Algèbre Linéaire

Azeddine Zaidni,
Azeddine.zaidni@um6p.ma

5 mai 2025

Table des matières

1 Introduction

Figure 1 – Portrait de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) par Christian Albrecht Jensen

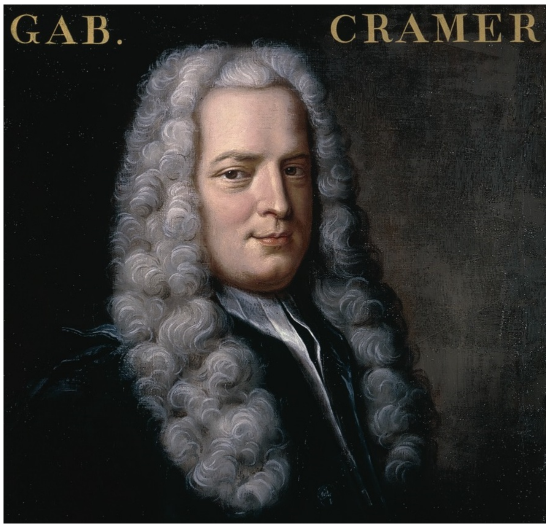

Figure 2 – Portrait du mathématicien Gabriel Cramer (1704-1752) - Bibliothèque de Genève

L'algèbre linéaire est l'une des théories mathématique les plus utilisées. Elle intervient dans tous les domaines des mathématique, notamment les équations différentielles et la théorie des probabilités. Elle est également appliquée dans des domaines tels que la physique, la chimie, l'économie et l'informatique.

Historiquement, L'algèbre linéaire apparut lors de l'étude des système linéaire par leibnitz en 1678, après Mac Laurin en 1748 donne les formules de résolution à deux ou trois inconnues, complétées dans le cas général par Cramer en 1754.

Parmi les objectifs de ce cours est d'acquérir des compétences informatiques pour résoudre des systèmes d'équation linéaire, effectuer des opérations sur des matrices, trouver des déterminants de matrice etc.

L'algèbre linéaire vise à résoudre des systèmes d'équation linéaire avec un nombre fini d'inconnues. En particulier, on souhaite à caractériser des solutions (Existe-t-il des solution ? Combien de solutions y a-t-il ?), on souhaite aussi à trouver des solutions (comment se présente l'ensemble des solutions ? Quelles sont les solutions ?).

Exemple 1.0.1.

On considère le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases} \tag{1}$$

avec x_1 et x_2 sont des inconnus, le système admet une solution unique, en effet :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -2x_2 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Exemple 1.0.2.

Soit le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Le système n'admet pas de solution, en effet :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff 2 = 0$$

Exemple 1.0.3.
Maintenant on donne un exemple où l'ensemble des solutions est infini :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = 2x_2 \tag{3}$$

Donc le système admet une infinité de solutions. L'ensemble des solution peut s'écrit comme suite :

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 = 2x_2\} = \{(x_1, \frac{1}{2}x_1) \quad | \quad x_1 \in \mathbb{R}\}$$

Cette ensemble se représente géométriquement comme suite :

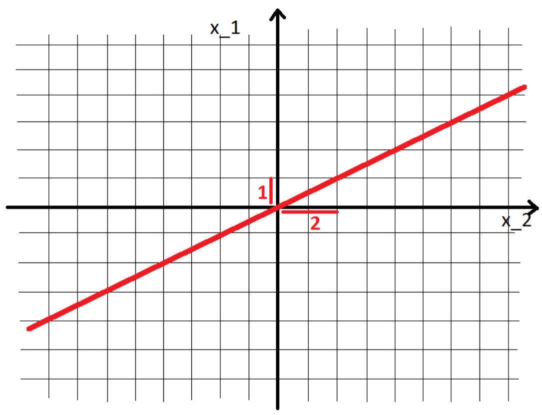

Figure 3 –

En générale, un système de m équations linéaire et n inconnus se présente comme suite :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{4}$$

Les coefficients $a_{i,j}$, b_i sont données (réels, ou complexes), et les x_i sont des inconnus.

2 Chapitre I : Espace vectoriel.

Les espaces vectoriels sont essentiels pour la formulation et la résolution de problèmes d'algèbre linéaire. Ils apparaîtront à partir de maintenant sur tous les chapitres de ce cours.

On note souvent les espaces vectoriels par E, F, G... , dans la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ où le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

L'espace vectoriel est un ensemble E menu de deux opération : l'addition de vecteurs (qui sont des éléments de l'ensemble E) et la multiplication par des scalaires. Ces opérations doivent satisfaire certaines propriétés, que nous allons aborder plus en détail. Les scalaires sont pris dans le corps $\mathbb{K}$.

L'addition vectorielle peut être considérée comme une fonction,

$$+ : E \times E \to E$$

qui fait correspondre deux vecteurs $u, v \in E$ à leur somme $u + v \in E$.

La multiplication par un scalaire peut être décrite de manière similaire comme une fonction,

$$. : \mathbb{K} \times E \to E$$

qui fait correspondre un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et un vecteur $v \in E$ à un nouveau vecteur $\lambda.v \in E$. (Ce type de fonctions appelées aussi opérations binaires).

2.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 2.1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble noté E menu des opérations d'addition $E \times E \to E$ et de multiplication scalaire $\mathbb{K} \times E \to E$ satisfaisant chacune des propriétés suivantes :
1. $u + v = v + u$ pour tout $u, v \in E$ (Commutativité) ;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ et $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ pour tous les $u, v, w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (Associativité) ;
3. Il existe un élément $0_E \in E$ tel que $0_E + v = v$ pour tout $v \in E$ (élément neutre de l'addition) ;
4. Pour tout $v \in E$, il existe un élément $w \in E$ tel que $v + w = 0_E$ (l'opposé) ;
5. $1v = v$ pour tout $v \in E$;
6. $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$ et $(\lambda+\mu)u = \lambda u+\mu u$ pour tout $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (Distributivité).

Remarque 1.

— On peut visualiser géométriquement les opérations dans l'espace vectoriel en commençant par visualiser le vecteur nul 0_E et tout vecteur sera représenté en partant de celui-ci.

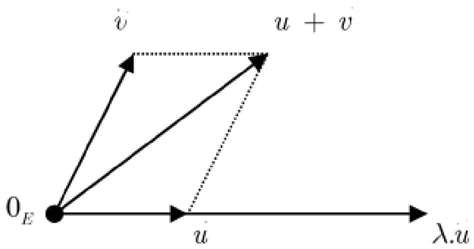

FIGURE 4 –

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que E est un espace vectoriel réel, et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on dit que E est un espace vectoriel complexe.

— Les espaces vectoriels sont des objets fondamentaux en mathématiques, il en existe d'innombrables exemples. Vous allez voir de nombreux exemples d'espaces vectoriels tout au long de votre vie mathématique.

Exemple 2.1.1.

— Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^n$ de tous les n-uplets ayant des éléments dans $\mathbb{R}$ (produit cartésien). Il s'agit d'un espace vectoriel réel dont l'addition et la multiplication scalaire sont définies comme suite :
Pour $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit,

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n), \\ \lambda u &= (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que chaque propriété de la définition (7.1) est satisfaite. En particulier, l'élément neutre est $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, et l'opposé d'un élément u est donné par $-u = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$.

— Soit $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathbb{R}[x]$ s'écrit ponctuellement comme suite :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'addition et la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{R}[x]$ sont définies ponctuellement comme suite :

$$\begin{aligned} (p + q)(x) &= p(x) + q(x), \\ (\lambda p)(x) &= \lambda p(x), \end{aligned}$$

où $p, q \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sous ces opérations, $\mathbb{R}[x]$ forme un espace vectoriel réel. L'élément neutre dans ce cas est le polynôme nul, et l'opposé de $p(x)$ est la fonction polynomiale $q(x) = -p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$.

2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 2.2. On appelle sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E toute partie F de E vérifiant :
1) $0_E \in F$;
2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda x + \mu y \in F$.

Exemple 2.2.1.

— $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.

— $\{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, Il représente géométriquement l'axe des abscisse de plan $\mathbb{R}^2$, même chose pour l'axe des ordonnées ($\{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$).

— L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des fonctions polynômes à cœfficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{R}_n[x] = \{P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}\}$$

est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$, en effet, la somme de deux polynômes de degré $\leq n$ reste un polynôme de degré $\leq n$ et un polynôme de degré $\leq n$ multiplié par un scalaire reste un polynôme de degré $\leq n$.(par convention le polynôme nul est de degré $= -\infty \leq n$).

— Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 4y + 3z = 0\}$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$;
on a :

$$2x_1 + 4y_1 + 3z_1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2 + 4y_2 + 3z_2 = 0$$

Après on fait la somme : $2(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2) = 0$, c'est-à-dire :

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in F$$

De même, on voit que $\lambda v \in F$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in F$.

Remarque 2.

— Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, en effet, comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$, alors $0_E \in F \cap G$.
Soient $u, v \in F \cap G$; on a $u, v \in F$ donc $u + v \in F$. De même, si $u, v \in G$, $u + v \in G$ et par conséquent $u + v \in F \cap G$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F \cap G$, alors $u \in F$, donc $\lambda u \in F$, et $u \in G$, donc $\lambda u \in G$, d'où : $\lambda u \in F \cap G$.

— Mais $F \cup G$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel, On donne le contre exemple suivant :
Soient $E =$ le plan $\mathbb{R}^2$, F l'axe des abscisse et G l'axe des ordonnées .
Le vecteur $u = (1, 0) \in F$, donc $u \in F \cup G$ de même le vecteur $v = (0, 1) \in G$ donc $v \in F \cup G$, mais : $w = u + v = (1, 1) \notin F \cup G$.

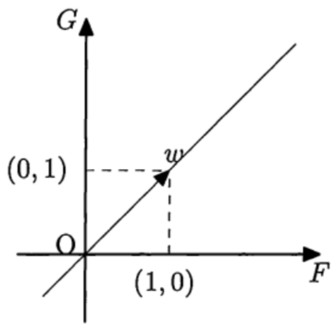

Figure 5 – Plan $\mathbb{R}^2$

— Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors :

$$F + G = \{u + v \quad | \quad u \in F, v \in G\}.$$

est un sous-espace vectoriel de E, en effet, comme E est un espace vectoriel alors on a, $F + G \subset E$.
$0_E = 0_E + 0_E \in F + G$ car $0_E \in F$ et $0_E \in G$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F + G$. On peut écrire $u = a + b$ et $v = a' + b'$ avec $a, a' \in F$ et $b, b' \in G$ donc :

$$\lambda u + \mu v = (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b') \in F + G.$$

Théorème 2.1. Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations restreintes.

Donc pratiquement pour vérifier qu'un ensemble menu des opérations a une structure d'espace vectoriel, il suffit de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un grand espace vectoriel connu ou bien usuel (Ex. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. C'est en effet un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$).

2.2.1 Espace vectoriel engendré

Définition 2.3. On appelle espace vectoriel engendré par une partie A de E l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, et on le note $\mathrm{Vect}(A)$, i.e :

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{A \subset F,\, F \text{ sous-espace vectoriel de E}} F$$

Remarque 3.

— $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A. De plus, pour tout sous-espace vectoriel F de E : $A \subset F \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset F$.
On remarque que $\mathrm{Vect}(A)$ apparaît comme étant le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

— Par convention $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

— Si $A = \{v\}$ avec v un vecteur non nul de E, alors :

$$\mathrm{Vect}(A) = \{u \in E \quad | \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda v\} = \{\lambda v \quad | \quad \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}.v$$

Cet espace dit aussi la droite vectoriel engendré par v.

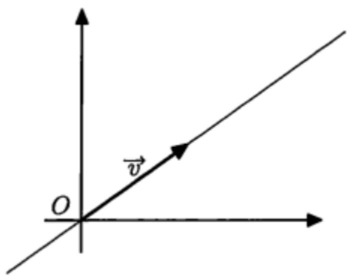

FIGURE 6 –

— De même, soit u et v deux vecteur non nuls de E, on a :

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}.u + \mathbb{K}.v = \mathrm{Vect}(u) + \mathrm{Vect}(v)$$

Dit plan vectoriel engendré par u et v.

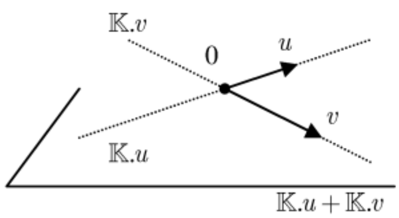

FIGURE 7 –

— Plus généralement, si $u_1, \ldots, u_n \in E$ alors :

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n / \lambda_i \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}.u_1 + \cdots + \mathbb{K}.u_n$$

est un sous-espace vectoriel de E, dit sous-espace engendré par $u_1, \ldots, u_n$, ou aussi espace des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_n$.

2.2.2 Somme direct & Sous-espace vectoriels supplémentaires

Un vecteur u dans le plan $\mathbb{R}^2$ se caractérise par deux cordonnées, l'abscisse x et l'ordonnée y, on écrit $u = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$, donc le vecteur u s'écrit d'une manière unique comme somme d'un vecteur de l'axe des abscisse (la droite F) et un vecteur de l'axe des ordonnées (la droite G) (voir figure 5). On écrit $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$. On dit que F et G sont en somme direct, on dit aussi que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Dans la suite, on généralise ces définitions pour un nombre fini d'espaces.

Définition 2.4. Soit $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ des sous-espaces $F_1, \ldots, F_k$ par :

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_k \mid u_i \in F_i, \quad \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

Ainsi on a :

$$u \in F_1 + \cdots + F_k \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\,(u_1, \ldots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k, \quad u = u_1 + \cdots + u_k.$$

Remarque 4.

— $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est un sous-espace vectoriel de E.

— Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.
Par associativité de $+$, on a :

$$(F + G) + H = F + (G + H) = F + G + H.$$

— Pour tout $1 \leq i \leq k, F_i$ est un sous-espace vectoriel de $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$.

— On peut montrer que $F_1 + F_2 + \cdots + F_k = \mathrm{Vect}\,(\cup_{1\leq i\leq k} F_i)$.

Définition 2.5. Soit $(F_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est directe, et on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$, si :

$$\forall u \in F_1 + \cdots + F_k, \quad \exists!\,(u_1, \ldots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k, \quad u = u_1 + \cdots + u_k.$$

Exemple 2.2.2.

— Soit $\mathbb{K}[x]$ l'espace des fonctions polynomiales, on prend :

$$F = \left\{p \in \mathbb{K}[x] \mid p \text{ s'écrit : } p(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2m}x^{2n}\right\}$$
$$G = \left\{p \in \mathbb{K}[x] \mid p \text{ s'écrit : } p(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2m+1}x^{2m+1}\right\}$$

Alors on a $F + G$ est une somme direct on a, $F + G = F \oplus G$.

— Soient,

$$F = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$$
$$G = \left\{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\}$$

Alors $F \oplus G$ est une somme direct, Cependant, si on prend

$$H = \{(0, w, z) \mid w, z \in \mathbb{R}\},$$

Alors $F + H$ n'est pas une somme directe de F et H, en effet,

$$(0, 0, 0) = (0, 1, 0) + (0, -1, 0) = (0, 2, 0) + (0, -2, 0).$$

Proposition 2.1. Si l'on se limite à deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on a :

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe si et seulement si } F \cap G = \{0_E\}$$

Démonstration. *(Exercice).*

Remarque 5.

— On donne un contre exemple si on a au plus trois sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$G = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$H = \{(0, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

On a : $F + G + H$ n'est pas une somme direct, en effet,

$$(0, 0, 0) = (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (0, -1, -1) = (0, 2, 0) + (0, 0, 2) + (0, -2, -2).$$

malgré qu'on a : $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0_E\}$.

Proposition 2.2. La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est directe si et seulement si on a :

$$\forall (u_1, \ldots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k, \quad u_1 + \cdots + u_k = 0_E \Rightarrow u_1 = u_2 = \cdots = u_k = 0_E.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$) *comme les $F_1 + F_2 + \ldots + F_k$ est une somme direct alors la seule façon d'écrire le vecteur nul est $0_E = 0_E + \ldots + 0_E$.*

$\Longleftarrow$) *On suppose qu'ils existent deux écriture de u comme somme des éléments des F_i :*

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$$

$$u = w_1 + w_2 + \ldots + w_k$$

Alors,

$$0_E = u - u = (u_1 - w_1) + (u_2 - w_2) + \ldots + (u_k - w_k)$$

Ce qui implique que $(u_1 - w_1) = (u_2 - w_2) = \ldots = (u_k - w_k) = 0_E$ Donc $u_1 = w_1$, $u_2 = w_2$,..., $u_k = w_k$, On en déduit que l'écriture de u est unique.

Proposition 2.3. La somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ est directe si et seulement si pour tout $2 \leq i \leq k$

$$F_\mathrm{i} \cap (F_1 + \cdots + F_{\mathrm{i}-1}) = \{0_E\}.$$

Démonstration.

$\Rightarrow$) *Soit $2 \leq i \leq k$ et prenons $x \in F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1})$.
Il existe alors $(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in F_1 \times \cdots \times F_{i-1}$ tels que : $x = x_1 + \cdots + x_{i-1}$ soit encore $x_1 + \cdots + x_{i-1} + (-x) = 0_E$ On en déduit alors (puisque $x \in F_i$ et que $\sum_{1 \leq j \leq i} F_j$ est directe) que $x_1 = \cdots = x_{i-1} = x = 0_E$.*

Ainsi on a bien $F_i \cap (F_1 + \cdots + F_{i-1}) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$) *Soient $(x_1, \ldots, x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$ tels que $x_1 + \cdots + x_k = 0_E$. Alors $x_k = -x_1 - \cdots - x_{k-1} \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0_E\}$. Ainsi $x_k = 0_E$. En itérant ce raisonnement, on obtient que $x_1 = \cdots = x_k = 0_E$.*

La somme $\sum_{1 \leq i \leq k} F_i$ est donc directe.

Remarque 6.

L'exemple de la remarque (5) montre que $\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \{0\}$ ne suffit pas pour dire que les F_i sont en somme direct.

Définition 2.6. Soit E un espace vectoriel, On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si :

$$E = F \oplus G$$

Autrement-dit,

$$E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}$$

Exemple 2.2.3.

— Soit $\mathbb{K}[x]$ l'espace des fonctions polynomiales, on prend :

$$F = \{p \in \mathbb{K}[x] \mid p \text{ s'écrit} : p(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2m}x^{2n}\}$$

$$G = \{p \in \mathbb{K}[x] \mid p \text{ s'écrit} : p(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2m+1}x^{2m+1}\}$$

Alors on a F et G sont supplémentaire dans $\mathbb{K}[x]$, i.e $\mathbb{K}[x] = F \oplus G$.

— Soient,

$$F = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$G = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Alors $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

— Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
On montre que F et G sont supplémentaires dans E.
On a $F \cap G = \{0\}$. En effet, si f est élément de $F \cap G$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a à la fois $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, d'où $f(x) = -f(x)$ ce qui donne $f(x) = 0$.
D'autre part, tout élément h de E se décompose sous la forme $h = f + g$, avec f dans F et g dans G. Pour cela, on utilise un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse : On pose $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = f(x) + g(x)$ et $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$, on tire que $f(x) = (h(x) + h(-x))/2$ et $g(x) = (h(x) - h(-x))/2$.
La partie analyse peut être considéré comme une recherche "au brouillon".

Synthèse : On pose $f(x) = (h(x) + h(-x))/2$ et $g(x) = (h(x) - h(-x))/2$. Alors on vérifie facilement que :
- $h = f + g$;
- f est paire ;
- g est impaire.
Ainsi $F + G = E$, d'où $E = F \oplus G$.

À retenir :

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} E = F + G \text{ et} \\ \text{tout élément } u \in E \text{ s'écrit} \\ \text{d'une manière unique} \\ u = v + w \\ \text{avec } v \in F, w \in G \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} E = F + G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0\} \end{array} \right.$$

2.3 Exercices :

Exercice 1 :

On note $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Montrer que les lois :

$$x \oplus y := xy \quad \lambda.x := x^\lambda \quad (x, y \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}, \lambda \in \mathbb{R})$$

confèrent à $\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Dans les cas suivants, le sous-ensemble F de E est-il un sous-espace vectoriel de E ? Justifier votre réponse.
a) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 1\big\}$.
b) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + 2x^2 + z = 0\big\}$.
c) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \geq 0\big\}$.
d) $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = P'(1) = 0\}$.
e) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right.\right\}$
e) E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y)^2 = 2x + y\big\}$

Exercice 3 :

1) Dans les cas suivants, la somme $F + G$ est elle directe ?
(a) $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\big\}$ et $G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 0\big\}$.
(b) $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\big\}$ et $G = \{(-x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.
(c) $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(2) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(-1) = P(2) = 0\}$.

Exercice 4 :

Soit $n \geqslant 1$ fixé. Pour tout $j \in \{0, \cdots, n\}$, on pose :

$$F_i = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \mid \forall j \in \{0, \cdots, n\}\backslash\{i\}, P(j) = 0\}.$$

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbf{R}_n[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 5 :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F \cup G$ est sous-espace vectoriel, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

3 Chapitre II : Espace vectoriel de dimension finie.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ (respct. le plan complexe $\mathbb{C}$) on peut spécifier un point par ces deux coordonnées (respct. la partie réelle et la partie imaginaire), intuitivement la dimension d'un espace vectoriel sera le nombre de coordonnées dont on a besoin pour spécifier de manière unique un point dans le même espace. Dans ce chapitre nous allons définir c'est quoi une famille génératrice, une famille libre, une famille liée, une base et une dimension.

3.1 Famille génératrice

Définition 3.1. Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ d'un espace vectoriel E est dite génératrice, si $E = \text{Vec}\{v_1, \dots, v_p\}$.
Ce qui veut dire que $\forall u \in E, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad$ tels que :

$$u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

On dit aussi, que tout $u \in E$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$.

Exemple 3.1.1.

— Dans $\mathbb{R}^n$, les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

forment une famille génératrice, car pour tout $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire :

$$u = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + ... + x_n e_n.$$

— Dans $\mathbb{R}_n[x]$ (voir 2.2.1), les fonction $\{x \to x^k, 0 \leq k \leq n\}$ forment une famille génératrice. En effet, chaque fonction polynomiale p s'écrit ponctuellement comme :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0.$$

Remarque 7.

— Dans $\mathbb{R}^3$ considérons les vecteurs e_1, e_2 et e_3 définir comme l'exemple ci-dessus pour $n = 3$, par exemple la famille $\{e_1, e_2, e_3, v\}$, avec $v = (1, 1, -1)$. Elle est aussi génératrice, car pour tout $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on peut écrire : $u = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + 0v$.
Donc il faut noter que toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

— On peut généraliser la notion de famille génératrice pour les familles infinies. En effet, soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{u_i, \quad i \in I\}$ une famille d'élément de E, on dit que $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si chaque élément u de E s'écrit comme combinaison linéaire finie des élément de $\mathcal{F}$, i.e :

$$\exists J \subset I, J \text{ fini}, (a_j) \in \mathbb{K}, \text{ tel que, } u = \sum_{j \in J} a_j u_j$$

On donne comme exemple $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace des fonctions polynomiales, et $\mathcal{F} = \{x \to x^k, k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}$ est évidement une famille génératrice de $\mathbb{R}[x]$.

Définition 3.2. Un espace vectoriel E est dit de dimension finie, s'il existe une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Exemple 3.1.2.

— L'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ défini dans l'exemple (3.1) est génératrice.

— De même $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension finie. Mais $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel de dimension infinie, supposons le contraire, il existe une famille finie des fonctions polynomiales $\{p_1, \dots, p_k\}$ tel que :

$$\mathbb{R}[x] = \text{Vect}\{p_1, \dots, p_k\}$$

Soit $m = \max\{\deg(p_1), \dots, \deg(p_k)\}$, On a $(x \to x^{m+1}) \in \mathbb{R}[x]$, mais $(x \to x^{m+1}) \notin \text{Vect}\{p_1, \dots, p_k\}$.

— En particulier L'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie, car il contient $\mathbb{R}[x]$, qu'est de dimension infinie.

3.2 L'indépendance linéaire

Définition 3.3. :
– Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ une famille finie d'éléments de E. On dit qu'elle est libre si :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants.

- Une famille qui n'est pas libre est dite liée, autrement dit $\{u_1, ..., u_n\}$ est une famille liée s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

On dit aussi que ses vecteurs sont linéairement dépendants.

Exemple 3.2.1.

— Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 0, 1)$ forment une famille libre. En effet, supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, c'est-à-dire :

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 1, 1) + \lambda_3(0, 0, 1) = 0$$

On aura : $(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$
c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne immédiatement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

— Les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, et $u_3 = (1, 2, 0)$ sont linéairement dépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 &= \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(1, 2, 0) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3$$

Il suffit de prendre $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, -1)$, on obtient : $u_1 + u_2 - u_3 = 0$.

— Les vecteurs $\{x \to x^k,\ 1 \le k \le n\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ est linéairement indépendants.

$$a_0 + a_2 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

La fonction polynomiales à gauche est nulle pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ce qui est possible si et seulement si : $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ (Exercice).

De même si on fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les vecteurs $\{x \to 1, x \to (x-\alpha), \dots, x \to (x-\alpha)^n\}$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}[x]$ (Exercice).

Proposition 3.1. Les vecteurs $\{u_1, \dots, u_n\}$ sont linéairement indépendante si et seulement si chaque $u \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Démonstration.
⇒) Soient :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

$$u = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$$

deux décompositions de u. En faisant la différence on trouve :

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n.$$

Puisque la famille est libre, on a $\lambda_1 - \mu_1 = 0, ..., \lambda_n - \mu_n = 0$, *c'est-à-dire :* $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$.
⇐) Supposons maintenant que, pour chaque $u \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, *il existe des* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *uniques, tels que*

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Ceci implique, que la seule façon d'écrire le vecteur nul $u = 0$ *comme combinaison linéaire de* $u_1, \dots, u_n$ *est de prendre* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ *. On en déduit que les vecteurs*$\{u_1, \dots, u_n\}$ *sont linéairement indépendants.*

Proposition 3.2. Une famille $\{u_1, ..., u_n\}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, Autrement dit si l'un au moins des u_i appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.

Démonstration.
– Si $u_1, \dots, u_n$ *sont liées, il existe* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *non tous nuls tels que,*
$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0$. *Si, par exemple* $\lambda_k \neq 0$, *on pourra écrire :*

$$u_k = \frac{-\lambda_1}{\lambda_k} u_1 + \cdots + \frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k} u_{k-1} + \frac{-\lambda_{k+1}}{\lambda_k} u_{k+1} + \cdots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_k} u_n \tag{5}$$

Réciproquement, supposons par exemple, que u_1 *est combinaison linéaire des vecteurs* $u_2, \dots, u_n$ *; alors il existe* $\mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ *tels que :*
$u_1 = \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_n u_n$, *c'est-à-dire :*

$$u_1 - \mu_2 u_2 - \cdots - \mu_n u_n = 0.$$

Il existe donc une combinaison linéaire des vecteurs $\{u_1, \dots, u_n\}$ *qui est nulle, sans que les coefficients soient tous nuls. Donc la famille est liée.*

Remarque 8.

— Si un vecteur u_k s'écrit comme combinaison linéaire des autres, alors :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

En effet, Soit $v \in \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_n)$. Cela signifie, par définition, qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tels que :

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Après on remplace le vecteur u_k que nous avons écrit dans la formule (5) de sorte que v s'écrit comme une combinaison linéaire de $\{u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Par conséquent,

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)$$

L'inclusion inverse est claire ($A \subset B \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$).

— Si $u \neq 0$ alors $\{u\}$ est libre.
— Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
— Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
— Toute famille contenant une famille liée est liée.
— Toute famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ dont l'un des vecteurs u_i est nul, est liée.
— On peut généraliser aussi la notion de famille libre pour les familles infinies, en effet, soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{u_i, \quad i \in I\}$ une famille d'élément de E, on dit que $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si chaque sous famille finie de $\mathcal{F}$ soit libre :

$$\forall J \subset I, J \text{ finie}, (\forall \alpha_j) \in \mathbb{K}, \sum_{j \in J} \alpha_j u_j = 0 \Longrightarrow \alpha_j = 0, \forall j \in J$$

On donne comme exemple $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace des fonctions polynomiales, et $\mathcal{F} = \{x \to x^k, k \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{F}$ est évidement une famille libre de $\mathbb{R}[x]$.

3.3 Base

Définition 3.4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, On appelle base de E toute famille à la fois libre et génératrice.

Remarque 9.

— Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de E. Il existe alors une bijection :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_B : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n & \longrightarrow & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Les scalaires x_i sont dits composantes de vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

— Tout $u \in E$ se décompose d'une façon unique sur les v_i. C'est-à-dire :
Pour tout u dans E, il existe un unique n-uplets $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$u = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Exemple 3.3.1.

— La famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ définie dans l'exemple (3.1) est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.
— $\mathcal{B} = \{x \to x^k,\ 0 \leq k \leq n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
— Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$. On chercher une base de H. On peut montrer facilement que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.On a :

$$v = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow z = -x - y$$

donc : $v \in F \Leftrightarrow v = (x, y, -x - y) \Leftrightarrow v = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$.
Par conséquent les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ forment une famille génératrice de F.
D'autre part :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

Ce qui est équivalent à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On en déduit que $\{v_1, v_2\}$ forment une base de H.

Théorème 3.1. (Théorème d'existence de base) Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie et G une famille génératrice finie. Considérons une famille libre $L \subset G$. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

Démonstration.

*Soit $G = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice et L_1 une famille libre contenue dans G. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $L_1 = \{v_1, \ldots v_r\}$.
Si L_1 est génératrice, elle est une base et le théorème est démontré.
Supposons donc que L_1 n'est pas génératrice.*

i) Montrons tout d'abord qu'il existe $v_{i_1} \in \{v_{r+1}, \ldots, v_p\}$ tel que la famille $L_2 = \{v_1, \ldots, v_r, v_{i_1}\}$ est libre.

En effet, si ce n'est pas le cas, chaque vecteur de $\{v_{r+1}, \ldots, v_p\}$ doit être une combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de L_1. Ce qu'est impossible, car si u est un vecteur quelconque de $E, u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \alpha_p v_p$, on peut remplacer dans cette expression les vecteurs $v_{r+1}, \ldots, v_p$ par leur expression en fonction des vecteurs $v_1, \ldots, v_r$ et x peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_r$. Puisque u est arbitraire, cela signifie que L_1 est génératrice, ce que nous avons exclu.

Nous avons donc prouvé que l'on peut agrandir la famille libre $L_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ en lui ajoutant un vecteur $v_{i_1} \in \{v_{r+1}, \ldots, v_p\}$ de manière que la famille $L_2 = \{L_1, v_{i_1}\}$ soit libre.

ii) Si L_2 est génératrice, elle est une base et le théorème est démontré. Dans le cas contraire, en répétant le raisonnement, on voit qu'il existe $v_{i_2} \in G, v_{i_2} \notin L_2$, tel que la famille $L_3 = \{L_2, v_{i_2}\}$ est libre. On construit ainsi une suite :

$$L_1 \underset{\neq}{\subset} L_2 \underset{\neq}{\subset} L_3 \underset{\neq}{\subset} \ldots\ldots\ldots \subset G$$

de familles libres et le processus peut être continué tant que L_k n'est pas génératrice. Mais G est une famille finie et par conséquent, le processus doit s'arrêter. Il existe donc une famille L_k libre et génératrice, c'est-à-dire une base et $L_1 \subset L_k \subset G$.

Théorème 3.2. (Théorème de la base incomplète)
Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en une base.

Démonstration.

Soit $L = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille libre et $G = \{w_1, \ldots, w_q\}$ une famille génératrice quelconque. La famille $G' = G \cup L$ est aussi génératrice, car elle contient une famille génératrice, et elle contient la famille L. D'après le théorème d'existence (3.1), il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G'$

3.4 Dimension

Théorème 3.3. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$, et on le note $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Exemple 3.4.1.

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, En effet, comme nous l'avons vu, la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$, avec $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ est une base.
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$, en effet le nombre des éléments de la base canonique $\mathcal{B} = \{x \to x^k, \, 0 \leq k \leq n\}$ égale $n + 1$.

Remarque 10.

- Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille ayant plus de n éléments est liée.
- Dans un espace vectoriel de dimension n, les familles ayant moins de n éléments ne peuvent pas être génératrices.
- Si $E = \{0\}$ on pose : $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$. On a évidemment :

$$E = \{0\} \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} E = 0$$

— La dimension d'un espace vectoriel E dépend non seulement de E mais aussi du corps de base $\mathbb{K}$ (d'où la notation $\dim_{\mathbb{K}} E$).
En effet, considérons, par exemple, $\mathbb{C}$ muni de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ définie par les lois :

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$
$$\lambda(a+ib)=\lambda a+i\lambda b \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Tout élément $z\in\mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique : $z=a1+bi$ avec $a,b\in\mathbb{R}$, ce qui signifie que $\{1,i\}$ est une base et donc $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$.
En revanche, si on considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$$

De même on peut montrer que, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)=n$, mais $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)=2n$.

Théorème 3.4. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :
- Toute famille génératrice ayant n éléments est une base.
- Toute famille libre ayant n éléments est une base.

Démonstration.

En effet, soit G une famille génératrice ayant n éléments. D'après le théorème (3.1) on peut en extraire une base. Mais cette base extraite doit avoir n éléments car la dimension de E est n : il s'agit donc de G elle-même.

De même, soit L une famille libre ayant n éléments. D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base.

Mais si on lui ajoutait effectivement certains vecteurs, on aurait une base formée de plus de n éléments, ce qui est exclu. Donc L est elle-même une base.

Proposition 3.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $F\subset E$ un sous-espace de E alors :
1. $\dim(F)\leq\dim(E)$.
2. $\dim(E)=\dim(F)\Longleftrightarrow E=F$.

Démonstration.

1. Supposons $F\neq\{0\}$ et soit $x_1\in F, x_1\neq 0$. La famille $L_1=\{x_1\}$ est libre. En raisonnant exactement comme dans la démonstration du Théorème d'existence (3.1), on construit une suite de familles libres de F : et le processus ne s'arrête que si L_k est génératrice de F.

Montrons d'abord que F est de dimension finie. Pour cela supposons que F n'admet pas de famille génératrice finie : il existe alors un indice $k>n$ (où n est la dimension de E) tel que L_k n'est pas génératrice.

On a ainsi construit une famille libre de F formée de $k>n$ éléments. Ce qu'est impossible, car les familles libres de F sont des familles libres de E et donc elles ne peuvent avoir plus de n éléments. F est donc de dimension finie. Plus précisément, on vient de voir que F admet nécessairement une famille génératrice formée d'au plus n élément. En extrayant une base de cette famille, cette base aura au plus n éléments, donc : $\dim_{\mathbb{K}} F\leq\dim_{\mathbb{K}} E$.

2. Si $\dim_{\mathbb{K}} F=\dim_{\mathbb{K}} E$, *il existe une base $\mathcal{B}$ de F ayant n éléments* ($n=\dim_{\mathbb{K}} E$). *Mais $F\subset E$: $\mathcal{B}$ est donc une famille de E qui est libre et qui a n éléments. D'après le théorème (3.4), elle est une base de E et donc elle engendre E, c'est-à-dire* $\mathrm{Vect}\{\mathcal{B}\}=E$. *Mais* $\mathrm{Vect}\{\mathcal{B}\}=F$, *donc $F=E$.*

Proposition 3.4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $F\subset E$ un sous-espace vectoriel de E. alors il existe un sous espace $G\subset E$ tel que $E=F\oplus G$. C'est-à-dire tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Démonstration.

Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ *une base de* F. *Par la proposition (3.3), nous savons que* $k \leq \dim(E)$. *Par conséquent, par le théorème de la base incomplète,* $(e_1, \ldots, e_k)$ *peut être complété en une base* $(e_1, \ldots, e_k, u_1, \ldots, u_l)$ *de* E. *Soit* $G = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_l)$.

Pour montrer que $E = F \oplus G$, *nous devons montrer que* $E = F + G$ *et* $F \cap G = \{0\}$. *Puisque* $E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k, u_1, \ldots, u_l)$ *où* $(e_1, \ldots, e_k)$ *s'étend sur* F *et* $(u_1, \ldots, u_l)$ *sur* G, *il est clair que* $E = F + G$.

Pour montrer que $F \cap G = \{0\}$, *soit* $v \in F \cap G$. *Alors il existe des scalaires* $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{K}$ *tels que,*

$$v = a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k = b_1 u_1 + \cdots + b_l u_l,$$

ou de manière équivalente que,

$$a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k - b_1 u_1 - \cdots - b_l u_l = 0.$$

Puisque $(e_1, \ldots, e_k, u_1, \ldots, u_l)$ *forme une base de* E *et est donc linéairement indépendant, la seule solution à cette équation est* $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_l = 0$. *donc* $v = 0$, *d'où* $F \cap G = \{0\}$.

Théorème 3.5. (Formule de Grassmann)
Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie E, alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration.

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ *une base de* $F \cap G$. *Par le théorème de la base incomplète, il existe* $(u_1, \ldots, u_k)$ *et* $(w_1, \ldots, w_l)$ *tels que* $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k)$ *est une base de* F *et* $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_l)$ *est une base de* G. *Donc :*

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$$

est une basse de $F + G$ *ainsi,*

$$\dim(F + G) = n + k + \ell = (n + k) + (n + \ell) - n = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Clairement $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t)$ *contient* F *et* G, *et donc* $F + G$.

Pour montrer que $\mathcal{B}$ *est une base, il reste à montrer que* $\mathcal{B}$ *est famille libre. Supposons*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k + c_1 w_1 + c_k w_k = 0 \tag{6}$$

et soit $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k \in F$. *Alors, par l'équation (6), on a aussi que* $u = -c_1 w_1 - \cdots - c_l w_l \in G$, *ce qui implique que* $u \in F \cap G$.
Par conséquent, il existe des scalaires $a'_1, \ldots, a'_n \in \mathbb{K}$ *tel que,*

$$u = a'_1 v_1 + \cdots + a'_n v_n$$

Puisqu'il existe une unique combinaison linéaire des vecteurs linéairement indépendants $(v_1, \ldots, \mathrm{v_n}, \mathrm{u_l}, \ldots, u_k)$ *qui décrit* u, *on doit avoir* $b_1 = \cdots = b_k = 0$ *et* $a_1 = a'_1, \ldots, a_n = a'_n$. *Puisque* $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_k)$ *est aussi linéairement indépendante, il s'ensuit que* $a_1 = \cdots = a_n = c_1 = \cdots = c_l = 0$. *Donc, L'équation (6) n'a que la solution triviale, ce qui implique que* $\mathcal{B}$ *est une base.*

Remarque 11.

— Soient $F_1, F_2, \ldots, F_k$ des sous-espace vectoriels de dimension finie alors,

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_k) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_k).$$

— Si F et G sont en somme directe alors ,

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Plus généralement si $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont en somme direct alors,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(F_i)$$

— Soient E un espace de dimension n, et H un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, On dit que H est un hyperplan de E. Pour tout vecteur $a \in E$ tel que $a \notin H$, on a :

$$H \oplus \mathrm{Vect}\{a\} = E$$

En effet, H et $\mathrm{Vect}\{a\}$ sont en somme direct donc,

$$\dim(H \oplus \mathrm{Vect}\{a\}) = \dim(H) + \dim(\mathrm{Vect}\{a\}) = n - 1 + 1 = n = \dim(E)$$

Comme $H \oplus \mathrm{Vect}\{a\} \subset E$, alors on aura l'égalité.

3.5 Exercices

Exercice 1 :

1) l'ensemble des suites bornées est il un sous-espace vectoriel ?
2) l'ensemble des suites majorées est il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3 :

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; A \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à F.

Exercice 4 :

Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ et $G = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 5 :

Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante } \}$
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension r.
Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun, c'est-à-dire il existe un sous espace vectoriel S tel que :

$$E = F \oplus S = G \oplus S.$$

Exercice 7 :

a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit l'application f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} : f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Montrer que la partie $\{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre.

b) Soit $(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P_i) < \deg(P_{i+1})$ pour $i = 1, \ldots, r-1$. Montrer que la famille $(P_1, P_2, \ldots, P_r)$ est libre.

c) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, des réels distincts deux à deux. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit la fonction f_i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} : f_i(x) = |x - a_i|$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

d) Montrer que $(x \mapsto \cos(ax))_{a>0}$ et $(x \mapsto (\sin x)^n)_{n \geq 1}$ sont des familles libres.

4 Chapitre III : Calcule matriciel

La matrice est un objet principal pour écrire commodément les opérations habituelles de l'algèbre linéaire, elle servent aussi à interpréter en termes calculatoires, et donc opérationnels, les résultats théoriques de l'algèbre linéaire. Ce cours permet à maîtriser et s'habituer avec le calcul matriciels.

4.1 Matrices rectangles

Définition 4.1. On appelle matrice de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau A de $m \times n$ éléments de $\mathbb{K}$ rangés sur m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou, en abrégé :$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Si $m = n$, alors $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté simplement : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 4.1.1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 7+i & 0 \\ -1 & 2+i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$,

$C = \begin{pmatrix} i & 5 \\ 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$

$D = (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad$ avec $a_{ij} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ (coefficient binomial)

$E = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad$ (cas particulier de la matrice de Cauchy)

Remarque 12.

— On note a_{ij} le coefficient qui se situe à l'intersection de la ligne i et la colonne j.

— Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si elles sont de même type $m \times n$ et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$.

— Une matrice $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls s'appelle la matrice nulle, On la note $0_{m,n}$.

— Une matrice carrée (a_{ij}) d'ordre n telle que $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$ s'appelle la matrice identité d'ordre n. On la note I_n. en effet,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— On appelle matrice élémentaire $E_{k,l}$, la matrice dont le coefficient qui se situe à l'intersection de la ligne k et la colonne l.

$$E_{k,l} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \text{k ème ligne} \\ \text{l ème colonne} & \end{array}$$

Ou bien en abrégé, $E_{k,l} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{i,j}$.

— Sur l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on définit les lois :
- Addition : si $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$, on note $C = A + B$ la matrice (c_{ij}) telle que :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall i, j$$

- Multiplication par un scalaire : si $A = (a_{i,j})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on note λA la matrice $(\lambda a_{i,j})$ c'est-à-dire la matrice obtenue en multipliant tous les éléments par λ. Il est facile de voir que, muni de ces lois, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément neutre est la matrice nulle $0_{m,n}$. L'opposée de la matrice $(a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. En donne l' exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \qquad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.1. $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \times n$. Et la famille des matrices élémentaires $(E_{k,l})$ est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

On peut montrer facilement que la famille $\{(E_{k,l}) \,|\, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n\}$ est une famille génératrice et libre, on aussi si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ alors,

$$A = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{i,j} E_{ij}$$

Proposition 4.1.
- $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A + (-A) = (-A) + A = 0_{m,n}$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A + B = B + A$.

4.2 Produit matriciel

Nous allons maintenant définir le produit de deux matrices A et B. Ce produit est bien défini si le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.

Définition 4.2. (Produit de matrices)
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de type $m \times p$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de type $p \times n$. Le produit de A par B, que l'on note AB, est la matrice $C = (c_{i,j})$ de type $m \times n$, avec $c_{i,j}$ est donné par la formule :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Exemple 4.2.1.

— Soit A et B définis comme suite :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de type 3×2 et la matrice B est de type 2×3 donc le produit est bien défini AB est de type 3×3 et on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aussi le produit BA est bien défini et on a :

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

— On prend $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors :

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

Mais XA n'est pas bien défini.

— Pour $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ on a

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

En effet,
- Si $j \neq k$ alors $E_{i,j} \times E_{k,l} = O_{m,n}$ car les 1 ne se croisent pas.
- Si $j = k$ alors $E_{i,j} \times E_{k,l} = E_{i,l} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ car les 1 se croisent lors du calcul du coefficient d'indice (i,l). On en déduit que $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

— Soit $U = (a_1 \ a_2 \dots a_n)$ et $V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Le produit de U par V est le scalaire défini par $UV = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

Le produit de V par U est la matrice carrée d'ordre n :

$$VU = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \dots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \dots & b_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & b_na_n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.2.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \quad (AB)C = A(BC)$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad AI_n = I_nA = A$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \forall B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \qquad A(B + C) = AB + AC$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad (A + B)C = AC + BC$.

Remarque 13.

— Le produit matriciel n'est pas commutatif , en effet :
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, donc $AB \neq BA$.

— Les opérations matricielles peuvent aussi être par blocs, en effet, Soit $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ lorsque les blocs des matrices M et N sont de même type on aura : $M + N = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix}$.

— Le produit par blocs se pose comme un produit de matrice à coefficients (en prenant garde à l'ordre des facteurs). Par exemple soit $A = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & -I_n \\ I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1,\ X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ On obtient $MX = \begin{pmatrix} AX_1+BX_2 \\ CX_1+DX_2 \end{pmatrix}$
Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n,n} & A \end{pmatrix}$, $M^2 = MM = \begin{pmatrix} A^2 & AB + BA \\ 0_{n,n} & A^2 \end{pmatrix}$.

Définition 4.3. Soit A une matrice carrée d'ordre n.
1. Pour un entier naturel k, la puissance k^{me} de A est définie récursivement comme suit :
(a) $A^0 = I_n$.
(b) Pour $k \geq 1$, $A^k = A^{k-1}A$.
2. Si $P = a_0 + a_1X + \, + a_mX^m$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors l'évaluation de P en A (ou la valeur de P en A) est la matrice :

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_mA^m.$$

Exemple 4.2.2.

— Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, alors : $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, Soit $P = -2 + X + 3X^2 - X^3$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors :

$$P(A) = -2I_2 + A + 3A^2 - A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

— On reprend l'exemple de la remarque (13) précédente $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n,n} & A \end{pmatrix}$, $M^2 = MM = \begin{pmatrix} A^2 & AB + BA \\ 0_{n,n} & A^2 \end{pmatrix}$, On suppose que A et B commute c'est-à-dire $AB = BA$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_{n,n} & A^k \end{pmatrix}$$

Remarque 14.
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$: Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on peut montrer facilement que :

— $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) = Q(A) + P(A)$.
— $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

Proposition 4.3. (Binôme de Newton)
Soient A et B deux matrice carrées, et $n \in \mathbb{N}$, Si A et B commutent ($AB = BA$), alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k} B^k$$

Exemple 4.2.3.

— Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, et soit n un entier. Nous allons déterminer une expression de A^n
Premièrement on a A peut s'écrire $A = 3I_2 + B$, avec I_2 matrice identité et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, on a donc

$$B^k = 0, \forall k \geq 2.$$

Comme $3I_2$ et B commutent, on peut appliquer Binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n = (3I_2 + B)^n \Leftrightarrow A^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (3I_2)^{n-k} B^k \\
\Leftrightarrow A^n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (3I_2)^n B^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (3I_2)^{n-1} B^1 \\
\Leftrightarrow A^n &= 1 \times 3^n I_2 \times I_2 + n \times 3^{n-1} I_2 \times B \\
\Leftrightarrow A^n &= 3^n I_2 + n \times 3^{n-1} \times B \\
\Leftrightarrow A^n &= 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n3^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow A^n &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 5n \times 3^{n-1} & 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

— Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, On peut vérifier que $A = 2J - I_3$,
avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité d'ordre 3. Un petit calcul permet de constater que $J^2 = 3J$, et on prouve facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = 3^{k-1}J$. Comme les matrices I et J commutent, on peut appliquer la formule du Binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(2J - I)^n &= \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (2J)^k (-I)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^k J^k \times (-1)^{n-k} \\
&= \left((-1)^n I + \sum_{k=1}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 2^k \times 3^{k-1} (-1)^{n-k} J \right) \\
&= (-1)^n I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 6^k (-1)^{n-k} J \\
&= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(5^n - (-1)^n\right) J
\end{aligned}$$

Donc,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{5^n}{3} & \frac{1}{3}(5^n-(-1)^n) & \frac{1}{3}(5^n-(-1)^n) \\ \frac{1}{3}(5^n-(-1)^n) & \frac{5^n}{3} & \frac{1}{3}(5^n-(-1)^n) \\ \frac{1}{3}(5^n-(-1)^n) & \frac{1}{3}(5^n-(-1)^n) & \frac{5^n}{3} \end{pmatrix}$$

Remarque 15.

Soient A et B deux matrices carrées qui commutent, et n un entier, on a aussi l'identité remarquable suivante :

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k.$$

Ces résultats se démontre facilement par récurrence sur n.

4.3 Transposée

Définition 4.4. La transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice $A^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.
Plus précisément, si on note $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$ et $b_{i,j}$ les coefficients respectivement de A et de A^T alors pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$ on a :

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Exemple 4.3.1.

— La transposée de la matrice A$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est $A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

— La transposée de $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 19 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $B^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 19 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 4.4.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha A)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T}$.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

Dans la suite on s'intéresse à les matrices carrées.

Définition 4.5. Une matrice carrée A est symétrique si $A^\mathsf{T} = A$. Elle est antisymétrique si $A^\mathsf{T} = -A$.

Exemple 4.3.2.

— $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -13 \\ 0 & 4 & 17 \\ -13 & 17 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

— $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -19 & 3 \\ 1 & 19 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

Remarque 16. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont symétriques (respectivement antisymétriques).

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $A = A_1 + A_2$, avec $A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
— $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
— $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$. (Exercice)

4.4 Trace

Définition 4.6. (Trace)
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la trace de A noté $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la somme des éléments diagonaux de A, i.e :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Exemple 4.4.1.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}(A) = 4 + 6 + (-3) = 7$.
— $\mathrm{Tr}(I_n) = n$, et $\mathrm{Tr}(0_{n,n}) = 0$.

Remarque 17. Soit A et B des matrices carrées on a :

— $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.
— $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{Tr}(A)$.
— $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.(Exercice).

Définition 4.7. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$:
1. A est triangulaire supérieure si et seulement si :

$$\forall i > j, \quad a_{i,j} = 0$$

Autrement dit A est une matrice dont les valeurs sous la diagonale principale sont nulles.
2. A est triangulaire inférieure si et seulement si :

$$\forall i < j, \quad a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit A est une matrice dont les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles.
3. A est diagonale si et seulement si :

$$\forall i < j, \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{et} \quad a_{j,i} = 0.$$

C'est-à-dire une matrice qu'est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Remarque 18.

— Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

— Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

— Une matrice diagonal est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diang}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

— On peut remarquer aussi que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$U^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & a_{2,2}^k & & & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n}^k \end{pmatrix}, \quad L^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \star & a_{2,2}^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \star & \star & \cdots & \cdots & a_{n,n}^k \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$$

— Plus généralement si P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ alors :

$$P(U) = \begin{pmatrix} P(a_{1,1}) & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & P(a_{2,2}) & & & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(a_{n,n}) \end{pmatrix}$$

$$P(L) = \begin{pmatrix} P(a_{1,1}) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \star & P(a_{2,2}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \star & \star & \cdots & \cdots & P(a_{n,n}) \end{pmatrix}$$

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(a_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P(a_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & P(a_n) \end{pmatrix} = \mathrm{diang}(P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n))$$

4.5 Matrice inversible

Définition 4.8. (Matrice inversible)
On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = BA = I_n$$

Cette matrice B est unique, on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Exemple 4.5.1.

— La matrice identité I_n est inversible d'inverse elle même.

— Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}-\{0\}$ des nombres non nuls, la matrice diagonale $D = \text{diang}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est inversible d'inverce $D^{-1} = \text{diang}(1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n)$.

— la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et on a,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Nous allons voir dans la suite comment caractériser les matrices inversibles et comment calculer leurs inverses.

Remarque 19.

— Soit A et B deux matrices carrées inversibles Alors on a :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors on a :

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

4.6 Exercices :

Exercice 1 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1 .Calculer A^2, A^3.
2. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.
3. Répondre aux mêmes questions pour B.

Exercice 2 :

Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = A - 3\mathrm{I}_3$.
a) Calculer N^2 puis N^3.
b) Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geq 2$
3. Soient u_n,v_n et w_n des suites réelles tel que :
$u_{n+1} = v_n - w_n$, $v_{n+1} = -u_n + 2v_n - w_n$, $w_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n$
déterminer le terme générale de chaque suite.

Exercice 4 :

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 5 :

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une relation liant I_4, U et U^2.
2. En déduire, pour $n \geq 0$, la valeur de U^n.

Exercice 6 :
On dit qu'une matrice N est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

Soit N une matrice nilpotente. Montrer que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Exercice 7 :

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j)\in\{1...n\},\ a_{i,j}\in[0,1]$ et $\forall\, i\in\{1,..,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1$.

On suppose qu'il existe une matrice colonne X non nulle et un nombre complexe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $AX=\lambda X$.
1) Montrer que $|\lambda|\leqslant 1$.
2) On suppose que $|\lambda|=1$, montrer qu'il existe $i\in\{1,...,n\}$ tel que $|\lambda-a_{ii}|=1-a_{ii}$.

Exercice 8 :

On cherche à déterminer toutes les matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$MM^{\mathsf{T}}M=I_n$$

1. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier que la matrice $M^{\mathsf{T}}M$ est une matrice symétrique.
2. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice symétrique et inversible. Démontrer que A^{-1} est encore symétrique.
3. Soit $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire la trace de la matrice $A^{\mathsf{T}}A$ en fonction des coefficients de A.
4. En déduire que si A est une matrice symétrique, alors $\operatorname{Tr}\left(A^2\right)\geqslant 0$ et qu'il y a égalité si, et seulement si, $A=0$.
5. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe des matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB=CA=I_n$. Démontrer que $A(B-C)A=0$, en déduire que A est inversible.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$MM^{\mathsf{T}}M=I_n$$

6. Déduire des résultats préliminaires que M est inversible, puis que M est symétrique. En déduire M^3.

On pose $a=\operatorname{Tr}(M)$ et $b=\operatorname{Tr}\left(M^2\right)$

7. Exprimer en fonction de a et b les réels suivants :

$$\operatorname{Tr}\left((M-I_n)^2\right),\quad \operatorname{Tr}\left(\left(M^2-I_n\right)^2\right),\quad \operatorname{Tr}\left(\left(M^2-M\right)^2\right)$$

8. Vérifier que la somme de ces trois traces est nulle, en déduire que $M=I_n$.

Exercice 9 :

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
1. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB)=\operatorname{Tr}(BA)$.
2. Montrer que $\operatorname{Tr}\left(AA^T\right)=0$ si et seulement si la matrice A est nulle.
3. Montrer que si pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}(AM)=\operatorname{Tr}(BM)$, alors $A=B$.

Exercice 10 :

1. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que que $AM=MA$ pour toute $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $A=\lambda I_n$.
2. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.
3. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices antisymétriques.
4. Existe-t-il des matrices A , $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB-BA=I_n$.

Exercice 11 :

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On dit que $A=(a_{ij})$ est stochastique si $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$ pour toute j.
1. Montrer qu'elle existe une matrice ligne $X=(x_1,...,x_n)$ tel que $XA=X$.
2. Montrer que si A et B deux matrices stochastiques alors leur produit AB est aussi une matrice stochastique.

5 Chapitre IV : Application linéaire

Comme nous avons dit dans l'introduction, notre objectif est l'étude des systèmes linaires. Les applications linéaires et leurs propriétés nous donnent un aperçu des caractéristique des solutions des systèmes linéaires. On dirait que ce chapitre sera l'axe de tout le reste du cours.

Dans ce cours , E et F désignent des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. nous allons étudier les application de E vers F qui ont des propriétés spéciales données dans la définition suivante.

Définition 5.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est linéaire, si :
a) $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in E$;
b) $f(\lambda u) = \lambda f(u), \quad \forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, ou plus simplement, $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque 20.

- Si $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$ et on appelle $f \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme de E.
- Si f est linéaire, on a : $f(0) = 0$. Il suffit de prendre $\lambda = 0$ dans $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel, l'addition est défini comme suite :

  $$(f+g)(u) = f(u) + g(u), \forall u \in E. \forall f, g \in C$$

  La multiplication par un scalaire est défini comme suite :

  $$(\lambda f)(u) = \lambda f(u), \forall u \in E, \forall f \in \mathcal{L}(E, F).$$

  On peut facilement vérifier que si f et g sont linéaire alors $f + g$ et λf sont aussi linéaire.
  Si de plus E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et on a :

  $$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E, F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \times \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

- Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. pour montrer qu'une application f de E dans F est linéaire il suffit de montre que :

  $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

- La composée (lorsque elle est bien définie) de deux applications linéaires est une application linéaire. soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$

  $$g \circ f\ :\ E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

  Pour tout $u \in E$, $g \circ f(u) = g(f(u))$.
- Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, f , f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et g, g_1 et g_2 des éléments de $\mathcal{L}(F, G)$ alors :
  - $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$;
  - $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$;
  - $(\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda(g \circ f)$.

Exemple 5.0.1.

- L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)} : E \longrightarrow F$, tel que $0_{\mathcal{L}(E,F)}(u) = 0_F$ pour tout $u \in E$, est une application linéaire.
- L'application identité $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$, tel que $\mathrm{id}_E(u) = u$ pour tout $u \in E$, est une application linéaire (i.e c'est un endomorphisme).

— Soit $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ l'application dérivée définie comme suite :

$$Dp(x) = p'(x), \text{ pour tout } p \in \mathbb{R}[x]$$

soient deux polynômes $p, q \in \mathbb{R}[x]$, on a :

$$D(p+q)(x) = (p+q)'(x) = p'(x) + q'(x) = D(p)(x) + D(q)(x).$$

Soient une fonction polynomial $p \in \mathbb{R}[x]$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$D(\lambda p)(x) = (\lambda p)'(x) = \lambda p'(x) = \lambda D(p)(x).$$

Donc D une application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.

— L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f((x,y,z)) = x - 2y + 5z,\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, est une application linéaire. En effet,
soient $u = (x,y,z), v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha v + \beta w) &= f((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')) \\ &= \alpha x + \beta x' - 2(\alpha y + \beta y') + 5(\alpha z + \beta z') \\ &= \alpha(x - 2y + 5z) + \beta(x' - 2y' + 5z' \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

— Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application défini comme suite :

$$g(x,y) = (x - y, 3x + 7y)$$

$$\begin{aligned} g(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) &= g(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (\alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y', 3(\alpha x + \beta x') + 7(\alpha y + \beta y')) \\ &= \alpha(x - y, 3x + 7y) + \beta(x' - y', 3x' + 7y') \\ &= \alpha g(x,y) + \beta g(x',y') \end{aligned}.$$

Théorème 5.1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout n-uplets $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que,

$$\forall i \in 1, \ldots, n, \quad f(e_i) = v_i.$$

Autrement dit les applications linéaires sont entièrement déterminées si les images des vecteurs de base sont connues. En effet, soit x un élément de E, comme $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E, $\exists!\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tel que , $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

5.1 Noyau

Définition 5.2. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle noyau de f et on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F.

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in E \,|\, f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Exemple 5.1.1.

— Soit $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x])$ l'application dérivée $D(p)(x) = p'(x)$. alors :

$$\operatorname{Ker}(D) = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, p \text{ est la fonction polynomial constante}\}.$$

— Calculons les noyaux des application f et g de l'exemple précèdent (5.1).

$$\begin{aligned} u=(x,y,z)\in \operatorname{Ker} f &\Longleftrightarrow f(x,y,z)=0 \\ &\Longleftrightarrow x-2y+5z=0 \\ &\Longleftrightarrow x=2y-5z \\ &\Longleftrightarrow u=(2y-5z,y,z)=y(2,1,0)+z(-5,0,1) \\ &\Longleftrightarrow u\in \operatorname{Vect}\{(2,1,0),(-5,0,1)\} \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}\{(2,1,0),(-5,0,1)\}$.

$$\begin{aligned} u=(x,y)\in \operatorname{Ker} g &\Longleftrightarrow g(x,y)=(0,0) \\ &\Longleftrightarrow x-y=0 \text{ et } 3x+7y=0 \\ &\Longleftrightarrow x=y=0 \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} g=\{(0,0)\}$.

Proposition 5.1. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors f est injective si et seulement si,

$$\operatorname{Ker} f=\{0_F\}.$$

Exemple 5.1.2.

— L'application dérivée $D\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[x])$, $D:p\longrightarrow p'$ n'est pas injective, en effet, $\forall x\in\mathbb{R}$, $p'(x)=0$ implique que $p=\textit{constante}$.

— L'application identité, $\mathrm{id}_E:E\longrightarrow E$ est injective.

— L'application linéaire $h:\mathbb{R}[x]\longrightarrow\mathbb{R}[x]$ donnée par $h(p)(x)=x^2p(x)$ est injective.

— L'application $g(x,y)=(x-y,3x+7y)$ est injective, car $\operatorname{Ker} g=\{(0,0)\}$(voir (5.1.1)).

Proposition 5.2. Soit f une application linéaire de E dans F, le noyau $\operatorname{Ker} f$ est un sous espace vectoriel de E

5.2 Image

Définition 5.3. On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble des éléments de F qui sont l'image d'au moins un élément de E.

$$\operatorname{Im} f=\{v\in F\,,\exists u\in E\,:\,f(u)=v\}=\{f(u)\,|\,u\in E\}=f(E).$$

Exemple 5.2.1.

— Soit D l'application dérivée de $\mathbb{R}[x]$, on a $\operatorname{Im} D=\mathbb{R}[x]$, en effet, si $p\in\mathbb{R}[x]$,alors $q(x):=\displaystyle\int_0^x p(t)dt$ est une fonction polynomiale et on a $q'=p$, c'est-à-dire, $D(q)=p$.

— L'image de l'application linéaire $g(x,y)=(x-y,3x+7y)$ est $\mathbb{R}^2$, en effet, pour toute $(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$, on a,
$g(x,y)=(z_1,z_2)$ si $(x,y)=\frac{1}{10}(7z_1+z_2,-3z_1+z_2)$.

Définition 5.4. une application linéaire $f:E\longrightarrow F$ est dite surjective si

$$\operatorname{Im} f=F.$$

Exemple 5.2.2.

— L'application dérivée $D\in\mathcal{L}(\mathbb{R}[x])$, $D:p\longrightarrow p'$ est surjective on a vu que $\operatorname{Im} D=\mathbb{R}[x]$

— L'application identité, $\mathrm{id}_E:E\longrightarrow E$ est surjective.

— L'application linéaire $h:\mathbb{R}[x]\longrightarrow\mathbb{R}[x]$ donnée par $h(p)(x)=x^2p(x)$ n'est surjective, en effet, l'image ne contient pas des fonction affine $(x\to ax+b)$.

— L'application $g(x, y) = (x - y, 3x + 7y)$ est surjective, car $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$.

Remarque 21.

— Soit f une application linéaire de E dans F, si f à la fois injective et surjective (i.e bijective) alors on dit que f est un isomorphisme de E dans F.

— S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphe.

— Si f est un isomorphisme de E dans lui même ($f : E \longrightarrow E$), on dit que f est un automorphisme de E, (exemple id_E, $g(x, y) = (x - y, 3x + 7y)$ sont des automorphismes).

Proposition 5.3. Soit f une application linéaire de E dans F, l'image $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F. Si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, la dimension de l'image de f appelé le rang de l'application f on le note $\operatorname{rg} f$:

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)$$

Remarque 22.
On donne quelque propriétés de rang d'une application linéaire :

— Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) < +\infty$ On a $\operatorname{rg} f \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, f injective. En effet, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E avec $n = \dim(E)$ $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(f(E))$, or

$$f(E) = f(\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Par suite $\operatorname{rg} f \leqslant n$ avec égalité si, et seulement si, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, comme $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $f(x) = 0$, implique $\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = 0$ donc les x_i sont tous nulles, on en déduit que $x = 0$ i.e f injective.

— On a $\operatorname{rg} f \leqslant \dim(F)$ avec égalité si, et seulement si, f surjective. En effet, $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)$ avec $\operatorname{Im} f \subset F$. Par suite $\operatorname{rg} f \leqslant \dim(F)$ avec égalité si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$ i.e. f surjective.

5.3 Théorème du Rang

Le théorème suivant est le résultat clé de ce chapitre. Il relie la dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire.

Théorème 5.2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a alors :

$$\dim(E) = \operatorname{rg} f + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

Démonstration.

Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ *une base de* $\operatorname{Ker} f$*, avec* $m = \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Par le théorème de la base incomplète, il s'ensuit que $(u_1, \ldots, u_m)$ *peut être complété en une base de* E*, disons* $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ *on a donc* $\dim(E) = m + n$.

montrons que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$.

soit $v \in E$*,* v *peut être écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de base ; i.e.*

$$v = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

où $a_i, b_j \in \mathbb{K}$*. En appliquant* f *à* v*, on obtient*

$$f(v) = b_1 f(v_1) + \cdots + b_m f(v_n)$$

où les termes $f(u_i)$ disparaissent puisque $u_i \in \operatorname{Ker} f$. Ceci montre que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ engendre $\operatorname{Im} f$.

Pour montrer que la famille $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$, il reste à montrer que cette famille est libre. Soient $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que,

$$c_1 f(v_1) + \cdots + c_n f(v_n) = 0.$$

Par linéarité de f, on a,

$$f(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = 0,$$

et donc $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \in \operatorname{Ker} f$.
Puisque $(u_1, \ldots, u_m)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$, il existe des scalaires $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{K}$ tel que,

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = d_1 u_1 + \cdots + d_m u_m.$$

Cependant, par l'indépendance linéaire de $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$, ceci implique que tous les coefficients $c_1 = \cdots = c_n = d_1 = \cdots = d_m = 0$. Ainsi, $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ est libre.

$$\dim(E) = m + n = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f$$

Remarque 23.

Ce théorème a un résultat important. Pour montrer qu'une application linéaire est bijective, il faut montrer qu'elle est injective et surjective ; cependant, dans le cas de dimension finie, si la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée sont les mêmes, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés - soit l'injectivité, soit la surjectivité.

Proposition 5.4. Soient E et F deux espace vectoriel de même dimension n, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Remarque 24.

Ce résultat est faux en dimension infinie. En voici un contre-exemple : On a montrer (exemple 5.1.2,5.2.2) que l'application dérivée $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $p \longrightarrow p'$ n'est pas injective mais elle est surjective.

5.4 Matrice d'une application linéaire

Nous allons maintenant voir que toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F des espaces vectoriels de dimension finie, peut être représentée par une matrice, et, vice versa, toute matrice définit une telle application linéaire. Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et que $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ est une base de F. Nous avons vu dans le théorème (5.1) que f est déterminé de manière unique en spécifiant les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n) \in F$. Puisque $(e'_1, \ldots, e'_p)$ est une base de F, il existe des scalaires uniques $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ tels que .

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{1,1}e'_1 + a_{2,1}e'_2 + \ldots + a_{p,1}e'_p \\ f(e_2) &= a_{1,2}e'_1 + a_{2,2}e'_2 + \ldots + a_{p,2}e'_p \\ &\ldots \\ f(e_n) &= a_{1,n}e'_1 + a_{2,n}e'_2 + \ldots + a_{p,n}e'_p \end{aligned} \tag{7}$$

Nous pouvons arranger les scalaires $a_{i,j}$ dans une matrice de type $p \times n$ comme suit :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix} \end{array}$$

Définition 5.5. On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_1\}$ la matrice notée $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}\prime)$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on la note simplement $M(f, \mathcal{B})$.

Exemple 5.4.1.

— Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linaire défini comme suite :

$$f(x, y) = (2x + 3y, x + y, -x - y)$$

la matrice de f dans les base canoniques $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$, $\mathcal{C}' = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est :

$$M(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}') = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

— Soit $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $g(p)(x) = (x + 1)p(x)$, on prend les base canonique on a :

$$M(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E, on a :

$$M(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$$

— Soient le plan $\mathbb{R}^2$ et $\{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ sa base canonique, on considère la rotation de centre O et d'angle θ.

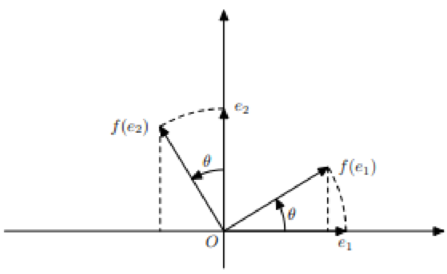

FIGURE 8 –

on a $f(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, et $f(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$, donc :

$$M(f, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarque 25.

— Soient les espaces vectoriels E et F de dimensions n et m, respectivement, et on fixe les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et F respectivement, notons qu'il existe une correspondance entre les applications linéaires dans $\mathcal{L}(E, F)$ et les matrices dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. En effet, Si f une application linéaire, alors la matrice $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A = (a_{i,j})$ est définie par le système d'équation (7). Inversement, soit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on peut définir une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ comme suite :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} e'_i$$

Nous allons voir par la suite qu'on peut exprimer les propriétés de l'application f à partir de celles de la matrice A.

— Nous présentons aussi le lien entre la composition de deux applications le produit de deux matrices. Supposons que E, F, G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ avec des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p), \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e_1}, \dots, \tilde{e_m})$, respectivement. Soit $g : E \longrightarrow F$ et $f : F \longrightarrow G$, des applications linéaires. on pose :

$$M(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A, \quad M(f, \mathcal{B}', \tilde{\mathcal{B}}) = B, \quad M(f \circ g, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = C.$$

La question est de savoir si C est déterminée par $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a, pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, que

$$\begin{aligned}(f \circ g)e_j &= f\left(b_{1j}e'_1 + \dots + b_{nj}e'_n\right) = b_{1j}f(e'_1) + \dots + b_{nj}f(e'_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} f(e'_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\tilde{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\tilde{e_i}.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $C = (c_{ij})$ est donnée par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

On en déduit que :

$$C = AB.$$

Proposition 5.5. Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ des bases de E, F et G respectivement. Si $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :

$$M(f \circ g, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}) = M(f, \mathcal{B}', \tilde{\mathcal{B}})M(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

On écrit brièvement :

$$M(f \circ g) = M(f)M(g)$$

Exemple 5.4.2.

Soit les applications linéaires $g(x, y) = (x-y, 3x+7y)$ et $f(x, y) = (2x+3y, x+y, -x-y)$ on a dans les bases canonique :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Comme pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(f \circ g)(x, y) = f(x-y, 3x+7y) = (11x+5y, 4x+6y, -4x-6y)$, on a :

$$M(f \circ g) = \begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Et avec un calcule simple on trouve que :

$$M(f)M(g) = \begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Remarque 26.

Soit un vecteur $v \in E$, nous pouvons également associer une matrice $M(v)$ à v comme suit :
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe alors des scalaires uniques $b_1, \ldots, b_n$ tels que

$$v = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

La matrice de v est alors définie comme étant la matrice $n \times 1$ suivante :

$$M(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On donne comme exemple La matrice d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est le vecteur colonne ou la matrice de type $n \times 1$

$$M(x)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

puisque $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

Proposition 5.6. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement Alors, pour tout $v \in E$,

$$M(f(v))_{\mathcal{B}'} = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(v)_{\mathcal{B}}$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ une base de F, la matrice de f est $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m}$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} e'_k.$$

Le vecteur $v \in E$ peut être écrit de manière unique comme une combinaison linéaire

$$v = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(v) &= b_1 f(e_1) + \cdots + b_n f(e_n) \\ &= b_1 \sum_{k=1}^{m} a_{k1} e'_k + \cdots + b_n \sum_{k=1}^{m} a_{kn} e'_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} (a_{k1} b_1 + \cdots + a_{kn} b_n) e'_k \end{aligned}$$

Ceci montre que $M(f(v))_{\mathcal{B}'}$ est la matrice de type $m \times 1$.

$$M(f(v))_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{1,1} b_1 + \ldots + a_{1,n} b_n \\ \vdots \\ a_{m,1} b_1 + \ldots + a_{m,n} b_n \end{pmatrix}$$

Il n'est pas difficile de vérifier, en utilisant la formule de la multiplication matricielle, que $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(v)_{\mathcal{B}}$ donne le même résultat.

Proposition 5.7. Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F. Une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective (c'est-à-dire est un isomorphisme) si et seulement si $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ est inversible. De plus :

$$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = M\left(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}\right)$$

ou, d'une manière plus concise : $M\left(f^{-1}\right) = M(f)^{-1}$.

Démonstration.

On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$; d'où $M\left(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{B}\right) = M\left(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}\right)$ Donc :

$$M\left(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}\right) M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n$$

De même, on voit que $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')M\left(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B}\right) = I_n$.

5.5 Changement de base

On considère les deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ d'un même espace vectoriel E de dimension n.

Les vecteurs de base de $\mathcal{B}'$ peuvent s'exprimer dans $\mathcal{B}$ selon les relations :

$$\begin{cases} e'_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + \ldots + a_{n,1}e_n \\ e'_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + \ldots + a_{n,2}e_n \\ \ldots \\ e'_n = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \ldots + a_{n,n}e_n \end{cases}$$

Définition 5.6. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice carrée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ définie par :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les colonnes d'indice i sont formées par les composantes e'_i dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 27.

— La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice de l'application identité :

$$M(\mathrm{id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

— On peut montrer facilement aussi que (voir la proposition (5.7)) :

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = (P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})$$

Exemple 5.5.1. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Sachant que les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ sont définis par :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$$

la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice P^{-1} sera la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, obtenue en explicitant les vecteurs de base de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{e'_1}{2} - \frac{e'_2}{2} \\ \\ e_2 = e'_2 - e'_3 \\ \\ e_3 = \frac{e'_1}{2} + \frac{e'_2}{2} - e'_3 \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.8. Soit v un vecteur de E, En posant X et X' les matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ respectivement, i.e :

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

$$v = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \ldots + x'_ne'_n$$

Nous aurons alors : $X = PX'$ ou $X' = P^{-1}X$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Démonstration.
Les vecteurs de $\mathcal{B}'$ étant reliés aux vecteurs de $\mathcal{B}$ par la matrice de passage :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \ldots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Nous aurons donc :

$$v = x'_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+\ldots+a_{n1}e_n)+x'_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+\ldots+a_n2x_n)+\ldots+x'_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\ldots+a_{nn}e_n)$$

$$v = (a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+\ldots+a_{1n}x'_n)e_1+(a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+\ldots+a_{2n}x'_n)e_2+\ldots+(a_{n1}x'_1+a_{n2}x'_2+\ldots+a_{nn}x'_n)e_n$$

Par identification des composantes :

$$\begin{cases} x_1 & = & a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n \\ x_2 & = & a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n \\ \ldots & & \\ x_n & = & a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n \end{cases}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = PX'$$

Remarque 28.
Soient f une application linéaire de E dans E (endomorphisme), A (resp. A') une matrice carrée d'ordre n associée à f dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$), et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,

$$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}), \qquad A' = M(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}'), \qquad P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Soit X (resp. X') et Y (resp. Y') les matrices colonnes des composantes des vecteurs x et y dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$),

Alors $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{dans } \mathcal{B} : Y = AX \\ \text{dans } \mathcal{B}' : Y' = AX' \end{cases}$ Comme $X = PX'$ et $Y = PY'$, alors :
$Y = PY' = AX = APX'$ soit en multipliant à gauche par P^{-1}, on a :

$$A'X' = Y' = P^{-1}PY' = P^{-1}APX' \Rightarrow Y' = P^{-1}APX'$$

Comme X' est arbitraire alors,

$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 5.5.2.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni des deux bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ et soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]P(X) \to XP'(X)$$

La matrice de f relativement à la base B est

$$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant le théorème précédent, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ est

$$B = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Plus généralement si f une application de E dans F on la proposition suivant :

Proposition 5.9. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F), \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de F. Notons :

$$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{E}) \quad A' = M(f, \mathcal{B}', \mathcal{E}'), \quad P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}, \quad Q = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$$

On a alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

Démonstration.
Soit $x \in E$ un vecteur arbitraire. D'après la proposition (5.8), on a :

$$M(f(x))_{\mathcal{E}'} = Q^{-1}M(f(x))_{\mathcal{E}} = Q^{-1}M(f, \mathcal{B}, \mathcal{E})M(x)_{\mathcal{B}} = Q^{-1}AX$$

où on a posé $X = M(x)_{\mathcal{B}}$. D'autre part, si $X' = M(x)_{\mathcal{B}'}$:

$$M(f(x))_{\mathcal{E}'} = M(f, \mathcal{B}', \mathcal{E}')M(x)_{\mathcal{B}'} = A'X' = A'P^{-1}X$$

Donc :

$$A'P^{-1}X = Q^{-1}AX$$

Comme x est arbitraire, cela implique que $A'P^{-1} = Q^{-1}A$, d'où : $A' = Q^{-1}AP$.

5.6 Exercices :

Exercice 1 :

Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 2 :

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soient $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par : $\varphi(f) = f'$ et $\psi(f)$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E
2. Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3. Déterminer l'images et le noyaux de φ et ψ.

Exercice 3 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent i.e il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 4 :

Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & (P(0), P') \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 5 :

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.
1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
2. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur de E si et seulement si $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E)$.

Exercice 6 :

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. On note

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ \pi : P &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i \end{aligned}$$

1. Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$, dont on déterminera le noyau et l'image.
2. Montrer que $F = \{Q \prod_{k=0}^{n} (X - \lambda_k), Q \in \mathbb{R}[X]\}$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 :

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_1(x,y,z) = (x+y, x-2y+1)$.
b) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_2(x,y,z) = \big(y^2, x-3z, 2y+z\big)$.
c) $f_3 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad f_3(P) = P + XP''$.

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y - 2z, 3x + 2y - 2z)$
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer le noyau $\operatorname{Ker} f$.
e) L'application f est-elle injective ?
d) Donner une base et la dimension de $\operatorname{Im} f$.
e) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 9 :

Soit f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P(X) - P(X - 1)$$

a) Déterminer $f(1), f(X), f\left(X^2\right)$ et $f\left(X^3\right)$.
b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
c) En déduire La dimension de $\operatorname{Ker} f$.
d) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 10 :

Donner dans chaque cas le rang de l'endomorphisme f. L'endomorphisme f est-t-il injectif ? surjectif ?
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x - 2y + 2z, 3x + y + 3z)$.
b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y + 2z, x - y + 2z)$.
c) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = (X - 1)P'$.

Exercice 11 :

Soit l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3, \quad f(P) = (P(0), P(1), P(0) - 3P(1))$$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ des bases canoniques respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
a) Donner la matrice A de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
b) Calculer le rang de la matrice A.
c) L'application f est-elle surjective ?
d) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
e) Donner la dimension du noyau de f.
f) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 12 :

a) Montrer que l'application linéaire f est bijective et déterminer sa réciproque f^{-1}.

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3 \quad f(P) = \left(P(-1).P'(-1), P''(-1)\right).$$

b) Montrer que l'endomorphisme f est bijectif est donner sa réciproque f^{-1}.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(z, y, z) = (x + y - z, 2x + y + z, z + 2y - z)$$

Exercice 13 :

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
a) Montrer que $g \circ f = f \circ g, \quad \forall g \in \mathcal{L}(E) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : f = \lambda \operatorname{id}_E$.
b) Montrer que $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$.

c) Montrer que $\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(f)=E \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}\left(f^2\right)$.
d) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Ker}\left(f^2\right) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f)=\operatorname{Im}\left(f^2\right) \Longleftrightarrow E=\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$$

Exercice 14 :

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$
a) Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g)\}$.
b) Montrer que $g \circ f=0 \Longleftrightarrow \operatorname{lm}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.
c) Supposons que g est injective et que $g \circ f=0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 15 :

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. $\left(p^2=p \text{ et } q^2=q\right)$.
a) Montrer que $E=\operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
b) Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q=q \circ p=0$.

Exercice 16 :

Soit $\mathcal{B}_1=(e_1, e_1, e_1)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par :

$$f(e_1)=e_1+e_2+e_3, \quad f(e_2)=e_1-e_2 \text{ et } f(e_3)=e_2-e_3$$

a) Donner la matrice $A_1=M(f, \mathcal{B}_1)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}_1=(e_1, e_2, e_3)$.
b) Déterminer le noyau de f.
c) On pose : $\epsilon_1=e_1, \epsilon_2=e_1-e_2$ et $\epsilon_3=e_1+e_2+e_3$.
d) Montrer que $\mathcal{B}_2=(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
e) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$.
f) Exprimer e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}_2$.
g) Déterminer $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2)$ et $f(\epsilon_3)$ en fonction de ϵ_1, ϵ_2 et ϵ_3 et donner la matrice : $A_2=M(f, \mathcal{B}_2)$ de l'application f dans la base $\mathcal{B}_1$.
h) Exprimer A_2 en fonction de A_1 et P.

Exercice 17 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $f(1)=f(X)=f\left(X^2\right)=1+X+X^2$.
($\mathcal{B}=\left(1, X, X^2\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$).
a) Donner la matrice $A=M(f, \mathcal{B})$.
b) Déterminer le rang de f.
c) Déterminer une base (P_1, P_2) de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base (P_3) de $\operatorname{Im}(f)$.
d) Montrer que $\mathrm{B}'=(P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
e) Déterminer $A'=M(f, \mathcal{B}')$.
f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer La matrice $(A')^n=M(f^n, \mathcal{B}')$.
g) En déduire la matrice $A^n=M(f^n, \mathcal{B})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6 Chapitre V : Déterminant et Rang d'une matrice.

6.1 Forme n-linéaire alternée

Définition 6.1. Une **forme n-linéaire alternée** sur E est une application

$$f : E^n \to \mathbb{K}$$

vérifiant :

— Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tous $u_1, \ldots, u_n \in E$, l'application

$$u \in E \mapsto f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)$$

est linéaire ;

— $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$ dès que deux vecteurs parmi $u_1, \ldots, u_n$ sont égaux.

Remarque 29. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (le groupe symétrique), et si f est une forme n-linéaire alternée sur E, alors pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$:

$$f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \ldots, u_n)$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Proposition 6.1. Si f est une forme n-linéaire alternée, alors pour toute famille liée $(u_1, \ldots, u_n)$, on a :

$$f(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

Théorème 6.1. Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f sur E telle que :

$$f(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

Cette forme n-linéaire est appelée *déterminant dans la base B* et est notée $\det_B$.
De plus, si f est une autre forme n-linéaire alternée sur E, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que :

$$f = \lambda \det_B .$$

Démonstration. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On suppose que les x_j s'écrivent dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ sous la forme :*

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Alors :

$$\det_B(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Soient f une forme linéaire alterné et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Notons $A = (a_{i,j}) = Mat_B(x_1, \ldots, x_n)$. Par multilinéarité :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n} \right) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

Or f est alternée, donc $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ dès que les indices $i_1, \ldots, i_n$ ne sont pas deux à deux distincts.

Après simplification des termes correspondants, il ne reste plus que les termes pour lesquels $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux applications bijectives $\sigma : j \mapsto i_j$.

Ainsi :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

Or f est alternée donc antisymétrique, et par conséquent :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \ldots, e_n)$$

Finalement :

$$f = \lambda \cdot \det_B \quad \textit{avec} \quad \lambda = f(e_1, \ldots, e_n).$$

6.2 Déterminant

Soient u un endomorphisme de E et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Posons :

$$\delta = \det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

Théorème 6.2. Soit φ une forme linéaire alterné, Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on a :

$$\varphi(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \delta\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Démonstration. *D'après 6.1 il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \cdot \det_B$, c'est-à-dire :*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \cdot \det_B(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

Soit $\psi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1), \ldots, u(x_n))$$

On vérifie aisément que $\psi \in \Lambda^n(E)$, et donc il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \alpha \cdot \det_B$, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \quad \psi(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot \det_B(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

Or, d'après (1), on a aussi :

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \lambda \cdot \det_B(u(x_1), \ldots, u(x_n)) \tag{3}$$

En prenant $(x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n)$ dans les équations (2) et (3), on obtient :

$$\varphi(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \alpha \cdot \det_B(e_1, \ldots, e_n) = \alpha$$

et

$$\varphi(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \lambda \cdot \det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \lambda\delta$$

On en déduit que $\alpha = \lambda\delta$. Puis, en reportant cette relation dans l'équation (2), on a :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \quad \varphi(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \delta\lambda \cdot \det_B(x_1, \ldots, x_n) = \delta\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Remarque 30.

La quantité $\det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ ne dépend pas du choix de la base B. En effet, Soit $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de E. En appliquant le résultat précédent à $\varphi = \det_{B'}$ et $(x_1, \ldots, x_n) = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on obtient :

$$\det_{B'}(u(e'_1), \ldots, u(e'_n)) = \delta \cdot \det_{B'}(e'_1, \ldots, e'_n) = \delta$$

Ainsi, la valeur de $\det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \delta$ est indépendante du choix de la base B. Donc cette valeur commune est notée $\det(u)$ et s'appelle le *déterminant de l'endomorphisme u*.

Théorème 6.3. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g).$$

$f \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Démonstration. *Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Considérons $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ l'application définie par :*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \det_B(g(x_1), \ldots, g(x_n))$$

L'application φ est une forme n-linéaire alternée sur E, donc on peut écrire :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \quad \varphi(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det(f) \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

En appliquant cette relation à $(x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n)$, on obtient :

$$\det_B(g(f(e_1)), \ldots, g(f(e_n))) = \det(f) \cdot \det_B(g(e_1), \ldots, g(e_n))$$

Ce qui signifie :

$$\det(g \circ f) = \det(f) \cdot \det(g)$$

Définition 6.2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *déterminant de A* le déterminant des vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Ceci est aussi égal au déterminant de l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

6.3 Calcul du déterminant d'une matrice.

Proposition 6.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2. Le déterminant de A est le scalaire $ad - bc$.

Exemple 6.3.1.
Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est égal à -2.

Le déterminant d'une matrice d'ordre 3 est défini à partir des déterminants de matrices d'ordre 2.

Proposition 6.3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.
Le déterminant de A est le scalaire

$$\det(\mathrm{A}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Exemple 6.3.2.

— Le déterminant de la matrice identité I_3 est égal à 1.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Le déterminant de A est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

— Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de B est

$$\det(B) = 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Pour une matrice carrée A d'ordre n on note Δ_{ij} le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-éme ligne et la j-ème colonne de A.

Proposition 6.4. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice d'ordre n. Le déterminant de A est le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\Delta_{1j}$$

Remarque 31.
Si $A = (a)$ est une matrice carrée d'ordre 1 on définit son déterminant par $\det(A) = a$.

Exemple 6.3.3.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est :

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

— Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de B est :

$$\det(B) = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12.$$

La proposition suivante montre que le déterminant d'une matrice est invariant par développement suivant les lignes ou suivant les colonnes.

Proposition 6.5. Soit A une matrice d'ordre n. Alors :
1. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

2. Pour tout $1 \leq j \leq n$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

Le signe de $(-1)^{i+j}$ est donné par le tableau

$$\begin{pmatrix} + & - & + & & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & & \\ + & - & + & & \\ & & & \ddots & \\ (-1)^{n+1} & & & & + \end{pmatrix}$$

Cette proposition montre que le calcul du déterminant devient plus simple en développant suivant la ligne ou la colonne qui contient plus de zéros.

Exemple 6.3.4.

— Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, avec a, b, c, d, e, f des éléments la première colonne. Alors $\det(\mathrm{A}) = a \begin{vmatrix} b & f \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc.$

— Soit $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{pmatrix}$, avec a, b, c, d, e, f des éléments de $\mathbb{K}$. On développe le déterminant suivant la première ligne. Alors $\det(\mathrm{A}) = \mathrm{a} \begin{vmatrix} b & 0 \\ f & c \end{vmatrix} = \mathrm{abc}.$

— Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On développe le déterminant suivant la première colonne. Alors

$$\det(B) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Proposition 6.6. Soit $A = (a_{ij})$ et B deux matrices carrées d'ordre n. Alors :
1. $\det\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right) = \det(\mathrm{A})$.
2. Si A est triangulaire supérieure ou inférieure alors $\det(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
3. $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{BA}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.

La proposition suivante donne des techniques qui facilitent le calcul des déterminants. Pour une matrice carrée A on note L_i le vecteur ligne formé des coefficients de la i-ème ligne de A. De même on note C_j le vecteur colonne formé des coefficients de la j-ème colonne de A.

Proposition 6.7. Soit A une matrice d'ordre n et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les propriétés suivantes :
1. Si les coefficients d'une ligne ou d'une colonne de A sont tous nuls alors le déterminant de A est nul.
2. Si on multiplie une ligne ou une colonne de A par λ alors le déterminant est multiplié par λ.
3. $\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda^n \det(\mathrm{A})$. En particulier $\det(-\mathrm{A}) = (-1)^{\mathrm{n}} \det(\mathrm{A})$.
4. Si on remplace une ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$, alors le déterminant ne change pas.
5. Si on remplace une colonne C_i par $C_i + \lambda C_j$, avec $i \neq j$, alors le déterminant ne change pas.

Exemple 6.3.5.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 0$ car A contient une colonne nulle.

— Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On remplace la première colonne C_1 par $C_1 + C_2$. Ainsi

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

— Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On remplace la première ligne L_1 par $L_1 - L_2$. Ainsi

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

— Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

On a :

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 + L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

En développant selon la première colonne et on fait des operation $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$:

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & -6 \\ -2 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

en développant selon la première ligne :

$$\det C = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6(6 - 14) = -48$$

— On calcul le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ (en commençant par la dernière)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

— Soit $a, b \in \mathbb{K}, n \geqslant 2$. Calculons

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

En ajoutant toutes les colonnes à la première $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & & (b) \\ \vdots & & \ddots & \\ a+(n-1)b & (b) & & a \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne à chaque autre

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & a-b \end{vmatrix}$$

Finalement

$$D_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

Remarque 32.

On peut aussi raisonner par blocs comme dans l'exemple ci-dessous, en effet, Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et soit la matrice définie parblocs $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Via les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_{n+1}, \ldots, C_n \leftarrow C_n + C_{2n}$,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix}$$

Via les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_1, \ldots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} - L_{n+1}$,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & B \\ O & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$$

Si A et B commutent, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\left(A^2 - B^2\right)$$

Théorème 6.4. (Déterminant de Vandermonde) Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on pose

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Démonstration. *Par récurrence sur $n \geqslant 1$.*
Claire pour $n = 1$.
Supposons la propriété est vraie au rang $n \geqslant 1$. Soit $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{K}$.
Cas 1 : les $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas deux à deux distincts

$$V_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$$

Cas 2 : les $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts. Considérons la fonction

$$f : x \mapsto V_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, x)$$

En développant selon la dernière ligne

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \text{ avec } \alpha_n = V_n(a_1, \ldots, a_n)$$

Or $f(x) = 0$ pour $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ car le déterminant comporte deux lignes identiques. On peut donc factoriser le polynôme

$$f(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

et ainsi on affirme

$$V_{n+1}(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = V_n(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i) = V_n(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$$

Récurrence établie.

On peut maintenant donner une caractérisation des matrices inversibles et calculer leurs inverses.

Définition 6.3. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle comatrice de A, que l'on note $\mathrm{com}(A)$, la matrice carrée d'ordre n définie par $\mathrm{com}(A) = (b_{ij})$ avec

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Exemple 6.3.6.

— Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On a

$$\Delta_{11} = d \quad \Delta_{12} = c \quad \Delta_{21} = b \quad \Delta_{22} = a$$

Donc,

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

— Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

Ainsi,

$$\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Théorème 6.5. Soit A une matrice carrée. Alors :
1. A est inversible si, et seulement si, le déterminant de A est non nul, et on a :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

2. Lorsque A est inversible l'inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{com}(A)^T.$$

Exemple 6.3.7.

— Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On a, $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$ la matrice A est inversible et
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}(\mathrm{com}(A))^T = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

— Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent. On remplace L_3 par $L_3 - L_2$ puis on développe le déterminant suivant la troisième ligne :
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$
Comme det(B) est non nul la matrice B est inversible et
$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}(\mathrm{com}(B))^T = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -3 - 2 = -5 \neq 0$. Donc A est inversible. Les cofacteurs des coefficients de la première ligne sont :
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$
Après calcul des autres cofacteurs, on trouve :
$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

6.4 Rang d'une matrice.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précèdent, on appelle rang d'une application linéaire f la dimension de $\mathrm{Im}\, f$. Puisque $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il faut s'attendre à ce que l'on puisse calculer le rang de f à l'aide de la matrice associée à f.

Définition 6.4. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.
$$\mathrm{rg}(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_m)).$$

Exemple 6.4.1.

— $\mathrm{rg}((1,0,0),(0,-1,0),(1,-1,0)) = \dim(\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,-1,0),(1,-1,0)) = \dim(\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,-1,0)) = 2$.

— $\mathrm{rg}(1, X-1, X^2, X+X^2) = \dim(\mathrm{Vect}(1, X-1, X^2, X+X^2) = \dim(\mathrm{Vect}(1, X-1, X^2) = 3$.

Remarque 33.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille des vecteurs de E on a :

— $\mathrm{rg}(u_1, ..., u_p) \leq p$ avec égalité si et seulement si $\{u_1, ..., u_p\}$ est libre.
— $\mathrm{rg}(u_1, ..., u_p) \leq n$ avec égalité si et seulement si $\{u_1, ..., u_p\}$ est génératrice.

Définition 6.5. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, on note $\{C_1, \ldots, C_n\}$ les vecteurs colonnes de A. On appelle rang de la matrice A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\{C_1, \ldots, C_n\} = \dim \mathrm{Vect}\{C_1, \ldots, C_n\}$$

Exemple 6.4.2.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}((1,0,1),(0,1,-1),(1,1,0)) = \dim(\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,-1)) = 2$

Théorème 6.6. Pour toute matrice A, on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$$

Remarque 34.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, Le théorème précèdent montre que le rang de la famille formée par les vecteurs colonnes égal au rang de la famille formée par les vecteurs lignes.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_n) = \mathrm{rg}(L_1, \ldots, L_p)$$

Proposition 6.8. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, et $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ deux bases quelconques de E et F respectivement, et $A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. On a alors :

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, A$$

En particulier : deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes ont même rang. En effet : Les colonnes de la matrice A sont les vecteurs $C_i = M(f(e_i))_{\mathcal{B}'}$ (la représentation des vecteurs image dans la base $\mathcal{B}'$.donc,

$$\mathrm{rg}\, A = \dim\left(\mathrm{Vect}\{C_1, \ldots, C_n\}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}\right) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rg}\, f$$

Théorème 6.7. Soit A une matrice carrée d'ordre n, alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exemple 6.4.3.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car $\mathrm{rg}(A) = n$, ou bien, car $\det(A) = -1 \neq 0$.

Proposition 6.9. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les opérations élémentaires suivantes ne changent pas le rang de la matrice A :
— Permuter deux lignes de A (ou deux colonnes) $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$).
— Multiplier une ligne (ou une colonne) par un scalaire non nul $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \alpha C_i$).
— Ajouter à une ligne (resp une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. une autre colonne) $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, avec $i \neq j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$).

Exemple 6.4.4.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_4$$

$$= 4 \text{ (On peut vérifier aisément la liberté des vecteurs colonnes)}$$

6.5 Exercice

Exercice 1 :

Calculer les déterminants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ (1) & & & 1 \end{vmatrix}_{[n]} \quad H_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}_{[n]} \quad V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 :

Résoudre l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ non nuls })$$

Exercice 3 :

Soit A une matrice à coefficient dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (c-à-d son inverse est à coeff dans Z) si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 4 :

Soit A une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(A^k) = 0 \quad \text{si et seulement si } A \text{ est nilpotente}$$

Exercice 5 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible tel que,

$$AP = PB.$$

On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1) Montrer que A inversible implique B inversible.
2) Déterminer A^n en fonction de B^n,P et P^{-1}.
3) On suppose dans ce cas que A et B deux matrices à coefficients réels, montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles sont semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Chapitre VI : Systèmes linéaires.

Les systèmes linéaires sont un outil fondamental dans la modélisation scientifique dans différents domaines, en effet : la discrétisation d'équations différentielles ordinaires ou d'équations aux dérivées partielles, la modélisation de problèmes en physique, chimie ou économie conduit souvent à la résolution des systèmes linéaires de très grande taille. Traitons l'exemple suivant qui est donné à titre d'illustration :

Exemple 7.0.1.
La figure 9 montre un circuit électrique comportant des générateurs et des résistances, la tension entre les borne d'une résistance est donnée par la loi d'Ohm : $V = RI$. Supposons qu'on a déjà les valeurs de : $R_1, R_2, R_3, R_4, V_1, V_2$ et V_3, nous souhaitons déterminer les valeurs des intensités électriques : i_1, i_2 et i_3

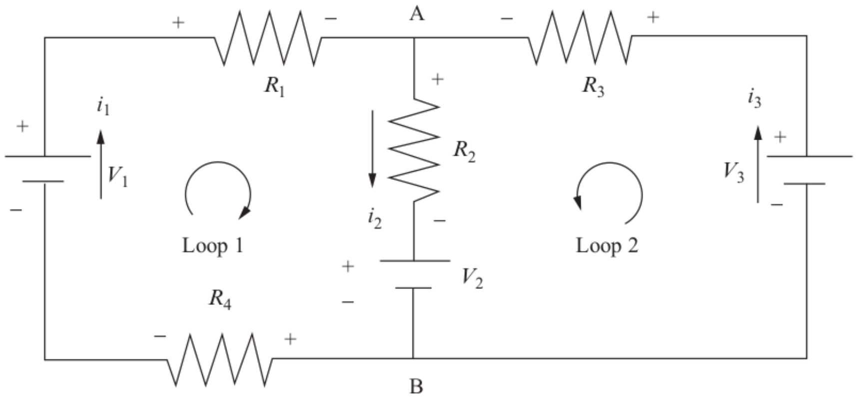

FIGURE 9 – Circuit Électrique

Pour cela, on va utiliser les lois de *Kirchhoff*, qui stipulent :

— **Lois des nœuds :** La somme des intensités de courant électrique qui entre dans un nœud doit être égale à la somme des intensités de courant qui sort de ce nœud.

— **Lois des mailles :** la somme algébrique des différences de potentiel le long de la maille est constamment nulle.

Avant d'appliquer ces deux lois, on doit prendre en considération le sens qu'on a choisi pour les courants (voir figure). Au noeud **A**, on a : $i_1 + i_3 = i_2$. Puis en appliquant la lois des mailles on trouve, pour la maille 1 (Loop 1 sur figure) : $-V_1 + R_1 i_1 + R_2 i_2 + V_2 + R_4 i_1 = 0$, dans la maille 2 (Loop 2) on a : $R_2 i_2 + V_2 - V_3 + R_3 i_3 = 0$. Enfin, on se retrouve avec le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} i_1 - i_2 + i_3 & = & 0 \\ (R_1 + R_4) i_1 + R_2 i_2 & = & V_1 - V_2 \\ R_2 i_2 + R_3 i_3 & = & V_3 - V_2 \end{array}\right.$$

Si l'on prend par exemple les valeurs suivantes pour les générateurs et les résistances : $V_1 = 2V$, $V_2 = 3V$, $V_3 = 5V$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$ et $R_4 = 3\Omega$, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} i_1 - i_2 + i_3 & = & 0 \\ 4i_1 + 2i_2 & = & -1 \\ 2i_2 + 5i_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

La résolution des systèmes linéaires n'est pas une tâche triviale, notamment si le système est de grande taille, sans l'aide d'un calculateur. D'où la motivation de trouver des algorithmes de résolution efficaces où le nombre d'opérations, et donc le temps de calcul, n'est pas prohibitif.

Objectifs du chapitre :

- Comprendre l'aspect théorique des systèmes linéaires : Lien avec espaces vectoriels et matrices
- Savoir utiliser l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan
- Implémention numérique des algorithmes de résolution des systèmes linéaires

7.1 Généralités sur les systèmes linéaires

Pour pouvoir manipuler les systèmes linéaires comme celui de l'exemple 7.0.1, on doit donner une définition plus générale, surtout que les problèmes réels comportent un grand nombres d'inconnus.

Définition 7.1. On appelle système linéaire de p équations et à n inconnus tout système de type :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ .... & .. & .... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

Où les a_{ij}, appelés *coefficients* du système, et les b_i, appelés *second membre*, sont des éléments de $\mathbb{K}$, donnés. les x_i sont dites “inconnus" et résoudre le système (S) signifie trouver des x_i dans $\mathbb{K}$ qui vérifient toutes les équations.
- (S) est dit compatible s'il admet au moins une solution.
- Deux systèmes linéaires sont dits équivalents si ils ont même ensemble de solutions

Remarque 35.

- Il se peut qu'un système linéaire n'admet aucune solution
- On appelle système homogène (S_0) associé à (S), le système obtenu en prenant $b_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$.

Exemple 7.1.1.

- $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ 3x + y + z & = & 0 \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 8 \\ 5x_2 + x_3 + ix_4 & = & 2 \\ -x_3 + 4x_4 & = & -2 \\ 2x_4 & = & 1 \end{array} \right.$

Un premier pas vers la résolution des systèmes linéaires, est la traduction matricielle, qui donne une équation matricielle équivalente donnant la possibilité d'utiliser l'arsenal des matrices.

Définition 7.2. Traduction matricielle :
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{K}),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

alors (S) peut s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(S_m) \qquad AX = B$$

- On dit que A est la matrice du système (S)
- On appelle le rang du système (S) le rang de la matrice A

Exemple 7.1.2. Retrouvons les matrices des systèmes de l'exemple 7.1.1

— $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

— $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & i \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Définition 7.3. Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on appelle :
- Image de M le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

$$\operatorname{Im}(M) = \{Y \in \mathbb{K}^p / \exists X \in \mathbb{K}^n, Y = MX\} = \{MX / X \in \mathbb{K}^n\}$$

- Noyau de M le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

$$\ker(M) = \{X \in \mathbb{K}^n / MX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

Remarque 36. On peut également voir ces deux sous-espaces comme l'image et le noyau de l'application linéaire associée canoniquement à la matrice M.

Une première caractérisation de la résolubilité d'un système linéaire, est liée à l'image de la matrice du système, en effet si une solution X existe, alors $B = AX$, c'est à dire que $B \in \operatorname{Im}(A)$. On pourra imaginer l'image de A comme son rayonnement (un terme plus technique serait "action") sur l'espace des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, une bonne mesure de ce rayonnement est le rang de A (un rayonnement maximal est lorsque le rang vaut n, qui corresponds aux systèmes de Cramer voir 7.2).

Proposition 7.1. Soit le système linéaire $(S) : AX = B$
- (S) est compatible ssi $B \in \operatorname{Im}(A)$
- X est solution de (S_0) ssi $X \in \ker(A)$

Démonstration.
- (S) *est compatible* $\Longleftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n, AX = B \Longleftrightarrow B \in \operatorname{Im}(A)$
- X *est solution de* $(S_0) \Longleftrightarrow AX = 0 \Longleftrightarrow X \in \ker(A)$

Expression vectorielle :

On peut également exprimer le système linéaire à l'aide des outils vectoriels. Notons : $\vec{c_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{c_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_b \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$.

On a alors : $x_1\vec{c_1} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{p1} \end{pmatrix}, \cdots, x_n\vec{c_1} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$ d'où le système est traduit par l'équation :

$$x_1\vec{c_1} + \cdots + x_n\vec{c_n} = \vec{b}$$

Résoudre le système signifie déterminer les coefficients de la décomposition du vecteur $\vec{b} \in \mathbb{K}^p$ sur les vecteurs $\{\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}\}$ de $\mathbb{K}^p$: donc, pour que le système soit compatible il faut et il suffit que $\vec{b}$ appartient à l'espace engendré par les vecteurs $\{\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}\}$.

7.2 Système linéaire de Cramer

Imaginez que vous faites appel à l'aide de votre petit frère en collège pour résoudre $AX = B$, il vous réponds : c'est simple, équation du premier degré, si A est non nul, la solution est : $X = \dfrac{A}{B}$. En faite, votre frère traite le problème sous le perspective de la théorie de groupes. Traduisons les choses alors, A est non nul signifie A inversible, donc de déterminant non nul, puis $\dfrac{1}{A}$ on le note plutôt : A^{-1}.

Définition 7.4. Système de Cramer :
On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A est carrée et inversible.

Exemple 7.2.1. Le deuxième système dans l'exemple 7.1.1 est de Cramer.

Proposition 7.2. Un système de Cramer $AX = B$ admet une unique solution donné par : $X = A^{-1}B$

Démonstration. *Soit* $X \in \mathbb{K}^n$ *: X solution du système* $\Longleftrightarrow AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$

Exemple 7.2.2. Soit à résoudre : $\begin{cases} 2x+3y &= 1 \\ 3x+5y &= 2 \end{cases}$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible, donc il s'agit d'un système de Cramer alors la solution est : $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

À ce stade, vous serez plus ou moins convaincus de la procédure de votre petit frère, mais vous pouvez argumenter que on a pas toujours des matrices inversibles, même si qu'une matrice carrée prise au hasard a beaucoup plus de chance d'être inversible. Mais ce qui limite l'utilisation de ce résultat est plutôt le coût de calcul très élevé (voir 7.2), qui le rend pratique seulement pour des valeurs de n assez petit (à $n = 3$ on commence à se lasser !) ou bien lorsqu'on veut trouver les valeurs de quelques inconnus via les formules suivantes :

Notations : Pour $1 \leq i \leq n$ on désigne par A_i la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur colonne B et on note Δ_i son déterminant : $\Delta_i = \det(A_i)$. On a le théorème suivant :

Théorème 7.1. Système de Cramer :
Soit un système de Cramer $AX = B$. Posons $\Delta = det(A)$. Alors le système $AX = B$ admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} : \, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Démonstration. *Soit $AX = B$ un système de Cramer, on sait qu'il admet une unique solution* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*. En utilisant l'expression vectorielle du système, on a :* $B = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}
\det(A_i) &= \det\left([C_1, \cdots, \overset{\substack{colonne\ i \\ \uparrow}}{B}, \cdots, C_n]\right) \\
&= \det\left(\left[C_1, \cdots, \sum_{j=1}^{n} x_j C_j, \cdots, C_n\right]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det\left([C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_n]\right) \\
&= x_i \det\left([C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n]\right) \\
&= x_i \Delta
\end{aligned}$$

Alors $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

Exemple 7.2.3.

Soit à résoudre : $\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ -x + 2y + z &= 2 \end{cases}$

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$ et $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10$

Donc la solution est $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Complexité :

On s'intéresse au nombre d'opérations (un ordre de grandeur plutôt) dont on a besoin pour résoudre un système de Cramer $AX = B$, de taille n :

Par calcul d'inverse avec la formule : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,\mathrm{com}(A)^T$

- On calcul $\det(A)$ en développant suivant une colonne on a : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, donc il faut calculer n déterminants de taille $n-1$, les multiplier par des nombres, puis additionner. Appelons C_n le nombre d'opérations nécessaires au calcul d'un déterminant de taille n. Nous avons $C_0 = 0$ et $C_n = nC_{n-1} + 2n$. Par récurrence simple on montre que $C_n = 2n!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}$, on sait que la somme $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}$ converge vers e donc on l'équivalence : $C_n \sim 2en!$
- Chaque coefficient de $\mathrm{com}(A)^T$, est un déterminant de taille $n-1$, donc en total le nombre d'opérations est $n^2(n-1)! = n!n$
- En sommant, le nombre d'opérations est : $n! + n!n = (n+1)!$

Voici quelques ordres de grandeurs du temps d'exécution pour cette complexité, tirés de wikipédia

Temps	Type	$n = 10$	$n = 20$	$n = 100$
$\mathcal{O}(n!)$	complexité factorielle	36 ms	770 ans	3×10^{142} ans

TABLE 1 – Temps d'exécution pour différentes valeurs de n

7.3 Méthode d'élimination de Gauss-Jordan (fang cheng)

Nous exposons ci-après une méthode de résolution des systèmes linéaires, qui peut être utilisée également pour d'autres intérêts (calcul du déterminant, inverse...), qui est moins coûteuse au niveau de complexité. La méthode est celle appelée couramment **méthode d'élimination de Gauss-Jordan**, ou encore **méthode du pivot de Gauss**.

- Le nom de la méthode du pivot est un hommage aux deux mathématiciens Gauss et Jordan.
- En 1810, Gauss présente une méthode générale de résolution de système d'équations linéaires, dans un livre étudiant le mouvement de l'astéroïde Pallas, en l'appelant élimination ordinaire.
- En 1888, Wilhelm Jordan Jordan a présenté un exemple numérique de la résolution d'un système linéaire obtenu par application de la méthode des moindres carrés à un problème de géodésie.

- La méthode remonte à une ère plus ancienne (III^e siècle), elle est exposée dans le livre chinois Jiuzhang suanshu (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique), Le huitième chapitre est entièrement consacré à la méthode d'élimination par pivot, appelée fang cheng (disposition, ou modèle rectangulaire).
- La méthode est sûrement plus ancienne, en effet Liu Hui attribue la paternité de cette méthode à Chang Ts'ang, 3 ou 4 siècles plus tôt.

7.3.1 Opérations sur les lignes d'une matrice

Définition 7.5.

— Opération de **permutation** : échange des lignes L_i et L_j de la matrice, codée par $L_i \longleftrightarrow L_j$

— Opération de **dilatation** : multiplication d'une ligne L_i par un scalaire non nul λ, codée par $L_i \longleftarrow \lambda L_i$

— Opération de **transvection** : ajout à une ligne donnée L_i d'une autre ligne L_j éventuellement multipliée par un scalaire λ (le résultat remplaçant la ligne L_i). Cette opération est codée par $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarque 37. Les opérations élémentaires sur les lignes sont traduites matriciellement par multiplication à gauche par des matrices "spécifiques" (voir exercice 4 du TD). Prenons l'exemple suivant : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^3$ calculer MA et MB dans les cas suivants :

1- $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2- $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3-$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quelles opérations sont faites par chacune des multiplications précedentes ?

Théorème 7.2. Soit $AX = B$ un système linéaire. Effectuer l'une des opérations élémentaires (permutation, dilatation ou transvection) à la fois sur A et sur B fournit un système équivalent, donc ne modifie pas l'ensemble des solutions.

Exemple 7.3.1.

Soit le système $\begin{cases} 2x + 6y - 4z &= 4 \\ 3x + 11y - 2z &= 8 \\ 5x + 16y - 7z &= 12 \end{cases}$ la matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 2 \\ 5 & 16 & 7 \end{pmatrix}$

le second membre est $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$. On effectue les opérations suivantes à la fois sur A et B :

1. $L_1 \longleftarrow \frac{1}{2} L_1$
2. $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$
3. $L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1$
4. $L_2 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2$
5. $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$

On obtient le système équivalent suivant : $\begin{cases} x + 3y - 2z &= 2 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{cases}$

7.3.2 Système échelonné

Définition 7.6. Matrice échelonnée
On dit qu'une matrice est échelonnée si ses lignes commencent par un nombre de zéro strictement croissant à mesure que l'indice (des lignes) augmente

Exemple 7.3.2.

— la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est échelonnée

— la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée

Définition 7.7. Système échelonné
Un système linéaire est dit échelonné si sa matrice est échelonnée

Résolution d'un système échelonné par méthode de la "remontée" :

Face à un système échelonné, deux cas peuvent se donner :

1. il se présente une équation du type :
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_i \text{ avec } b_i \neq 0 \tag{8}$$
Dans ce cas il n'y a pas de solution, le système est **incompatible**
2. il n'y a pas d'équation du type (9) :
S'il se présente une équation du type :
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$
Elle peut être écartée, ensuite on aboutit à un système du type :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & & \cdots & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \cdots & \cdots + & & \cdots & \cdots & \cdots & .. & \\ & & a_{ir}x_r + & a_{ir+1}x_{r+1} + & \cdots & & +a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & .. & \\ & & & & a_{ps}x_s + & \cdots & +a_{pn}x_n & = & b_n \end{cases}$$
Où les coefficients en rouge sont tous non nul. Les inconnus en bleu (i.e $x_1, x_2, ..., x_s$) sont dites **inconnues principales**, les autres (s'il y en a) **variables libres**. Deux cas sont possibles :
   (a) Il n'y a pas de variable libre :
   Alors le système admet **une et une seule solution** que l'on obtient en résolvant d'abord la dernière équation et en remontant jusqu'à la première.
   (b) Il y a des variables libres :
   On donne alors aux variables libres des valeurs arbitraires $\lambda_1, ..., \lambda_m$, on porte les λ_i au second membre et l'on est ramené au cas précédent : il existe alors une et une seule solution pour chaque choix de $\lambda_i, ..., \lambda_m$ c'est-à-dire, une **infinité de solutions dépendante de m paramètres** (m = nombre des variables libres).

Exemple 7.3.3.

Résoudre les systèmes suivants :

— $\begin{cases} x + 2y - 3z & = & 4 \\ y + 4z & = & 7 \\ 2z & = & 2 \end{cases}$ commençons par la dernière équation, on a $z = \dfrac{2}{2} = 1$, remplaçant dans la deuxième équation : $y + 4 \times 1 = 7 \iff y = 3$, finalement la première équation nous donne : $x + 2 \times 3 - 3 \times 1 = 4$ donc $x = 1$. Conclusion : $S = \{(1, 3, 1)\}$

— $\begin{cases} x + 3y + 4z - 2w & = & 5 \\ 2y + 5z + w & = & 2 \\ z - w & = & 5 \end{cases}$ Ce système comporte une seule variable libre w qui sera alors notre paramètre, ainsi par la dernière équation on a : $z = 5 + w$, remontons à la deuxième équation, $y = -\dfrac{23}{2} - 3w$, finalement la dernière $x = -\dfrac{99}{2} - 11w$, du coup :
$S = \left\{ \left(-\dfrac{99}{2} - 11w, -\dfrac{23}{2} - 3w, 5 + w, w \right), w \in \mathbb{R} \right\}$

Analyse de la complexité de la "remontée" :
Nous nous limitons au cas des systèmes triangulaires, on souhaite calculer le nombres d'opérations pour résoudre un système de Cramer triangulaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & \cdots & = & \cdots \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

En suivant la méthode en question, nous obtenons : $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$ et $x_k = \dfrac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}x_i\right)$ pour $k = n-1, \cdots, 1$. Donc, pour calculer x_n, on effectue une division et pour calculer x_k avec $k \neq n$, on effectue : une seule division, $n-k$ multiplication, $n-k$ additions. En total, on effectue :

— n division

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ multiplications

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} n-k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ additions

Ainsi le nombre des opérations est $\mathcal{O}(n^2)$

7.3.3 Algorithme d'élimination de Gauss

On présente ci après l'algorithme d'élimination de Gauss qui permet d'échelonner une matrice $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Description :

1. Sur la première colonne de A, on choisi un pivot : à ce niveau n'importe quel coefficient non nul convient, notons ce coefficient : a_{j1}
2. Si $j \neq 1$, on effectue l'opération : $L_1 \longleftrightarrow L_j$, l'objectif étant de mettre le pivot dans la première ligne
3. On annule tous les coefficients situés sous le pivot à l'aide des opérations élémentaires : $\forall i \in \{2, \cdots, p\}\ L_i \longleftarrow Li - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ (sous entendue que a_{11} désigne le pivot qu'on a choisi dans la première étape.
4. On recommence récursivement ces étapes on considérant la sous-matrice située strictement en dessous droite du pivot

Exemple 7.3.4.

Soit à résoudre le système $\begin{cases} 2x - 2y + 2z & = & 0 \\ 2x + 2y - 2z & = & 0 \\ y - z & = & 2 \end{cases}$

On procède par échelonnement de la matrice augmenté du système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftarrow \frac{1}{4}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On obtient le système équivalent suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 2y + 2z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \\ 0 & = & 2 \end{array}\right.$ qui clairement n'a pas de solutions.

Calcul du déterminant et de l'inverse à l'aide de l'algorithme de Gauss

Déterminant :

L'algorithme de Gauss permet également le calcul du déterminant d'une matrice carré $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en suivant les étapes :

1. Après échelonnement de A on obtient une matrice triangulaire, on calcule son déterminant (produit des coefficients diagonaux), on le note D
2. Si au cours de l'échelonnement :
   — On a échangé deux lignes, on multiplie D par -1
   — On a multiplié une ligne par $\alpha \in \mathbb{K}^*$, on multiplie D par $\frac{1}{\alpha}$

Le résultat obtenu est le déterminant de A.

Exemple 7.3.5.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ Pour calculer $\det(A)$ on commence par l'échelonner :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \longleftrightarrow \frac{1}{5}L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_3 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -19/5 & 13/5 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_3 + \frac{19}{5} L_2$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Comme on a multiplié une ligne par $\frac{1}{5}$ on multiplie le déterminant de T par 5, ce qui donne 70 et comme on a échangé la ligne 1 avec la ligne 2, on doit multiplier notre résultat par -1. Le déterminant de A est -70.

Inverse :

Pour calculer l'inverse de A on augmente A par la matrice identité et on applique la méthode de Gauss à la matrice obtenue jusqu'à transformer A en I_n. La matrice obtenue à la place de la matrice identité est l'inverse de A.

Exemple 7.3.6.

Soit à inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ On procède comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_2 - 2L_1$$
$$L_3 \longleftrightarrow L_3 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow -1/2 L_2$$
$$L_3 \longleftrightarrow -1/4 L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_2 + 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_1 - 2L_2 + 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

Finalement : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

Analyse de la complexité de l'algorithme de Gauss :

Supposons qu'on a fixé a_{11} pivot de la première ligne, les opérations à effectuer sont :

— $\alpha_i = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ pour $i = 2, \cdots, n$

— $a'_{ij} = a_{ij} - \alpha_i a_{1,j}$ pour $i = 2, \cdots, n$ et $j = 2, \cdots, n$

— $b'_i = b_i - \alpha_i b_1$ pour $i = 2, \cdots, n$

On compte au bout de ces opérations :

— Divisions : $n - 1$

— Multiplications : $(n-1)(n-1) + (n-1)$

— Additions : $(n-1)(n-1) + (n-1)$

Arrivant à l'étape k, c-à-d on a échelonné jusqu'à la k-ième ligne, pour échelonner la ligne suivante, on effectue les opérations :

— $\alpha_i = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$ pour $i = k+1, \cdots, n$

— $a'_{ij} = a_{ij} - \alpha_i a_{k,j}$ pour $i = k+1, \cdots, n$ et $j = k+1, \cdots, n$

— $b'_i = b_i - \alpha_i b_k$ pour $i = k+1, \cdots, n$

On compte au bout de ces opérations :

— Divisions : $n - k$

— Multiplications : $(n-k)(n-k) + (n-k)$

— Additions : $(n-k)(n-k) + (n-k)$

En sommant tous ces opérations pour $k = 1, \cdots, n-1$, on trouve :

— Divisions : $\dfrac{(n-1)n}{2}$

— Multiplications : $\dfrac{(n-1)(n-2)(2n-1)}{6} + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n^3}{3} + o(n^3)$

— Additions : $\dfrac{(n-1)(n-2)(2n-1)}{6} + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n^3}{3} + o(n^3)$

Au total, le nombre des opérations est : $\dfrac{2}{3}n^3 + o(n^3)$

Voici quelques ordres de grandeurs du temps d'exécution pour cette complexité, tirés de wikipédia

Temps	Type	$n = 10$	$n = 20$	$n = 100$
$\mathcal{O}(n^3)$	complexité cubique	10 µs	80 µs	10ms

TABLE 2 – Temps d'exécution pour différentes valeurs de n

8 Chapitres VII : Rappel sur les polynômes.

On a ainsi traité le problème comme s'il s'agissait simplement de déterminer la forme des racines, dont l'existence est admise sans démonstration, manière de raisonner qui est ici entièrement illusoire et en fait une véritable petitio principii

C. F. Gauss, à propos des « démonstrations » antérieures du théorème de d'Alembert-Gauss

Our brain has two halves : one is responsible for the multiplication of polynomials and languages, and the other half is responsible for orientation of figures in space and all the things important in real life. Mathematics is geometry when you have to use both halves.

—V. I. Arnol'd

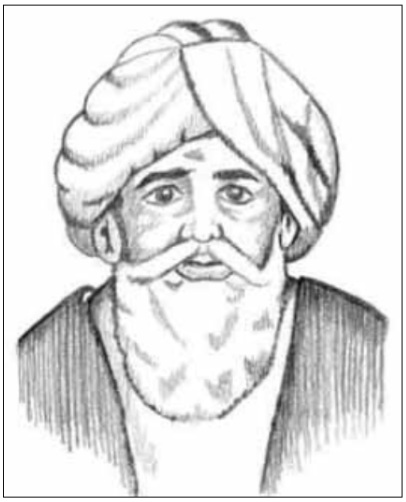

FIGURE 10 – portrait de : Abu Bakr Al-Karaji (953-1029) mathématicien Persan

FIGURE 11 – portrait de : al-Marrakushi ibn Al-Banna (1256-1321) un mathématicien marocain

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude des fonctions polynomiales : $x \mapsto a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$. On donne une définition plus générale, le but étant vous préparer à l'interaction entre les polynômes et autres objets mathématique à savoir les endomorphismes et les matrices (voir chapitre réduction). On traite leurs propriétés arithmétiques (produit, somme, divisibilité...) et leurs propriétés analytiques (racines, dérivations...).

Objectifs du chapitre :

— Comprendre la notion générale d'un polynôme et les propriétés qu'en découlent

— Savoir exploiter les propriétés des polynômes dans d'autres applications, à savoir la réduction des endomorphismes et des matrices.

8.1 Construction des polynômes

Jusqu'ici, On n'a pas fait la distinction entre les polynômes et les fonctions polynomiales. Dans ce paragraphe nous allons voir les différences entre les deux.

Notons par exemple P le polynôme $3X^2+4X+1$. Calculer $P(5)$, c'est transformer 5 en un autre nombre conformément à certaines opérations élémentaires : puissances, multiplication par un réel et addition. Or on a définit ces opérations pour d'autres objets mathématiques, à savoir :

— L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

— L'ensemble des matrices carrés $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

— L'ensemble des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v E

On a bien envie d'écrire, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A) = 3A^2 + 4A + I_n$. Pour cela, il faut renoncer à l'idée qu'un polynôme est une fonction, car la FONCTION $x \mapsto 3x^2 + 4x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, pas sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notre nouvelle vision générale sur les polynômes met le poids sur ses coefficients, en effet, pour calculer $P(A)$, on a besoin juste de savoir les coefficients $a_2 = 3$, $a_1 = 4$ et $a_0 = 1$. Ce qui motive la définition suivante :

Définition 8.1. (Polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$)
On appelle polynôme (à une indéterminée) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$, i.e. toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ dont tous les éléments sont nuls à partir d'un certain rang.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient a_k est appelé le coefficient de degré k du polynôme.
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$ si on choisit de noter X l'indéterminée.

Conformément à cette définition, un polynôme est une **suite** de la forme $(a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, 0, ...)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous allons bientôt noter ce polynôme par $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et montrer la validité de cette notation.

Un premier résultat du définition ci-dessus, est l'identification du polynôme par ses coefficients :

Théorème 8.1. Identification des coefficients Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux

On passe maintenant à définir des polynômes particuliers, et certaines notions liée aux polynômes.

Définition 8.2. On appelle polynôme constant de $\mathbb{K}[X]$ tout polynôme $(\lambda, 0, 0, ...)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Un tel polynôme sera simplement noté λ. Avec cette notation, le polynôme 0 est appelé le polynôme nul.

Définition 8.3. (Degré d'un polynôme, coefficient dominant, polynôme unitaire)
Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme **non nul**.

— Le plus grand indice k pour lequel $a_k \neq 0$ est appelé le degré de P et noté $\deg(P)$.

— Le coefficient de degré $\deg(P)$ de P est appelé son coefficient dominant. S'il est égal à 1, on dit que P est unitaire.

— Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$: $\deg(0) = -\infty$

— On note par $\mathbb{K}_n[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieure ou égale à n

Remarque 38.

— Le degré du polynôme est bien défini, car l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$ est fini d'après la définition du polynôme, et non vide puisque le polynôme est non nul, donc cet ensemble, qui est une partie de $\mathbb{N}$, admet un plus grand élément.

— On verra plus loin que la convention $\deg(0) = -\infty$ s'arrange bien avec les opérations arithmétiques sur le degré.

Exemple 8.1.1. $7X^4 - X^3 + 2X^2 - 3X - 5$ a pour degré 4 et coefficient dominant 7, tandis que $X^3 - 4X^2 + 3X + 5$ est de degré 3 et il est unitaire.

Un élément naturel qui suit la définition donnée pour les polynômes, c'est les opérations sur les polynômes (certaines sont déjà définies pour les suites)

Définition 8.4. (Opérations sur les polynômes)
Soit $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle :

— Somme de P et Q, et on note $P + Q$, le polynôme : $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$

— Multiplication de P par λ, noté λP, le polynôme : $(\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

— Produit de P et Q, noté $P \times Q$ (également $P.Q$ et PQ), le polynôme : $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + \cdots + a_k b_0$$

Remarque 39.
Ces opérations sont bien définies, on laisse le soin au lecteur de montre que $\forall P, Q \in [X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda P, P + Q, PQ$ sont tous des polynômes.

Toutes ces opérations qu'on vient de définir, interagissent entre elles d'une manière "harmonieuse", en effet :

Proposition 8.1. Soit $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

— $P(Q + R) = PQ + PR$, la somme est distributive par rapport au produit

— $P(QR) = (PQ)R = PQR$, le produit est associatif

— $PQ = QP$ le produit est commutatif

— $(P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$, Binôme de Newton.

Après avoir défini ces opérations, on est en mesure d'établir la notation polynomiale, qui va nous permettre de faciliter les calculs, et va nous réconcilier avec les fonctions polynomiales.

Théorème 8.2. (Notation polynomiale) Dans $\mathbb{K}[X]$, on choisit de noter X le polynôme $(0, 1, 0, 0, \cdots)$. On a alors :

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $X^k = (0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$, polynôme dans lequel le 1 est en position « degré k ».
$1 = (1, 0, 0, \cdots)$, $X = (0, 1, 0, 0, \cdots)$, $X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \cdots)$, $X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots)$ et ainsi de suite

— Pour tout $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On peut aussi écrire que $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et cette écriture est unique. Une telle somme est **finie** contrairement aux apparences car la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. Cette notation « infinie » rend de précieux services de rédaction.

Remarque 40. Attention, X n'est pas un nombre. C'est plutôt un polynôme, c-à-d, la suite presque nulle $(0, 1, 0, \cdots)$

Le résultat suivant sert comme premier application des polynômes en calcul algébrique et en probabilité.

Théorème 8.3. (Formule de Vandermonde) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Démonstration. *La formule exprime exactement l'égalité du coefficient de degré n du deux polynômes* $(1+X)^{2n}$ *et* $(1+X)^n \times (1+X)^n$

Théorème 8.4. (Addition, multiplication et degré) Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

— **Degré d'une somme :** $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$
Cette inégalité est une égalité notamment quand $\deg(P) > \deg(Q)$ ou $\deg(Q) > \deg(P)$

— **Degré d'un produit :** $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
En particulier, pour $\lambda \neq 0$: $\deg(\lambda P) = \deg(P)$

Remarque 41.
On invite le lecteur à vérifier que ces égalités sont en accord avec la convention mentionnée ultérieurement : $\deg 0 = -\infty$.

Ces propriétés du degré nous permet d'obtenir une propriété très importante sur les polynômes, il s'agit de l'intégrité de $\mathbb{K}[X]$:

Théorème 8.5.
$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], (PQ = 0 \implies P = 0 \text{ ou } Q = 0)$$

Une autre opération binaire qu'on peut également définir sur l'ensemble des polynômes est la composition :

Définition 8.5. (Composition des polynômes)

— **Composée :** Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k, Q \in \mathbb{K}[X]$. On appelle composée de Q suivie de P le polynôme $P \circ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k Q^k$.

— **Degré d'une composée** : Si Q n'est pas constant alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Passant à une notion analytique qui est adaptée à la nouvelle définition du polynôme :

Définition 8.6. (Dérivation des polynômes) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

— **Polynôme dérivé :** Le polynôme $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k a_k X^{k-1}$ est appelé le polynôme dérivé de P.

— **Polynômes dérivés successifs :** On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nème polynôme dérivé de P, noté $P^{(n)}$. On pose pour cela $P^{(0)} = P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$.

Exemple 8.1.2.
Pour $P = 8X^3 - 5X^2 + 3X + 1$ on a :

— $P' = 24X^2 - 10X + 3$,

— $P'' = 48X - 10$,

— $P''' = 48$,

— $P^{(4)} = 0$.

Théorème 8.6. (Propriétés de la dérivation des polynômes) Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

— **Degré :** Si $\deg(P) \geq n$ alors $\deg P^{(n)} = \deg(P) - n$, et si au contraire $\deg(P) < n$: $P^{(n)} = 0$.

— **Somme :** $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$

— **Produit :** $(PQ)' = P'Q + PQ'$. Plus généralement, on a la formule de Leibniz : $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

— **Composition :** $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

On verra plus tard que cette notion de dérivée va nous permettre de déduire des propriétés fondamentales sur les racines d'un polynôme.

***Note historique* 8.1:**

- Les polynômes dans leur forme la plus simple existent depuis plusieurs millénaires. Les équations quadratiques étaient très connues dès le début de l'histoire. En fait, **les babyloniens 2000 B.C** savaient résoudre des équations quadratiques.
- Le premier récit détaillé de l'algèbre des polynômes date d'environ l'an 1000 et a été rédigé par un mathématicien persan nommé **Abu Bakr Al-Karaji**.
- Dès le **14e siècle**, le point de vue formel apparaît dans les travaux de **Ibn al-Banna**, qui présente les polynômes sous la forme de suites de coefficients

8.2 Divisibilité et relation de divisibilité :

8.2.1 Relation de divisibilité

Définition 8.7. (Divisibilité, diviseur, multiple)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B, ou que A est un diviseur de B, ou que B est divisible par A, ou que B est un multiple de A, s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ pour lequel $B = AP$. Cette relation se note $A \mid B$.

Exemple 8.2.1. Le polynôme $X^2 + 3X + 2$ est divisible par $X + 1$ car $X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2)$.

Cette relation de divisibilité va nous permettre d'instaurer *une arithmétique* des polynôme comme celle des entiers relatifs, dont on va tirer plusieurs résultats, cependant on ne l'étudiera pas d'une façon approfondie.

Théorème 8.7. (Propriétés de la relation de divisibilité) Soient $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$.

— **Relation d'ordre :** La relation de divisibilité $\mid$ est :
  — **Réflexive** : $A \mid A$
  — **Transitive** : Si $A \mid B$ et $B \mid C$ alors $A \mid C$
  — **Antisymétrique sur l'ensemble des polynômes unitaires** : Si $A \mid B$ et $B \mid A$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda B$, on dit que A et B sont associés. Si de plus A et B sont unitaires, alors $A = B$.

— **Combinaisons linéaires** : Si $A \mid B$ et $A \mid C$ alors $A \mid BU + CV$ pour tous $U, V \in \mathbb{K}[X]$

— **Produit** : Si $A \mid B$ et $C \mid D$ alors $AC \mid BD$ en particulier $A^k \mid B^k$ pour $k \in \mathbb{N}$

8.2.2 Division euclidienne

Un théorème fondamental dans l'arithmétique des polynômes est la division euclidienne, qui est analogue à celle des entiers relatif :

Théorème 8.8. (Division euclidienne)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un et un seul couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, pour lequel :

— $A = BQ + R$

— $\deg(R) < deg(B)$

On appelle A le dividende de la division euclidienne de A par B, B son diviseur, Q son quotient et R son reste.

Exemple 8.2.2. $A = 4X^5 - 10X^4 + 6X^3 - 7X2 + 10X - 3$ et $B = 2X^3 + X - 1$. La division euclidienne de A par B s'écrit :

$$A = B.(2X^2 - 5X + 2) + 3X - 1$$

8.3 Racines d'un polynôme

8.3.1 Racines et multiplicité

Théorème 8.9. (Division euclidienne par $X - \lambda$)
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Le reste de la division euclidienne de P par $X - \lambda$ est $P(\lambda)$.

De ce théorème découle directement la double définition suivante :

Définition 8.8. (Racine)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une racine de P (dans $\mathbb{K}$) si l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vraie :

— $P(\lambda) = 0$

— P est divisible par $X - \lambda$.

Remarque 42.

— La précision, **racine dans** $\mathbb{K}$, n'est pas superflue. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, mais il en a deux dans $\mathbb{C}$, à savoir i et $-i$.

— Via la notion de racine, on ramène souvent les problèmes de divisibilité à des problèmes d'évaluation — et vice versa — comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 8.3.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ vaut $(2n - 1)X - (2n - 2)$. En effet, La division euclidienne s'écrit $X^n = (X-1)(X-2)Q + aX + b$ pour certains $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, car le reste est de degré $< 2 = \deg\left(X^2 - 3X + 2\right)$. Évaluons en 1 : $1^n = a + b$, puis en 2 : $2^n = 2a + b$. Après calcul : $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$

Définition 8.9. (Multiplicité d'une racine) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ **non nul** et $\lambda \in \mathbb{K}$:

— L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, (X - \lambda)^k \mid P\}$ possède un plus grand élément m appelé la multiplicité de λ dans P. On dit souvent pour résumer que m est la plus grande puissance de $X - \lambda$ qui divise P

En particulier, dire que λ n'est pas racine de P, c'est dire que λ a pour multiplicité 0 dans P.

— Une racine est dite simple si elle est de multiplicité 1, double si elle est de multiplicité 2, etc

— Plus concrètement, m est caractérisé par les deux propositions suivantes, équivalentes :

  — P est divisible par $(X - \lambda)^m$ mais pas par $(X - \lambda)^{m+1}$

  — Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ pour lequel $P = (X - \lambda)^m Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

Théorème 8.10. (Formule de Taylor polynomiale)
Pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k$$

En particulier $P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

La formule coïncide avec la formule de Taylor que vous avez vu en développement limité, si on travaille avec des fonctions polynomiales, sauf que maintenant la somme est en faite finie, elle est tronquée au degré du polynôme. Un des résultats de cette formule est le lien entre la multiplicité et les dérivées successives.

Théorème 8.11. (Utilisation des dérivées successives pour le calcul d'une multiplicité) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$:
λ est de multiplicité m dans P si et seulement si $P^{(i)}(\lambda) = 0$ pour tout $i \in \{0, \cdots, m-1\}$ mais $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$

Exemple 8.3.2. La multiplicité de 1 dans $P = X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 7X + 6$ est égale à 2. En effet : $P(1) = 1+3-3-7+6 = 0$. Ensuite : $P' = 4X^3 + 9X^2 - 6X - 7$ donc $P'(1) = 0$. Enfin : $P'' = 12X^2 + 18X - 6$ donc $P''(1) = 24 \neq 0$.

Théorème 8.12. (Racines complexes d'un polynôme réel) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λ et $\overline{\lambda}$ ont la même multiplicité dans P.

8.3.2 Nombre maximale des racines

Théorème 8.13. (Factorisation par les racines) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ des racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$, alors $(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r}$ divise P. En particulier $m_1 + \cdots + m_r \leq \deg P$

Exemple 8.3.3. Le polynôme $(X-1)^4 X^2 (X+2)$ possède en tout trois racines distinctes : 1 de multiplicité 4, 0 double et -2 simple. On dit en revanche qu'il possède 7 **racines comptées avec multiplicité**, car $7 = 4+2+1$.

Théorème 8.14. (Nombre maximal de racines comptées avec multiplicité)

- Un polynôme **no nul** P possède au plus $\deg(P)$ racines **comptées avec multiplicité**.
- En particulier, seul le polynôme nul possède une infinité de racine

Remarque 43. Un polynôme de degré n ne possède pas forcément n racines comptées avec multiplicité, par exemple, le polynôme X^2+1, qui est de degré 2, ne possède aucune racine dans $\mathbb{R}$

Exemple 8.3.4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) = n^2 - n + 1$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $P(x) = x^2 - x + 1$.

Considérons le polynôme $R = P - (X^2 - X + 1)$, on a $\forall n \in \mathbb{N} : R(n) = P(n) - (n^2 - n + 1) = 0$, donc R a une infinité de racine, d'après le théorème précèdent, $R = 0$ ainsi $P = X^2 - X + 1$ d'où on a le résultat souhaité.

8.3.3 Polynômes scindés et théorème de D'Alembert-Gauss

Définition 8.10. (Polynôme scindé) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé (sur $\mathbb{K}$) s'il n'est pas constant et possède exactement $\deg(P)$ racines (dans $\mathbb{K}$) comptées avec multiplicité.

Il est équivalent d'exiger que P puisse être écrit sous la forme : $P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où α est le coefficient dominant de P, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ des racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$

Remarque 44. La précision **scindé sur** $\mathbb{K}$ n'est pas superflue car un polynôme peut avoir des racines complexes mais aucune réelle. Le polynôme $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ est ainsi scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$

Exemple 8.3.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, en effet :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Théorème 8.15. (Théorème de D'Alembert-Gauss)
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine **complexe**. A fortiori, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Remarque 45.

- Le théorème est également appelé : Théorème fondamental de l'algèbre
- Le théorème est faux sur $\mathbb{R}$, un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, peut ne pas avoir de racine **réelle**, par exemple le polynôme $X^2 + 1$.
- Ce théorème est un théorème d'existence, sa démonstration ne donne pas une méthode pour trouver les racines explicitement. En effet, il est montré qu' il n'y a pas une formule pour trouver les racines d'un polynôme de degré ≥ 5, pourtant on peut approcher ses racines par des méthodes numériques.

Théorème 8.16. (Divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ et racines)
Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non nuls. Alors A divise B si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la multiplicité de λ dans A est inférieure à sa multiplicité dans B.

8.3.4 Relation entre coefficients et racines

Commençons par deux cas simples pour illustrer le théorème qu'on va énoncer plus tard. On travaille avec des polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$, donc avec des polynômes scindés sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

- **Polynômes de degré 2 :** Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ de racines λ_1 et λ_2 comptées avec multiplicité. Alors : $P = a_2(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = a_2X^2 - a_2(\lambda_1 + \lambda_2)X + a_2\lambda_1\lambda_2$ donc après identification : $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ et $\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2}$
- **Polynômes de degré 3 :** Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ de racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ comptées avec multiplicité. Alors :

  $$P = a_3(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) = a_3X^3 - a_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + a_3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)X - a_3\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

  Donc après identification :
  - $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{a_2}{a_3}$

— $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \dfrac{a_1}{a_3}$

— $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}$

Le résultat qui suit généralise les calculs précédents par simple développement du produit $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$

Théorème 8.17. (Relations coefficients-racines) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ et de racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité.
Si on pose $\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, alors :

$$P = a_n \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) = a_n(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \sigma_3 X^{n-3} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

Remarque 46.

— En d'autre termes, on a la relation entre les racines et les coefficients de P est donnée par : $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$

— les expressions $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sont appelées les fonctions symétriques élémentaires de $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Symétriques parce qu'elles ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on a rangé $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

— Ci-après détaillons $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et σ_4 dans le cas où $n = 4$:
  — $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$,
  — $\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$
  — $\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$
  — $\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4$
  — $\sigma_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$

Exemple 8.3.6.

D'après la factorisation établie dans l'exemple 8.3.5, on a pour tout $n \geq 2$:
$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = 0$ et $\prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n+1}$

8.4 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Définition 8.11. (Polynômes de Lagrange d'une famille de points distincts) Soient $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ **distincts**. Pour tout $i \in \{1, \cdots n\}$, on pose : $L_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \dfrac{X-x_k}{x_i-x_k}$ Les polynômes $L_1, \cdots, L_n$ sont appelés les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \cdots, x_n$.

Exemple 8.4.1.

Pour $n = 3$, $L_1 = \dfrac{(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$, $L_2 = \dfrac{(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$, $L_3 = \dfrac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$

Proposition 8.2. (Propriété fondamentale des polynômes de Lagrange) Soit $L_1, \cdots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \cdots, x_n$ des points distincts de $\mathbb{K}$. alors pour tout $i, j \in \{1, \cdots n\}$ on a :

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Cette propriété nous permet d'établir le résultat suivant qui montre la validité de l'interpolation de Lagrange :

Théorème 8.18. (Polynôme d'interpolation de Lagrange de degré minimal) Soient $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ **distincts** et $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques. Avec les notations précédentes $\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ est le seul polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de **degré strictement inférieure** à n pour lequel $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots n\}$

Remarque 47.

— Une application du théorème précédent, est l'approximation d'une fonction f par un polynôme de degré n, via la donné des point $(x_0, f(x_0)), \cdots, (x_n, f(x_n))$.

— On a également des résultats théoriques du dernier théorème (voir théorème ci après)

corollaire 8.1. (Base de Lagrange) Soit $L_0, \cdots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $\mathbb{K}$. Alors :

— Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ on a : $P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$

— $L_0, \cdots, L_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

9 Chapitres VIII : Réduction des endomorphismes.

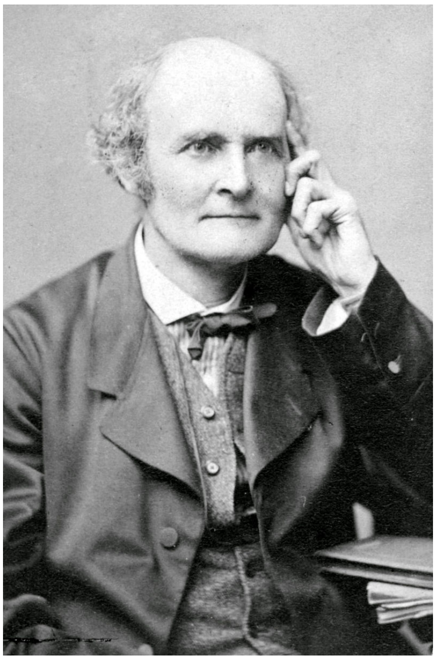

FIGURE 12 – portrait de : Arthur Cayley (16 août 1821 - 26 janvier 1895) mathématicien britannique.

FIGURE 13 – portrait de : William Rowan Hamilton (1805-1865) mathématicien, physicien et astronome irlandais.

9.1 Rappels et notations

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

9.1.1 Polynôme d'endomorphismes, polynôme de matrices

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$, l'endomorphisme $P(u)$ est défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k u^k$$

Où : $u^0 = id_E$ et $\forall k \in \mathbb{N} : \ u^{k+1} = u \circ u^k$ (i.e $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$).

On note l'ensemble des polynômes en u par $\mathbb{K}[u]$, i.e : $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \backslash P \in \mathbb{K}[X]\}$

Règles de calcul dans $\mathbb{K}[u]$:
Soient $u \in \mathcal{L}(E), P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

— $1_{\mathbb{K}[X]}(u) = \mathrm{id}_E$.

— $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$

— $(\lambda P)(u) = \lambda(P(u))$

— $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$.

D'une façon analogue, on définie polynôme d'une matrice, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$, La matrice $P(M)$ est défini par :

$$P(M) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k M^k = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \ldots + \alpha_n M^n$$

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que N est un polynôme en M si $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $N = P(M)$.

— Si $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u)$ alors $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(P(u))$.

— Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs avec A et C des matrices carrées, alors $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & B' \\ 0 & P(C) \end{pmatrix}$

— Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, c-à-d il existe $U \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $B = U^{-1}AU$, alors $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(B) = U^{-1}P(A)U$.

Effet d'un changement de base : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u)$ et $B = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{mat}}(u)$, alors : A et B sont semblables et on a : $B = P^{-1}AP$

9.1.2 Projecteurs et symétrie

Soit E_1, E_2 deux s.e.v de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, alors $\forall x \in E$, $\exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

la projection sur E_1 parallèlement à E_2 est l'application :

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application :

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_1 - x_2 \end{aligned}$$

— p est un endomorphisme de E

— $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - id_E)$ ensemble des points fixes et $E_2 = \ker(p)$

— Si q est la projection sur E_2 parallèlement à E_1 alors $p + q = id_E$

— On a l'équivalence : p est une projection de $E \iff p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$

— s est un endomorphisme de E

— $E_1 = \ker(s - id_E)$, l'ensemble des points fixes.

— $E_2 = \ker(s + id_E)$

— $s = 2p - id_E$ avec p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

— On a l'équivalence : s est une symétrie $\iff s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = id_E$

9.1.3 Calcul matriciel par blocs

Produit par blocs

On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ tel que $A, A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

En particulier, si $M = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_q \end{pmatrix}$ des matrices carrées diagonales par bloc avec, $A_i, B_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{K})$ des matrices carrées, où $r_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, alors : $MN = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_qB_q \end{pmatrix}$.

En particulier $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a $M^p = \begin{pmatrix} A_1^p & & & \\ & A_2^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q^p \end{pmatrix}$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Déterminant par blocs

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, alors :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

9.2 Sous-espaces stables

Définition 9.1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u ou u-stable si $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, On appelle **endomorphisme induit** par u sur F l'élément $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini pour tout x de F par $u_F(x) = u(x)$:

$$\begin{aligned} u_F : F &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

Exemple 9.2.1.

- Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme.
- Tous les sous-espaces sont stables par une homothétie
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-espace $E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$ est u-stable, et $\operatorname{Im} u$ est u-stable.
- Si $E = F \oplus G$, p la projection sur F parallèlement à G. F est stable par p

Remarque 48. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $F = \operatorname{Vect}\{e_i / i \in I\}$ alors F est u-stable si, et seulement si, $\forall i \in I, u(e_i) \in F$.
- Soit $x \in E \backslash \{0\}$. La droite $\mathbb{K}x$ est u-stable si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$.
- Si F est u-stable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

Définition 9.2. Soient F et G deux s.e.v de E tels que $E = F \oplus G$ et $\mathcal{B}$. On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base de F et $(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ est une base de G

Proposition 9.1. Soient F et G deux s.e.v de E tels que $E = F \oplus G$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont u-stables
2. La matrice de u par rapport à la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Remarque 49. Généralement, si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe. $E_1, \ldots, E_p$ sont u-stables si, et seulement si, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$.

Exemple 9.2.2. Considérons F et G de dimension respective m et $n - m$, et tels que $E = F \oplus G$. Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

1. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(p) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(s) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{pmatrix}$$

9.3 Éléments propres

9.3.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 9.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $\exists x \in E \backslash \{0\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$ alors on dit que :
  - x est un vecteur propre de u.
  - λ est une valeur propre de u.
  - x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.
  - λ est la valeur propre de u associée au vecteur propre x.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{x \in E,\ u(x) = \lambda x\} = \ker(u - \lambda Id_E)$ s'appelle l'espace propre de u associé à λ. On le note $E_\lambda(u)$.
- L'ensemble des valeurs propres de u s'appelle le spectre de u. On le note $\mathcal{S}p(u)$

Exemple 9.3.1. Pour tout réel a, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est un vecteur propre de la dérivation (qui est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).

Remarque 50.

- 0 n'est jamais vecteur propre de u.
- Soit $x \in E \backslash \{0\}$. x est un vecteur propre de u si, et seulement si, la droite $\mathbb{K}x$ est u-stable si, et seulement si, le système $(x, u(x))$ est lié.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$:
  - $\lambda \in Sp(u) \iff E_\lambda(u) \neq \{0\} \iff \dim E_\lambda(u) \geq 1 \iff u - \lambda id_E$ n'est pas injectif.

— On a $\lambda \in Sp(u) \Longleftrightarrow \det(u - \lambda id_E) = 0$.

Proposition 9.2. Soient $u \in \mathcal{L}(E), x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
- — Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- — Si $\lambda \in \mathcal{S}p(u)$ alors $P(\lambda) \in \mathcal{S}p(P(u))$. Autrement dit, $P(\mathcal{S}p(u)) \subset \mathcal{S}p(P(u))$.
- — Si $P(u) = 0$ et $\lambda \in Sp(u)$ alors λ est une racine de P.

Remarque 51. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$:
- — Si u admet un polynôme annulateur non nul P alors on cherche les valeurs propres de u parmi les racines de P.
- — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$, notant $\mathcal{Z}(P)$, l'ensemble de ses racines. L'inclusion $Sp(u) \subset \mathcal{Z}(P)$ peut être stricte. En effet, Pour $u = id_E$ et $P = X^2 - X$, on a $P(u) = 0$ mais $Sp(u) = \{1\}$ et $\mathcal{Z}(P) = \{0, 1\}$.

corollaire 9.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$
- — Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe. Généralement si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de valeurs propres de u deux à deux distincts, alors la somme $\sum_{i\in I} E_{\lambda_i}(u)$ est directe.
- — Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs propres de E associés à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ deux à deux distinctes. Alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre.
- — Tout endomorphisme de E admet au plus n valeurs propres distinctes.

9.3.2 Éléments propres d'une matrice

D'une façon analogue on peut définir les éléments propres d'une matrice :

Définition 9.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- — Si $\exists X \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $AX = \lambda X$ alors on dit que :
  - — λ est valeur propre de A.
  - — X est un vecteur propre de A.
  - — λ est la valeur propre de A associée à X.
  - — X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
- — Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble $\{X \in \mathbb{K}^n, AX = \lambda X\} = \ker(A - \lambda I_n)$ s'appelle l'espace propre de A associé à λ. On le note $E_\lambda(A)$.
- — L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A. On le note $\mathcal{S}p(A)$.

Remarque 52. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- — Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors :
  - — $\mathcal{S}p(A) = \mathcal{S}p(u)$. En particulier, A admet au plus n valeurs propres.
  - — Soit $x \in \mathbb{K}^n$ et $X = \mathrm{mat}_\mathcal{B}(x)$. X est un vecteur propre de A si, et seulement si, x est un vecteur propre de u.
- — $\mathcal{S}p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \backslash \det(\lambda I_n - A) = 0\}$
- — $\mathcal{S}p(A) = \mathcal{S}p(A^T)$
- — Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont les éléments diagonaux.
- — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $\mathcal{S}p_\mathbb{R}(A) \subset \mathcal{S}p_\mathbb{C}(A)$. Cette inclusion peut être stricte par exemple si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 9.3.

— Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec A et B sont des matrices carrées alors $\mathcal{S}p(M) = \mathcal{S}p(A) \cup \mathcal{S}p(C)$

— Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables alors $\mathcal{S}p(A) = \mathcal{S}p(B)$

Remarque 53. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $E_\lambda(B) = P^{-1}E_\lambda(A)$.

9.3.3 Exemples :

1. **Projecteurs :**
   Supposons que $E = F \oplus G$ avec F et G non réduits à $\{0\}$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :
   $$\mathcal{S}p(p) = \{0, 1\}, \quad E_0 = \ker p = G, \quad E_1 = \operatorname{Im} p = F$$
2. **Symétries :**
   Si l'on considère maintenant la symétrie s par rapport à F parallèlement à G, alors on a :
   $$\mathcal{S}p(p) = \{-1, 1\}, \quad E_{-1} = G, \quad E_1 = F$$
3. **Endomorphismes nilpotents :**

Définition 9.5.

— On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Le plus petit p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de u.

— On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Le plus petit p vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de A

Exemple 9.3.2.

— On a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ donc la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente, son indice de nilpotence est 2

— Toute matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale est nilpotente

Remarque 54. Puisque $u^0 = id_E$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, alors l'indice de nilpotence est toujours supérieur ou égale à 1. On va montrer (plus loin dans le cours) qu'il est inférieur à $\dim E$.

Proposition 9.4.

— Une matrice A est nilpotente si et seulement si l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A par rapport à la base canonique est nilpotent.

— Si u est un endomorphisme nilpotent alors $\mathcal{S}p(u) = \{0\}$

— Si A est une matrice nilpotente alors $\mathcal{S}p(A) = \{0\}$

4. **Deux exemples "pathologiques" en dimension infinie :**
   Considérant l'endomorphisme de dérivation :
   $$D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Pour tout réel λ, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ. Donc $\mathcal{S}p(D) = \mathbb{R}$ Considérons l'endomorphisme :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de T, alors $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $T(P) = \lambda P$ alors $(X - \lambda)P = 0$ or $P \neq 0$ donc $X - \lambda = 0$ absurde. D'où $\mathcal{S}p(T) = \emptyset$

9.4 Polynôme Caractéristique

Définition 9.6.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de u, est défini par : $\chi_u = \det(Xid_E - u)$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A, est défini par : $\chi_A = \det(XI_n - A)$

Remarque 55. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Coefficient dominant de χ_A (resp χ_u) est 1
- $\deg(\chi_A) = \deg(\chi_u) = n$
- $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$
- Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A et C des matrices carrées, alors $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$
- Si χ_A est scindé alors : $\mathrm{Tr}\, A = \sum\limits_{\lambda \in \mathcal{S}p(A)} \lambda$ et $\det A = \prod\limits_{\lambda \in \mathcal{S}p(A)} \lambda$ où les valeurs propres sont comptées avec leurs ordres de multiplicité comme racines de χ_A

Exemple 9.4.1.
- Dans le cas $n = 2$, on a $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det A$
- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X-1)(X-3)$
- Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_B = (X-1)^2$
- Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $\chi_C = (X-1)(X-2)^2$.
- **Matrice triangulaire :**

  Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \ldots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\ldots(X - \lambda_n)$

Proposition 9.5. Soit et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
- $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.
- $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- Si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$.

Théorème 9.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\lambda \in \mathcal{S}p(A)$ si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$. Autrement dit $\mathcal{Z}(\chi_A) = \mathcal{S}p(A)$.

corollaire 9.2.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathcal{S}p(A)$ a au plus n éléments
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{S}p(A)$ n'est pas vide

Exemple 9.4.2.

— **Matrice de compagnon :** Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, on appelle matrice compagnon la matrice : $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Pour calculer le polynôme caractéristique du matrice compagnon en effectue l'opération : $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \ldots + X^{n-1}L_n$. On trouve $\chi_C = \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$

— **Projecteur :**
Supposons que $E = F \oplus G$ avec F et G non réduits à $\{0\}$ avec $\dim F = m$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. On sait qu'on peut trouver une base (B) de E telle que :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(p) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\chi_p = \det \begin{pmatrix} (X-1)I_m & 0 \\ 0 & XI_{n-m} \end{pmatrix} = (X-1)^m X^{n-m}$

— **Symétrie :**
Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G On sait qu'on peut trouver une base (B) de E telle que :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(p) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_{n-m} \end{pmatrix}$$

Donc $\chi_p = \det \begin{pmatrix} (X-1)I_m & 0 \\ 0 & (X+1)I_{n-m} \end{pmatrix} = (X-1)^m (X+1)^{n-m}$

— **Endomorphismes nilpotents :** On a vu que le spectre d'un endomorphisme nilpotent u était réduit à $\{0\}$. Par conséquent χ_u est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 ayant pour unique racine 0 dans $\mathbb{C}$. Comme tout polynôme (non constant) est scindé sur $\mathbb{C}$, on en déduit que $\chi_u = X^n$.

Proposition 9.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

— Soit F un sous-espace stable pour u. Notons u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Alors χ_{u_F} divise χ_u.

— Supposons que $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u. Alors $\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$

corollaire 9.3. Si λ est racine de χ_u de multiplicité α alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$. Le nombre entier α (resp $\dim E_\lambda$) est appelé multiplicité algébrique (resp géométrique) de la valeur propre λ. En particulier, si λ est racine simple alors $\dim E_\lambda = 1$.

Théorème 9.2. Théorème de Cayley-Hamilton

— Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\chi_u(u) = 0$. Autrement dit, χ_u est un polynôme annulateur de u

— De même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\chi_A(A) = 0$

Démonstration. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On se fixe un $v \in E$, et on va montrer que $\chi_f(f)(v) = 0$. En faisant varier v dans E, on obtiendra ainsi que $\chi_f(f) = 0$, comme voulu.*

Pour $x = 0$, c'est évident par linéarité. Pour $x \neq 0$, i.e. $\{x\}$ est libre, on considère :

$$r = \min\left\{k \geq 2 \mid \{x, u(x), \dots, u^k(x)\} \text{ est liée}\right\},$$

de sorte que $u^r(x)$ est combinaison linéaire de $\{x, \dots, u^{r-1}(x)\}$, qui est libre. Il existe donc des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{r-1} \in K$ tels que :

$$u^r(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{r-1} u^{r-1}(x).$$

On complète ensuite la famille libre $\{x, u(x), \dots, u^{r-1}(x)\}$ *en une base* $\mathcal{B}$ *de* E*, dans laquelle l'endomorphisme* u *s'écrit, par blocs :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C(P) & * \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

où $C(P)$ *est la matrice compagne du polynôme*

$$P = X^r - a_{r-1}X^{r-1} - \cdots - a_1 X - a_0,$$

et $P(u)(x) = 0$*.*

D'après le lemme sur le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\chi_u = \det(X \cdot I_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \chi_{C(P)} \cdot \chi_M = P \cdot \chi_M.$$

Ainsi, en appliquant à v*, on obtient :*

$$\chi_u(u)(v) = \chi_M(u)\,(P(u)(x)) = \chi_M(u)(0) = 0,$$

puisque $P(u)(v) = 0$*.*

Comme cela est vrai pour tout $x \in E$*, on a bien :*

$$\chi_u(u) = 0.$$

Remarque 56. Calcul de la puissance n-ème d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n = Q_n \chi_A + R_n \tag{9}$$

la division euclidienne de X^n par χ_A Donc $A^n = Q_n(A)\chi_A(A) + R_n(A) = R_n(A)$. Pour déterminer R_n, on évalue l'équation 9 en les valeurs propres de A, ainsi

$$\forall \lambda \in \mathcal{S}p(A), \quad \lambda^n = R_n(\lambda)$$

Exemple 9.4.3.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On déjà trouvé que $\chi_A = (X-1)(X-3)$ et $\mathcal{S}p(A) = \{1, 3\}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $X^n = Q_n\chi_A + a_n X + b_n$ la division euclidienne de X^n par χ_A, donc $\begin{cases} 1 = a_n + b_n \\ 3^n = 3a_n + b_n \end{cases}$
  D' où $\begin{cases} 2a_n = 3^n - 1 \\ 2b_n = 3 - 3^n \end{cases}$ d'où $A^n = a_n A + b_n I_2 = \frac{1}{2}\left((3^n - 1)A + (3 - 3^n) I_2\right) =$ Au final :

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

9.5 Endomorphismes diagonalisables

Définition 9.7. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

— On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 57. Avec cette définition et celle de la relation de similitude, on vérifie immédiatement qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, l'application linéaire qui lui est canoniquement associée est diagonalisable. En effet : si $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathcal{S}p(u)$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Si $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(u)$, $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = mat_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}(u)$ alors $A = PDP^{-1}$.

Exemple 9.5.1.

- **Projecteur :** Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors n'importe quelle base $(e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est une base de vecteurs propres pour p. Plus précisément, si $\dim F = m$, e_i est associé à la valeur propre 1 si $1 \leq i \leq m$, et à la valeur propre 0 si $m+1 \leq i \leq n$. En conclusion, tout projecteur est diagonalisable.
- **Symétries :** Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors n'importe quelle base $(e_1, \ldots, e_n)$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est une base de vecteurs propres pour s. Plus précisément, si $\dim F = m$, e_i est associé à la valeur propre 1 si $1 \leq i \leq m$, et à la valeur propre -1 si $m+1 \leq i \leq n$. En conclusion, toute symétrie est diagonalisable
- **Endomorphismes nilpotents :** Soit u un endomorphisme nilpotent. On sait que $\mathcal{S}p(u) = \{0\}$. Par conséquent, dire que E admet une base de vecteurs propres pour u revient à dire qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $u(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Donc u est nul. En conclusion, un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement si il est nul.

Théorème 9.3. Critères de diagonalisation 1
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable.
- E admet une base formée de vecteurs propre de u
- $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathcal{S}p(u)} E_\lambda(u)$
- $\dim E = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathcal{S}p(u)} \dim(E_\lambda(u))$

corollaire 9.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors u est diagonalisable

Exemple 9.5.2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{S}p(A) = \{-1, 0, 1\}$. Montrer que $A^3 = A$

Théorème 9.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes

1. u est diagonalisbale
2. χ_u scindé et pour tout valeur propre $\lambda \in \mathcal{S}p(u)$, la multiplicité algébrique est égale à la multiplicité géométrique.

9.6 Endomorphismes trigonalisables

Définition 9.8. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 58.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A. A est trigonalisable si, et seulement si, f est trigonalisable.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $M = \underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} u$
   - u est trigonalisable si, et seulement si, M est trigonalisable.
   - M est triangulaire supérieure si, et seulement si, $\forall k \in \{1, \dots, n\}, u(e_k) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
   - M est triangulaire strictement supérieure si, et seulement si, $u(e_1) = 0$ et $\forall k \in \{2, \dots, n\}, u(e_k) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$

Théorème 9.5. Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé. De plus, si $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

corollaire 9.5.

- Si $\mathbb{K} = C$ alors tout endomorphisme de E est trigonalisable
- Toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$

corollaire 9.6. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est nilpotent
2. $\mathcal{S}p(u) = \{0\}$,
3. $\chi_u = X^n$
4. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}} u = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

corollaire 9.7. Si F est stable par u alors u est trigonalisable entraîne u_F est trigonalisable.

9.7 Polynôme minimal

Un autre polynôme intéressant à l'étude des endomorphismes s'ajoute. On parle ici du polynôme minimal.

Théorème 9.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un unique polynôme unitaire, noté π_u, tel que :

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \backslash P(u) = 0\} = \pi_u \mathbb{K}[X]$$

π_u s'appelle le polynôme minimal de u. En d'autre termes, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, si $P(u) = 0$ alors $\pi_u \mid P$

Proposition 9.7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et P un polynôme unitaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $P = \pi_u$
2. $P(u) = 0$ et $(\forall Q \in \mathbb{K}[X], Q(u) = 0 \implies P \mid Q)$
3. $P(u) = 0$ et $(\forall Q \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, Q(u) = 0 \implies \deg P \leq \deg Q)$

Remarque 59. La dernière assertion de la proposition 9.7, explique le terme minimal. En effet π_u est minimal parmi les polynôme annulateur de u au sens du degré.

Proposition 9.8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A par rapport à une base de E. Alors $\pi_u = \pi_A$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur. De la proposition précédente, on déduit la

Proposition 9.9. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. En particulier, $1 \leq \deg \pi_u \leq n$. De plus, si χ_u (resp. χ_A) est scindé alors π_u (resp. π_A) est aussi scindé.

Listons ci-après quelques propriétés du polynôme minimal

Proposition 9.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

— $\pi_A = \pi_{{}^tA}$

— Si A est semblable à $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\pi_A = \pi_B$

— Si F est un sous-espace stable de u alors π_{u_F} divise π_u.

Proposition 9.11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

— λ est valeur propre de u.

— λ est racine de χ_u

— λ est racine de π_u

Exemple 9.7.1.

1. **Homothéties :**
   Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on considère l'homothétie $u = \lambda id_E$. Alors $\pi_u = X - \lambda$. En effet, par définition même de u, le polynôme $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de u. Mais comme $\deg \pi_u \geq 1$, on en déduit que $\pi_u = X - \lambda$.
2. **Projecteur :**
   Supposons que $E = F \oplus G$ avec F et G non réduits à $\{0\}$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. On sait que $\mathcal{S}p(p) = \{0, 1\}$ donc 0 et 1 sont des racines de π_p, ainsi $X^2 - X$ divise π_p. Inversement, puisque p projecteur alors $p^2 = p$ donc $X^2 - X$ annulateur de p, ainsi π_p divise $X^2 - X$. D'où $\pi_p = X^2 - X$.
3. **Symétrie :**
   Supposons que $E = F \oplus G$ avec F et G non réduits à $\{0\}$. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On sait que $\mathcal{S}p(p) = \{-1, 1\}$ donc $X^2 - 1$ divise π_s. Inversement, puisque s est une symétrie alors $s^2 = id_E$ donc $X^2 - 1$ annulateur de s, ainsi π_s divise $X^2 - X = 1$. D'où $\pi_s = X^2 - 1$.
4. **Endomorphismes nilpotents :**
   Soit u nilpotent d'indice p. Par définition de l'indice de nilpotence, on sait que X^p est un polynôme annulateur de u, et que X^{p-1} ne l'est pas. Donc π_u doit diviser X^p mais pas X^{p-1}. Donc $\pi_u = X^p$

   Remarque 60. Comme π_u doit diviser $\chi_u = X^n$, on a montré au passage que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent sur E est inférieur ou égal à la dimension de E

Définition 9.9. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P et Q sont premiers entre eux, et on note $P \wedge Q = 1$, si le seul polynôme **unitaire** qui divise à la fois P et Q est le polynôme constant 1.

Exemple 9.7.2.

— X et $X-1$ sont premiers entre eux.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq \mu$, alors $(X-\mu) \wedge (X-\lambda) = 1$. Plus généralement pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a $(X-\mu)^p \wedge (X-\lambda)^q = 1$

Lemme 9.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ tel que $P \wedge Q = 1$, on a
$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$
2. Pour tout $P = P_1 \dots P_r \in \mathbb{K}[x]$ tel que $P_1, \dots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux, on a
$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_r(u)$$

Remarque 61. Si PQ est un polynôme annulateur de u, alors le lemme des noyaux donne une décomposition de E en somme de deux sous-espaces stables de u.

Théorème 9.7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. on pose $\mathcal{S}p(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont deux à deux distinctes), Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i. u est diagonalisable,

ii. $\pi_u = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$,

iii. π_u scindé à racines simples,

iv. u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

corollaire 9.8. Soit u un endomorphisme diagonalisable et F un sous-espace stable de u. Alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est diagonalisable.

9.8 Décomposition de Dunford-Schwarz

Théorème 9.8. Décomposition de Dunford-Schwarz

— Soit $u \in L(E)$ à polynôme caractéristique scindé. Alors il existe un endomorphisme d diagonalisable et un endomorphisme n nilpotent tels que :
$$u = d + n \quad dn = nd$$
Cette décomposition est unique.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé. Alors il existe une matrice D diagonalisable, et une matrice N nilpotente telles que :
$$A = D + N \quad DN = ND$$
Cette décomposition est unique.

Applications

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. Montrer que A es diagonalisable si, et seulement si, $\exists k \geq 1$ tel que A^k soit diagonalisable.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A)$ est diagonalisable si, et seulement si A est diagonalisable.