Université Internationale de Casablanca
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Nous innovons pour votre réussite !

Cours

Transferts thermiques

Chapitre 3

Conduction thermique

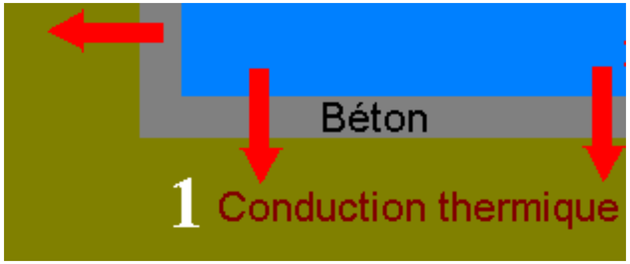
Filière Cycle ingenieur

Session S5

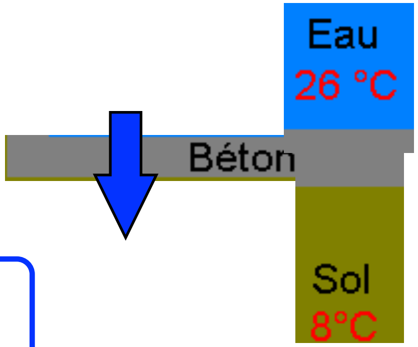
Sommaire

Généralités

- Transfert thermique par conduction



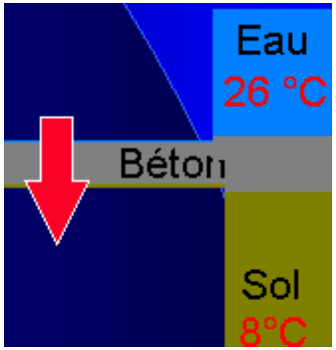
Milieu de propagation du flux de chaleur: un solide



Cause du phénomène: un écart de température

Cause du phénomène de conduction dans un solide:

un écart de température

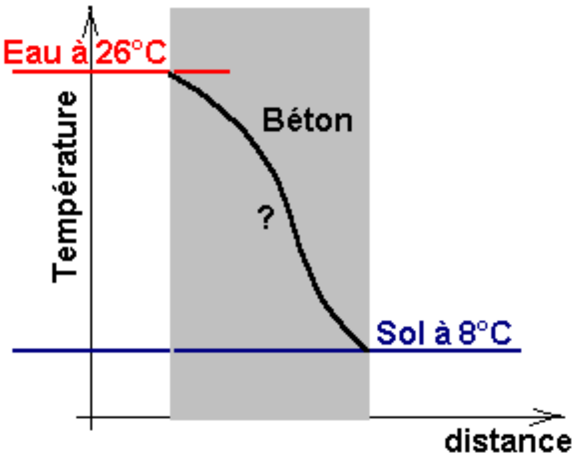


Dans le béton, la température T(M) va varier de 26°C au contact de l'eau, à 8°C au contact du sol.

Il existe donc une fonction de variation de la température

$$T = T(M)$$

dans le milieu conduisant la chaleur

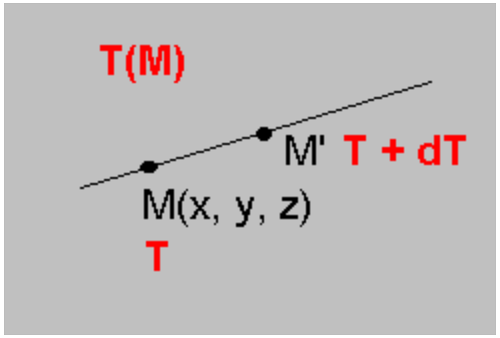


Puisque la température varie dans le solide en fonction de l'endroit où on la mesure,

c'est à dire que:

Lorsqu'on se déplace de: M à M + dM

T(M + dM) = T(M) + dT



T est une fonction des 3 variables d'espace x, y et z:

La variation totale dT est la somme des 3 variations:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$$

Il existe donc un gradient de température:

$$\overrightarrow{gradT}\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

et la variation totale de température est égale au produit scalaire:

$$dT = \overrightarrow{gradT} \bullet \overrightarrow{dM}$$

avec:

$$\overrightarrow{dM}\left(dx, dy, dz\right)$$

Loi de Fourier

Cause ➡ Effet

Un gradient local de température $\overrightarrow{gradT}$ provoque $\vec{\varphi}$ une densité de flux de chaleur locale

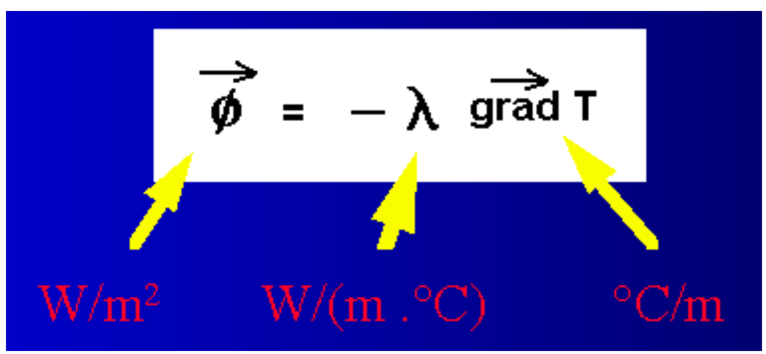
La Loi de Fourier exprime que l'effet produit est proportionnel à sa cause

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{gradT}$$

$\vec{\varphi}$: W/m^2 — λ : W/(m .°C) — $\overrightarrow{gradT}$: °C/m

Coefficient de conductivité thermique

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique
Notation	ρ	C	λ
Unité	kg / m³	J / (kg . K)	W / (m . K)
Argent	10500	230	418
Cuivre	8940	380	389
Aluminium	2700	860	200
Acier	7850	490	46
Béton	2300	960	0,92
Verre	2530	840	1,20
Polystyrène	44		0,025
Laine de verre	200	0,67	0,040



Champs de lignes isothermes

Définition de (C), une ligne isotherme:

Si $M \in (C)$: $T(M) = Cte$ ou $dT \equiv 0$

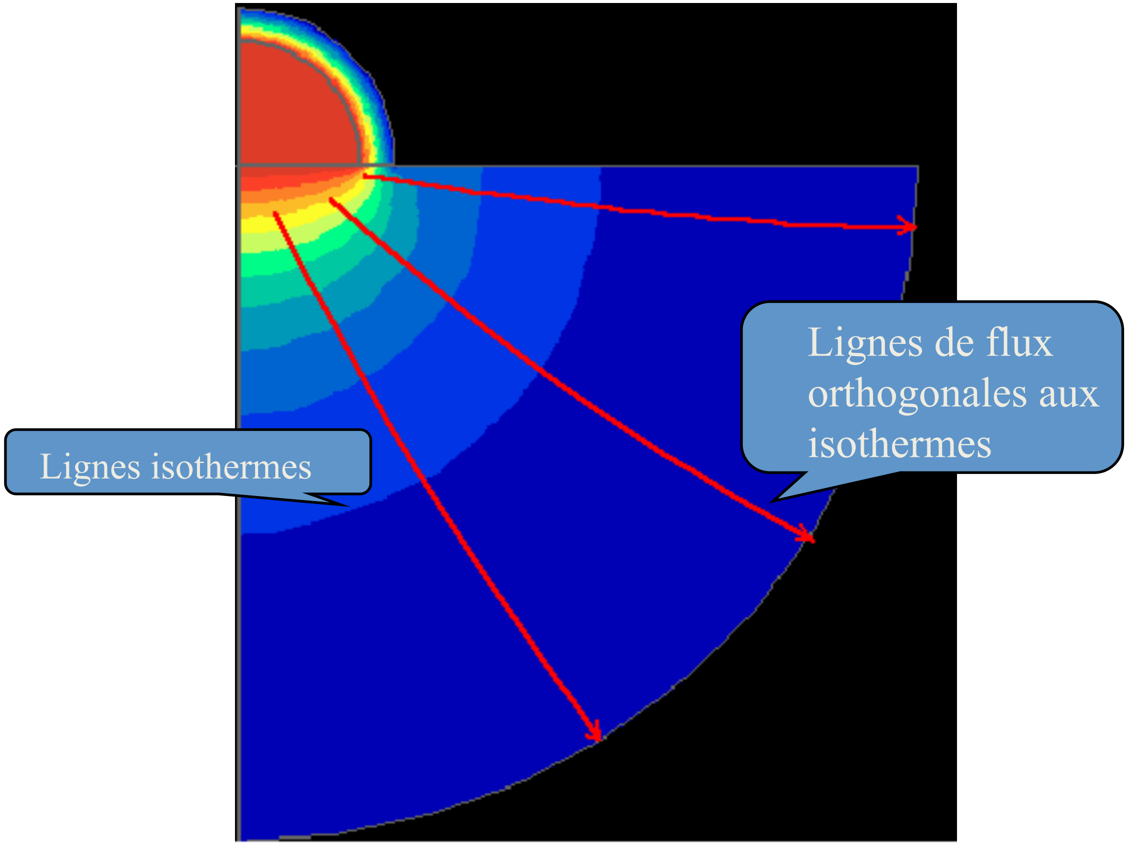
La Loi de Fourier: $\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{gradT}$ ***signifie que les vecteurs densité de flux et gradient de température sont colinéaires.***

La définition du gradient: $dT = \overrightarrow{gradT} \bullet \overrightarrow{dM}$ ***conduit donc à l'expression du produit scalaire:*** $\vec{\varphi} \bullet \overrightarrow{dM} = -\lambda dT$

Si: **dT = 0** ***on a:*** $\vec{\varphi} \bullet \overrightarrow{dM} = 0$ ***qui signifie que les vecteurs densité de flux sont orthogonaux aux lignes isothermes***

quand T en M est égale à T en M + dM

Lignes de flux et isothermes



Equation de la Chaleur

La substance considérée a des caractéristiques thermiques décrites par sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ.

Nous supposerons en outre que le volume V contient des sources internes dégageant de la chaleur avec une puissance volumique p (par effet Joule par exemple).

Si le phénomène considéré n'est pas en régime permanent, mais en régime variable, cela signifie que l'échange de chaleur à travers la surface S provoque une variation de la quantité de chaleur accumulée dans le volume V.

La puissance thermique transférée par conduction dans le volume V a pour expression

$$\Phi = -\iint \vec{\varphi}\,\vec{n}\,ds$$

Il faut y ajouter la puissance dégagée dans le volume V par les sources internes, soit:

$$\iiint p\,dv$$

Pendant l'intervalle de temps dt, la substance contenue dans le volume V emmagasine donc une quantité de chaleur Φ dt , qui va provoquer une variation de température , dépendant de la capacité thermique massique c .Comme on raisonne sur l'unité de volume, il est nécessaire d'introduire la capacité thermique volumique égale à **ρ c**. On aura donc

$$\Phi dt = \iiint \rho\, c\, dT\, dv$$

Soit alors le bilan thermique dans le volume V

$$-\iint \vec{\varphi}\ \vec{n}\ ds + \iiint p\ dv = \iiint \rho\ c\ \frac{\partial T}{\partial t}\ dv$$

La formule d'Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume:

$$\iint \vec{\varphi}\ \vec{n}\ ds = \iiint div\left(\vec{\varphi}\right)\ dv$$

On obtient alors :

$$\iiint \left[-div\,\vec{\varphi}\ + p - \rho\ c\frac{\partial T}{\partial t}\right]\ dv = 0$$

Le volume V considéré étant arbitraire, le bilan thermique instantané s'exprime localement en chaque point M du volume considéré par:

$$-div\,\vec{\varphi} + p - \rho\, c\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

En supposant que les grandeurs c et λ ne dépendent ni de l'espace (substance homogène), ni de la température (approximation valable tant que les écarts de température ne sont pas trop importants), et en tenant compte de la loi de Fourier et du bilan thermique local :

$$div\left(\lambda\, \overrightarrow{grad}T\right) + p - \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

On écrit souvent cette équation sous la forme:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

en introduisant le paramètre:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho\, c}$$

qui représente la ***diffusivité thermique*** de la substance considérée.

La diffusivité thermique d'un solide s'exprime en m^2/s, comme la viscosité cinématique d'un fluide.

Diffusivité thermique de quelques matériaux

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique	Diffusivité thermique
Notation	ρ	c	λ	a
Unité	kg / m^3	J / (kg . K)	W / (m . K)	m^2 / s
Argent	10500	230	418	$1{,}71 . 10^{-4}$
Cuivre	8940	380	389	$1{,}14 . 10^{-4}$
Aluminium	2700	860	200	$0{,}86 . 10^{-4}$
Acier	7850	490	46	$0{,}12 . 10^{-4}$
Béton	2300	960	0,92	$0{,}42 . 10^{-6}$
Verre	2530	840	1,20	$0{,}58 . 10^{-6}$
Polystyrène	44		0,025	
Laine de verre	200	0,67	0,040	

Cas d'un milieu sans sources internes, en régime permanent.

Equation de Laplace

$$\Delta T = 0$$

Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent

Equation de Poisson

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0$$

Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable

Equation de Fourier

$$\Delta T = \frac{\rho\, c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Le problème en 1D (problème du mur simple à faces isothermes)

Milieu à une dimension

une seule variable d'espace x

$x = 0$ **$x = L$**

Dans le cas général, T dépendra de l'espace: ce sera T(x)

$T(x = 0) = T_0$ $T(x = L) = T_L$

et la Loi de Fourier se réduit à l'équation différentielle ci-contre:

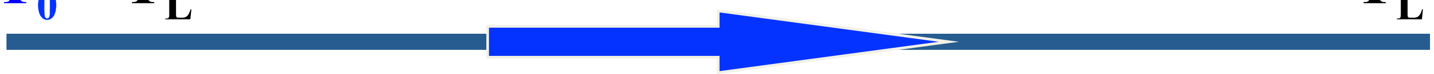
$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

W/m^2 $W/(m\,.°C)$ $°C/m$

Conduction thermique en 1D

Cause du phénomène de conduction dans le milieu: une différence de température

$T_0 > T_L$ $\qquad$ T_L



$x = 0$ $\qquad$ $x = L$

Densité de Flux de chaleur φ en W/m²

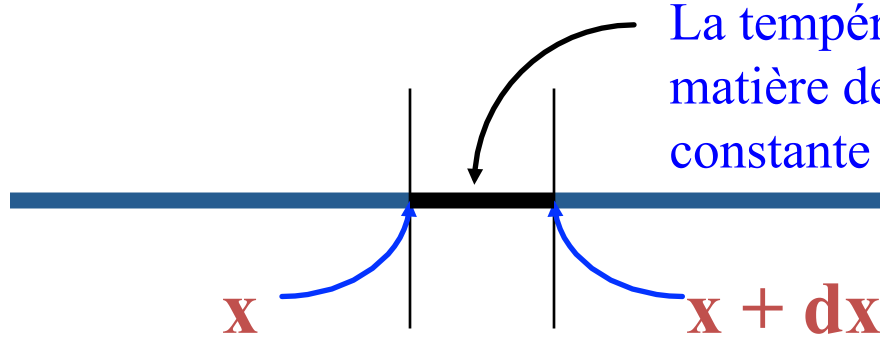
Effet: un Flux de chaleur

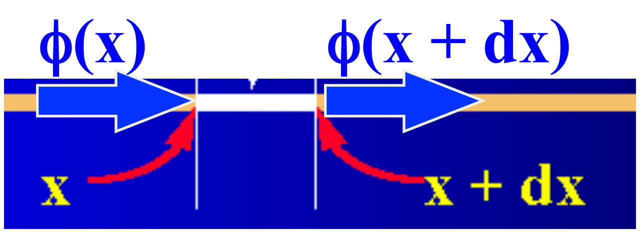
Le problème stationnaire

Dans cette hypothèse, rien ne dépend de la variable temps t

La température T ne dépendra donc que de la variable d'espace x: T ≡ T(x)

La température de cette tranche de matière de longueur dx demeure constante





Par conséquent:

$\phi(x) = \phi(x + dx)$

Le flux de chaleur est constant

Flux de chaleur conduit dans un solide 1D

La valeur de la densité de flux de chaleur constant doit satisfaire à l'équation différentielle exprimant la Loi de Fourier:

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

W/m² — W/(m .°C) — °C/m

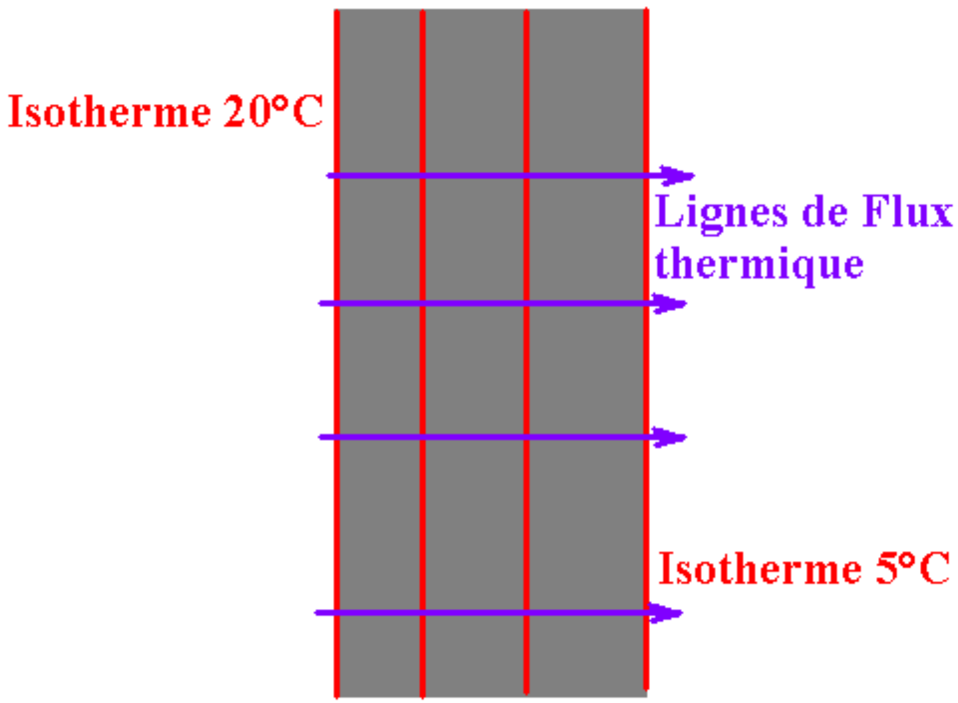
$$\varphi dx = -\lambda dT$$

$$\varphi \int_{x=0}^{x=L} dx = -\lambda \int_{T=T_0}^{T=T_L} dT$$

$$\varphi L = -\lambda \left(T_L - T_0 \right)$$

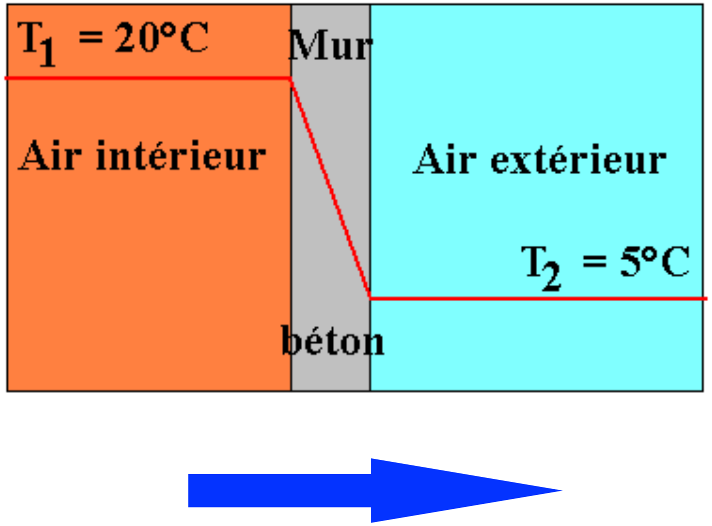
$$\boxed{\varphi = \lambda \frac{T_0 - T_L}{L}}$$

Exemple: mur en béton



Il s'agit bien d'un problème à 1 seule dimension (1D)

Le problème en 1D



L'écart de température T_1 - T_2 provoque un flux de chaleur à travers le mur:

$$\varphi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$$

Ecart de température: $T_1 - T_2 = 20°C - 5°C = 15°C$

Epaisseur du mur: $L = 0{,}20$ m

λ pour le béton: $\lambda = 0{,}92$ W / (m .°C)

Densité de Flux thermique à travers le mur: $\phi = 0{,}92 \times 15 / 0{,}20 = 69$ W/m²

Flux pour S = 20m x 3 m = 60 m², $\Phi = \phi\, S = 4{,}1$ kW

Analogie électrique

$$\phi = \Phi / S = (\lambda / L)(T_1 - T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 = [L / \lambda S]\, \Phi$$

$$\boxed{T_1 - T_2 = R\,\Phi \quad \text{avec: } R = L / \lambda S}$$

Différence de Potentiel

Résistance thermique

$$\frac{L}{\lambda S} = \frac{\frac{1}{\lambda} L}{S}$$ est à rapprocher de: $$R = \frac{\rho L}{S}$$

la Résistance Thermique **la Résistance électrique**

ρ est la résistivité électrique

$1/\lambda$ est la résistivité thermique, inverse de la conductivité

$$\boxed{\textbf{R s'exprime en °C/W ou en K/W}}$$

Analogie entre Conduction Thermique et Conduction Electrique

Equations et Grandeurs en régime permanent	*Phénomène thermique*	*Phénomène électrique*
grandeur étudiée	température T	potentiel E
Equation générale	$\Delta T = 0$	$\Delta E = 0$
densité de flux ou de courant	$\varphi = - \lambda \text{ grad } T$	$i = - \gamma \text{ grad } E$
flux ou courant	$\Phi = \varphi S$	$I = i S$
conductivité	λ	γ
résistance	$R_t = L / (\lambda S)$	$R_e = L / (\gamma S)$
loi d'Ohm	$T_2 - T_1 = R_t \Phi$	$E_2 - E_1 = R_e I$

Approche des bilans différentiels

En état de régime

{taux d'énergie entrant} - {taux d'énergie sortant}

+

{somme des générations d'énergie thermique dans le volume de contrôle}

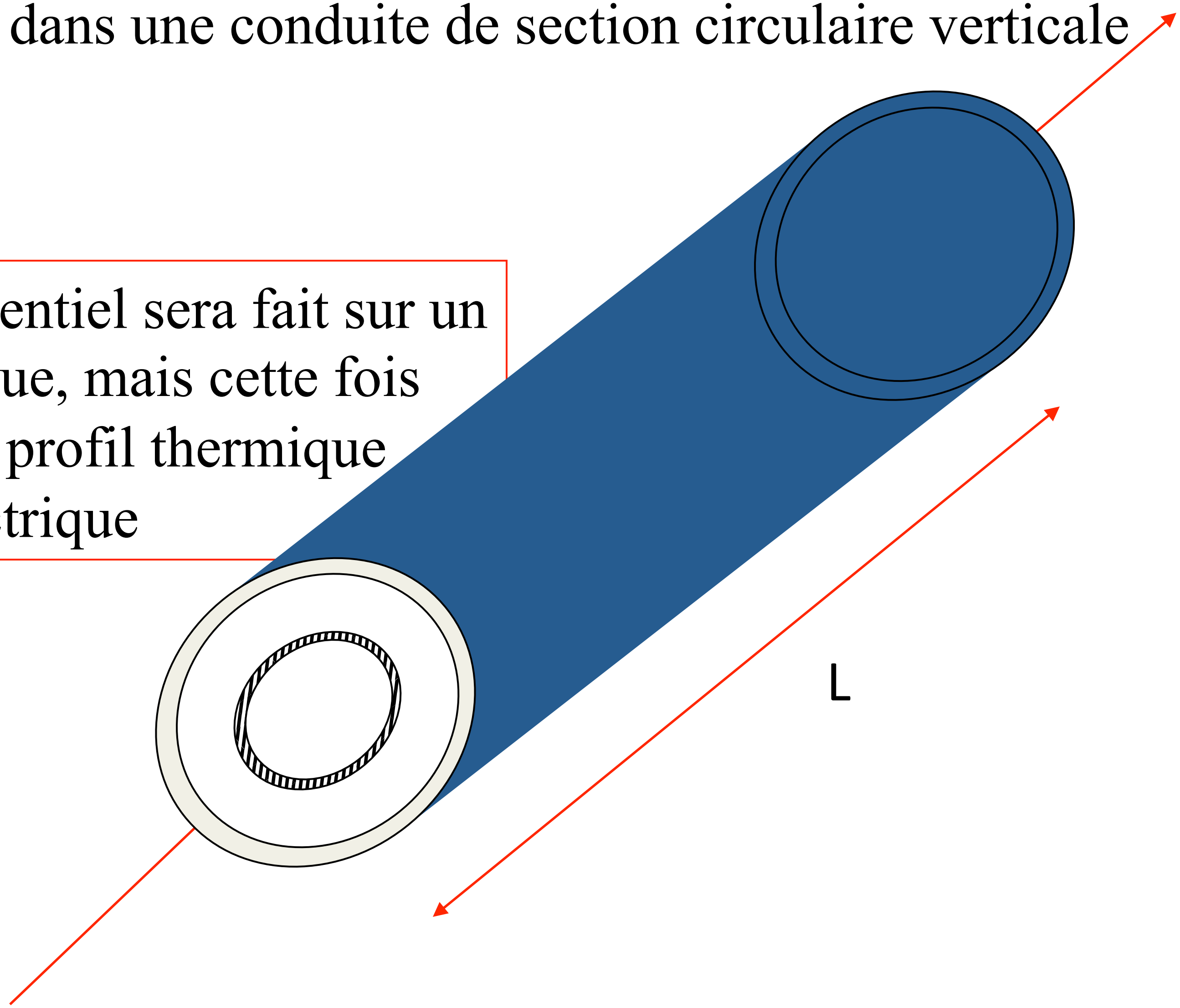
= 0

- Génération de chaleur dans un fil électrique (10.2)
- Génération de chaleur due a la dissipation visqueuse (BRINKMAN 10.4)
- Conduction dans les parois composites, plans ou cylindres (10.6)
- Ailettes (10.7)

- Génération de chaleur dans un fil électrique

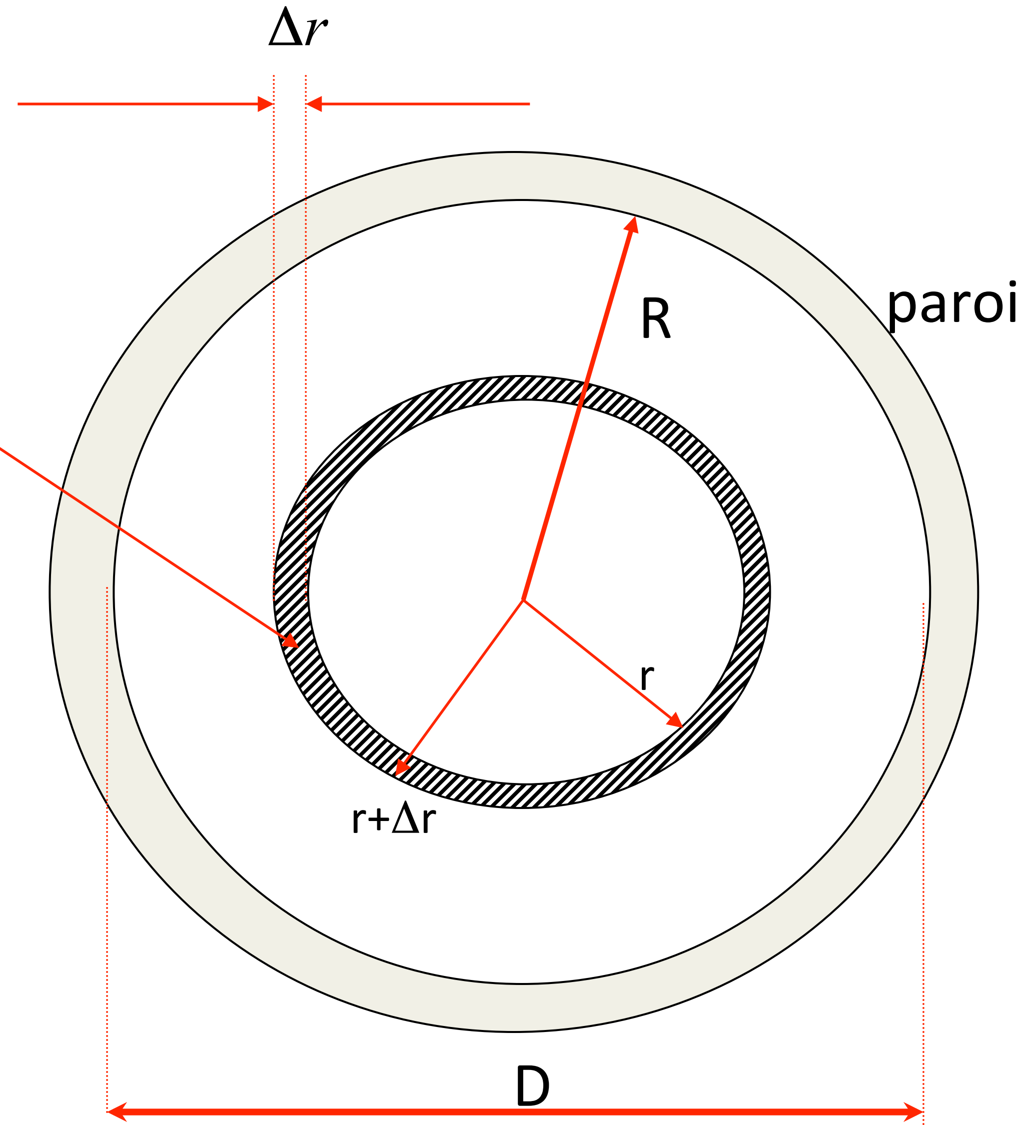
Le problème suivant est tout-a-fait analogue a celui de l'écoulement dans une conduite de section circulaire verticale

Le bilan différentiel sera fait sur un volume identique, mais cette fois pour obtenir le profil thermique dans un fil électrique



Un fil électrique transporte du courant mais a une résistance qui cause de la dissipation thermique. Faisons un bilan sur ce fil afin de connaître son profil de température

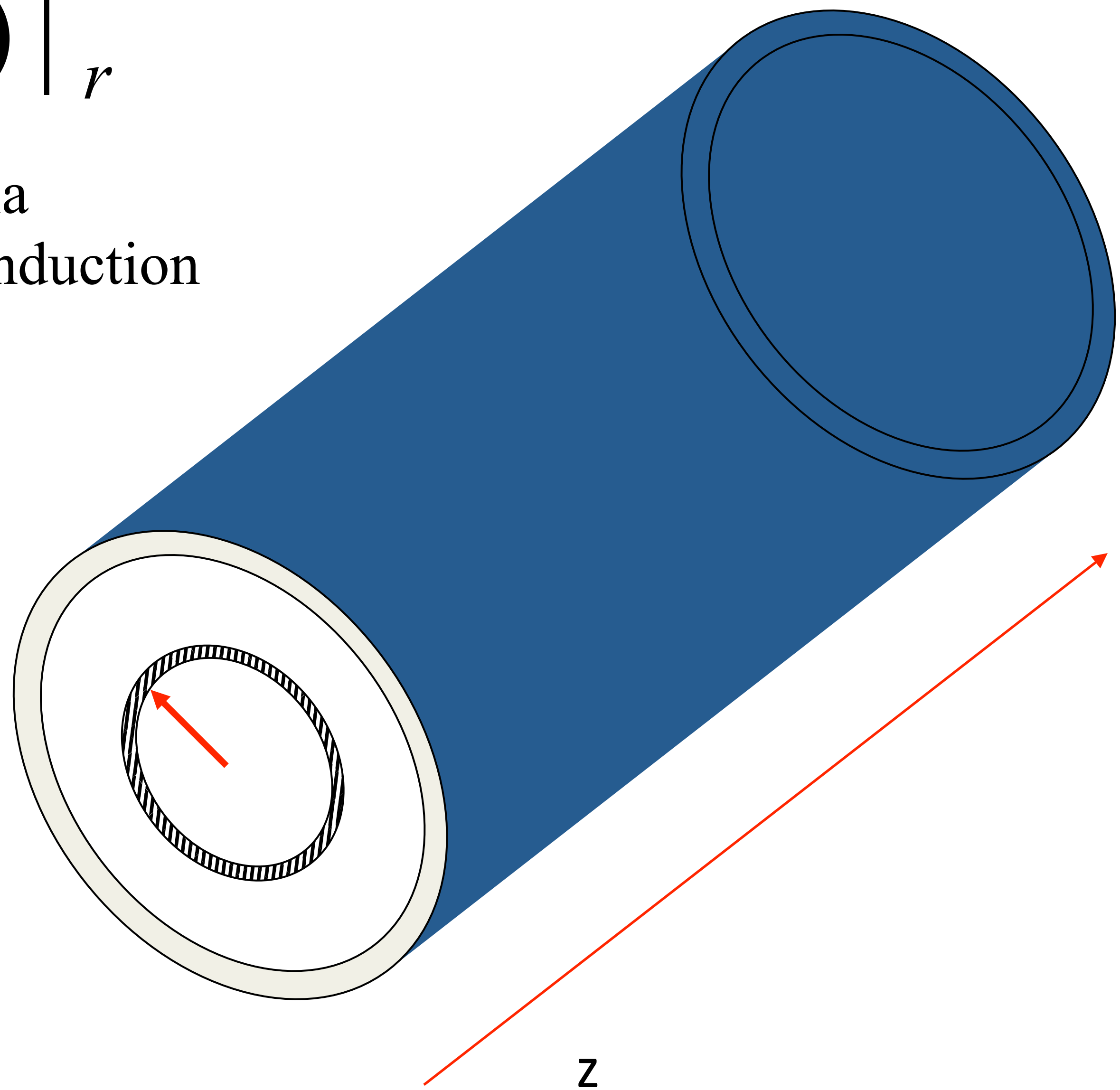
Volume de contrôle différentiel, de longueur L, d'épaisseur Δr, et d'angle 2π



Volume de contrôle identique au cas de la conduite circulaire vue cours mécanique des fluides

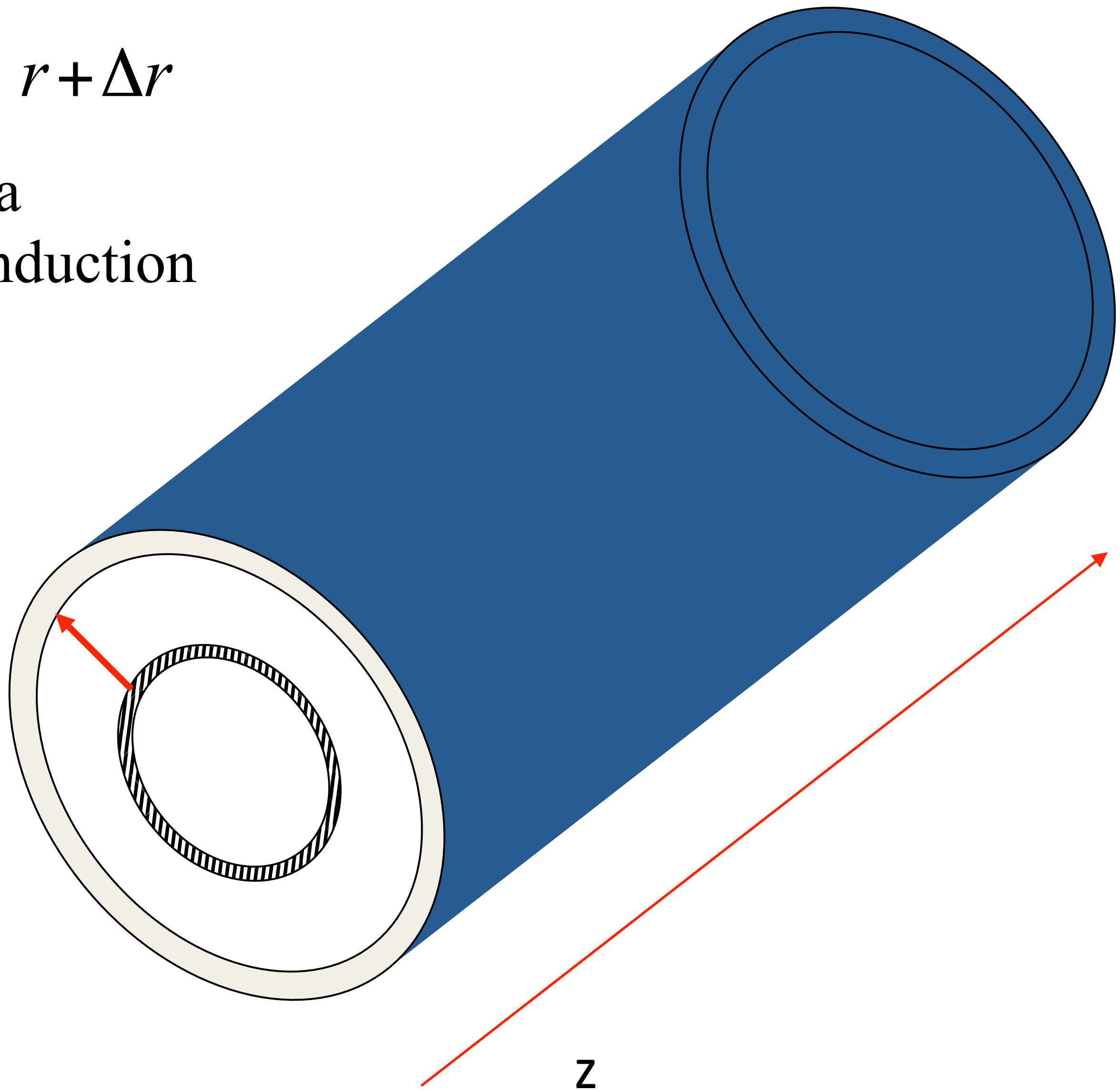
$$(2\pi rLq)\big|_{r}$$

énergie entrant par la surface 2πrL par conduction



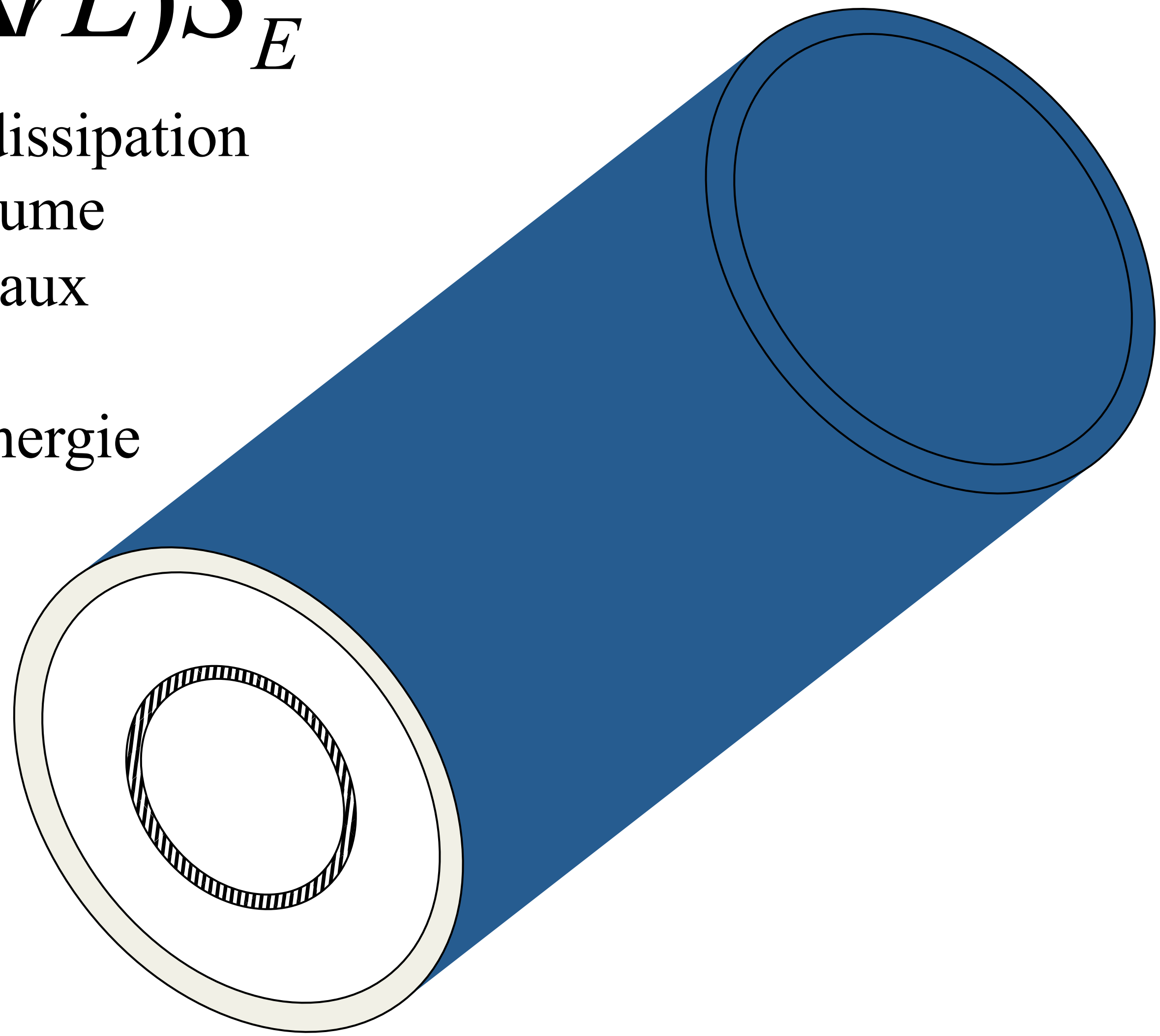
$$(2\pi rLq)\big|_{r+\Delta r}$$

énergie sortant par la surface $2\pi rL$ par conduction en $r=r+\Delta r$



$$(2\pi r \Delta r L) S_E$$

Énergie créée par la dissipation électrique dans le volume de contrôle. S_E est le taux auquel le courant électrique génère l'énergie thermique



En effectuant le bilan on obtient:

$$(2\pi\, rLq)\big|_{r} - (2\pi\, rLq)\big|_{r+\Delta r}$$

$$+ (2\pi\, r\Delta r L) S_E \quad = 0$$

Divisons par 2πΔrL et effectuons la limite:

$$\lim_{\Delta r \to 0}\left(\frac{rq\,|_{r+\Delta r} - rq\,|_{r}}{\Delta r}\right) = S_E r$$

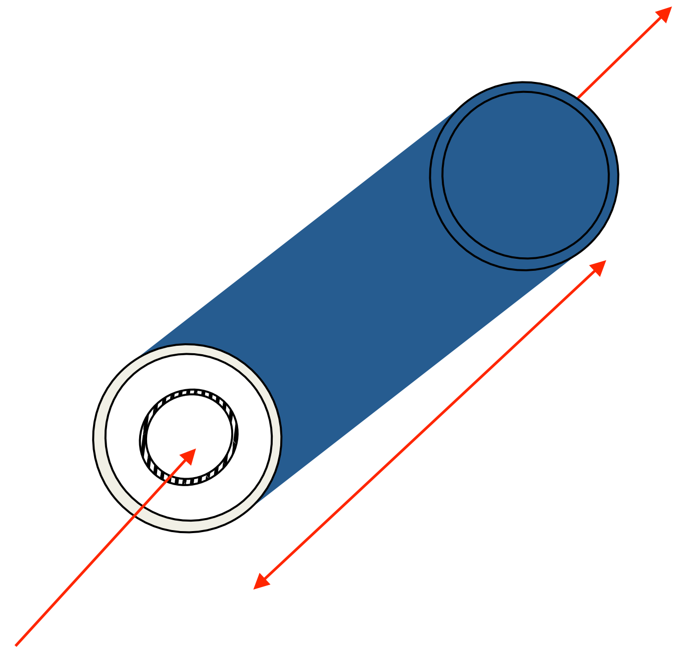
$$\frac{d(rq)}{dr} = S_E r$$

$$\frac{d(rq)}{dr} = S_E r$$

$$\int d(rq) = \int S_E r dr$$

$$rq = S_E \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$q = \frac{S_E}{2} r + \frac{C_1}{r}$$



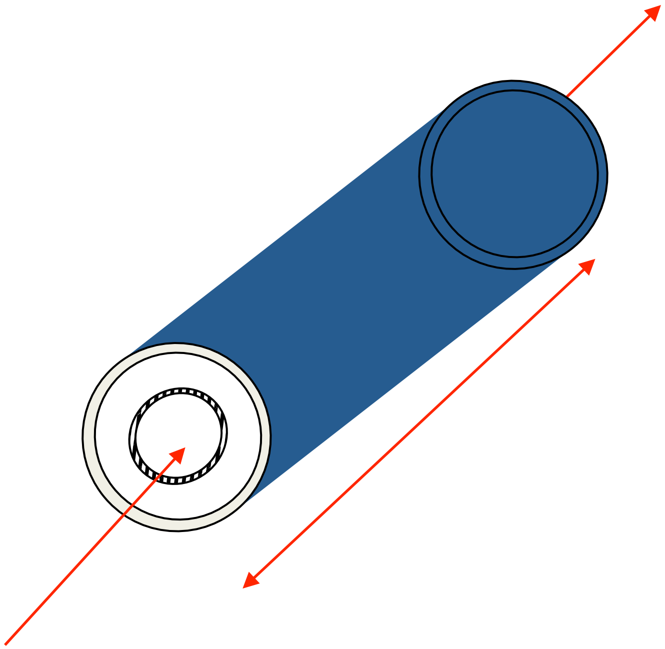
$C_1 = 0$?

Introduisons la loi de Fourier
pour relier tout ceci a la température

$$q = -k\frac{dT}{dr} = \frac{S_E}{2}r$$

$$\int dT = \int \frac{-S_E}{2k} rdr$$

$$T = \frac{-S_E}{4k}r^2 + C_2$$

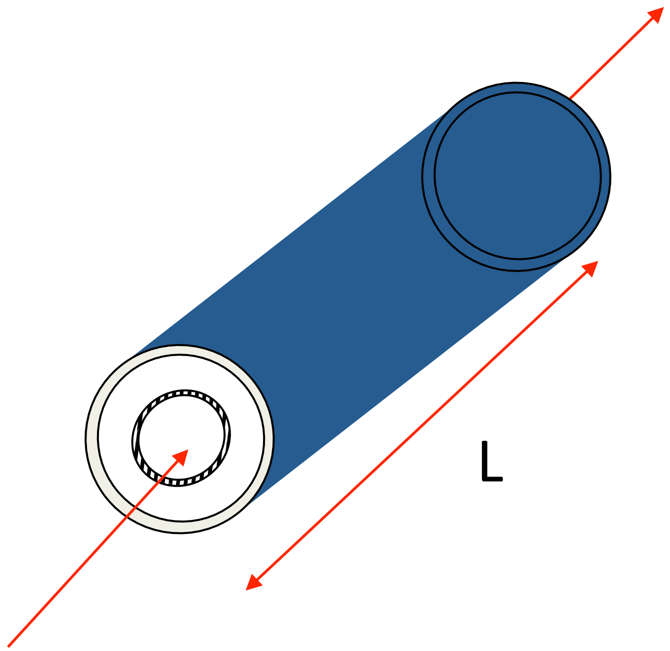


Trouvons maintenant C_2 à partir des conditions aux limites.

La condition cherchée est que la température du fil est connue a la surface, soit T_0

$$T_0 = \frac{-S_E}{4k} R^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{S_E}{4k} R^2 + T_0$$



Finalement, voici le profil de température dans le fil

$$T - T_0 = \frac{S_E}{4k} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Il est important de bien voir l'analogie mathématique de ce problème avec celui de la conduite. Pour cela on factorise l'équation afin de mieux voir la contribution des termes

$$v_z = \left(\frac{P_0 - P_L}{L}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{R^2}{4}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Source volumique

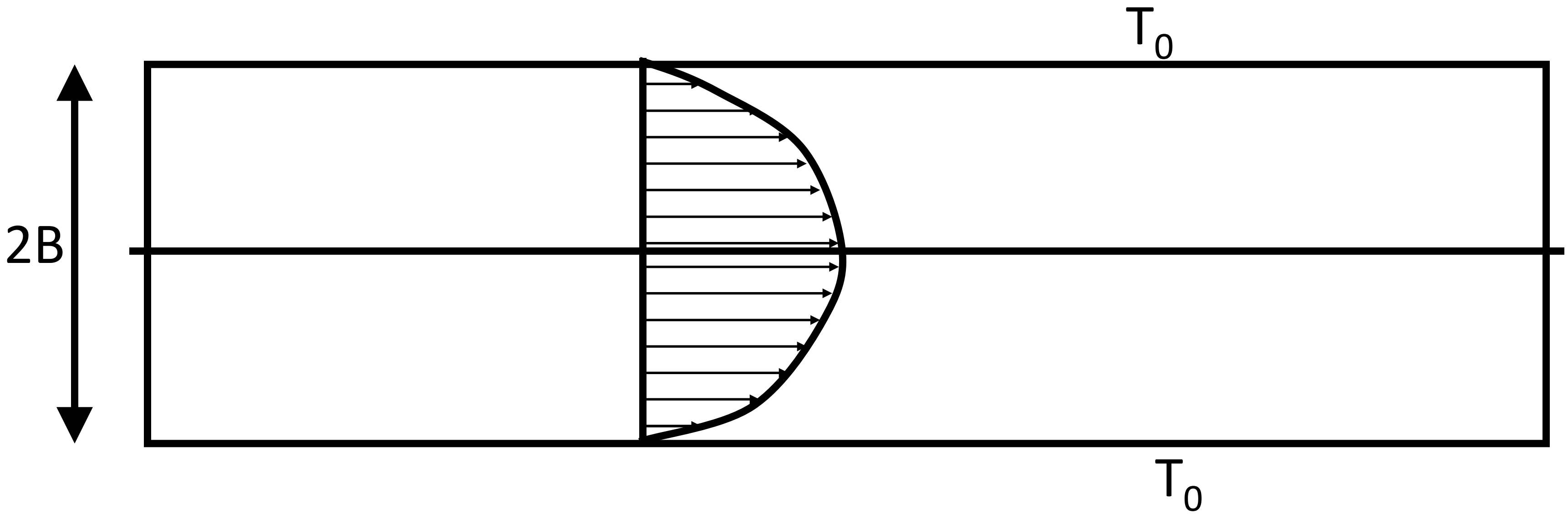
Résistance

$$T - T_0 = S_E\left(\frac{1}{k}\right)\frac{R^2}{4}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Couplage momentum-énergie: dissipation visqueuse

En fait, la viscosité cause toujours une élévation de température car la friction des molécules engendre une « dégradation » en énergie thermique.
Cependant, cette elevation est presque toujours négligeable sauf dans des cas bien connus, c ’est le cas par exemple des couches de lubrifiant dans un moteur

Problème de Brinkman: lubrification et dissipation visqueuse



Le profil de vitesse entre les deux plaques est connu à partir du chapitre 2:

$$v_z = V_{\max}\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right]$$

Et on cherche le profil thermique causé par la dissipation visqueuse, ce qui peut devenir un problème majeur dans plusieurs applications

On sait que le taux de dissipation est donné par:
(ce résultat ne sera pas expliqué)

$$S_v = \mu \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^2$$

En insérant ceci dans le bilan d'énergie dans la conduite on obtiendra facilement:

$$\{qLW\}_x - \{qLW\}_{x+\Delta x} + \{S_v LW \Delta x\} = 0$$

en faisant tendre vers 0,

$$-\frac{dq}{dx} + S_v = 0 \quad ou \quad \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{S_v}{k} = 0$$

en insérant la valeur de S_v :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\mu \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^2}{k} = 0$$

Mais puisqu'on connaît le profil de vitesse (parabolique) et qu'on sait facilement dériver une parabole:

$$\mathrm{v}_z = \mathrm{V}_{max}\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right]$$

$$S_v = \mu\left(\frac{d\mathrm{v}_z}{dx}\right)^2 = \mu\left(2\mathrm{v}_{max}\frac{x}{B^2}\right)^2$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\mu\left(\frac{d\mathrm{v}_z}{dx}\right)^2}{k} = 0 \qquad \text{devient}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\mu}{k}\left(2\mathrm{v}_{max}\frac{x}{B^2}\right)^2 = \left(-\frac{4\mu\mathrm{v}_{max}^2}{kB^4}\right)x^2$$

On peut alors facilement intégrer

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \left(-\frac{4\mu v_{max}^2}{kB^4}\right)x^2$$

$$\frac{dT}{dx} = \left(-\frac{4\mu v_{max}^2}{kB^4}\right)\frac{x^3}{3} + C_1$$

Conditions aux limites pour trouver C_1 et C_2?

$$T = \left(-\frac{4\mu v_{max}^2}{kB^4}\right)\frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$$

En x=0 (le centre de la conduite), dT/dx=0, donc $C_1=0$
En x=B (la paroi), $T=T_0$

On trouve alors le profil final en insérant les valeurs des constantes

$$T = \left(\frac{\mu v_{max}^2}{3k}\right)\left[1 - \frac{x^4}{B^4}\right] + T_0$$

Le maximum de température est au centre et vaut donc:

$$T_{max} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mu v_{max}^2}{k}\right) + T_0$$

Note: en divisant toute cette équation par T_0 on obtiendra un groupe adimensionel dans les parenthèses. Ce nombre est celui de Brinkman, il représente le rapport entre les forces de dissipation visqueuses et la capacité de dissiper cette chaleur par conduction

$$\frac{\mu v_{max}^2}{kT_0} = Br$$

Regardons le cas de deux fluides usuels, l 'eau et une huile. Remarquez que le maximum de température ne dépend pas de l 'épaisseur B. La vitesse maximale est de 20 m/sec et T_0=293K

Eau, μ=0.001, k=0.6

$$T_{max} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mu v^2_{max}}{k}\right) + T_0 = \frac{1}{3}\frac{0.001\times 20^2}{0.6} + 20$$
$$= 20.22$$

$$\frac{\mu v^2_{max}}{kT_0} = Br = 0.0022$$

Dans le cas de l' eau, une augmentation de seulement 0.22 degrés, donc très peu d' échauffement visqueux

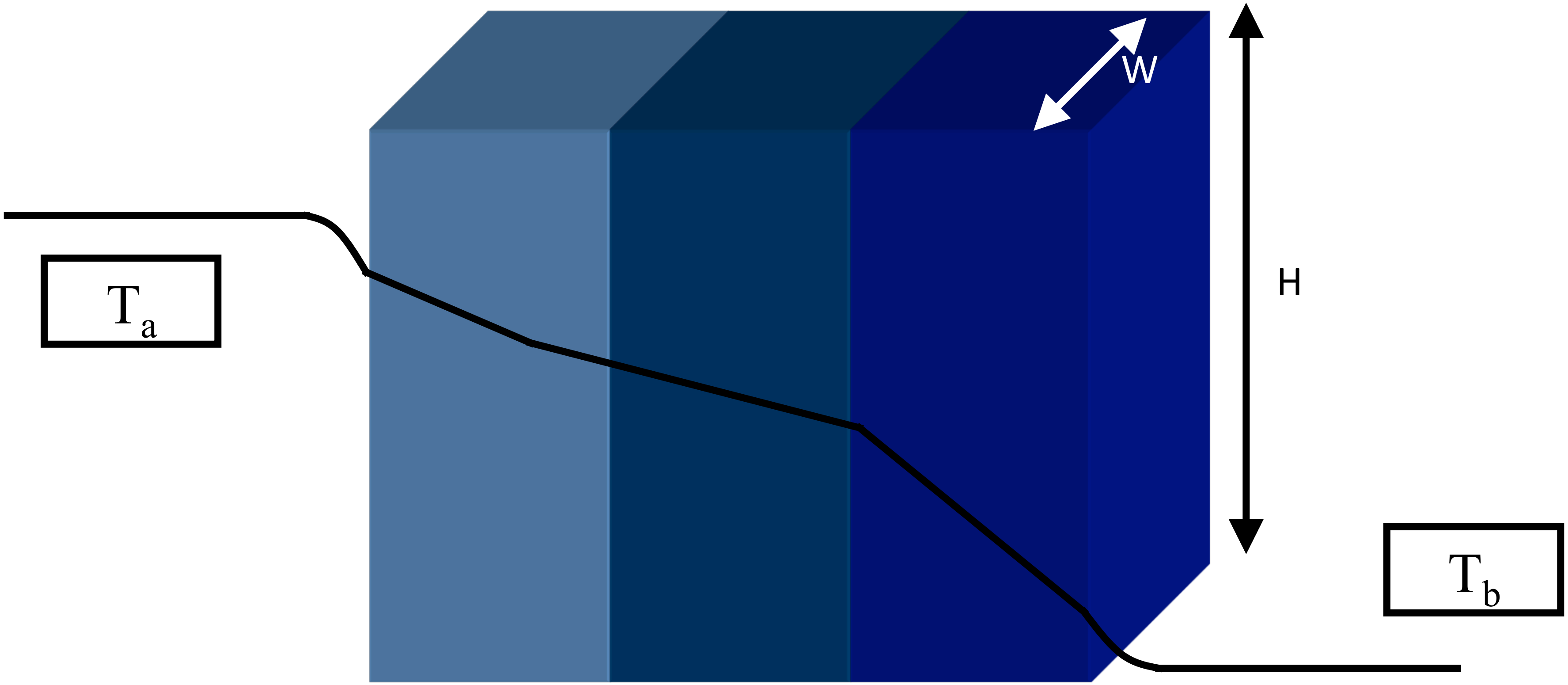
huile, μ=0.1, k=0.3

$$T_{max} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mu v^2_{max}}{k}\right) + T_0 = \frac{1}{3}\frac{0.1\times 20^2}{0.3} + 20$$
$$= 64.44$$

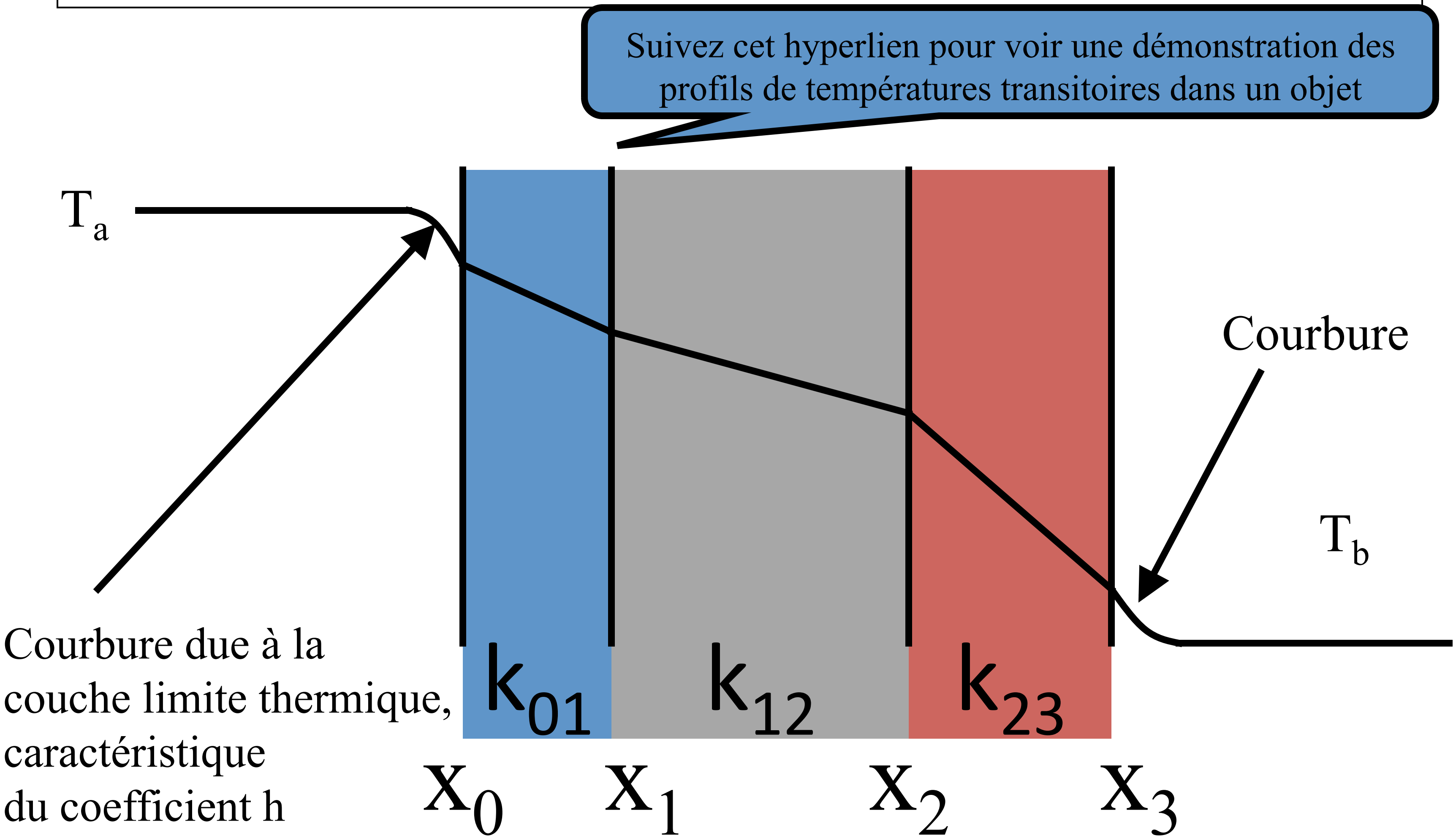
$$\frac{\mu v^2_{max}}{kT_0} = Br = 0.45$$

Dans le cas de l' huile, une augmentation de plus de 44 degrés, donc un échauffement visqueux important.

Problème de conduction dans les parois composites, application pratique: les isolants thermiques. Ce problème est sans doute un de ceux qu'il est le plus important de maitriser en thermique



Problème de conduction dans les parois composites.



Effectuons un bilan sur un volume WHΔx, car la chaleur se propage dans la direction x

$$q_x \big|_x WH - q_x \big|_{x+\Delta x} WH = 0$$

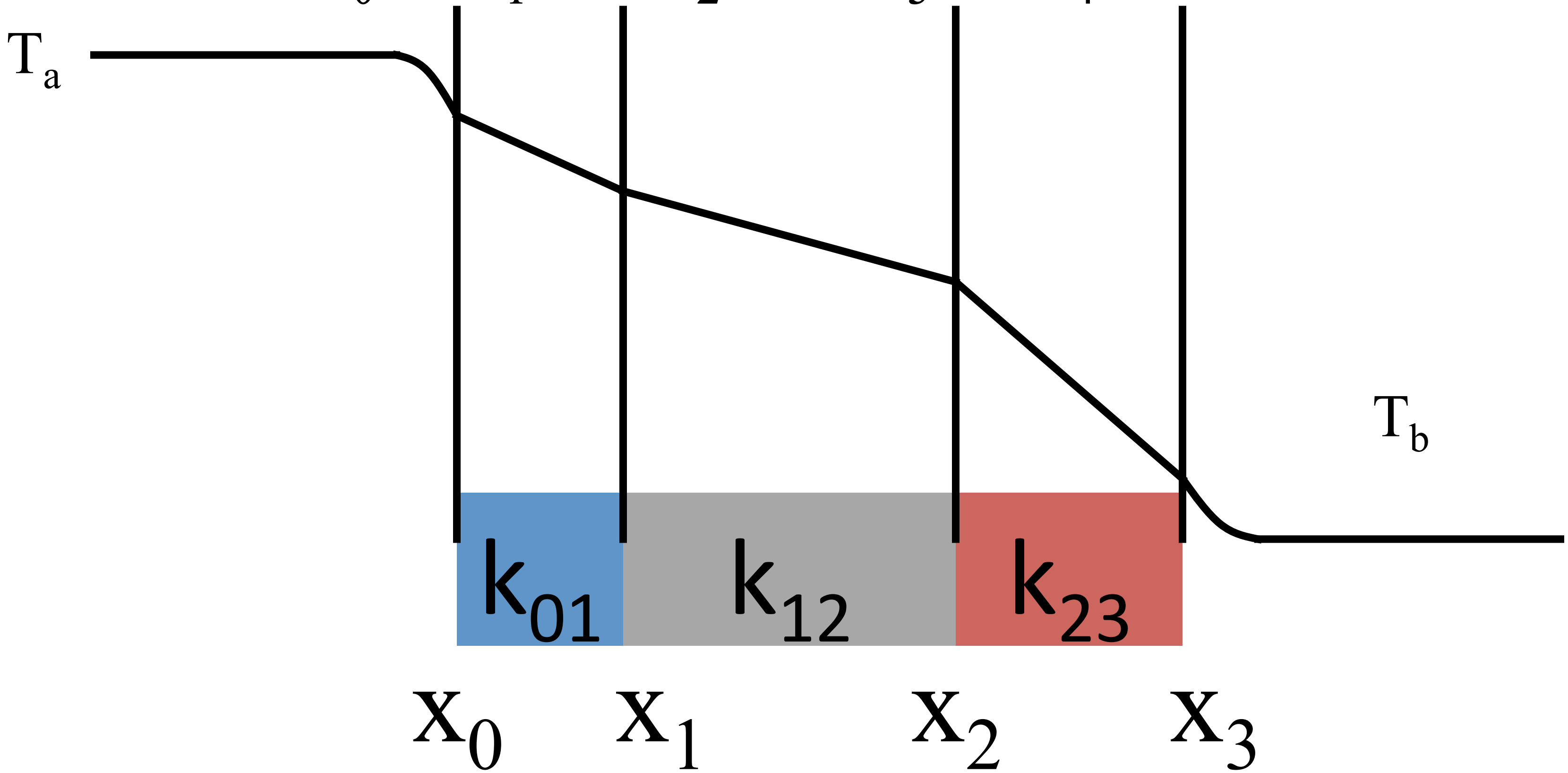
Ce bilan est facilement rendu différentiel en divisant par le volume et en faisant la limite

$$\frac{dq_x}{dx} = 0$$

Cette équation indique simplement que le flux d 'energie ne varie pas dans la direction x. Elle peut être posée dans toutes les sections de conductivité différentes.

L 'intégrale de cette équation est triviale, et on obtiendra:

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

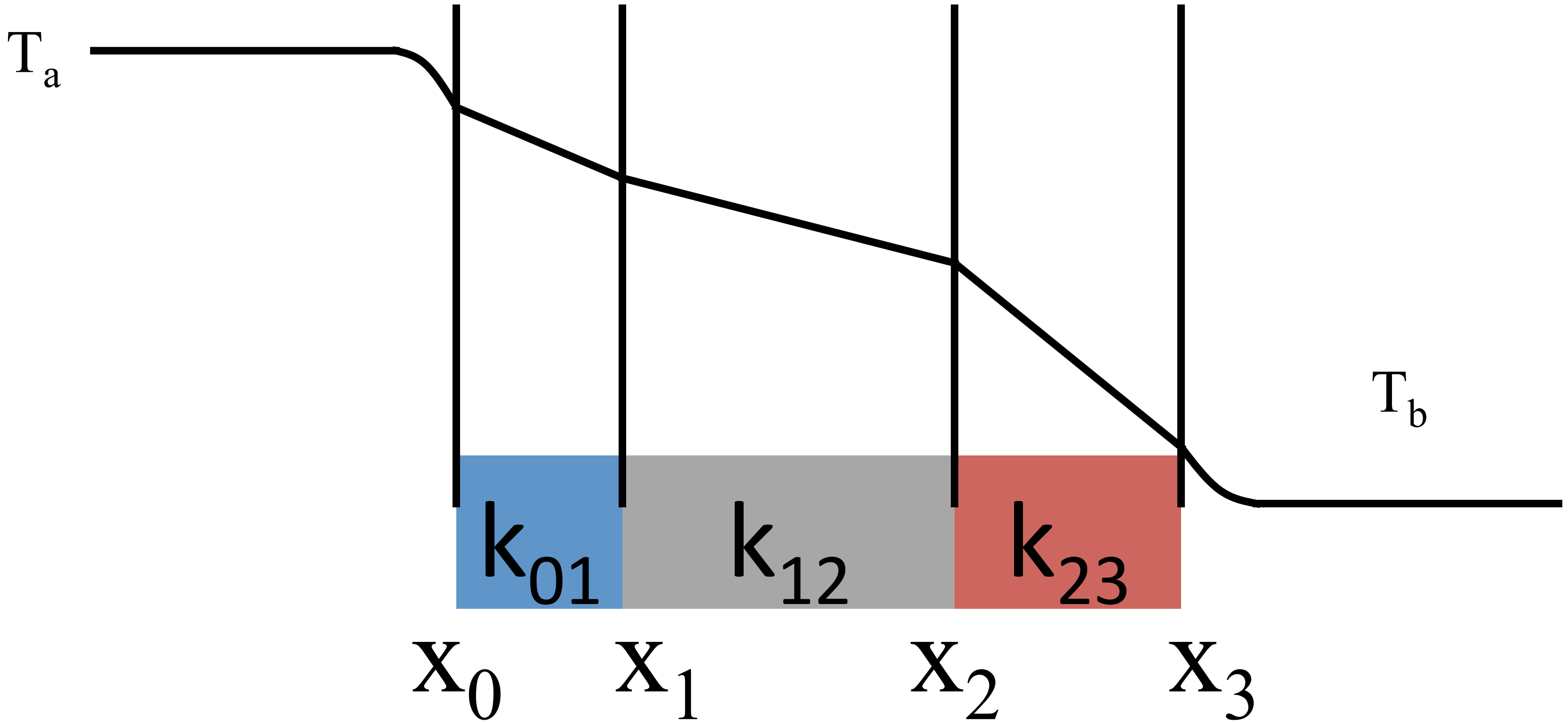


Ce qui veut dire: en état de régime les flux sont les mêmes partout dans la paroi composite

Mais on sait déjà comment exprimer ces flux en fonction de la température avec la loi de Fourrier

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

$$h_0(T_a - T_0) = -k_{01}\frac{dT}{dx} = -k_{12}\frac{dT}{dx} = -k_{23}\frac{dT}{dx} = h_3(T_3 - T_b)$$



Ce problème peut sembler complexe mais puisque les équations sont toutes égales entre elles, on solutionnera une seule, et les autres seront résolues facilement

$$-k_{01}\frac{dT}{dx} = q_0$$

$$-k_{01}dT = q_0 \quad dx$$

$$T = \frac{q_0}{-k_{01}}x + C$$

Cette équation nous dit que le profil de T est une droite dans la section 1

La constante est connue
a partir de la surface, ou $T=T_0$

$$T_0 = \frac{q_0}{-k_{01}}(0) + C \quad , \quad C = T_0$$

$$T - T_0 = \frac{q_0}{-k_{01}} x$$

Puisque cette équation est celle d 'une droite on peut l 'écrire a partir des deux points limite de cette section:

$$T_1 - T_0 = \frac{q_0}{-k_{01}}(x_1 - x_0)$$

Et de la même façon pour les trois sections:

$$T_1 - T_0 = \frac{q_0}{-k_{01}}(x_1 - x_0)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{q_0}{-k_{12}}(x_2 - x_1)$$

$$T_3 - T_2 = \frac{q_0}{-k_{23}}(x_3 - x_2)$$

On complétera avec les deux couches de surface:

$$T_1 - T_0 = \frac{q_0}{-k_{01}}(x_1 - x_0)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{q_0}{-k_{12}}(x_2 - x_1)$$

$$T_3 - T_2 = \frac{q_0}{-k_{23}}(x_3 - x_2)$$

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3}$$

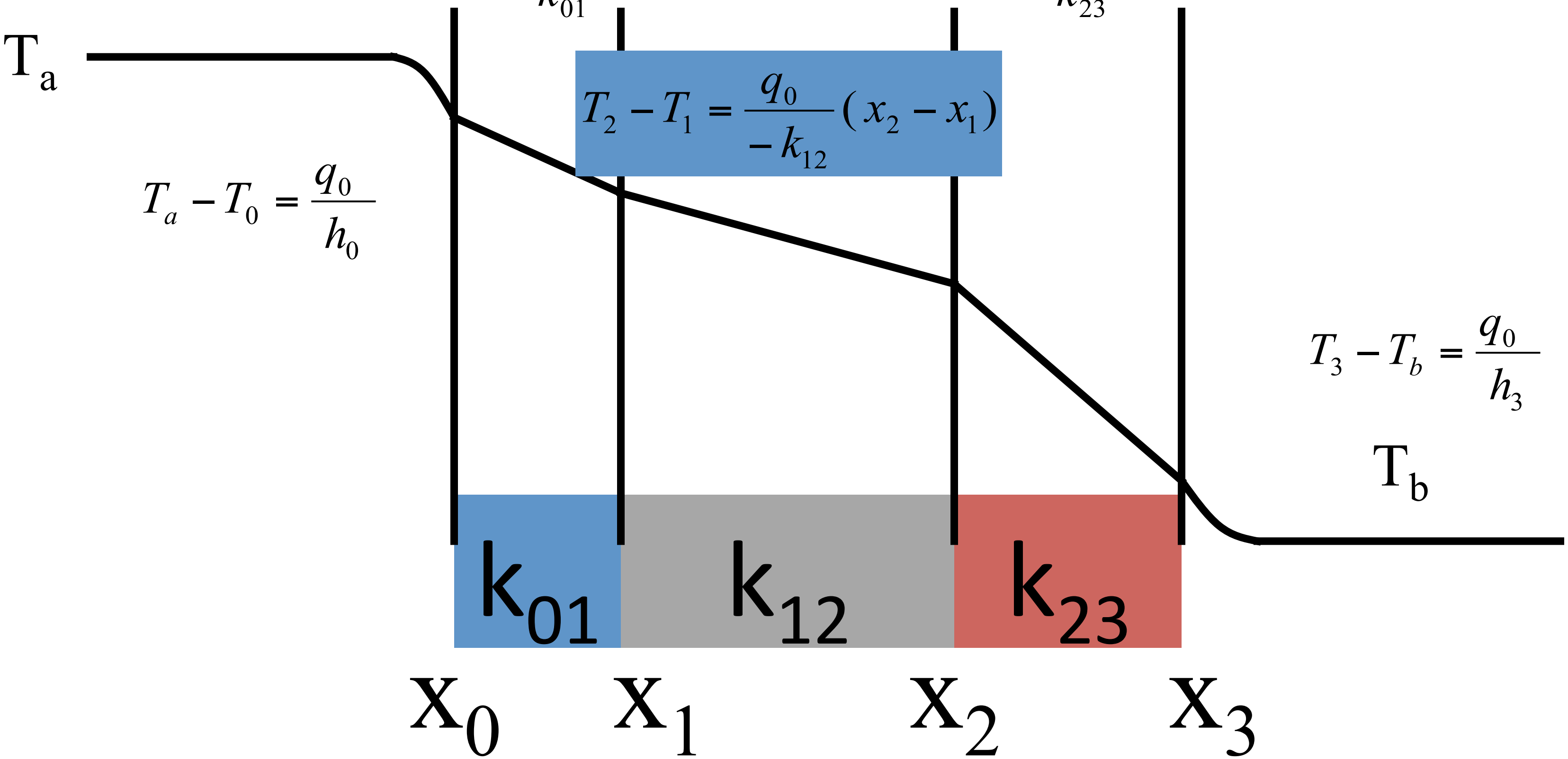
On avait déjà établi:

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

$$T_1 - T_0 = \frac{q_0}{-k_{01}}(x_1 - x_0) \qquad T_3 - T_2 = \frac{q_0}{-k_{23}}(x_3 - x_2)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{q_0}{-k_{12}}(x_2 - x_1)$$

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0} \qquad T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3}$$

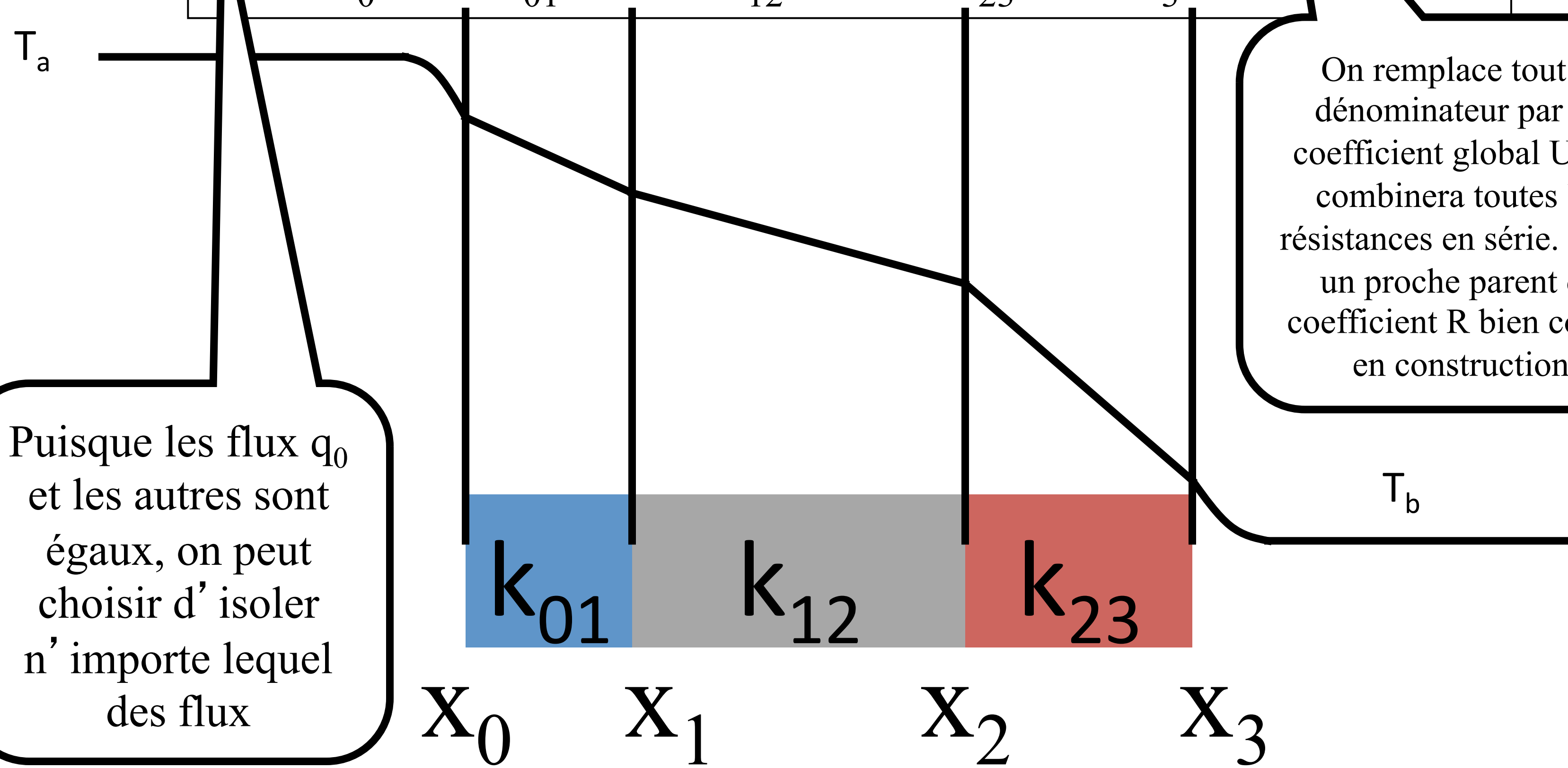


Combinant ces 5 expressions qui doivent être égales, par addition, on obtient :

$$\boxed{q_0 = \frac{T_a - T_b}{\dfrac{1}{h_0} + \dfrac{x_1 - x_0}{k_{01}} + \dfrac{x_2 - x_1}{k_{12}} + \dfrac{x_3 - x_2}{k_{23}} + \dfrac{1}{h_3}} = U\left(T_a - T_b\right)}$$

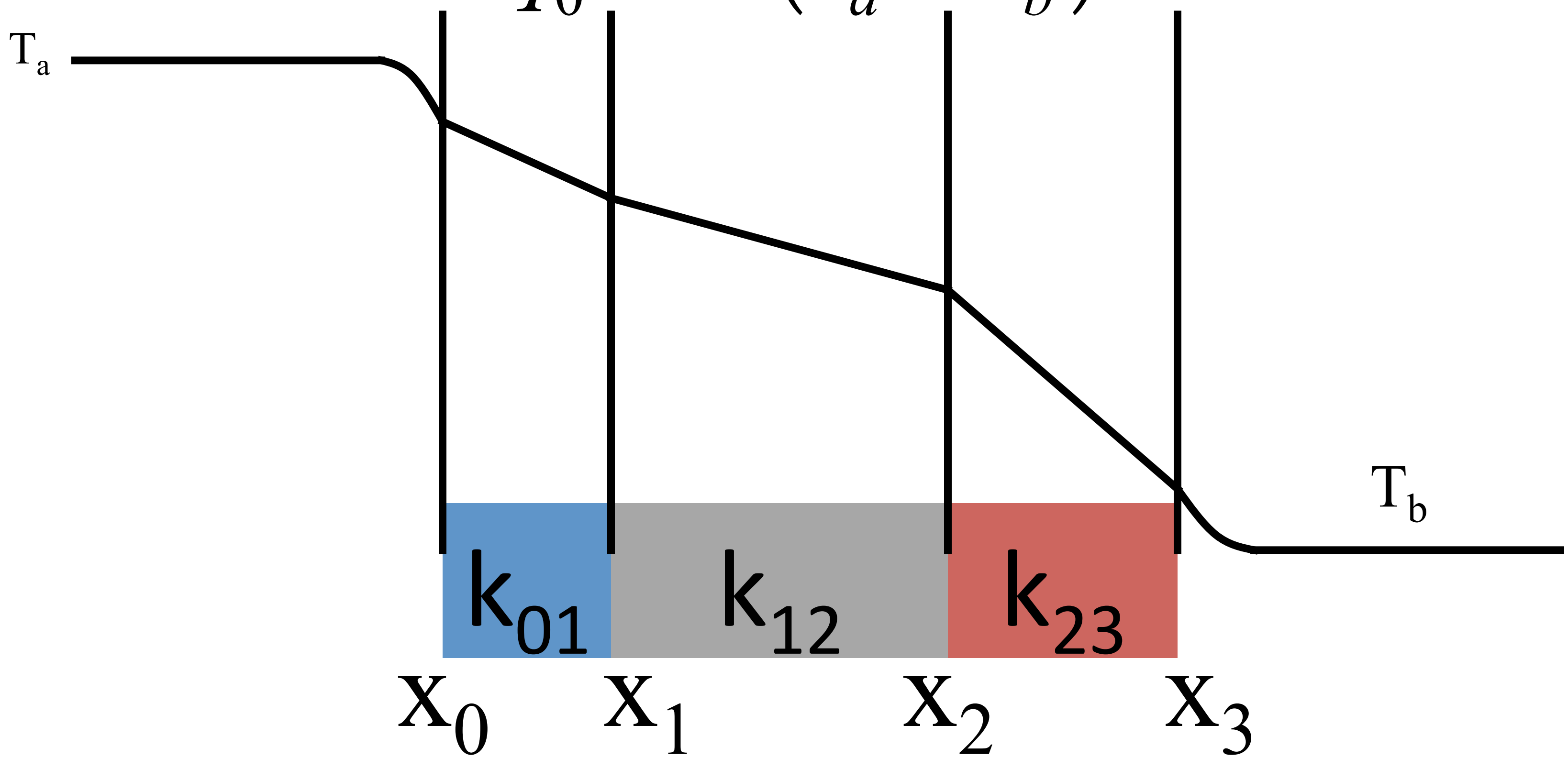
Puisque les flux q_0 et les autres sont égaux, on peut choisir d'isoler n'importe lequel des flux

On remplace tout le dénominateur par un coefficient global U qui combinera toutes les résistances en série. U est un proche parent du coefficient R bien connu en construction



Le coefficient U est un coefficient appelé coefficient global, qui contient toutes les résistances thermiques

$$q_0 = U\left(T_a - T_b\right)$$



Calculons le coefficient global et le taux de transfert pour un cas type. Une porte faite de deux épaisseurs d ’acier entre lesquelles un isolant thermique et ignifuge est inséré. Les plaques d ’acier font 5 mm d ’epaisseur et l ’isolant 8 cm. Les conductivités sont respectivement de 30 et 0.8, le coefficient d ’échange extérieur est de 30 et de 5 a l ’intérieur. L ’extérieur est exposé à une température de 1000 K et l ’intérieur est maintenu à 300 K

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k_{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k_{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k_{23}} + \frac{1}{h_3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{0.005}{30} + \frac{0.08}{0.8} + \frac{0.005}{30} + \frac{1}{5}}$$

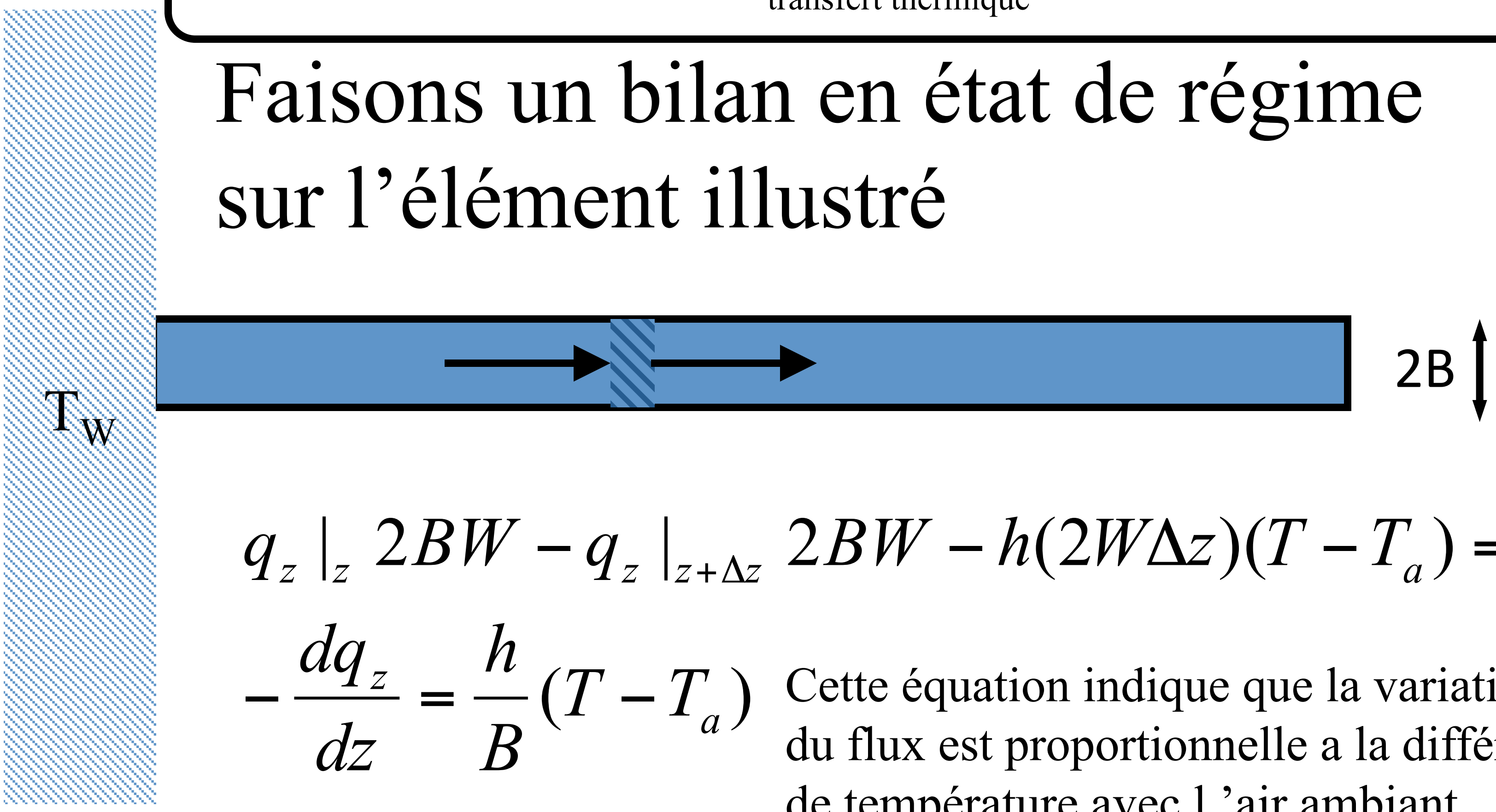
$$= \frac{1}{0.0333 + 0.0001667 + 0.1 + 0.0001667 + 0.2}$$

$$= \frac{1}{0.333} = 3.00$$

Problème de conduction dans les ailettes:

Une ailette est un artifice souvent utilisé pour dissiper, ou évacuer la chaleur provenant d'une source. C'est simplement une augmentation de la surface de contact avec le milieu ambiant. Très important en transfert thermique

Faisons un bilan en état de régime sur l'élément illustré



$$q_z\big|_z 2BW - q_z\big|_{z+\Delta z} 2BW - h(2W\Delta z)(T - T_a) = 0$$

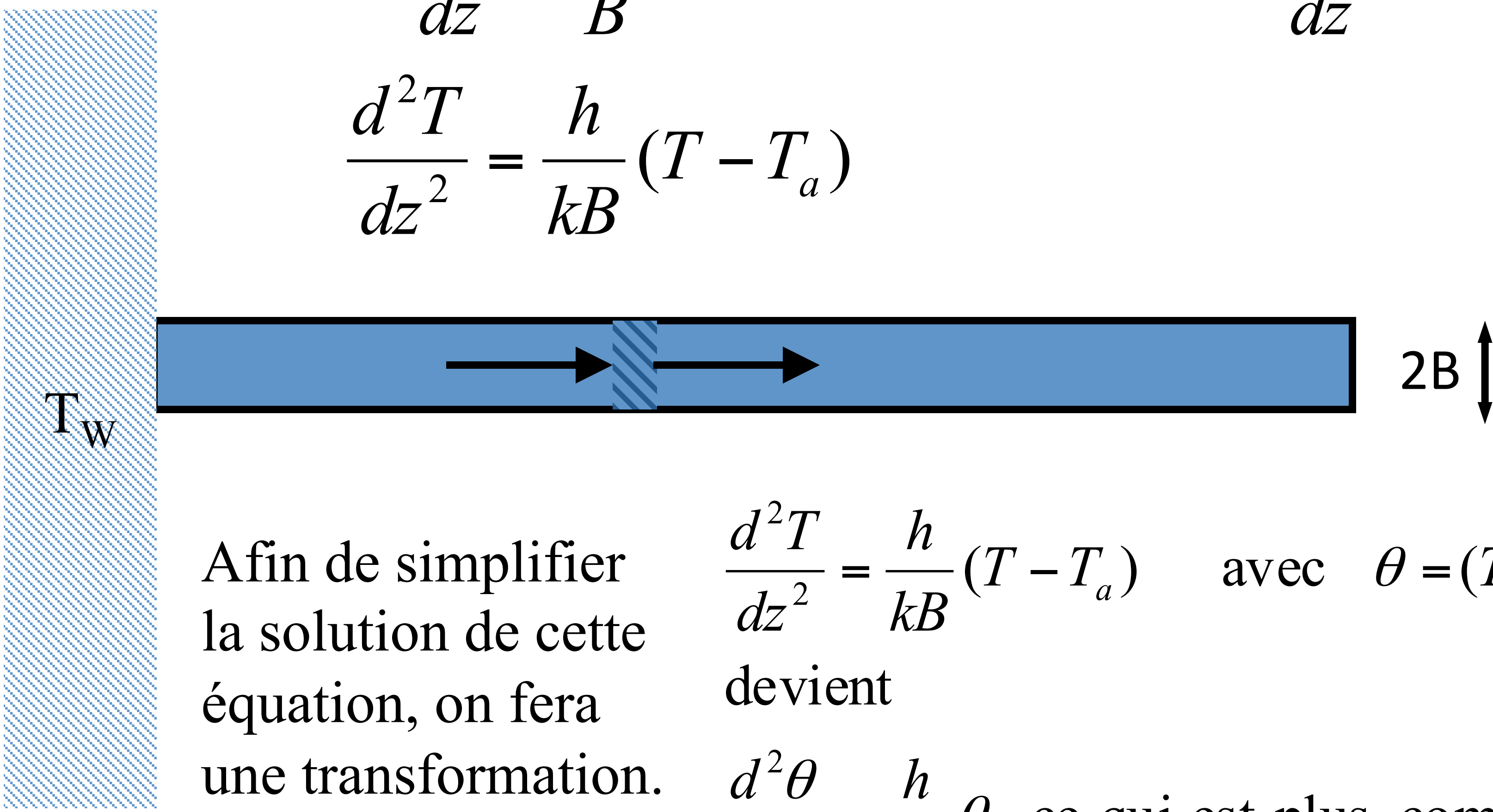
$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B}(T - T_a)$$

Cette équation indique que la variation du flux est proportionnelle a la différence de température avec l 'air ambiant

Insérons la loi de Fourier

$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B}(T - T_a) \qquad avec \qquad -k\frac{dT}{dz} = q_z$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB}(T - T_a)$$



Afin de simplifier la solution de cette équation, on fera une transformation.

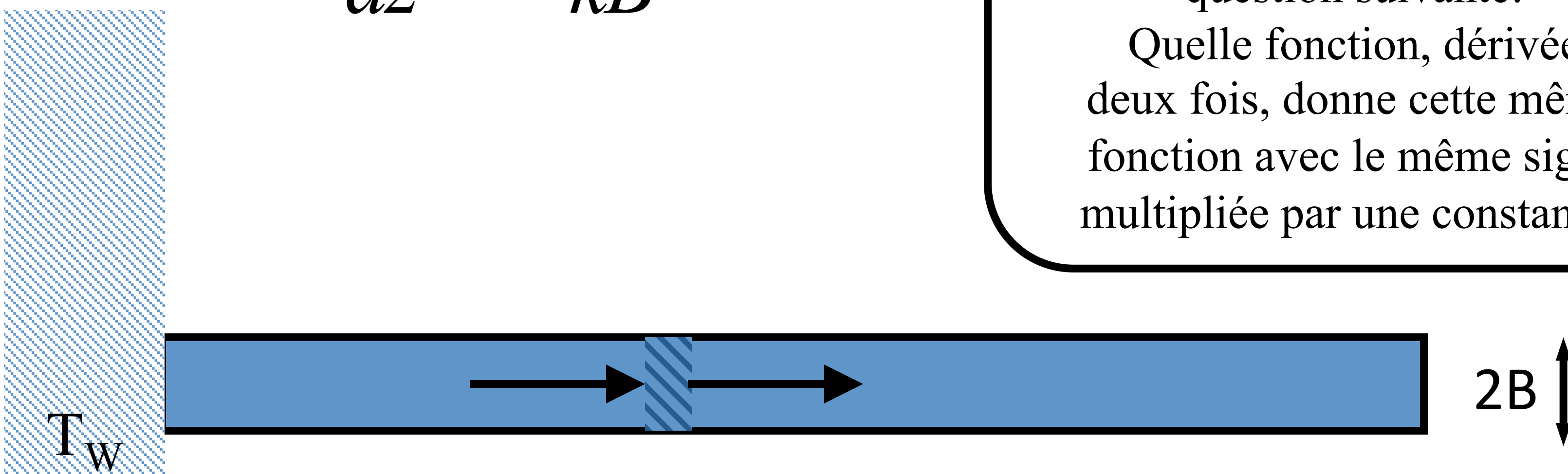
$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB}(T - T_a) \qquad \text{avec} \quad \theta = (T - T_a)$$

devient

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{h}{kB}\theta \quad \text{ce qui est plus compact}$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{h}{kB}\theta$$

La solution de cette équation est obtenue en répondant a la question suivante: Quelle fonction, dérivée deux fois, donne cette même fonction avec le même signe multipliée par une constante?



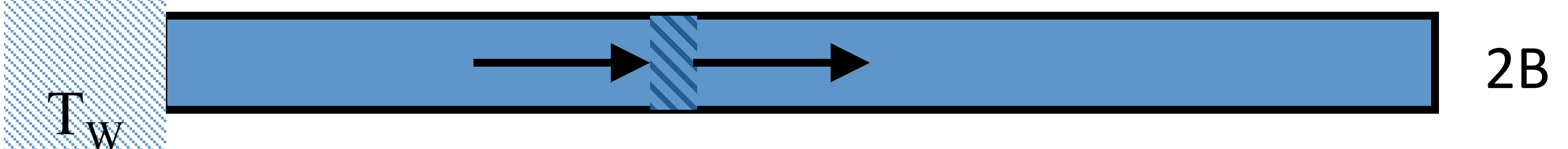
$$\theta = C_1 e^{\sqrt{\frac{h}{kB}}z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{h}{kB}}z}$$

Vérifiez que cette solution satisfait l 'équation dérivée ci-haut (en fait chacun de ces deux termes peut être une solution)

Afin de simplifier la notation, posons:

$$m = \sqrt{\frac{h}{kB}} \quad \text{alors on aura :}$$

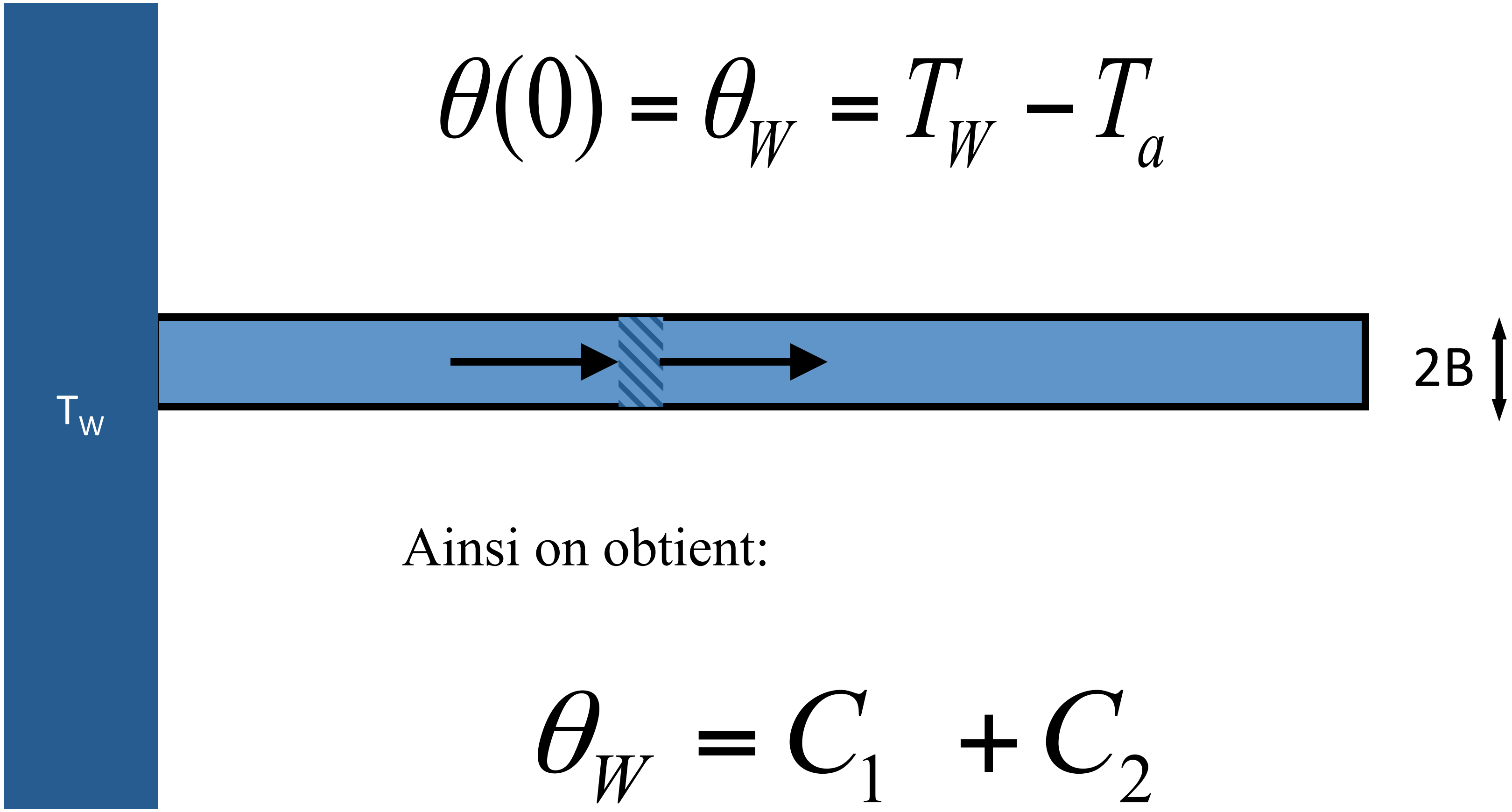
$$\theta = C_1 e^{mz} + C_2 e^{-mz}$$



Afin de vraiment avoir le profil de température dans l 'ailette, il nous faut maintenant déterminer les deux constantes C_1 et C_2

Une première condition naturelle est que, en z=0, $T=T_w$, ce qui implique naturellement que:

$$\theta(0) = \theta_W = T_W - T_a$$

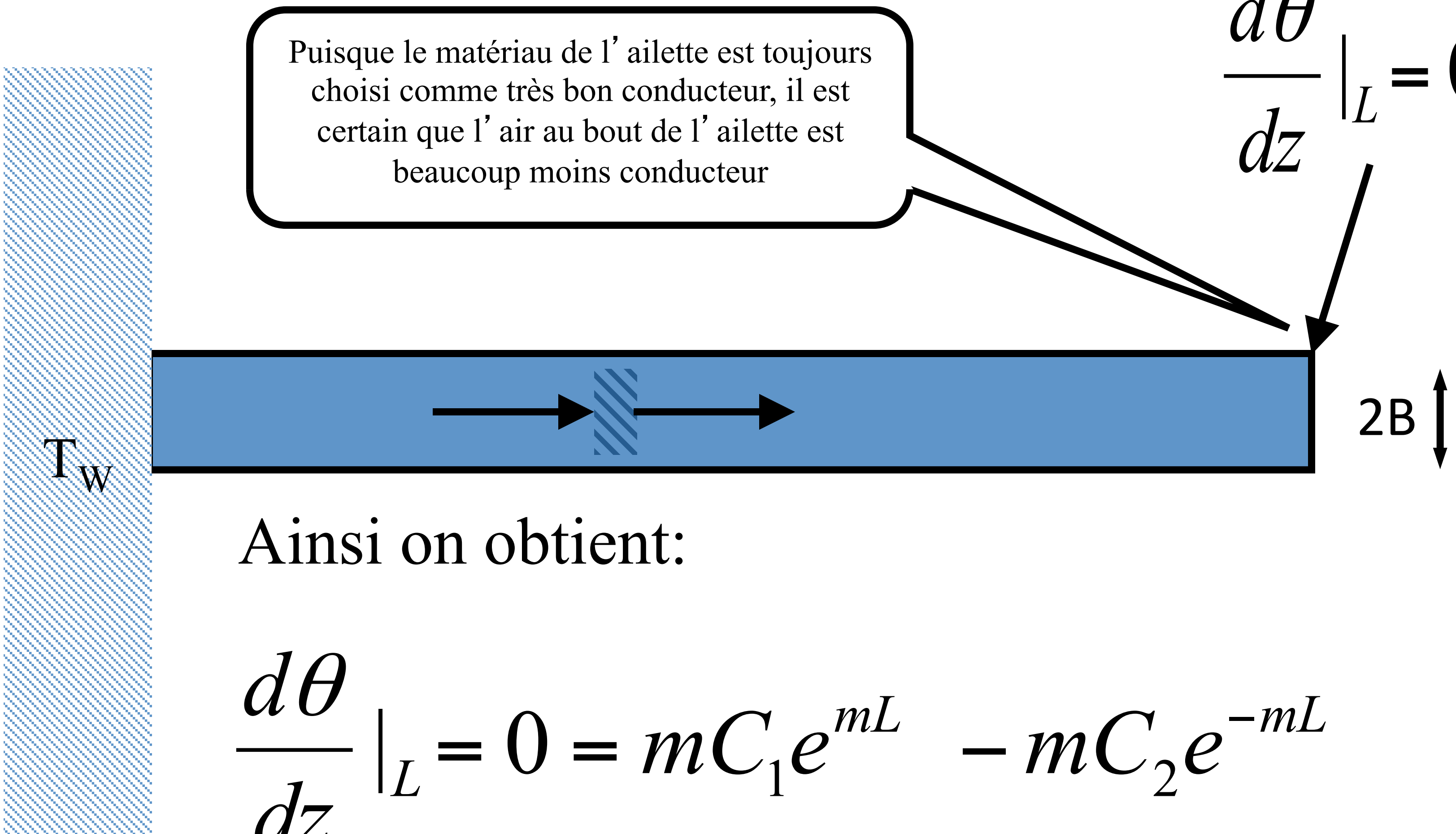


Ainsi on obtient:

$$\theta_W = C_1 + C_2$$

Une deuxième condition naturelle est que, en z=L, le flux est pratiquement nul. Mathématiquement ceci se traduit par le fait que T ne varie plus en fonction de z

$$\frac{d\theta}{dz}\Big|_L = 0$$



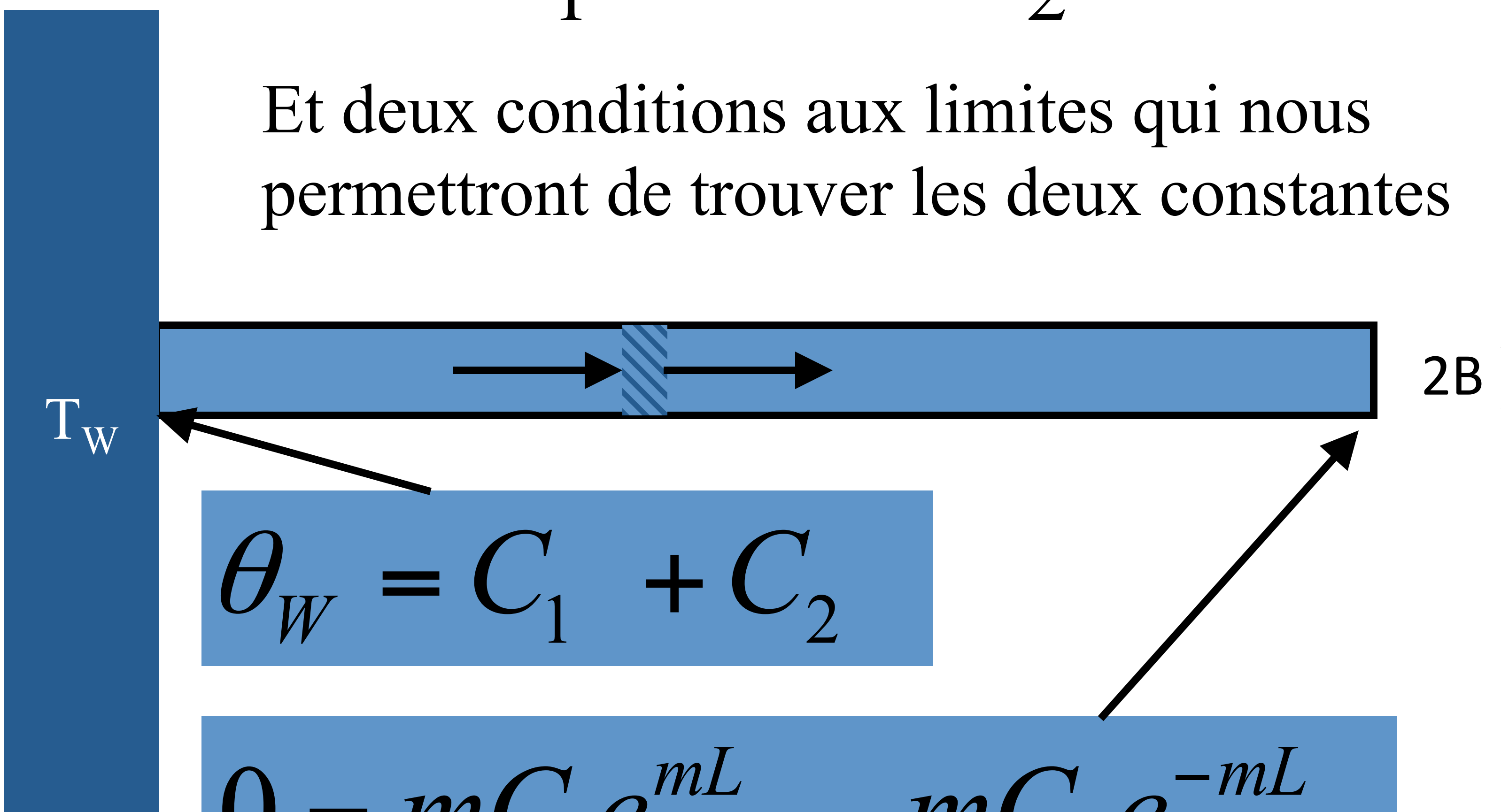
Ainsi on obtient:

$$\frac{d\theta}{dz}\Big|_L = 0 = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL}$$

Résumons-nous: on a une solution générale:

$$\theta = C_1 e^{mz} + C_2 e^{-mz}$$

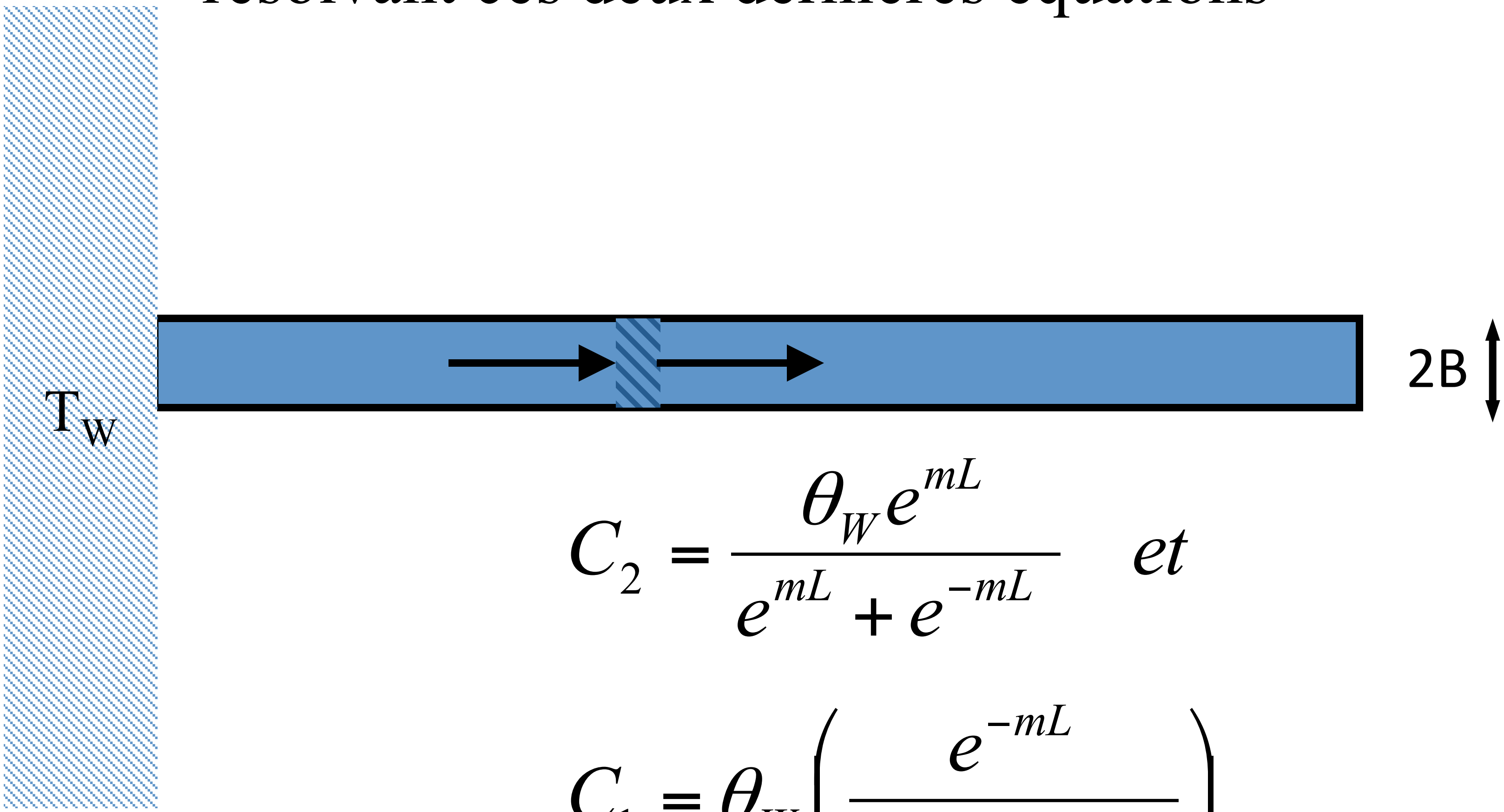
Et deux conditions aux limites qui nous permettront de trouver les deux constantes



$$\theta_W = C_1 + C_2$$

$$0 = mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL}$$

On peut donc trouver les deux constantes en résolvant ces deux dernières équations

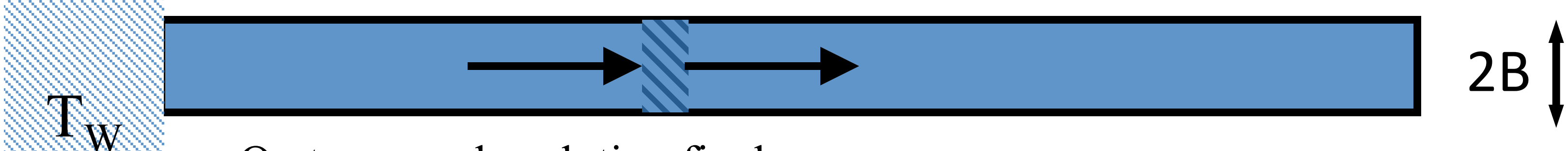


$$C_2 = \frac{\theta_W e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad et$$

$$C_1 = \theta_W \left(\frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right)$$

En remplacant les deux constantes dans l'équation trouvée

$$\theta = C_1 e^{mz} + C_2 e^{-mz}$$

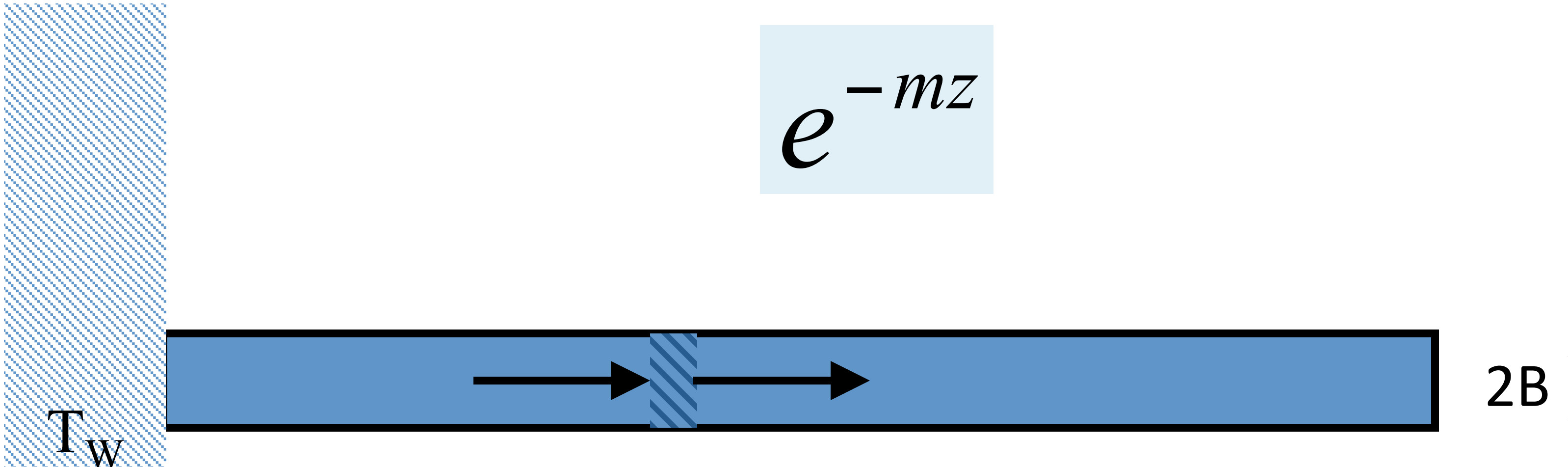


On trouvera la solution finale

$$\frac{\theta}{\theta_W} = \left(\left[\frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right] e^{mz} + \left[\frac{e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \right] e^{-mz} \right)$$

Si l 'ailette est très longue, infinie, le profil devient:

$$e^{-mz}$$

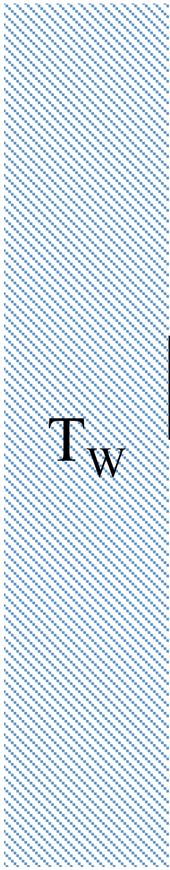


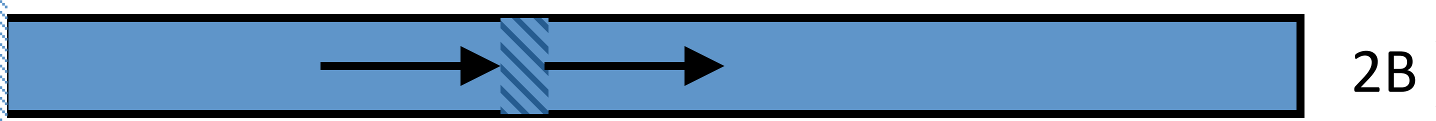
Ce qui est identique a ce que l 'on a développé précédemment. Notre équation vérifie donc ce cas asymptotique. BIRD utilise pour représenter cette équation une formulation en fonction des sin et cos hyperboliques

$$\sinh(mL) = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{2} \quad , \quad \cosh(mL) = \frac{e^{mL} + e^{-mL}}{2}$$

$$et \quad \tanh(mL) = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

Définissons l 'efficacité d 'une ailette comme sa performance par rapport a une ailette idéale. Cette ailette idéale est celle qui dissipera la plus grande quantité de chaleur possible pour sa configuration, et ceci implique qu 'elle est sur toute sa longueur à T_w





Dans ce cas une ailette idéale dissipera:

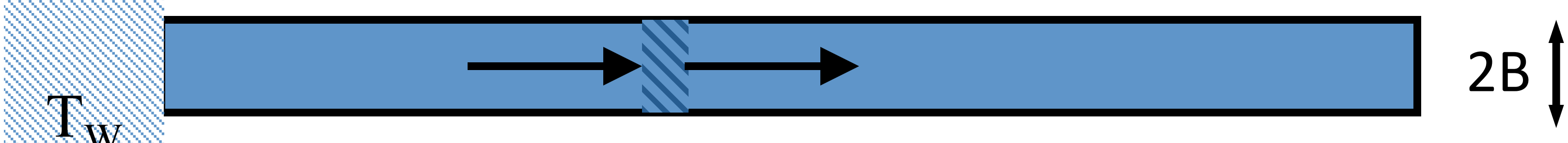
$$h(2LW)(T_w - T_a) = h(2LW)\theta_w$$

Mais une ailette réelle dissipera:

$$\int_0^L h(2W)(T - T_a)dz = \int_0^L h(2W)\theta dz$$

$$\int_0^L h(2W)\theta dz = \int_0^L h(2W)\left(C_1 e^{mz} + C_2 e^{-mz}\right) dz$$

$$= h(2W)\left(\frac{C_1}{m} e^{mz} - \frac{C_2}{m} e^{-mz}\right)\Bigg|_0^L$$



$$\int_0^L h(2W)\theta dz = \frac{h2W}{m}\left[C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} - (C_1 - C_2)\right]$$

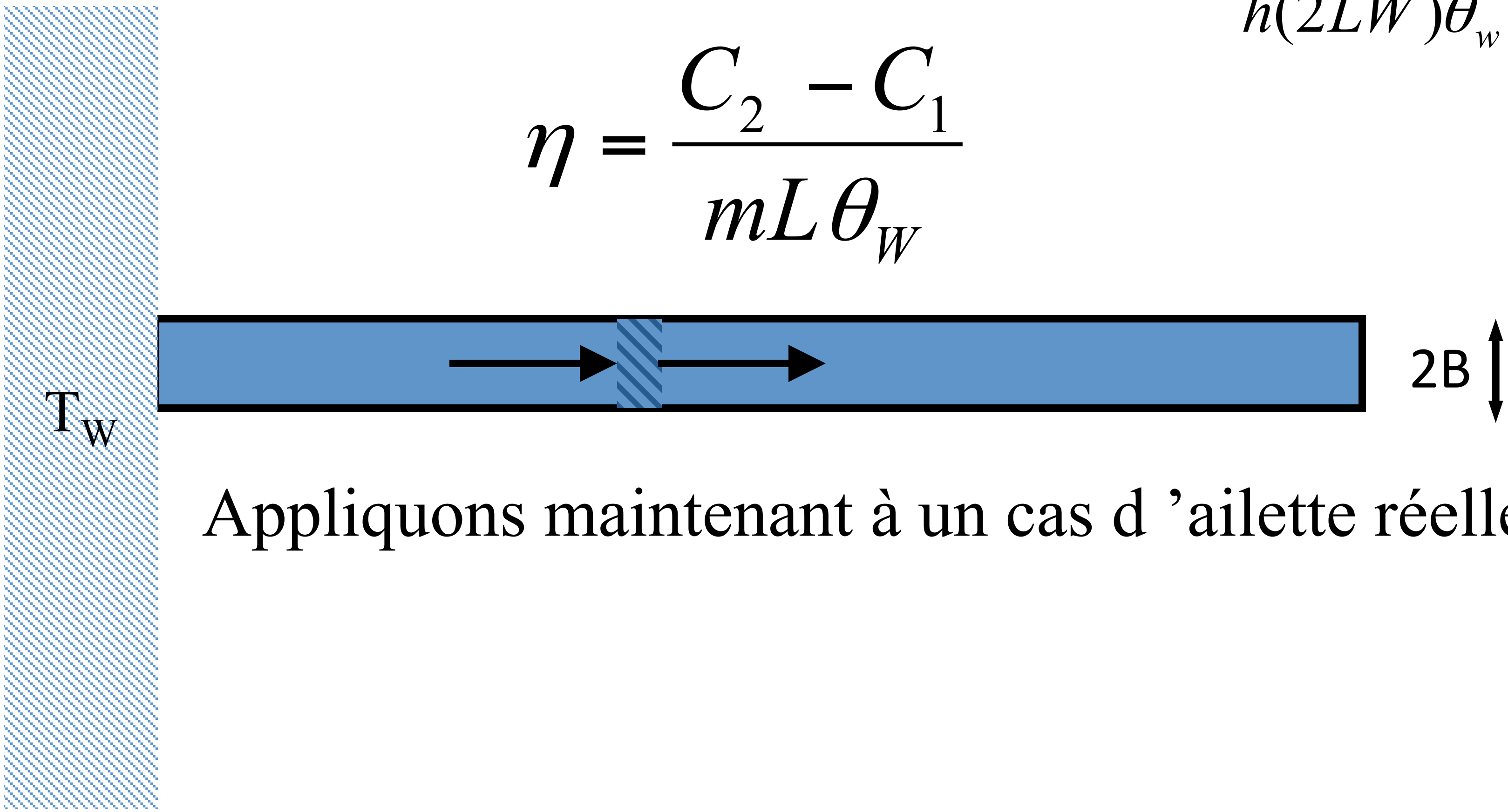
L'énergie dissipée pour l 'ailette est donc de: $\frac{h2W}{m}\left[-(C_1 - C_2)\right]$

Et l 'ailette efficace à 100% dissipe: $h(2LW)\theta_w$

L 'efficacite est donc:

$$\eta = \frac{\frac{h2W}{m}\left[-\left(C_1 - C_2\right)\right]}{h(2LW)\theta_w}$$

$$\eta = \frac{C_2 - C_1}{mL\theta_W}$$



Appliquons maintenant à un cas d 'ailette réelle:

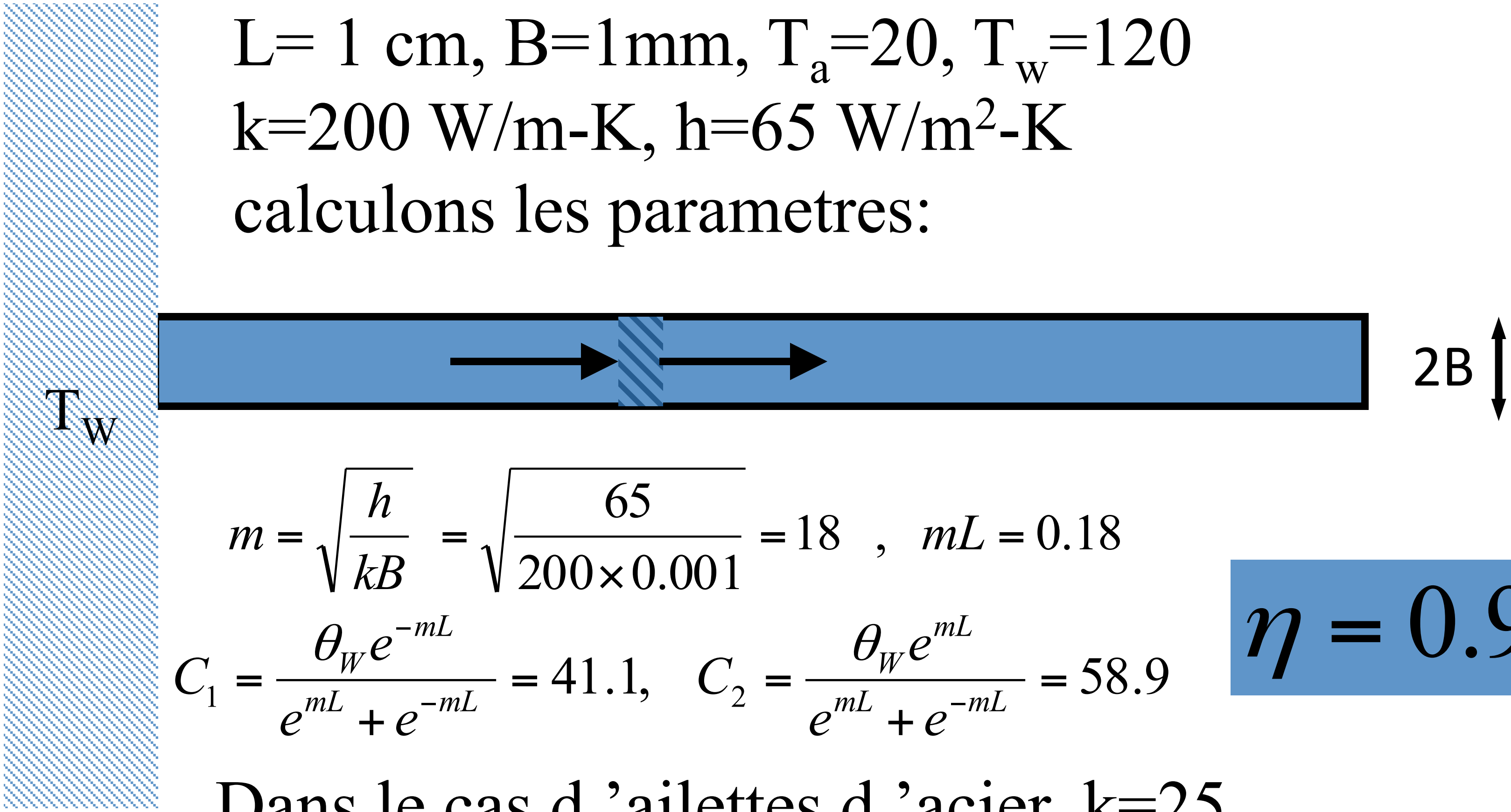
$$\eta = \frac{C_2 - C_1}{mL\theta_W}$$

Ailettes d 'aluminium:

L= 1 cm, B=1mm, T_a=20, T_w=120

k=200 W/m-K, h=65 W/m²-K

calculons les parametres:



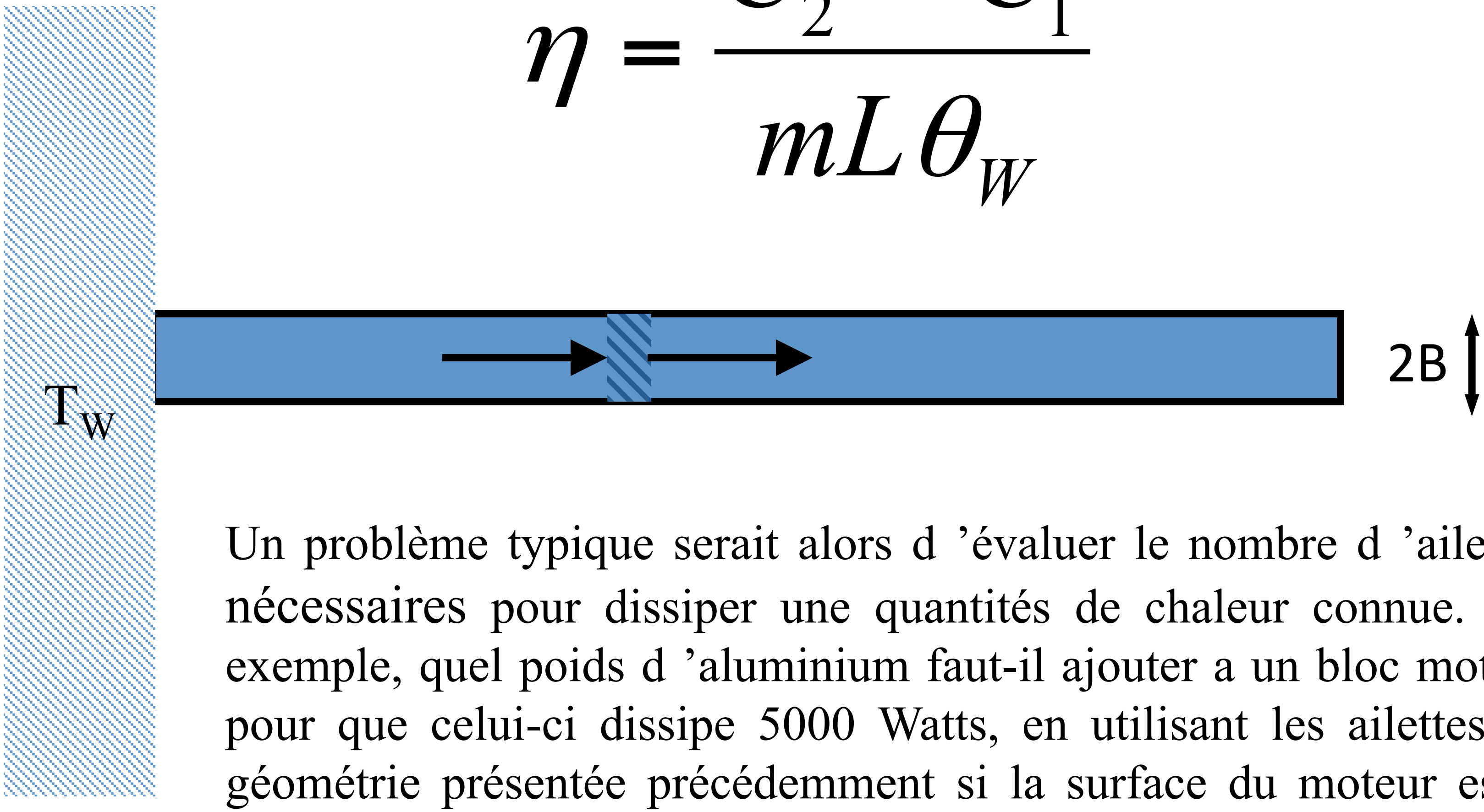
$$m = \sqrt{\frac{h}{kB}} = \sqrt{\frac{65}{200\times 0.001}} = 18 \quad , \quad mL = 0.18$$

$$C_1 = \frac{\theta_W e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = 41.1, \quad C_2 = \frac{\theta_W e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} = 58.9$$

$$\eta = 0.989$$

Dans le cas d 'ailettes d 'acier, k=25,
on retrouvera facilement une efficacite de 92%

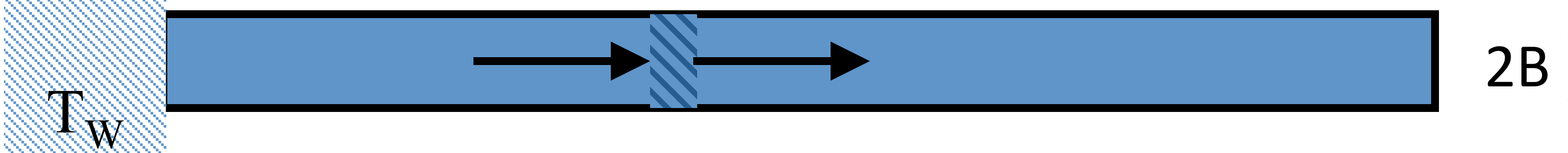
$$\eta = \frac{C_2 - C_1}{mL\theta_W}$$



Un problème typique serait alors d ’évaluer le nombre d ’ailettes nécessaires pour dissiper une quantités de chaleur connue. Par exemple, quel poids d ’aluminium faut-il ajouter a un bloc moteur pour que celui-ci dissipe 5000 Watts, en utilisant les ailettes de géométrie présentée précédemment si la surface du moteur est a 150 degrés et l ’air ambiant a 25?

On a deja calcule: $\eta = 0.989$

Le taux a dissiper est de 5000 Watts:



$$Q = hA(150 - 25) \times \eta = 5000$$

$$A = \frac{5000}{0.989 \times 125 \times 65} = 0.622\, m^2$$

$$\text{pour un cote, } \mathrm{LW} = 0.311\,\mathrm{m}^2$$

$$\text{le volume est donc} : 0.311 \text{ x } 0.002 = 0.000622\, m^3$$

$$masse = 2700 \times 0.000622 = 1.679\, kg$$

Exercices suggérés

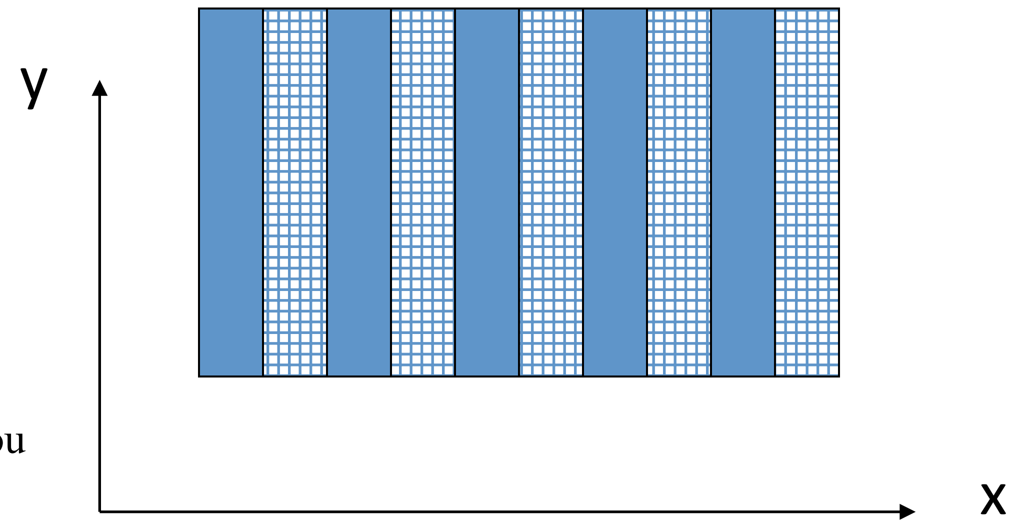
- 10A3, 10B1, 10B7, 10B16 de Transport phenomena

Voir série N3

Exercices supplémentaires chapitre 10 de Transport phenomena

1-Un matériau composite est constitué de n paires de couches (d 'épaisseurs égales) ayant des conductivités thermiques k_A et k_B. Quelle est la conductivité thermique « effective »:

- Dans la direction x
- Dans la direction y

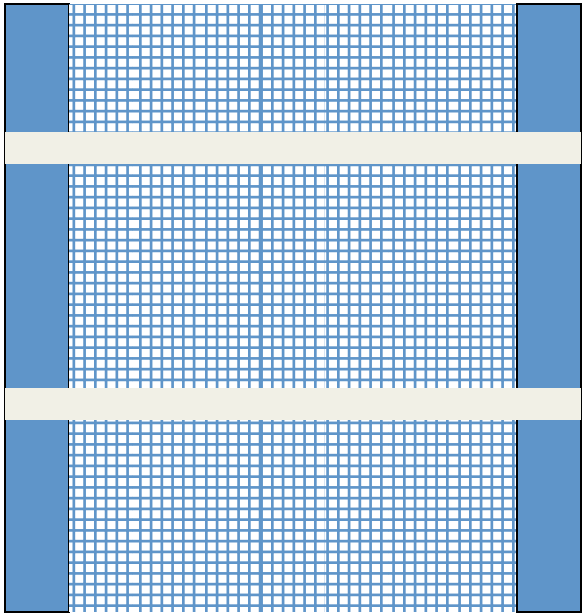


Un de vos collègues vous suggère que le résultat doit être simplement la moyenne $0.5*(k_A+k_B)$. Vous rigolez ou Vous êtes d 'accord avec lui?

Indice: on entends par conductivité effective la conductivité qui serait obtenue si on considérait le matériau comme un matériau homogène

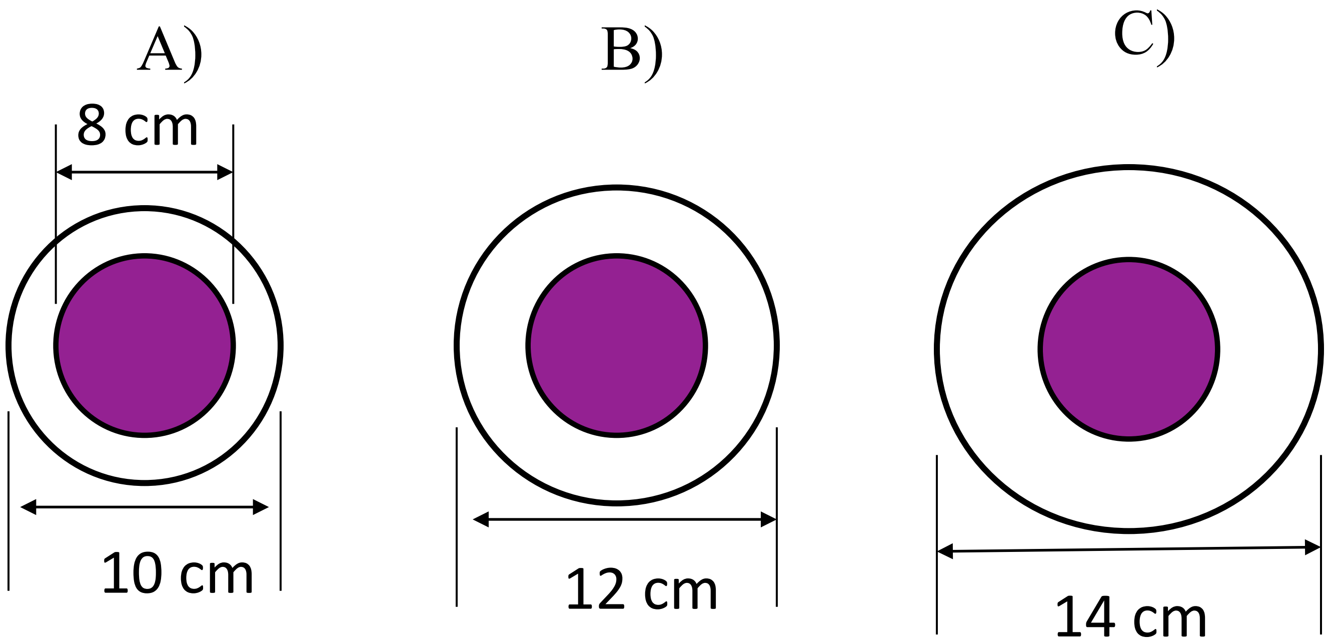
Exercices supplémentaires chapitre 10 de Transport phenomena

2-Une paroi de fournaise a une surface de 10 m^2 et est constituée de deux plaques d 'acier de 1 cm qui protègent un refractaire de 20 cm d 'épaisseur. La conductivité thermique de l 'acier est de 50 alors que celle du refractaire est de 0.5. Afin de stabiliser la paroi, 10 tiges métalliques sont utilisées, qui
traversent complètement la paroi. Ces tiges ont toutes un rayon de 2.5 cm et
sont constituées du même acier. Quelle proportion des pertes thermiques de
la fournaise proviennent de ces tiges?



Exercices supplémentaires chapitre 10 de Transport phenomena

3- Un tube qui transporte un fluide chaud doit être isolé. Le tube a un diamètre de 8 cm et on veut estimer les pertes de chaleur avec trois épaisseurs d 'isolant qui sont commercialement disponibles. Le coefficient d 'échange h est de 3 W/m^2, la conductivité de l 'isolant est de 0.18 W/m. La temperature interne est de 200 C, la température de l 'air extérieur est de 20. Calculez les pertes par unite de longueur de tube avec les trois épaisseurs d 'isolant présentées ci-bas



Indice: dans ces cas on peut pratiquement toujours négliger la résistance thermique due au coefficient d 'échange interne et a la paroi métallique de la paroi du tube, on ne considère que la résistance de l 'isolant et du film d 'air