benutzen.

In der Arbeit wurde eine Variante auf Grund des Funktionalen der klassischen Active Contour entwickelt. Bei der Segmentierung von Bildern mit niedrigem Kontrast funktioniert diese Variante besser als die morphologischen Snakes, da bei jedem

## 4.3 Variante und morphologische Snakes

---

Iterationsschritt die Kurve nur schrumpfen oder expandieren kann. Dadurch sucht die Kurve nur die Kanten in bestimmte Richtung. Die Verformung der Kurve ist nicht nur auf den Bildintensitäten, sondern auch auf den Gradienten angewiesen. Daher kommt es, dass sich komplizierte Objekte durch die Verwendung der Variante besser segmentieren lassen. Die Parameter beeinflusst die Sensitivität der Kurve gegenüber den Bildintensitäten und den Gradienten. Wenn der die Gradienten gewichtende Parameter  $w_{line}$  gleich null ist, hat die Variante mit der morphologischen Snakes die gleiche Funktionsweise.

Diese in der Arbeit dargestellten Verfahren lassen sich auf unterschiedliche Weise weiterentwickeln. So können viele Startkonturen bei den morphologischen Snakes automatisch im Bild gesetzt werden. Diese Kurve können auch die Konturen von verschiedenen Objekten gleichzeitig detektieren. Außerdem ist es möglich, dass eine Reihe von CT-Bildern mit ähnlichen Objekten automatisch segmentiert wird und dass die Segmentierungsergebnisse automatisch gespeichert werden. Obwohl alle Verfahren in der Arbeit nur in 2D implementiert wurden, können die morphologischen Snakes und die Variante auch auf 3D erweitert werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] Y. J. Zhang, *Advances in image and video segmentation*, IGI Global, 2006.
- [2] B. Jahne, *Digital image processing*, vol. 4, Springer, 2005.
- [3] E. R. Velazquez, Aerts, Hugo JWL, Gu, Yuhua, Goldgof, Dmitry B, De Ruyscher, Dirk, Dekker, Andre, Korn, Ren, Gillies, Robert J and Lambin, Philippe, "A semiautomatic CT-based ensemble segmentation of lung tumors: Comparison with oncologists' delineations and with the surgical specimen," *Radiotherapy and Oncology*, vol. 105(2), pp. 167-173, 2012.
- [4] Heye, Tobias, Davenport, Matthew S, Horvath, Jeffrey J, Feuerlein, Sebastian, Breault, Steven R, Bashir, Mustafa R, Merkle, Elmar M and Boll, Daniel T, "Reproducibility of dynamic contrast-enhanced MR imaging. Part I. Perfusion characteristics in the female pelvis by using multiple computer-aided diagnosis perfusion analysis solutions," *Radiology*, vol. 266(3), pp. 801-811, 2013.
- [5] A. Rosenfeld and A. C. Kak, *Digital picture processing*, New York: Academic Press, 1982.
- [6] Ohlander, Ron, Price, Keith and Reddy, D Raj, "Picture segmentation using a recursive region splitting method," *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 8(3), pp. 313-333, 1978.
- [7] W. A. Barrett and E. N. Mortensen, "Interactive live-wire boundary extraction," *Medical image analysis*, vol. 1(4), pp. 331-341, 1997.
- [8] S. Beucher and F. Meyer, "The morphological approach to segmentation: the watershed transformation," *Optical Engineering-New York-Marcel Dekker Incorporated-*, vol. 34, pp. 433-433.
- [9] R. Adams and L. Bischof, "Seeded region growing," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 16(6), pp. 641-647, 1994.
- [10] A. L. Yuille, P. W. Hallinan and D. S. Cohen, "Feature extraction from faces using deformable templates," *International journal of computer vision*, vol. 8(2), pp. 99-111, 1992.
- [11] M. Kass, A. Witkin and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *International journal of computer vision*, vol. 1(4), pp. 321-331, 1988.
- [12] T. F. Cootes, G. J. Edwards and C. J. Taylor, "Active appearance models," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 23(6), pp. 681-685, 2001.
- [13] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," *Journal of computational physics*, vol. 79(1), pp. 12-49, 1988.
- [14] L. D. Cohen, "On active contour models and balloons," *CVGIP: Image understanding*, vol. 53(2), pp. 211-218, 1991.
- [15] S. Menet, P. Saint-Marc and G. Medioni, "Active contour models: Overview,



- implementation and applications," in *Systems, Man and Cybernetics, 1990. Conference Proceedings., IEEE International Conference on*, 1990.
- [16] T. McInerney and D. Terzopoulos, "T-snakes: Topology adaptive snakes," *Medical image analysis*, vol. 4(2), pp. 73-91, 2000.
- [17] S. R. Gunn and M. S. Nixon, "A robust snake implementation; a dual active contour," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 19(1), pp. 63-68, 1997.
- [18] M. Ströbel, "Aktive Konturen-Segmentierung mit kapillaren Kräften".
- [19] R. H. Bartels, J. C. Beatty and B. A. Barsky, An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeling, Morgan Kaufmann, 1987.
- [20] C. Xu and J. L. Prince, "Snakes, shapes, and gradient vector flow," *IEEE Transactions on image processing*, vol. 7(3), pp. 359-369, 1998.
- [21] S. O. R. Fedkiw and S. Osher, "Level set methods and dynamic implicit surfaces," *Surfaces*, vol. 44, pp. 77-77, 2002.
- [22] R. Malladi and J. A. Sethian, "Image processing via level set curvature flow," *proceedings of the National Academy of sciences*, vol. 92(15), pp. 7046-7050, 1995.
- [23] R. Malladi, J. A. Sethian and B. C. Vemuri, "Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery," *European conference on Computer vision*, pp. 1-13, 1994.
- [24] R. Malladi, J. A. Sethian and B. C. Vemuri, "A fast level set based algorithm for topology-independent shape modeling," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 6(2), pp. 269-289, 1996.
- [25] V. Caselles, R. Kimmel and G. Sapiro, "Geodesic active contours," *International journal of computer vision*, vol. 22(1), pp. 61-79, 1997.
- [26] D. Mumford and J. Shah, "Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 42(5), pp. 577-685, 1989.
- [27] M. Gobbino, "Finite difference approximation of the Mumford-Shah functional," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 51(2), pp. 197-228, 1998.
- [28] A. Chambolle, "Image segmentation by variational methods: Mumford and Shah functional and the discrete approximations," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, pp. 827-863, 1995.
- [29] T. F. Chan and L. A. Vese, "Active contours without edges," *IEEE Transactions on image processing*, vol. 10(2), pp. 266-277, 2001.
- [30] C. Fox, An introduction to the calculus of variations, Courier Corporation, 1950.
- [31] D. J. Williams and M. Shah, "A fast algorithm for active contours and curvature estimation," *CVGIP: Image understanding*, vol. 55(1), pp. 14-26, 1992.
- [32] L. Álvarez, L. Baumela, P. Henríquez and P. Márquez-Neila, "Morphological snakes," *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2010 IEEE*

*Conference on*, pp. 2197-2202, 2010.

- [33] F. Catté, F. Dibos and G. Koepfler, "A morphological scheme for mean curvature motion and applications to anisotropic diffusion and motion of level sets," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 32(6), pp. 1895-1909, 1995.

## **Anhang**

### 1. CD-ROM