Chapitre 1: Les séries numériques

partie 1

Safouane TAOUFIK

UM6P-CC

Table of Contents

Motivations et Généralités

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Vous courez avec votre petit frère, qui est plus lent que vous. Pour lui donner une chance, vous lui laissez une avance de d_0.

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Vous courez avec votre petit frère, qui est plus lent que vous. Pour lui donner une chance, vous lui laissez une avance de d_0. Pendant que vous parcourez cette distance, il avance encore de d_1.

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Vous courez avec votre petit frère, qui est plus lent que vous. Pour lui donner une chance, vous lui laissez une avance de d_0. Pendant que vous parcourez cette distance, il avance encore de d_1. Ensuite, lorsque vous parcourez d_1, il progresse de d_2, et ainsi de suite...

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Vous courez avec votre petit frère, qui est plus lent que vous. Pour lui donner une chance, vous lui laissez une avance de d_0. Pendant que vous parcourez cette distance, il avance encore de d_1. Ensuite, lorsque vous parcourez d_1, il progresse de d_2, et ainsi de suite...
La question est : Arriverez-vous à le rattraper un jour ?

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Pour être plus concret on prend $d_0 = 1$ et on suppose que votre vitesse et le double de celle de votre frère. Calculons la distance d que vous allez parcourir pour rattraper votre frère.

Pour être plus concret on prend $d_0 = 1$ et on suppose que votre vitesse et le double de celle de votre frère. Calculons la distance d que vous allez parcourir pour rattraper votre frère.

1. **Première approche :** Calculez $d_1, d_2, ..., d_n, ...$

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Pour être plus concret on prend $d_0 = 1$ et on suppose que votre vitesse et le double de celle de votre frère. Calculons la distance d que vous allez parcourir pour rattraper votre frère.

1. **Première approche :** Calculez $d_1, d_2, ..., d_n, ...$
   $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{4}, ..., d_n = \frac{1}{2^n}, ...$

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Pour être plus concret on prend $d_0 = 1$ et on suppose que votre vitesse et le double de celle de votre frère. Calculons la distance d que vous allez parcourir pour rattraper votre frère.

1. **Première approche :** Calculez $d_1, d_2, ..., d_n, ...$
   $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{4}, ..., d_n = \frac{1}{2^n}, ...$
   Donc $d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... =?$

Motivation :(Paradoxe de Zénon)

Pour être plus concret on prend $d_0 = 1$ et on suppose que votre vitesse et le double de celle de votre frère. Calculons la distance d que vous allez parcourir pour rattraper votre frère.

1. **Première approche :** Calculez $d_1, d_2, ..., d_n, ...$
   $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{4}, ..., d_n = \frac{1}{2^n}, ...$
   Donc $d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... =?$
2. **Deuxième approche :** $d = d_0 + \frac{d}{2} \implies d = 2$

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

On appelle série de terme général u_n la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle d'ordre n et notée S_n

La série est notée simplement $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Généralités

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

On appelle série de terme général u_n la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

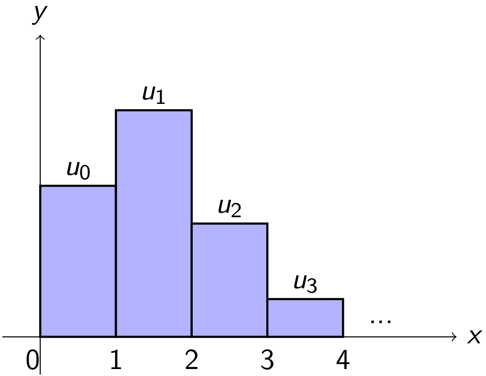
$\sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé somme partielle d'ordre n et notée S_n

La série est notée simplement $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

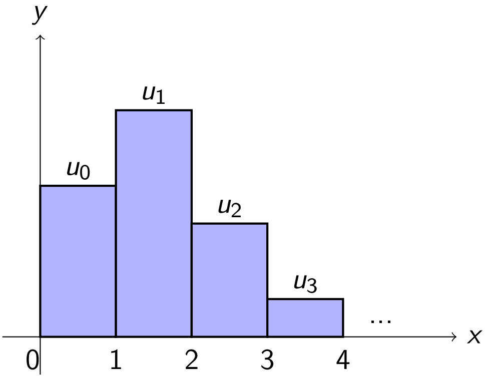
Remarque 1.1 : Une série est donc une suite. Une suite quelconque est-elle une série ?

Généralités

On peut voir la somme partielle d'ordre n comme la somme des aires des rectangles de dimension $1 \times u_k$, comme représenté dans la figure suivante :



On peut voir la somme partielle d'ordre n comme la somme des aires des rectangles de dimension $1 \times u_k$, comme représenté dans la figure suivante :



Exemple 1.1 : Donner une expression simplifiée à la série $\sum_n n$

(l'interprétation géométrique peut vous être utile.)

Généralités

Définition 1.2

La série $\sum u_n$ est dite convergente si sa suite des somme partielles est convergente. Sa limite est appelé somme de la série est notée $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition 1.2

La série $\sum u_n$ est dite convergente si sa suite des somme partielles est convergente. Sa limite est appelé somme de la série est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 1.2 :

Étudier la nature des deux séries précédentes. $(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\geq 0} n)$

Définition 1.2

La série $\sum u_n$ est dite convergente si sa suite des somme partielles est convergente. Sa limite est appelé somme de la série est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 1.2 :

Étudier la nature des deux séries précédentes. $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \text{ et } \sum_{n\geq 0} n\right)$

Exercice 1.1 :

Étudier les séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ **2.** $\sum_{n\geq 0} q^n$ **3.** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n-1)}$ **5.** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ **6.** $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Proposition 1.1

Si la série est convergente alors son terme générale converge vers 0.

Proposition 1.1

Si la série est convergente alors son terme générale converge vers 0.

Exercice 1.2 : Montrer cette proposition.

Proposition 1.1

Si la série est convergente alors son terme générale converge vers 0.

Exercice 1.2 : Montrer cette proposition.

Remarque 1.2 :

Par contraposée, si la suite ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. On dit dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

Proposition 1.1

Si la série est convergente alors son terme générale converge vers 0.

Exercice 1.2 : Montrer cette proposition.

Remarque 1.2 :

Par contraposée, si la suite ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. On dit dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

Question : Est ce qu'on a la réciproque ?

Exemple 1.3 : Dans les exemples précédents, lesquels sont des résultats directs de cette proposition ?

Proposition 1.1

Si la série est convergente alors son terme générale converge vers 0.

Exercice 1.2 : Montrer cette proposition.

Remarque 1.2 :

Par contraposée, si la suite ne tend pas vers 0, alors la série est divergente. On dit dans ce cas que la série **diverge grossièrement**.

Question : Est ce qu'on a la réciproque ?

Exemple 1.3 : Dans les exemples précédents, lesquels sont des résultats directs de cette proposition ?

Exercice 1.3 : Étudier la série $\sum u_n$:

1. $u_n = e^{-\frac{1}{n^2}}$
2. $u_n = \cos(n)$.
3. $u_n = n\sin(\frac{1}{n})$

Proposition 1.2

1. Les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.
2. La nature de la série ne change si on modifie un nombre fini de termes.

Généralités

Proposition 1.2

1. Les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.
2. La nature de la série ne change si on modifie un nombre fini de termes.

Définition 1.3

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle le reste d'ordre n de cette série la quantité R_n définie par : $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Généralités

Proposition 1.2

1. Les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.
2. La nature de la série ne change si on modifie un nombre fini de termes.

Définition 1.3

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle le reste d'ordre n de cette série la quantité R_n définie par : $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1.3

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n$

Généralités

Proposition 1.4

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

1. $\sum \lambda u_n$ est convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
2. $\sum (u_n + v_n)$ est convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
3. $\sum \overline{u_n}$ est convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$
4. $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ converge. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$

Théorème 1.1

La série $\sum u_n$ converge ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \left|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\right| < \epsilon$$

Exemple 1.4 : Montrer que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Séries à termes de signe constant et convergence absolue

Proposition 2.1

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On a équivalence entre :

1. La série $\sum u_n$ converge ;
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Proposition 2.1

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On a équivalence entre :

1. La série $\sum u_n$ converge ;
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Corollaire 2.1

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$.
Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Proposition 2.1

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On a équivalence entre :

1. La série $\sum u_n$ converge ;
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Corollaire 2.1

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$.
Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Remarque 2.1 : Par contraposée, si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Exercice 2.1 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes :

1. $\sum \max(u_n, v_n)$
2. $\sum \sqrt{u_n v_n}$

Exercice 2.1 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes :

1. $\sum \max(u_n, v_n)$
2. $\sum \sqrt{u_n v_n}$

Définition 2.1

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exercice 2.1 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que les deux séries suivantes sont convergentes :

1. $\sum \max(u_n, v_n)$
2. $\sum \sqrt{u_n v_n}$

Définition 2.1

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 2.1 :

1. La série $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^2}$ converge absolument.
2. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.

Théorème 2.1

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Exemple 2.2 : La série $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge.

Théorème 2.2

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Théorème 2.2

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Corollaire 2.2

1. Si $u_n = \circ(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. si $u_n \sim v_n$ alors $\displaystyle\sum u_n$ converge absolument ssi $\displaystyle\sum v_n$ converge absolument.

Théorème 2.2

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Corollaire 2.2

1. Si $u_n = \circ(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge absolument ssi $\sum v_n$ converge absolument.

Exemple 2.3 : Étudier la série $\sum u_n$

1. $u_n = \dfrac{n^2 + n + 3}{n^3 + 2n + 6}$
2. $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(3n)}$

Règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert

Théorème 2.3

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty].$$

Alors

1. Si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Règle de d'Alembert

Théorème 2.3

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty[.$$

Alors

1. Si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque 2.2 : On ne peut rien conclure lorsque $l = 1$. En effet, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ illustrent ce cas : elles correspondent toutes deux à $l = 1$ dans le critère de d'Alembert, mais elles sont de nature différente, l'une divergeant et l'autre convergeant.

Exemple 2.4 :

1. $\sum \frac{n}{2^n}$
2. $\sum \frac{x^n}{n!}$

Règle de Cauchy

Règle de Cauchy

Théorème 2.4

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty].$$

Alors :

- Si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Règle de Cauchy

Théorème 2.4

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que

$$\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty[.$$

Alors :

- Si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque 2.3 : On ne peut rien conclure lorsque $l = 1$. En effet, les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ illustrent ce cas : elles correspondent toutes deux à $l = 1$ dans le critère de Cauchy, mais elles sont de nature différente, l'une divergeant et l'autre convergeant.

Exemple 2.5 : Étudier la série $\sum u_n$ dans les deux cas suivants :

1. $u_n = (\frac{n+1}{2n+1})^n$
2. $u_n = \begin{cases} 2^{-\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2^{-\frac{n+1}{2}}, & \text{sinon .} \end{cases}$

Remarque 2.4 : Remarquons que, pour le deuxième exemple, le critère de d'Alembert ne s'applique pas, alors que le critère de Cauchy fonctionne. On peut alors se demander : le critère de Cauchy est-il plus puissant, ou existe-t-il un exemple où le critère de d'Alembert s'applique alors que celui de Cauchy échoue ?

Proposition 2.2

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

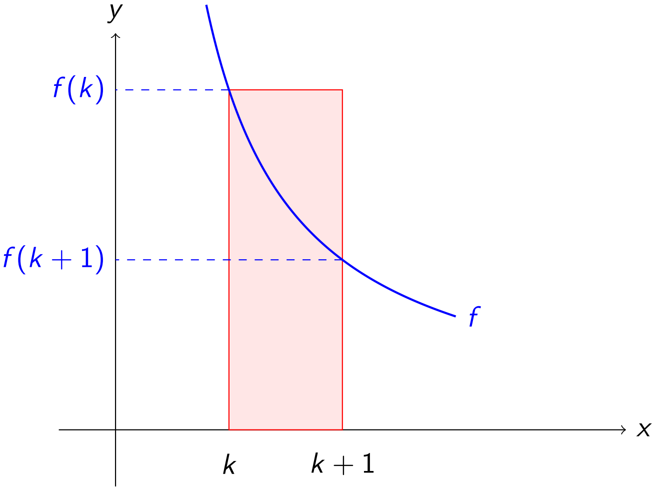
$$\text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in [0, +\infty] \text{ alors } \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$

Comparaison série-intégrale

Comparaison série-intégrale

Dans cette partie, ce qui est le plus intéressant, ce ne sont pas les théorèmes eux-mêmes, mais plutôt les techniques de démonstration. Les théorèmes sont donnés à titre d'exemples uniquement. Parfois, on se retrouve dans des situations légèrement similaires où les hypothèses ne sont pas entièrement vérifiées, mais où l'on peut obtenir des résultats analogues en utilisant des démonstrations similaires.
Dans toute la suite on considère que f est une fonction continue par morceaux.

Comparaison série-intégrale



Comparaison série-intégrale

Théorème 3.1

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante.

La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.

Comparaison série-intégrale

Théorème 3.2

Soit α un nombre réel. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Comparaison série-intégrale

Théorème 3.2

Soit α un nombre réel. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exemple 3.1 :

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 3.3

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante.

La suite $u_n := \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\, dt$ converge.

Comparaison série-intégrale

Théorème 3.3

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante.

La suite $u_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\, dt$ converge.

Remarque 3.1 : Ce théorème est plus puissant que le théorème 3.1, car il repose sur les mêmes hypothèses mais offre un résultat plus fort.

Comparaison série-intégrale

Théorème 3.3

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante.

La suite $u_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt$ converge.

Remarque 3.1 : Ce théorème est plus puissant que le théorème 3.1, car il repose sur les mêmes hypothèses mais offre un résultat plus fort.

Corollaire 3.1

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante.

Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ diverge (ou de manière équivalente $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ diverge), alors :

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{+\infty}{\sim} \int_0^n f(t)\,dt$$

Corollaire 3.2

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$$

en particulier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Remarque 3.2 : La constante γ est appelée la constante d'Euler.

Exercice 3.1 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Considérons $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et (quand $\alpha > 1$) $R_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Trouver un équivalent de S_n dans le cas ou $\alpha \leq 1$.
2. Trouver un équivalent de R_n dans le cas ou $\alpha > 1$.

Comparaison série-intégrale

Exercice 3.1 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Considérons $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et (quand $\alpha > 1$) $R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Trouver un équivalent de S_n dans le cas ou $\alpha \leq 1$.
2. Trouver un équivalent de R_n dans le cas ou $\alpha > 1$.

Exercice 3.2 : Soit $\alpha > 0$ étudier la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}$$

Sommation des relations de comparaison

Sommation des relations de comparaison

Théorème 4.1

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à terme positif.

1. Si $\sum v_n$ converge. (**On note :** $R_n^u := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n^v := \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$).
   1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ alors $R_n^u = \mathcal{O}(R_n^v)$
   2. Si $u_n = \circ(v_n)$ alors $R_n^u = \circ(R_n^v)$
   3. Si $u_n \sim (v_n)$ alors $R_n^u \sim (R_n^v)$

Sommation des relations de comparaison

Théorème 4.1

Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à terme positif.

1. Si $\sum v_n$ converge. (**On note :** $R_n^u := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_n^v := \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$).
   1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ alors $R_n^u = \mathcal{O}(R_n^v)$
   2. Si $u_n = \circ(v_n)$ alors $R_n^u = \circ(R_n^v)$
   3. Si $u_n \sim (v_n)$ alors $R_n^u \sim (R_n^v)$
2. Si $\sum v_n$ diverge. (**On note :** $S_n^u := \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n^v := \sum_{k=0}^{n} v_k$)
   1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ alors $S_n^u = \mathcal{O}(S_n^v)$
   2. Si $u_n = \circ(v_n)$ alors $S_n^u = \circ(S_n^v)$
   3. Si $u_n \sim (v_n)$ alors $S_n^u \sim (S_n^v)$

Exemple 4.1 : Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}$

Exemple 4.2 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique qui converge vers l.
Montrer que

$$\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$$

Semi convergence

Semi convergence

Dans cette partie, nous nous intéressons aux séries semi-convergentes (c'est-à-dire des séries qui convergent sans être absolument convergentes). Nous allons présenter quelques outils adaptés à ce type de séries.

Séries alternées et critère de Leibniz

Séries alternées

Définition 5.1

La série $\sum u_n$ est dite série alternée si la suite $(-1)^n u_n$ garde un signe constant.

Séries alternées

Définition 5.1

La série $\sum u_n$ est dite série alternée si la suite $(-1)^n u_n$ garde un signe constant.

Théorème 5.1

Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0, Alors :

1. $\sum u_n$ converge.
2. Sa somme S est encadré par S_{2n+1} et S_{2n}
3. Son reste R_n a le même signe que u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Séries alternées

Définition 5.1

La série $\sum u_n$ est dite série alternée si la suite $(-1)^n u_n$ garde un signe constant.

Théorème 5.1

Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0, Alors :

1. $\sum u_n$ converge.
2. Sa somme S est encadré par S_{2n+1} et S_{2n}
3. Son reste R_n a le même signe que u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Remarque 5.1 : Ce critère est appelé critère de Leibniz ou critère spécial des séries alternées (CSSA).

Exemple 5.1 :

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et en plus

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

2. Plus généralement pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ converge et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

Transformation et critère d'Abel

Transformation d'Abel

La transformation d'Abel pour les séries peut être vue comme l'analogue, pour les séries, de l'intégration par parties pour les intégrales.

Transformation d'Abel

Proposition 5.1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

Considérons $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Théorème 5.2

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, et si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum a_n b_n$ converge.

Exemple 5.2 :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Remarque 5.2 : Remarquons que la convergence d'une série alternée satisfaisant les conditions du critère de Leibniz est un cas particulier de ce théorème (critère d'Abel).

Exercice 5.1 :

1. Étudier en fonction des valeurs de α et β la nature de la série suivante :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\alpha n + \beta)}{n}.$$
2. En déduire la nature la série :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\alpha n + \beta)}{n}.$$

Produit de deux séries

Produit de Cauchy

$$
\begin{aligned}
(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = &\underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme des indices=0}} \\
&+ \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme des indices=1}} \\
&+ \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{\text{somme des indices=2}} \\
&+ \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{\text{somme des indices=3}} \\
&+ \underbrace{a_2 b_2}_{\text{somme des indices=4}}
\end{aligned}
$$

Produit de Cauchy

$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme des indices}=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme des indices}=1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{\text{somme des indices}=2} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{\text{somme des indices}=3} + \underbrace{a_2 b_2}_{\text{somme des indices}=4}$$

Ce résultat reste-t-il valable pour des sommes infinies de termes ?

Produit de Cauchy

Définition 6.1

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum c_n$ avec $c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Produit de Cauchy

Définition 6.1

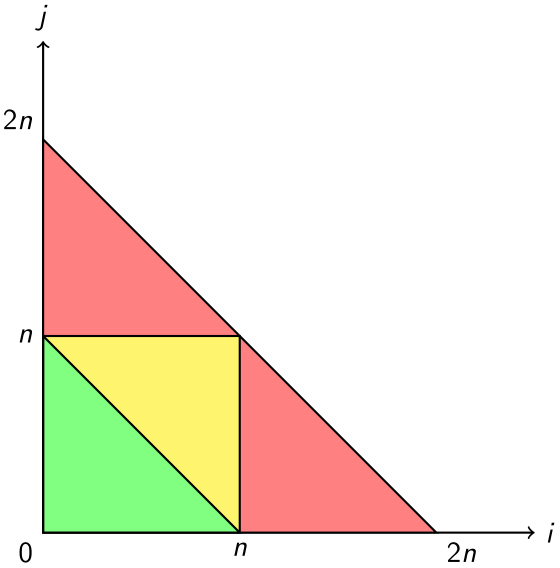
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum c_n$ avec $c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Théorème 6.1

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors $\sum c_n$ converge absolument, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Produit de deux série



Exemple 6.1 : Soit $x \in \mathbb{C}$ tq $|x| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

Exemple 6.1 : Soit $x \in \mathbb{C}$ tq $|x| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

Exercice 6.1 : Pour $x \in \mathbb{C}$, on définit $\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{C}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Exemple 6.1 : Soit $x \in \mathbb{C}$ tq $|x| < 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$$

Exercice 6.1 : Pour $x \in \mathbb{C}$, on définit $\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{C}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Remarque 6.1 : Les fonctions $\cos, \sin$ les relations trigonométriques !

Exemple 6.2 : Quelle est la nature de la série produit de Cauchy des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ avec $a_n = b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$?

Permutation des termes

Permutation des termes

Théorème 7.1

Soit $\sum u_n$ une série à absolument convergente, et σ une permutation de $\mathbb{N}$. On a $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Exemple 7.1 : Étudier les séries :

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$
2. $\displaystyle\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$