BÀI GIẢNG PHƯƠNG PHÁP TÍNH
CHƯƠNG 2-GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH
BÀI 3. PHƯƠNG PHÁP NEWTON

TS. NGUYỄN ĐÌNH DƯƠNG
BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

Email: duongnd@hcmut.edu.vn

Ngày 15/02/2021

Nội dung

Nội dung

1. Phương pháp Newton

1. 1. Công thức lặp

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ có dạng

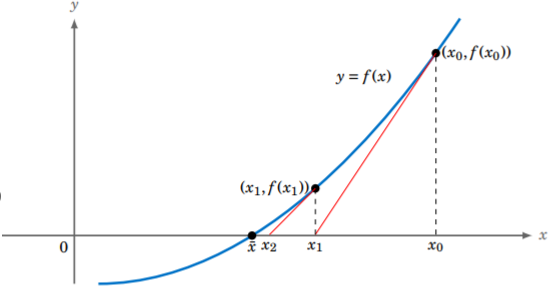
$$y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$$

1. Phương pháp Newton

1. 1. Công thức lặp

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0$$



Hoành độ của giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành là:

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \text{ hay } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

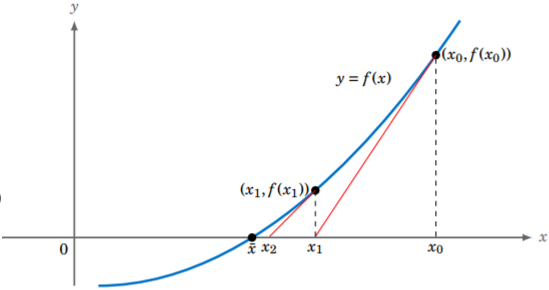
1. Phương pháp Newton

1. 1. Công thức lặp

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ có dạng

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0$$

Hoành độ của giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành là:



$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \text{ hay } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Nói chung, tại bước lặp x_k, sử dụng $f(x_k)$ và $f'(x_k)$ để dự đoán điểm $f(x)$ cắt trục hoành:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

1. Phương pháp Newton

Khai triển Taylor $f(x)$ trong lân cận x_k

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2 + \dots$$

Bỏ qua các số hạng từ bậc 2 ta được

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$$

Mục tiêu: tìm x^* thỏa mãn $f(x^*) = 0$. nên cho $f(x_{k+1}) = 0$.

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$$

giải tìm x_{k+1}

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \tag{1}$$

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.1

Giải phương trình với khoảng phân ly $[3;4]$:

$$x - x^{1/3} - 2 = 0$$

Đạo hàm

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

Công thức lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3} x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3		

1. Phương pháp Newton

1. 1. Công thức lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	

1. Phương pháp Newton

1. 1. Công thức lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3} x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	−0.44224957

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	-0.44224957
1	3.52664429		

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	−0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	

1. Phương pháp Newton

1. 1. Công thức lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	−0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	-0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679
2	3.52138015		

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3} x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	−0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679
2	3.52138015	0.85598641	

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	-0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679
2	3.52138015	0.85598641	3.771×10^{-7}

1. Phương pháp Newton

$$\begin{cases} x_0 = 3, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - x_k^{1/3} - 2}{1 - \frac{1}{3}x_k^{-2/3}} \end{cases}$$

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x)$
0	3	0.83975005	-0.44224957
1	3.52664429	0.85612976	0.00450679
2	3.52138015	0.85598641	3.771×10^{-7}
3	3.52137971	0.85598640	2.664×10^{-15}
4	3.52137971	0.85598640	0.0

1. Phương pháp Newton

Định lý 1.1

Cho phương trình $f(x) = 0$ *có khoảng phân ly* $[a;b]$. *Giả sử* $f \in C^2[a;b]$ *và* f', f'' *không đổi dấu trong* (a,b). *Nếu xấp xỉ ban đầu* $x_0 \in [a;b]$ *được chọn sao cho* $f(x_0)f''(x_0) > 0$ *thì dãy* $\{x_k\}$ *xác định bởi* (1) *hội tụ về* x^*. *Ngoài ra, nếu tồn tại* M_1, M_2 *thỏa mãn* $\begin{cases} |f'(x)| \geq M_1 \\ |f''(x)| \leq M_2 \end{cases}, \quad \forall x \in [a;b]$ *thì*

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2M_1}|x_{k-1} - x^*|^2. \tag{2}$$

Điểm x_0 thỏa mãn $f(x_0)f''(x_0) > 0$ được gọi là *điểm Fouier*.

1. Phương pháp Newton

1. 2. Sự hội tụ và sai số

Phương pháp Newton có *tốc độ hội tụ bậc 2* (quadratic) khi $f'(x_k) \neq 0$.

Thật vậy, với ξ nằm giữa x_k và x^*

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\xi) = 0$$

Khi đó

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x^* - x_k + (x^* - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)} = 0$$

Thay x_{k+1} bởi (1)

$$x^* - x_{k+1} + (x^* - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)} = 0$$

Do đó

$$x^* - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)} (x^* - x_k)^2$$

Nếu $\{x_k\}$ hội tụ thì ξ và x_k đều xấp xỉ x^*, do đó

$$x^* - x_{k+1} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} (x^* - x_k)^2 .$$

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.2

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0; 0.5]$. Bằng phương pháp Newton, tính nghiệm xấp xỉ x_3 và đánh giá sai số x_3.

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.2

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0; 0.5]$. Bằng phương pháp Newton, tính nghiệm xấp xỉ x_3 và đánh giá sai số x_3.

Giải

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0, f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0; 0.5]$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0; 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$.

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.2

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0; 0.5]$. Bằng phương pháp Newton, tính nghiệm xấp xỉ x_3 và đánh giá sai số x_3.

Giải

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0, f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0; 0.5]$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0; 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$.
Ta xây dựng dãy x_n theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

1. Phương pháp Newton

1. 2. Sự hội tụ và sai số

Ví dụ 1.2

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0; 0.5]$. Bằng phương pháp Newton, tính nghiệm xấp xỉ x_3 và đánh giá sai số x_3.

Giải

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0, f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0; 0.5]$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0; 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$.
Ta xây dựng dãy x_n theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Từ đó tính được $x_1 = 0.3333$,

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.2

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0; 0.5]$. Bằng phương pháp Newton, tính nghiệm xấp xỉ x_3 và đánh giá sai số x_3.

Giải

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0, f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0; 0.5]$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0; 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$.
Ta xây dựng dãy x_n theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Từ đó tính được $x_1 = 0.3333$, $x_2 = 0.3472$,

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.2

Cho phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0; 0.5]$. Bằng phương pháp Newton, tính nghiệm xấp xỉ x_3 và đánh giá sai số x_3.

Giải

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0, f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0; 0.5]$ và $f''(x) = 6x \geqslant 0, \forall x \in [0; 0.5]$ nên chọn $x_0 = 0$.
Ta xây dựng dãy x_n theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} = \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Từ đó tính được $x_1 = 0.3333$, $x_2 = 0.3472$, $x_3 = 0.3473$.

1. Phương pháp Newton

Đánh giá sai số

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(0.5)|\} = \dfrac{9}{4} = m.$

1. Phương pháp Newton

1. 2. Sự hội tụ và sai số

Đánh giá sai số

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(0.5)|\} = \dfrac{9}{4} = m.$

Do đó nghiệm gần đúng x_3 được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác x^* như sau

$$|x_3 - x^*| \leqslant \frac{|f(x_3)|}{m} = \frac{|x_3^3 - 3x_3 + 1|}{9/4} \approx 2.55 \times 10^{-9} = \Delta_{x_3}$$

1. Phương pháp Newton

1. 2. Sự hội tụ và sai số

Ví dụ 1.3

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1;2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.3

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1;2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải

Ta có

$$\begin{cases} f'(x) = e^x - 2^{-x}\ln 2 - 2\sin x \\ f''(x) = e^x + 2^{-x}(\ln 2)^2 - \cos x > 0 \end{cases}$$

1. Phương pháp Newton

Ví dụ 1.3

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1;2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải

Ta có

$$\begin{cases} f'(x) = e^x - 2^{-x}\ln 2 - 2\sin x \\ f''(x) = e^x + 2^{-x}(\ln 2)^2 - \cos x > 0 \end{cases}$$

Do $f(2)f''(2) > 0$ nên ta chọn $x_0 = 2$. Xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2^{-x_{n-1}} + 2\cos x_{n-1} - 6}{e^{x_{n-1}} - 2^{-x_{n-1}}\ln 2 - 2\sin x_{n-1}}.$$

1. Phương pháp Newton

Lại có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = 0.688 = m$. Khi đó

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|e^{x_n} + 2^{-x_n} + 2\cos x_n - 6|}{0.688} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	2	
1	1.850521336	0.1283
2	1.829751202	2.19×10^{-3}
3	1.829383715	6.7×10^{-7}

Tổng kết

- Phương pháp Newton có thể xem là phương pháp lặp với hàm lặp:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Phương pháp Newton hội tụ nhanh hơn so với phương pháp lặp đơn và phương pháp chia đôi
- Phương pháp Newton đòi hỏi công thức giải tích của $f'(x)$
- Dãy lặp có thể chạy ra ngoài khoảng phân ly .

Câu 1

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1.3; 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Câu 1

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1.3; 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Lời giải

Câu 1

Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1.3; 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Lời giải

Ta có $f(1.3) < 0, f(2) > 0, f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sin(x-1) > 0, \forall x \in [1.3, 2]$ và $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \cos(x-1) < 0, \forall x \in [1.3, 2]$ nên chọn $x_0 = 1.3$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)}{\frac{1}{x_{n-1}-1} - \sin(x_{n-1}-1)}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1.3)|, |f'(2)|\} = 0.158 = m$. Khi đó

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)|}{0.158} = \Delta_{x_n}$$

1. Phương pháp Newton

1. 2. Sự hội tụ và sai số

n	x_n	Δ_{x_n}
0	1.3	
1	1.38184714	0.21998
2	1.397320733	$5.76.10^{-3}$
3	1.397748164	$4.199.10^{-6}$

Nội dung

TRAO ĐỔI