Chapitre 2: Suites et séries de fonctions

Safouane TAOUFIK

UM6P-CC

Table of Contents

Convergence simple

Convergence simple

Dans toute la suite I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et les fonctions considérées sont à valeurs à valeurs réelles ou complexes.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (i.e.,pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Convergence simple

Dans toute la suite I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et les fonctions considérées sont à valeurs à valeurs réelles ou complexes.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (i.e.,pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1

On dit que (f_n) converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On définit f, la limite simple de (f_n) sur I par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I et on note $f_n \xrightarrow[I]{CVS} f$ ou simplement $f_n \xrightarrow{CVS} f$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 1.1 : On considère $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

Exemple 1.1 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
$f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Convergence simple

Exemple 1.1 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
$f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exemple 1.2 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}$.

Exemple 1.1 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
$f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exemple 1.2 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}$.
$f_n \xrightarrow{CVS} 0$

Exemple 1.3 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$

Convergence simple

Exemple 1.3 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$
$f_n \xrightarrow{CVS} 0$.

Exemple 1.3 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$
$f_n \xrightarrow{CVS} 0$.
Exemple 1.4 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Exemple 1.3 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$
$f_n \xrightarrow{CVS} 0.$
Exemple 1.4 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
$f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x$$

Convergence simple

Remarque 1.1 :

1. Dans le premier exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de polynômes, mais sa limite n'est même pas continue.

Remarque 1.1 :

1. Dans le premier exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de polynômes, mais sa limite n'est même pas continue.
2. Dans le deuxième exemple on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{+\infty} f = 0$

Remarque 1.1 :

1. Dans le premier exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de polynômes, mais sa limite n'est même pas continue.
2. Dans le deuxième exemple on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{+\infty} f = 0$
3. Dans le troisième exemple les deux propriétés précédente sont satisfaites mais f_n' ne converge pas simplement vers f'

Remarque 1.1 :

1. Dans le premier exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de polynômes, mais sa limite n'est même pas continue.
2. Dans le deuxième exemple on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{+\infty} f = 0$
3. Dans le troisième exemple les deux propriétés précédente sont satisfaites mais f_n' ne converge pas simplement vers f'

Quelles sont alors les propriétés qui sont préservées par convergence simple ?

Convergence simple

Proposition 1.1

Supposons que $f_n \xrightarrow{CVS} f$

- Si chaque f_n est positive, alors f est positive.
- Si chaque f_n est croissante, alors f est croissante.
- Si chaque f_n est convexe, alors f est convexe.
- Si chaque f_n est périodique, alors f est périodique.
- Si chaque f_n est paire, alors f est paire.

Convergence uniforme

Convergence uniforme

Définition 1.2

On définit l'espace $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{B}(I, \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est bornée sur } I\}.$$

Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|, x \in I\}$$

$\|.\|_\infty$ est appelée la norme uniforme ou la norme infinie.

Proposition 1.2

$\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Et la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, est une norme sur cette espace i.e. application de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1. **Séparation :**
$$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0.$$
2. **Homogénéité :**
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty.$$
3. **Inégalité triangulaire :**
$$\forall f, g \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R}), \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Définition 1.3

On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I si à partir d'un certain rang la suite $(f_n - f)$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Convergence uniforme

Définition 1.3

On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I si à partir d'un certain rang la suite $(f_n - f)$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Théorème 1.1

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

Remarque 1.2 :

Pour étudier la converge uniforme d'une suite de fonctions f_n :

1. On cherche f tq $f_n \xrightarrow{CVS} f$ si elle existe sinon on a pas la CVU.

Convergence uniforme

Remarque 1.2 :

Pour étudier la converge uniforme d'une suite de fonctions f_n :

1. On cherche f tq $f_n \xrightarrow{CVS} f$ si elle existe sinon on a pas la CVU.
2. On étudie la convergence de la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque 1.2 :
Pour étudier la converge uniforme d'une suite de fonctions f_n :

1. On cherche f tq $f_n \xrightarrow{CVS} f$ si elle existe sinon on a pas la CVU.
2. On étudie la convergence de la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$
   - Étudier la fonction $|f_n - f|$ pour calculer son supremum (à l'aide du tableau de variation par exemple)

Remarque 1.2 :
Pour étudier la converge uniforme d'une suite de fonctions f_n :

1. On cherche f tq $f_n \xrightarrow{CVS} f$ si elle existe sinon on a pas la CVU.
2. On étudie la convergence de la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$
   - Étudier la fonction $|f_n - f|$ pour calculer son supremum (à l'aide du tableau de variation par exemple)
   - Si on trouve une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$ alors on a la CVU.

Remarque 1.2 :
Pour étudier la converge uniforme d'une suite de fonctions f_n :

1. On cherche f tq $f_n \xrightarrow{CVS} f$ si elle existe sinon on a pas la CVU.
2. On étudie la convergence de la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$
   - Étudier la fonction $|f_n - f|$ pour calculer son supremum (à l'aide du tableau de variation par exemple)
   - Si on trouve une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$ alors on a la CVU.
   - Si on trouve une suite (x_n) d'éléments de I tel que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0, alors on a pas la CVU.

Convergence uniforme

Exemple 1.5 : On considère $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

Convergence uniforme

Exemple 1.5 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a pas la CVU sur $I := [0,1]$ et sur $I := [0,1[$
En effet :

$$f_n(1 - \frac{1}{n}) - f(1 - \frac{1}{n}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} \neq 0$$

Exemple 1.5 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a pas la CVU sur $I := [0,1]$ et sur $I := [0,1[$
En effet :

$$f_n(1-\frac{1}{n}) - f(1-\frac{1}{n}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} \neq 0$$

mais si $I := [0,a]$ avec $0 < a < 1$ alors $f_n \xrightarrow{CVU} 0$
En effet :

$$\|f_n - f\|_\infty = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Convergence uniforme

Exemple 1.5 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a pas la CVU sur $I := [0,1]$ et sur $I := [0,1[$
En effet :

$$f_n(1-\frac{1}{n}) - f(1-\frac{1}{n}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} \neq 0$$

mais si $I := [0,a]$ avec $0 < a < 1$ alors $f_n \xrightarrow{CVU} 0$
En effet :

$$\|f_n - f\|_\infty = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exemple 1.6 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$.

Convergence uniforme

Exemple 1.5 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a pas la CVU sur $I := [0,1]$ et sur $I := [0,1[$
En effet :

$$f_n(1-\frac{1}{n}) - f(1-\frac{1}{n}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} \neq 0$$

mais si $I := [0,a]$ avec $0 < a < 1$ alors $f_n \xrightarrow{CVU} 0$
En effet :

$$\|f_n - f\|_\infty = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exemple 1.6 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$.
Alors $f_n \xrightarrow{CVU} 0$

Exemple 1.7 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$
$f_n \xrightarrow{CVU} 0.$

Convergence uniforme

Exemple 1.7 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$
$f_n \xrightarrow{CVU} 0$.
Exemple 1.8 : On considère $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
on a pas la CVU sur $\mathbb{R}^+$.
Sur $[0, a]$?

Interversion limite limite

Interversion limite limite

Théorème 1.2

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I.
Soit a un point adhérent à I.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a. Alors :

- La suite (ℓ_n) est convergente.
- f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \ell_n$. Ou encore

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Interversion limite limite

Théorème 1.2

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I.
Soit a un point adhérent à I.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a. Alors :

- La suite (ℓ_n) est convergente.
- f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \ell_n$. Ou encore

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Exemple 1.9 : On considère $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

Interversion limite limite

Théorème 1.2

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I.
Soit a un point adhérent à I.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a. Alors :

- La suite (ℓ_n) est convergente.
- f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \ell_n$. Ou encore

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Exemple 1.9 : On considère $f_n : [0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a pas la CVU sur $I := [0, 1[$

Limite uniforme et continuité

Limite uniforme et continuité

Théorème 1.3

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue. Alors : f est continue.

Limite uniforme et continuité

Théorème 1.3

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue. Alors : f est continue.

Exemple 1.10 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

Limite uniforme et continuité

Théorème 1.3

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur I. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue. Alors : f est continue.

Exemple 1.10 : On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. On a pas la CVU sur $I := [0,1]$

Remarque 1.3 :
La continuité est une notion locale, donc pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I, il suffit de vérifier sa continuité sur tout segment de I.

Remarque 1.3 :
La continuité est une notion locale, donc pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I, il suffit de vérifier sa continuité sur tout segment de I. Ainsi, pour montrer que la limite uniforme f d'une suite de fonctions continues (f_n) est continue sur I, il suffit que la convergence uniforme ait lieu sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Limite uniforme et intégration sur un segment

Limite uniforme et intégration sur un segment

Théorème 1.4

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue. Alors :

- La suite $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ est convergente.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Ou encore

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Exemple 1.11 :
On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$
calculer
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

Remarque 1.4 : Remarquons que le résultat n'est pas vrai pour I intervalle quelconque en effet pour $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$.
$f_n \xrightarrow{CVU} 0$ et portant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \int_0^{+\infty} f = 0$

Limite uniforme et dérivation

Théorème 1.5

Soit (f_n) une suite de fonctions .
Supposons que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- (f_n) converge simplement vers f.
- (f_n') converge uniformément sur tout segment de I.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$. Ou encore

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Remarque 1.5 : En plus du résultat, la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur tout segment.

Limite uniforme et dérivation

Remarque 1.6 :
Remarquons que la condition de convergence uniforme de la suite f_n seule n'est pas suffisante. En effet, On considère $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$ $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ alors que f_n' ne converge pas vers 0.

Remarque 1.6 :
Remarquons que la condition de convergence uniforme de la suite f_n seule n'est pas suffisante. En effet, On considère $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x(1-x)^n$ $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ alors que f_n' ne converge pas vers 0.

Convergence dominée

Convergence dominée

Théorème 1.6

Soit (f_n) une suite de fonctions .
Supposons que :

- (f_n) converge simplement vers une fonction f continue par morceaux.
- Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable tq $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$

Alors les fonction f_n et f sont intégrables et $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$. Ou encore

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f$$

Convergence dominée

Exemple 1.12 :

On considère $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n} e^{-x^2}$

Calculer

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$$

Exemple 1.12 :

On considère $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n} e^{-x^2}$

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$$

Remarque 1.7 :

Remarquons que le théorème 1.4 (l'inversion limite-intégrale par l'utilisation de la convergence uniforme) est un corollaire simple de ce théorème, et remarquons qu'on peut même affaiblir les conditions.

Séries de fonctions et convergence simple

Convergence simple

Définition 2.1

On appelle série de terme général f_n la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\sum_{k=0}^{n} f_k$ est appelé somme partielle d'ordre n et notée S_n

La série est notée simplement $\sum_{n\geq 0} f_n$ ou $\sum f_n$.

Convergence simple

Définition 2.1

On appelle série de terme général f_n la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\sum_{k=0}^{n} f_k$ est appelé somme partielle d'ordre n et notée S_n

La série est notée simplement $\sum_{n\geq 0} f_n$ ou $\sum f_n$.

Définition 2.2

On dit qu'une série de fonctions converge simplement sur I si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur I. Sa limite simple est appelée somme de série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Convergence simple

Exemple 2.1 :
On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

Exemple 2.1 :
On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exemple 2.1 :
On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{si } x \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Donc S_n ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ et $S_n \xrightarrow[I]{CVS} S$ avec $I =]-1, 1[$ et $S : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \frac{1}{1 - x}$$

Convergence simple

Remarque 2.1 : On a équivalence entre :

1. La converge simple de la série $\sum f_n$ sur I
2. La converge de la série numérique $\sum f_n(t)$ pour tout $t \in I$.

En cas de convergence on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

Remarque 2.1 : On a équivalence entre :

1. La converge simple de la série $\sum f_n$ sur I
2. La converge de la série numérique $\sum f_n(t)$ pour tout $t \in I$.

En cas de convergence on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

Remarque 2.2 : Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur I.

Convergence simple

Exemple 2.2 :

On considère la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ converge ssi $x > 1$

donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ on appelle sa somme la fonction zêta de Riemann. $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Définition 2.3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement. On appelle le reste d'ordre n de cette série la fonction R_n définie par :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$$

Convergence simple

Définition 2.3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement. On appelle le reste d'ordre n de cette série la fonction R_n définie par :

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$$

Proposition 2.1

Soit $\sum f_n$ une série qui converge simplement. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = S_n + R_n$ de plus $R_n \xrightarrow{CVS} 0$

Convergence uniforme

Définition 2.4

On dit qu'une série de fonctions converge uniformément sur I si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

Convergence uniforme

Définition 2.4

On dit qu'une série de fonctions converge uniformément sur I si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

Exemple 2.3 :

On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.

Définition 2.4

On dit qu'une série de fonctions converge uniformément sur I si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

Exemple 2.3 :

On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a montrer que la série converge simplement sur $I :=]-1,1[$.
Est ce que cette convergence est uniforme sur I ?

Convergence uniforme

Définition 2.4

On dit qu'une série de fonctions converge uniformément sur I si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

Exemple 2.3 :

On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
On a montrer que la série converge simplement sur $I :=]-1,1[$.
Est ce que cette convergence est uniforme sur I ?
Sur $]-a,a[$ avec $0 < a < 1$?

Convergence uniforme

Théorème 2.1

On a équivalence entre :

1. La converge uniforme de la série $\sum f_n$.
2. La converge simple de la série $\sum f_n$ et $R_n \xrightarrow{CVU} 0$.

Théorème 2.1

On a équivalence entre :

1. La converge uniforme de la série $\sum f_n$.
2. La converge simple de la série $\sum f_n$ et $R_n \xrightarrow{CVU} 0$.

Exemple 2.4 :

On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Convergence uniforme

Théorème 2.1

On a équivalence entre :

1. La converge uniforme de la série $\sum f_n$.
2. La converge simple de la série $\sum f_n$ et $R_n \xrightarrow{CVU} 0$.

Exemple 2.4 :

On considère la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

La série converge-t-elle uniformément sur $]-1,+\infty[$?

Convergence normale

Convergence normale

Définition 2.5

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Convergence normale

Définition 2.5

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Théorème 2.2

La convergence normale implique la converge uniforme.

Remarque 2.3 :
La réciproque n'est pas vraie en général. Considérons, par exemple, la série : $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?

Remarque 2.3 :
La réciproque n'est pas vraie en général. Considérons, par exemple, la série : $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}^+$?
Exemple 2.5 :
On considère la série $\sum f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
Étudier la convergence normale sur $]-1, 1[$ et sur $]-a, a[$ avec $0 < a < 1$

Exemple 2.6 :

On considère la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Étudier la convergence normale sur $]1, +\infty[$ et sur $]a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Exemple 2.6 :

On considère la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

Étudier la convergence normale sur $]1, +\infty[$ et sur $]a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Exemple 2.7 :

On considère la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n^2 + x^2}$$

La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Interversion limite limite

Interversion limite limite

Théorème 2.3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur I. Soit a un point adhérent à I.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a. Alors :

- La série $\sum \ell_n$ est convergente.
- $\displaystyle\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$. Ou encore

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Exemple 2.8 :
Considérons la fonction : $S :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Calculer la limite de la fonction S en $+\infty$

Exemple 2.8 :
Considérons la fonction : $S :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Calculer la limite de la fonction S en $+\infty$
Exemple 2.9 :
Calculer la limite de la fonction ζ en $+\infty$

Limite uniforme et continuité

Limite uniforme et continuité

Théorème 2.4

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément alors sa somme est continue.

Limite uniforme et continuité

Théorème 2.4

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément alors sa somme est continue.

Remarque 2.4 :
Il suffit d'avoir la convergence uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Limite uniforme et continuité

Exemple 2.10 :
Considérons la fonction : $S :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Étudier la continuité de S.

Exemple 2.10 :
Considérons la fonction : $S :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Étudier la continuité de S.
Exemple 2.11 :
Étudier la continuité de la fonction ζ.

Limite uniforme et intégration sur un segment

Limite uniforme et intégration sur un segment

Théorème 2.5

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a, b]$. Alors :

- La série $\displaystyle\sum \int_a^b f_n(x)dx$ est convergente.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx.$

Exemple 2.12 :
Considérons la fonction : $S : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}. \right)$$

Calculer $\int_0^1 S(x)dx$.

Limite uniforme et dérivation

Limite uniforme et dérivation

Théorème 2.6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Supposons que :

- $\sum f_n$ converge simplement.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Remarque 2.5 : En plus du résultat, la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur tout segment.

Exemple 2.13 :
Considérons la fonction : $S :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

Étudier la monotonie de S.

Exercice 2.1 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Montrer que :

1. Si pour tout $k \in \{0, ..., p-1\}$ la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment alors $f := \lim f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}$
2. Si pour tout $k \in \{0, ..., p-1\}$ la série $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement et $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment alors $f := \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et $f^{(k)} = \sum f_n^{(k)}$

Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un intervalle quelconque

Théorème 2.7

Soit $\sum f_n$ est une série de fonctions intégrables sur I. Si :

- La série converge simplement.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)$.

Remarque 2.6 :

Les mêmes conclusions restent valables si l'on montre que $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ converge.

Approximation uniforme

Approximation uniforme

Théorème 2.8

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

Théorème 2.9

Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction continue alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales .

Approximation uniforme

Exercice 3.1 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(c) = 0$ avec $c \in [a,b]$. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(c) = 0$$

Exercice 3.2 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b P_n(x)dx = 0$$