

中国科学技术大学 博士学位论文



电流片中的不稳定性的研究

作者姓名：胡友俊
学科专业：等离子体物理
导师姓名：杨维纮 教授 陈银华 教授
完成时间：二〇〇九年四月

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Instabilities in Current Sheets

Author's Name : Youjun Hu
Speciality : Plasma Physics
Supervisor : Prof. Weihong Yang Prof. Yinhua Chen
Finished Time : April, 2009

中国科学技术大学学位论文原创性和授权使用声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

本人授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

作者签名：_____

年 月 日

摘 要

电流片是自然界中一种基本的等离子体结构,广泛存在于地球磁尾,磁层顶,弦激波,太阳圈(Heliosphere)中。电流片是一个强非均匀性的过渡层,其间发生各种能量的输运与转化过程,其中最重要的是磁场重联过程。磁场重联是等离子体中的一种基本的能量输运和转化机制,它使得电流片中的反向磁场结构发生拓扑变化,并伴随着磁能向等离子体动能和热能的转化,空间中发生的很多爆发现象,如日珥,日冕物质抛射,磁层亚暴,以及托卡马克中的锯齿破裂,都与电流片中的重联过程密切相关。电流片位形中的不稳定本征模,对磁场重联的触发和发展有重要作用,其中撕裂模不稳定性本身是一种自发重联过程,它对大规模磁场重联的触发有直接作用。各种沿平衡电流方向传播的漂移不稳定性本身不重联磁场,它们通过引发反常电阻或激发二次不稳定性从而影响重联模(撕裂模)的发展。本文的工作是用无碰撞动理学理论(Vlasov-Maxwell方程组)研究这些不稳定的线性本征模,计算它们的增长率,模结构和参数依赖。我们研究了三种本征模:撕裂模,漂移扭曲模和低杂漂移模。

在对线性化Vlasov方程的处理中,本文采用的方法是传统的沿特征线(未扰轨道)积分方法。与大部分文献不同的是,我们不对未扰轨道作任何解析近似,而是用直接的数值方法求解初值问题从而给出未扰轨道,进而利用轨道的周期性计算出轨道积分。在扰动脉场的处理中,我们用标势和矢势描述电磁场,扰动脉场的静电和电磁部分都被保留,对未知的扰动脉场空间分布,我们采用基函数展开的方法(谱方法),从而将关于扰动脉场的积分微分方程的本征值问题化为矩阵问题,最终计算出不稳定性的增长率和扰动脉场的空间分布。

Kappa分布能很好的描述空间等离子体中的超热分布。我们研究了具有Kappa分布的电流片中的撕裂模和漂移扭曲模,并把结果和Harris电流片的对应模式比较。我们发现具有这种超热分布的电流片中的撕裂模和漂移扭曲模的增长率要小于Harris电流片中的对应模式,且增长率随着谱指数 κ 的降低而降低。

我们研究了分布函数各向异性对撕裂模的影响。研究了温度各向异性性的Harris电流片中的撕裂模。结果表明,电子的温度各向异性会显著影响撕裂模的增长率,当电子垂直磁场方向上的温度高于平行磁场方向上的温度 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时,撕裂模的增长率远大于温度各向同性时的情况,且最大增长率所对应的波长位置随着 $T_{e\perp}/T_{e\parallel}$ 的增加而向短波方向移动。反之,当 $T_{e\perp} < T_{e\parallel}$,

撕裂模受到抑止，其增长率小于温度各向同性时的情况。

离子的温度各向异性对撕裂模的影响与电子类似，但在同样的温度各向异性程度下，其影响远小于电子。

我们构造了一种分布函数各向异性的电流片，我们称之为Kappa-Maxwell电流片。这种电流片在平行磁场方向上的速度分布是Maxwell分布，而在垂直磁场上是Kappa分布。这种电流片具有内在的各向异性特点，且可以通过改变谱指数 κ 的值来改变各向异性程度，我们用这种电流片模型来描述实际模拟中观测到的电子分布函数的各向异性。我们计算了这种电流片中的撕裂模的增长率，结果表明，这种电流片中的撕裂模的增长率远大于各向同性情况，且增长率随着谱指数的降低而增加。而撕裂模的最大增长率所对应的波长位置随着谱指数的降低而趋于短波。

各章的主要内容如下：

第一章给出了构造等离子体电流片平衡位形的方法，并给出了Harris电流片，Kappa电流片模型的构造过程，进而我们提出了一种混合电流片模型：Kappa-Maxwell电流片模型。

第二章给出了处理电流片线性本征模的基本方法，其中包括：未扰动轨道的周期性，未扰轨道积分的计算，扰动场的基函数展开，积分微分方程的本征值问题的处理。

第三章研究了电流片中的无碰撞撕裂模不稳定性，计算了不稳定性的色散关系，模结构和参数依赖。首先研究了温度各向同性的Harris电流片中的撕裂模，并把结果和文献中的结果比较。然后我们研究了温度各向异性对撕裂模的影响。结果表明，电子的温度各向异性在 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时，对撕裂模是解稳作用，而在 $T_{e\perp} < T_{e\parallel}$ 时，对撕裂模是致稳作用。离子的温度各向异性对撕裂模的影响与电子类似，但在同样的温度各向异性程度下，离子的影响远小于电子。我们研究了具有超热分布（Kappa分布）的电流片中的撕裂模，我们发现具有这种超热分布的电流片中的撕裂模的增长率要小于Harris电流片中的对应模式，且增长率随着谱指数 κ 的降低而降低。对Kappa-Maxwell电流片，我们发现撕裂模的增长率远大于各向同性情况，且随着谱指数 κ 的减小而增加。其原因是此时谱指数 κ 控制垂直磁场方向上的等效温度，在 κ 为有限值情况下的垂直等效温度大于平行等效温度，而这种 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ 的温度各向异性对撕裂模起促进作用。

第四章研究了Kappa电流片中的漂移扭曲模，计算了模式的增长率，模结构，和参数依赖。结果表明，此种情况下的漂移扭曲模的性质和Harris电流片中的对应模式性质相似，但增长率小于Harris电流片中的对应模式，这一点和上一章中关于撕裂模的结果相同。

在第五章中，我们在局域理论的框架下，研究了电流片中的背景等离子体

对低杂漂移不稳定性的影响,结果表明,背景等离子体抑制低杂漂移模的增长,并使其实频降低。这一章中所用的方法与前两章不同:在处理中忽略了扰动场的空间分布,且对电子和离子的未扰轨道使用了近似的解析表达式。得到的结果仅对远离电流片中心的边缘区域有意义。

第六章是总结和展望。

关键词: 电流片, Vlasov-Maxwell方程组, 未扰轨道积分, 撕裂模不稳定性, 漂移扭曲不稳定性, 低杂漂移不稳定性

ABSTRACT

Current sheets are basic plasma structures in nature, which have been observed in the magnetotail, magnetopause, bow shock and Heliosphere. Current sheets are strongly inhomogeneous narrow transition layers between two regions of oppositely directed magnetic fields. Important transport processes are known to happen in this narrow layer, most notably is the process of magnetic reconnection, during which magnetic energy is converted to plasma kinetic and thermal energy. Magnetic reconnection is believed to play a central role in many violent plasma phenomena such as solar flares, coronal mass ejections, magnetospheric substorms, and sawtooth crashes in tokamaks. The collisionless instabilities in current sheet are crucial for determining the onset conditions and time scales of magnetic reconnection. Tearing mode in itself is a process of magnetic reconnection. Various drift instabilities do not reconnect the magnetic, however, can influence the magnetic reconnection onset through anomalous resistivity or through their effects on tearing mode.

In this paper, by using a formally exact method to solve the linear Vlasov-Maxwell system, tearing mode and drift kink mode are investigated. The orbit integrals are treated numerically using the exact unperturbed particle orbits, and the resulting eigenvalue problem of the integro-differential equations is solved using the spectral method.

It is found that tearing mode and drift kink mode in the current sheet with a superthermal velocity distribution (kappa-distribution) have smaller growth rate than their counterparts in the current sheet with an Maxwellian distribution.

The effects of distribution function anisotropy on tearing mode are investigated. For Harris sheets, the electron temperature anisotropy has important influence on tearing mode: electron temperature anisotropy is strongly destabilizing when $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ and strongly stabilizing when $T_{e\perp} < T_{e\parallel}$.

The ion temperature anisotropy has the same destabilizing/stabilizing effect as electrons on tearing mode. However, compared with electron temperature anisotropy, the ion temperature anisotropy has much less influence on tearing mode.

We proposed a new current sheet model, namely Kappa-Maxwell sheet, which has a Maxwellian velocity distribution in the direction parallel to the magnetic field and a Kappa velocity distribution in the direction perpendicular to the magnetic field. This kind of current sheet mode can well represent the velocity distribution observed

in the numerical simulation of lower-hybrid drift instability. We found that the tearing mode in Kappa-Maxwell sheet has much larger growth rate than its counterpart in isotropic Harris sheet. The explanation is that the perpendicular effective temperature is greater than parallel temperature in Kappa-Maxwell sheets and this kind of temperature anisotropy is known to be able to enhance the tearing mode growth rate.

In chapter 5, in the framework of local theory, we investigated the effect of background population in current sheet on the lower-hybrid drift instability. The results indicate that the background population has a stabilizing effect on lower-hybrid drift instability and reduces the phase velocity of the mode.

Keywords: Current Sheet, Vlasov-Maxwell system, Unperturbed orbit integral, Tearing mode, Drift kink instability, Lower-hybrid drift instability

目 录

摘要	I
ABSTRACT	IV
目录	VI
第 1 章 等离子体电流片	1
1.1 引言	1
1.2 平衡分布函数的构造	6
1.3 Harris 电流片模型	8
1.3.1 平衡分布函数	8
1.3.2 分布函数的矩	9
1.3.3 平衡方程	10
1.4 各向异性Harris电流片	11
1.4.1 平衡分布函数	12
1.4.2 分布函数的矩	12
1.4.3 平衡方程	12
1.5 Kappa分布函数	13
1.6 具有Kappa分布的电流片	14
1.6.1 平衡分布函数	14
1.6.2 分布函数的矩	15
1.6.3 平衡方程	15
1.7 Kappa-Maxwell电流片	16
1.7.1 平衡分布函数	18
1.7.2 分布函数的矩	18
1.7.3 平衡方程	18
第 2 章 线性稳定性分析的基本理论	20
2.1 扰动分布函数	20
2.2 对平行磁场方向速度积分的处理	26
2.3 垂直磁场平面内的未扰轨道的性质	28
2.3.1 轨道的周期性	29
2.3.2 轨道的返转点	31
2.3.3 轨道的周期	33

2.3.4	粒子在 y 方向上的漂移	34
2.4	未扰轨道积分的计算	34
2.5	Vlasov-Maxwell方程组	37
2.6	处理本征值问题的方法	38
2.7	归一化和计算步骤	38
第3章	无碰撞撕裂模不稳定性	41
3.1	概述	41
3.2	Harris电流片中的撕裂模	44
3.2.1	各向同性情况	45
3.2.2	各向异性情况	55
3.3	Kappa电流片中的撕裂模	60
3.3.1	色散关系	60
3.3.2	最大增长率随 κ 的变化关系	62
3.4	Kappa-Maxwell电流片中的撕裂模	64
3.4.1	色散关系	64
3.4.2	增长率随 m_i/m_e 的变化关系	65
3.4.3	增长率随谱指数 κ 的变化关系	66
3.5	小结	67
第4章	漂移扭曲不稳定性	68
4.1	引言	68
4.2	基本方程	69
4.3	计算结果	70
4.3.1	本征函数	70
4.3.2	色散关系	70
4.3.3	最大增长率与谱指数 κ 的依赖关系	71
4.3.4	最大增长率与电流片厚度及离子电子温度比的依赖关系	71
4.3.5	最大增长率随离子电子质量比 m_i/m_e 的变化关系	72
4.3.6	背景等离子体对漂移扭曲模的影响	74
4.4	小结	76
第5章	低杂漂移不稳定性的局域理论	78
5.1	引言	78
5.2	平衡位形	79
5.3	稳定性分析	79
5.3.1	电子的未扰轨道表达式	81

5.3.2	电子的扰动电荷电流密度	81
5.3.3	离子的扰动密度	83
5.3.4	背景等离子体对扰动电荷与电流的贡献	83
5.3.5	色散关系	84
5.4	计算结果	86
5.5	小结	91
第 6 章	总结和展望	92
参考文献		94
附录	一些公式的推导	101
A.1	Kappa-Maxwell 电流片的扰动分布函数	101
A.2	扰动分布函数对 v_z 的积分	102
A.3	轨道积分化为一个周期内的积分	103
A.4	$k_z = 0$ 时 Kappa 电流片的扰动电荷电流密度的表达式	105
致谢		106
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果		107

第1章 等离子体电流片

1.1 引言

电流片(Current sheet)是指介于两个反向磁场间的电流薄层,也称中性片(neutral sheet)。电流片是自然界中一种基本的等离子体结构,广泛存在于地球磁尾^[1,2],磁层顶,弦激波,太阳圈(Heliosphere)^[3]中。

地球的偶极磁场在太阳风的作用下,面向太阳的一侧磁场被压缩,在太阳风的热压和地球磁场的磁压相平衡的地方,形成地球磁层的边界,称为磁层顶(Magnetopause)。其距离地心大约为8到11个地球半径。当太阳激烈活动时,则被压缩到5-7个地球半径。在背向太阳的一侧,地球磁场被拉伸,形成很长的尾巴,称为磁尾(Magnetotail)。其可以延伸到几百甚至上千个地球半径以外。在磁尾中存在一个特殊的分界面,在这个界面上磁场为零,在分界面两侧磁场改变方向。由安培定律知在这个分界面附近存在电流,因而这个分界面称为电流片,或中性片。中性片将磁尾分成两部分,北面的磁力线向着地球,南面的磁力线离开地球,如图(1.1)所示。

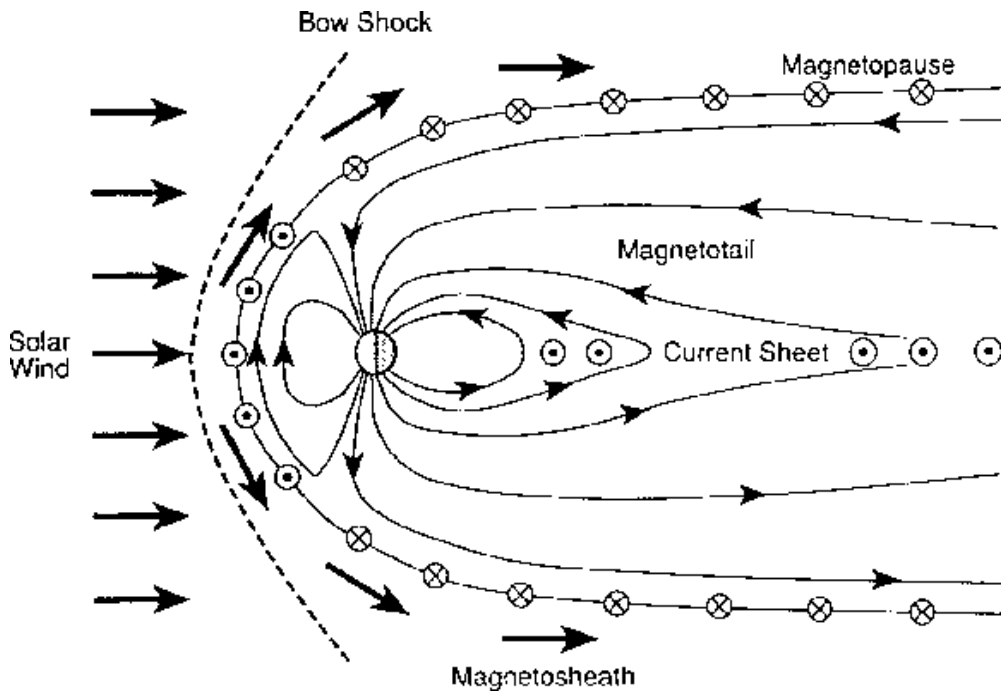


图 1.1 太阳风作用下的地球磁层结构: 磁鞘层(Magnetosheath), 磁层顶(Magnetopause), 磁尾(Magnetotail)和磁尾电流片(Current Sheet)。图中圆圈代表垂直纸面的电流。

电流片区是一个强非均匀的过渡层,其间发生各种能量的输运和转化过

程,其中最重要的是磁场重联过程。磁场重联是等离子体中的一种基本的能量输运和转化机制,它使得电流片中的反向磁场结构发生拓扑变化,并伴随着磁能向等离子体动能和热能的转化^[4-6]。空间中发生的很多爆发现象,如日珥,日冕物质抛射,磁层亚暴,以及Tokamak中的锯齿破裂,都与磁场重联过程密切相关^[7,8]。早期的重联理论预言,在接近无碰撞的等离子体中,磁场重联是很慢的过程。然而快速的重联过程依然在实验室聚变装置和地球磁尾中被观测到^[8-10]。寻找无碰撞等离子体中的快速磁场重联机制一直是人们关注的焦点^[4,11-17]。

电流片中发生的不稳定过程,对磁场重联的触发^[13,18,19],粒子的加热和加速有重要作用。其中无碰撞撕裂模不稳定性本身是一种磁重联过程。它对大规模磁场重联的触发(onset of magnetic reconnection)和发展有直接作用^[19,20]。各种沿平衡电流方向传播的漂移不稳定性(current aligned instabilities, drift instabilities)本身不重联磁场,它们通过引发反常电阻或激发二次不稳定性从而影响重联模的发展^[21-23]。

本文的工作是用无碰撞动理学理论(Vlasov-Maxwell方程组)研究电流片位形中这些不稳定的线性本征模,计算他们的增长率,模结构和参数依赖。我们研究了三种本征模:无碰撞撕裂模,漂移扭曲模和低杂漂移模。

为叙述方便,首先给出本文所使用的坐标系,我们考虑一维的电流片,其非均匀方向在 x 方向,平衡磁场沿 z 方向:

$$\mathbf{B}_0 = B_0(x)\mathbf{e}_z$$

其中 $B_0(x)$ 是关于 x 的奇函数,因而在 $x = 0$ 平面内磁场为零,在该平面两侧磁场改变方向。安培定律决定平衡电流沿 y 方向:

$$\mathbf{J}_0 = J_0(x)\mathbf{e}_y$$

在本文使用的坐标系中, xz 平面称为撕裂模平面,这个平面内的磁场分量将发生重联,因而这个平面也称作重联平面。

电流片中的不稳定性一直是磁层物理中一个很热门的话题,一直以来大家认为磁层亚暴的发生与电流片中的不稳定性过程有很密切的联系。整个磁层亚暴的发生过程是一个涉及多种物理机制的复杂过程,其中电流片中的磁场重联过程是一个重要的物理过程,而电流片中的不稳定性提供了磁场重联的触发机制。因而研究电流片中的不稳定性是整个磁层亚暴研究中的重要一环。

在对电流片中的线性不稳定性的研究中,无碰撞撕裂模是受到最早也是最多研究的模式^[20,24,25],其原因是它是一种重联过程,是一种重联模,人们关

注重联过程，自然会对重联模有很大兴趣。一直以来人们认为撕裂模提供了大规模磁场重联的触发机制^[13,21]。Coppi等人^[20]首先研究了地球磁尾电流片中的无碰撞撕裂模，并用它来解释磁尾中的重联现象和伴随的磁能向粒子动能的转化。结果表明，在重联过程中，重联电场的作用下，磁能被转化为共振电子的动能，而这部分电子局限在电流片中心宽度为 $d_e \sim \sqrt{\rho_e L}$ 的区域内，其中 ρ_e 、 L 分别为电子在渐进场中的热回旋半径和电流片半宽。Dobrowolny^[24]用动理学理论详细计算了Harris电流片位形下的撕裂模的增长率，所用的方法涉及对未扰轨道的简化处理，而且在处理中需要用到小离子回旋半径的条件， $\rho_i/L \ll 1$ ，结果仅适用于厚度远大于离子回旋半径的厚电流片。近些年来卫星观测表明，磁尾电流片在亚暴发生前会变的很薄，其厚度可小到离子回旋半径的量级^[1]。研究这种薄电流片的稳定性问题是近年来一个热点^[26]。在这种薄电流片中，撕裂模的增长率一般大于厚电流片情况，分析这种离子尺度的电流片中的撕裂模，传统的近似理论一般不适用^[25]。

卫星观测表明，在实际的磁尾电流片中，一般存在 x 方向的平衡磁场，称为法向场。很多研究者^[7,27]研究了法向场对撕裂模的影响，大部分的研究结果表明法向场对撕裂模是致稳作用，在实际磁尾法向场作用下，撕裂模是稳定的^[7,28-30]。然而最近的一些研究表明在低杂漂移不稳定性影响下，撕裂模不稳定性仍然有可能在地球磁尾中起作用^[22,31,32]。Chen等人^[33-37]分析了温度各向异性的电流片中的撕裂模，发现离子的温度各向异性会提高撕裂模的增长率。最近的一些模拟结果表明，低杂漂移不稳定性会使得电流片的电流分布由单峰变为双峰，并且这种电流分叉伴随着电子的温度各向异性^[38]。Tatsuki等人^[39]研究了这种分叉电流片中的撕裂模，结果表明电流分叉对撕裂模是致稳作用，而电子的温度各向异性是在 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时是解稳作用，而在 $T_{e\perp} < T_{e\parallel}$ 是致稳作用。这与以前文献的研究结果一致^[33,36]。

撕裂模的波矢平行或近平行于平衡磁场，还存在另外一些模式，其波矢平行或近平行于平衡电流，因而垂直或近垂直于平衡磁场。这些模式与电流片中的电子和离子的宏观漂移运动密切联系，因而称之为漂移不稳定性。沿平衡电流方向传播的这些漂移不稳定性本身不会重联磁场，它们在磁场重联过程中的可能作用有以下两个方面：

- 它们引起的湍流场引发反常电阻，从而影响磁重联过程。
- 它们的非线性发展会改变电流片的平衡参数（例如各向异性地加热电子），从而影响重联模的性质（例如提高撕裂模的增长率），或激发出二次不稳定性（例如引起速度剪切从而激发Kelvin-Helmholtz不稳定性或漂移扭曲不稳定性）。

对第一种可能作用，在重联研究开始之初就被提出来，而且受到广泛研究^[40-43]。然而这种机制目前还是磁重联研究中一个悬而未决的问题。其原因是不能找到合适的能在重联区提供足够反常电阻的模式。在各种漂移不稳定性中，低杂漂移不稳定性曾被认为最有可能提供反常电阻的模式^[44,45]。后来的一些研究逐渐认识到低杂漂移不稳定性引起的波场扰动主要集中在电流片的边缘区域，不能有效影响电流片中心区域的磁场重联过程^[40,41]。

最近的实验室磁场重联研究^[46]发现，在电流片的中心区域（重联区）存在很强的电磁扰动，其频率在低杂频率范围内，而且这种电磁扰动的出现与重联率的提高有一定正相关。为解释这一实验结果，Daughton^[41]研究了Harris电流片位形中的低杂频率范围内的电磁模，结果发现存在波长满足 $k_y \sqrt{\rho_i \rho_e} \sim 1$ 的电磁模，其中 ρ_i 和 ρ_e 分别为离子和电子的热回旋半径。这种电磁模的频率在低杂频率的范围，其增长率小于通常的低杂漂移不稳定性的增长率，但其在电流片中心区域有很强的电磁分量，这与实验室重联实验中所观测到的电磁扰动吻合。Kulsrud等人^[23]利用实验数据计算了这种电磁振荡所引发的反常电阻及等离子体加热，结果表明这种电磁振荡能显著影响重联过程。

对于第二种可能作用，即漂移模的非线性发展会影响重联模的性质或激发出二次不稳定性，其物理图像直观。这个方向最近几年受到很大的关注^[13,21,22]。例如，短波长的低杂漂移不稳定性的线性增长与非线性饱和都远快于重联模，其在非线性发展中会各向异性地加热电子，从而使电子的分布函数出现各向异性，电子分布的这种各向异性会显著提高撕裂模的增长率，从而起到触发和加速重联的作用。另一方面，低杂漂移模的非线性发展会改变电流片的宏观分布，例如使电流片变薄，使电流分布由单峰变为双峰，改变流体速度分布导致速度剪切等。这些宏观的电流片参数的改变会激发出二次不稳定性，例如，Kelvin-Helmholtz不稳定性，漂移扭曲不稳定性。这些二次不稳定性可能在重联区提供反常电阻从而影响重联过程^[42,43]。

在本文中我们将在线性情况下，考虑低杂漂移不稳定性随引起的粒子分布函数的各向异性对撕裂模的影响。同时我们还考虑了一种由于低杂漂移不稳定性的发展所激发的二次不稳定性：漂移扭曲模。

观测表明空间等离子体分布函数通常偏离Maxwell分布，这种非热分布能很好的被Kappa分布函数描述^[47-50]。而在通常的Harris电流片模型中，粒子的分布函数是取为Maxwell分布。为了更好地描述空间中的电流片，最近有研究者用Kappa分布函数构造了电流片模型^[51,52]。在本文中我们研究了具有Kappa分布的电流片中的撕裂模和漂移扭曲模。并把结果和Harris电流片中的对应模式比较。我们发现具有这种超热分布的电流片中的撕裂模和漂移扭曲模的增长率要小于Harris电流片中的对应模式，且增长率随着谱指数 κ 的降低而降低。

在无碰撞的空间等离子体中，平行磁场和垂直磁场方向上的运动解耦，往往使得这两个方向上的分布函数不同，从而产生分布函数的各向异性。基于Maxwell分布和Kappa分布，我们构造了一种混合型的电流片，即把垂直磁场方向的粒子分布取为Kappa分布，而平行磁场方向上的分布取为Maxwell分布。我们称这种电流片模型为Kappa-Maxwell电流片。这种电流片模型垂直和平行磁场方向上的分布不同，因而有内在的各向异性特点，且可以通过改变谱指数 κ 值来调节各向异性程度。另一方面，一些数值模拟结果表明低杂漂移不稳定性(LHDI)会各向异性地加热电子，使得电子垂直磁场的温度高于平行磁场方向上的温度^[13,21,38]。当垂直方向和平行方向的分布是Maxwell分布时，这种各向异性可以用双温Maxwell分布来描述。然而实际模拟中的垂直分布和平行分布很复杂，偏离Maxwell分布，这启发我们考虑一种更一般的各向异性分布来研究各向异性对不稳定性的物理效果，我们这里选择Kappa-Maxwell电流片模型来描述实际模拟中的分布函数各向异性。我们研究了这种分布函数的各向异性对撕裂模的影响。

本文所用的基本方法：在对线性化Vlasov方程的处理中，我们采用的方法是传统的沿未扰轨道积分方法，与大部分文献不同的是，我们不对未扰轨道做任何解析近似，而是用直接的数值方法求解初值问题从而计算出未扰轨道，进而利用轨道的周期性计算出轨道积分。在对扰动电磁场的处理中，我们用标势和矢势来描述电磁场，扰动场的静电和电磁效应都被保留，对未知的扰动场空间分布，我们采用基函数展开的方法（谱方法），从而将关于扰动场的积分微分方程的本征值问题转化为矩阵问题，最终计算出不稳定性的增长率和扰动场的空间分布。

以上的方法仅用到基本的动理学理论，不涉及任何解析近似，原则上包含了线性情况下的所有物理效应。其误差只出现在数值离散的过程中。方法的特点体现在对未扰轨道积分的处理和对扰动场的基函数展开处理中，这一方法最先由Daughton^[25,41,53]提出并用于分析Harris电流片中的线性本征模。

处理电流片中的线性不稳定性有两个难点。第一是复杂的未扰轨道，第二是等离子体响应的非局域性质（积分性质）。

在电流片的非均匀磁场中，对应不同的初始条件，存在各式各样的粒子轨道，有些粒子局限在远离电流片中心的边缘区域运动，这里磁场的非均匀性较弱，粒子的轨道可以看作回旋轨道叠加上导心的 ∇B 漂移。有些粒子的运动区域接近电流片中心，这里磁场的非均匀性强，漂移回旋轨道已经不能很好描述其运动，尤其是对那些跨越电流片中心的粒子，其运动区域经过磁场为零的区域，其轨道完全不同与漂移回旋轨道，对这部分粒子的轨道一般很难较好地解析描述，而在计算未扰轨道积分时需要用到这些轨道。

对第二个难点，由于扰动场会出现在轨道积分里，例如

$$\rho = \int_{-\infty}^0 \varphi(x'(\tau)) d\tau$$

其中 x' 为一条未扰轨道，这样经过一个轨道积分，等离子体在空间一点上的响应将依赖于扰动场 $\varphi(x)$ 在一个区域内的空间分布，而不是局域在一个点上。这种非局域效应对电流片的中心区域尤为突出，因为这里磁场强度较弱，会出现大尺度的跨越电流片中心的粒子轨道，扰动场在轨道所经历的区域会有显著变化。然而由于未扰轨道的复杂性，而且这个扰动场的空间分布事先是未知的，需要我们最后自洽地确定，这样使得这个积分算符很难解析处理。

Daughton^[25,41,53]所提出的方法正是为了克服以上两个困难。其关键点就是未扰轨道积分的处理和对扰动场的基函数展开方法。本文正是基于这一方法。在第2章中我们详细介绍了这一方法。在第3章和第4章中，我们用这种方法分别研究了两种线性不稳定性：撕裂模和漂移扭曲模。而第5章用到的方法与前两章不同，那里我们忽略扰动场的空间分布，并使用了近似解析轨道来处理轨道积分，所得到的结果仅适用与远离电流片中心的边缘区域。

在分析稳定性之前，我们需要在动理学的框架下构造出具体的电流片平衡模型。在我们考虑的无碰撞情况下，电流片模型就是Vlasov-Maxwell方程组的稳态解。构造电流片模型的步骤是：首先构造出满足Vlasov方程的分布函数，然后通过分布函数的矩与Maxwell方程组耦合，得到平衡磁场所满足的微分方程。

在本章接下来的部分中，我们给出构造电流片模型的方法，并给出了Harris电流片^[54,55]，Kappa电流片模型^[51,52]的构造过程，进而我们提出了一种混合电流片模型：Kappa-Maxwell电流片模型。

1.2 平衡分布函数的构造

Vlasov方程：

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0 \quad (1.1)$$

其中 $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 为分布函数， q_α 和 m_α 为粒子的电荷与质量， $\alpha = e, i$ ，分别代表电子和离子。 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 为电场和磁场。容易证明Vlasov方程的左端等于沿粒子在相空间中的运动轨道所看到的分布函数的变化率。粒子轨道满足：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1.2)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (1.3)$$

沿着粒子轨道所看到的分布函数的变化率：

$$\begin{aligned}\frac{Df_\alpha}{Dt} &\equiv \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \cdot 1 + (\nabla f_\alpha) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + (\nabla_v f_\alpha) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\nabla f_\alpha) \cdot \mathbf{v} + (\nabla_v f_\alpha) \cdot \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right)\end{aligned}$$

等于Vlasov方程的左端。所以Vlasov方程可写为：

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} = 0 \quad (1.4)$$

这一形式给出一种构造Vlasov方程解的方法，即：

如果分布函数是完全由粒子的运动守恒量构成的，那么这个分布函数是Vlasov方程的解。这个命题称为Jeans定理^[56,57]。

事实上，运动守恒量 $C_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 满足

$$\frac{d}{dt} C_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0$$

所以

$$\frac{D}{Dt} f_\alpha(\{C_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\}) = \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial C_i} \frac{dC_i}{dt} = 0$$

所以这样的分布函数满足Vlasov方程。

为了构造不显含时间的分布函数($\partial f_\alpha / \partial t = 0$)，我们选择不显含时间的运动守恒量 $C_i = C_i(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 。例如，空间电场 $\mathbf{E} = 0$ ，磁场 $\mathbf{B} = \text{常数}$ ，沿磁场方向的速度 v_z 是运动守恒量，垂直磁场的速度 $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 也是运动守恒量。用这两个运动常数构造分布函数：

$$f_\alpha = f_\alpha(v_z, v_\perp)$$

其是Vlasov方程的解。

在非均匀等离子体中，我们需要选择一个与空间坐标有关的运动守恒量来构造分布函数。例如，空间电场 $\mathbf{E}(x) = -d\varphi(x)/dx \mathbf{e}_x$ ，磁场 $\mathbf{B} = 0$ 情况下，与电场垂直的 v_y 、 v_z 是运动守恒量，还有如下与空间坐标有关的运动守恒量：

$$W_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_x^2 + q_\alpha \varphi(x)$$

用这些运动守恒量构造的分布函数 $f_\alpha = f_\alpha(W_\alpha, v_y, v_z)$ 是Vlasov方程的解。

下面将要讨论的等离子体电流片模型是一个非均匀的等离子体结构，其空间电场为零，磁场空间不均匀。我们需要选择相应的运动守恒量来构造分布函数。

1.3 Harris电流片模型

有很多具有不同特点的电流片模型，其中最简单的是Harris电流片^[54,55]。在Harris电流片中平衡电场为零，平衡磁场为：

$$\mathbf{B}_0 = b_0 \tanh\left(\frac{x}{L}\right) \mathbf{e}_z, \quad (1.5)$$

其中 b_0 对应 $x = \infty$ 处的磁场， L 对应电流片的半宽。磁场的特点是在 $x = 0$ 处磁场为零，在 $x = 0$ 两侧改变方向，在远离中心处的区域趋于均匀值 $\pm b_0$ ，如图(1.2)所示。

Harris电流片中的粒子分布函数为：

$$F_\alpha(x, \mathbf{v}) = N_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) \frac{1}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2}\right) \quad (1.6)$$

$\alpha = e, i$ 分别对应电子和离子。其中 $v_{t\alpha}$, U_α 与 N_0 是常数，分别对应粒子热速度， y 方向的漂移速度与 $x = 0$ 处的粒子数密度。Harris电流片的粒子数密度：

$$n_\alpha(x) = N_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{L}\right) \quad (1.7)$$

粒子数密度在中心处达最大值 N_0 ，在远离中心的两侧区域逐渐趋于零。如图(1.2)所示。

在Harris电流片中， x, z 方向上的电子和离子的流体速度为零，在 y 方向的流体速度为：

$$\langle v_y \rangle_\alpha \equiv \frac{1}{n_\alpha(x)} \int_{-\infty}^{\infty} v_y F_\alpha(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = U_\alpha \quad (1.8)$$

由于这里的 U_α 是一个与空间坐标无关的常数，所以Harris电流片中的流体速度是空间均匀的，没有速度剪切。

电流片半宽 L ，漂移速度 U_α 与无穷远处的磁场 b_0 三者之间存在如下关系：

$$U_\alpha = -\frac{2T_\alpha c}{q_\alpha b_0 L} \quad (1.9)$$

以下从Vlasov-Maxwell方程组出发，给出构造Harris电流片解的具体过程。

1.3.1 平衡分布函数

设空间中有一指向 z 方向的不均匀磁场， $\mathbf{B}_0 = B_0(x)\mathbf{e}_z$ ，空间中的电场为零 $E_0 = 0$ 。粒子在此磁场中的运动方程为：

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1.10)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\mathbf{v} \times B_0(x)\mathbf{e}_z}{c} \quad (1.11)$$

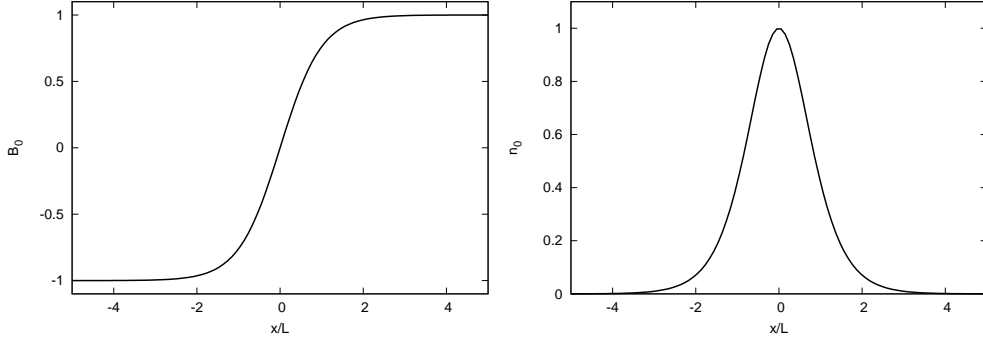


图 1.2 Harris 电流片的磁场（左图）和粒子数密度分布（右图）。

容易证明以下两个物理量是运动守恒量, 他们分别对应粒子的总能量与 y 方向上的正则动量:

$$H_\alpha = \frac{m_\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} \quad (1.12)$$

$$P_\alpha = m_\alpha v_y + \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \quad (1.13)$$

其中 $A_0(x) = \int B_0(x) dx$. 用这两个运动守恒量可以构造如下的分布函数:

$$F_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2}(2T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{H_\alpha - U_\alpha P_\alpha + m_\alpha U_\alpha^2/2}{T_\alpha}\right) \quad (1.14)$$

其中: $N_\alpha, T_\alpha, U_\alpha$ 为常数. 这个分布函数是 Vlasov 方程的解 (因为完全是由运动守恒量组成的)。

1.3.2 分布函数的矩

为方便求分布函数的速度矩, 把分布函数的空间坐标 x 与速度坐标 v 分开, 方程(1.14)整理后写为:

$$F_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2}(2T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} \exp\left(\frac{U_\alpha q_\alpha A_0(x)}{T_\alpha c}\right) \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2}\right) \quad (1.15)$$

其中: $v_{t\alpha} = \sqrt{2T_\alpha/m_\alpha}$, 从分布函数表达式(1.15)可求得电荷密度:

$$\rho_\alpha(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha \exp\left(\frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{T_\alpha c}\right) \quad (1.16)$$

分布函数的一阶矩只有 y 方向上不为零:

$$J_{\alpha y}(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} v_y F_\alpha d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha U_\alpha \exp\left(\frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{T_\alpha c}\right) \quad (1.17)$$

1.3.3 平衡方程

Maxwell 方程组:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi[n_i e + n_e(-e)] \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (J_i + J_e) \quad (1.21)$$

磁场的无散条件方程(1.18)自动满足, 准中性条件要求:

$$N_i \exp\left(\frac{eU_i A_0(x)}{cT_i}\right) = N_e \exp\left(\frac{-eU_e A_0(x)}{cT_e}\right)$$

这要求:

$$\begin{cases} \frac{eU_i}{T_i} = \frac{-eU_e}{T_e} \\ N_i = N_e \equiv N_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

法拉第定律方程(1.20)自然满足。下面考虑安培定律方程(1.21)的要求, 只要考虑 y 分量的方程 (其他两个分量的方程自然满足)。

$$-\frac{d^2 A_0(x)}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} (J_{iy} + J_{ey}) \quad (1.23)$$

将方程(1.17)的电流表达式代入上式, 并考虑到方程(1.22)。上式可写为:

$$-\frac{d^2 A_0(x)}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e) \exp\left(\frac{eU_i A_0}{T_i c}\right) \quad (1.24)$$

定义:

$$\overline{A_0}(\overline{x}) \equiv -\frac{eU_i A_0(\overline{x}L)}{2T_i c} \quad (1.25)$$

其中 $\overline{x} = x/L$, L 是一个长度量纲的量。则方程(1.56)化为:

$$\frac{d^2 \overline{A_0}(\overline{x})}{d\overline{x}^2} = L^2 \frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e) \exp(-2\overline{A_0}(\overline{x})) \quad (1.26)$$

如果再定义 $L^2 \equiv 1/\left[\frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e)\right]$, 上述方程写为:

$$\frac{d^2 \overline{A_0}(\overline{x})}{d\overline{x}^2} = \exp(-2\overline{A_0}(\overline{x})) \quad (1.27)$$

这个方程是平衡磁矢势所要满足的方程, 是一维情况下的 Grad-Shafranov 方程。

如果给定定解条件:

$$\begin{aligned} \overline{A_0}(\overline{x})|_{\overline{x}=0} &= 0 \\ \frac{d\overline{A_0}(\overline{x})}{d\overline{x}}|_{\overline{x}=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

则方程(1.27)的解为:

$$\bar{A}_0(\bar{x}) = \ln(\cosh \bar{x}) \quad (1.29)$$

对应的磁场为:

$$B_0(x) = \frac{dA_0(x)}{dx} = -\frac{2T_i c}{eU_i L} \left(\frac{d\bar{A}_0(\xi)}{d\xi} \right)_{\xi=x/L} = -\frac{2T_i c}{eU_i L} \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \quad (1.30)$$

下面对 L 的表达式作进一步化简

$$\begin{aligned} L^2 &= 1 / \left[\frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e) \right] \\ &= 1 / \left[\frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} \left(N_i \frac{eU_i}{T_i} T_i + N_e \frac{-eU_e}{T_e} T_e \right) \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

利用 $eU_i/T_i = -eU_e/T_e$, 上式写为:

$$L^2 = 1 / \left[\frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} (N_i T_i + N_e T_e) \frac{eU_i}{T_i} \right] \quad (1.32)$$

若定义

$$b_0 \equiv \sqrt{8\pi(N_i T_i + N_e T_e)}, \quad (1.33)$$

则

$$L^2 = 1 / \left(\frac{e^2 U_i^2}{T_i^2 c^2} \frac{b_0^2}{4} \right) \quad (1.34)$$

为方便, L 可取为:

$$L = -\frac{2T_i c}{eU_i b_0} \quad (1.35)$$

这是一个联系电流片半宽 L , 漂移速度 U_i 与无穷远处的磁场 b_0 的关系式。这样磁场的表达式(1.30)可简化为:

$$B_0(x) = b_0 \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \quad (1.36)$$

由此我们知道无穷远处的磁场大小为 b_0 , 而且方程 (1.33) 的意义是无穷远处的磁压和电流片中心处的热压相等。

1.4 各向异性Harris电流片

以上考虑的电流片垂直磁场和平行磁场方向上的温度相等, 我们称之为各向同性Harris电流片。以下考虑一种平行温度和垂直温度不等的Harris电流片, 我们称之为各向异性Harris电流片。

1.4.1 平衡分布函数

设空间中有一指向 z 方向的不均匀磁场, $B_0 = B_0(x)e_z$, 空间中的电场为零 $E_0 = 0$ 。以下三个物理量是运动守恒量:

$$H_{\alpha\perp} = \frac{m_\alpha(v_x^2 + v_y^2)}{2} \quad (1.37)$$

$$H_{\alpha\parallel} = \frac{m_\alpha v_z^2}{2} \quad (1.38)$$

$$P_\alpha = m_\alpha v_y + \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \quad (1.39)$$

其中 $A_0(x) = \int B_0(x)dx$ 。用这三个运动守恒量可以构造如下的分布函数:

$$F_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} 2T_{\alpha\perp}/m_\alpha \sqrt{2T_{\alpha\parallel}/m_\alpha}} \exp\left(-\frac{H_{\alpha\perp} - U_\alpha P_\alpha + m_\alpha U_\alpha^2/2}{T_{\alpha\perp}}\right) \times \exp\left(-\frac{H_{\alpha\parallel}}{T_{\alpha\parallel}}\right) \quad (1.40)$$

其中: $N_\alpha, T_{\alpha\perp}, U_\alpha, T_{\alpha\parallel}$ 为常数。这个分布函数是Vlasov方程的解, 它与上节中所讨论的Harris电流片的区别是平行温度和垂直温度可以不相等。

1.4.2 分布函数的矩

为方便求分布函数的速度矩, 把分布函数的空间坐标 x 与速度坐标 v 分开, 方程(1.40)整理后写为:

$$F_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha\perp}^2 v_{t\alpha\parallel}} \exp\left(\frac{U_\alpha q_\alpha A_0(x)}{T_{\alpha\perp} c}\right) \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{v_{t\alpha\perp}^2}\right) \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2}\right)$$

其中: $v_{t\alpha\perp} = \sqrt{2T_{\alpha\perp}/m_\alpha}$, $v_{t\alpha\parallel} = \sqrt{2T_{\alpha\parallel}/m_\alpha}$ 。由此可求得电荷与电流密度:

$$\rho_\alpha(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha \exp\left(\frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{T_{\alpha\perp} c}\right) \quad (1.41)$$

$$J_{\alpha y} \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} v_y F_\alpha d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha U_\alpha \exp\left(\frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{T_{\alpha\perp} c}\right) \quad (1.42)$$

1.4.3 平衡方程

与各向同性的Harris电流片类似, 准中性条件要求:

$$\begin{cases} \frac{eU_i}{T_{i\perp}} = \frac{-eU_e}{T_{e\perp}} \\ N_i = N_e \equiv N_0 \end{cases} \quad (1.43)$$

安培定律要求:

$$\frac{d^2 \bar{A}_0(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = \exp(-2\bar{A}_0(\bar{x})) \quad (1.44)$$

其中：

$$\begin{aligned}\overline{A_0}(\overline{x}) &= -\frac{eU_i A_0(\overline{x}L)}{2T_{i\perp}c}, \\ \overline{x} &= \frac{x}{L}, \\ L &= -\frac{2T_{i\perp}c}{eU_i b_0}.\end{aligned}$$

平衡磁矢势和磁场为：

$$\begin{aligned}A_0(x) &= Lb_0 \ln \left[\cosh \left(\frac{x}{L} \right) \right], \\ B_0(x) &= b_0 \tanh \left(\frac{x}{L} \right).\end{aligned}$$

这与各向同性Harris电流片的情况相同。

1.5 Kappa分布函数

观测表明空间等离子体分布函数通常偏离Maxwell分布，而这种非热分布能用Kappa分布函数很好地描述^[47-50]。kappa分布函数是指以下形式的分布函数：

$$F(\mathbf{v}) = \frac{N}{\pi^{3/2}v_t^3} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\kappa^{3/2}\Gamma(\kappa-1/2)} \left(1 + \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\kappa v_t^2} \right)^{-\kappa-1} \quad (1.45)$$

其中 $\Gamma(\xi)$ 是gamma函数，参数 κ 称为谱指数，其可取一系列整数， $\kappa = 2, 3, 4, \dots$ 。当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时，上述的分布函数趋于Maxwell分布：利用极限

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\xi}{\kappa} \right)^{-\kappa-1} = \exp(-\xi) \quad (1.46)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\kappa^{3/2}\Gamma(\kappa-1/2)} = 1 \quad (1.47)$$

知当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时

$$F(\mathbf{v}) = \frac{N}{\pi^{3/2}v_t^3} \exp \left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2} \right)$$

所以这种kappa分布函数是一种更一般的分布函数^[58]，谱指数 κ 描述分布函数与Maxwell分布的偏离程度。我们可以计算一下kappa分布函数的等效温度：

$$\begin{aligned}\theta &\equiv \frac{m}{3} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v^2 F(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\int_{-\infty}^{\infty} F(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v}} \\ &= \frac{mv_t^2}{2} \frac{\kappa}{\kappa - 3/2}\end{aligned}$$

对应的等效热速度为：

$$\Theta \equiv v_t \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 3/2}}$$

当谱指数 κ 满足 $3/2 < \kappa < \infty$ 时, 有 $\Theta > v_t$ 。即等效热速度 Θ 大于Maxwell分布时的热速度。Kappa分布在低能量区域和Maxwell分布基本相同, 但在高能区域粒子数多于麦氏分布时的粒子数, 如图(1.3)所示。这表明Kappa分布是一种超热分布。其能很好的描述空间等离子体中的超热分布。在许多空间等离子体中, 谱指数 κ 的值介于2和6之间, 在地球磁尾中 κ 值约为5^[59]。

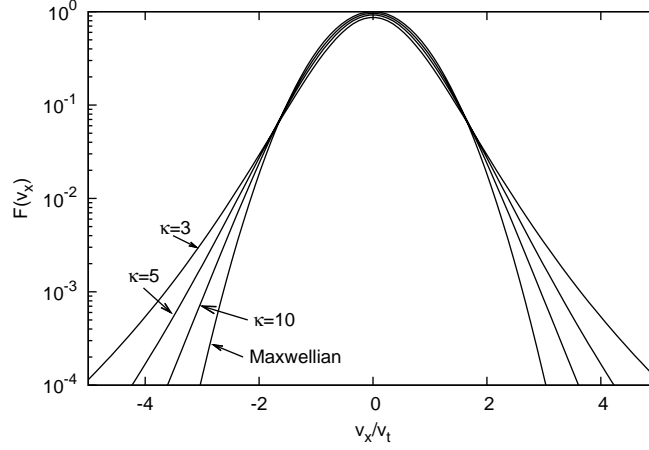


图 1.3 归一化的Kappa分布函数, 图中分别画出了谱指数 $\kappa = 3, 5, 10$ 和 ∞ 四种情况, 其中 $\kappa = \infty$ 情况对应Maxwellian分布。

1.6 具有Kappa分布的电流片

在构造Harris电流片的过程中, 我们选择的分布函数在速度空间是Maxwell分布, 见方程(1.15)。如果把分布函数推广到Kappa分布, 则可以得到更一般的电流片模型^[51,52]。

1.6.1 平衡分布函数

与Harris电流片相同, 设空间中有一指向 z 方向的不均匀磁场, $B_0 = B_0(x)e_z$, 空间中的电场为零 $E_0 = 0$ 。有以下两个运动守恒量:

$$H_\alpha = \frac{m_\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} \quad (1.48)$$

$$P_\alpha = m_\alpha v_y + \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \quad (1.49)$$

其中 $A_0(x) = \int B_0(x)dx$ 。用这两个运动守恒量可以构造如下的分布函数:

$$F_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2}(2T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\kappa^{3/2}\Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 + \frac{H_\alpha - U_\alpha P_\alpha + m_\alpha U_\alpha^2/2}{\kappa T_\alpha} \right)^{-\kappa-1} \quad (1.50)$$

其中： $N_\alpha, T_\alpha, U_\alpha$ 为常数。这个分布函数自动满足 Vlasov 方程。为方便求其速度矩，把以上的分布函数的空间依赖和速度依赖分开：

$$F_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\kappa^{3/2} \Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-1} \quad (1.51)$$

其中： $v_{t\alpha} = \sqrt{2T_\alpha/m_\alpha}$

1.6.2 分布函数的矩

从分布函数表达式(1.51)可求得电荷与电流密度：

$$\rho_\alpha(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} \right)^{-\kappa+1/2}, \quad (1.52)$$

$$J_{\alpha y}(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} v_y F_\alpha d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha U_\alpha \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} \right)^{-\kappa+1/2}. \quad (1.53)$$

1.6.3 平衡方程

准中性条件要求：

$$\begin{cases} \frac{eU_i}{T_i} = \frac{-eU_e}{T_e} \\ N_i = N_e \equiv N_0 \end{cases} \quad (1.54)$$

安培定律要求：

$$-\frac{d^2 A_0(x)}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} (J_{iy} + J_{ey}) \quad (1.55)$$

将方程(1.53)的电流表达式代入上式，并考虑到方程(1.54)，上式可写为：

$$-\frac{d^2 A_0(x)}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e) \left(1 - \frac{eU_i A_0}{\kappa T_i c} \right)^{-\kappa+1/2} \quad (1.56)$$

定义

$$\overline{A_0}(\overline{x}) \equiv -\frac{eU_i A_0(\overline{x}L)}{2T_i c} \quad (1.57)$$

其中 $\overline{x} = x/L$ ， L 是一个长度量纲的量。则方程(1.56)化为：

$$\frac{d^2 \overline{A_0}(\overline{x})}{d\overline{x}^2} = L^2 \frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e) \left(1 + \frac{2\overline{A_0}}{\kappa} \right)^{-\kappa+1/2} \quad (1.58)$$

如果再定义

$$L^2 \equiv 1 / \left[\frac{eU_i}{2T_i c} \frac{4\pi}{c} (eN_i U_i - eN_e U_e) \right], \quad (1.59)$$

上述方程写为：

$$\frac{d^2 \overline{A_0}(\overline{x})}{d\overline{x}^2} = \left(1 + \frac{2\overline{A_0}}{\kappa} \right)^{-\kappa+1/2} \quad (1.60)$$

顺便指出, 当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时, 利用极限

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\bar{A}_0}{\kappa} \right)^{-\kappa+1/2} = \exp(-2\bar{A}_0) \quad (1.61)$$

方程(1.60) 化为:

$$\frac{d^2 \bar{A}_0(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = \exp(-2\bar{A}_0(\bar{x})) \quad (1.62)$$

这即回到Harris电流片情况下的方程(1.27)。

κ 取有限值的情况下, 方程(1.60)需要数值求解, 给定与Harris电流片相同的定解条件

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(\bar{x})|_{\bar{x}=0} &= 0 \\ \frac{d\bar{A}_0(\bar{x})}{d\bar{x}}|_{\bar{x}=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

其解如图 (1.4) 所示, 对应的磁场, 密度如图 (1.5) 所示。

方程(1.59)的表达式可化简为:

$$L = -\frac{2T_i c}{eU_i b_0} \quad (1.64)$$

其中 $b_0 \equiv \sqrt{8\pi(N_i T_i + N_e T_e)}$, 这与Harris电流片中的情况相同。

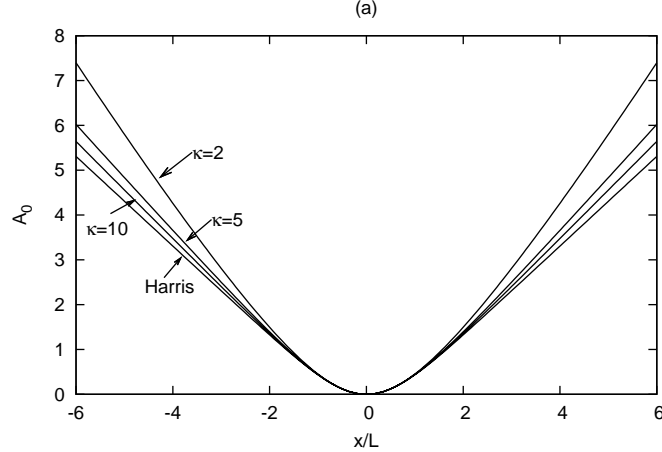


图 1.4 归一化的磁矢势的空间分布, 图中分别画出了 $\kappa = 2, 5, 10$ 和 ∞ 四种情况, $\kappa = \infty$ 情况对应Harris电流片。

1.7 Kappa-Maxwell电流片

以上考虑的具有Kappa分布的电流片, 其平行磁场方向的速度分布与垂直磁场方向的速度分布均用同一个谱指数 κ 值描述。我们称之为各向同性Kappa电流片。在无碰撞的空间等离子体中, 平行磁场和垂直磁场方向上的

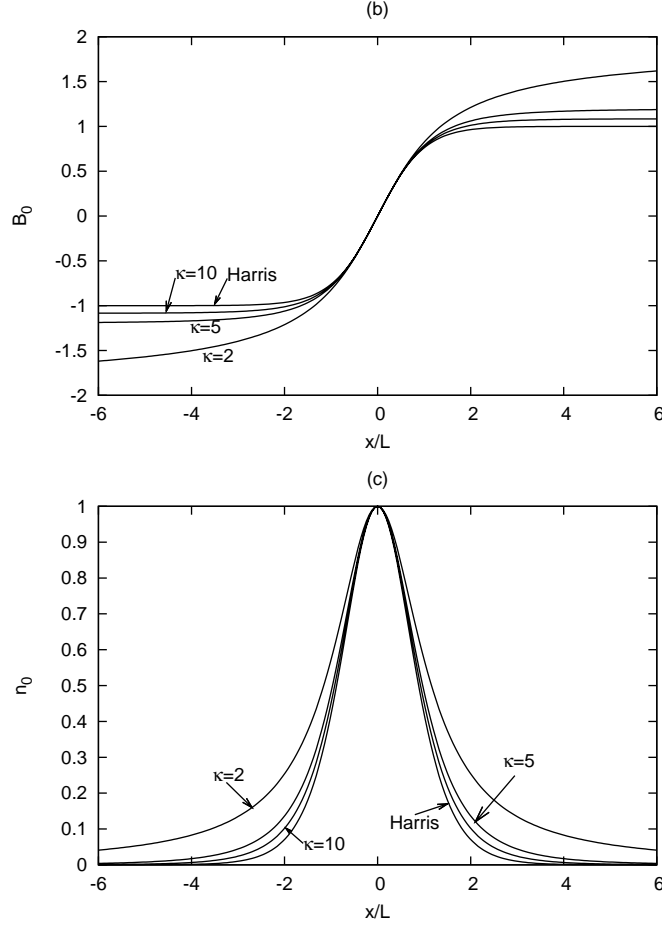


图 1.5 归一化的Kappa电流片的磁场和密度的空间分布，图中分别画出了 $\kappa = 2, 5, 10$ 和 ∞ 四种情况， $\kappa = \infty$ 情况对应Harris电流片。

运动解耦，往往使得这两个方向上的分布函数不同，从而产生分布函数的各向异性，以下我们考虑一种平行磁场方向与垂直磁场方向的谱指数 κ 值不同的情况，特别的，我们这里考虑的平行磁场方向的 $\kappa = \infty$ ，即平行磁场方向上的速度分布是Maxwell分布的情况。我们称之为Kappa-Maxwell电流片。考虑这种情况的优点在于这种Kappa-Maxwell电流片有内在的各向异性的特点（垂直分布和平行分布不同），可以用这种模型来研究各向异性对不稳定性的影响。

一些数值模拟结果表明低杂漂移不稳定性(LHDI)会各向异性地加热电子，使得电子垂直磁场的温度高于平行磁场方向上的温度^[21,38]。当垂直方向和平行方向的分布是Maxwell分布时，这种各向异性可以用双温Maxwell分布来描述。然而实际模拟中的垂直分布和平行分布很复杂，偏离Maxwell分布，这启发我们考虑一种更一般的各向异性分布来研究各向异性对不稳定性的物理效果，这里选择Kappa-Maxwell分布来描述这种各向异性，其垂直磁场方向取为一般的Kappa分布，其平行方向上仍然保持Maxwell分布。

1.7.1 平衡分布函数

设空间中有一指向 z 方向的不均匀磁场, $B_0 = B_0(x)e_z$, 空间中的电场为零 $E_0 = 0$, 有以下三个运动守恒量:

$$H_{\alpha\parallel} = \frac{m_\alpha v_z^2}{2} \quad (1.65)$$

$$H_{\alpha\perp} = \frac{m_\alpha(v_x^2 + v_y^2)}{2} \quad (1.66)$$

$$P_\alpha = m_\alpha v_y + \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \quad (1.67)$$

其中 $A_0(x) = \int B_0(x)dx$. 用这三个运动守恒量可以构造如下的分布函数(垂直 κ 有限, 平行 κ 无穷):

$$F_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha\perp}^2 v_{t\alpha\parallel}} \left(1 + \frac{H_{\alpha\perp} - U_\alpha P_\alpha + m_\alpha U_\alpha^2/2}{\kappa T_{\alpha\perp}} \right)^{-\kappa-1} \exp \left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right) \quad (1.68)$$

其是Vlasov方程的解。为方便求其速度矩, 把以上的分布函数的空间依赖和速度依赖分开:

$$F_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha\perp}^2 v_{t\alpha\parallel}} \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_{\alpha\perp} c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha\perp}^2} \right)^{-\kappa-1} \exp \left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right) \quad (1.69)$$

其中 $v_{t\alpha\parallel} = \sqrt{2T_{\alpha\parallel}/m_\alpha}$, $v_{t\alpha\perp} = \sqrt{2T_{\alpha\perp}/m_\alpha}$.

1.7.2 分布函数的矩

从分布函数表达式(1.69)可求得电荷与电流密度:

$$\rho_\alpha(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_{\alpha\perp} c} \right)^{-\kappa} \quad (1.70)$$

$$J_{\alpha y}(x) \equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} v_y F_\alpha d\mathbf{v} = q_\alpha N_\alpha U_\alpha \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_{\alpha\perp} c} \right)^{-\kappa} \quad (1.71)$$

1.7.3 平衡方程

准中性条件要求:

$$\begin{cases} \frac{eU_i}{T_{i\perp}} = \frac{-eU_e}{T_{e\perp}} \\ N_i = N_e \equiv N_0 \end{cases} \quad (1.72)$$

安培定律要求:

$$\frac{d^2 \bar{A}_0(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = \left(1 + \frac{2\bar{A}_0}{\kappa} \right)^{-\kappa} \quad (1.73)$$

其中：

$$\begin{aligned}
 \overline{A_0}(\bar{x}) &= -\frac{eU_i A_0(\bar{x}L)}{2T_{i\perp}c} \\
 \bar{x} &= \frac{x}{L} \\
 L &= -\frac{2T_{i\perp}c}{eU_i b_0} \\
 b_0 &= \sqrt{8\pi(N_i T_{i\perp} + N_e T_{e\perp})}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

平衡方程(1.73)与各向同性Kappa电流片的对应方程(1.60)形式相同，只是幂指数由 $-\kappa + 1/2$ 变为 $-\kappa$ 。

在这里的推导中， $T_{\alpha\perp}$ 和 $T_{\alpha\parallel}$ 可以取不相等的值，从而也能引入分布函数的各向异性，然而由于此处我们可以通过改变谱指数 κ 来调节分布函数的各向异性，为减少自由度，在后面的讨论中我们把 $T_{\alpha\perp}$ 和 $T_{\alpha\parallel}$ 取为相等。

第2章 线性稳定性分析的基本理论

本章给出处理电流片线性不稳定性的基本方法。首先由沿未扰轨道积分方法，得到扰动分布函数，进而对平行磁场方向上的轨道积分和速度积分进行解析处理。然后，讨论垂直磁场平面的未扰轨道的性质，计算轨道的周期。进而利用轨道的周期性将轨道积分化为一个周期时间内的积分。最后给出对扰动场的基函数展开方法，和数值求解本征值问题的方法和步骤。

2.1 扰动分布函数

线性化的Vlasov方程：

$$\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{1\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{1\alpha} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \quad (2.1)$$

其中， \mathbf{E}_0 和 \mathbf{B}_0 为平衡电场和磁场， $f_{0\alpha}$ 为平衡分布函数， \mathbf{E}_1 和 \mathbf{B}_1 为扰动电场和扰动磁场， $f_{1\alpha}$ 为扰动分布函数。

不难证明，方程(2.1)的左端为沿粒子在平衡场中运动轨道（未扰轨道）所看到的扰动分布函数的变化率。所以方程(2.1)形式上可写为：

$$\frac{Df_{1\alpha}}{Dt} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \quad (2.2)$$

沿着一条未扰轨道从相空间中一点积分到另一点，可得到这两个相空间点上的扰动分布函数值之差：

$$\begin{aligned} & f_{1\alpha}(\mathbf{r}(t_2), \mathbf{v}(t_2), t_2) - f_{1\alpha}(\mathbf{r}(t_1), \mathbf{v}(t_1), t_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt' \left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \right]_{\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

我们把时间起点取在 $t_1 = -\infty$ 时刻，上式写为：

$$\begin{aligned} & f_{1\alpha}(\mathbf{r}(t_2), \mathbf{v}(t_2), t_2) - f_{1\alpha}(\mathbf{r}(-\infty), \mathbf{v}(-\infty), -\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} dt' \left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \right]_{\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'} \end{aligned} \quad (2.4)$$

并把时间终点 t_2 记为 t ，上式写为：

$$\begin{aligned} & f_{1\alpha}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) - f_{1\alpha}(\mathbf{r}(-\infty), \mathbf{v}(-\infty), -\infty) \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \right]_{\mathbf{r}(t'), \mathbf{v}(t'), t'} \end{aligned} \quad (2.5)$$

我们把在 t 时刻未扰轨道所处的相空间点记为 \mathbf{r}, \mathbf{v} , 为与未扰轨道在其他时刻所处的相空间点区分开来, 把轨道在一般时刻的瞬时值加上撇号:

$$f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_{1\alpha}(\mathbf{r}'(-\infty), \mathbf{v}'(-\infty), -\infty) \quad (2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^t dt' \left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1(\mathbf{r}'(t'), t') + \frac{\mathbf{v}'(t') \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}'(t'), t')}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha}(\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t') \right]$$

上述的未扰动轨道应满足如下的微分方程:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{v}' \quad (2.7)$$

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}')}{c} \right) \quad (2.8)$$

和初始条件:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v} \quad (2.10)$$

设扰动分布函数 $f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2.11)$$

则方程(2.6)可写为:

$$f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$= \int_{-\infty}^t dt' \left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1(\mathbf{r}'(t'), t') + \frac{\mathbf{v}'(t') \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}'(t'), t')}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha}(\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t') \right]$$

这是扰动分布函数的一般表达式。

我们用矢势和标势来描述扰动电磁场:

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.13)$$

扰动分布函数写为:

$$f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (2.14)$$

$$= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \left[\left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \right]_{\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t'}$$

设平衡电场和平衡磁场仅与空间坐标 x 有关, 而与 y, z 无关, 特别的, 本文考虑的平衡场具有如下形式:

$$\mathbf{E}_0(x) = 0 \quad (2.15)$$

$$\mathbf{B}_0(x) = B_0(x)\mathbf{e}_z \quad (2.16)$$

我们可以考虑如下形式的扰动电磁场

$$\varphi = \hat{\varphi}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (2.17)$$

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (2.18)$$

其中的 $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\mathbf{A}}(x)$ 为待定的未知函数。以下来化简方程 (2.14) 中轨道积分的被积函数的两个部件:

$$-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \quad (2.19)$$

和

$$\nabla_v f_{0\alpha} \quad (2.20)$$

记

$$\mathbf{k} = k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$$

第一项(电磁场部分)可作如下化简

$$\begin{aligned} & -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \\ &= -i\mathbf{k}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} + \frac{i}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{k} - \frac{i}{c} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{A} \\ & -\frac{v_x}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{e}_y - \frac{v_x}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_z + \frac{v_y}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{v_z}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (2.21)$$

第二项 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 与具体的平衡位形有关。以下分别列出一些情况。

对温度各向同性Harris电流片的平衡分布函数:

$$f_{0\alpha} = \frac{n_0(x)}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y - U_a)^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2}\right) \quad (2.22)$$

第二项 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 可写为如下形式:

$$\nabla_v f_{0\alpha} = \left(-\frac{2\mathbf{v}}{v_{t\alpha}^2} + \frac{2U_a \mathbf{e}_y}{v_{t\alpha}^2}\right) f_{0\alpha} \quad (2.23)$$

对温度各向异性Harris电流片的平衡分布函数:

$$f_{0\alpha} = \frac{n_0(x)}{\pi^{3/2} v_{t\alpha\perp}^2 v_{t\alpha\parallel}} \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y - U_a)^2}{v_{t\alpha}^2} - \frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2}\right) \quad (2.24)$$

第二项 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 可写为如下形式:

$$\nabla_v f_{0\alpha} = \left(-\frac{2\mathbf{v}}{v_{t\alpha}^2} + \frac{2U_a \mathbf{e}_y}{v_{t\alpha}^2}\right) f_{0\alpha} + \frac{2v_z \mathbf{e}_z}{v_{t\alpha}^2} f_{\alpha 0} - \frac{2v_z \mathbf{e}_z}{v_{t\alpha\parallel}^2} f_{\alpha 0} \quad (2.25)$$

对各向同性的Kappa电流片的分布函数:

$$f_{0\alpha} = \frac{N_0}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\kappa^{3/2} \Gamma(\kappa-1/2)} \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-1} \quad (2.26)$$

第二项 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 可写为如下形式:

$$\nabla_v f_{0\alpha} = \left(-\frac{2\mathbf{v}}{v_{t\alpha}^2} + \frac{2U_\alpha \mathbf{e}_y}{v_{t\alpha}^2} \right) G_\alpha \quad (2.27)$$

其中

$$G_\alpha = \frac{N_0}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\kappa^{3/2} \Gamma(\kappa-1/2)} \frac{\kappa+1}{\kappa} \left(1 - \frac{U_\alpha q_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2 + v_z^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-2}$$

对Kappa-Maxwell电流片的平衡分布函数:

$$f_{0\alpha} = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \left(1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-1} \exp \left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha}^2} \right) \quad (2.28)$$

第二项 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 可写为如下形式:

$$\nabla_v f_{0\alpha} = \left(-\frac{2\mathbf{v}}{v_{t\alpha}^2} + \frac{2U_\alpha \mathbf{e}_y}{v_{t\alpha}^2} \right) G'_\alpha + \frac{2v_z \mathbf{e}_z}{v_{t\alpha}^2} G'_\alpha - \frac{2v_z \mathbf{e}_z}{v_{t\alpha}^2} f_{\alpha 0} \quad (2.29)$$

其中

$$G'_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \frac{\kappa+1}{\kappa} \left(1 - \frac{U_\alpha q_\alpha A_0}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-2} \exp \left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha}^2} \right)$$

方程(2.23)(2.27)形式相同, 接下来的处理也相同, 方程(2.25)和(2.29)中多出了两项, 这两项的处理与前两项的处理相似, 为表述简便, 下面我们给出 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 取方程(2.23)的形式时的推导。对 $\nabla_v f_{0\alpha}$ 取方程(2.25)(2.29)形式情况的推导我们放在附录中供参考。

方程(2.21)(2.23)的乘积可作如下化简:

$$\begin{aligned} & \left[-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \right] \cdot \nabla_v f_{0\alpha} \\ &= \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2} i(\omega - k_y U_\alpha) \left(\varphi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \\ &+ \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2} \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) \varphi + \frac{i\omega - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} A_y U_\alpha - \frac{v_x}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} U_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_x \right] \end{aligned}$$

这样, 轨道积分写为:

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2} i(\omega - k_y U_\alpha) \left(\varphi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \\ & + \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2} \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) \varphi + \frac{i\omega - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} A_y U_\alpha - \frac{v_x}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} U_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_x \right] \end{aligned} \right\}_{\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t'} \quad (2.30) \end{aligned}$$

把扰动电磁场的具体表达式(2.17)(2.18)代入, 上式写为:

$$\begin{aligned}
 f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2} i(\omega - k_y U_\alpha) \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{A}}(x')}{c} \right] \exp(ik_y y' + ik_z z' - i\omega t') \\
 &\quad - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha}^2} \int_{-\infty}^t dt' \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - \omega) \hat{\varphi}(x') + \frac{i\omega - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{c} \hat{A}_y(x') U_\alpha - \frac{v'_x}{c} \frac{d\hat{A}_y(x')}{dx'} U_\alpha + \frac{d\hat{\varphi}(x')}{dx'} v'_x \right] \\
 &\quad \times \exp(ik_y y' + ik_z z' - i\omega t')
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

注意到 $f_{0\alpha}$ 是由运动守恒量构成的, 以上已经把 $f_{0\alpha}$ 提到轨道积分外。再注意到:

$$ik_y y' + ik_z z' = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' \tag{2.32}$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')}{dt'} \tag{2.33}$$

则

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^t dt' i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - \omega) \hat{\varphi}(x') \exp(ik_y y' + ik_z z' - i\omega t') \\
 &= \int_{-\infty}^t \hat{\varphi}(x') d[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t')] \\
 &= \hat{\varphi}(x') \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t')|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t') d[\hat{\varphi}(x')] \\
 &\xrightarrow{\text{Im}(\omega) > 0} = \hat{\varphi}(x) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) - \int_{-\infty}^t \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t') \frac{\partial \hat{\varphi}(x')}{\partial x'} v'_x dt'
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

同理

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^t dt' i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - \omega) \hat{A}_y(x') \exp(ik_y y' + ik_z z' - i\omega t') \\
 &= \hat{A}_y(x) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) - \int_{-\infty}^t \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t') \frac{\partial \hat{A}_y(x')}{\partial x'} v'_x dt'
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

利用(2.34), (2.35)的结果, (2.31)可化简为:

$$\begin{aligned}
 f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \left[\hat{\varphi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \\
 &\quad - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{A}}(x')}{c} \right] \exp(ik_y y' + ik_z z' - i\omega t')
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

除去相因子 $\exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$ 后写为

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) &= -\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \left[\hat{\varphi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right] - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) \\ &\times \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{A}}(x')}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z) - i\omega(t' - t)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

考虑到粒子的轨道方程和初始条件, 不难证明上式与 y, z, t 无关。所以除去相因子前的扰动分布函数与 y, z, t 的依赖关系是 $\exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$ 。前面的推导中假定了扰动分布函数 $f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ 满足条件:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f_{1\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (2.38)$$

由于扰动分布函数的时间依赖是 $\exp(-i\omega t)$ 的形式, 所以只要我们限定 $\text{Im}(\omega) > 0$, 即考虑不稳定的模式, 扰动分布函数在 $t = -\infty$ 时刻满足以上条件。

为方便, 做变量代换 $\tau = t' - t$, 这样扰动分布函数(2.37)可写为:

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) &= -\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \left[\hat{\varphi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right] - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) \\ &\times \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{A}}(x')}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z) - i\omega\tau] \end{aligned} \quad (2.39)$$

在我们考虑的平衡场中, 粒子在 z 方向上作匀速直线运动, 其解析式为:

$$z' = z + v_z \tau \quad (2.40)$$

$$v'_z = v_z \quad (2.41)$$

把 z 方向上未扰轨道解析(2.40)(2.41)式代入扰动分布函数表达式(5.9)中得:

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) &= -\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \left[\hat{\varphi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right] - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) \end{aligned} \quad (2.42)$$

其中:

$$\begin{aligned} R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) &\equiv \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x') + v'_z \hat{A}_z(x')}{c} \right] \\ &\times \exp[ik_y(y' - y) + ik_z v_z \tau - i\omega\tau] \end{aligned} \quad (2.43)$$

对各向同性的Kappa电流片，其扰动分布函数只要把(2.42)式中的 $f_{0\alpha}$ 替换为 G_α 即可。对各向异性的Kappa-Maxwell电流片，其扰动分布函数要多出两项（具体推导见附录A.1）：

$$\left(\frac{q_\alpha G'_\alpha}{T_\alpha} - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha}\right) \left(\frac{\hat{A}_z(x)v_z}{c}\right) + \left(\frac{q_\alpha G'_\alpha}{T_\alpha} - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha}\right) ik_z v_z R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) \quad (2.44)$$

2.2 对平行磁场方向速度积分的处理

扰动分布函数在速度空间积分可求得扰动电荷与电流：

$$\rho_\alpha(x) = q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{J}_\alpha(x) = q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.46)$$

扰动分布函数(2.42)有两部分组成，第一部分

$$-\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \left[\hat{\phi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right] \quad (2.47)$$

这一部分中不含未扰轨道积分。这一项我们称之为绝热部分。其在速度空间积分后产生的扰动电荷与扰动电流相应的称为绝热电荷与绝热电流。扰动分布函数的第二部分：

$$-\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) \quad (2.48)$$

含有未扰轨道积分，我们称之为共振部分。其产生的扰动电荷与扰动电流相应的称为共振电荷与共振电流。

在计算扰动分布函数的速度空间积分时，绝热部分因不涉及未扰轨道积分，其速度空间积分的计算是直截了当的。以下不讨论这一部分的计算。对共振部分，因其涉及轨道积分的计算，其速度空间的积分较为复杂。由下面的讨论知 xy 平面内的未扰轨道没有解析表达式，轨道积分不能解析作出，从而在此之后关于 $v_x v_y$ 的速度积分也不能做进一步的解析处理。关于 v_z 的速度积分则不同，由于 z 方向的运动与 xy 平面内的运动解耦，其未扰轨道有解析式，关于 v_z 的速度积分可做进一步处理。设平衡分布函数可写为（这种形式适用于Harris电流片和Kappa-Maxwell电流片，不适用于Kappa电流片）：

$$f_{0\alpha} = F_\alpha(x, v_x, v_y) \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha}^2}\right) \quad (2.49)$$

扰动分布函数的共振部分(2.48)式对 v_z 积分：

$$-\frac{q_\alpha}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) F_\alpha(x, v_x, v_y) \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha}^2}\right) R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) \quad (2.50)$$

交换对 v_z 积分与轨道积分的次序，并注意到未扰轨道 x', y', v'_x, v'_y 都与 v_z 无关，上式可写为：

$$-\frac{q_\alpha}{T_\alpha}i(\omega - k_y U_\alpha)F_\alpha(x, v_x, v_y) \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c} \right] C_z - \frac{v_{t\alpha} \hat{A}_z(x')}{c} D_z \right\} \exp[ik_y(y' - y) - i\omega\tau] \quad (2.51)$$

其中：

$$C_z = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha}^2} + ik_z v_z \tau\right) \quad (2.52)$$

$$D_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_z}{v_{t\alpha}} dv_z \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha}^2} + ik_z v_z \tau\right) \quad (2.53)$$

容易计算出(2.52)(2.53)中关于 v_z 的积分：

$$C_z = v_{t\alpha} \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-k_z^2 v_{t\alpha}^2 \tau^2}{4}\right) \quad (2.54)$$

$$D_z = v_{t\alpha} \frac{ik_z v_{t\alpha} \tau}{2} \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-k_z^2 v_{t\alpha}^2 \tau^2}{4}\right) \quad (2.55)$$

这样(2.51)式写为：

$$-\frac{q_\alpha}{T_\alpha}i(\omega - k_y U_\alpha)F_\alpha(x, v_x, v_y)v_{t\alpha}\sqrt{\pi} \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x') + \frac{ik_z v_{t\alpha} \tau}{2} v_{t\alpha} \hat{A}_z(x')}{c} \right] \times \exp[ik_y(y' - y) + \frac{-k_z^2 v_{t\alpha}^2 \tau^2}{4} - i\omega\tau] \quad (2.56)$$

为方便，定义以下两个量：

$$\omega_{z\alpha} \equiv \frac{ik_z v_{t\alpha}}{2} \quad (2.57)$$

$$S_\alpha(x, v_x, v_y) \equiv \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x') + v_{t\alpha} \hat{A}_z(x') \omega_{z\alpha} \tau}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) + \omega_{z\alpha}^2 \tau^2 - i\omega\tau] \quad (2.58)$$

这样，(2.56)写为：

$$-\frac{q_\alpha}{T_\alpha}i(\omega - k_y U_\alpha)F_\alpha(x, v_x, v_y)v_{t\alpha}\sqrt{\pi}S_\alpha(x, v_x, v_y) \quad (2.59)$$

对于Kappa-Maxwell电流片，其扰动分布函数对 v_z 的积分也可类似的解析做出（具体推导见附录A.2）。

2.3 垂直磁场平面内的未扰轨道的性质

线性化后的Vlasov方程的特征线是粒子在平衡场中的运动轨道，即未扰动轨道。沿未扰轨道积分可求出等离子体对扰动场的线性响应，所以未扰轨道在分析等离子体的线性不稳定性的过程中有着重要作用。下面来讨论在等离子体电流片的磁场位形中粒子运动轨道的性质，以及如何利用轨道性质来简化未扰轨道积分的计算。

电流片的磁场位形的特点是在电流片中心处磁场为零，在两侧磁场反向。在空间对称的情况下磁场是一个奇函数，所以可设一般的平衡磁场为

$$\mathbf{B}_0(x) = b_0 f(x/L) \mathbf{e}_z \quad (2.60)$$

其中 $f(x)$ 是一个奇函数， b_0 是一个常数， L 是一个特征宽度。由于粒子在 z 方向上的运动是匀速直线运动，在上面的讨论中已经解析处理了，我们现在只需考虑粒子在垂直磁场的 xy 平面内的运动。运动方程为：

$$\frac{dv'_x}{d\tau} = \Omega_{\alpha 0} v'_y f\left(\frac{x'}{L}\right) \quad (2.61)$$

$$\frac{dv'_y}{d\tau} = -\Omega_{\alpha 0} v'_x f\left(\frac{x'}{L}\right) \quad (2.62)$$

$$\frac{dx'}{d\tau} = v'_x \quad (2.63)$$

$$\frac{dy'}{d\tau} = v'_y \quad (2.64)$$

其中

$$\Omega_{\alpha 0} \equiv \frac{b_0 q_\alpha}{m_\alpha c} \quad (2.65)$$

初始条件： $\tau = 0$ 时， $v'_x = v_x$ ， $v'_y = v_y$ ， $x' = x$ ， $y' = y$

未扰轨道的一般形式可写为：

$$x' = x'(x, v_x, v_y, \tau) \quad (2.66)$$

$$v'_x = v'_x(x, v_x, v_y, \tau) \quad (2.67)$$

$$v'_y = v'_y(x, v_x, v_y, \tau) \quad (2.68)$$

其中前三个变量代表轨道的初始条件。未扰轨道 y' 的一般形式：

$$y' = y'(x, y, v_x, v_y, \tau) \quad (2.69)$$

轨道积分中实际用到的是 $y' - y$ ，容易证明 $y' - y$ 是与初始条件 y 无关的，即：

$$y' - y \equiv Y'(x, v_x, v_y, \tau) \quad (2.70)$$

粒子在非均匀磁场中的运动方程是非线性的, 想求得形如(2.66)-(2.69)的一般解析解很困难。在电流片的非均匀磁场中, 对应不同的初始条件, 存在各式各样的粒子轨道, 有些粒子局限在远离电流片中心的区域运动, 这里磁场的非均匀性较弱, 粒子的轨道可以看作回旋轨道叠加上导心的 ∇B 漂移。有些粒子的运动区域接近电流片中心, 这里磁场的非均匀性强, 漂移回旋轨道已经不能很好描述其运动, 尤其是对那些跨越电流片中心的粒子, 其运动区域经过磁场为零的区域, 其轨道完全不同于漂移回旋轨道, 这部分粒子的轨道一般很难较好地解析描述。在处理无碰撞撕裂模的近似方法中^[24,33], 认为这部分在电流片中心区域运动的粒子的轨道是非磁化的, 其轨道用直线轨道代替, 并在选定的区域边界反弹。这种对电流片中心区轨道的处理简化了轨道的细节, 对最后计算出的模式的增长率会有影响^[39]。考虑到粒子轨道的多样性, 而且没有一般的解析轨道表达式, 本文中将采用直接的数值方法来求解未扰轨道: 每给定一个初始条件, 我们去数值求解初值问题从而计算出这个粒子的相空间轨迹(未扰轨道)。这种方法原则上充分考虑到了每条轨道的细节(取决于时间步长的大小)。如果在相空间中取足够多的代表粒子, 那么原则上也能很好分辨扰动分布函数的相空间结构。

注意到未扰轨道积分的积分限是从 $-\infty$ 到0, 这意味着对于一个给定初始条件的粒子, 我们要跟踪它在很长时间(解析上无限长时间)内的轨道, 从而计算出这条未扰轨道积分的积分值。考虑到粒子的轨道需要用数值方法处理, 且我们需要计算很多条轨道(对应不同的初始条件), 如果去跟踪一条轨道很长时间, 其计算量将很大, 且长时间轨道的数值精度也不会好。这是我们数值计算轨道积分所面临的一个困难。

实际上, 以上的问题很容易克服, 这要用到未扰轨道 x', v'_x, v'_y 的周期性质。轨道的周期性使得我们只需跟踪一条轨道一个周期时间, 并据此推算出整条轨道积分的值。下面来看看一般的粒子轨道是否具有周期性, 如何计算周期, 以及如何利用这一性质来简化未扰轨道积分的计算。

2.3.1 轨道的周期性

从本节到2.3.4节, 为记法方便略去未扰轨道瞬时值上的撇号, 如果涉及初始值(即 $\tau = 0$ 时刻的值)我们用 x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0} 这种记号来区分。轨道有运动守恒量:

$$P_\alpha = m_\alpha v_y + \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \quad (2.71)$$

其中 $A_0(x) = \int B_0(x)dx$ 。利用轨道方程 (2.61) 和以上的运动守恒量得:

$$\begin{aligned} m_\alpha \frac{dv_x}{d\tau} &= \Omega_{\alpha 0} \left[P_\alpha - \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \right] f\left(\frac{x}{L}\right) \\ &= -\frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.72)$$

其中

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2m_\alpha} \left[P_\alpha - \frac{q_\alpha}{c} A_0(x) \right]^2 \quad (2.73)$$

方程(2.72)对应一个粒子在势场 $\Lambda(x)$ 中的运动方程。由于 $B_0(x)$ 是奇函数, $A_0(x) = \int B_0(x)dx$ 是偶函数。这样知方程(2.73)是关于 x 的偶函数, 一般是一个势阱。这样粒子在 x 方向上的运动被约束在一个势阱中, 其运动具有周期性。由方程(2.73)知, 势阱的具体结构由 $A_0(x)$ 与粒子的运动守恒量 P_α 决定 (运动守恒量 P_α 由粒子的初始条件决定)。对于Harris电流片,

$$B_0 = b_0 \tanh\left(\frac{x}{L}\right) \quad (2.74)$$

$$A_0(x) = \int B_0(x)dx = Lb_0 \ln \left[\cosh\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad (2.75)$$

图 (2.1) 画出了有效势 $\Lambda(x)$ 的典型分布。有效势在 origin 处有个小势垒把整个大势阱分成两个小势阱, 根据粒子是否能跨越中心势垒可把粒子轨道分为跨越的和非跨越的。势垒的高度为

$$V_{ph} = \frac{P_\alpha^2}{2m_\alpha} \quad (2.76)$$

粒子的初始动能与有效势能之和为:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} m_\alpha v_{x0}^2 + \Lambda(x_0) \\ &= \frac{1}{2} m_\alpha v_\perp^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

如果

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\perp^2 > \frac{P_\alpha^2}{2m_\alpha} \quad (2.78)$$

那么粒子轨道是跨越的。反之是非跨越的。

对于更一般的Kappa电流片中的磁场, 其磁矢势 $A_0(x)$ 满足微分方程:

$$\frac{d^2 \bar{A}_0(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = \left(1 + \frac{2\bar{A}_0}{\kappa} \right)^{-\kappa+1/2} \quad (2.79)$$

其中 $\bar{x} = x/L$, $\bar{A}_0 = A_0/Lb_0$ 。给定定解条件:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(\bar{x})|_{\bar{x}=0} &= 0 \\ \frac{d\bar{A}_0(\bar{x})}{d\bar{x}}|_{\bar{x}=0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

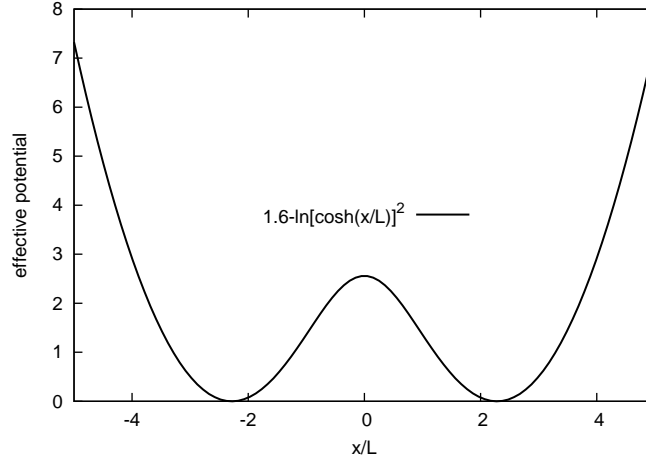


图 2.1 典型的有效势的空间分布

其解是在原点处为零，在 $x > 0$ 区域单调增加的偶函数。其对应的有效势的情况与Harris电流片的情况相似，同样的，粒子是否跨越电流片中心的判断条件是：

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\perp}^2 > \frac{P_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \quad (2.81)$$

时粒子轨道是跨越的。

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\perp}^2 < \frac{P_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \quad (2.82)$$

时粒子轨道非跨越的。

2.3.2 轨道的返转点

为了计算粒子运动的周期，首先要确定它在 x 方向上的返转点(即 $v_x = 0$ 的地方，在这里粒子开始改变运动方向)，再计算出粒子在返转点间往返一次所花时间，这个时间即为 $v_x(\tau)$ 的周期。粒子的返转点可按以下步骤确定：首先由运动常数

$$P_{\alpha} = m_{\alpha} v_y + \frac{q_{\alpha}}{c} A_0(x) \quad (2.83)$$

$$v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (2.84)$$

知：

$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{\perp}^2 - \left[\frac{P_{\alpha}}{m_{\alpha}} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} c} A_0(x) \right]^2 \\ &\equiv g(x) \end{aligned} \quad (2.85)$$

方程

$$g(x) = 0 \quad (2.86)$$

的根即为粒子可能的返转点。从方程(2.86)得

$$A_0(x) = \frac{c}{q_\alpha} (P_\alpha \pm m_\alpha v_\perp) \quad (2.87)$$

考虑到 $A_0(x)$ 是在原点处为零,在 $x > 0$ 区域单调增加的偶函数,知上述方程的根的情况如下:

对离子,当 $|P_\alpha| < m_\alpha v_\perp$ 时,方程(2.86)有两个根。当 $P_\alpha > m_\alpha v_\perp$ 时,方程有四个根。

对电子,当 $|P_\alpha| < m_\alpha v_\perp$ 时,方程(2.86)有两个根。当 $P_\alpha < -m_\alpha v_\perp$ 时,方程有四个根。

对比上节关于跨越轨道与不跨越轨道的区分条件知:四根情况对应的是非跨越轨道,两根情况对应的是跨越轨道。

对于Kappa及Kappa-Maxwell电流片的磁场情况,方程(2.87)的根要用数值方法确定。而对于Harris电流片的磁场情况,方程的根可以解析求出。此时方程(2.87)写为:

$$\ln \left[\cosh \left(\frac{x}{L} \right) \right] = \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} \pm v_\perp \right] \quad (2.88)$$

$$\frac{e^{x/L} + e^{-x/L}}{2} = \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} \pm v_\perp \right] \right\} \quad (2.89)$$

设 $y = e^{x/L}$, 上述方程写为:

$$y^2 - 2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} \pm v_\perp \right] \right\} y + 1 = 0 \quad (2.90)$$

上式是关于 y 的二次方程,其根的判别式为:

$$\delta = 4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} \pm v_\perp \right] \right\} - 4 \quad (2.91)$$

当粒子是跨越的情况

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\perp^2 > \frac{P_\alpha^2}{2 m_\alpha} \quad (2.92)$$

只有当方程(2.91)中取正号时才能使方程(2.90)有根,此时可求得两个根:

$$y_1 = \frac{2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} - \sqrt{4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} - 4}}{2}$$

$$y_2 = \frac{2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} + \sqrt{4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} - 4}}{2}$$

对应的返转点为:

$$x_1 = L \ln(y_1)$$

$$x_2 = L \ln(y_2)$$

由于 $g(x)$ 是关于 x 的偶函数,所以上面的两个根是关于原点对称的

$$x_1 = -x_2 \quad (2.93)$$

当粒子是非跨越的情况

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_\perp^2 < \frac{P_\alpha^2}{2m_\alpha} \quad (2.94)$$

方程(2.91)中取正负号都可使方程(2.90)有根,此时可求得四个根:

$$y_1 = \frac{2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} - v_\perp \right] \right\} + \sqrt{4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} - v_\perp \right] \right\} - 4}}{2} \quad (2.95)$$

$$y_2 = \frac{2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} + \sqrt{4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} - 4}}{2} \quad (2.96)$$

$$y_3 = \frac{2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} - v_\perp \right] \right\} - \sqrt{4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} - v_\perp \right] \right\} - 4}}{2} \quad (2.97)$$

$$y_4 = \frac{2 \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} - \sqrt{4 \exp \left\{ \frac{2}{\Omega_{\alpha 0} L} \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} + v_\perp \right] \right\} - 4}}{2} \quad (2.98)$$

对应的可能返转点为:

$$x_1 = L \ln(y_1) \quad (2.99)$$

$$x_2 = L \ln(y_2) \quad (2.100)$$

$$x_3 = L \ln(y_3) \quad (2.101)$$

$$x_4 = L \ln(y_4) \quad (2.102)$$

这四个可能的返转点是关于原点两两对称的,由于这里考虑的轨道是非跨越的,实际的返转点是原点同一侧的那两个。至于是左侧的两个还是右侧的两个,由初始条件决定。当粒子初始位于原点右侧,则实际的返转点应是位于右侧的两个根,反之则是位于左侧的两个根。

2.3.3 轨道的周期

确定轨道的返转点后,可计算粒子在返转点间往返一次所花时间,这个时间即为 $x(\tau), v_x(\tau)$ 的周期,记为 $t_{p\alpha}$

$$t_{p\alpha} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v_x} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{v_\perp^2 - \left[\frac{P_\alpha}{m_\alpha} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} A_0(x) \right]^2}} \quad (2.103)$$

对于简单的Harris电流片的磁场，这个定积分已经不易解析做出，对于更一般的Kappa及Kappa-Maxwell电流片的磁场，这个积分只能用数值方法来处理。

由运动常数

$$v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (2.104)$$

可知 $v_y(\tau)$ 具有与 $v_x(\tau)$ 相同的周期：

$$v_y(\tau + t_{p\alpha}) = v_y(\tau) \quad (2.105)$$

2.3.4 粒子在 y 方向上的漂移

粒子的 $y(\tau)$ 不具有周期性，但由于 $v_y(\tau)$ 具有周期性，使得 $y(\tau)$ 具有以下性质：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= v_y \\ \Rightarrow y(\tau) &= y(0) + \int_0^{\tau} v_y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} y(\tau + nt_{p\alpha}) &= y(0) + \int_0^{\tau + nt_{p\alpha}} v_y(\tau) d\tau \\ &= y(0) + \int_0^{\tau} v_y(\tau) d\tau + \int_{\tau}^{\tau + nt_{p\alpha}} v_y(\tau) d\tau \\ &= y(\tau) + n \int_0^{t_{p\alpha}} v_y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.107)$$

其中 n 是一个整数。记

$$\Delta_{\alpha} = \int_0^{t_{p\alpha}} v_y(\tau) d\tau \quad (2.108)$$

则

$$y(\tau + nt_{p\alpha}) = y(\tau) + n\Delta_{\alpha} \quad (2.109)$$

由于方程(2.108)中的 Δ_{α} 一般不为零，所以方程(2.109)说明粒子在 y 方向发生周期性的漂移。

2.4 未扰轨道积分的计算

在扰动电荷与电流的表达式中含有如下形式的轨道积分：

$$\begin{aligned} S_{\alpha}(x, v_x, v_y) &\equiv \\ \int_{-\infty}^0 d\tau &\left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x') + v_{t\alpha} \hat{A}_z(x') \omega_{z\alpha} \tau}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) + \omega_{z\alpha}^2 \tau^2 - i\omega\tau] \end{aligned} \quad (2.110)$$

其中涉及 xy 平面内的未扰轨道: x', y', v'_x, v'_y 。定义如下函数:

$$g(x, v_x, v_y, \tau) \equiv \hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c} \quad (2.111)$$

$$h(x, v_x, v_y, \tau) \equiv -\frac{v_{t\alpha}}{c} \hat{A}_z(x') \quad (2.112)$$

由于未扰轨道 x', v'_x, v'_y 是关于 τ 的周期为 $t_{p\alpha}$ 的周期函数, 所以上面定义的函数也是关于 τ 的周期函数:

$$g(x, v_x, v_y, \tau) = g(x, v_x, v_y, \tau + t_{p\alpha}) \quad (2.113)$$

$$h(x, v_x, v_y, \tau) = h(x, v_x, v_y, \tau + t_{p\alpha}) \quad (2.114)$$

为记法简便, 略去以上函数与轨道初始条件 x, v_x, v_y 的依赖, 把函数 g, h 分别记为 $g(\tau)$ 和 $h(\tau)$ 。这样, 轨道积分可写为:

$$\begin{aligned} S_\alpha(x, v_x, v_y) & \quad (2.115) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau [g(\tau) + h(\tau)\omega_{z\alpha}\tau] \exp[ik_y(y' - y) + \omega_{z\alpha}^2\tau^2 - i\omega\tau] \end{aligned}$$

记 $y' - y \equiv Y'(x, v_x, v_y, \tau)$, 由上面的讨论知 $Y'(x, v_x, v_y, \tau)$ 具有如下性质:

$$Y'(x, v_x, v_y, \tau + nt_{p\alpha}) = Y'(x, v_x, v_y, \tau) + n\Delta_\alpha \quad (2.116)$$

其中, n 是个整数,

$$\Delta_\alpha = \int_0^{t_{p\alpha}} v'_y(x, v_x, v_y, \tau) d\tau \quad (2.117)$$

与函数 g, h 的记法相同, 以下把函数 $Y'(x, v_x, v_y, \tau)$ 记为 $Y'(\tau)$, 轨道积分写为:

$$\begin{aligned} S_\alpha(x, v_x, v_y) & \quad (2.118) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau [g(\tau) + h(\tau)\omega_{z\alpha}\tau] \exp[ik_y Y'(\tau) + \omega_{z\alpha}^2\tau^2 - i\omega\tau] \end{aligned}$$

定义积分:

$$I_n \equiv \int_{-(n+1)t_{p\alpha}}^{-nt_{p\alpha}} d\tau [g(\tau) + h(\tau)\omega_{z\alpha}\tau] \exp[ik_y Y'(\tau) + \omega_{z\alpha}^2\tau^2 - i\omega\tau] \quad (2.119)$$

作变量代换 $\tau' \equiv \tau + nt_{p\alpha}$, 以上的积分化为:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau' [g(\tau') + h(\tau')\omega_{z\alpha}(\tau' - nt_{p\alpha})] \\ &\times \exp[ik_y Y'(\tau') - ik_y n\Delta_\alpha + \omega_{z\alpha}^2(\tau' - nt_{p\alpha})^2 - i\omega(\tau' - nt_{p\alpha})] \end{aligned} \quad (2.120)$$

以上利用了函数 $g(\tau), h(\tau)$ 的周期性(2.113)(2.114)和函数 $Y'(\tau)$ 的性质(2.116)。定义函数:

$$l_n(\tau') = \exp[i(\omega t_{p\alpha} - k_y \Delta_\alpha)n + \omega_{z\alpha}^2(\tau' - nt_{p\alpha})^2] \quad (2.121)$$

I_n 写为:

$$I_n = \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau' [g(\tau') + h(\tau')\omega_{z\alpha}(\tau' - nt_{p\alpha})] l_n(\tau') \exp[ik_y Y'(\tau') - i\omega\tau']$$

从而, 轨道积分(2.110)可写为:

$$\begin{aligned} S_\alpha &= \xrightarrow{t_{p\alpha} > 0} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \\ &= \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau' \left[g(\tau') \sum_{n=0}^{+\infty} l_n(\tau') + h(\tau') \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_{z\alpha}(\tau' - nt_{p\alpha}) l_n(\tau') \right] \\ &\quad \times \exp[ik_y Y'(\tau') - i\omega\tau'] \end{aligned} \quad (2.122)$$

这样就把轨道积分化为一个周期时间内的积分。轨道积分(2.122)与轨道积分(2.110)相比, 其优点是我们只需要跟踪粒子在一个周期时间内的轨道。

轨道积分(2.122)的被积函数中含有两个无穷求和:

$$C_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n(\tau') \quad (2.123)$$

$$C_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_{z\alpha}(\tau' - nt_{p\alpha}) l_n(\tau') \quad (2.124)$$

注意到 $\omega_{z\alpha}$ 的定义: $\omega_{z\alpha} = ik_z v_{t\alpha}/2$ 。当 $k_z = 0$ 时

$$C_2 = 0$$

而此时 C_1 是个等比级数, 求和可解析作出:

$$C_1 = \frac{1}{1 - \exp[i(\omega t_{p\alpha} - k_y \Delta_\alpha)]} \quad (2.125)$$

顺便指出, 上式说明此种情况的共振粒子, 为满足以下条件的粒子:

$$\omega t_{p\alpha} - k_y \Delta_\alpha \approx 2\pi m,$$

其中 m 为整数。定义: $V_d \equiv \Delta_\alpha/t_{p\alpha}$, 即 V_d 为粒子在一个周期内的在 y 方向上的平均漂移速度。定义: $\omega_b = 2\pi/t_{p\alpha}$, 即 ω_b 为粒子运动周期对应的频率。这样共振条件写为:

$$\omega - k_y V_d - m\omega_b \approx 0$$

零阶共振条件即为:

$$V_d - \frac{\omega}{k_y} \approx 0$$

即粒子在一个周期时间内的平均漂移速度等于波的相速度。

当 $k_z \neq 0$ 时, 方程(2.123)和(2.124)中的无穷求和不能解析作出, 需要数值处理。注意到此时 l_n 随 n^2 指数衰减, 实际计算中只要保留求和的前几项即可。

对Kappa-Maxwell电流片中多出的轨道积分也可类似处理(见附录A.3)。

2.5 Vlasov-Maxwell方程组

库仑规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.126)$$

Maxwell方程组:

$$-\nabla^2 \varphi = 4\pi\rho \quad (2.127)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.128)$$

电磁场取如下形式:

$$\varphi = \hat{\varphi}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (2.129)$$

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (2.130)$$

线性化的Vlasov方程:

$$\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{1\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{1\alpha} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha}$$

其中 $\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(x)$, $f_{0\alpha} = f_{0\alpha}(x, \mathbf{v})$ 为已知量, 扰动电荷密度与电流密度:

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{1\alpha} dv_x dv_y dv_z \quad (2.131)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_{1\alpha} dv_x dv_y dv_z \quad (2.132)$$

以上是我们作稳定性分析时可能用到的所有方程。求解的步骤是, 首先由线性化的Vlasov方程沿未扰轨道积分, 从而把扰动分布函数表为扰动标势和矢势的函数, 再按照方程(2.131)(2.132)求得扰动电荷密度与电流密度。这样把扰动电荷密度与电流密度表示为标势和矢势的函数, 最后代入Maxwell方程组(2.126)-(2.128)。注意到方程组(2.126)-(2.128)总共有五个方程, 而涉及的未知函数只有四个 $\mathbf{A}(x)$, $\varphi(x)$ 。这说明方程组中有多余的方程存在。事实上, 由于从Vlasov方程求得的扰动电荷与电流保证了电荷守恒定律成立:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.133)$$

同时Maxwell方程组也保证了电荷守恒定律成立, 这样二者联立必然存在多余的方程。在我们考虑的这种情况下, 不难证明方程(2.128)的 y 分量和 z 分量的其中之一是多余的 (即其可从其他方程导出)。在实际计算中我们要剔除这个多余的方程。

2.6 处理本征值问题的方法

扰动场 $\hat{\phi}(x)$, $\hat{A}_x(x)$, $\hat{A}_y(x)$, $\hat{A}_z(x)$ 与 x 坐标的依赖关系未知, 在谱方法中^[60], 假设它们可以用某种基函数系来展开:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n \Psi_n(x) \\ \hat{A}_x(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_{N+n} \Psi_n(x) \\ \hat{A}_y(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_{2N+n} \Psi_n(x) \\ \hat{A}_z(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_{3N+n} \Psi_n(x)\end{aligned}$$

其中的展开系数 C_i 待定。把以上的表达式代入扰动电荷电流的表达式和Maxwell方程组(方程(2.126), (2.127)以及方程(2.128)的两个分量方程), 并分别对每个方程两边对基函数求内积, 可以得到以下形式的矩阵方程:

$$M_{ij}C_j = 0 \quad (2.134)$$

其中 M_{ij} 是 $4N \times 4N$ 的矩阵。基函数 Ψ_n 和任意函数 $g(x)$ 间的内积定义如下:

$$\langle \Psi_n | g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x) g(x) dx$$

对给定的平衡位形和取定的波矢 k_y, k_z , 由方程(2.134)的非零解条件

$$\det(M) = 0 \quad (2.135)$$

可确定出模式的复频率 ω 。方程(2.134)的非零解向量 C 给出扰动场的展开系数, 从而可确定出扰动场的空间分布(本征函数的空间分布)。本文所采用的基函数系为Hermite函数系^[60]:

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x)$$

其中 $H_n(x)$ 是 n 阶的Hermite多项式。Hermite函数系的基函数 $\Psi_n(x)$ 满足当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时 $\Psi_n(x) \rightarrow 0$ 。这正是扰动场所要满足的边界条件。

2.7 归一化和计算步骤

在实际计算中, 我们用电流片半宽 L 归一空间, 在计算电子和离子轨道轨道时, 我们分别用相应粒子在渐进场中的回旋频率 $\Omega_{\alpha 0}$ 归一时间, 分别用电子

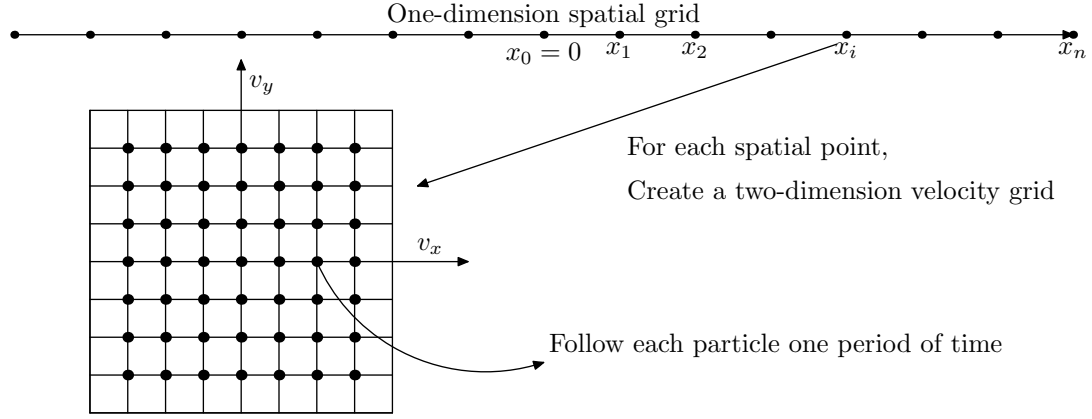


图 2.2 计算粒子在平衡磁场中一个周期内的轨道

和离子的热速度 $v_{t\alpha}$ 归一相应粒子的初始和瞬时速度：

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{x}' = \frac{x'}{L}$$

$$\bar{y}' = \frac{y'}{L}$$

$$\bar{\tau} = \tau \Omega_{\alpha 0}$$

$$\bar{v}_x = \frac{v_x}{v_{t\alpha}}, \bar{v}'_x = \frac{v'_x}{v_{t\alpha}}$$

$$\bar{v}_y = \frac{v_y}{v_{t\alpha}}, \bar{v}'_y = \frac{v'_y}{v_{t\alpha}}$$

对电磁场的归一如下：

$$\bar{\varphi} = \frac{\hat{\varphi}}{\phi_0}$$

$$\bar{A}_x = \frac{\hat{A}_x}{\phi_0 c / v_{ti}}, \bar{A}_y = \frac{\hat{A}_y}{\phi_0 c / v_{ti}}, \bar{A}_z = \frac{\hat{A}_z}{\phi_0 c / v_{ti}}$$

其中 $\phi_0 \equiv 4\pi e^2 N_0 L^2$, N_0 是电流片中心处的粒子数密度。

计算的步骤如下：首先取定平衡位形（平衡磁场和平衡分布函数），取定要计算的波矢 k_y, k_z ，然后，

- 步骤一：在三维相空间 (x, v_x, v_y) 中划分出网格，将每一个格点作为一个粒子的初始条件，计算出粒子在平衡磁场中一个周期内的轨道。如图 (2.2) 所示。实际计算中，利用轨道和基函数的对称性，空间 x 只需要考虑 $x > 0$ 部分，典型的相空间网格数为 $50 \times 21 \times 21$ 。对一个周期内的轨道一般取 40 – 60 个时间点。
- 步骤二：对一个已知的 ω ，对扰动场的每一个基函数，计算出轨道积分，做出速度空间积分，得扰动量关于 x 的函数，进而计算出矩阵方程 (2.134) 的矩阵元。再计算出矩阵的行列式值 $\det(M)$ ($\det(M)$ 是关于 ω 的函数)。

- 步骤三：使用牛顿迭代法找到使得 $\det(M) = 0$ 的 ω 值。即为模式的复频率。在每一步迭代中要重复步骤二两次（对应不同 ω 值）。
- 步骤四：找到本征值 ω 后，对矩阵 M 做奇异值分解^[61](Singular Value decomposition) 从而确定出矩阵方程 $M_{ij}C_j = 0$ 的非零解。非零解向量 C 给出扰动场的展开系数，从而可确定扰动场的空间分布。

第3章 无碰撞撕裂模不稳定性

3.1 概述

这一章研究电流片中的无碰撞撕裂模(collisionless tearing mode)。在本文使用的坐标系中,平衡磁场为:

$$\mathbf{B}_0 = b_0 f\left(\frac{x}{L}\right) \mathbf{e}_z$$

其中 $f(x)$ 是一个奇函数。这里 xz 平面称为撕裂模平面。我们把波矢 $k_y = 0$ 的撕裂模称为纯撕裂模,而把 $k_y \neq 0$ 的撕裂模称为斜撕裂模。

撕裂模不稳定性能在电流片中心区域产生 x 方向的扰动磁场,从而会使磁场发生重联,是一种磁场重联过程。图(3.1)画出了电流片磁场结构在撕裂模扰动产生前后的情况,撕裂模扰动使得电流片的反向磁场发生重新连接形成磁岛结构。

由撕裂模不稳定性导致磁场重联现象,最早在半个世纪前被发现^[62],然而这个问题依然是现在很多研究工作的主题^[63-70]。不同的是,现在的研究重点是寻找电阻MHD之外的物理机制。传统的电阻MHD依靠碰撞电阻来破坏磁冻结条件,而在高温等离子体中,碰撞电阻很小,其所能提供的重联速度太慢,不能解释实际观测到的快速重联现象。在双流体描述下有两个新的促进重联的机制: Hall效应和电子惯性。Hall效应本身不直接导致重联,因为此时磁场仍然冻结在电子流体中,但由于电子可以携带磁场以比离子流体快得多的速度流向重联区,所以Hall效应可以起到加速重联的作用^[63]。电子惯性提供了除碰撞电阻之外的破坏磁冻结条件的机制,这是目前快速磁场重联的一个重要机制。

本章研究的撕裂模是完全动理学描述下的无碰撞撕裂模,这里电子惯性项和Hall项自动包含在理论中。值得指出的是,我们这里研究的撕裂模的主要应用是在磁尾电流片,其与Tokamak中撕裂模的一个主要区别在于这里没有垂直撕裂模平面的导向场(对应于Tokamak中的环向场)。磁尾电流片中的撕裂模其波长和电流片半宽相对 $k_y L \sim 1$,纯撕裂模的实频为零,是一个纯增长的模式。对斜撕裂模($k_y \neq 0$),其实频不为零,因而有非零的相速度,其方向在电子的抗磁漂移方向上(与平衡电流方向相反)。

由于撕裂模不稳定性是一种自发的重联过程,一直以来人们认为撕裂模提供了大规模磁场重联的触发机制^[13,21]。Coppi^[20]等人首先研究了地球磁尾电流片中的无碰撞撕裂模,并用它来解释磁尾中的重联现象和伴随的磁能向

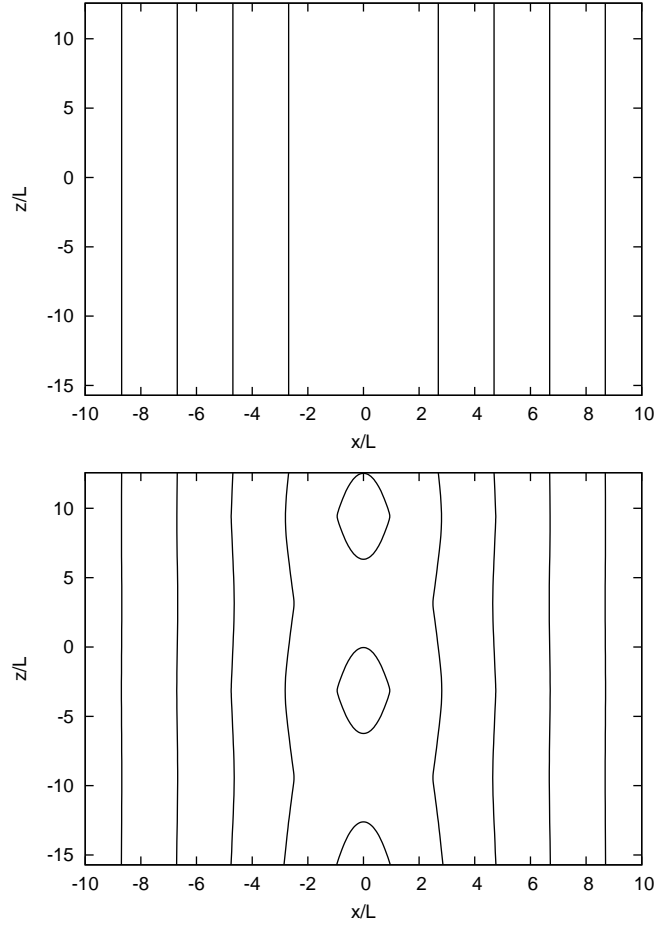


图 3.1 撕裂模扰动前的磁场平衡位形（上图）和撕裂模扰动后形成的磁岛结构（下图）。

粒子动能的转化。随后Dobrowolny^[24]用无碰撞动理学理论计算了撕裂模的增长率，在计算中，涉及到两个方面的近似，一是对未扰轨道的近似，二是对本征函数的近似。由于电流片磁场中粒子轨道的复杂性，没有一般性的轨道表达式。Dobrowolny采用的解决办法是，对每种粒子，把电流片空间上分为内区 ($|x| \leq d_\alpha, \alpha = i, e$) 和外区 ($|x| > d_\alpha$)。内区粒子被看作非磁化，其轨道用直线轨道代替（轨道在内区边界反弹）。而对外区的粒子轨道用漂移回旋轨道近似。电子的内区称作电子奇异层，离子的内区相应的称为离子奇异层。在离子的奇异层内，扰动场的空间依赖被忽略（常 ψ 近似），从而可以把扰动场提出到轨道积分之外。在这些近似下，匹配各个区域边界上的解后可以得到撕裂模的色散关系。这种方法类似于边界层渐进匹配方法，但不同于处理电阻撕裂模问题中所使用的边界层渐进匹配方法^[62]，它只在电子和离子的奇异层边界点上进行解的匹配，而这里奇异层宽度的选择有一定任意性，且最终会影响到最后的增长率^[39,71]。Dobrowolny所采用的这种方法影响了后来几十年来对无碰撞撕裂模的研究^[33–37]。

近些年来的卫星观测表明,磁尾电流片在亚暴发生前会变的很薄,其厚度可小到离子回旋半径的量级^[1],研究这种离子尺度的电流片的稳定性是近几年的一个热点^[26]。在这种薄电流片中,撕裂模的增长率一般大于厚电流片情况。分析这种离子尺度的薄电流片中的撕裂模,传统的近似理论一般不适用^[25]。

一些观测和模拟结果还表明,电流片中的电流分布在一些情况下会发生分叉,由原来的单峰变为双峰。在这种分叉电流片中常常伴随着电子的温度各向异性。Matsui等人^[39]研究了这种分叉电流片中的撕裂模,结果表明电流分叉对撕裂模是致稳作用,而电子的温度各向异性是在 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时是解稳作用,而在 $T_{e\perp} < T_{e\parallel}$ 是致稳作用。这与以前文献的研究结果相同^[19,33]。在电子温度各向异性情况下,Weibel不稳定性^[72]同时存在,因而这种情况下的撕裂模是撕裂模和Weibel不稳定性的混合模式^[19]。Karimabadi^[19]等人研究了电子温度各向异性对重联触发的影响,结果表明,低杂漂移不稳定性引起的电子各向异性能提高磁岛的生长速度和饱和幅度,是磁场重联的触发的一种重要机制。

在磁层顶电流片中常常存在垂直于撕裂模平面的行星际磁场,称为导向场(guide field),在我们的坐标系下即为 B_y 。对Tokamak中的撕裂模^[73-75],这个导向场对应沿环向磁场。导向场对模撕裂模的性质有重要影响。Daughton^[76]研究了不同导向磁场下的撕裂模,结果发现,在很强和很弱的导向场下,纯撕裂模($k_y = 0$)的增长率是最大的,斜撕裂模($k_y \neq 0$)的增长率小于纯撕裂模。而在中等强度的导向场作用下,出现了增长率大于纯撕裂模的斜模。Daughton称这种斜模为漂移撕裂模。

Roytershteyn等人^[77]研究了撕裂模平面内的平行剪切流对重联模的影响,结果发现在电流片的厚度小于离子回旋半径时,剪切流对撕裂模是致稳作用。

在对撕裂模的研究中,大多数工作集中在研究宏观量(如法向场,导向场,平行剪切流)对撕裂模的影响。电流片中的粒子分布函数一般取为Maxwell分布。然而在卫星观测中表明,空间等离子体中的电子和离子的平衡分布函数通常偏离Maxwell分布,这种分布能用Kappa分布函数很好地描述^[47-50]。Kappa分布是一种超热分布,其在低能量区域和Maxwell分布基本相同,但在高能区域的粒子数多于麦氏分布时的粒子数,基于这种Kappa分布函数的电流片模型反映了这些非麦氏分布特点,因而能提供一个更贴近实际的电流片模型。在本章中我们计算了在这种非麦氏电流片中的撕裂模的增长率。我们发现这种具有超热分布的电流片中的撕裂模的增长率小于麦氏分布情况(Harris 电流片)。

在无碰撞等离子体中,平行磁场和垂直磁场方向上的运动解耦,往往使得这两个方向上的分布函数不同,因而产生分布函数的各向异性,在这两个方向都取为麦氏分布的情况下,一种简单的各向异性就是垂直温度和平行温度不同的双麦氏分布。早期^[33]的和最近^[39]的一些研究结果都表明,温度各向异

性能显著影响撕裂模。我们计算了Harris电流片中温度各向异性情况下的撕裂模的增长率，结果表明，电子和离子的温度各向异性都会影响撕裂模的增长率，但在同样的温度各向异性下，电子的影响远大于离子的影响。温度各向异性在 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ 时，对撕裂模起解稳作用，而在 $T_{\perp} < T_{\parallel}$ 时对撕裂模起致稳作用。在 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ 时撕裂模的最大增长率对应的波长位置随着 T_{\perp}/T_{\parallel} 的增加而迅速向短波方向移动。这些结果与文献中的结果一致^[33,37,39]。我们进而考虑了一种更一般的分布函数各向异性，即垂直与磁场方向取为Kappa分布，而平行磁场方向取为麦氏分布。这种Kappa-Maxwell电流片有内在的各向异性的特点（垂直分布和平行分布不同），可以用这种模型来研究各向异性对不稳定性的影响。

一些数值模拟结果表明低杂漂移不稳定性(LHDI)会各向异性地加热电子，使得电子垂直磁场的温度高于平行磁场方向上的温度^[13,21,38]。当垂直方向和平行方向的分布是Maxwell分布时，这种各向异性可以用双温Maxwell分布来描述。然而实际模拟中的垂直分布和平行分布很复杂，偏离Maxwell分布，这启发我们考虑一种更一般的各向异性分布来研究各向异性对不稳定性的物理效果，这里选择Kappa-Maxwell分布来描述这种各向异性，其垂直磁场方向取为一般的Kappa分布，其平行方向上仍然保持Maxwell分布。

在这一章里，我们首先研究温度各向同性的Harris电流片中的撕裂模的性质，并把结果和文献中线性理论的计算结果和模拟结果对比。然后我们研究了温度各向异性情况下的撕裂模的性质。在3.3节中我们计算了Kappa电流片中的撕裂模的色散关系，并把结果和Harris电流片中的结果对比。在3.4节我们研究了Kappa-Maxwell电流片中的撕裂模。

3.2 Harris电流片中的撕裂模

Harris电流片平衡位形可以用以下六个无量纲参数完全确定：

$$\frac{m_i}{m_e}, \frac{\rho_i}{L}, \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_{e0}^2}, \frac{T_{i\perp}}{T_{e\perp}}, \frac{T_{i\parallel}}{T_{i\perp}}, \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}}$$

其中 $\rho_i \equiv v_{ti}/\Omega_{i0}$ 是离子回旋半径， $\Omega_{i0} = b_0 e/m_i c$ 是用渐近磁场 b_0 计算出的离子回旋频率。 v_{ti} 是离子热速度。 L 是电流片半宽。 ω_{pe} 是用电流片中心处的数密度计算出的电子等离子体频率， $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 N_0/m_e$ 。参数 $\omega_{pe}^2/\Omega_{e0}^2$ 是一个表征电子绝对温度的参数，这一参数对不稳定性的影响很小，在以下的讨论中如无特殊说明这个参数取定为 $\omega_{pe}^2/\Omega_{e0}^2 = 25$ 。

以下来考虑不同平衡参数的Harris电流片中的撕裂模。考虑到实际的数值模拟中 m_i/m_e 常常取较小的值，在下面的计算中除了考虑实际的电子离子质量比 $m_i/m_e = 1836$ 外，我们还计算了 m_i/m_e 取较小值的情况。

3.2.1 各向同性情况

这一节里我们讨论温度各向同性的Harris电流片中的撕裂模：

$$T_i = T_{i\perp} = T_{i\parallel}$$

$$T_e = T_{e\perp} = T_{e\parallel}$$

首先作为一个特例，我们考虑对偶等离子体中的纯撕裂模 ($k_y = 0$)。

3.2.1.1 对偶等离子体中的纯撕裂模

对偶等离子体(pair plasma)是指由质量相等 ($m_i/m_e = 1$) 的正负粒子组成的等离子体。为了使正负粒子完全对称，我们把它们的温度也取为相等 ($T_i/T_e = 1$)，这种情况下由于正负粒子轨道积分的对称性，正负粒子的扰动量相加时会发生部分抵消，最终使得电荷电流密度与扰动电磁场的实际依赖关系为：

$$\rho = \rho(\varphi, A_x, A_z) \quad (3.1)$$

$$J_x = J_x(\varphi, A_x, A_z) \quad (3.2)$$

$$J_y = J_y(A_y) \quad (3.3)$$

考虑势写法下的Maxwell 方程组：

$$-\nabla^2 \phi_1 = 4\pi\rho \quad (3.4)$$

$$-\nabla^2 A_{1x} = \frac{4\pi}{c} J_x \quad (3.5)$$

$$-\nabla^2 A_{1y} = \frac{4\pi}{c} J_y \quad (3.6)$$

$$-\nabla^2 A_{1z} = \frac{4\pi}{c} J_z \quad (3.7)$$

库仑规范：

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = 0 \Rightarrow ik_z A_{1z} + \frac{\partial A_{1x}}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

在 $k_z \neq 0, k_y = 0$ 情况下，方程(3.7)可从其他方程导出，是多余方程，无需考虑。这样，利用电荷和电流密度的表达式(3.1)(3.2)(3.3)，知方程(3.6)与其他方程解耦，方程(3.6)描述的模式会产生 x 方向的扰动磁场，会使磁场发生重联，是我们所关心的撕裂模。这种情况下的撕裂模只需一个方程(3.6)描述，其仅涉及 A_y 扰动。

在图(3.2)中画出了我们计算的对偶等离子体中撕裂模的色散关系。此处及以后，波的复频率均用离子在无穷远处磁场的回旋频率 Ω_{i0} 归一。计算参数

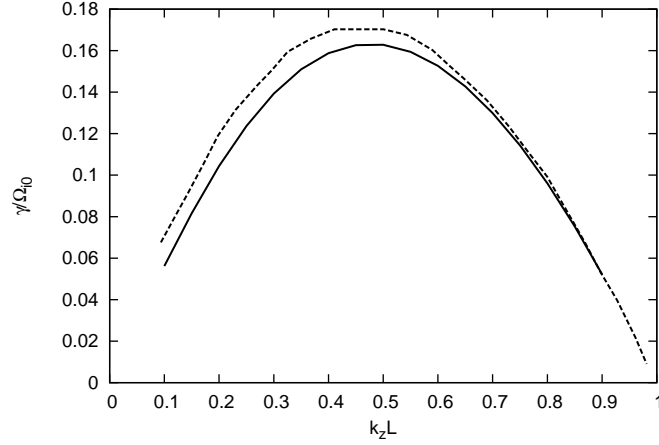


图 3.2 对偶等离子体中撕裂模增长率随波矢 k_z 的变化关系，实线为本文的计算结果，虚线为文献^[78]中的解析解。参数为 $m_i/m_e = 1$, $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_y L = 0$ 。

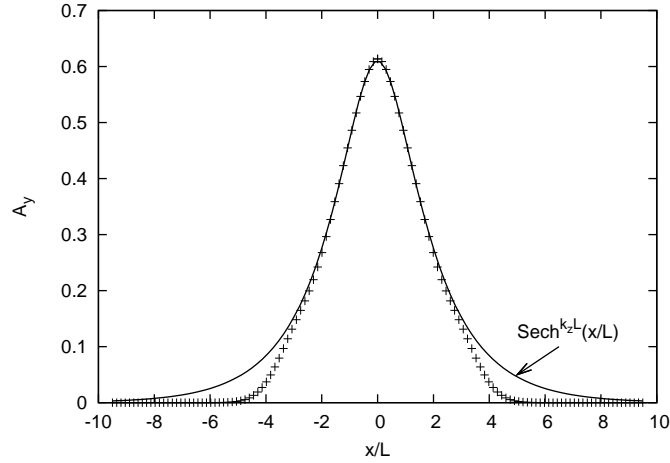


图 3.3 对偶等离子体中撕裂模的本征函数 $A_y(x)$ ，实线为文献^[7]中的解析解，星号为本文的计算结果，参数为 $m_i/m_e = 1$, $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_y L = 0$ 。此种情况只涉及到磁矢势 A_y 的扰动，其他扰动量为零。

为： $m_i/m_e = 1$, $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_y L = 0$ 。此时撕裂模的实频为零，图中同时画出了文献^[78]中的近似解析解，从结果可一看出近似解析解和我们的计算结果基本吻合。图（3.3）画出了此种情况下我们计算出的本征函数 $A_y(x)$ ，同时画出了文献^[7]中的近似解析解。我们的结果和这个近似解析解在电流片中心区域符合的很好，在远离电流片中心的边缘稍有差别。值得指出的是，我们是用一般情况下的程序计算这一特殊情况，我们的本征函数除了 $A_y(x)$ ，还有 $\varphi(x)$, $A_x(x)$, $A_z(x)$ 。实际计算出的 $\varphi(x)$, $A_x(x)$, $A_z(x)$ 基本为零，这一点符合对偶等离子体中撕裂模仅涉及 $A_y(x)$ 扰动这一性质。

3.2.1.2 色散关系

图(3.4)中画出了实际离子电子质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下撕裂模的色散关系, 计算参数为 $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_y L = 0$ 。此时撕裂模的实频仍然为零。图中同时画出了 $m_i/m_e = 1$ 情况的色散关系, 与 $m_i/m_e = 1$ 的情况对比, 实际质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下的增长率要小很多。

$m_i \neq m_e$ 情况下的撕裂模增长率小于对偶等离子体中的撕裂模增长率, 其原因是, 这时候电子和离子在扰动场作用下产生电荷分离, 在Harris电流片情况下, 这种电荷分离引起的静电效应对撕裂模起致稳作用^[79]。

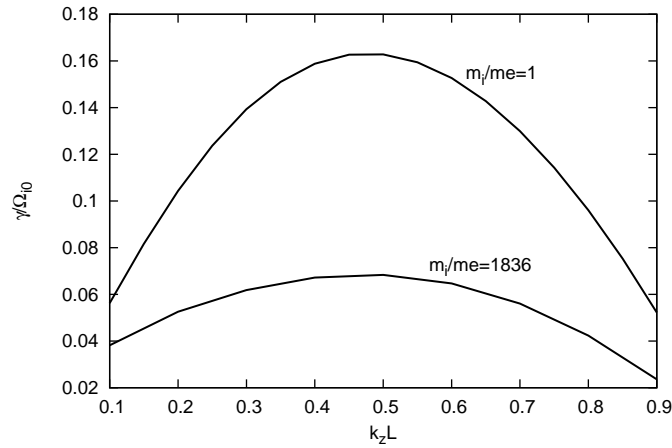


图 3.4 撕裂模的增长率关于波矢 k_z 的函数关系, 图中分别画出了质量比为 $m_i/m_e = 1$ 和 $m_i/m_e = 1836$ 两种情况。其他参数为 $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_y L = 0$

3.2.1.3 本征函数

在本文的线性理论中, 本征函数由标势和矢势组成, 定义

$$F \equiv [\varphi(x), A_x(x), A_y(x), A_z(x)]$$

为撕裂模的模结构。其中 $\varphi(x)$, $A_x(x)$, $A_y(x)$, $A_z(x)$ 均为复数, 模结构中包含扰动场的相对幅度和相位信息。

图(3.5)画出了 $m_i/m_e = 1836$ 情况下的撕裂模的扰动标势和矢势的空间分布, 选择的波矢是 $k_z L = 0.1$, $k_y L = 0$, 此时的增长率为 $0.038\Omega_{i0}$, 其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$ 。实际计算出的本征函数中 φ , A_x , A_y 仅有实部而 A_z 仅有虚部, 这对应到扰动磁场则为 B_{1x} 和 B_{1y} 仅有虚部, 而 B_{1z} 仅有实部。这说明 B_{1x} 和 B_{1y} 是同相位或反相位, 而 B_{1z} 与前两者有 $\pm\pi/2$ 的位相差。这种扰动磁场间的位相差对Harris电流片中的纯撕裂模($k_y = 0$)普遍成立。

撕裂模的标势 $\varphi(x)$ 和矢势 $A_y(x)$, $A_z(x)$ 是关于 x 的偶函数, 而矢势 $A_x(x)$ 是关于 x 的奇函数。对应到扰动磁场的空间分布则为: 垂直于撕裂模平面的扰动磁场 B_{1y} 和平行于平衡磁场的扰动磁场 B_{1z} 关于 x 是奇对称, 而撕裂模平面内的使磁场发生重联的扰动磁场 B_{1x} 关于 x 是偶对称。图(3.6)画出了与图(3.5)对应的扰动磁场的空间分布。重联电场 E_{1y} 和矢势 A_y 的关系为:

$$E_{1y} = \frac{i\omega}{c} A_y$$

由此可知其关于 x 是偶对称。

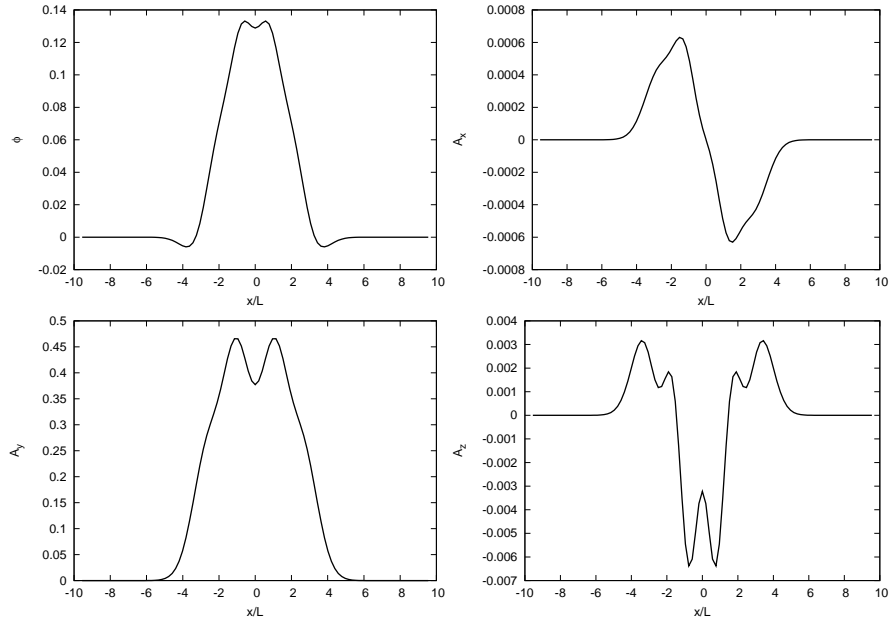


图 3.5 撕裂模的扰动标势和矢势的空间分布, 波矢 $k_z L = 0.1, k_y L = 0$, 此时的增长率为 $0.038\Omega_{i0}$, 图中画出的是 φ, A_x, A_y 的实部和 A_z 的虚部。 φ, A_x, A_y 的虚部和 A_z 的实部都为零。其他参数为 $m_i/m_e = 1836, T_i/T_e = 1, \rho_i/L = 1$ 。

$m_i/m_e = 1836$ 情况下的本征函数与对偶等离子体($m_i/m_e = 1$)的主要区别在于, 扰动场中出现静电势(标势), 从图(3.5)看其幅度(0.1个单位)和矢势 A_y 的幅度(0.4个单位)相当。在早期的关于无碰撞撕裂模的文献中静电势 φ 常常被忽略, 此处的计算结果说明, 对 $\rho_i/L \sim 1$ 的薄电流片, 这样做一般是不可取的。图(3.5)中扰动矢势 $A_x(x)$ 和 $A_z(x)$ 的幅度要比分量 $A_y(x)$ 小一个数量级, 基本可以忽略, 在文献中关于无碰撞撕裂模的近似理论^[33-36]中矢势 A_x 和 A_z 通常被忽略, 此处的计算结果说明这样做是可以接受的。

虽然此时静电势的幅度(0.1个单位)要小于标势 A_y 的幅度(0.4个单位), 然而其对抗动电场的贡献可能要大于矢势的贡献。我们可以计算一下此时静电

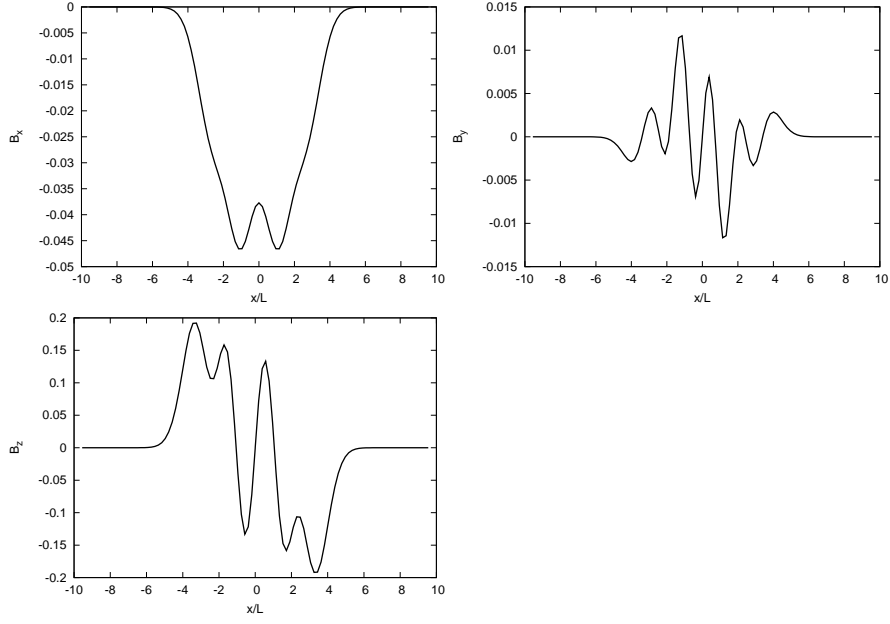


图 3.6 撕裂模的扰动磁场，波矢 $k_z L = 0.1, k_y L = 0$ ，此时的增长率为 $0.038\Omega_{i0}$ ，图中画出的是 B_x, B_y 的虚部和 B_z 的实部。 B_x, B_y 的实部和 B_z 的虚部为零。其他参数为 $m_i/m_e = 1836, T_i/T_e = 1, \rho_i/L = 1$

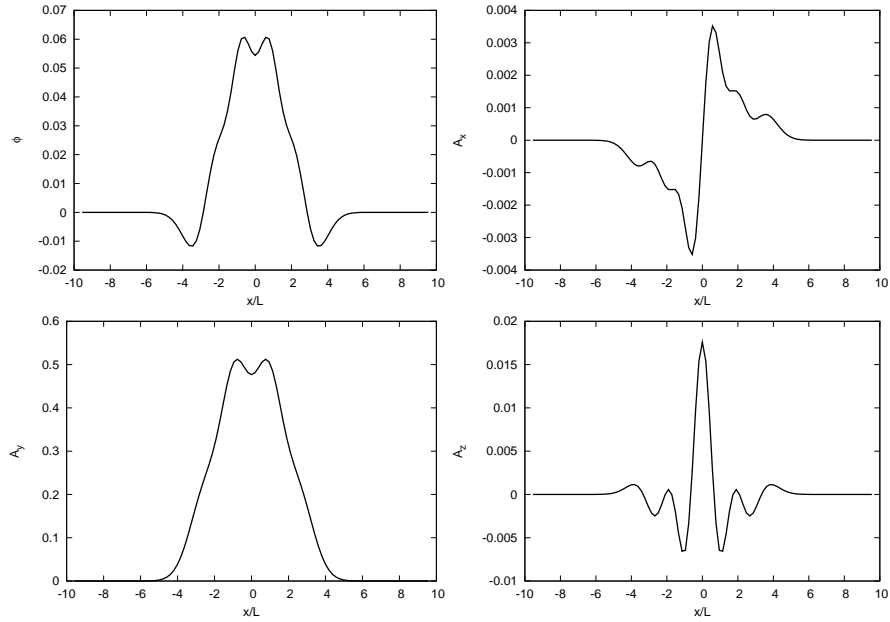


图 3.7 撕裂模的本征函数，波矢 $k_z L = 0.5, k_y L = 0$ ，此时的增长率为 $0.068\Omega_{i0}$ ，图中画出的是 φ, A_x, A_y 的实部和 A_z 的虚部。 φ, A_x, A_y 的虚部和 A_z 的实部都为零。其他参数为 $m_i/m_e = 1836, T_i/T_e = 1, \rho_i/L = 1$ 。

势（标势）和矢势对扰动电场的贡献：

$$\frac{\mathbf{E}_1}{\varphi_0/L} = -\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}}\mathbf{e}_x - ik_z L \bar{\varphi} \mathbf{e}_z + i \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\omega}{\Omega_{i0}} \right) \bar{\mathbf{A}}$$

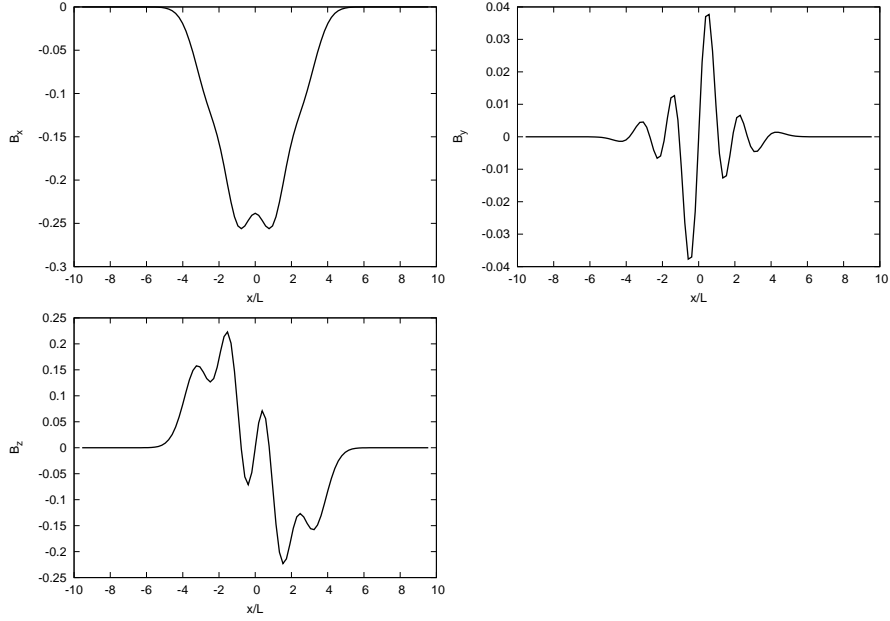


图 3.8 撕裂模的扰动磁场，波矢 $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0$ ，此时的增长率为 $0.068\Omega_{i0}$ ，图中画出的是 B_x , B_y 的虚部和 B_z 的实部。 B_x , B_y 的实部和 B_z 的虚部为零。其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$ 。

上式中第二项为静电势的贡献：

$$k_z L \bar{\varphi} = 0.4 \times 0.1 = 0.04$$

而第三项矢势 A_y 的贡献 (A_x , A_z 的贡献远小于 A_y ，可以忽略) 是：

$$\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\omega}{\Omega_{i0}} \right) \bar{A} = 1.0 \times 0.067 \times 0.4 = 0.0268 < k_z L \bar{\varphi}$$

这说明此时静电势的贡献已经超过矢势的贡献。在厚度为离子回旋半径的薄电流片中，必须自洽地考虑静电势的贡献才能计算出准确的增长率。而对厚度远大于离子回旋半径的厚电流片静电势的贡献一般可以忽略^[79]。

图 (3.7) 图 (3.8) 画出了 $k_z L = 0.5$ 时的本征函数和扰动磁场。其他参数与图 (3.5) 相同。此时的增长率为 $0.068\Omega_{i0}$ 。

3.2.1.4 和文献结果的比较

无碰撞撕裂模的研究历史很长，早期的解析研究得到很多结果^[24,33-37]，然而这些研究的方法中大部分都要借助于对未扰轨道和本征函数的某些近似，因而其可以研究的参数范围受到很大限制，在一些参数下(例如薄电流片情况下)得到的结果也值得质疑。近几年，很多文献中用各种方法(包括本文中所使用的全轨道方法)计算了Harris电流片中的撕裂模的增长率。以下把我们的

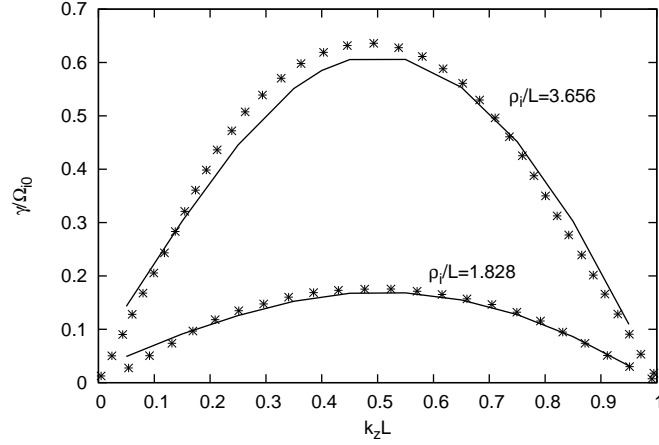


图 3.9 撕裂模的增长率关于波矢 k_z 的函数关系，图中分别画出了电流片半宽为 $\rho_i/L = 1.828$ 和 $\rho_i/L = 3.656$ 两种情况。实线为本文的结果，星号为文献^[21]的结果。其他参数为 $m_i/m_e = 180$, $T_i/T_e = 5$, $\omega_{pe}/\Omega_{e0} = 2.88$

计算结果和这些文献中的结果进行比较。按照文献^[13]中的参数:

$$\frac{m_i}{m_e} = 180, \frac{T_i}{T_e} = 5, \frac{\omega_{pe}}{\Omega_{e0}} = 2.88$$

对比的结果画在图 (3.9) 中，图中画出了两种电流片半宽情况下的色散关系： $\rho_i/L = 1.828$ 和 $\rho_i/L = 3.656$ 情况，这是厚度小于离子回旋半径的薄电流片。两种情况下我们的结果和文献结果都符合得很好。在磁场重联的粒子模拟研究中，如果初始是由热噪声触发重联，其起始阶段是线性撕裂模的增长过程，由这些模拟数据，用最小二乘回归方法 (least square regression) 可以推算出各个波矢上的撕裂模增长率。在图 (3.9) 中的 $\rho_i/L = 1.828$ 情况下，线性理论计算出 $k_z L = 0.25$ 的增长率为 $0.126\Omega_{i0}$ ，在文献^[13]中，在同样参数下由 NPIC 模拟程序的数据计算出的在 $0 - 10/\Omega_{i0}$ 时间段内的 $k_z L = 0.25$ 的增长率为 $0.14\Omega_{i0}$ 。在图 (3.9) 中线性理论计算出 $k_z L = 0.5$ 的增长率 $0.169\Omega_{i0}$ ，而由模拟数据推算出的在 $0 - 10/\Omega_{i0}$ 时间段的增长率为 $0.16\Omega_{i0}$ 。可见线性理论计算的结果和模拟的结果吻合得很好。

3.2.1.5 增长率随 m_i/m_e 的变化关系

在实际的数值模拟中，由于计算能力的限制， m_i/m_e 只能取较小的值，这样计算出的物理过程是否与实际质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下的过程一致，需要进一步验证。因而研究不稳定性与质量比参数的依赖关系很重要。图 (3.10) 画出了撕裂模的增长率随质量比 m_i/m_e 的变化关系。选择的参数为 $T_i/T_e = 3.33$, $\rho_i/L = 1.828$, $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0$ 。此时撕裂模的增长率随着 m_i/m_e 的增加而减小，在实际的离子电子质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下的增长

率要比低质量比情况下的增长率小很多。这是在温度各向同性情况下的结果，在下面关于电子温度各向异性的讨论中，我们将看到，当 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时，撕裂模的增长率随这 m_i/m_e 的增加而增加，这与现在讨论的各向同性情况下的结论相反。

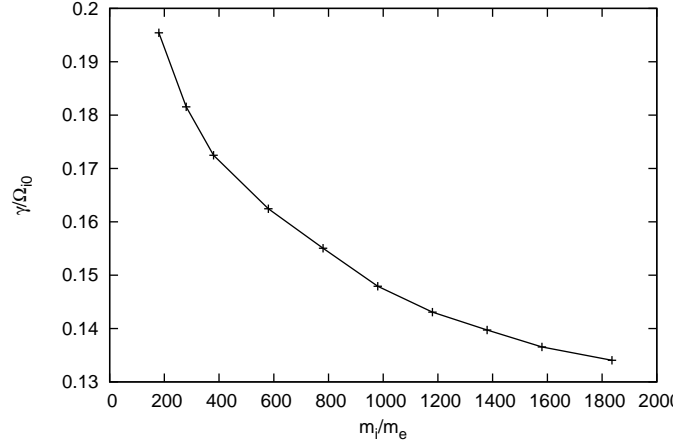


图 3.10 裂模的增长率随质量比 m_i/m_e 的变化关系。其他参数为 $T_i/T_e = 3.33$, $\rho_i/L = 1.828$, $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0$ 。

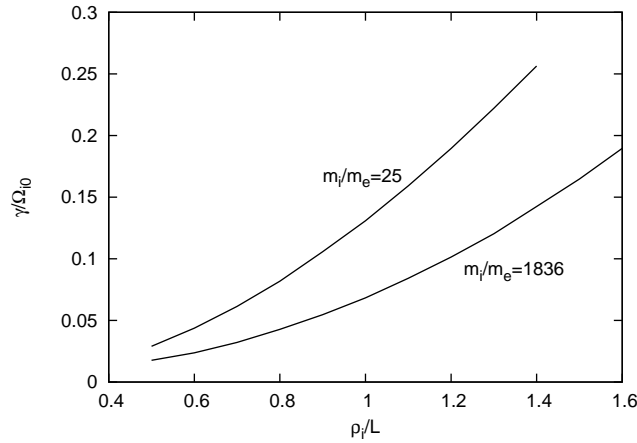


图 3.11 撕裂模增长率随电流片半宽的变化关系，图中分别画出了质量比为 $m_i/m_e = 1836$ 和 $m_i/m_e = 25$ 两种情况。其他参数为 $T_i/T_e = 1$, $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0.0$

3.2.1.6 增长率随电流片厚度的变化关系

图 (3.11) 画出了撕裂模增长率随电流片半宽的变化关系，图中横坐标是 ρ_i/L ，其是用离子回旋半径归一的电流片半宽的倒数。地球磁尾电流片在通常情况下其半宽是远大于离子回旋半径的($\rho_i/L \ll 1$)，这种电流片称为厚电流

片。在一些情况下（例如亚暴发生前）电流片的半宽会变小到和离子回旋半径相当的量级($\rho_i/L \sim 1$)。这种电流片称为薄电流片。研究薄电流片中的不稳定性本征模是近年来一个热点。要描述这种离子回旋半径尺度的电流薄层中发生的现象，流体理论是否能很好的适用要打一个问号。动理学的研究表明，在薄电流片中的不稳定性可能会比厚电流片中的对应模式增长得快的多。在图(3.11)中我们考虑 $\rho_i/L \sim 1$ 附近，撕裂模增长率随电流片半宽的变化关系，图中画出了两种质量比情况，第一种质量比是Geospace Environment Modeling (GEM) magnetic reconnection challenge^[17]中使用的标准质量比 $m_i/m_e = 25$ 。第二种情况是实际的离子电子质量比 $m_i/m_e = 1836$ 。图中的结果表明在这两种情况下均是电流片越薄，则撕裂模的增长率越大。

3.2.1.7 增长率随离子电子温度比的变化关系

图(3.12)画出了撕裂模增长率随离子电子温度比 T_i/T_e 的变化关系。图中画出了两种质量比情况， $m_i/m_e = 25$ 和 $m_i/m_e = 1836$ 。由图可知 T_i/T_e 越小，撕裂模的增长率越大。即电子越热，不稳定性的增长率越大。这一性质对下一章将要讨论的漂移扭曲不稳定性(drift kink instability)也同样适用。

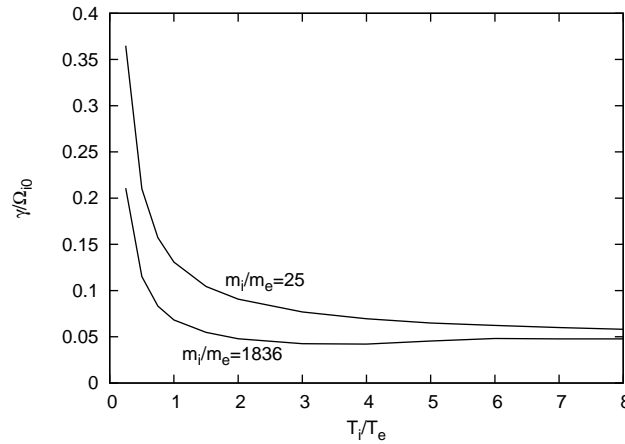


图 3.12 撕裂模增长率随离子电子温度比的变化关系，图中分别画出了质量比为 $m_i/m_e = 1836$ 和 $m_i/m_e = 25$ 两种情况。其他参数为 $\rho_i/L = 1$ ， $k_z L = 0.5$ ， $k_y L = 0.0$

3.2.1.8 增长率随电流向波矢 k_y 的变化关系

以上考虑的都是纯撕裂模($k_y = 0$)，其特点是实频为零，因而相速度为零，是一个纯增长的模式。当 $k_y \neq 0$ 时，撕裂模的实频不再为零。图(3.13)画出了 $k_y \neq 0$ 时的裂模的色散关系和 $k_y = 0$ 时撕裂模色散关系的对比。从图可知，斜撕裂模的增长率总是小于纯撕裂模，并随 k_y 的增加而整体下降。纯撕裂模的

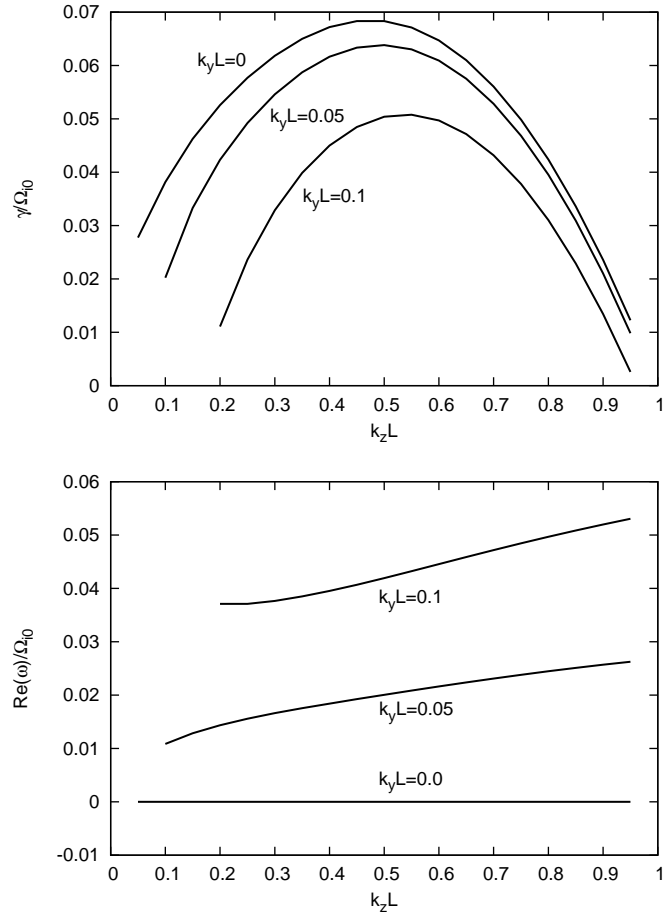


图 3.13 撕裂模的增长率（上图）和实频（下图）关于波矢 $k_z L$ 的函数关系。 $k_y L = 0$ 情况下的实频为零。其他参数为 $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$

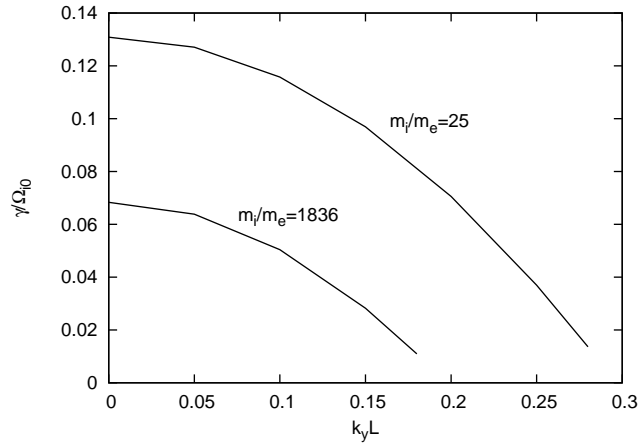


图 3.14 撕裂模增长率随波矢 k_y 的变化关系，图中分别画出了质量比为 $m_i/m_e = 1836$ 和 $m_i/m_e = 25$ 两种情况。其他的参数为： $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$, $k_z L = 0.5$ 。

实频为零。而斜撕裂模的实频不再为零，因而其有不为零的相速度。其相速度的方向在电子抗磁漂移速度的方向，这一点与下一章要讨论的漂移扭曲模不同，其相速度是在离子的抗磁漂移速度方向。

图(3.14)画出了撕裂模的增长率随着电流向波矢 k_y 的变化关系。分别考虑了两种质量比情况 $m_i/m_e = 1836$ 和 $m_i/m_e = 25$ 。由图可知，这两种质量比情况下的纯撕裂模的增长率都是最大的，随着 k_y 的出现增长率开始下降，对图中 $m_i/m_e = 1836$ 情况， $k_y L$ 增加到0.18时，撕裂模的增长率已经降到很小的值($0.01\Omega_{i0}$)，而此时对应的斜传播角为 $\theta = \tan^{-1}(k_y/k_z) = 20^\circ$ 。当质量比 m_i/m_e 较小时，不稳定的传播角度范围会向更大的角度范围延伸，但对应的斜撕裂模的增长率都要小于纯撕裂模。图中 $m_i/m_e = 25$ 情况下的斜传播角度可以达到 $\theta = \tan^{-1}(k_y/k_z) = 29^\circ$ ，此时的增长率已经很小($0.013\Omega_{i0}$)。

3.2.2 各向异性情况

3.2.2.1 色散关系

撕裂模对电子的温度各向异性很敏感。即使很小的各向异性也会显著影响撕裂模的增长率。图(3.15)画出了三种电子垂直平行温度比 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ ， $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.2$ ， $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.5$ 情况下的撕裂模的色散关系。其中 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ 情况对应各向同性情况。由图可知，相对于各向同性情况下的增长率， $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.2$ 和 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.5$ 两种情况下的最大增长率要大很多，而且最大增长率对应的波长显著向短波方向移动。图中 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ 情况下的最大增长率是 $0.19\Omega_{i0}$ ，其对应的波矢为 $k_z L = 0.5$ 。 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.2$ 情况下的最大增长率是 $0.86\Omega_{i0}$ ，其对应的波矢为 $k_z L = 1.0$ 。 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.5$ 情况下的最大增长率是 $2.52\Omega_{i0}$ ，其比各向同性情况要大一个数量级。其对应的波矢为 $k_z L = 1.5$ ，波长仅是各向同性情况下的1/3。

图(3.16)画出了电子垂直温度小于平行温度($T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 0.9$)时的撕裂模的色散关系，与各向同性情况相比这时候撕裂模受抑制。

图3.17画出了离子温度各向异性对撕裂模的影响，我们计算了四种温度比情况： $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 0.9$ ， $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ ， $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.2$ ， $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.5$ 。从图可知随着 $T_{i\perp}/T_{i\parallel}$ 的增加撕裂模的峰值增值率变大，且对应的波长向短波方向移动，这些性质与电子温度各向异性对撕裂模的影响相同。不同点是，和电子的相应温度比情况下的撕裂模对比，离子的温度各向异性对撕裂模的影响要小得多。这是在离子与电子的质量比取为 $m_i/m_e = 180$ 时的结果，当这个比值取更大值时，例如实际质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况，离子温度各向异性对撕裂模的影响和电子温度各向异性的影响相比要更小。

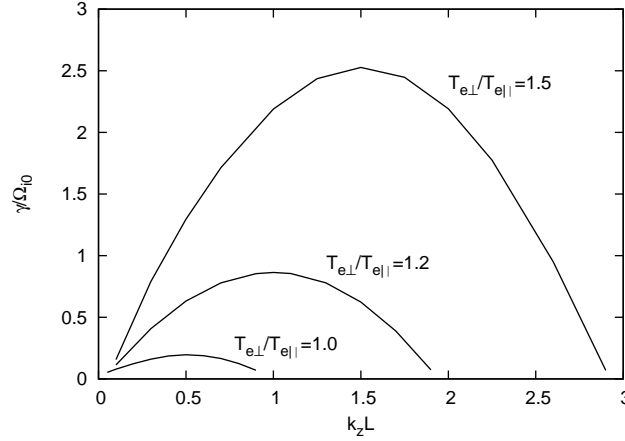


图 3.15 电子温度各向异性对撕裂模的影响，图中分别画出了三种电子垂直平行温度比的情况 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0, 1.2, 1.5$ 。其他参数为 $m_i/m_e = 180$, $\rho_i/L = 1.828$, $T_i/T_{e\perp} = 3.33$ 。离子的温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。

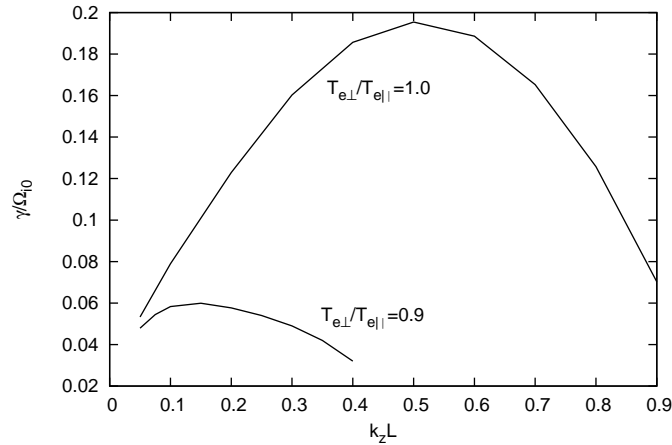


图 3.16 电子温度各向异性对撕裂模的影响，图中画出了两种电子垂直平行温度比情况 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ （各向同性情况）和 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 0.9$ 。其他参数为 $m_i/m_e = 180$, $\rho_i/L = 1.828$, $T_i/T_{e\perp} = 3.33$ 。离子的温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。

图 (3.18) (3.19) (3.20) 中画出的是 $m_i/m_e = 1836$ 情况下撕裂模的色散关系。图 (3.18) 中考虑的是电子温度各向同性而离子温度各向异性的情况，考虑了三种离子温度各向异性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 0.9, 1.2, 1.5$ 。这时撕裂模的增长率和各向同性情况下的增长率保持在同一个数量级上，且最大增长率出现的波长位置基本保持在 $k_z L = 0.5$ 附近。图 (3.19) (3.20) 中考虑的是离子温度各向同性而电子温度各向异性的情况，考虑了三种电子温度各向异性 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.05, 1.1, 1.15$ 。这时撕裂模的最大增长率要比各向同性情况下的增长率大一两个数量级，且随着 $T_{e\perp}/T_{e\parallel}$ 的增加，最大增长率对应的波长的

迅速向短波方向移动： $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ 时最大增长率对应的波长是 $k_z L = 0.5$ ，当 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.05$ 时最大增长率对应的波长移动到 $k_z L = 2.1$ ， $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.1$ 时最大增长率对应的波长移动到 $k_z L = 2.9$ ， $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.15$ 时最大增长率对应的波长移动到 $k_z L = 3.5$ 。

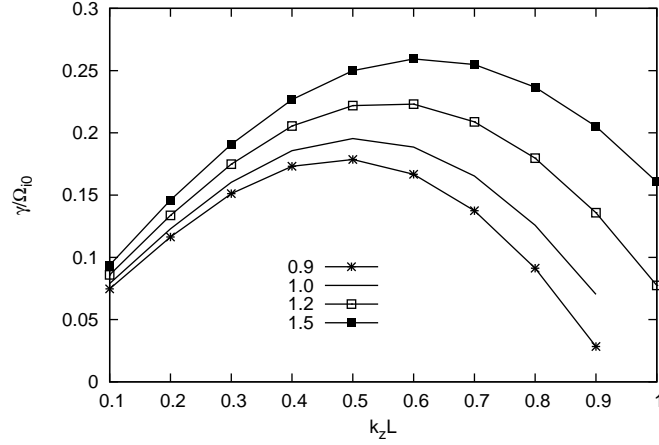


图 3.17 离子温度各向异性对撕裂模的影响，图中画出了四种离子垂直平行温度比的情况 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 0.9, 1.0, 1.2, 1.5$ （分别对应图中从下至上的四条曲线）。其他参数为 $m_i/m_e = 180$ ， $\rho_i/L = 1.828$ ， $T_{i\perp}/T_e = 3.33$ 。电子的温度各向同性 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ 。

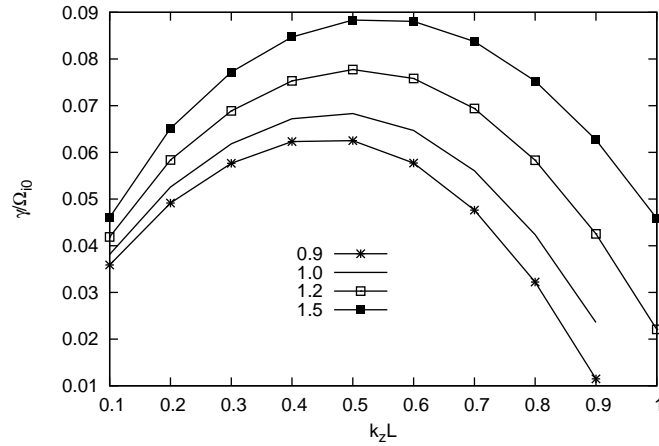


图 3.18 离子温度各向异性对撕裂模的影响，图中画出了四种离子垂直平行温度比的情况 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 0.9, 1.0, 1.2, 1.5$ （分别对应图中从下至上的四条曲线）。其他参数为 $m_i/m_e = 1836$ ， $\rho_i/L = 1$ ， $T_{i\perp}/T_e = 1$ 。电子的温度各向同性 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ 。

结论1：电子和离子的温度各向异性在 $T_{\alpha\perp} > T_{\alpha\parallel}$ 时对撕裂模是解稳作用，而在 $T_{\alpha\perp} < T_{\alpha\parallel}$ 时是致稳作用。电子和离子相比，电子的各向异性对撕裂模的影响要显著的多。

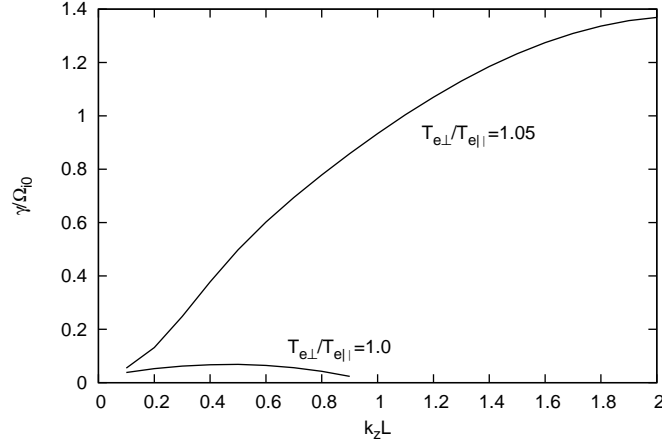


图 3.19 电子温度各向异性对撕裂模的影响，图中分别画出了两种电子垂直平行温度比的情况 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0, 1.05$ 。其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_{e\perp} = 1$ 。离子的温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。

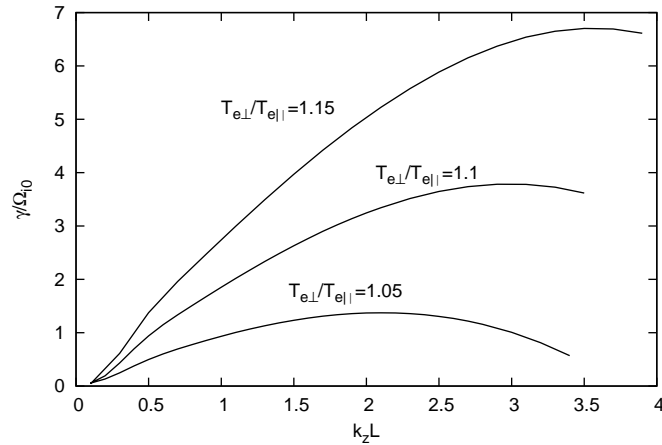


图 3.20 电子温度各向异性对撕裂模的影响，图中分别画出了三种电子垂直平行温度比的情况 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.05, 1.1, 1.15$ 。其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_{e\perp} = 1$ 。离子的温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。

结论2: 各向同性Harris电流片中的纯撕裂模($k_y = 0$)的最大增长率在各种不同参数下都是发生在 $k_z L = 0.5$ 附近。而在温度各向异性 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时，最大增长率对应的波长随着 $T_{e\perp}/T_{e\parallel}$ 的增加而向短波方向移动。

3.2.2.2 增长率随 m_i/m_e 的变化关系

图3.21画出了电子温度各向异性情况 ($T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.2$) 下撕裂模的增长率随 m_i/m_e 的变化关系。波矢固定在 $k_z L = 0.5$ ，其他参数为 $\rho_i/L = 1.828$, $T_i/T_{e\perp} = 3.33$, $k_y L = 0$ ，离子的温度都各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。由

图中结果知,此时撕裂模的增长率随 m_i/m_e 的增加而增加。由3.2.1.5节的结果知,在各向同性情况下,撕裂模的增长率随 m_i/m_e 的增加而减小,而在此处的电子温度各向异性情况下,结论正好相反,撕裂模的增长率随 m_i/m_e 的增加而增加。

图3.22画出了当离子温度各向异性情况下的增长率随质量比的变化关系,此时的电子温度各向同性。由图可知,与各向同性情况下相同,此时增长率是随质量比的增加而降低。

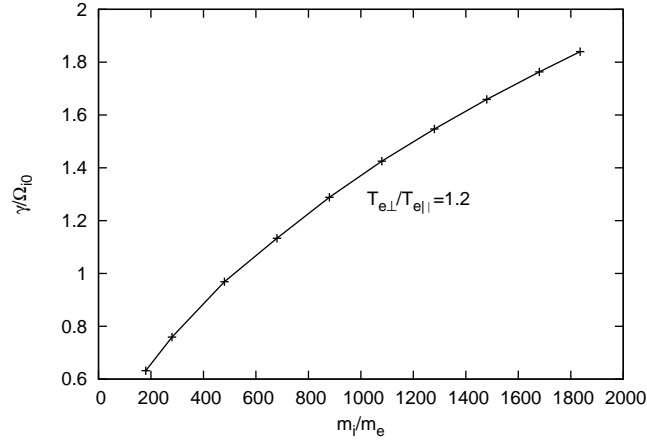


图 3.21 电子温度各向异性 ($T_{e\perp}/T_{e\parallel}=1.2$) 时撕裂模的增长率随质量比 m_i/m_e 的变化关系,其他参数为 $T_i/T_{e\perp} = 3.33$, $\rho_i/L = 1.828$, $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0$, 离子的温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。

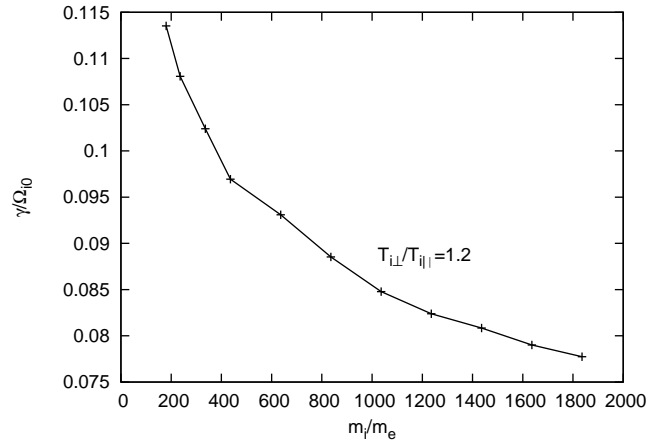


图 3.22 离子温度各向异性 ($T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.2$) 时撕裂模的增长率随质量比 m_i/m_e 的变化关系。其他参数为 $T_{i\perp}/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0$, 电子的温度各向同性 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.0$ 。

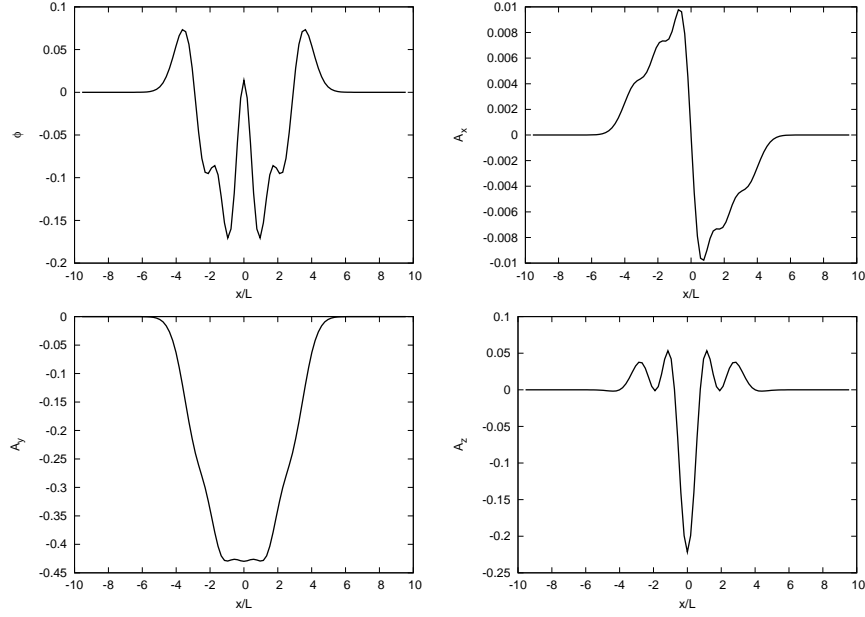


图 3.23 电子温度各向异性时撕裂模的本征函数, $k_z L = 0.1$, 其增长率为 $0.056\Omega_{i0}$ 。其他参数为: $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.1$, $T_i/T_{e\perp} = 1$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $k_y L = 0$ 。离子温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$

3.2.2.3 本征函数

图(3.23)图(3.24)图(3.25)分别画出了 $k_z L = 0.1$, $k_z L = 0.4$ 和 $k_z L = 2.0$ 三种情况下撕裂模的扰动标势和矢势的空间分布, 电子温度各向异性取为 $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.1$, 其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_{e\perp} = 1.0$, $k_y L = 0$, 离子的温度取为各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$ 。从图中可以看出矢势 A_y 在短波长时 ($k_z L = 2.0$) 更局限在电流片中心区域, 而在长波长时 ($k_z L = 0.1$) 其延展区域要宽阔一些。由于扰动矢势 A_y 与重联电场 E_y 和重联磁场 B_x 直接相关, A_y 的空间分布对重联模很重要。图(3.26)对比了三种波长下的矢势 A_y 的空间分布。对于长波长 $k_z L = 0.1$, A_y 在电流片中心区域平坦, 这说明在这种条件下处理撕裂模中所用到的奇异层内的常 ψ 近似可以成立。随着波长减小, A_y 的空间分布向电流片中心收缩, 而且中心区的空间分布变得陡峭, 这时常 ψ 近似不能很好适用。

3.3 Kappa 电流片中的撕裂模

3.3.1 色散关系

图3.27画出了Kappa电流片中撕裂模的色散关系。图中分别画出了 $\kappa = 2, 3, 5$ 三种情况。其他参数为: $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $k_y L = 0$ 。

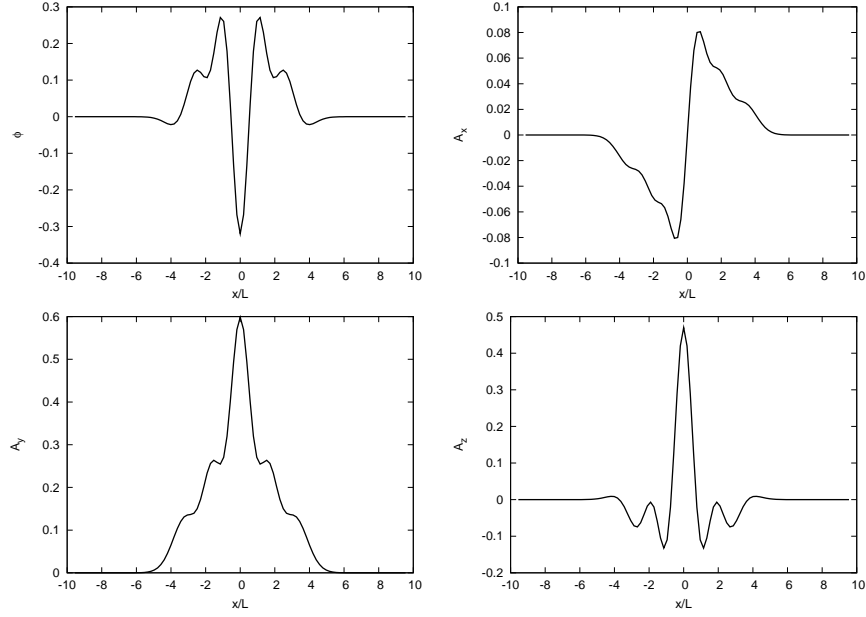


图 3.24 电子温度各向异性时撕裂模的本征函数, $k_z L = 0.4$, 其增长率为 $0.698\Omega_{i0}$ 。其他参数为: $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.1$, $T_i/T_{e\perp} = 1$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $k_y L = 0$ 。离子温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$

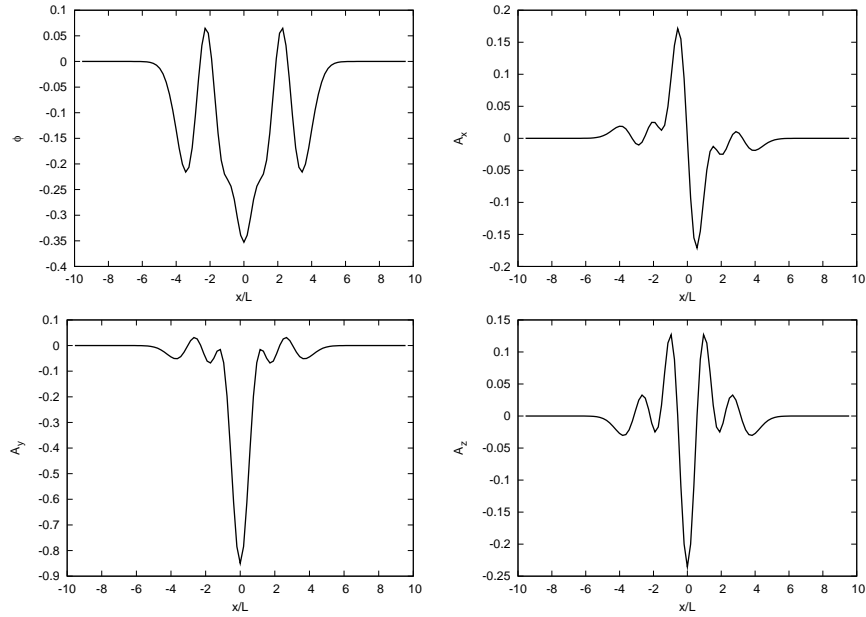


图 3.25 电子温度各向异性时撕裂模的本征函数, $k_z L = 2.0$, 其增长率为 $3.244\Omega_{i0}$ 。其他参数为: $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.1$, $T_i/T_{e\perp} = 1$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $k_y L = 0$ 。离子温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$

与Harris电流片中的纯撕裂模相同, 此时撕裂模的实频为零, 最大增长率出现在 $k_z L = 0.5$ 处。图中三种情况下的增长率随着 κ 值的增加而增加。

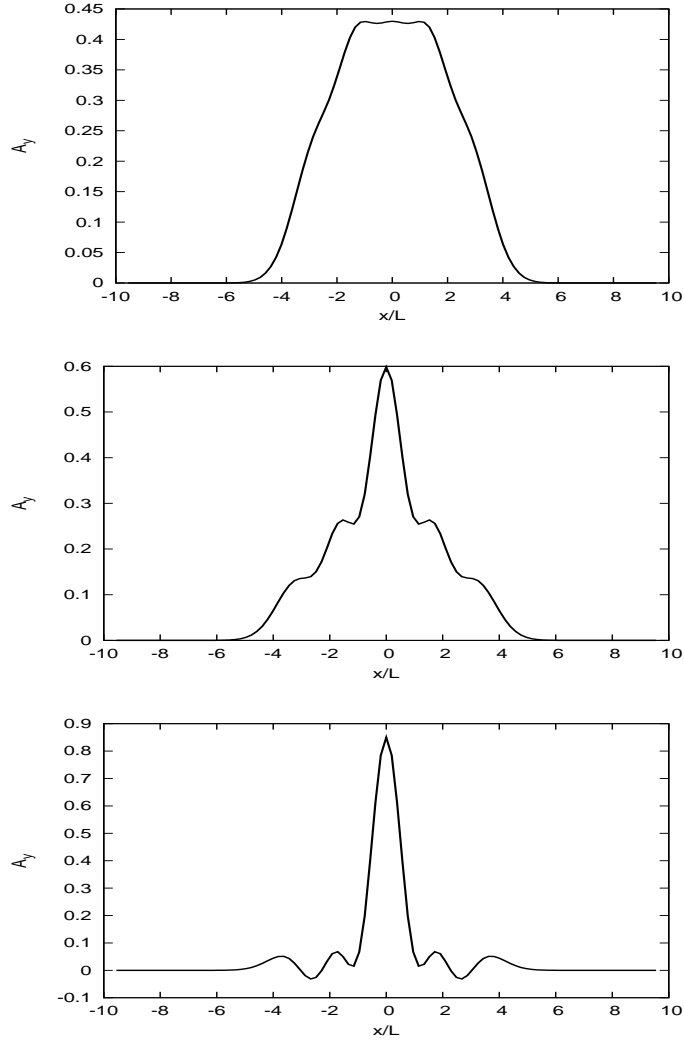


图 3.26 不同波长情况下撕裂模的扰动矢势 A_y 的空间结构的对比，图中自上而下分别对应 $k_z L = 0.1$, $k_z L = 0.4$ 和 $k_z L = 2.0$ 三种情况。其他参数为: $T_{e\perp}/T_{e\parallel} = 1.1$, $T_i/T_{e\perp} = 1$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $k_y L = 0$, 离子温度各向同性 $T_{i\perp}/T_{i\parallel} = 1.0$

3.3.2 最大增长率随 κ 的变化关系

图 (3.28) 画出了撕裂模的最大增长率随 κ 的变化关系，最大增长率对应的波长位置在 $k_z L = 0.5$ 附近。由图可知随着 κ 的增加，增长率变大，当 κ 较大时，电流片趋于 Harris 电流片，因而撕裂模的增长率也趋于 Harris 电流片的情况。这样，当 κ 为有限值时，撕裂模的增长率总是小于 Harris 电流片中的撕裂模增长率。

Kappa 分布是一种超热分布，即其高能区的粒子数比重要大于麦氏分布情况下。一般来说，在具有超热分布的体系中，更容易发生不稳定性，然而，从我们对撕裂模的计算结果来看，这种具有超热分布的电流片对撕裂模是更稳

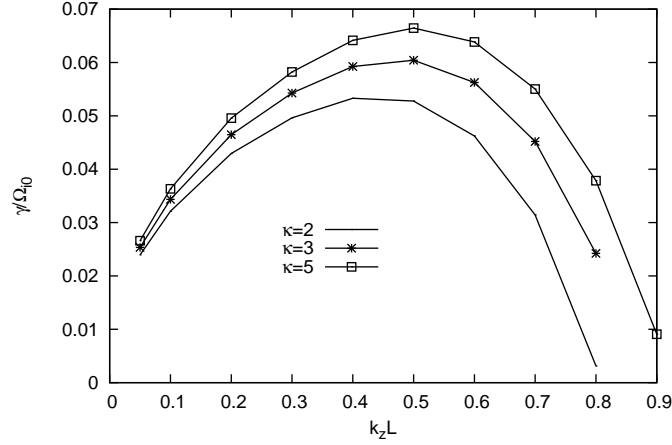


图 3.27 Kappa电流片中撕裂模的增长率随波矢 $k_z L$ 的变化关系，图中分别画出了 $\kappa = 2, 3, 5$ 三种情况（分别对应图中自下而上的三条曲线）。其他参数为： $T_i/T_e = 1$ ， $\rho_i/L = 1$ ， $m_i/m_e = 1836$ ， $k_y L = 0$

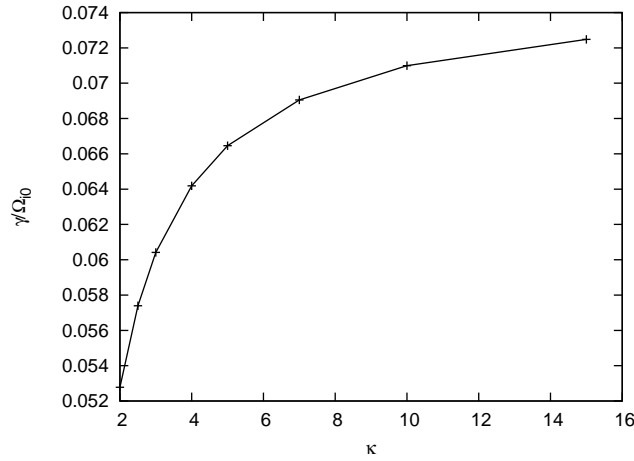


图 3.28 Kappa电流片中撕裂模的增长率随谱指数 κ 的变化关系，参数为： $T_i/T_e = 1$ ， $\rho_i/L = 1$ ， $m_i/m_e = 1836$ ， $k_z L = 0.5$ ， $k_y L = 0$

定，其增长率小于麦氏分布情况（Harris电流片）。在下一章，关于漂移扭曲模的计算中，我们也发现同样的现象。

以上关于Harris电流片的计算表明电子的温度各向异性能显著影响撕裂模的增长率。在Kappa电流片中我们也可以类似的考虑温度各向异性对撕裂模的影响，考虑到Kappa电流片和Harris电流片的相似性，其结果和Harris电流片中的结果不会有本质的区别，我们此处就不再进一步讨论这种情况。我们这里考虑一种更一般的分布函数的各向异性，即对垂直方向上的分布函数采用Kappa分布，而对平行磁场方向的分布取为Maxwell分布。实际模拟中观测到，由于低杂漂移不稳定性会各向异性地加热和加速电子，使得电子在垂直

磁场方向上的分布偏离Maxwell分布，且其等效温度高于平衡磁场方向的温度^[13,21,38]。在Kappa-Mawell电流片中，如果参数 $T_{\alpha\perp}$ 和 $T_{\alpha\parallel}$ 取成相同值，则垂直方向上的等效温度大于平行方向上的温度，这能很好描述模拟中观测到的现象。以下我们来考虑这种Kappa-Maxwell电流片模型中的撕裂模。

3.4 Kappa-Maxwell电流片中的撕裂模

3.4.1 色散关系

在Kappa-Maxwell电流片中，平行磁场方向上是麦氏分布，相当于 $\kappa = \infty$ 情况，而垂直于磁场方向上的 κ 是有限值，所以这种电流片的分布函数是各向异性的，其平行磁场方向上的等效温度为

$$\theta_{\alpha\parallel} = T_{\alpha},$$

而垂直磁场方向上的等效温度为：

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha\perp} &\equiv m_{\alpha} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f_{0\alpha}(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{0\alpha}(x, \mathbf{v}) d\mathbf{v}} \\ &= T_{\alpha} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 + 2\bar{A}_0 \left(\frac{x}{L} \right) \right],\end{aligned}$$

其中， \bar{A}_0 为第1章中定义的归一化的平衡磁矢势(1.74)，它是空间坐标 x 的函数，因而垂直磁场方向的等效温度也是空间坐标 x 的函数，其在 $x = 0$ 处（电流片中心）取最小值：

$$\theta_{\alpha\perp}(0) = T_{\alpha} \frac{\kappa}{\kappa - 1}$$

当 $\kappa < \infty$ 时， $\theta_{\alpha\perp}(0) > T_{\alpha}$ ，因而在整个空间区域 $\theta_{\alpha\perp} > \theta_{\alpha\parallel}$ 。根据Harris电流片情况下的结论，粒子的温度各向异性在 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ 情况下对撕裂模起解稳作用，所以我们猜测Kappa-Mawell电流片中的撕裂模的增长率应该要大于各向同性情况。图(3.29)中画出了Kappa-Maxwell电流片中的撕裂模的色散关系。参数为 $T_i/T_e = 5$ ， $\rho_i/L = 1$ ， $m_i/m_e = 180$ ， $k_y L = 0.0$ ，图中分别画出了 $\kappa = 5, 7, 10$ 三种情况。这三种情况下的增长率都远大于各向同性的Harris电流片和Kappa电流片中的撕裂模的增长率。这与我们的猜测吻合。随着 κ 值的增加，垂直方向上的分布趋向麦氏分布，电流片的各向异性变弱，所以增长率也随之下降。图(3.30)中画出了质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下的撕裂模色散关系。其他参数为 $T_i/T_e = 5$ ， $\rho_i/L = 1$ ， $k_y L = 0.0$ 。图中分别画出了 $\kappa = 10, 15, 20$ 三种情况，这时的增长率也远大于各向同性情况，且随着谱指数 κ 的增加而降低。从图(3.29)和(3.30)还可看出，随着谱指数 κ 的降低，最大增长率对应的波长位置逐渐向短波方向移动。

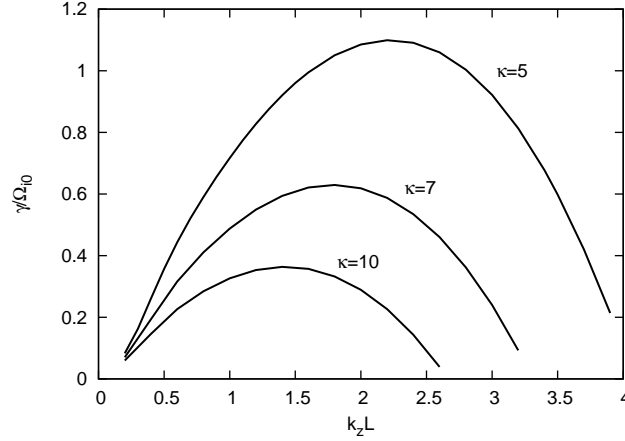


图 3.29 Kappa-Maxwell电流片中的撕裂模的增长率随波矢 $k_z L$ 的变化关系，图中分别画出了 $\kappa = 5, 7, 10$ 三种情况。其他参数为 $T_i/T_e = 5$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 180$, $k_y L = 0.0$

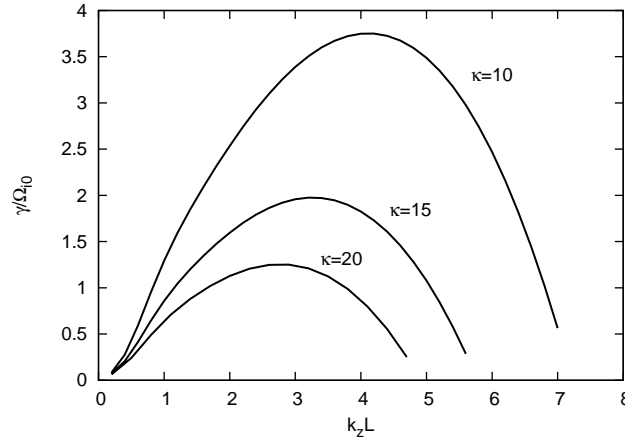


图 3.30 Kappa-Maxwell电流片中的撕裂模的增长率随波矢 $k_z L$ 的变化关系，图中分别画出了 $\kappa = 10, 15, 20$ 三种情况。其他参数为 $T_i/T_e = 5$, $\rho_i/L = 1$, $m_i/m_e = 1836$, $k_y L = 0.0$

3.4.2 增长率随 m_i/m_e 的变化关系

Kappa-Maxwell电流片中的电子和离子的分布都是各向异性的，由于在Harris电流片中离子的各向异性对撕裂模的影响远小于电子影响，我们猜测此时电子的各向异性在其中起主导作用，此时的撕裂模的增长率随 m_i/m_e 的变化关系应该与电子各向异性的Harris电流片中的情形相同。图(3.31)中画出了撕裂模的增长率随 m_i/m_e 的变化关系。此时增长率随 m_i/m_e 的增加而增加。确实与Harris电流片中电子各向异性情况下一致。

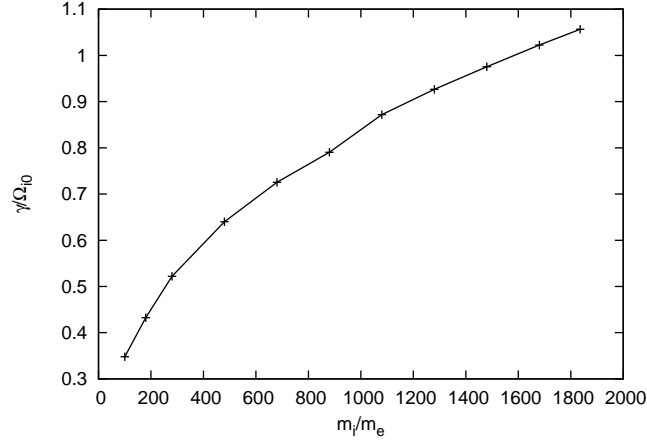


图 3.31 Kappa-Maxwell电流片中撕裂模的增长率随质量比 m_i/m_e 的变化关系。其他参数为 $\kappa = 10$, $T_i/T_e = 1$, $\rho_i/L = 1$, $k_z L = 0.5$, $k_y L = 0.0$ 。

3.4.3 增长率随谱指数 κ 的变化关系

在Kappa-Maxwell电流片中谱指数 κ 控制垂直方向上的有效温度，当 $\kappa = \infty$ 时，垂直磁场方向上的有效温度和平行方向上的温度相等。当谱指数 κ 的值减少时，垂直磁场方向上的等效温度随之增加，从而使得 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ ，这种温度各向异性对撕裂模起促进作用，因此我们猜测撕裂模的增长率应随 κ 值的减小而增加。图(3.32)证实了这一猜测。图中画出了撕裂模的增长率随谱指数 κ 的变化关系，结果表明增长率随 κ 值的减小而增加，其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $T_i/T_e = 5$, $\rho_i/L = 1$, $k_z L = 1.0$, $k_y L = 0.0$ 。

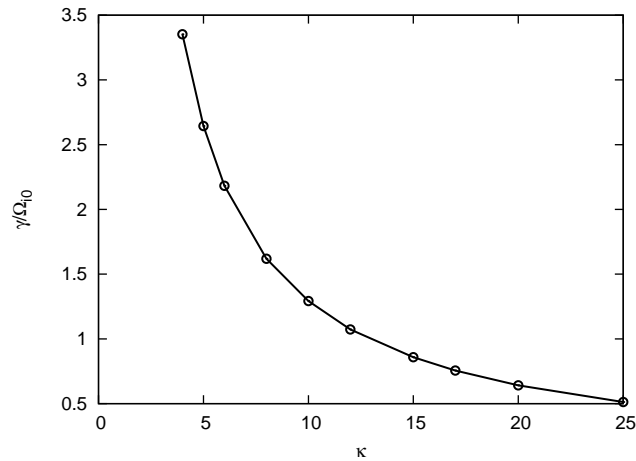


图 3.32 Kappa-Maxwell电流片中撕裂模的增长率随谱指数 κ 的变化关系。其他参数为 $m_i/m_e = 1836$, $T_i/T_e = 5$, $\rho_i/L = 1$, $k_z L = 1.0$, $k_y L = 0.0$ 。

3.5 小结

在本章中，我们计算了温度各向同性的Harris电流片中的撕裂模的增长率和模结构(扰动场的空间分布)，计算结果和文献中的解析解和模拟结果符合的很好。

我们研究了温度各向异性的Harris电流片中的撕裂模。结果表明，电子和离子的温度各向异性都会影响撕裂模的增长率，但在同样的温度各向异性下，电子的影响远大于离子的影响。温度各向异性在 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ 时，对撕裂模起解稳作用，而在 $T_{\perp} < T_{\parallel}$ 时对撕裂模起致稳作用。在 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时，撕裂模的最大增长率对应的波长位置随着 $T_{e\perp}/T_{e\parallel}$ 的增加而迅速向短波方向移动。在 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时，撕裂模的增长率随着 m_i/m_e 的增加而增加，这与温度各向同性情况下的结论相反。

我们计算了Kappa电流片中的撕裂模的色散关系。我们发现这种具有超热分布的电流片中的撕裂模的增长率小于麦氏分布情况，且最大增长率随着谱指数 κ 值的降低而降低。

我们研究了具有Kappa-Maxwell分布的电流片中的撕裂模。我们发现这种情况下撕裂模的增长率远大于各向同性情况下，且增长率随着谱指数 κ 值的减小而变大。其最大增长率对应的波长随着谱指数 κ 的降低而趋于短波。对于这些结果，可以用温度各向异性对撕裂模的作用来解释。谱指数 κ 决定垂直磁场方向上的等效温度，当 $\kappa = \infty$ 时，垂直磁场方向上的有效温度和平行方向上的温度相等。当谱指数 κ 的值减少时，垂直磁场方向上的等效温度随之增加，从而使得 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ ，而这种温度各向异性对撕裂模起促进作用，并使撕裂模的最大增长率对应的波长向短波方向移动。

第4章 漂移扭曲不稳定性

4.1 引言

在这一章里我们考虑电流片中的漂移扭曲不稳定性(drift kink instability)。Zhu等人^[80]在粒子模拟中发现在薄电流片中存在一种沿平衡电流方向传播的长波电磁模,这种模式能引起电流片大尺度的扭曲运动,因而被称为漂移扭曲模。后来许多研究者对这一波模进行了理论研究^[25,26,43,53]。漂移扭曲模是一种低频长波电磁模,其频率小于离子在渐进场中的回旋频率,其在平衡电流方向(y 方向)上的波长和电流片的半宽 L 相当,其传播方向垂直于磁场,并沿着离子的抗磁漂移方向。漂移扭曲模能在电流片中心区域(重联区)引起显著的电磁扰动,因而可能为重联提供反常电阻^[42,43]。漂移扭曲模的扰动磁场 B_z 关于 x 是偶函数,而在平衡电流方向上的扰动电场 E_y 是关于 x 的奇函数,在文献中漂移扭曲模常被称为奇对称模^[25,53],其根据即为扰动电场 E_y 的对称性。

漂移扭曲模的驱动源为粒子之间的相对漂移。在低质量比情况下($m_i/m_e < 64$),线性理论计算的结果与模拟中观测到的结果相符^[53]。进一步的线性理论研究表明,漂移扭曲模的增长率随着离子电子质量比 m_i/m_e 的增加而下降,在实际的大质量比情况下,线性理论计算出的增长率很小^[25],这一点与模拟中观测到的现象不同。

在低杂漂移不稳定性的数值模拟中,初始阶段观测到的是增长很快的短波长的低杂漂移模,这种模式的扰动场局限在电流片边缘区域内。然后紧接着是长波长的电流片的扭曲运动,这是漂移扭曲模活动的表现^[38,42,81,82]。短波长的低杂漂移模的非线性发展能显著改变电流片的特性,特别是,低杂漂移模的发展会降低电流片边缘区域内的离子漂移速度,从而在电流片内引入速度剪切^[22],这种改变后的电流片可以用在Harris电流片中加入背景等离子体来很好的描述,在这种位形下,线性理论计算出的漂移扭曲模的增长率能在一定程度上解释模拟中观测到的现象。从这个角度来看,漂移扭曲模可以看作Harris电流片在非线性发展过程中激发出的一种二次不稳定性^[25,81,83](secondary instability)。后来的一些研究表明,漂移扭曲模和流体描述下的Kelvin-Helmholtz不稳定性有很多相似点,漂移扭曲模可能对应于动理学描述下的Kelvin-Helmholtz不稳定性^[22]。

在对磁尾电流片的卫星观测中发现,在低杂漂移模活动之后,一般电流片会发生大尺度的扭曲运动,这与模拟中观测到现象一致^[82]。很多研究指出这种大尺度的扭曲运可能是漂移扭曲模存在的表现^[84]。

观测表明空间等离子体分布函数通常偏离Maxwell分布，这种非热分布能很好的被Kappa分布函数描述^[47-50]。而在通常的Harris电流片模型中，粒子的分布函数是取为Maxwell分布。为了更好地描述空间中电流片，最近有研究者用Kappa分布函数构造了电流片模型^[51,52]。在本章中我们研究具有Kappa分布的电流片中漂移扭曲模。并把结果和Harris电流片中的对应模式比较。我们发现具有这种超热分布的电流片中的漂移扭曲模的增长率要小于Harris电流片中的对应模式，且增长率随着谱指数 κ 的降低而降低。

4.2 基本方程

我们考虑的是沿平衡电流方向传播的模式：

$$\varphi_1 = \varphi(x) \exp[i(k_y y - \omega t)] \quad (4.1)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(x) \exp[i(k_y y - \omega t)] \quad (4.2)$$

在库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = 0$ 下，Maxwell方程组的形式为：

$$-\nabla^2 \phi_1 = 4\pi(\rho_i + \rho_e) \quad (4.3)$$

$$-\nabla^2 A_{1x} = \frac{4\pi}{c}(J_{ix} + J_{ex}) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

$$-\nabla^2 A_{1y} = \frac{4\pi}{c}(J_{iy} + J_{ey}) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

$$-\nabla^2 A_{1z} = \frac{4\pi}{c}(J_{iz} + J_{ez}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

此时方程(4.5)可从其他方程导出，是多余方程，无需考虑。而此时扰动电荷电流与扰动场的依赖关系为（具体表达式见附录A.4）：

$$\rho = \rho(\varphi, A_x, A_y) \quad (4.7)$$

$$J_x = J_x(\varphi, A_x, A_y) \quad (4.8)$$

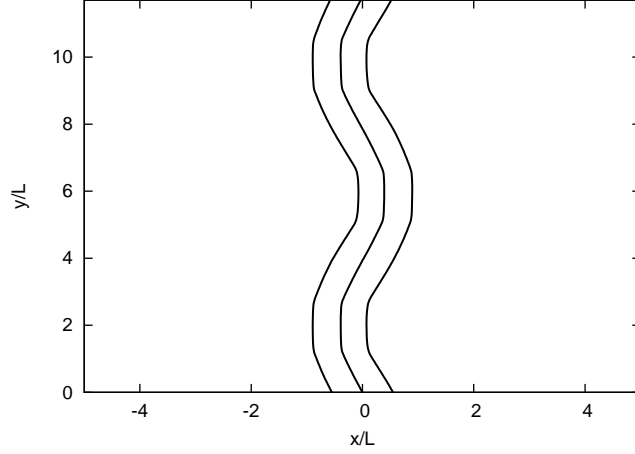
$$J_y = J_y(\varphi, A_x, A_y) \quad (4.9)$$

$$J_z = J_z(A_z) \quad (4.10)$$

这样方程(4.6)与方程(4.3)(4.4)解耦。这表明存在两种极化，我们考虑由方程(4.3)(4.4)描述的极化，其涉及的扰动量为 A_{1x} , A_{1y} , ϕ_1 。其引起的扰动磁场为：

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1 = 0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y(x)}{\partial x} - ik_y A_x(x) \right) \exp(ik_y y - i\omega t) \mathbf{e}_z$$

扰动磁场中仅涉及 z 方向上的分量，由于平衡磁场是在 z 方向，所以漂移扭曲模扰动不会使磁力线弯曲。漂移扭曲模这个名字中的“扭曲(kink)”源于扰动后磁场在 xy 平面内的等值线的形状，如图(4.1)所示。


 图 4.1 漂移扭曲模扰动后的磁场在 xy 平面内的等值线

4.3 计算结果

4.3.1 本征函数

图(4.2)画出了漂移扭曲模的扰动势的空间分布。参数为 $\kappa = 3$, $m_i/m_e = 16$, $\rho_i/L = 0.7$, $T_i/T_e = 1$, $k_y L = 0.8$ 。此时的增长率为 $\gamma = 0.118\Omega_{i0}$, 实频为 $\text{Re}(\omega) = 0.36$ 。Harris电流片($\kappa = \infty$) 在相同参数情况下的增长率为 $\gamma = 0.16\Omega_{i0}$, 实频为 $\text{Re}(\omega) = 0.36$ 。漂移扭曲模的矢势 $A_y(x)$ 和标势 $\varphi(x)$ 是关于 x 的奇函数, 而矢势 $A_x(x)$ 是关于 x 的偶函数。对应到扰动场则为: 电场 $E_y(x)$ 关于 x 奇对称, 而 $E_x(x)$ 和 $B_z(x)$ 关于 x 偶对称。这与Harris电流片中的漂移扭曲模的模结构相同。

4.3.2 色散关系

在图(4.3)中画出了漂移扭曲模的色散关系, 图中分别画出了 $\kappa = 5, 10$ 和 ∞ 三种情况, $\kappa = \infty$ 的情况即为Harris电流片。其他的参数为 $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$, $m_i/m_e = 16$ 。图中还画出了文献^[25]中对Harris电流片情形的计算结果。漂移扭曲模是一种长波模, 其典型的波长是 $k_y L \sim 1$ 。图(4.3)中增长率的最大值出现在 $k_y L \sim 1$ 的地方。从图中三种情况的对比可以看出漂移扭曲模的增长率和实频随着 κ 的增加而增加。这一点与上一章中的撕裂模的情形相同。由于Harris电流片对应 $\kappa = \infty$, 所以Harris电流片情形是增长率最大的, 在 κ 为有限值的情形下漂移扭曲模的增长率都要小于Harris电流片情形。这一点在下面的参数依赖的研究中还会提到。图画(4.4)出了电子离子质量比 $m_i/m_e = 8, 16$ 和 32 三种情况下的漂移扭曲模的色散关系, 其他参数为 $\kappa = 5$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$ 。从图中随着质量比 m_i/m_e 的增加, 漂移扭曲模的最大增长率下降, 而且最大增长率对

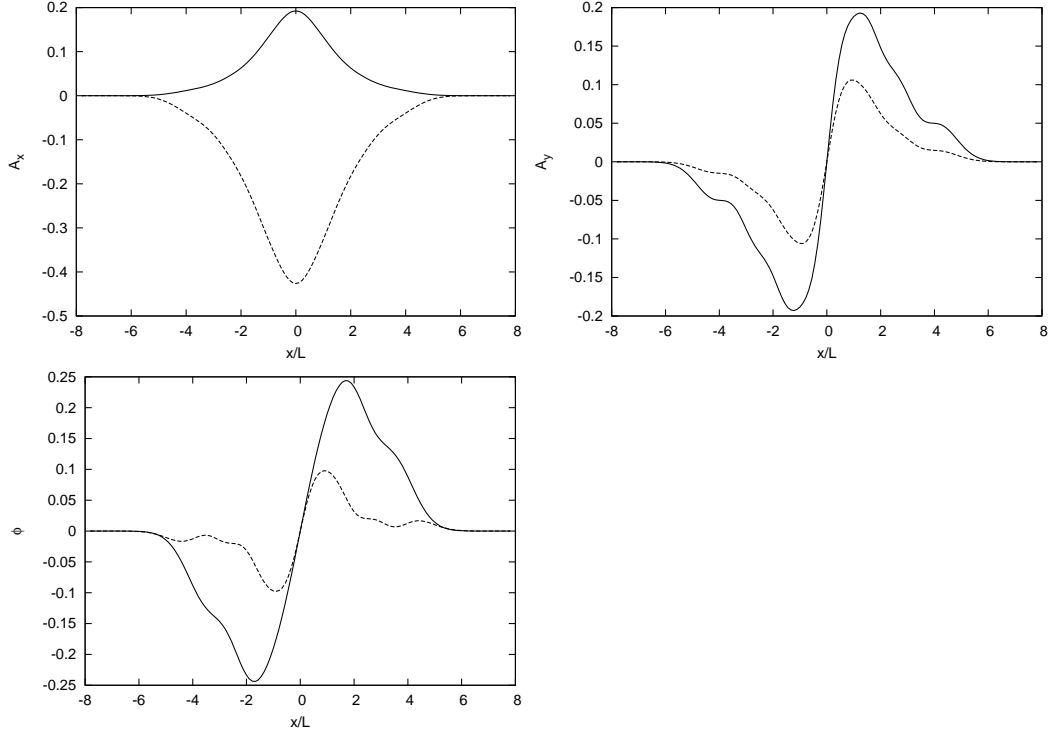


图 4.2 漂移扭曲模的本征函数，参数为 $\kappa = 3$, $m_i/m_e = 16$, $\rho_i/L = 0.7$, $T_i/T_e = 1$, $k_y L = 0.8$ 。此时的增长率为 $\gamma = 0.118\Omega_{i0}$ 。图中实线表示各量的实部，而虚线表示各量的虚部。

应的波长位置向短波方向移动。图中还画出了对应的离子抗磁频率 $\omega_i = k_y U_i$ ，可以看出在质量比较大 ($m_i/m_e = 32$) 时长波范围内的实频可以用离子抗磁频率很好地描述，这说明漂移扭曲模与离子的漂移运动直接相关。

4.3.3 最大增长率与谱指数 κ 的依赖关系

图(4.5)中画出了漂移扭曲模的最大增长率和对应的实频随谱指数 κ 的变化关系。对每给定一个 κ 值，我们改变波矢 k_y 找到增长率的最大值。图(4.5)中对应的波长位置大约在 $k_y L = 0.9$ 左右。从图可知漂移扭曲模的最大增长率和实频随着 κ 的增加而增加。由于Harris电流片对应 $\kappa = \infty$ ，所以Harris电流片情形下的增长率是最大的，在 κ 为有限值的情形下漂移扭曲模的最大增长率和对应的实频都要小于Harris电流片情形。

4.3.4 最大增长率与电流片厚度及离子电子温度比的依赖关系

图(4.6)画出了漂移扭曲模的最大增长率随电流片厚度 ρ_i/L 的变化关系，图中分别画出了 $\kappa = 4, 5$ 和 ∞ 三种情况。图(4.7)画出了最大增长率随离子电子温度比 T_i/T_e 的变化关系。图中分别画出了 $\kappa = 4$ 和 ∞ 两种情况。其中 $\kappa = \infty$ (Harris) 的结果取自文献^[25]。

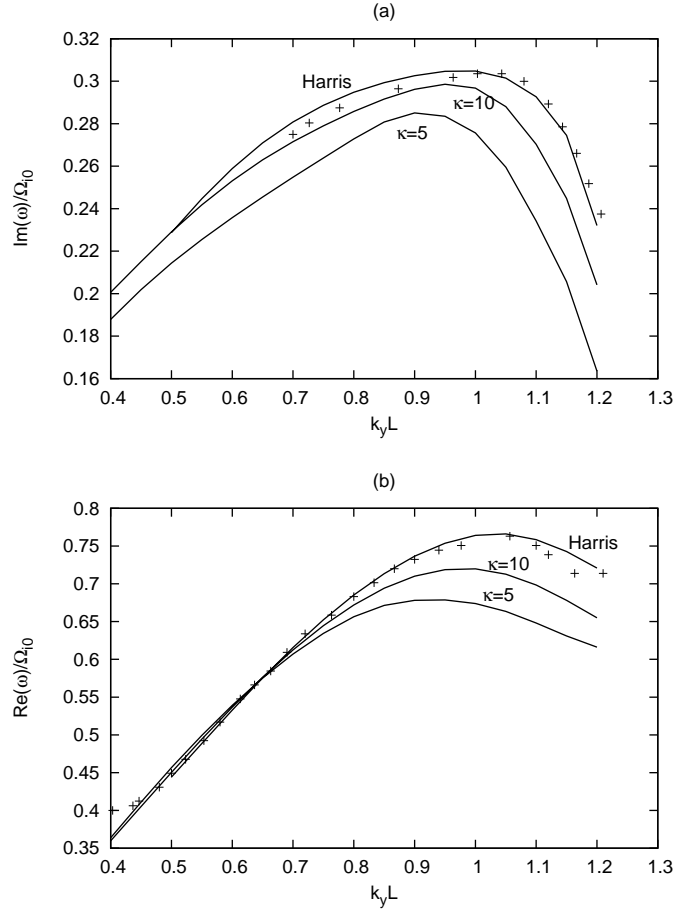


图 4.3 漂移扭曲模的色散关系，图中分别画出了 $\kappa = 5, 10$ 和 ∞ 三种情况，参数为 $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$, $m_i/m_e = 16$ 。图中加号为文献^[25]中Harris电流片情况下的结果。

漂移扭曲模的驱动源是电子和离子间的相对漂移， $U_i - U_e$ ，相对漂移可以表示为以下的形式：

$$\frac{|U_i - U_e|}{v_{ti}} = \frac{\rho_i}{L} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)$$

从这个表达式知电子和离子间的相对漂移速度正比与 ρ_i/L 和 T_e/T_i ，由此我们猜想增长率应随着电流片变薄或温度比 T_i/T_e 的减小而增加。这一猜想在图(4.6)和图(4.7)中得到证实：由图(4.6)知电流片越薄增长率越大。由图(4.7)知温度比 T_i/T_e 越小，漂移扭曲模的增长率越大。

4.3.5 最大增长率随离子电子质量比 m_i/m_e 的变化关系

图(4.8)画出了漂移扭曲模的最大增长率和对应的实频随离子电子质量比 m_i/m_e 的变化关系。在 $m_i/m_e = 1$, $T_i/T_e = 1$ 情况下漂移扭曲模的实频为零，当 $m_i \neq m_e$ 时，电子离子的对称性破坏，模式发展出不为零的实频，其相速度在离子的漂移速度方向上。从图(4.8)中可以看出，在很低的质量比情

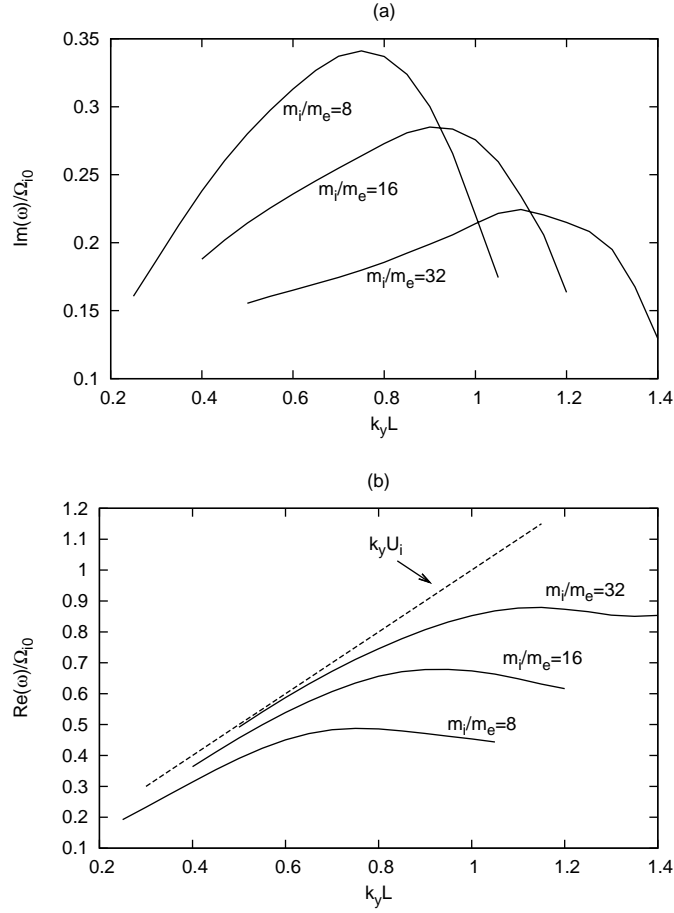


图 4.4 漂移扭曲模的色散关系，图中分别画出了 $m_i/m_e = 8, 16$ 和 32 三种情况，参数为 $\kappa = 5$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$

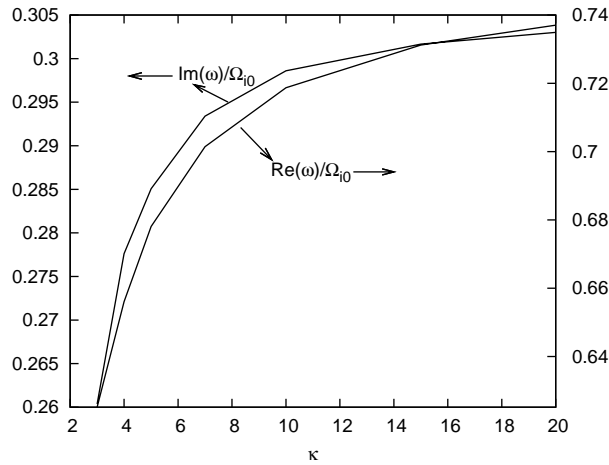


图 4.5 漂移扭曲模的最大增长率和对应的实频随谱指数 κ 的变化关系，其他参数为 $m_i/m_e = 16$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$

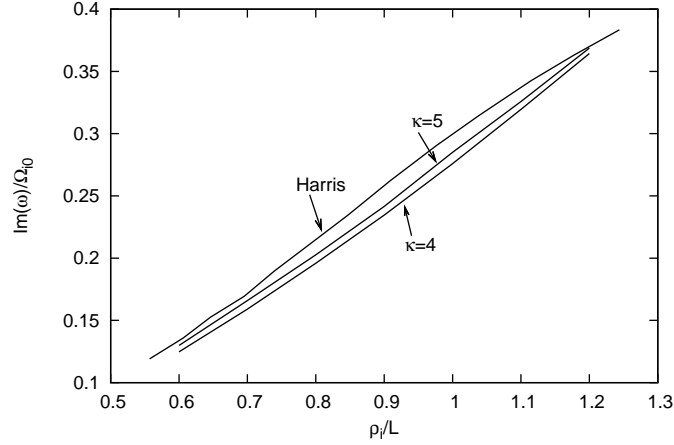


图 4.6 最大增长率随电流片厚度的变化关系，图中分别画出了 $\kappa = 4, 5$ 和 ∞ 三种情况，其他参数为 $T_i/T_e = 1$, $m_i/m_e = 16$ 。图中 $\kappa = \infty$ (Harris) 情形的结果取自文献 [25]。

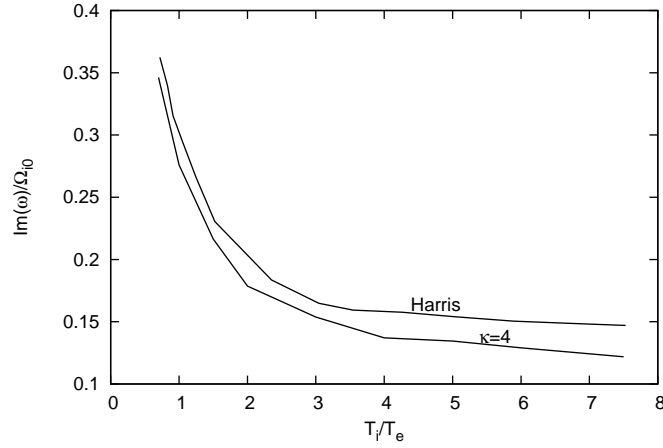


图 4.7 漂移扭曲模的最大增长率随温度比 T_i/T_e 的变化关系，图中分别画出了 $\kappa = 4$ 和 ∞ 两种情况，其他参数为 $m_i/m_e = 16$, $\rho_i/L = 1$ 。图中 $\kappa = \infty$ (Harris) 情形的结果取自文献 [25]。

况下，漂移扭曲模的增长率随着 m_i/m_e 的增加而增加，但当质量比 m_i/m_e 较大时，其增长率迅速下降。在实际的质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下，其增长率要比 $m_i/m_e = 1$ 情况小两个数量级。这些性质与 Harris 电流片中的漂移扭曲模的性质相同 [25]。

4.3.6 背景等离子体对漂移扭曲模的影响

漂移扭曲模的驱动源是粒子间的相对漂移运动，从上面的计算知，在有相对漂移的两种粒子的质量接近的情况下，漂移扭曲模的增长率较大，当相对漂移的两种粒子的质量差别大时，漂移扭曲模的增长率变小。而在实际的电子离子等离子体中，有相对漂移运动的是电子和离子，其质量差别很

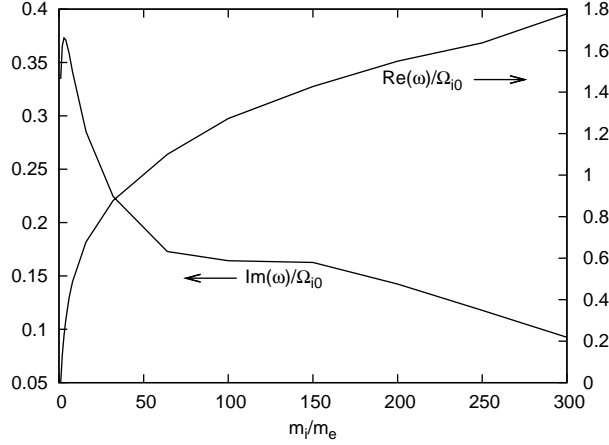


图 4.8 漂移扭曲模的最大增长率和对应的实频随质量比 m_i/m_e 的变化关系。其他参数为 $\kappa = 5$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$ 。

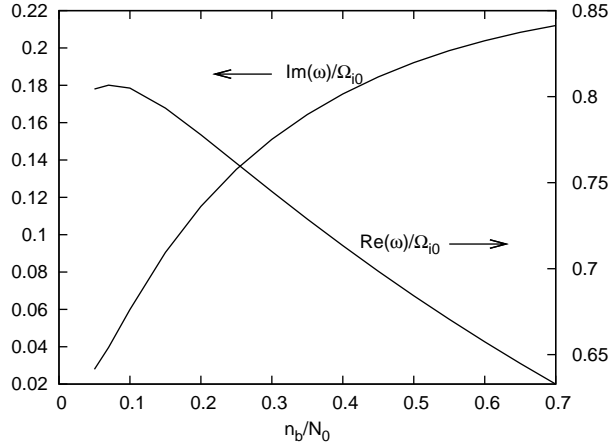


图 4.9 漂移扭曲模的增长率随背景等离子体含量的变化关系，其他参数为 $\kappa = 5$, $m_i/m_e = 1836$, $\rho_i/L = 1$, $T_i/T_e = 1$, $k_y L = 0.8$ 。背景等离子体的粒子质量和电流片中的对应粒子质量相同，参数 $(\kappa, m_i/m_e, T_i/T_e)$ 也和原电流片中的参数相同。

大 ($m_i/m_e = 1836$)，因而漂移扭曲模的增长率很小。然而这启发我们考虑这样一种情况：如果电流片中存在其他的背景成分，这些背景成分和电流片中原来的等离子体间有相对漂移，由于背景成分中的粒子的质量和原本电流片中的粒子质量相同，我们猜想此时漂移扭曲模有可能有大的增长率。

我们取背景成分的分布函数为

$$f_{b\alpha}(\mathbf{v}) = \frac{n_b}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\kappa^{3/2} \Gamma(\kappa - 1/2)} \left(1 + \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-1} \quad (4.11)$$

其中 n_b 是背景等离子体的数密度，是一个常数。 α 代表粒子种类， $\alpha = e, i$ 分别对应电子和离子。背景等离子体的参数 $\kappa, m_\alpha, v_{t\alpha}$ 都取为与电流片中的对应成分

相等。由分布函数(4.11)描述的等离子体起密度空间均匀，且其宏观漂移速度为零，因而与电流片中原来的等离子体间有相对漂移。另一方面，背景成分不贡献平衡电荷和电流，因而不破坏之前取定的平衡场。未加背景成分前电流片中心处的离子数密度为 N_0 ，加入背景成分后增加为 $N_0 + n_b$ ，我们可以通过改变比值 n_b/N_0 来调节背景等离子体所占比重。图(4.9)画出了漂移扭曲模的增长率随背景含量 n_b/N_0 的变化关系，考虑的是实际质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况。结果证实了我们的猜想，漂移扭曲模的增长率随着背景等离子体含量的增加而增加。图(4.9)中在 $n_b = 0.2N_0$ 情况下的增长率已达 $0.11\Omega_{i0}$ 。

地球磁尾电流片的中心密度约为 $0.3 - 0.5 \text{ cm}^{-3}$ ，电流片把磁尾分成南北两部分，这两部分被称为tail lobes(耳垂部分)，lobe区的粒子数密度约为 0.01 cm^{-3} ，这部分等离子体的漂移速度很小，如果它们进入电流片区，则会提供一定量的背景等离子体。这提供了扭曲模在磁尾电流片中存在的可能性。还有另一种可能性，与低杂漂移不稳定性的非线性发展有关，很多观测表明低杂漂移模存在于磁尾电流片的边缘区域，低杂漂移模在非线性发展过程中会改变电流片的平衡位形，例如各加热电子，使电流片边薄，这些效应能提高漂移扭曲模的增长率。更重要的一点是，低杂漂移模会降低电流片边缘区域的离子漂移速度^[22]，从而引入速度剪切。从另一个角度看，这种改变引入了离子间的新的相对漂移，相当于在电流片中加入了背景离子，因而此种情况下漂移扭曲模会有显著的增长率。从这个意义上看，漂移扭曲模可看作电流片在非线性发展过程中激发出的二次不稳定性。

在对磁尾电流片的卫星观测中发现，在低杂漂移模活动之后，一般电流片会发生大尺度的扭曲运动。很多研究指出这种大尺度的扭曲运可能是漂移扭曲模存在的表现^[84]。

4.4 小结

在本章中，我们研究了具有Kappa分布的电流片中的漂移扭曲模的性质，计算了模式的增长率，模结构和参数依赖，并和Harris电流片情况对比。结果表明，具有Kappa分布的电流片中的漂移扭曲模的性质和Harris电流片中的对应模式相似，但增长率小于Harris电流片中的对应模式，且增长率随着谱指数 κ 的降低而降低。我们计算了漂移扭曲模增长率的参数依赖，结果表明，电流片越薄，增长率越大。温度比 T_i/T_e 比越小，增长率越大。计算结果还表明，随着质量比 m_i/m_e 的增加，增长率随之下降，在实际的大质量比 $m_i/m_e = 1836$ 情况下，漂移扭曲模的增长率几乎可以忽略。然而，如果在电流片中引入一定量的均匀背景等离子体，在 $m_i/m_e = 1836$ 情况下，漂移扭曲模仍然会有大的增长

率。

第5章 低杂漂移不稳定性的局域理论

5.1 引言

在这一章里，我们在局域理论的框架下考虑低杂漂移不稳定性，重点考虑电流片中的均匀等离子体背景对低杂漂移模的影响。

低杂漂移不稳定性 (Lower-hybrid drift instability) 是磁化非均匀等离子体中的一种高频不稳定性^[40,44,45]，其频率范围为 $\Omega_i \ll \omega \ll |\Omega_e|$ ，其中 Ω_i 和 Ω_e 分别为离子和电子的回旋频率。在磁化等离子体中，如果等离子体密度不均匀，由粒子的回旋运动会形成宏观的漂移运动，称为抗磁漂移，而且电子和离子的抗磁漂移方向相反，因而形成抗磁电流。抗磁电流垂直于平衡密度梯度和平衡磁场，常称为横场电流 (cross-field current)。低杂漂移不稳定性是一种横场不稳定性，即它一般垂直或近垂直于平衡磁场传播，也即平行或近平行于横场电流方向传播。它是一种短波长的不稳定性，其在横场电流方向上的波长在电子热回旋半径的量级 $k_y \rho_e \sim 1$ ，其中 $\rho_e \equiv v_{te}/|\Omega_e|$ 为电子的热回旋半径。

低杂漂移不稳定性是一种普适的不稳定性 (universal instability)，存在于所有磁化非均匀等离子体中。早期对低杂漂移不稳定性的兴趣主要集中在场反转 θ pinch^[44]。后来，对低杂漂移不稳定性的研究重点转移到空间等离子体物理领域，重点关注磁尾电流片中的低杂漂移模。并对由低杂漂移模所引发的反常电阻进行了广泛研究^[40,43]。然而，这个方向上的研究逐渐认识到，短波长的低杂漂移模引起的波场扰动主要集中在电流片的边缘区域，不能在电流片中心区域（重联区）提供反常电阻^[40,41]。近几年，低杂漂移模的非线性效应受到很大关注^[38]。研究的重点不是低杂漂移模所产生的反常电阻，而是低杂漂移模对重联模的影响^[13,19,21,22]以及对电子加热和加速的作用^[85]。

在磁场重联的粒子模拟中，常常在电流片中加入均匀的背景等离子体。例如在Geospace Environment Modeling (GEM) magnetic reconnection challenge^[17]中，选定的背景密度为电流片中心密度的0.2倍。这部分背景等离子体的分布是空间均匀的，不提供平衡电流，一般认为它对重联模的影响很小，然而对漂移不稳定性，背景等离子体的作用可能会很重要。例如，对上一章中讨论的漂移扭曲模，背景等离子体能显著提高实际质量比情况下的漂移扭曲模的增长率。在实际的磁尾电流片中，中心区的粒子数密度约为 $0.3 - 0.5 \text{ cm}^{-3}$ ，电流片南北两侧的lobe区的粒子数密度约为 0.01 cm^{-3} ，这部分等离子体的漂移速度很小，如果它们进入电流片区，则会提供一定量的背景等离子体。另一方面，很多观测表明低杂漂移模存在于磁尾电流片的边缘区域，低杂漂移模在非线性发展

过程中会改变电流片的平衡位形，一种改变就是在电流片中产生背景等离子体^[22,81]。

在这一章里我们研究背景等离子体对低杂漂移模的影响。Daughton^[41]最先研究了电流片中的背景等离子体对低杂漂移模的影响，他关注的是波长 $k_y \sqrt{\rho_i \rho_e} \sim 1$ 的模式，结果表明背景等离子体对这一模式起抑制作用。而本章考虑的是 $k_y \rho_e \sim 1$ 的短波模式。Daughton基于一个近似局域理论公式指出，背景等离子体对短波模式也是起抑制作用。但这个近似公式仅在 $T_e \sim 0$, $T_e \ll T_i$, $U_i < v_{ti}$ 条件下适用^[41,44]。对一般的磁尾电流片不适用。我们这里在局域理论的框架下，推导一个包含背景等离子体效应的色散关系，从而研究背景等离子体对低杂漂移不稳定性的影响。最后得到的结果和Daughton^[41]得到的结果相同，即背景等离子体对低杂漂移模起抑制作用。我们的结果还表明，背景使得低杂漂移模的实频下降，从而降低了模式的相速度。

5.2 平衡位形

我们考虑的平衡位形是：在普通的Harris电流片中叠加上均匀的背景等离子体。平衡分布函数为：

$$F_{0\alpha}(x, \mathbf{v}) = f_{0\alpha} + f_{b\alpha} \quad (5.1)$$

其中

$$f_{0\alpha}(x, \mathbf{v}) = n_0(x) \frac{1}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \exp \left(-\frac{v_x^2 + (v_y - U_a)^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2} \right) \quad (5.2)$$

$$f_{b\alpha}(x, \mathbf{v}) = n_b \frac{1}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^3} \exp \left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2} \right) \quad (5.3)$$

分别为电流片中原有的等离子体部分和外加的均匀背景等离子体部分。其中 $n_0(x) = N_0 \text{sech}^2(x/L)$, n_b 是一个常数, $U_a = -v_{t\alpha}^2/\Omega_{\alpha 0} L$, $\Omega_{\alpha 0} = b_0 q_\alpha/m_\alpha c$, $b_0 \equiv \sqrt{8\pi N_0(T_i + T_e)}$, $T_\alpha \equiv m_\alpha v_{t\alpha}^2/2$ 。平衡电场为零，平衡磁场为：

$$\mathbf{B}_0 = b_0 \tanh \left(\frac{x}{L} \right) \mathbf{e}_z \quad (5.4)$$

以上位形是Vlasov-Maxwell方程组的精确平衡解。

5.3 稳定性分析

平衡分布函数方程(5.1)有两部分组成，第一部分是 $f_{0\alpha}$ ，其空间非均匀且在 y 方向上有漂移速度。第二部分 $f_{b\alpha}$ ，其空间均匀且漂移速度为零。第二部分可以看作第一部分的特例，所以下面为表述方便，先给出 $f_{0\alpha}$ 这部分对扰动电荷电流的贡献，然后再类比写出 $f_{b\alpha}$ 这部分对扰动电荷电流的贡献。

线性化 Vlasov 方程:

$$\frac{\partial f_{1\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{1\alpha} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \cdot \nabla_v f_{1\alpha} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{0\alpha}$$

其中 \mathbf{B}_0 为平衡磁场, $f_{1\alpha}$, \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1 分别为扰动分布函数, 扰动电磁场。我们用矢势和标势描述扰动电磁场:

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.6)$$

考虑如下形式的扰动:

$$\varphi = \varphi(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x) \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)] \quad (5.8)$$

沿未扰轨道积分可得扰动分布函数:

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) &= -\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \left\{ \varphi(x) - \frac{U_\alpha}{c} A_y(x) + i(\omega - k_y U_\alpha) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\varphi(x') - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{A}(x')}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z) - i\omega\tau] \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

其中 x' , y' , z' , \mathbf{v}' 为未扰轨道, 初始条件为 $\tau = 0$ 时, $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ 。在局域理论中, 扰动场对空间坐标 x 的依赖最终都会被忽略掉, 此处我们可以把轨道积分内的扰动场 $\varphi(x')$ 和 $\mathbf{A}(x')$ 拿到积分号之外, 其 x 坐标取为粒子在 $\tau = 0$ 时所处的位置, 即为 x 。

$$\begin{aligned} f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) &= -\frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_\alpha} \times \\ &\quad \left\{ \varphi(x) - \frac{U_\alpha}{c} A_y(x) + i(\omega - k_y U_\alpha) \varphi(x) \int_{-\infty}^0 d\tau \exp[ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z) - i\omega\tau] \right. \\ &\quad \left. - i(\omega - k_y U_\alpha) \frac{\mathbf{A}(x)}{c} \cdot \int_{-\infty}^0 d\tau \mathbf{v}' \exp[ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z) - i\omega\tau] \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.3.1 电子的未扰轨道表达式

在非均匀磁场中, 如果粒子的回旋半径远小于磁场的非均匀性的尺度, 粒子的运动轨道可以用回旋运动叠加上导心的 ∇B 漂移运动来近似描述:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_\perp \cos(\phi - \Omega_e \tau) \\ v'_y &= v_\perp \sin(\phi - \Omega_e \tau) + V_d \\ v'_z &= v_z \\ x' &= x - \frac{v_\perp}{\Omega_e} [\sin(\phi - \Omega_e \tau) - \sin(\phi)] \\ y' &= y + \frac{v_\perp}{\Omega_e} [\cos(\phi - \Omega_e \tau) - \cos(\phi)] + V_d \tau \\ z' &= z + v_z \tau \end{aligned}$$

其中 $x, y, z, v_\perp, \phi, v_z$ 为轨道的初始条件, 对初始速度空间我们使用了柱坐标 (v_\perp, ϕ, v_z) 。上式中涉及的回旋频率用粒子初始位置处的磁场计算: $\Omega_e = -B_0(x)e/m_e c$ 。上式中

$$V_d \equiv \frac{\varepsilon_B v_\perp^2}{2\Omega_e}$$

为电子导心的 ∇B 漂移速度。其中

$$\varepsilon_B \equiv \frac{1}{B_0} \frac{dB_0(x)}{dx}$$

为磁场在 x 处的标长的倒数。导心的漂移速度是个小量:

$$\frac{V_d}{v_\perp} = \frac{\varepsilon_B v_\perp}{2|\Omega_e|} \sim \frac{\varepsilon_B v_{te}}{2|\Omega_e|} \sim \varepsilon_B \rho_e$$

为电子回旋半径与磁场标长之比。我们可以计算一下在Harris电流片中 $x = 1.0L$ 处的磁场的标长(其中 L 为电流片半宽):

$$L_B(x) \equiv \frac{B_0(x)}{dB_0(x)/dx} = L \frac{\tanh(x/L)}{\text{sech}^2(x/L)} = 1.81L$$

如果电流片的参数取为 $T_i/T_e = 5$, $\rho_{i0}/L = 1$, 那么对应到 $x = 1.0L$ 处的电子热回旋半径为: $\rho_e = 0.014L$ 。远小于此处的磁场标长, 因而漂移回旋轨道是很好的近似轨道。

5.3.2 电子的扰动电荷电流密度

把上述的电子未扰轨道代入到扰动分布函数中的轨道积分中, 然后再求扰动分布函数的速度矩, 轨道积分和速度空间关于回旋角 ϕ 和平行速度 v_\parallel 的积分可解析作出, 关于垂直速度 v_\perp 的积分不能解析处理, 保留在最后的表达

式中，最后得到的电子的扰动电荷密度表达式为（仅保留零阶共振项）：

$$\begin{aligned}
 n_{1e}(x) &= \int_0^\infty dv_\perp \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel f_{1e}(x, \mathbf{v}) \\
 &= \frac{en_0(x)}{T_e} \left\{ \varphi(x) + \frac{k_z U_e}{k_y c} A_z(x) + i(\omega - k_y U_e) \right. \\
 &\quad \times \frac{2}{k_z v_{te}^3} \left[\varphi(x) \int_0^\infty (-i)v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 Z(\xi_e) dv_\perp \right. \\
 &\quad + A_x(x) \int_0^\infty \frac{-v_\perp^2}{c} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0 J_1 Z(\xi_e) dv_\perp \\
 &\quad \left. \left. + A_z(x) \int_0^\infty i v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 \left(-\frac{v_{te}}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} - \frac{k_z V_d}{k_y c} Z(\xi_e)\right) dv_\perp \right] \right\} \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

其中 J_0, J_1 是第一类Bessel函数，其自变量为 $k_y v_\perp / \Omega_e$ 。 $Z(\xi_e)$ 为等离子体色散函数^[86,87]

$$\begin{aligned}
 Z(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\exp(-z^2)}{z - \xi} dz \\
 &= 2i \exp(-\xi^2) \int_{-\infty}^{i\xi} \exp(-t^2) dt
 \end{aligned}$$

其中积分路径 C 为Landau路径。 $Z'(\xi_e) = -2[1 + \xi_e Z(\xi_e)]$ 为等离子体色散函数的导数，其中的自变量 $\xi_e = (\omega - k_y V_d) / k_y v_{te}$ 。

在推导方程 (5.11) 的过程中，为了解析处理的需要，我们把平衡分布函数 $f_{0\alpha}$ 表达式 (5.2) 在速度空间展开为以下形式：

$$f_{0\alpha} \approx \frac{n_0(x)}{\pi^{3/2} v_{te}^3} \left(1 + \frac{2U_e}{v_{te}^2} v_y \right) \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{v_{te}^2}\right)$$

在对通常的电流片，电子的漂移速度一般远小于其热速度，即 $|U_e| \ll v_{te}$ ，因而以上的展开是很好的近似。

在处理轨道积分和关于回旋角 ϕ 的积分时会遇到如下形式的积分

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(i\eta) d\phi d\tau \quad (5.12)$$

其中

$$\eta = \frac{k_y v_\perp}{\Omega_e} [\cos(\phi - \Omega_e \tau) - \cos(\phi)] + (\omega - k_y V_d - k_z v_z) \tau$$

利用Fourier-Bessel积分公式^[87]，方程 (5.12) 中的积分可以写为：

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp(i\eta) d\phi d\tau = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i J_l^2\left(\frac{k_y v_\perp}{\Omega_e}\right)}{\omega - k_y V_d - k_z v_z - l \Omega_e}$$

对低杂漂移不稳定性，其频率 $\omega \ll |\Omega_e|$ 。因而上式中的无穷求和仅需保留 $l = 0$ 的项（零阶共振项）。

类似地可以求得扰动电流密度的表达式：

$$\begin{aligned}
 J_{ex}(x) &= -e \int_0^\infty dv_\perp \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dv_z f_{1e}(x, \mathbf{v}) \\
 &= -\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^3} \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp^2 \\
 &\quad \times \left\{ -J_0 J_1 Z(\xi_e) \phi(x) + i J_1^2 \frac{v_\perp}{c} Z(\xi_e) A_x(x) + J_0 J_1 \right. \\
 &\quad \times \left. \left[-\frac{k_z}{k_y} \frac{V_d}{c} Z(\xi_e) - \frac{v_{te}}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} \right] A_z(x) \right\}, \\
 J_{ez}(x) &= -e \int_0^\infty dv_\perp \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty dv_z v_z f_{1e}(x, \mathbf{v}) \\
 &= -\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^3} \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp \\
 &\quad \times \left\{ i J_0^2 \frac{Z'(\xi_e)}{2} \phi(x) + J_0 J_1 \frac{v_\perp}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} A_x(x) \right. \\
 &\quad + \left. i J_0^2 \left[\frac{k_z}{k_y} \frac{V_d}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} - \frac{v_{te}}{c} \xi_e \frac{Z'(\xi_e)}{2} \right] A_z(x) \right\}.
 \end{aligned}$$

5.3.3 离子的扰动密度

低杂漂移模的频率远大于离子回旋频率 $\omega \gg \Omega_i$ ，在波的一个周期内，其轨道可以用直线轨道近似描述，即离子可以视作非磁化，这是处理低杂漂移不稳定性的一个通常做法^[40,44,45,88,89]。此外，我们仅保留离子对扰动标势的响应，而忽略其对扰动矢势的响应^[44]，这样，由方程(5.10)可推得离子的扰动分布函数：

$$f_{1i} = -\frac{e f_{0i}}{T_i} \phi(x) \left(1 + \frac{\omega - k_y U_i}{k_y v_y + k_z v_z - \omega} \right) \quad (5.13)$$

上式在速度空间积分可求得扰动密度：

$$n_{1i}(x) = -\frac{e n_0(x)}{T_i} \phi(x) \left[1 + \frac{\omega - k_y U_i}{k_y v_{ti}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{ti}^2}\right) Z(\xi_i) \right]$$

其中 $\xi_i = (\omega - k_y U_i - k_z v_z)/k_y v_{ti}$ 。离子的扰动电流的贡献比电子小得多^[44,45]，本章中我们忽略离子的扰动电流。

5.3.4 背景等离子体对扰动电荷与电流的贡献

类比以上扰动量的表达式，可以直接写出背景等离子体所产生的扰动密度和电流。对背景电子，其扰动密度的表达式为：

$$\begin{aligned}
 n_{b1e}(x) &= \frac{e n_b}{T_e} \phi(x) + \frac{e n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^3} \left[\phi(x) \int_0^\infty (-i) v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 Z(\xi_e) dv_\perp \right. \\
 &\quad + A_x(x) \int_0^\infty \frac{-v_\perp^2}{c} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0 J_1 Z(\xi_e) dv_\perp \\
 &\quad + \left. A_z(x) \int_0^\infty i v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 \left(-\frac{v_{te}}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} - \frac{k_z}{k_y} \frac{V_d}{c} Z(\xi_e) \right) dv_\perp \right] \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

扰动电流密度:

$$\begin{aligned}
 J_{bex}(x) = & -\frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^3} \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp^2 \\
 & \times \left\{ -J_0 J_1 Z(\xi_e) \phi(x) + i J_1^2 \frac{v_\perp}{c} Z(\xi_e) A_x(x) + J_0 J_1 \right. \\
 & \times \left. \left[-\frac{k_z}{k_y} \frac{V_d}{c} Z(\xi_e) - \frac{v_{te}}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} \right] A_z(x) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{bez}(x) = & -\frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^2} \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp \\
 & \times \left\{ i J_0^2 \frac{Z'(\xi_e)}{2} \phi(x) + J_0 J_1 \frac{v_\perp}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} A_x(x) \right. \\
 & + \left. i J_0^2 \left[\frac{k_z}{k_y} \frac{V_d}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} - \frac{v_{te}}{c} \xi_e \frac{Z'(\xi_e)}{2} \right] A_z(x) \right\}.
 \end{aligned}$$

对背景离子, 其扰动密度:

$$n_{b1i}(x) = -\frac{en_b}{T_i} \phi(x) \left[1 + \frac{\omega}{k_y v_{ti}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{ti}^2}\right) Z(\xi_{bi}) \right]$$

其中 $\xi_{bi} = (\omega - k_z v_z)/k_y v_{ti}$ 。

5.3.5 色散关系

使用库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 并忽略位移电流 ($\omega \ll kc$), Maxwell 方程组的形式为:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho \quad (5.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (5.16)$$

方程 (5.16) 的 y 分量是多余方程, 无需考虑。只需考虑方程 (5.15) 和方程 (5.16) 的 x 与 z 分量:

$$k^2 \varphi(x) = 4\pi e (n_{1i} + n_{b1i} - n_{1e} - n_{b1e}) \quad (5.17)$$

$$k^2 A_x(x) = \frac{4\pi}{c} (J_{ex} + J_{bex}) \quad (5.18)$$

$$k^2 A_z(x) = \frac{4\pi}{c} (J_{ez} + J_{bez}) \quad (5.19)$$

其中 $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ 。为书写色散关系的方便, 可以把扰动电荷电流与扰动势的依赖关系写为:

$$n_{1i} + n_{b1i} = \chi_\varphi^i \varphi$$

$$n_{1e} + n_{b1e} = \chi_\varphi^e \varphi + \chi_x^e A_x + \chi_z^e A_z$$

$$J_{ex} + J_{bex} = \sigma_\varphi^x \varphi + \sigma_x^x A_x + \sigma_z^x A_z$$

$$J_{ez} + J_{bez} = \sigma_\varphi^z \varphi + \sigma_x^z A_x + \sigma_z^z A_z$$

对比扰动电荷电流的表达式,可写出上述方程中 $\chi_\varphi^i, \chi_\varphi^e, \chi_\varphi^e, \chi_x^e, \chi_z^e, \sigma_\varphi^x, \sigma_x^x, \sigma_z^x, \sigma_\varphi^z, \sigma_x^z, \sigma_z^z$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^i = & -\frac{en_0(x)}{T_i} \left[1 + \frac{\omega - k_y U_i}{k_y v_{ti}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{ti}^2}\right) Z(\xi_i) \right] \\ & - \frac{en_b}{T_i} \left[1 + \frac{\omega}{k_y v_{ti}^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(-\frac{v_z^2}{v_{ti}^2}\right) Z(\xi_{bi}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^e = & \frac{en_0(x)}{T_e} \left[1 + \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^3} \int_0^\infty (-i)v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 Z(\xi_e) dv_\perp \right] \\ & + \frac{en_b}{T_e} \left[1 + \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^3} \int_0^\infty (-i)v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 Z(\xi_e) dv_\perp \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_x^e = & \left[\frac{en_0(x)}{T_e} i(\omega - k_y U_e) + \frac{en_b}{T_e} i\omega \right] \\ & \times \int_0^\infty \frac{-v_\perp^2}{c} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0 J_1 Z(\xi_e) dv_\perp, \end{aligned}$$

$$\chi_z^e = \left[\frac{en_0(x)}{T_e} + \frac{en_b}{T_e} \right] \int_0^\infty i v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) J_0^2 \left(-\frac{v_{te}}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} - \frac{k_z V_d}{k_y c} Z(\xi_e) \right) dv_\perp,$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^x = & \left[\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^3} + \frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^3} \right] \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp^2 J_0 J_1 Z(\xi_e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^x = & \left[-\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^3} - \frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^3} \right] \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp^2 i J_1^2 \frac{v_\perp}{c} Z(\xi_e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^x = & \left[-\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^3} - \frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^3} \right] \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp^2 J_0 J_1 \left[-\frac{k_z V_d}{k_y c} Z(\xi_e) - \frac{v_{te}}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^z = & \left[-\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^2} - \frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^2} \right] \\ & \times \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp i J_0^2 \frac{Z'(\xi_e)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^z &= \left[-\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^2} - \frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^2} \right] \\ &\times \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp J_0 J_1 \frac{v_\perp}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2}, \\ \sigma_z^z &= \left[-\frac{e^2 n_0(x)}{T_e} \frac{2i(\omega - k_y U_e)}{k_z v_{te}^2} - \frac{e^2 n_b}{T_e} \frac{2i\omega}{k_z v_{te}^2} \right] \\ &\times \int_0^\infty dv_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp i J_0^2 \left[\frac{k_z}{k_y} \frac{V_d}{c} \frac{Z'(\xi_e)}{2} - \frac{v_{te}}{c} \xi_e \frac{Z'(\xi_e)}{2} \right].\end{aligned}$$

以上量是空间坐标 x 的函数。在局域理论中，在求色散关系时，我们要取定空间坐标 x 。在这一点上使方程组 (5.17) (5.18) (5.19) 有非零解的条件，即为此点上的色散关系：

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.20)$$

其中的矩阵元的表达式为：

$$\begin{aligned}D_{11} &= \frac{4\pi e}{k^2} (\chi_\varphi^e - \chi_\varphi^i) + 1 & D_{12} &= \frac{4\pi e}{k^2} \chi_x^e & D_{13} &= \frac{4\pi e}{k^2} \chi_z^e \\ D_{21} &= \frac{4\pi}{ck^2} \sigma_\varphi^x & D_{22} &= \frac{4\pi}{ck^2} \sigma_x^x - 1 & D_{23} &= \frac{4\pi}{ck^2} \sigma_z^x \\ D_{31} &= \frac{4\pi}{ck^2} \sigma_\varphi^z & D_{32} &= \frac{4\pi}{ck^2} \sigma_x^z & D_{33} &= \frac{4\pi}{ck^2} \sigma_z^z - 1\end{aligned}$$

5.4 计算结果

在这一节中，我们数值求解低杂漂移不稳定性的色散关系 (5.20)，并研究背景等离子体对低杂漂移模的影响。这里考虑的电流片平衡位形可以用一下四个无量纲量完全表征：

$$\frac{n_b}{N_0}, \frac{U_i}{v_{ti}}, \frac{T_i}{T_e}, \frac{\omega_{pe}^2(0)}{\Omega_{e0}^2},$$

其中 $\omega_{pe}^2(0) = 4\pi e^2 N_0 / m_e$, $\Omega_{e0} = -b_0 e / m_e c$ 是无穷远处的电子回旋频率。在以下的讨论中，如无特殊说明，我们选定后三个无量纲量：

$$\frac{U_i}{v_{ti}} = -1, \quad \frac{T_i}{T_e} = 5, \quad \frac{\omega_{pe}^2(0)}{\Omega_{e0}^2} = 16$$

这三个值的选择是依据观测到的磁尾薄电流片的参数值^[1]。第一个无量纲量 n_b/N_0 表征背景等离子体的含量，为了研究背景等离子体对低杂漂移模的影响，我们将在不同 n_b/N_0 情况下计算低杂漂移模的色散关系。在计算中，我们用当地的离子回旋频率 Ω_i 归一波频，用当地的电子热回旋半径 $\rho_e = v_{te}/|\Omega_e|$ 归一波矢。

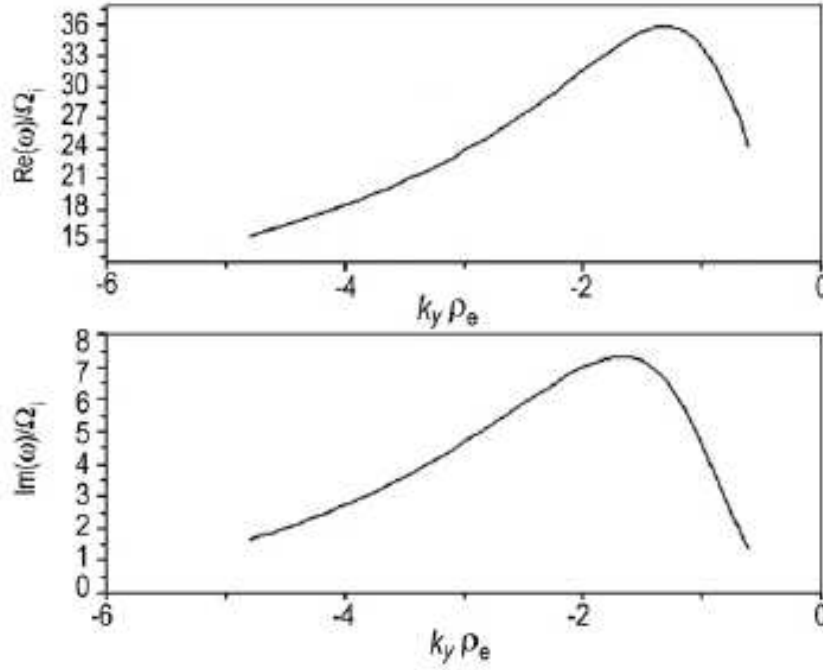


图 5.1 低杂漂移模的实频 $\text{Re}(\omega)/\Omega_i$ (上图) 和增长率 $\text{Im}(\omega)/\Omega_i$ 关于波矢 $k_y \rho_e$ 的变化关系, 其他参数为: $x = 0.88L$, $k_z \rho_e = 0.002$, $n_b/N_0 = 0$, $T_i/T_e = 1$, $U_i/v_{ti} = -1$, $\omega_{pe}^2(0)/\Omega_{i0} = 125$

首先给出我们的计算结果和文献中已有结果的比较。图 (5.1) 画出了低杂漂移模的增长率和实频关于波矢 $k_y \rho_e$ 的变化关系。选择的参数是 $x = 0.88L$, $k_z \rho_e = 0.002$, $n_b/N_0 = 0$, $T_i/T_e = 1$, $U_i/v_{ti} = -1$, $\omega_{pe}^2(0)/\Omega_{e0}^2 = 125$ 。图 (5.2) 比较了我们的结果和文献^[44]中的结果。参数的选择完全依照文献^[44]图3中的参数。有几点值得注意, 第一, 文献^[44]不是基于Harris电流片平衡位形, 但从文中的局域参数可以推算出实际上对应一个具有如下参数的Harris电流片:

$$\frac{n_b}{N_0} = 0, \frac{U_i}{v_{ti}} = -1, \frac{T_i}{T_e} = 1, \frac{\omega_{pe}^2(0)}{\Omega_{e0}^2} = 125.$$

且其计算色散关系时所取的空间点为 $x = 0.88L$ 。第二, 文献^[44]中使用低杂频率 $\Omega_{lh} = \sqrt{\Omega_i |\Omega_e|}$ 归一波频, 而本文使用离子回旋频率。第三, 文献^[44]的参考系是离子参考系, 在这个参考系中离子的漂移速度为零, 而在本文的参考系中, 离子有漂移速度, 因而为对比最后的结果, 我们要加上由参考系变换而产生的Doppler 频移 $-k_y U_i$ 。图 (5.2) 中的对比结果说明, 在变换到离子参考系后, 我们的结果和文献^[44]的结果非常准确地吻合。

图 (5.3) 至图 (5.5) 画出了低杂漂移模的增长率和实频随电流方向的波矢 $k_y \rho_e$ 的变化关系, 分别考虑了不同背景等离子体含量和空间位置的情况。

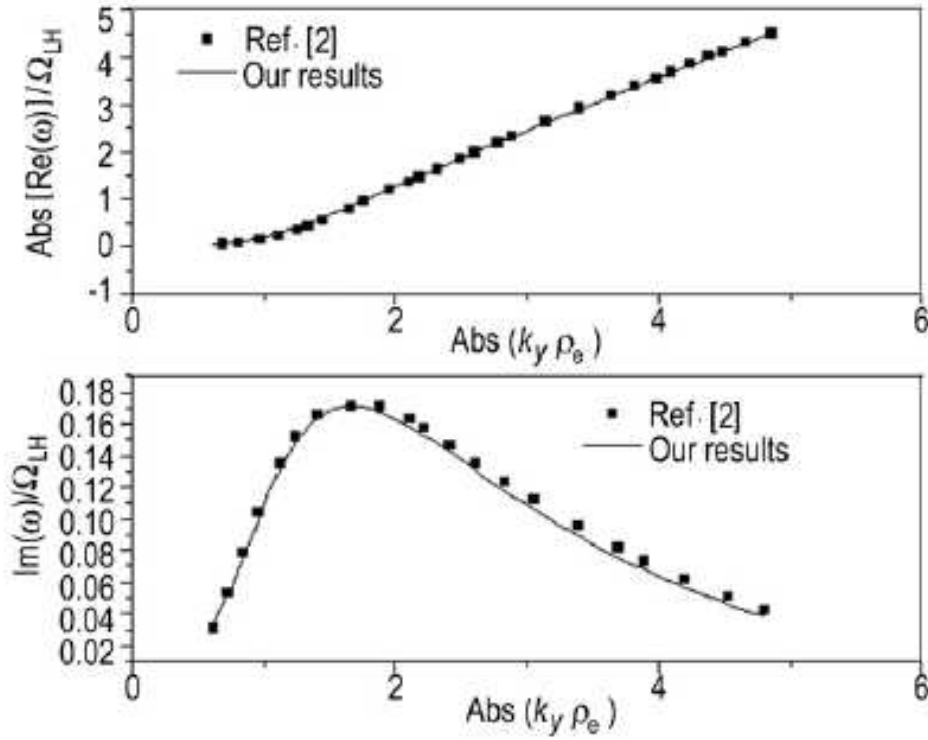


图 5.2 低杂漂移模的实频 $\text{Re}(\omega)/\Omega_i$ (上图) 和增长率 $\text{Im}(\omega)/\Omega_i$ 关于波矢 $k_y \rho_e$ 的变化关系, 参数和图(5.1)相同。实频中加上了由于参考系变换产生的Doppler频移 $-k_y U_i$ 。这个空间点上的局域参数为 $\beta_i \equiv 8\pi n_0(x)T_i/B_0^2(x) = 0.5$, $\omega_{pe}^2/\Omega_{ce}^2 = 125$ 。这些参数和文献^[44]图3的参数完全相同。

图 (5.3) 到图 (5.5) 给出低杂漂移模的一些基本性质, 例如, 低杂漂移模的频率范围为 $\text{Re}(\omega) \sim 40\Omega_i \sim \Omega_{lh}$, 其横场波长在电子热回旋半径量级 $|k_y| \rho_e \sim 1$, 其相速度在离子的漂移速度方向上。此外, 低杂漂移模是一种flute mode, 其最大增长率发生在 $k_z/k_y \rightarrow 0$, 并随磁场方向上波矢 k_z 的增加而迅速降低, 所以在图 (5.3) 到图 (5.5) 中, 我们考虑的是非常近垂直磁场方向传播的情况 ($k_z \rho_e = 0.003$, $k_z/|k_y| \ll 1$)。

现在来讨论背景等离子体对低杂漂移模的影响, 图 (5.3) 分别画出了不同背景等离子体含量情况下的低杂漂移模的增长率和实频, 其中 $n_b/N_0 = 0$ 对应不含背景等离子体的情况, 从图中可以看出, 当 n_b/N_0 不为零时, 低杂漂移模的增长率小于 $n_b/N_0 = 0$ 时的增长率, 且增长率随着 n_b/N_0 的增加而整体下降。这说明背景等离子体对低杂漂移模起抑制作用。此外, 图 (5.3) 中的结果表明, 背景使得低杂漂移模的实频下降, 因而降低了模式的相速度。图5.3中选择的点是在 $x = 0.8L$ 处, 较接近电流片中心。图 (5.4) 计算了在电流片中另一个空间点 $x = 1.0L$ 处的低杂漂移模的色散关系, 同样考虑了不同背景等离子

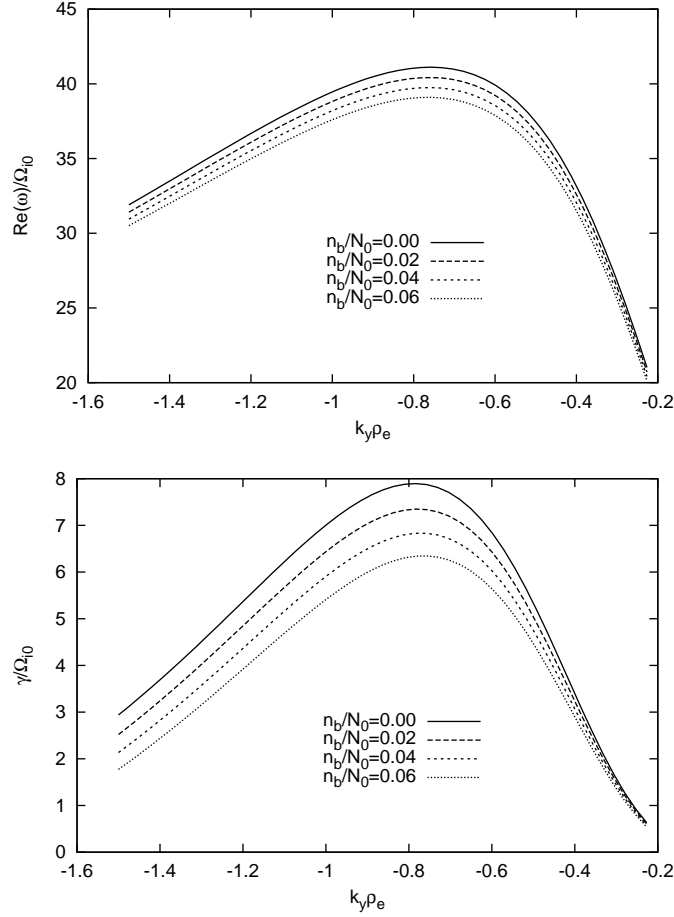


图 5.3 低杂漂移模的实频（上图）和增长率（下图）关于波矢 $k_y \rho_e$ 的函数关系，图中分别画出了四种不同背景等离子体含量情况： $n_b/N_0 = 0.00, 0.02, 0.04$ 和 0.06 。其他参数为 $x = 0.8L$, $k_z \rho_e = 0.003$, $T_i/T_e = 5$, $U_i/v_{ti} = -1$, $\omega_{pe}^2(0)/\Omega_{i0}^2 = 16$ 。

体含量的情况， $n_b/N_0 = 0$ 对应不含背景等离子体情况，图中结果表明，随着背景等离子体的引入低杂漂移模的增长率和实频均下降，背景等离子体同样是对低杂漂移模其抑制作用。图（5.5）中选择了空间点 $x = 1.2L$ ，其结果同样说明背景等离子体对低杂漂移模起抑制作用。

背景等离子体对低杂漂移模的影响可以从其对电子离子的漂移速度的影响来理解。在我们的参考系中，分布函数 $f_{0\alpha}$ 对应的宏观漂移速度为 U_α 。分布函数 $f_{b\alpha}$ 描述的背景等离子体对应的宏观漂移速度为零。这两部分的总和对应的漂移速度则为：

$$\langle v_y \rangle_\alpha \equiv \frac{\int v_y (f_{0\alpha} + f_{b\alpha}) d\mathbf{v}}{\int (f_{0\alpha} + f_{b\alpha}) d\mathbf{v}} = \frac{U_\alpha}{1 + n_b/n_0(x)}$$

可见当背景等离子体的密度 n_b 不为零时，总体的漂移速度由原来的 U_α 降为 $U_\alpha/[1 + n_b/n_0(x)]$ 。这样电子和离子的宏观漂移速度均被降低，它们之间的相对漂移也随之降低。由于电子和离子间的相对漂移是低杂漂移模

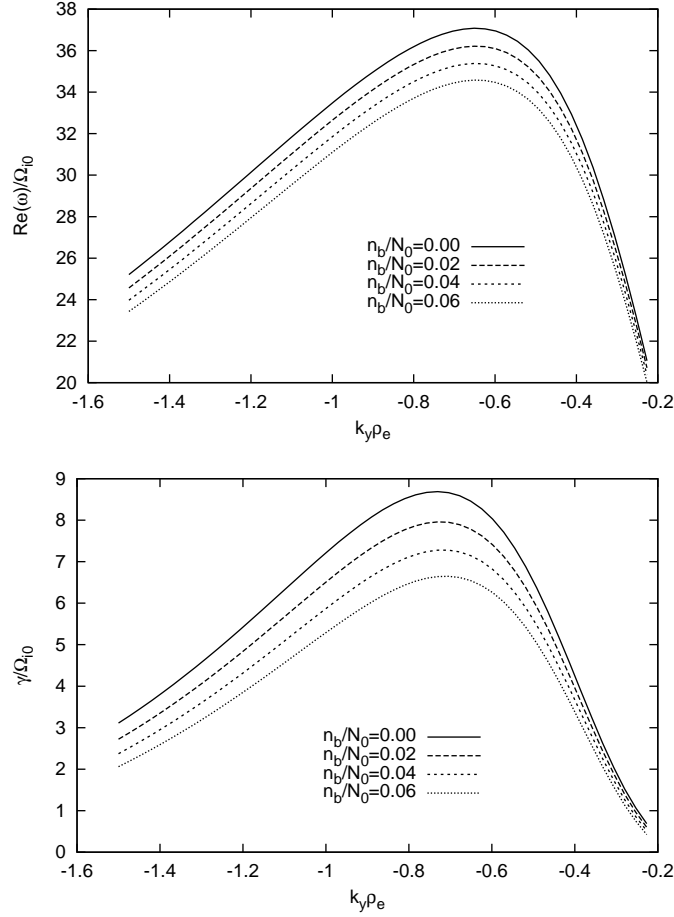


图 5.4 低杂漂移模的实频（上图）和增长率（下图）关于波矢 $k_y \rho_e$ 的函数关系，图中分别画出了四种不同背景等离子体含量情况： $n_b/N_0 = 0.00, 0.02, 0.04$ 和 0.06 。其他参数为 $x = 1.0L$, $k_z \rho_e = 0.003$, $T_i/T_e = 5$, $U_i/v_{ti} = -1$, $\omega_{pe}^2(0)/\Omega_{i0}^2 = 16$ 。

的驱动源，所以相对漂移的降低使得低杂漂移模的增长率降低。同时，低杂漂移模的相速度与离子的宏观漂移速度正相关，背景使得离子的宏观漂移速度降低，因而会降低模式的相速度，即使得模式的实频下降。在图（5.3）中，空间点取为 $x = 0.8L$ ，当 $n_b/N_0 = 0.0$ （即不含背景等离子体）时，电子和粒子的相对漂移速度是 $(U_e - U_i)/v_{ti} = 1.20$ ，当 $n_b/N_0 = 0.06$ 时，漂移速度降为 $(U_e - U_i)/\{v_{ti}[1 + n_b/n_0(x)]\} = 1.08$ 。图（5.4）中，空间点取为 $x = 1.0L$ ，当 $n_b/N_0 = 0.0$ 时，电子和离子间的漂移速度是 $(U_e - U_i)/v_{ti} = 1.20$ 。当 $n_b/N_0 = 0.06$ 时，漂移速度降为 $(U_e - U_i)/\{v_{ti}[1 + n_b/n_0(x)]\} = 1.04$ 。

另一方面，背景等离子体对低杂漂移模起抑制作用这一结果也符合 β 对低杂漂移模起致稳作用这一结论，其中 $\beta \equiv 8\pi n(T_i + T_e)/B^2$ 为热压和磁压之比。在给定的空间点上，背景等离子体增加了热压，而对磁压没有任何影响，这样使得 β 增加，从而抑制低杂漂移模的增长。在图（5.5）中，空间点取

为 $x = 1.2L$ ，当 $n_b/N_0 = 0.0$ 时， β 值为 $1/\sinh^2(x) = 0.43$ ，当 $n_b/N_0 = 0.06$ 时， β 值增加到 $[1 + n_b/n_0(x)]/\sinh^2(x) = 0.52$ 。

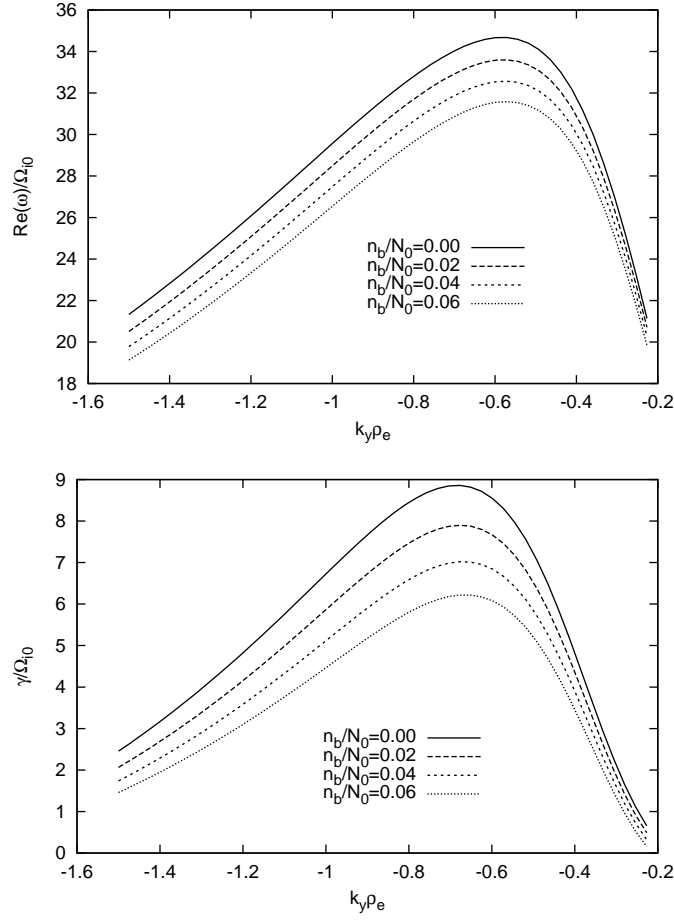


图 5.5 低杂漂移模的实频（上图）和增长率（下图）关于波矢 $k_y \rho_e$ 的函数关系，图中分别画出了四种不同背景等离子体含量情况： $n_b/N_0 = 0.00, 0.02, 0.04$ 和 0.06 。其他参数为 $x = 1.2L$ ， $k_z \rho_e = 0.003$ ， $T_i/T_e = 5$ ， $U_i/v_{ti} = -1$ ， $\omega_{pe}^2(0)/\Omega_{i0}^2 = 16$ 。

5.5 小结

在这一章里，我们在局域理论的框架下考虑了电流片中的低杂漂移不稳定性。研究了背景等离子体对低杂漂移模的影响。结果表明，背景等离子体降低了低杂漂移模的增长率和相速度，对模式起抑制作用。其原因有互相联系的两点：第一，背景等离子体使得电子和离子间的相对漂移速度降低。第二，背景等离子体使得电流片的 β 值升高。这两点都对低杂漂移模起致稳作用。

第6章 总结和展望

电流片是自然界中一种基本的等离子体结构，广泛存在于地球磁尾，磁层顶，弦激波，太阳圈中。电流片的稳定性问题，由于其在空间物理和天体物理中的广泛的应用，一直是人们关注的研究课题。在磁层物理中，大尺度的空间现象通常与小尺度的电流片中的物理过程密切相关。电流片区是一个强非均匀的过渡层，其反向的磁场结构为磁场重联提供了便利。电流片中发生的不稳定过程，对磁场重联的触发和发展有重要作用。其中无碰撞撕裂模不稳定性本身是一种磁重联过程。它对大规模磁场重联的触发和发展有直接作用。各种沿平衡电流方向传播的漂移不稳定性本身不重联磁场，它们通过引发反常电阻或激发二次不稳定性从而影响重联模的发展。

本文用无碰撞动理学理论（Vlasov-Maxwell方程组）研究了电流片平衡位形中的不稳定线性本征模，计算了模式的增长率，本征函数结构和参数依赖。我们研究了三种本征模：无碰撞撕裂模，漂移扭曲模和低杂漂移模。

在对线性化Vlasov方程的处理中，本文采用的方法是传统的沿未扰轨道积分方法，与大部分文献不同的是，我们不对未扰轨道做任何解析近似（第5章除外），而是用直接的数值方法求解初值问题从而计算出未扰轨道，进而利用轨道的周期性计算出轨道积分。在对扰动电磁场的处理中，我们用标势和矢量势来描述电磁场，扰动场的静电和电磁效应都被保留，对未知的扰动场空间分布，本文采用基函数展开的方法（谱方法），从而将关于扰动场的积分微分方程的本征值问题转化为矩阵问题，最终计算出不稳定性的增长率和扰动场的空间分布。

Kappa分布能很好地描述空间等离子体中的超热分布。我们研究了具有Kappa分布的电流片中的撕裂模和漂移扭曲模，并把结果和Harris电流片的对应模式比较。我们发现具有这种超热分布的电流片的撕裂模和漂移扭曲模的增长率要小于Harris电流片中的对应模式，且增长率随着谱指数 κ 的降低而降低。

我们研究了分布函数各向异性对撕裂模的影响。研究了温度各向异性对Harris电流片中的撕裂模。结果表明，电子的温度各向异性会显著影响撕裂模，当 $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$ 时，撕裂模的增长率远大于温度各向同性情况，且最大增长率所对应的波长位置随着 $T_{e\perp}/T_{e\parallel}$ 的增加而迅速向短波方向移动。反之，当 $T_{e\perp} < T_{e\parallel}$ 时，撕裂模受抑制，其增长率小于温度各向同性时的情况。离子的温度各向异性对撕裂模的影响与电子类似，但在同样的温度各向异性程度下，

其影响远小于电子。

我们构造了一种分布函数各向异性的电流片：Kappa-Maxwell电流片。这种电流片在平行磁场方向上的速度分布是Maxwell分布，而在垂直磁场方向上的分布是Kappa分布。这种分布函数具有内在的各向异性特点，且可以通过调节谱指数 κ 的值来改变各向异性程度。我们用这种电流片模型来描述模拟中所观测到的电子分布函数的各向异性。我们计算了这种电流片中的撕裂模的增长率，结果表明，这种电流片中的撕裂模的增长率远大于各向同性情况，且增长率随着谱指数的降低而增加，而最大增长率对应的波长位置随着谱指数的降低而趋于短波。

在第5章中，我们在局域理论的框架下，研究了电流片中的背景等离子体对低杂漂移不稳定性的影响。结果表明，背景等离子体抑制低杂漂移模的增长，并使其频率降低。这一章中所使用的方法与前两章不同，在处理中忽略了扰动场的空间分布，且对电子和离子的未扰轨道使用了近似的解析表达式。得到的结果仅对远离电流片中心的边缘区域有意义。

本文第3章和第4章所用的方法仅用到基本的动理学理论，不涉及任何解析近似，原则上包含了线性情况下的所有物理效应。其误差只出现在数值离散的过程中。方法的特点体现在对未扰轨道积分的处理和对扰动场的基函数展开处理中。这种方法容易应用到一般性的电流片平衡位形中。本文只考虑了较简单的电流片平衡位形下的本征模，我们计划以后用这种方法对更复杂的电流片平衡位形中的线性本征模进行系统研究。我们还计划开发出自己的粒子模拟程序来研究这些模式的非线性演化问题。

参考文献

- [1] V. A. Sergeev, D. G. Mitchell, C. T. Russell, and D. J. Williams. Structure of the tail plasma/current sheet at $\sim 11r_e$ and its changes in the course of a substorm. *J. Geophys. Res.*, 98:17345, 1993.
- [2] R. Nakamura, W. Baumjohann, A. Runov, and Y. Asano. Thin current sheets in the magnetotail observed by cluster. *Space Sci. Rev.*, 122:29, 2006.
- [3] P. Riley, J. A. Linker, and Z. Mikić. Modeling the heliospheric current sheet: Solar cycle variations. *J. Geophys. Res.*, 107:1136, 2002.
- [4] P. L. Pritchett. Energetic electron acceleration during multi-island coalescence. *Phys. Plasmas*, 15:102105, 2008.
- [5] X. R. Fu, Q. M. Lu, and S. Wang. The process of electron acceleration during collisionless magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 13:012309, 2006.
- [6] P. Ricci, G. Lapenta, and J. U. Brackbill. Electron acceleration and heating in collisionless magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 10:3554, 2003.
- [7] P. L. Pritchett, F. V. Coroniti, R. Pellat, and H. Karimabadi. Collisionless reconnection in two-dimensional magnetotail equilibria. *Geophys. Res. Lett.*, 96:11523, 1991.
- [8] S. von Goeler, W. Stodiek, and N. Sauthoff. Studies of internal disruptions and $m = 1$ oscillations in tokamak discharges with soft x-ray techniques. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1201, 1974.
- [9] T. Nagai, I. Shinohara, M. Fujimoto, M. Hoshino, Y. Saito, S. Machida, and T. Mukai. Geotail observations of the hall current system: Evidence of magnetic reconnection in the magnetotail. *J. Geophys. Res.*, 106:25929, 2001.
- [10] M. Øieroset, R. P. Lin, T. D. Phan, D. E. Larson, and S. D. Bale. Evidence for electron acceleration up to ~ 300 keV in the magnetic reconnection diffusion region of earth's magnetotail. *Phys. Rev. Lett.*, 89:195001, 2002.
- [11] W. Daughton, J. Scudder, and H. Karimabadi. Fully kinetic simulations of undriven magnetic reconnection with open boundary conditions. *Phys. Plasmas*, 13:072101, 2006.
- [12] W. Daughton and Homa Karimabadi. Collisionless magnetic reconnection in large-scale electron-positron plasmas. *Phys. Plasmas*, 14:072303, 2007.
- [13] P. Ricci, J. U. Brackbill, W. Daughton, and G. Lapenta. Influence of the lower hybrid drift instability on the onset of magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 11:4489, 2004.
- [14] P. L. Pritchett. Collisionless magnetic reconnection in a three-dimensional open system. *J. Geophys. Res.*, 106:25961, 2001.

-
- [15] P. L. Pritchett. Kinetic properties of magnetic merging in the coalescence process. *Phys. Plasmas*, 14:052102, 2007.
- [16] J. F. Drake, M. A. Shay, and M. Swisdak. The hall fields and fast magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 15:042306, 2008.
- [17] J. Birn, J. Drake, M. Shay, B. Rogers, R. Denton, M. Hesse, M. Kuznetsova, Z. Ma, A. Bhattacharjee, A. Otto, and P. Pritchett. Geospace environmental modeling (gem) magnetic reconnection challenge. *J. Geophys. Res*, 106:3715, 2001.
- [18] P. L. Pritchett. Onset and saturation of guide-field magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 12:062301, 2005.
- [19] H. Karimabadi, W. Dauhton, and K. B. Quest. Role of electron temperature anisotropy in the onset of magnetic reconnection. *J. Geophys. Res*, 32:L18801, 2004.
- [20] B. Coppi, G. Laval, and R. Pellat. Dynamics of the geomagnetic tail. *Phys. Rev. Lett*, 16:1207, 1966.
- [21] P. Ricci, J. U. Brackbill, W. Daughton, and G. Lapenta. New role of the lower-hybrid drift instability in the magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 12:055901, 2005.
- [22] G. Lapenta, J. U. Brackbill, and W. S. Daughton. The unexpected role of the lower hybrid drift instability in magnetic reconnection in three dimensions. *Phys. Plasmas*, 10:1577, 2004.
- [23] R. Kulsrud, H. Ji, W. Fox, and M. Yamada. An electromagnetic drift instability in the magnetic reconnection experiment and its importance for magnetic reconnection. *Phys. Plasmas*, 12:082301, 2005.
- [24] M. Dobrowolny. Instability of a neutral sheet. *Nuovo Cimento B*, 55:427, 1968.
- [25] W. Daughton. The unstable eigenmodes of a neutral sheet. *Phys. Plasmas*, 6:1329, 1999.
- [26] P. L. Pritchett, F. V. Coroniti, and V. K. Decyk. Three-dimensional stability of thin quasi-neutral current sheets. *J. Geophys. Res*, 101:27413, 1996.
- [27] B. G. Harrold, A. Bhattacharjee, and X. Wang. Tearing stability of the two-dimensional magnetotail. *Phys. Plasmas*, 2:3857, 1995.
- [28] P. L. Pritchett. Effect of electron dynamics on collisionless reconnection in two-dimensional magnetotail equilibria. *J. Geophys. Res*, 99:5935, 1994.
- [29] K. B. Quest, H. Karimabadi, and M. Brittnacher. Consequences of particle conservation along a flux surface for magnetotail tearing. *J. Geophys. Res*, 101:179, 1996.
- [30] R. Pellat, F. Coroniti, and P. Pritchett. Does ion tearing exist? *Geophys. Res. Lett*, 18:143, 1991.
- [31] P. N. Guzdar M. I. Sitnov and M. Swisdak. A model of the bifurcated current sheet. *Geophys. Res. Lett*, 30:1712, 2003.

-
- [32] A. V. Divin, M. I. Sitnov, M. Swisdak, and J. F. Drake. Reconnection onset in the magnetotail: Particle simulations with open boundary conditions. *Geophys. Res. Lett.*, 34:L09109, 2007.
 - [33] J. Chen and P. Palmadesso. Tearing instability in an anisotropic neutral sheet. *Phys. Fluids*, 27:1198, 1984.
 - [34] J. Chen and Y. C. Lee. Collisionless tearing instability in a non-maxwellian neutral sheet: an integro-differential formulation. *Phys. Fluids*, 28:2137, 1985.
 - [35] J. Chen and Y. C. Lee. A quadratic-form analysis of the collisionless tearing mode. *Phys. Fluids*, 31:2944, 1988.
 - [36] G. R. Burkhart and J. Chen. Collisionless tearing instability of a bi-maxwellian neutral sheet: an integrodifferential treatment with exact particle orbits. *Phys. Fluids B*, 1:1578, 1989.
 - [37] G. R. Burkhart and J. Chen. Linear, collisionless, bi-maxwellian neutral-sheet tearing instability. *Phys. Rev. Lett.*, 63:159, 1989.
 - [38] W. Daughton, G. Lapenta, and P. Ricci. Nonlinear evolution of the lower-hybrid drift instability in a current sheet. *Phys. Rev. Lett.*, 93:105004, 2004.
 - [39] T. Matsui and W. Daughton. Kinetic theory and simulation of collisionless tearing in bifurcated current sheets. *Phys. Plasmas*, 15:012901, 2008.
 - [40] J. D. Huba, J. F. Drake, and N. T. Gladd. Lower-hybrid-drift instability in field reversed plasmas. *Phys. Plasmas*, 23:552, 1980.
 - [41] W. Daughton. Electromagnetic properties of the lower-hybrid drift instability in a thin current sheet. *Phys. Plasmas*, 10:3103, 2003.
 - [42] M. Ozaki, T. Sato, and R. Horiuchi. Electromagnetic instability and anomalous resistivity in a magnetic neutral sheet. *Phys. Plasmas*, 3:2265, 1996.
 - [43] T. Moritaka, R. Horiuchi, and H. Ohtani. Anomalous resistivity due to kink modes in a thin current sheet. *Phys. Plasmas*, 14:102109, 2007.
 - [44] R. C. Davidson, N. T. Gladd, C. S. Wu, and J. D. Huba. Effects of finite plasma beta on the lower-hybrid-drift instability. *Phys. Fluids*, 20:301, 1977.
 - [45] J. B. Hsia, S. M. Chiu, M. F. Hsia, R. L. Chou, and C. S. Wu. Generalized lower-hybrid-drift instability. *Phys. Plasmas*, 22:1737, 1979.
 - [46] H. Ji, S. Terry, M. Yamada, R. Kulsrud, A. Kuritsyn, and Y. Ren. Electromagnetic fluctuations during fast reconnection in a laboratory plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 92:115001, 2004.
 - [47] V. M. Vasyliunas. A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with ogo 1 and ogo 3. *J. Geophys. Res.*, 73:2839, 1968.
 - [48] M. R. Collier. The adiabatic transport of superthermal distributions modelled by kappa functions. *Geophys. Res. Lett.*, 22:2673, 1995.

-
- [49] R. A. Treumann, C. H. Jaroschek, and M. Scholer. Stationary plasma states far from equilibrium. *Phys. Plasmas*, 11:1317, 2004.
 - [50] F. L. Xiao. Modelling energetic particles by a relativistic kappa-loss-cone distribution function in plasmas. *Plasma Phys. Control Fusion*, 48:203, 2005.
 - [51] W. Z. Fu and L. N. Hau. Vlasov-maxwell equilibrium solutions for harris sheet magnetic field with kappa velocity distribution. *Phys. Plasmas*, 12:070701, 2005.
 - [52] P. H. Yoon, A. T. Y. Lui, and R. B. Sheldon. On the current sheet model with kappa distribution. *Phys. Plasmas*, 13:102108, 2006.
 - [53] W. Daughton. Kinetic theory of the drift kink instability in a current sheet. *J. Geophys. Res*, 103:29429, 1998.
 - [54] E. G. Harris. On a plasma sheath separating regions of oppositely directed magnetic field. *Nuovo Cimento*, 23:115, 1962.
 - [55] P. H. Yoon and A. T. Y. lui. A class of exact two-dimensional kinetic current sheet equilibria. *J. Geophys. Res*, 110:A01202, 2005.
 - [56] D. R. Nicholson. *Introduction to plasma theory*. New York : Wiley, 1983.
 - [57] D. A. Gurnett and A. Bhattacharjee. *Introduction to plasma physics : with space and laboratory applications*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
 - [58] M. P. Leubner. Fundamental issues on kappa-distributions in space plasmas and interplanetary proton distributions. *Phys. Plasmas*, 11:1308, 2004.
 - [59] S. P. Christon, D. J. Williams, D. G. Mitchell, L. A. Frank, and C. Y. Huang. Spectral characteristics of plasma sheet ion and electron populations during undisturbed geomagnetic conditions. *J. Geophys. Res*, 94:13409, 1989.
 - [60] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, Inc., 2000.
 - [61] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.
 - [62] H. P. Furth, John Killeen, and Marshall N. Rosenbluth. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch. *Phys. Fluids*, 6:459, 1963.
 - [63] M. Hosseinpour, N. Bian, and G. Vekstein. Two-fluid regimes of the resistive and collisionless tearing instability. *Phys. Plasmas*, 16:012104, 2009.
 - [64] V. V. Mirnov, C. C. Hegna, and S. C. Prager. Two-fluid tearing instability in force-free magnetic configuration. *Phys. Plasmas*, 11:4468, 2004.
 - [65] N. Bian and G. Vekstein. On the two-fluid modification of the resistive tearing instability. *Phys. Plasmas*, 14:072107, 2007.
 - [66] R. Fitzpatrick and F. Porcelli. Collisionless magnetic reconnection with arbitrary guide field.

- Phys. Plasmas*, 11:4713, 2004.
- [67] S. V. Bulanov, F. Pegoraro, and A. S. Sakharov. Magnetic reconnection in electron magnetohydrodynamics. *Phys. Plasmas*, 4:2499, 1992.
- [68] Huishan Cai and Ding Li. Tearing mode with guide field gradient in electron magnetohydrodynamics. *Phys. Plasmas*, 16:022109, 2009.
- [69] Huishan Cai and Ding Li. Magnetic reconnection with electron viscosity in electron magnetohydrodynamics. *Phys. Plasmas*, 15:032301, 2008.
- [70] Huishan Cai and Ding Li. Magnetic reconnection with pressure gradient effect in compressible electron magnetohydrodynamics. *Phys. Plasmas*, 15:042101, 2008.
- [71] N. Attico, F. Califano, and F. Pegoraro. Kinetic regimes of high frequency magnetic reconnection in a neutral sheet configuration. *Phys. Plasmas*, 9:458, 2002.
- [72] E. S. Weibel. Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution. *Phys. Rev. Lett*, 2:83, 1959.
- [73] I. Katanuma and T. Kamimura. Simulation studies of the collisionless tearing instabilities. *Phys. Plasmas*, 23:2500, 1980.
- [74] J. F. Drake and Y. C. Lee. Nonlinear evolution of collisionless and semicollisional tearing modes. *Phys. Rev. Lett*, 39:453, 1977.
- [75] J. F. Drake and Y. C. Lee. Kinetic theory of tearing instabilities. *Phys. Fluids*, 20:1341, 1977.
- [76] W. Daughton and H. Karimabadi. Kinetic theory of collisionless tearing at the magnetopause. *J. Geophys. Res*, 110:A03217, 2005.
- [77] V. Roytershteyn and W. Daughton. Collisionless instability of thin current sheets in the presence of sheared parallel flows. *Phys. Plasmas*, 15:082901, 2008.
- [78] M. Brittnacher, K. B. Quest, and H. Karimabadi. A new approach to the linear theory of single-species tearing in two-dimensional quasi-neutral sheets. *J. Geophys. Res*, 100:3551, 1995.
- [79] M. Hoshino. The electrostatic effect for the collisionless tearing mode. *J. Geophys. Res*, 92:7368, 1987.
- [80] Z. Zhu and R. M. Winglee. Tearing instability, flux ropes, and the kinetic current sheet kink instability in the earth's magnetotail: A three-dimensional perspective from particle simulations. *J. Geophys. Res*, 101:4885, 1996.
- [81] W. Daughton. Nonlinear dynamics of thin current sheets. *Phys. Plasmas*, 9:3668, 2002.
- [82] G. Lapenta and J. U. Brackbill. Nonlinear evolution of the lower hybrid drift instability: Current sheet thinning and kinking. *Phys. Plasmas*, 9:1544, 2002.
- [83] S. K. Antiochos R. B. Dahlburg and T. A. Zang. Secondary instability in three-dimensional

- magnetic reconnection. *Phys. Fluids B*, 4:3902, 1992.
- [84] V. Sergeev, A. Runov, W. Baumjohann, R. Nakamura, T. L. Zhang, and M. Volwerk. Current sheet flapping motion and structure observed by cluster. *Geophys. Res. Lett*, 30:1327, 2003.
- [85] M. Scholer, I. Sidorenko, C. H. Jaroschek, R. A. Treumann, and A. Zeiler. Onset of collisionless magnetic reconnection in thin current sheets: Three-dimensional particle simulations. *Phys. Plasmas*, 10:3521, 2003.
- [86] B. D. Fried and S. D. Conte. *The Plasma Dispersion Function*. Academic Press, New York, 1961.
- [87] T. H. Stix. *Waves in plasma*. American Institute of Physics, New York, 1992.
- [88] R. Farengo, P. N. Guzdar, and Y. C. Lee. Stabilization of lower hybrid drift modes by finite parallel wavenumber and electron temperature gradients in field-reversed configurations. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1:1654, 1989.
- [89] R. Farengo, P. N. Guzdar, and Y. C. Lee. The effect of magnetized ions on the lower hybrid drift instability in field reversed configurations. *Phys. Plasmas*, 31:3299, 1988.
- [90] V. Formisano, G. Moreno, and F. Palmiotto. Solar wind interaction with the earth's magnetic field, 1, magnetosheath. *J. Geophys. Res*, 78:3714, 1973.
- [91] D. A. Mendis and M. Rosenberg. Cosmic dusty plasma. *Annu. Rev. Astron. Astrophys*, 32:419, 1994.
- [92] J. D. Scudder, E. C. Sittler, and H. S. Bridge. A survey of the plasma electron environment of jupiter: A view from voyager. *J. Geophys. Res*, 86:8157, 1981.
- [93] E. Marsch, K.-H. Mühlhäuser, R. Schwenn, H. Rosenbauer, W. Pillip, and F. M. Neubauer. Solar wind helium ions: Observations of the helios solar probes between 0.3 and 1 au. *J. Geophys. Res*, 87:52, 1982.
- [94] M. I. Sitnov, A. T. Y. Lui, P. N. Guzdar, and P. H. Yoon. Current-driven instabilities in forced current sheets. *J. Geophys. Res*, 109:A03205, 2003.
- [95] G. Lapenta and J. U. Brackbill. A kinetic theory for the drift-kink instability. *J. Geophys. Res*, 102:27099, 1997.
- [96] R. L. Mace. A gordeyev integral for electrostatic waves in a magnetized plasma with a kappa velocity distribution. *Phys. Plasmas*, 10:2181, 2003.
- [97] R. L. Mace. Generalized electron bernstein modes in a plasma with a kappa velocity distribution. *Phys. Plasmas*, 11:507, 2004.
- [98] T. Cattaert, M. A. Hellberg, and R. L. Mace. Oblique propagation of electromagnetic waves in a kappa-maxwellian plasma. *Phys. Plasmas*, 14:082111, 2007.
- [99] M. N. S. Qureshi, H. A. Shah, G. Murtaza, S. J. Schwartz, and F. Mahmood. Parallel propagating electromagnetic modes with the generalized (r,q) distribution function. *Phys. Plasmas*,

- 11:3819, 2004.
- [100] F. L. Xiao, Q. Zhou, H. Zheng, and S. Wang. Whistler instability threshold condition of energetic electrons by kappa distribution in space plasmas. *J. Geophys. Res*, 111:A08208, 2006.
 - [101] H. Karimabadi, W. Daughton, P. L. Pritchett, and D. Krauss-Varban. Ion-ion kink instability in the magnetotail:1. linear theory. *J. Geophys. Res*, 108:1400, 2003.
 - [102] P. H. Yoon, A. T. Lui, and M. I. Sitnov. Generalized lower-hybrid drift instabilities in current sheet equilibrium. *Phys. Plasmas*, 9:1526, 2002.
 - [103] W. Wan and G. Lapenta. Electron self-reinforcing process of magnetic reconnection. *Phys. Rev. Lett*, 101:015001, 2008.
 - [104] P. Ricci, J. U. Brackbill, W. Daughton, and G. Lapenta. Collisionless magnetic reconnection in the presence of a guide field. *Physics of Plasmas*, 11:4102, 2004.
 - [105] N. Bessho and A. Bhattacharjee. Fast collisionless reconnection in electron-positron plasmas. *Phys. Plasmas*, 14:056503, 2007.
 - [106] N. A. Krall and P. C. Liewer. Low-frequency instabilities in magnetic pulses. *Phys. Rev. A*, 4:2094, 1971.
 - [107] M. Hesse. Dissipation in magnetic reconnection with a guide magnetic field. *Phys. Plasmas*, 13:122107, 2006.
 - [108] E. Camporeale, G. Luca Delzanno, G. Lapenta, and W. Daughton. New approach for the study of linear vlasov stability of inhomogeneous systems. *Phys. Plasmas*, 13:092110, 2006.
 - [109] M. A. Shay, J. F. Drake, and M. Swisdak. Two-scale structure of the electron dissipation region during collisionless magnetic reconnection. *Phys. Rev. Lett*, 99:155002, 2007.
 - [110] J. P. Freidberg and R. L. Morse. Collisionless tearing mode instabilities in a high-beta theta pinch. *Phys. Fluids*, 12:887, 1969.
 - [111] Hantao Ji, Russell Kulsrud, William Fox, and Masaaki Yamada. An obliquely propagating electromagnetic drift instability in the lower hybrid frequency range. *J. Geophys. Res*, 110:A08212, 2005.
 - [112] Yi-Hsin Liu, M. Swisdak, and J. F. Drake. The weibel instability inside the electron-positron harris sheet. *Phys. Plasmas*, 16:042101, 2009.

附录 一些公式的推导

A.1 Kappa-Maxwell电流片的扰动分布函数

平衡分布函数:

$$f_{0\alpha} = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^2 v_{t\alpha\parallel}} \left(a(x) + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-1} \exp \left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right)$$

其中

$$a(x) \equiv 1 - \frac{q_\alpha U_\alpha A_0(x)}{\kappa T_\alpha c}$$

其速度空间梯度:

$$\begin{aligned} \nabla_v f_{0\alpha} &= -\frac{2v_x}{v_{t\alpha}^2} G_\alpha \mathbf{e}_x - \frac{2(v_y - U_\alpha)}{v_{t\alpha}^2} G_\alpha \mathbf{e}_y - \frac{2v_z}{v_{t\alpha\parallel}^2} f_{0\alpha} \mathbf{e}_z \\ &= \left(-\frac{2\mathbf{v}}{v_{t\alpha}^2} + \frac{2U_\alpha \mathbf{e}_y}{v_{t\alpha}^2} \right) G_\alpha + \frac{2v_z \mathbf{e}_z}{v_{t\alpha}^2} G_\alpha - \frac{2v_z \mathbf{e}_z}{v_{t\alpha\parallel}^2} f_{0\alpha} \end{aligned}$$

其中

$$G_\alpha = \frac{N_\alpha}{\pi^{3/2} v_{t\alpha}^2 v_{t\alpha\parallel}} \frac{\kappa + 1}{\kappa} \left(a + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right)^{-\kappa-2} \exp \left(-\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right)$$

轨道积分的电磁场部分:

$$\begin{aligned} & -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \\ &= -i\mathbf{k}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} + \frac{i}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{k} - \frac{i}{c} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{A} \\ & -\frac{v_x}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{e}_y - \frac{v_x}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_z + \frac{v_y}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{v_z}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

速度空间梯度的第一部分(各向同性部分)与电磁场部分的乘积:

$$\begin{aligned} & \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \right) \cdot \left(-\frac{2\mathbf{v}}{v_{t\alpha}^2} + \frac{2U_\alpha \mathbf{e}_y}{v_{t\alpha}^2} \right) G_\alpha \\ &= \frac{2G_\alpha}{v_{t\alpha}^2} i(\omega - k_y U_\alpha) \left(\varphi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \\ & + \frac{2G_\alpha}{v_{t\alpha}^2} \left[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) \varphi + \frac{i\omega - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} A_y U_\alpha - \frac{v_x}{c} \frac{\partial A_y}{\partial x} U_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_x \right] \end{aligned}$$

上式经过轨道积分 $-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau$ 作用, 并除去相因子 $\exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$ 后结果为:

$$\begin{aligned} & -\frac{q_\alpha G_\alpha}{T_\alpha} \left[\hat{\varphi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right] - \frac{q_\alpha G_\alpha}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) \\ & \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{A}}(x')}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) + ik_z(z' - z) - i\omega\tau] \end{aligned}$$

速度空间梯度的第二部（各向异性部分）与电磁场部分的乘积：

$$\begin{aligned} & \left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} \right) \cdot v_z \mathbf{e}_z \left(\frac{2G_\alpha}{v_{t\alpha}^2} - \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right) \\ &= \left(\frac{2G_\alpha}{v_{t\alpha}^2} - \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right) \left[\varsigma - ik_z v_z \left(\varphi - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

其中的：

$$\varsigma = v_z \left[i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{A_z}{c} - \frac{v_x}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right]$$

经过轨道积分出来一个绝热项：

$$\int_{-\infty}^t \varsigma dt' = -\frac{\hat{A}_z(x) v_z}{c} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$$

这样，(A.1)经过轨道积分 $-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau$ 作用后产生的项为：

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\frac{2G_\alpha}{v_{t\alpha}^2} - \frac{2f_{0\alpha}}{v_{t\alpha\parallel}^2} \right) \left[\left(-\frac{\hat{A}_z(x) v_z}{c} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \right) - ik_z v_z \int_{-\infty}^0 d\tau \left(\varphi - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{A}}{c} \right) \right]$$

除去相因子 $\exp(ik_y y + ik_z z - i\omega t)$ 后写为：

$$\left(\frac{q_\alpha G_\alpha}{T_\alpha} - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_{\alpha\parallel}} \right) \left(\frac{\hat{A}_z(x) v_z}{c} \right) + \left(\frac{q_\alpha G_\alpha}{T_\alpha} - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_{\alpha\parallel}} \right) ik_z v_z R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z)$$

其中：

$$\begin{aligned} & R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) \\ & \equiv \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x') + v_z \hat{A}_z(x')}{c} \right] \\ & \times \exp[ik_y(y' - y) + ik_z v_z \tau - i\omega \tau] \end{aligned}$$

以上已经把 z 方向上的未扰轨道表达式代入。

对温度各向异性的Harris电流片情况，只要将上面表达式中的 G_α 替换为 F_α 即可。

A.2 扰动分布函数对 v_z 的积分

对Kappa-Maxwell电流片，因各向异性而产生的扰动分布函数项为：

$$\left(\frac{q_\alpha G_\alpha}{T_\alpha} - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_{\alpha\parallel}} \right) \left(\frac{A_z(x) v_z}{c} \right) + \left(\frac{q_\alpha G_\alpha}{T_\alpha} - \frac{q_\alpha f_{0\alpha}}{T_{\alpha\parallel}} \right) ik_z v_z R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z)$$

其中的绝热部分积分后对扰动量 ρ , J_x , J_y 无贡献，无需考虑。以下来处理共振部分对 v_z 的积分。

$$K \equiv \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2}\right) ik_z v_z R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} K dv_z \\
 &= ik_z v_{t\alpha\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2}\right) \frac{v_z}{v_{t\alpha\parallel}} R_\alpha(x, v_x, v_y, v_z) \\
 &= ik_z v_{t\alpha\parallel} \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c} \right] C_z - \frac{v_{t\alpha\parallel} \hat{A}_z(x')}{c} D_z \right\} \\
 &\quad \times \exp[ik_y(y' - y) - i\omega\tau]
 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 C_z &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{v_z}{v_{t\alpha\parallel}} \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2} + ik_z v_z \tau\right) \\
 D_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{v_z}{v_{t\alpha\parallel}}\right)^2 dv_z \exp\left(\frac{v_z^2}{v_{t\alpha\parallel}^2} + ik_z v_z \tau\right)
 \end{aligned}$$

容易作出以上的两个积分:

$$\begin{aligned}
 C_z &= v_{t\alpha\parallel} \frac{ik_z v_{t\alpha\parallel} \tau}{2} \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-k_z^2 v_{t\alpha\parallel}^2 \tau^2}{4}\right) \\
 D_z &= v_{t\alpha\parallel} \frac{2 - k_z^2 v_{t\alpha\parallel}^2 \tau^2}{4} \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{-k_z^2 v_{t\alpha\parallel}^2 \tau^2}{4}\right)
 \end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} K dv_z \\
 &= ik_z v_{t\alpha\parallel} \times \sqrt{\pi} v_{t\alpha\parallel} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c} \right] \left(\frac{ik_z v_{t\alpha\parallel} \tau}{2} \right) - \frac{v_{t\alpha\parallel} \hat{A}_z(x')}{c} \left(\frac{2 - k_z^2 v_{t\alpha\parallel}^2 \tau^2}{4} \right) \right\} \\
 &\quad \times \exp[ik_y(y' - y) - \frac{k_z^2 v_{t\alpha\parallel}^2 \tau^2}{4} - i\omega\tau]
 \end{aligned}$$

定义: $\omega_{z\alpha} = ik_z v_{t\alpha\parallel}/2$, 则上式写为:

$$\begin{aligned}
 &= 2\omega_{z\alpha} \times \sqrt{\pi} v_{t\alpha\parallel} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[\hat{\varphi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c} \right] \omega_{z\alpha} \tau - \frac{v_{t\alpha\parallel} \hat{A}_z(x')}{c} \left(\frac{1}{2} + w_{z\alpha}^2 \tau^2 \right) \right\} \\
 &\quad \times \exp[ik_y(y' - y) + w_{z\alpha}^2 \tau^2 - i\omega\tau]
 \end{aligned}$$

A.3 轨道积分化为一个周期内的积分

定义:

$$\begin{aligned}
 S_{z\alpha}(x, v_x, v_y) &\equiv \\
 &\int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ g(\tau) \omega_{z\alpha} \tau + \frac{v_{t\alpha\parallel}}{v_{t\alpha}} h(\tau) \left(\frac{1}{2} + w_{z\alpha}^2 \tau^2 \right) \right\} \exp[ik_y(y' - y) + w_{z\alpha}^2 \tau^2 - i\omega\tau]
 \end{aligned}$$

其中：

$$g(\tau) = \varphi(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c}$$

$$h(\tau) = -\frac{v_{t\alpha} \hat{A}_z(x')}{c}$$

定义积分：

$$I_n \equiv \int_{-(n+1)t_{p\alpha}}^{-nt_{p\alpha}} d\tau \left[g(\tau) \omega_{z\alpha} \tau + \frac{v_{t\alpha\parallel}}{v_{t\alpha}} h(\tau) \left(\frac{1}{2} + w_{z\alpha}^2 \tau^2 \right) \right] \exp[ik_y Y'(\tau) + \omega_{z\alpha}^2 \tau^2 - i\omega \tau]$$

作变量代换 $\tau' \equiv \tau + nt_{p\alpha}$ ，以上的积分化为：

$$I_n = \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau' \left[g(\tau') \omega_{z\alpha} (\tau' - nt_{p\alpha}) + \frac{v_{t\alpha\parallel}}{v_{t\alpha}} h(\tau') \left(\frac{1}{2} + w_{z\alpha}^2 (\tau' - nt_{p\alpha})^2 \right) \right]$$

$$\times \exp[ik_y Y'(\tau') - ik_y n \Delta_\alpha + \omega_{z\alpha}^2 (\tau' - nt_{p\alpha})^2 - i\omega (\tau' - nt_{p\alpha})]$$

定义：

$$l_n(\tau') = \exp[i(\omega t_{p\alpha} - k_y \Delta_\alpha) n + \omega_{z\alpha}^2 (\tau' - nt_{p\alpha})^2]$$

I_n 写为：

$$I_n = \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau' \left[g(\tau') \omega_{z\alpha} (\tau' - nt_{p\alpha}) + \frac{v_{t\alpha\parallel}}{v_{t\alpha}} h(\tau') \left(\frac{1}{2} + w_{z\alpha}^2 (\tau' - nt_{p\alpha})^2 \right) \right]$$

$$\times l_n(\tau') \exp[ik_y Y'(\tau') - i\omega \tau']$$

轨道积分写为：

$$S_{z\alpha} = \xrightarrow{t_{p\alpha} > 0} \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$$

$$= \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau' \left[g(\tau') C_2 + \frac{v_{t\alpha\parallel}}{v_{t\alpha}} h(\tau') C_3 \right] \exp[ik_y Y'(\tau') - i\omega \tau']$$

这样就把轨道积分化为一个周期时间内的积分。其中的 C_1 和 C_2 是两个无穷求和：

$$C_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n(\tau') \omega_{z\alpha} (\tau' - nt_{p\alpha})$$

$$C_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n(\tau') \left(\frac{1}{2} + w_{z\alpha}^2 (\tau' - nt_{p\alpha})^2 \right)$$

A.4 $k_z = 0$ 时Kappa电流片的扰动电荷电流密度的表达式

扰动电荷密度:

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(x) &\equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) \\ &= -\frac{q_\alpha^2 N_0}{T_\alpha} \left\{ \left(\hat{\phi}(x) - \frac{U_\alpha}{c} \hat{A}_y(x) \right) \frac{\kappa - 1/2}{\kappa} \left(1 - \frac{U_\alpha q_\alpha A_0(x)}{\kappa T_\alpha c} \right)^{-\kappa-1/2} \right. \\ &\quad \left. - (\omega - k_y U_\alpha) \frac{i}{\pi v_{t\alpha}^2} \frac{\kappa^2 - 1/4}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 - \frac{U_\alpha q_\alpha A_0(x)}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right]^{-\kappa-3/2} S_\alpha \right\}\end{aligned}$$

x 方向的扰动电流密度:

$$\begin{aligned}J_{\alpha x}(x) &\equiv q_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f_{1\alpha}(x, \mathbf{v}) \\ &= -\frac{q_\alpha^2 N_0}{T_\alpha} i(\omega - k_y U_\alpha) \frac{1}{\pi v_{t\alpha}^2} \frac{\kappa^2 - 1/4}{\kappa^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \\ &\quad \times \left[1 - \frac{U_\alpha q_\alpha A_0(x)}{\kappa T_\alpha c} + \frac{v_x^2 + (v_y - U_\alpha)^2}{\kappa v_{t\alpha}^2} \right]^{-\kappa-3/2} S_\alpha\end{aligned}$$

其中

$$S_\alpha = \frac{1}{1 - \exp[i(\omega t_{p\alpha} - k_y \Delta_\alpha)]} I_0$$

其中

$$I_0 = \int_{-t_{p\alpha}}^0 d\tau \left[\hat{\phi}(x') - \frac{v'_x \hat{A}_x(x') + v'_y \hat{A}_y(x')}{c} \right] \exp[ik_y(y' - y) - i\omega\tau]$$

致 谢

首先我要感谢我的导师杨维纮教授。课题的开展和论文的写作都是在杨老师精心指导下完成的。杨老师治学严谨, 科研经验丰富, 在很多问题上的敏锐洞察力给了我很多启迪。杨老师严肃的科学态度, 严谨的治学精神, 精益求精的工作作风, 一直深深地感染和激励着我。杨老师平易近人, 对我的学习和生活都给予了很多关心, 使我在科大度过了愉快而又充实的五年时光。

我要特别感谢我的另一位导师陈银华教授, 在课题的开展过程中得到了陈老师很多无私的帮助。在论文的写作和修改过程中, 陈老师花费了大量宝贵的时间审阅并批改论文, 从而使最终的论文质量有了很大提高。参加陈老师组织的小组讨论也使我受益匪浅。

我要感谢王少杰教授和马锦秀教授, 感谢王老师和马老师对我的帮助和鼓励。

感谢曾与我一起学习和工作的同学, 和他们的很多讨论使我受益匪浅, 他们是: 谭立伟, 王舸, 马骏, 蔡辉山, 张羽, 王亮, 王飞虎, 王栋, 曹金涛, 黄凤, 任海骏, 胡祖权, 彭海鸥, 邹丹丹, 谢卿, 时贵芬, 杨晓庆, 郑翔。感谢我的家人多年来对我的学业的支持。

最后, 再次感谢所有曾经关心、帮助过我的人!

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

- [1] Youjun Hu, Weihong Yang, Yinhua Chen. Collisionless tearing mode in anisotropic current sheets (To be submitted)
- [2] Youjun Hu, Weihong Yang, Yinhua Chen, Feng Huang, and Yu Zhang. Drift kink instability in the current sheet with a kappa-distribution. *Phys. Plasmas* 15 082114 (2008)
- [3] Hu Youjun, Yang Weihong, Chen Yinhua, Huang Feng, Wang Feihu, Zhang Yu and Wang Dong. Lower-Hybrid Drift Instability in Modified Harris Current Sheet. *Plasma Sci. Technol.* 10 416-421 (2008)
- [4] 胡友俊, 杨维弘, 陈银华, 张羽. 磁化非均匀等离子体中模转换机制对电磁波吸收的数值研究. *计算物理* 2007年24卷3期
- [5] Yu Zhang, Wei-Hong Yang, J. X. Ma and You-Jun Hu. Characteristics of dust-ion-acoustic shock in inhomogeneous plasma by WENO scheme simulation. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 40 7412-7418 (2007)
- [6] Yu Zhang, Wei-Hong Yang, J. X. Ma, De-Long Xiao and You-Jun Hu. Numerical study of dust-ion-acoustic solitary waves in an inhomogeneous plasma. *Planetary and Space Sci.* 56 510-518 (2008)