信号与系统

概述

1 信号的描述和分类

1.1 确定性信号/随机信号

1.2 连续信号/离散信号

1.3 周期信号/非周期信号

1.3.1 周期信号

例： 信号 $f(t)=\cos(10t)+\cos(30t)$ 是否为周期信号?

解：$T_1=\dfrac{2\pi}{10},T_2=\dfrac{2\pi}{30}$，设 $f(t)$ 的周期为 $T,T=k_1T_1=k_2T_2,k_1,k_2\in\mathbb{N}^+$

$\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{k_2}{k_1}=3\in\mathbb{Q}$，所以信号是周期信号。

1.3.2 非周期信号

瞬态信号，准周期信号。

准周期信号：类似 $\sin(\pi t)+\sin(t)$，是非周期信号。

1.4 一维信号/多维信号

1.5 能量信号/功率信号

1.5.1 能量信号

$$0<\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|^2dt<\infty$$

1.5.2 功率信号

$$0 < \frac{1}{b-a}\int_a^b |F(t)|^2 dt < \infty$$

2 典型连续时间信号

2.1 指数信号

$$f(t) = Ae^{\alpha t}$$

单边指数信号：$f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \, (t > 0)$

τ 为时间常数。

2.2 正弦信号

$$f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

欧拉公式：$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

一般令 $\theta = \omega t$

单边衰减正弦信号：

$$f(a,b) = \begin{cases} Ke^{-\alpha t}\sin(\omega t), & t \le 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

2.3 复指数信号

$$f(t) = Ke^{st}, s = \sigma + j\omega$$

2.4 抽样信号

$$\mathrm{Sa}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

3 奇异信号

3.1 单位冲激信号

3.1.1 抽样性

傅里叶变换

傅里叶级数

三角函数形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

傅里叶变换

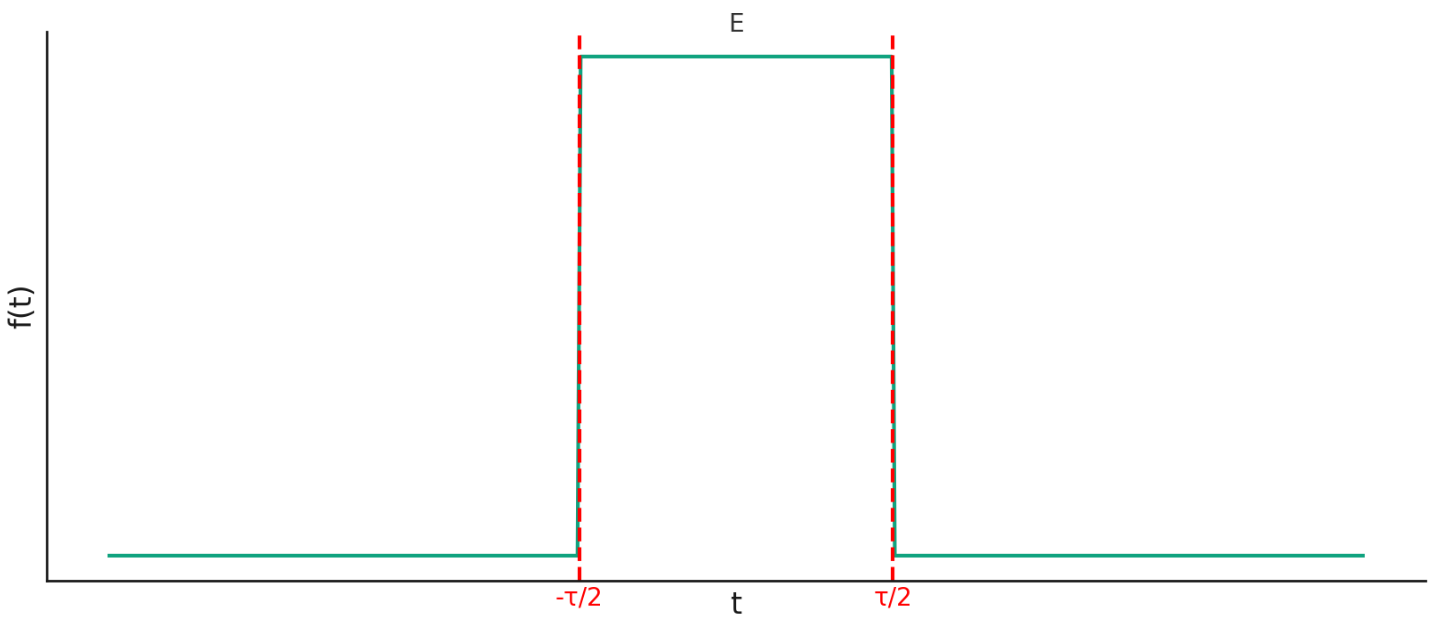
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \mathscr{F}[f(t)]$$

反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

典型信号的傅里叶变换

门函数 $E[u(t+\frac{\tau}{2})-t(t-\frac{\tau}{2})]$



$$F(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\tau}{2}\omega)$$

单边指数 $Ee^{-\alpha t}u(t)$

$$F(\omega)=\frac{E}{\alpha+j\omega}$$

直流 E

$$F(\omega)=2\pi E\delta(\omega)$$

冲激信号 $\delta(t)$

$$F(\omega)=1$$

符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$

$$F(\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

阶跃函数 $u(t)$

$$F(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

倒数信号 $\frac{1}{t}$

$$F(\omega)=-j\pi\mathrm{sgn}(\omega)$$

冲击偶信号 $\delta'(t)$

$$F(\omega)=j\omega$$

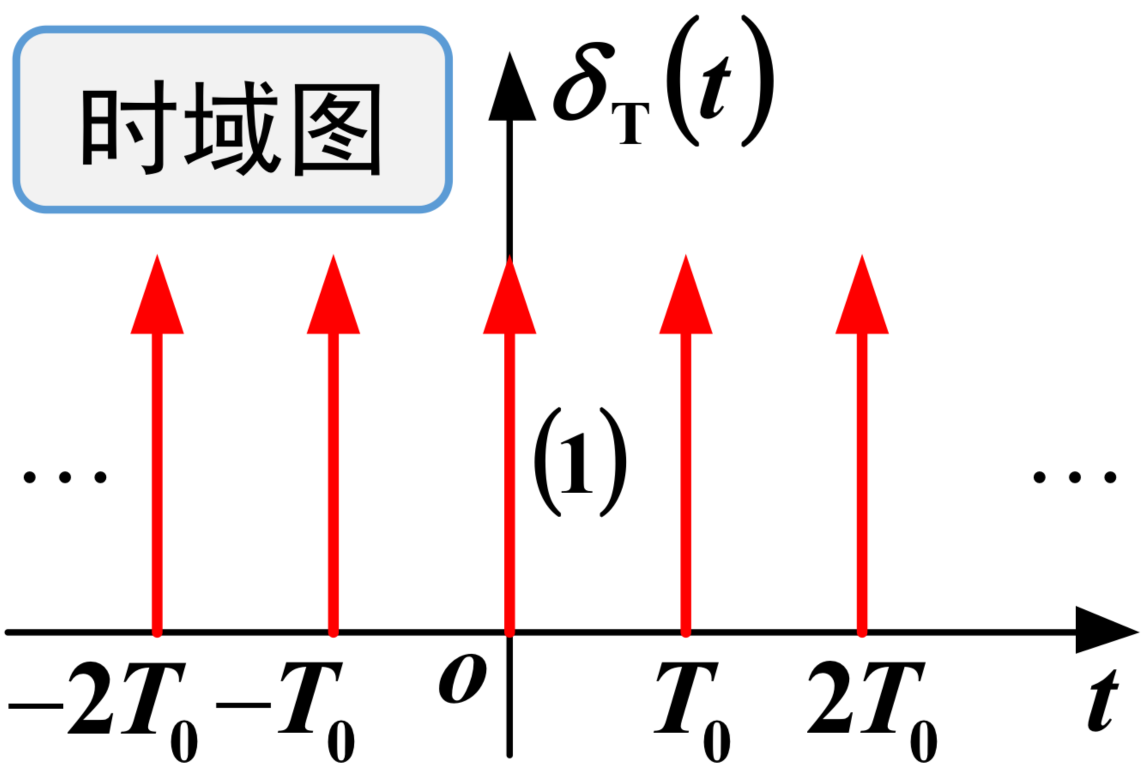
余弦信号 $cos(\omega_0 t)$

$$F(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

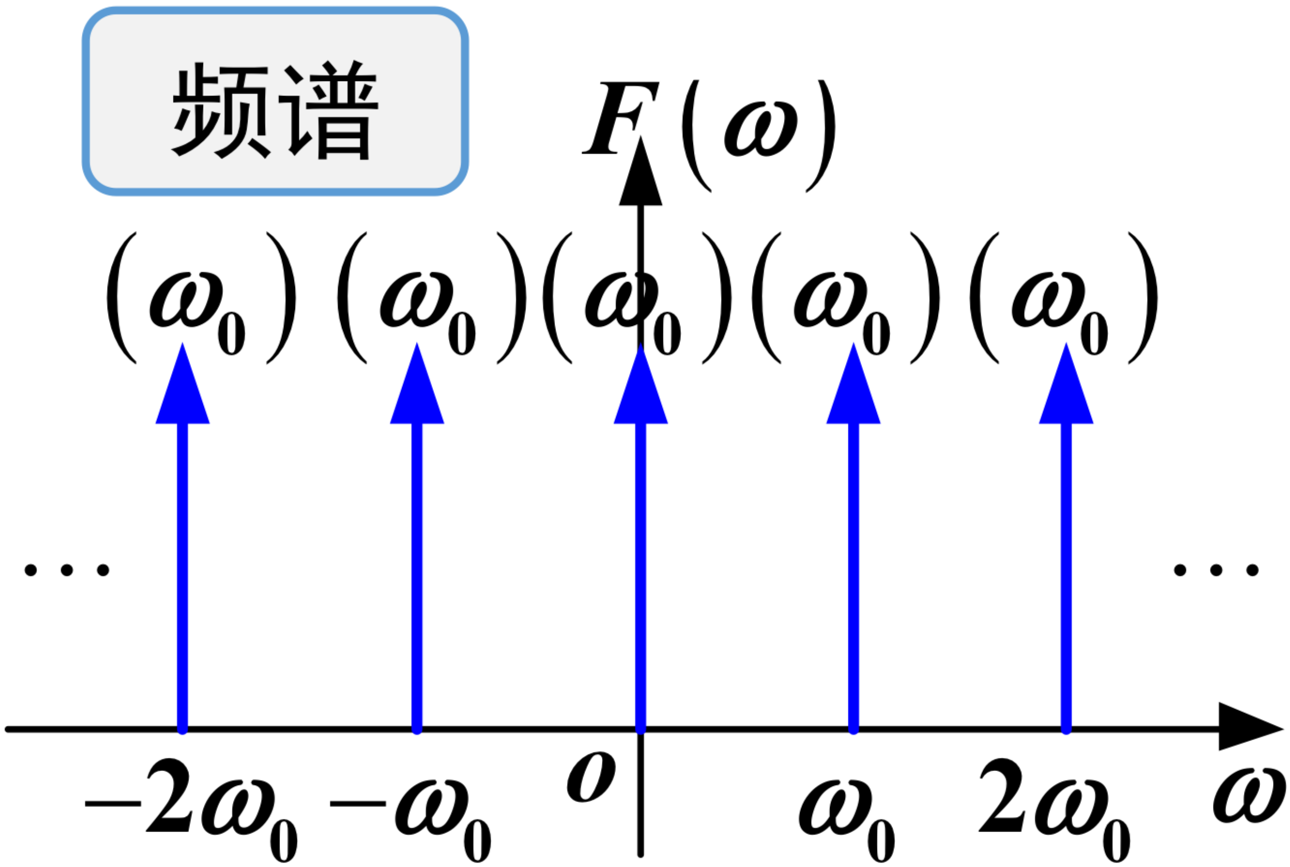
正弦信号 $sin(\omega_0 t)$

$$F(\omega)=\pi e^{-\frac{\pi}{2}j}\delta(\omega-\omega_0)+\pi e^{\frac{\pi}{2}j}\delta(\omega+\omega_0)$$

单位冲激序列



$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$



$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

一般周期信号的傅里叶变换

周期信号可以表示为傅里叶级数形式

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

其傅里叶变换为

$$F_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot \delta(\omega - n\omega_0)$$

傅里叶变换的基本性质

线性

$$\mathscr{F}[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(\omega)+bF_2(\omega)$$

对称性

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$

奇偶虚实性

$$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}=R(\omega)+jX(\omega)$$

$R(x)=\mathscr{F}[f_e(t)]=2\int_0^\infty f_e(t)\cos(\omega t)dt$： 关于 ω 的偶函数

$X(\omega)=\mathscr{F}[f_o(t)]=-2\int_0^\infty f_o(t)\sin(\omega t)dt$：关于 ω 的奇函数

$$F(-\omega)=R(-\omega)+jX(-\omega)=R(\omega)-jX(\omega)=F^*(\omega)$$

$f(t)$	$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$	
偶函数，奇分量为0	实偶函数 相位 0 或 π	$F(\omega)=R(\omega)$
奇函数，偶分量为 0	虚奇函数，相位 $\pm\frac{\pi}{2}$	$F(\omega)=jX(\omega)$

尺度变换特性

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则 $\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$
当 $a=-1$，$f(t)\to f(-t),F(\omega)\to F(-\omega)$

时移特性

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

时移加尺度变换：若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$, 则 $\mathscr{F}[f(at+b)]=\mathscr{F}\{f[a(t+\frac{b}{a})]\}=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{j\omega\frac{b}{a}}$

频移特性

若 $\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则 $\mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$

时域微分性质

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$， 则 $\mathscr{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)$

频域微分性质

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，则 $\mathscr{F}[tf(t)] = j\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

或 $\mathscr{F}[-jtf(t)] = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

时域积分性质

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow F(\omega)\cdot[\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]$

频域积分性质

若 $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega)$，则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega} F(\omega)d\omega] = -\dfrac{f(t)}{jt} + \pi f(0)\delta(t)$

卷积特性

时域卷积定理

若 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$，则 $\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$

频域卷积定理

若 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$，则 $\mathscr{F}[f_1(t)f_2(t)] = \dfrac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$

拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的定义

双边拉普拉斯变换

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

其中 $s=\sigma+j\omega$， 记作 $f(t) \overset{LT}{\leftrightarrow} F(s)$.

单边拉普拉斯变换

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

推导过程

考虑到

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\mathbf{d}t$$

$f(t)$ 有的时候不满足可积条件，故乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}, \sigma\in\mathbb{R}$，当 σ 取合适的值时，容易满足可积条件。

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{F}[f(t)\cdot e^{-\sigma t}]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma-j\omega t}dt=F(\sigma+j\omega)=F(s)$$

拉普拉斯变换的收敛域

使 $F(s)$ 存在的 s 的区域称为收敛域，记为 ROC.

1. $f(t)$ 为右边信号，若对 $\sigma>\sigma_1$ 的所有实数满足

   $$\lim_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-\sigma t}=0$$

   ROC: $Re[s]=\sigma>\sigma_1$
2. $f(t)$ 为右边信号，若对 $\sigma<\sigma_2$ 的所有实数满足

   $$\lim_{t\to-\infty} f(t)\cdot e^{-\sigma t}=0$$

   ROC: $Re[s]=\sigma<\sigma_2$
3. 双边信号的收敛域为两个收敛域的子集，ROC: $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$.

常用信号的拉普拉斯变换

1. 阶跃函数

$$\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$$

ROC: $\sigma>0$

2. 单边指数函数

$$\mathscr{L}[e^{-s_0 t}u(t)] = \frac{1}{s+s_0}$$

$s_0 = \alpha + j\omega_0$, ROC: $\sigma > -Re[s]$ 即 $\sigma > -\alpha$.

3. 单位冲激信号

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

ROC: 全 s 域平面收敛.

4. $t^n u(t)$

$$\mathscr{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

ROC: $\sigma > 0$.

5. 三角函数

$$\mathscr{L}[\sin(\omega_0 t)] = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\mathscr{L}[\cos(\omega_0 t)] = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

ROC: $\sigma > 0$.

6. 冲击偶信号

$$\mathscr{L}[\delta'(t)] = s$$

典型信号拉氏变换表

典型信号拉式变换表

$$\mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=1 \quad \mathscr{L}\left[\delta^{(n)}(t)\right]=s^n$$

$$\mathscr{L}\left[u(t)\right]=\frac{1}{s} \quad \mathscr{L}\left[t\right]=\frac{1}{s^2} \quad \mathscr{L}\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}\left[\cos(\omega_0 t)\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0{}^2} \quad \mathscr{L}\left[\sin(\omega_0 t)\right]=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-\alpha t}\right]=\frac{1}{s+\alpha} \quad \mathscr{L}\left[e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\right]=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\right]=\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

拉普拉斯变换的性质

1. 线性性质

若 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s), \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，则 $\mathscr{L}[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)]=K_1F_1(s)+K_2F_2(s)$

收敛域取交集，不包含任何一个极点.

2. 时移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=F(s)e^{-st_0}$.

$t_0>0$，需要取单边.

3. s 域平移性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, 则 $\mathscr{L}[f(t)e^{-at}]=F(s+a)$.

4. 尺度变换性质

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$, 则 $\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),(a>0)$

Note: 时移和尺度变换都有时：$\mathscr{L}[f(at-b)u(at-b)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-s\frac{b}{a}}$.

5 卷积定理

若 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s),f_1(t),f_2(t)$ 为有始信号，则

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)F_2(s)$$

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*f_2(s)$$

6. 微分性质

(1) 双边拉普拉斯变换

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}]=sF(s)$

(2) 单边拉普拉斯变换

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}]=sF(s)-f(0_-)$

7. 积分性质

(1) 双边拉普拉斯变换

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau]=\frac{F(s)}{s}$

(2) 单边拉普拉斯变换

若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则 $\mathscr{L}[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

8. 初值定理

若 $f(t)$ 及 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 可以进行拉氏变换，且 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，则

$$\lim_{t\to 0_+}f(t)=f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

Note: 若 $F(s)$ 不是真分式，应化为真分式+多项式形式，$F(s)$ 是真分式.

9. 终值定理

若 $f(t)$ 及 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 可以进行拉氏变换，且 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，则

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

终值存在只有两种情况：

1. 极点都在 s 左半平面，终值为 0；
2. **单**极点在 s=0，求终值相当于求部分分式展开式中 $\frac{k}{s}$ 项的系数 k.

10. s 域微分性质

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则 $\mathscr{L}[tf(t)] = -\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$

推广：$\mathscr{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{ds^n}$

11. s 域积分性质*

若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$， 则 $\mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty F(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

要求 $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(t)$ 有界.

拉普拉斯逆变换

只介绍部分分式展开法：先展开成部分分式，再通过查典型信号拉氏变换表对应到原函数。

0. 预处理

能分离常数的，分离常数，例如 $F(s) = \frac{s}{s+2} = 1 - \frac{2}{s+2}$

1. 单阶实极点

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \cdots \frac{k_n}{s-p_n}$$

2. 多重极点

重根项的各阶分式都可能存在。

$$F(s)=\dfrac{A(s)}{(s-p_1)(s-p_2)^{m}}=\dfrac{k_1}{s-p_1}+\sum_{i=1}^{m}\dfrac{k_{2,i}}{(s-p_2)^i}$$

例：

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{(s+1)^2}$$

k_1,k_3 可以比较简单地4. 系数求解。

k_2 需要做额外处理：等式两边同时乘 $(s+1)^2$。

$$\text{右边}=(s+1)^2\frac{k_1}{s+2}+k_2(s+1)+k_3$$

两边对 s 求导

$$\text{右边}=\left[(s+1)^2\left(\frac{k_1}{s+2}\right)'+2(s+1)\frac{k_1}{s+2}\right]+k_2$$

此时令 $s=-1,\text{右边}=k_2$

$$k_2=\text{左边}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{ds}}\left[\frac{s^2}{s+2}\right]_{s=-1}=-3$$

3. 共轭复极点

若存在复极点，则必然以共轭对的形式出现，把共轭复极点写成指数加权的正弦项和余弦式变换式的组合。

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s-p_1)[(s-\alpha)^2+\omega^2]}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega^2}+\frac{k_3\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$$

4. 系数求解

使用待定系数法和 Heaviside 掩盖法求解。

Heaviside掩盖法

$$k_i=F(s)(s-p_i)|_{s=p_i}$$

注意，其中 $s-p_i$ 是通常情况下，这里实际上指的是 k_i 那一项的分母，同时还要注意分子不只有 k_i 的情况需要特殊处理。

5. 包含冲激项（假分式）的

先把假分式展开为正幂函数多项式和真分式相加的形式，再进行运算。

例如 $F(s)=\dfrac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}=s+2+\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

6. 包含时移项的

时移项 $e^{-\alpha s}$ 要最后处理，对整个函数（包括 $u(t)$）进行时移。

例如 $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}$， $f(t)=\left[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$

拉普拉斯变换求解微分方程

方程两边做拉氏变换。注意：

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathbf{d}f(t)}{\mathbf{d}t}\right]=sF(s)-f(0_-)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathbf{d}^2f(t)}{\mathbf{d}t^2}\right]=s[sF(s)-f(0_-)]-f'(0_-)$$

然后计算出全响应 $R(s)=A(S)E(S)+C_1(s)r(0_-)+C_2(s)r'(0_-)+\cdots$

其中零状态响应

$$Rzs(s)=A(S)E(S)$$

零输入响应

$$R_{zi}(s)=C_1(s)r(0_-)+C_2(s)r'(0_-)+\cdots$$

拉普拉斯变换分析电路

电路的 s 域模型

电阻

阻抗：R

$V_R(s)=RI_R(s)$

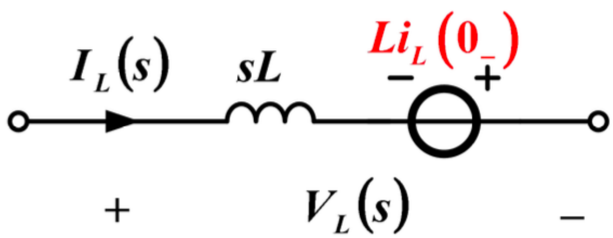
模型和时域相同。

电感

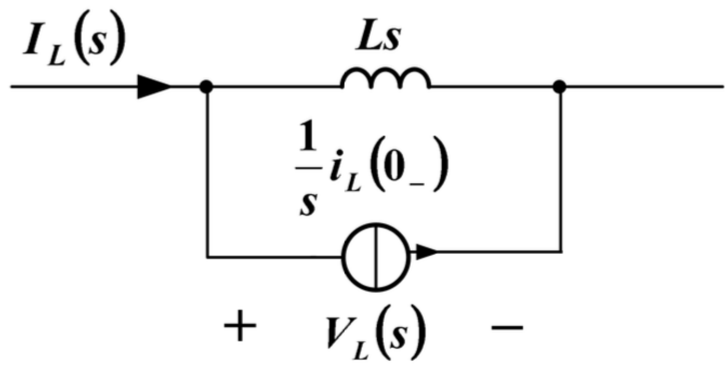
$$e_L(t) = L\frac{\mathbf{d}i_L(t)}{\mathbf{d}t}$$

感抗：Ls

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) = Ls(I_L(s) - \frac{i_L(0_-)}{s})$$



串联模型



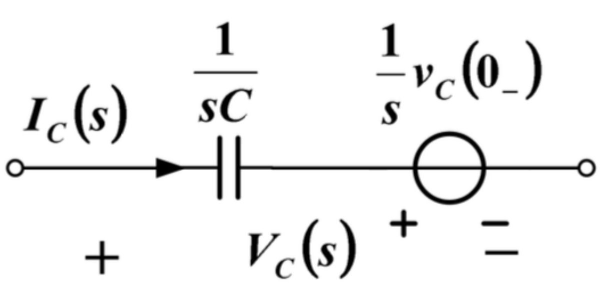
并联模型

电容

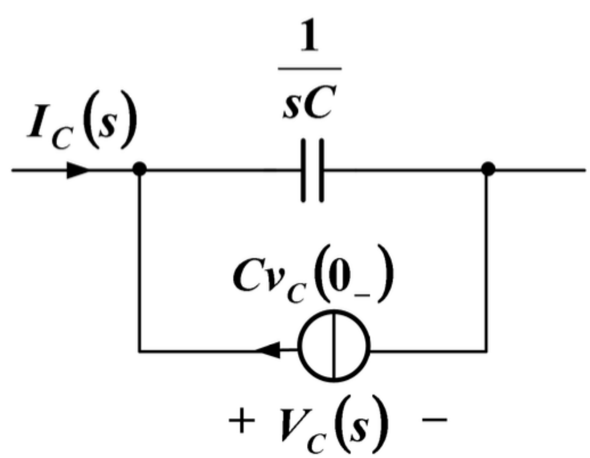
$$i_C(t) = C\frac{\mathbf{d}v_C(t)}{\mathbf{d}t}$$

容抗：$\frac{1}{sC}$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{v_C(0_-)}{s} = \frac{1}{sC}\left[I_C(s) + Cv_c(0_-)\right]$$



串联模型



并联模型

连续系统的稳定性

时域判定方法：系统的单位冲激响应绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\mathbf{d}t \leq M$
s 域判定方法：$H(s)$ 的收敛域包含虚轴。

因果系统稳定性判定方法

1. 稳定系统：全部极点位于 s 平面的左半平面（不包含虚轴）
2. 不稳定系统：有极点位于右半平面，或在虚轴上有二阶及以上极点
3. 临界稳定（不稳定系统）：极点在虚轴上且只有一阶

拉普拉斯变换和傅氏变换的关系

收敛域为 $\sigma > \sigma_0$

1. $\sigma_0 > 0$，收敛轴位于 s 平面的右半平面，则 $F(j\omega)$ 不存在
2. $\sigma_0 < 0$，收敛轴位于 s 平面的左半平面，则

$$F(j\omega = F(s)|_{s=j\omega}$$

3. $\sigma_0 = 0$，收敛轴位于虚轴，则

$$F(j\omega = F(s)|_{s=j\omega} + \pi \sum_n k_n \delta(\omega - \omega_n)$$

时域信号	拉普拉斯变换	傅里叶变换
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{(jw)^2+\omega_0^2} + \frac{j\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{(j\omega)^2} + j\pi\delta'(\omega)$

z 变换

定义

$$令 s = \sigma + j\omega, z = e^{sT}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

单边 z 变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

收敛域

对于任意给定的序列 $x(n)$，能使

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

收敛的所有 z 值之集合为收敛域。

即满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty$ 的区域。

1. 收敛域为 z 平面上以原点为中心的圆环
2. 收敛域内不包含任何极点（以极点为边界）
3. 有限长序列的收敛域为整个 z 平面（可能除去 $z=0$ 和 $|z|=\infty$)
4. 右边序列的收敛域为 $|z|=R_1$ 的圆外
5. 左边序列的收敛域为 $|z|=R_2$ 的圆内
6. 双边序列的收敛域为 $R_1<|z|<R_2$ 的圆环

典型信号的 z 变换

1. 单位样值序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

ROC: 整个z 平面。

2. 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\frac{z}{z-1}$$

ROC: $|z|>1$

3. 斜变序列的 z 变换

$$x(n)=nu(n)$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

ROC: $|z|>1$

4. 指数序列

右边序列 $x(n)=a^nu(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}=\frac{z}{z-a}$$

ROC: $|z|>|a|$

左边序列 $x(n)=-a^nu(-n-1)$

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^nz^{-n}=\frac{z}{z-a}$$

ROC: $|z|<|a|$

z 变换的性质

1. 线性性质

若 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$, $\mathscr{Z}[y(n)]=Y(z)$

则 $\mathscr{Z}[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z)$

ROC: 一般情况下取重叠部分，根据收敛域中不包括任何一个极点判断

2. 位移性质

2.1 双边 z 变换的位移性质

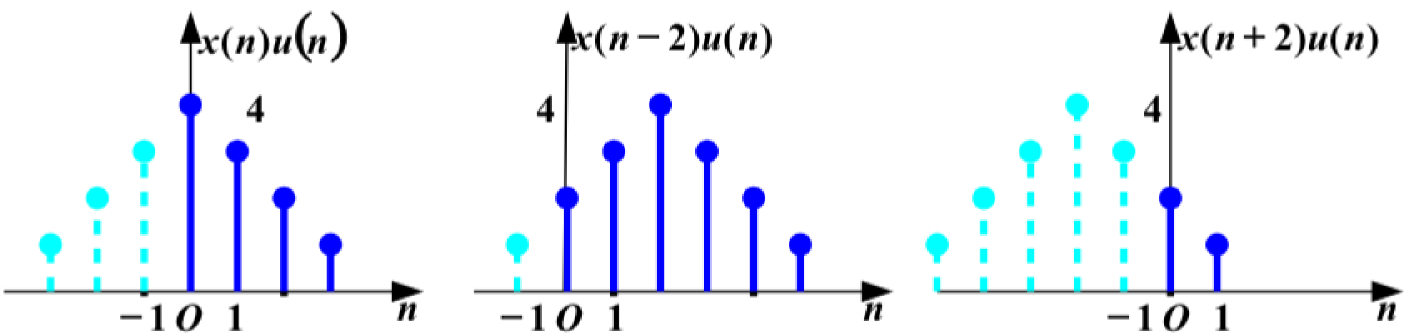
若$\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$，则$\mathscr{Z}[x(n-m)]=z^{-m}X(z)$

m 为整数

收敛域：只会影响 $z=0, z=\infty$ 处

2.2 单边 z 变换的位移性质

若 $x(n)$ 为双边序列，其单边 z 变换为 $\mathscr{Z}[x(n)u(n)]$



$x(n-m)u(n), x(n+m)u(n)$ 较 $x(n)u(n)$ 的长度有所增减。

a. 右移位性质

若 $\mathscr{Z}[x(n)u(n)]=X(z)$

则

$$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)]=z^{-m}[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}]$$

b. 左移位性质

若 $\mathscr{Z}[x(n)u(n)]=X(z)$

则

$$\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}]$$

3. 序列线性加权

若 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z)$

则 $nx(n) \leftrightarrow z^{-1}\frac{\mathbf{d}X(z)}{\mathbf{d}z^{-1}}$

$n^m x(n) \leftrightarrow [-z\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}z}]^m X(z)$

4. 序列指数加权

若 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z)$

则 $a^n x(n) \leftrightarrow X(\frac{z}{a})$

5. 初值定理

若 $x(n)$ 为因果序列。

已知

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

则

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

6. 终值定理

若 $x(n)$ 为因果序列，已知

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

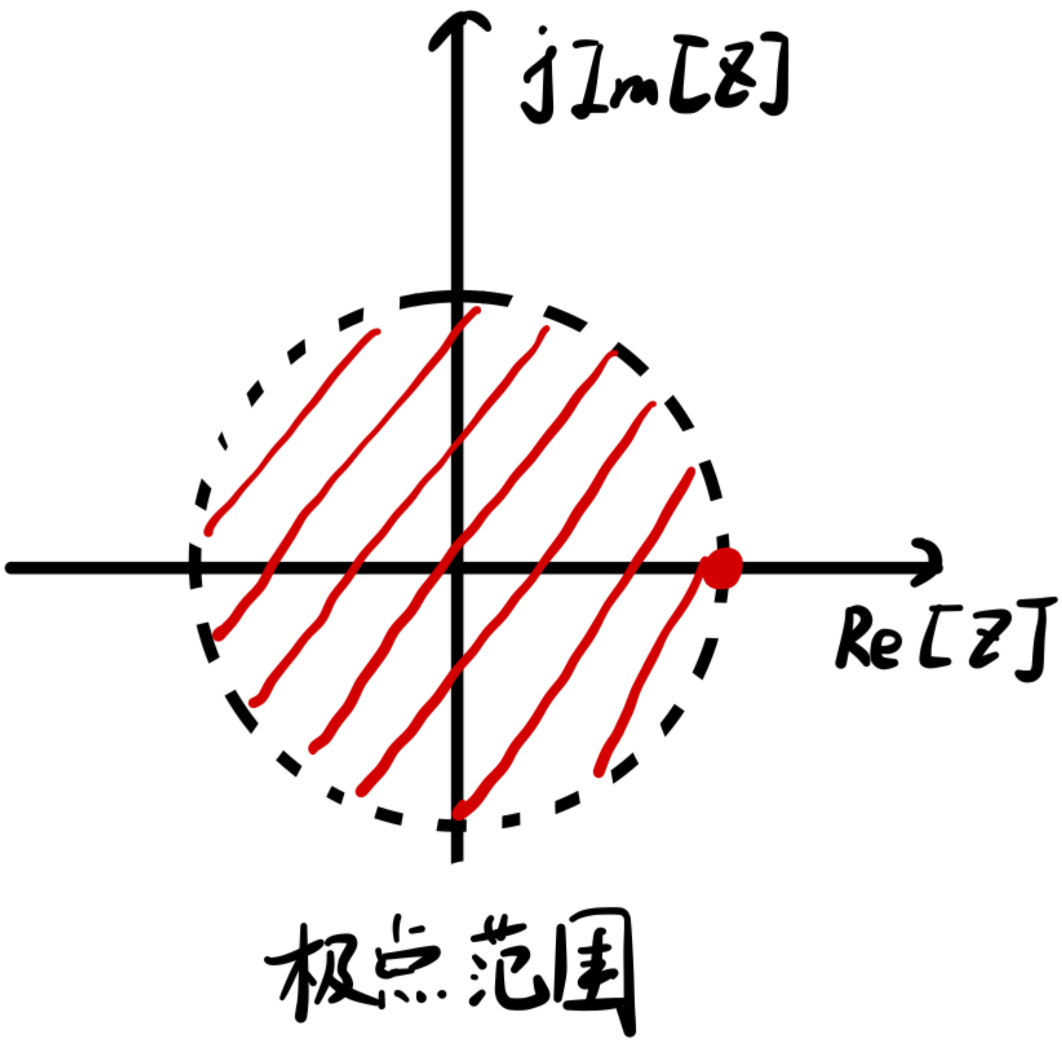
终值定理存在的条件：

1. $X(z)$ 的极点位于单位圆内，收敛半径小于1，有终值

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z) = 0$$

2. 若极点位于单位圆上，只能位于 $z=1$，并且是一阶极点。

$$x(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$$



7. 时域卷积定理

已知 $X(z) = \mathscr{Z}[x(n)], H(z) = \mathscr{Z}[h(n)]$

则 $\mathscr{Z}[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$

ROC: 一般情况下取重叠部分.

8. z 域卷积定理*

逆 z 变换

只介绍部分分式展开法。

1. 预处理

先把 $X(z)$ 乘 z^{-1}

2. 部分分式展开

展开部分分式，使用掩盖法求系数。这一步和拉普拉斯逆变换的部分分式展开法类似。

注意对于高阶极点，需要额外处理。

$$X(z)=\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j z}{(z-z_i)^j}$$

其中

$$B_j=\frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{\mathbf{d}^{s-j}}{\mathbf{d}z^{s-j}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]$$

例如：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{B_1}{z-1}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\frac{B_3}{z}$$

其中，B_2, B_3 直接利用掩盖法计算。

$$B_1=\frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{\mathbf{d}^{2-1}}{\mathbf{d}z^{2-1}}(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1}=-1$$

这里和拉普拉斯逆变换的高阶极点处理方式也类似。

3. 查表

查表把展开的部分分式对应到原函数。

z 变换求解差分方程

对方程两边进行**单边** z 变换，注意2.2 单边 z 变换的位移性质

$$\mathscr{L}[x(n-m)u(n)] = z^{-m}\left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right]$$

求出 $Y(z)$，再逆变换得 $y(n)$。

因果性和稳定性

$$\text{因果性:}\begin{cases}\text{时域:}h(n)=h(n)u(n)\\ \text{z域: 收敛域包含}\infty\end{cases}$$

$$\text{稳定性:}\begin{cases}\text{时域：}\quad \sum_{-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty\\ \text{z域:}\begin{cases}\text{收敛域包含单位圆}\\ \text{对于因果系统: 极点位于单位圆内}\end{cases}\end{cases}$$

离散系统函数和离散傅里叶变换的关系

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$