特征线方法

BY 胡友俊

特征线方法的目的是让多维问题变为一维问题. 举例如下

$$q_t(t,x)+u(t,x)q_x(t,x)=f(t,x) \tag{1}$$

其中$u(t,x)$, $f(t,x)$ 是已知函数。这里相空间(t,x)是两维的。能不能在相空间中找出一族线(这族线可以布满整个相空间），且沿着这族线中的每一条线的$q(x,\ t)$的方向导数都是已知的。如果能办到的话,问题就转化为一维问题。

我们假设这样的线确实存在并把它的方程记为$x(t)$,那么沿这条线$q(t,x)$ 的方向导数为:

$$\frac{dq(t,x(t))}{dt}=q_t(t,x(t))+q_x(t,x(t))\frac{dx(t)}{dt} \tag{2}$$

如果这条线的方程是

$$\frac{dx(t)}{dt}=u(x,t)$$

那么根据方程(1), 我们知道(2)中的方向导数就等于方程(1)的右端, 而右端的$f(t,\ x)$ 是已知的。所以问题解决。这条线称为方程(1)的特征线.

原问题转化为多个(对应不同初条件）如下的常微分方程问题:

$$\begin{aligned}&\frac{dg(t)}{dt}\equiv\frac{dq(t,x(t))}{dt}=f(t,x(t))\\&\frac{dx(t)}{dt}=u(t,x)\end{aligned}$$

给定初条件 $x(t_0)=x_0$, $g(t_0)=g_0$，对上面的常微分方程组直接积分就可以求到相空间中这条特征线线上的所有点的q 的函数值。

取不同的初条件就可以把相空间中所有点上的q的函数值求出。 特征线是粒子模拟方法的基础，在全粒子模拟中，相空间$(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$是7维的。

1 一个特例

取方程(1)的$u(x,t)=U$(常数), 那么特征线方程是直线方程 $dx/dt=U$, 其通解为:

$$x=Ut+c$$

再设 $f(x,t)=0$, 那么我们知道沿特征线的导数都为零.

问题：如果已知 $q(x,t_0)=\overline{q}(x)$ 求给定的相空间中的一点(a,b) 处的q 值。

答：过$(a,\,b)$ 这一点的特征线方程为 $x=Ut+a-Ub$, 其与$(t=t_0)$ 线的交点为 $x=Ut_0+a-Ub$

那么$q(a,b)=q(Ut_0+a-Ub,t_0)=\overline{q}(Ut_0+a-Ub)$

换为习惯的记号即为 $q(x,t)=\overline{q}(x-U(\,t-t_0))$

所以解的意义就是一个以速度U 传播的波。