

4 Теория приближения функций

4.1 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Написать программу для вычисления интерполяционного многочлена в форме Ньютона и его производной.

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход массив с координатами узлов $[x_0, \dots, x_n]$, массив значений функции в этих узлах, а также массив точек, в которых нужно вычислить значение интерполяционного многочлена и его производной.

Функция должна вычислять таблицу разделенных разностей, массив значений интерполяционного многочлена в заданных точках, и массив значений 1-й производной интерполяционного многочлена в заданных точках. Сложность вычисления одного значения интерполяционного многочлена должна быть $\mathcal{O}(n)$, где n – число узлов интерполяции.

2. Программа должна вызывать реализованную функцию для равномерной и чебышёвских сеток и значений какой-то гладкой функции f на этих сетках и выводить 2 рисунка:
 - (a) графики функции и многочлена (разными цветами) (по значениям на очень подробной сетке), и значения в узлах интерполяции (маркерами)
 - (b) графики производной исходной функции f' и производной интерполяционного многочлена L'_n (на очень подробной сетке).

4.2 Кубический свободный сплайн

Написать программу для построения свободного кубического сплайна (2-е производные на концах равны 0) по табличным данным.

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход: массив с координатами узлов $[x_0, \dots, x_n]$, массив значений функции f в этих узлах.
2. Функция должна вычислять коэффициенты свободного кубического сплайна на каждом из отрезков. Для решения 3-х диагональной линейной системы относительно коэффициентов нужно написать функцию, которая реализует метод прогонки.
3. Программа должна содержать функцию, которая вычисляет значение кубического сплайна в заданной точке.
4. Программа должна вызывать реализованные функции для равномерной и неравномерной сеток и какой-то тестовой функции и строить на 1-м рисунке график исходной функции, интерполяционного сплайна (разными цветами), и значения в точках интерполяции (маркерами).

4.3 L_2 - приближение функций

Даны коэффициенты a_k обобщенного многочлена $f = \sum_k a_k \phi_k$,

$$\{\phi_k\} = \{1, \ln(x), x^{-2}, x^{-1}, x, x^2, x^3\}, x \in [x_l, x_r]$$

$x_l > 0, x_r > 0$ – параметры, которые можно менять.

Напишите программу для вычисления коэффициентов b_k наилучшего в $L_2[x_l, x_r]$ -норме приближения вида $\sum_k b_k \psi_k$ для

$$\{\psi_k\} = \{1, x, \sqrt{x}, x^2, x^3, x^4, x^6\}$$

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход массив коэффициентов a и возвращает массив коэффициентов b .
Можно либо вычислять скалярные произведения с использованием готовых функций для символьного или численного интегрирования, либо найти интегралы аналитически и подставить их в код.
2. Программа должна содержать функции, которые по массивам коэффициентов a и b соответственно и по массиву точек x вычисляют значения обобщенных многочленов в этих точках.
3. Программа должна вызывать описанные функции для двух разных отрезков $[x_l, x_r]$, и строить графики исходного многочлена, его приближения, и график разницы между ними (разница - на отдельном рисунке).

4.4 $L_2(w)$ - приближение функций

Дана функция $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, и функция $w(x) > 0$.

Напишите программу для вычисления коэффициентов c_k наилучшего приближения в пространстве L_2 с весом $w(x)$ для заданного набора функций: ϕ_1, \dots, ϕ_n .

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход f , w , массив функций ϕ_1, \dots, ϕ_n , и возвращает массив коэффициентов c_k .
Для вычисления скалярных произведений нужно использовать готовые функции, например, `scipy.integrate.quad`.
2. Программа должна вызывать функцию для тестовых функций f , w , и для двух небольших ($n < 10$) наборов базовых функций ϕ_k , и строить графики f , приближения, и график разницы между ними (разница - на отдельном рисунке).

Алгоритм Ремеза (дополнительное задание)

Написать программу для вычисления многочлена наилучшего приближения для функции f в норме $C[a, b]$.

Требования к программе:

1. Программа должна содержать функцию, которая принимает на вход функцию f , отрезок $[a, b]$ и степень многочлена n , и возвращает многочлен (в любом удобном виде, например, набор коэффициентов), а также $C[a, b]$ -норму ошибки, оцененную на подробной сетке (10000 узлов) на отрезке $[a, b]$.
2. Функция должна вычислять многочлен наилучшего приближения итерационно, с помощью алгоритма Ремеза.
3. Программа должна вычислять многочлен для какой-то тестовой функции, и выводить 2 рисунка:
 - (a) на одном рисунке – график ошибки $e = f(x) - p_n(x)$ и график ошибки $f(x) - L_n(x)$ при интерполяции многочленом степени n по значениям f в узлах Чебышёва (для интерполяции можно использовать готовую функцию, например [BarycentricInterpolator](#))
 - (b) на одном рисунке график функции f и график многочлена наилучшего приближения p_n .
4. Убедитесь, что алгоритм работает правильно: ошибка должна иметь $n + 2$ точки альтернанса.