

基本情報技術者への道: 基礎理論編

いろはす

2024 年 4 月 30 日

第 1 章

基数変換

2 進法という言葉聞いたことがあるだろうか。これは、数を表現する「表示の仕方」の一つに付けられた名称である。

コンピュータ内でデータを表わすのに、0 と 1 の数字の羅列、たとえば:

01011010

のようなものが用いられるという話はよく知られているだろう。この「0 と 1 だけでデータを表現する」方法と、上で述べた 2 進法の間には密接な関係がある。従って、IT 関連の文脈で 2 進法や、その周辺知識が必要になる場面は少なくない。さらに、たった今「周辺知識」と書いたものの中には 8 進法や 16 進法など他の進法、またそれらと 2 進法との間での相互変換といったものまで含まれている。つまり、コンピュータを学ぶには一般の「 N 進法」に関するある程度体系立った知識が要求されるのである。

さて、**進法**とは数の「表示の仕方」だと上で述べた。ここで「数」と書いたのは、数学的には**実数**の意味である。しかし、数学の対象としての実数は概念そのものが少々高度でとっつきにくいものであるし、基本情報の範囲内だとその部分集合である**有理数**さえ知っていれば充分であることが多い。従って、このテキストでは有理数だけに話を限定して解説を行う。まずは、そのさらに部分集合である**整数**の表示から話をはじめよう。

1.1 整数の表示

1.1.1 整数の概念

まずは、**整数**の概念について簡単に復習しよう。

殆どの人にとって、生まれて初めて目にする「数」概念は**自然数**であると思われる。自然数は謂わば「ものを数える」ときに用いられる「数」で、

$$1, 2, 3, \dots$$

とどこまでも果てしなく続いていく記号の羅列である^{*1}。たとえば“2”という数であれば、

- 2個のりんご
- 2人の生徒
- 2本のえんぴつ

などといったように、自然数はあらゆる「ものの個数」に対応させて考えることができる。だからこそ「ものを数える」のに使えるのであるし、「数える」ことの延長に「足し算」や「掛け算」といった演算があるわけである。

さて、整数は、自然数に0と**負の数**:

$$-1, -2, -3, \dots$$

を付け加えた数の体系である。整数全体を一直線に並べて書くなら、

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

のような形になる。整数にも四則演算があるが、その規則については紙面の都合上割愛する。

^{*1} 自然数に0を含めるかどうかには、流儀ごとに違いがある。筆者としては、そんなことは本質的な問題ではないという意見であるし、文献ごとにちゃんと断って使用すればどちらでもよいと思う。このテキストでは、ひとまず0は**含めない**流儀でいく。ここでの自然数を**正整数**ともいう。

1.1.2 整数の表示法としての進法

さて、整数の表示法としての進法について見ていこう。我々は、数を書き表すのに記号を必要とする。上の表記は所謂「アラビア数字」による表記であるが、別に特段この表記に拘る理由もないであろう。例えば、漢数字だと自然数は

一, 二, 三, ...

のようになるし、ローマ数字だと

I, II, III, ...

のようになる。

どの表記法でも、各々の数字に単一の記号が割り当てられている。少なくとも 1 から 3 ままで見る限り、漢数字やローマ数字の記号はわかりやすい。それぞれの数に対応する「棒の本数」をそのまま記号にしている。しかし上で述べたとおり、自然数というのはどこまでも果てしなく続く記号の体系であるから、数が大きくなっていくのに伴いどこまでも同じ「棒の本数」という方式を一貫して用いる訳にはいかなくなる。単純にスペースの問題もあるし、何より読んだり書いたりするのが恐ろしく大変なことになるのは容易に想像できよう。

そこで登場するのが、**桁と繰り上がり**の方式である。アラビア数字で言うなら、単体で用いられる記号は

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

の 10 個のみである。9 より大きな数は、上記の組み合わせで表現する。すなわち:

0, 1, ..., 9, 10, 11, ..., 19, 20, 21, ..., 99, 100, 101, ...

のような具合である。

漢数字とローマ数字の場合も含めて語り出すと少々話がややこしくなるので、以降はアラビア数字に限定して話をしよう。上記の「繰り上がり」方式では、数が一つ大きくなるごとに「一の位」がカウントアップされていく。しかし各桁は"9"までしか数えられないから、それより大きくなろうとすると桁が「あふれ」て次の「十の位」がカウントアップされ、「一の位」は"0"に戻る。我々が日常で用いる、この「数え方」を **10 進法**と呼ぶ。勿論、「10 になったら次へ進む」から 10 進法なのである。

ここまで来ると、「2進法」がどんなものか、読者には想像がついているのではないだろうか。試しに、2進法で0から10(この"10"は勿論10進法表記)まで数えてみて欲しい。言い換えれば、次の表を自分で埋めてみてほしい:

10進法	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2進法											

コメント 1.1.1: 2進法ジョーク

余談だが、次のような有名なジョークがある:

A「世の中には、10種類の人間がいる。2進法を理解している人間と、そうでない人間だ」

B「残りの8種類は？」

A「つまり君は後者だ」

これを面白いと感じるかどうかは人それぞれだが、ともあれ異なる進法の間を行ったり来たりすることの面倒さがよくわかる例である。

さて、表は埋まっただろうか。答え合わせの代わりに、2進法の規則を簡単にまとめておく:

- 使う記号は"0"と"1"の2つのみ
- 各桁は、0から始まり1ずつカウントアップする
- 1からさらにカウントアップする際は、次の桁に繰り上がりその桁は0に戻る

一般に「 N 進法」と言ったとき、この N のことを**基数**(base/radix)という。同じ数を、異なる進法で表記できることは既に見たとおりである。ある数について、特定の進法による表示が与えられているとき、その別の進法による表示を求めることを**基数変換**という。基本情報技術者試験では、例えば次のような形式で出題される:

10進法における「5」の、2進法による表示を求めよ。

答えは「101」、という具合である。ただし上記は「0から順に数える」ことで簡

単に答えられる問題であったが、実際の試験ではもっと大きな数字で出題されることが多いため、解答には一般的な「公式」が必要になる。公式については後ほど述べるが、その前に背後の理屈を知っておく必要があるだろう。言い換えれば、「進法とは何か」ということをもう少し形式的に考えておく必要があるのである。

コメント 1.1.2: 理屈を知ることの価値

試験合格のために、公式の背後の理屈まで理解する必要があるかと問われたとき、少なくとも筆者には自信を持って「Yes」とは答えられない。しかし、資格マニアの方ならともかくとして、単に「資格がゴール」の人というのは割合的に少ないのではないだろうか。当たり前のことだが、試験のために勉強する事柄というのは、その先の実務レベルで多少なりとも必要になる知識だから学ぶのである。

その観点で言うと、こと基数変換に関して、公式の丸暗記という行為はほぼ無意味と言っていい。いま、基数変換をやってくれる PC や Web のアプリなど探せばいくらでも出てくるであろう。人が自分で丸暗記した公式に突っ込んで計算するメリットなど存在しない。基数変換の問題が解けるようになることの意義は、そもそも「進数とは何か」という原理的な問題がある程度自分の頭で考え、そこに自分なりの「理解の仕方」を持てたという経験が得られることに他ならないのだ。

問題は「理解の試金石」である。いま一体どれだけの人が、正しく問題を「使えて」いるだろうか？

1.1.3 基数の明示

理論の話に入る前に、便利な記法を導入しておこう。同じ数を表わすのに複数の表記法が存在する以上、どの表記法による表示なのか明示する方法が必要になるのは自然なことである。一般的に、数を丸括弧“ $()$ ”で囲い、右下に基数^{*2}を記すのがそれにあたる：

$$(\dots)_N$$

^{*2} これは流石に 10 進法で書くのが慣習である。

ただし上記において、... の部分が数の表示であり、 N が基数である。例えば、

$$(5)_{10} = (101)_2$$

である。勿論、基数が文脈から明らかな場合には通常どおりの表記を用いる。

1.1.4 進法とは何か

「桁と繰り上がり」のカウンタ方式が、結局何をしているのか振り返ってみよう。数学的厳密性はとりあえず棚上げにして、10 進法では概ね次のような説明になる：

- 使う記号は”0”, ”1”, ..., ”9”の合計 10 個
- 各桁は、0 から始まり 1 ずつカウントアップする
- 9 からさらにカウントアップする際は、次の桁に繰り上がりその桁は 0 に戻る

貨幣（硬貨と紙幣）を使うとイメージしやすいであろうか。日本円だと 5 円玉や 50 円玉があるがそれらは一旦無視して、使える貨幣の種類を

1 円玉, 10 円玉, 100 円玉, 1000 円札, 10000 円札

の 5 種類に限定しよう。これで買い物の支払いをする状況を考える。また、その際

- 同じ貨幣を使えるのは 9 枚まで

というルールを課す。例えば、10 円玉を 11 枚使って払うよりは、100 円玉 1 枚と 10 円玉 1 枚で払ったほうが賢いだろう*3。試しに、この方式で以下の金額を支払うと、各貨幣を何枚出すことになるか考えてみて欲しい：

- 314 円
- 2024 円
- 12345 円

明らかに、

各貨幣の使う枚数 = 10 進法での各桁の数

*3 ただし、貨幣は無限に湧いてくるものとする。

という関係が成り立っているのがわかるであろう。

当たり前のことだが、10 円玉は 1 円玉 10 枚と同等の価値を有するし、100 円玉は 10 円玉 10 枚と同じ価値を有する。

$$1 \text{ 円玉} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 10 \text{ 円玉} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 100 \text{ 円玉} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 1000 \text{ 円札} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 10000 \text{ 円札}$$

この事実を考慮して上の例を眺めれば、「桁」概念の本質が見えてくるであろう。すなわち、10 進法においては、ある桁における「10」が次の桁の「1」と等価なのだ。1 つ桁が大きくなるにつれ、その「重み」が 10 倍ずつになっていくと理解すればよい：

$$1 \text{ の位} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 10 \text{ の位} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 100 \text{ の位} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 1000 \text{ の位} \xrightarrow{10 \text{ 倍}} 10000 \text{ の位}$$

かくして我々は、普段見慣れた 10 進法での

$$(x_n \cdots x_1 x_0)_{10} \tag{1.1.1}$$

(ただし n は 0 以上の整数) という表示が、**実際に何を意味しているか**いま初めて知ったのである。すなわち上記は、貨幣に対応させれば

$$\begin{aligned} &1 \text{ 円玉を } x_0 \text{ 枚,} \\ &10 \text{ 円玉を } x_1 \text{ 枚,} \\ &100 \text{ 円玉を } x_2 \text{ 枚,} \\ &\dots \end{aligned}$$

のような、「支払い方」を表わす記法なのだ。

今や、このような表記の「読み方」は明らかである。式 (1.1.1) であれば、これは

$$x_0 \times 1 + x_1 \times 10 + x_2 \times 100 + \cdots + x_n \times \underbrace{10 \cdots 0}_{n \text{ 個}}$$

という式の計算結果を表わしている。もう少し数学チックに書けば、

$$x_0 10^0 + x_1 10^1 + x_2 10^2 + \cdots + x_n 10^n$$

のような格好になる^{*4} (指数の公式 $10^0 = 1$ を思い出そう) し、より簡潔にする

^{*4} 中学では「掛け算で数字は文字より左に書く」と習う。大学数学でもその規則は概ね正しいが、本来の数学とはもう少し自由な学問である。もし「そうするご利益」の方が大きい場合、(論理的に破綻していない限り) 規則を多少破ることも許される。

なら

$$\sum_{k=0}^n x_k 10^k$$

のようにも書ける.

ところで、上で出てきた”10”は明らかに、”10”進法の 10 である. もしこれが N 進法になれば、話は上で出てきた”10”を” N ”で置き換えるだけで済むことは明らかだろう. もう一度要点をまとめておくと、 N 進法とは正整数^{*5} x を

$$(x_n \cdots x_1 x_0)_N \quad (1.1.2)$$

のように書き表わす仕方である. ただし、このとき各桁 $i (= 0, 1, \dots, n)$ は

$$x_i \text{ は整数, } 0 \leq x_i < N$$

という制約を満たす必要がある. また、この表記 (1.1.2) 自体の意味は、

$$x = (x_n \cdots x_1 x_0)_N$$

という式が主張する通りである.

以上より、次の定義を得る:

定義 1.1.1: 正整数の N 進法表記

x を正の整数、 N を 2 以上の整数とする. 整数の有限列 x_0, x_1, \dots, x_n (ただし n は 0 以上の整数) が以下の条件 1, 2 を満たすとき、この有限列^aを x の N 進法表記といい、 x を

$$(x_n \cdots x_1 x_0)_N$$

のようにも記す:

1. 各 $i = 0, 1, \dots, n$ に対し $0 \leq x_i < N$
2. $x = x_0 N^0 + x_1 N^1 + \cdots + x_n N^n$
3. $x_n \neq 0$

^{*5} 正整数とは 0 より大なる整数、すなわちこのテキストの定義だと自然数と同義である. ただし、既に述べたように「自然数」という用語は文献ごとに意味の揺れが激しいのと、数学的に指すものが同じでも用語が違うと少しニュアンスが異なる場合があり、この場合「整数全体を考えている文脈で、一旦 0 より大きいやつらを抜き出しますよ」という細かな意味合いを表現したかったのでこちらを選んだ.

^a 通常は式 (1.1.2) のことをこう呼ぶが、数学的にはこう定義した方が納まりがよい。

また、このような表示が実際に役に立つのは、次の 2 点によるところが大きい：

- どんな正整数に対しても、その N 進法表記が存在する。
- 1 つの正整数に対して、2 通り以上の N 進法表記が存在することはない。

実際、これら 2 点のうちどちらかでも破れていれば、我々が「桁と繰り上がり」を基礎とした整数の表示をこれほど有難がって日常に取り入れることはなかったであろう。これらの性質は数学の定理としても重要なので、以下に改めてまとめておく：

定理 1.1.1: 正整数の N 進法表記の存在と一意性

N を 2 以上の整数とする。各正整数 x に対し、その N 進法表記は常に存在し、かつただ一通りしか存在しない。

周知のとおり、いかなる 0 でない整数も符号 \pm と正整数の組で表される。例えば、 -4 という整数であれば符号部分 “ $-$ ” と正整数部分 “ 4 ” の組み合わせである。従って、上記の方法により任意の整数の N 進法表記が得られる。

1.1.5 整数の基数変換

N 進法表示が出てくるたび、いちいち $(x_l \cdots x_0)_N$ のように書くのも面倒になってきた。これからは、 $(\tilde{x})_N$ (\tilde{x} は x の N 進法表示) のような書き方も使うことにしよう。要は単に、 $(x_l \cdots x_0)_N$ の括弧の中身 “ $x_l \cdots x_0$ ” を簡単に “ \tilde{x} ” のように書いていただだけだ。例えば $N = 10$ に固定し、 $x = (123)_{10}$ なら \tilde{x} は 123 である。

さて、 N 進法から 10 進法への変換に関しては、上で考えた「表記の意味」がほぼそのままその方法となる。いま、正整数 x の N 進法表記：

$$x = (x_n \cdots x_1 x_0)_N$$

が与えられているとしよう。これは取りも直さず、

$$x = x_0 N^0 + x_1 N^1 + \cdots + x_n N^n$$

という意味であった。

前提として、実際の応用場面において、我々は N の 10 進法表記を知っている。実際、我々がよく使う進法を挙げてみよう。2 進法, 8 進法, 16 進法, …。うむ。ここまで見る限り、「あれ、この $N(= 2, 8, 16, \dots)$ って 10 進法でどう表わすんだっけ?」となる状況は想像できないだろう。そこでいま、 N の 10 進法表記を \tilde{N} として、 $N = (\tilde{N})_{10}$ としよう。

同様に、 x_0, \dots, x_n の 10 進法表記も、「すぐには (計算しないと) 分からない」という状況は発生しない。これらの「桁」には通常一文字で「数」を表わす記号が入るが、その 10 進法による表示は通常直ちにわかる。例えば、16 進法だと 9 より大きな数字にアルファベットの A, \dots, F をあてがうが、もちろんこれらは直ちに 10 進法に変換できる。また、9 進以下の進法であれば (使ってる記号が 10 進法の一部なのだから) 論はないであろう。よって、 x_0, \dots, x_n の 10 進法表記を (既知のものとして) $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n$ と書く。

...(執筆中)...

定理 1.1.2: 正整数の 10 進法への変換

x を正の整数, N を 2 以上の整数とする。

$$x = (x_n \cdots x_1 x_0)_N$$

であるとき,

$$x = (\tilde{x}_0)_{10}(\tilde{N})_{10}^0 + \cdots + (\tilde{x}_n)_{10}(\tilde{N})_{10}^n$$

でもある (これが 10 進法による x の表記を与える)。ただし、 $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{N}$ は x_0, \dots, x_n, N の 10 進法表記である。

付録 A

指数法則

...

付録 B

剰余の定理

...

付録 C

素因数分解の一意性

...