



Université Internationale  
de Casablanca

UNIVERSITÉ RECONNUE PAR L'ÉTAT

## *3A Cycle ingénieur GM*

## *Calcul des structures*

---

Smail ZAKI

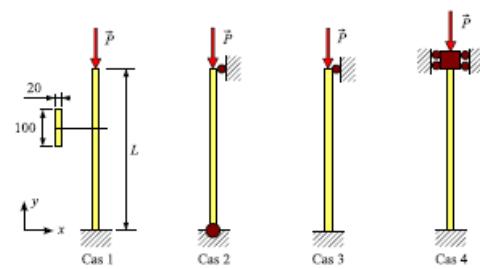
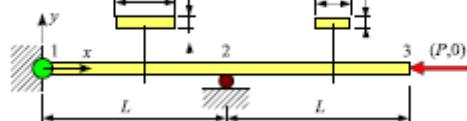
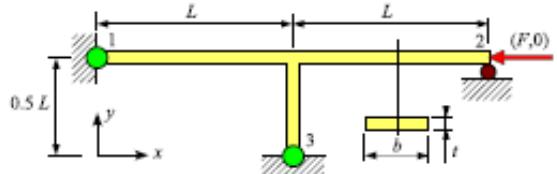
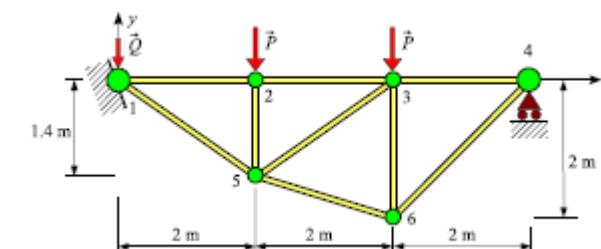
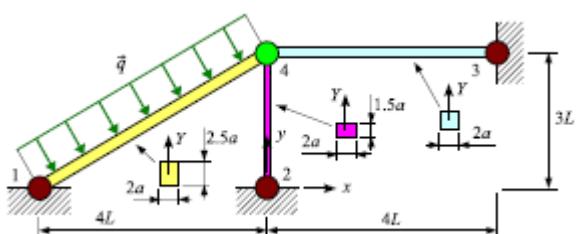
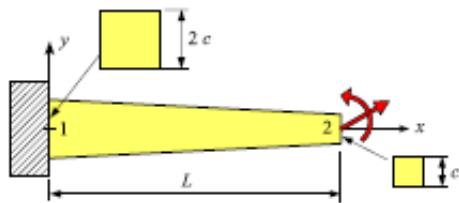
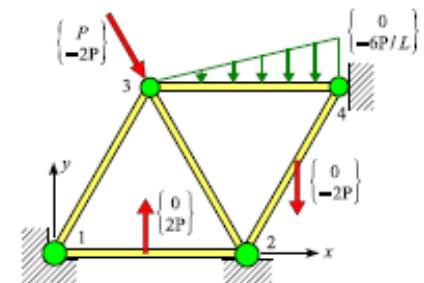
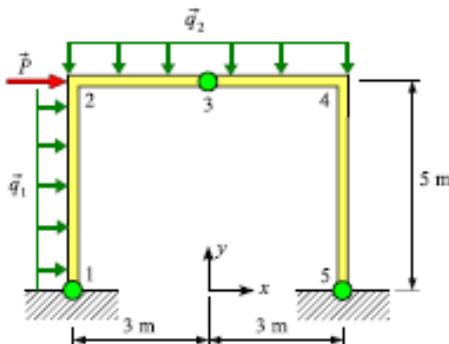
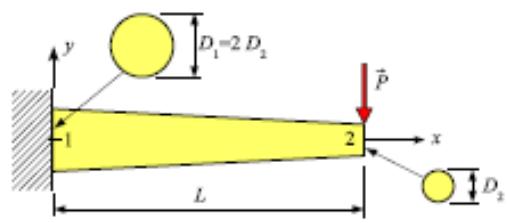
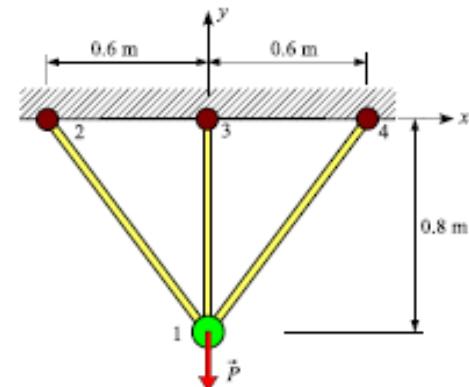
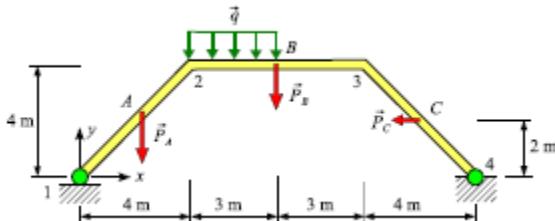
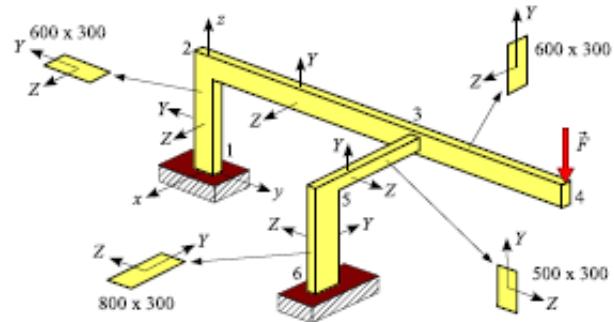
Professeur d'enseignement supérieure

Ing., phd. Arts et Métiers

Mobile : 06 67 95 38 67

Email : [smail.zaki@gmail.com](mailto:smail.zaki@gmail.com)

AU: 2019/2020





0983865 www.fotosearch.com



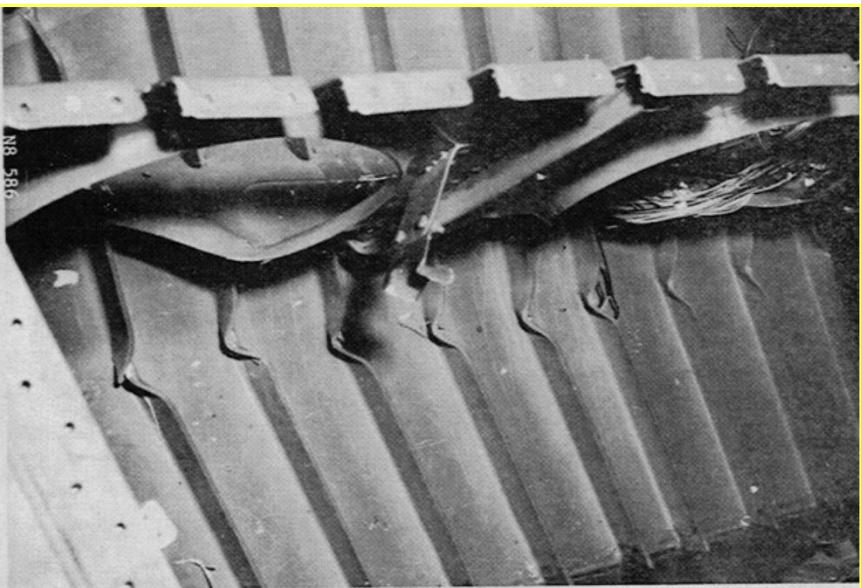
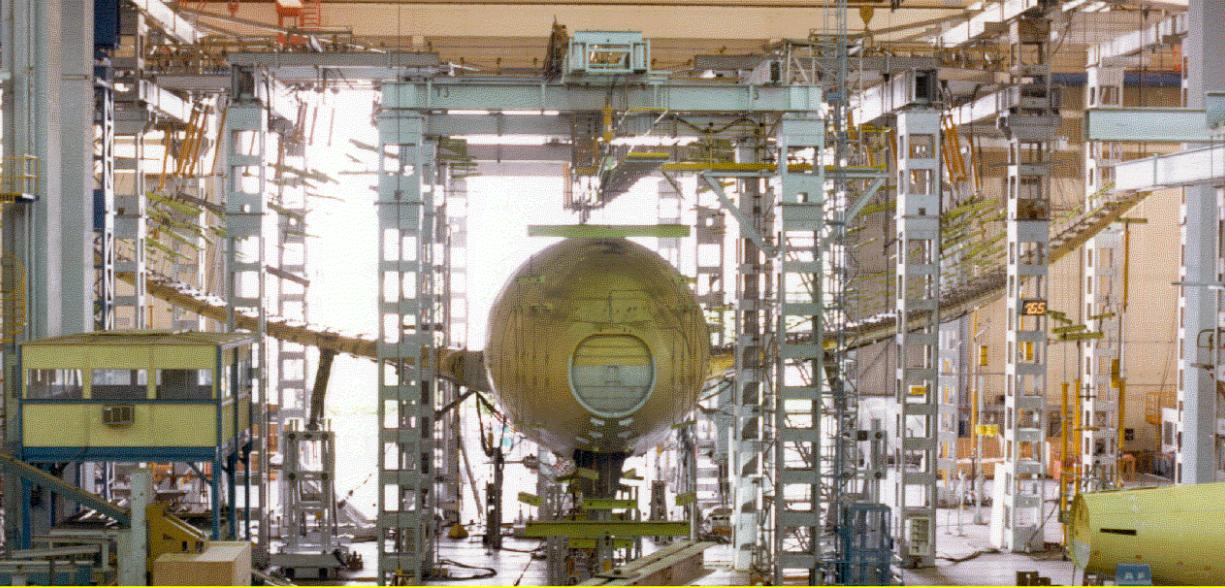
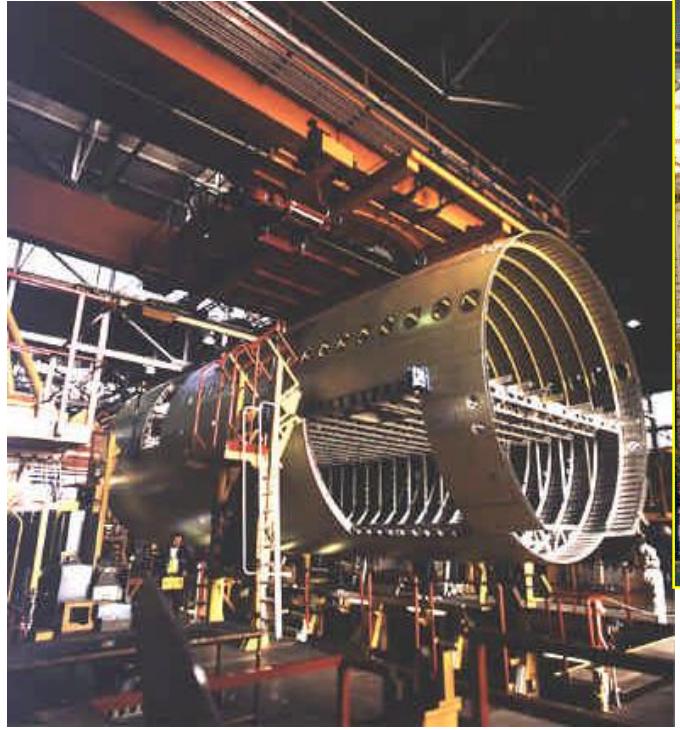
0906633 www.fotosearch.com



0732411 www.fotosearch.com



0779135 www.fotosearch.com



II.5 - Flambage d'un panneau d'extrados de voilure au voisinage  
d'une nervure courante (vue de l'intérieur du caisson après ouverture).



# Chap. 1:

# Rappel et prérequis

# Plan de Chapitre 1

I. Hypothèses générales

I. Les actions de liaison

II. Sollicitations Simples

III. Sollicitations Composées

IV. Systèmes hyperstatiques

V. Applications

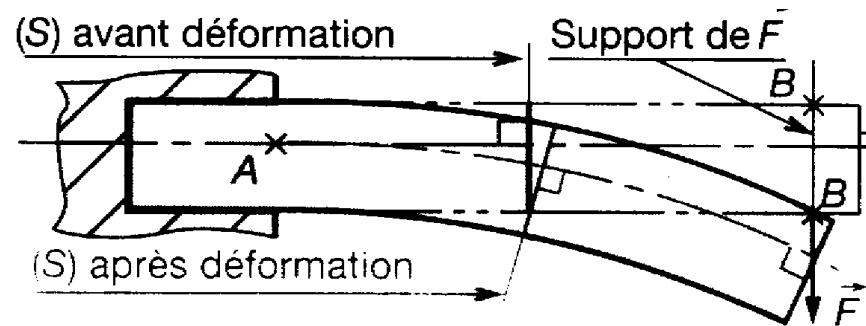
# *I. Hypothèses générales*

# Hypothèses générales

## Sur les déformations

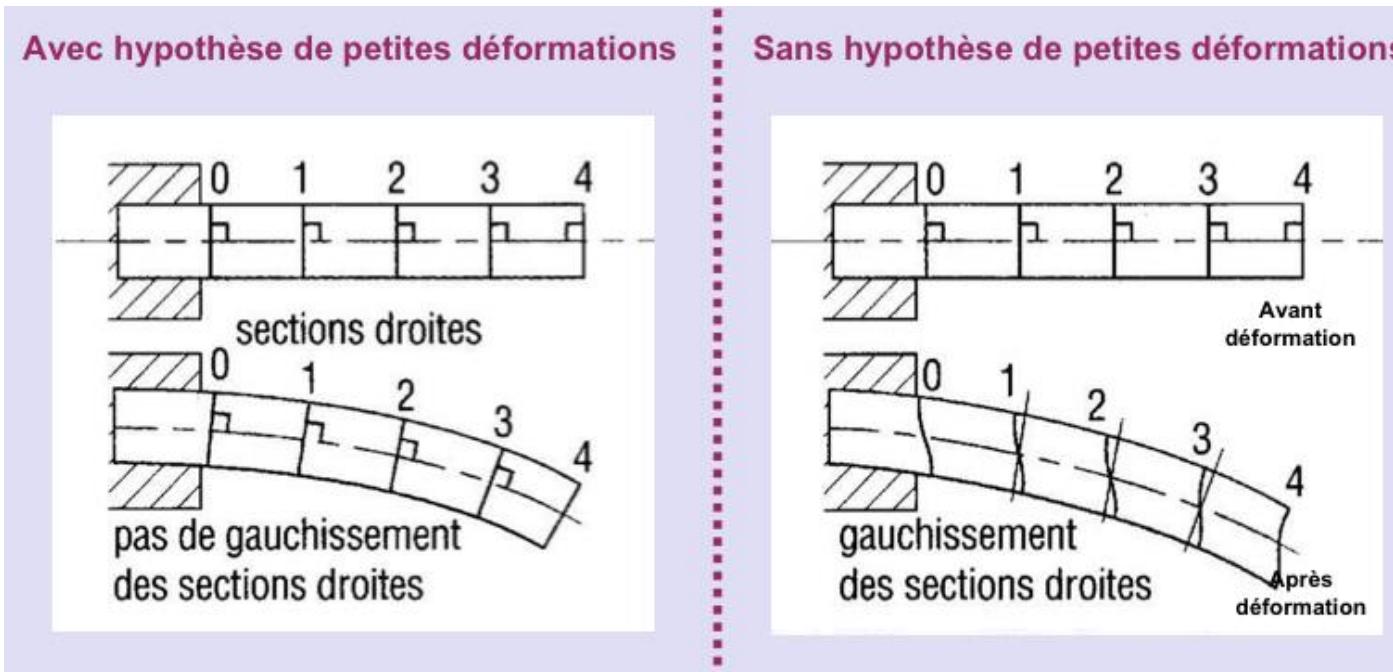
### ➤ Hypothèse de BERNOULLI

Les sections droites planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation.



## Hypothèses de Bernouilli

Toute section droite avant déformation reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne déformée.

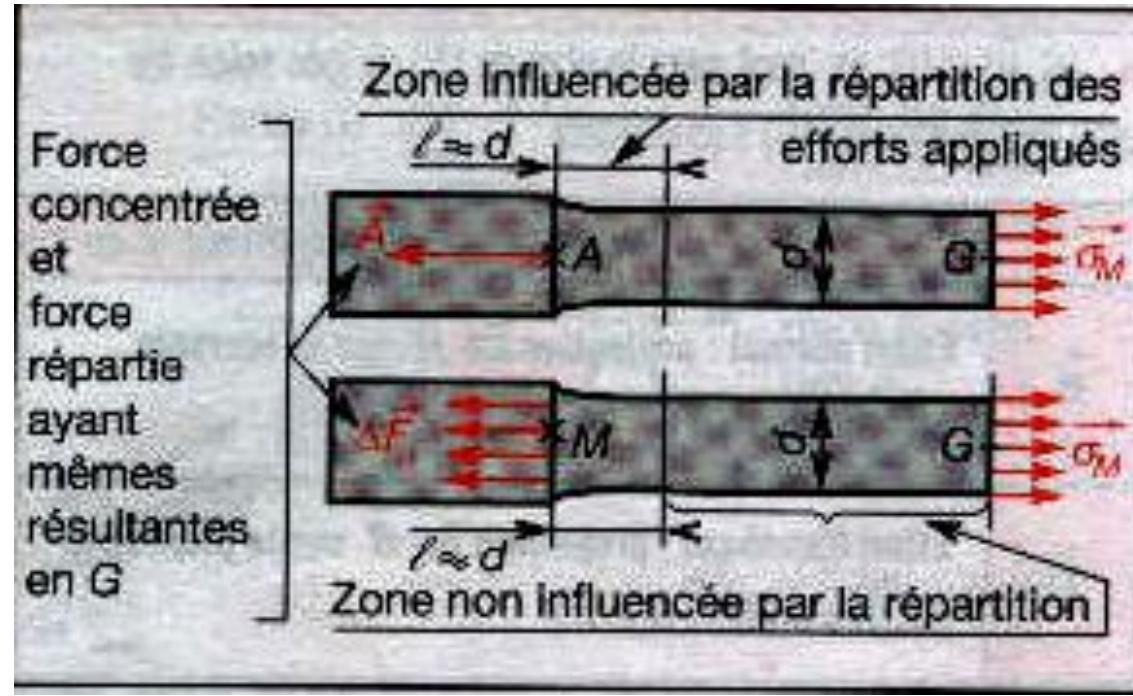


→ les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli (pas de gauchissement).

L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la flexion, et la flèche est due au moment fléchissant

## Sur l'application des charges (principe de barre de saint-venant)

«Les contraintes et les déformations dans une région éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces.»



## *II. Les actions de liaison*

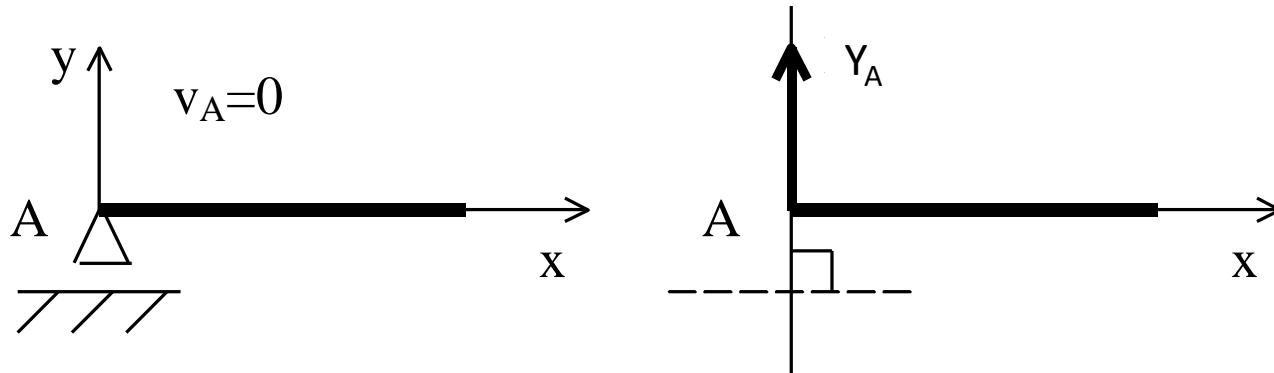
# Les actions de liaison

## 1 L'appui simple

Un système matériel  $S_1$  est en appui simple sur un système matériel  $S_2$  si le contact peut être supposé ponctuel ou suivant une arête, et a lieu sans frottement.

L'appui simple impose un seul blocage en translation dans la direction normale à la surface d'appui. Il fait ainsi naître une force de liaison dans cette direction.

## 1 L'appui simple



La force de liaison a les caractéristiques suivantes :

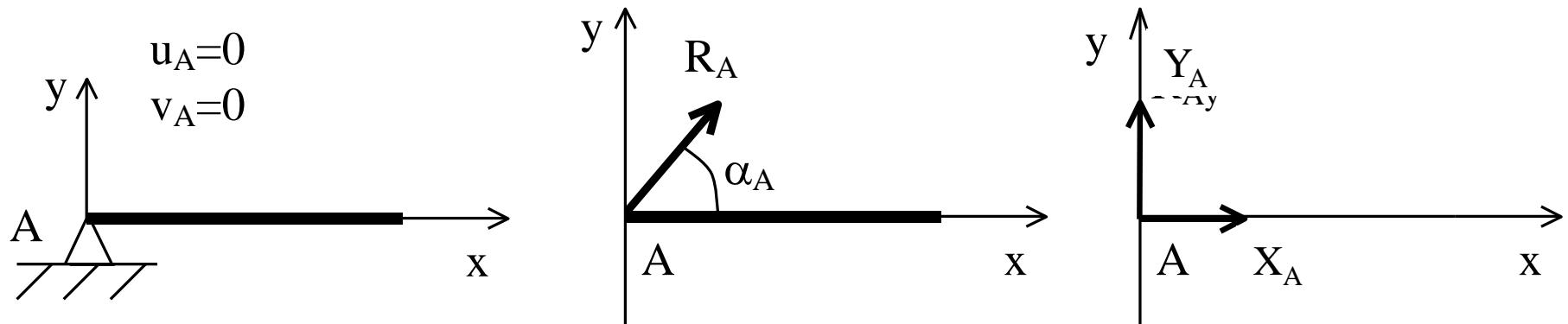
- Point d'application A,
- Droite d'action perpendiculaire à la surface d'appui,
- Composante  $Y_A$  inconnue.

**L'appui simple introduit donc 1 inconnue.**

## 2 L'articulation

Elle impose deux blocages en translation suivant les axes Ox et Oy, et la rotation reste libre. L'articulation fait donc naître les deux composantes de la force de liaison.

## 2 L'articulation



La force de liaison a les caractéristiques suivantes :

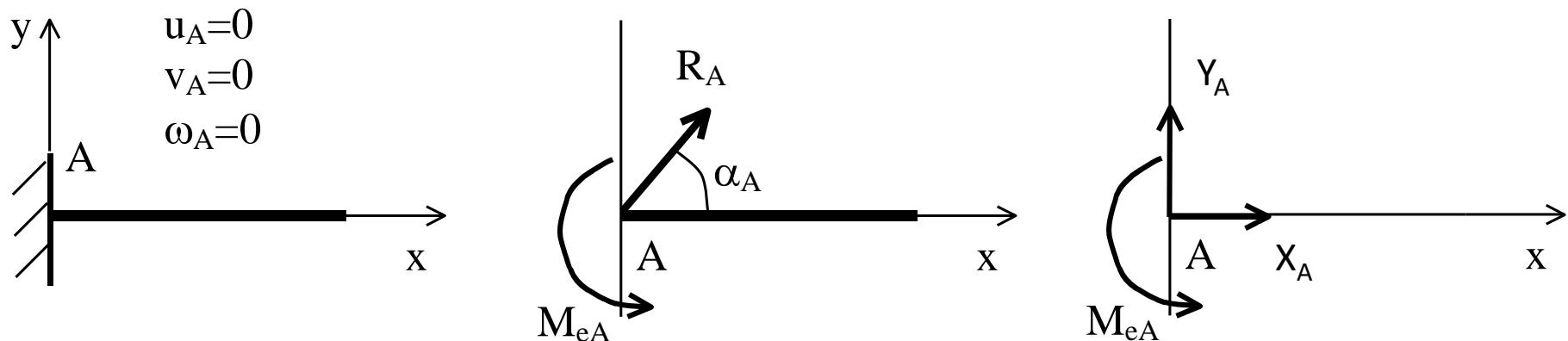
- Point d'application A,
- Composantes  $X_A$  et  $Y_A$  inconnues.

**L'articulation introduit donc 2 inconnues ( $X_A$  et  $Y_A$ ).**

### 3 L'encastrement

Il impose trois blocages (les deux translations et la rotation). Les deux blocages en translation font naître les deux composantes de la force de liaison. Le blocage en rotation fait naître le moment d'encastrement.

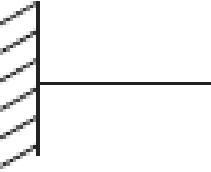
### 3 L'encastrement



Les actions de liaison ont les caractéristiques suivantes :

- Point d'application A,
- Composantes  $X_A$  et  $Y_A$  de la force de liaison inconnues,
- Moment d'encastrement  $M_{eA}$  inconnu.

**L'encastrement introduit donc 3 inconnues ( $X_A$ ,  $Y_A$  et  $M_{eA}$ ).**

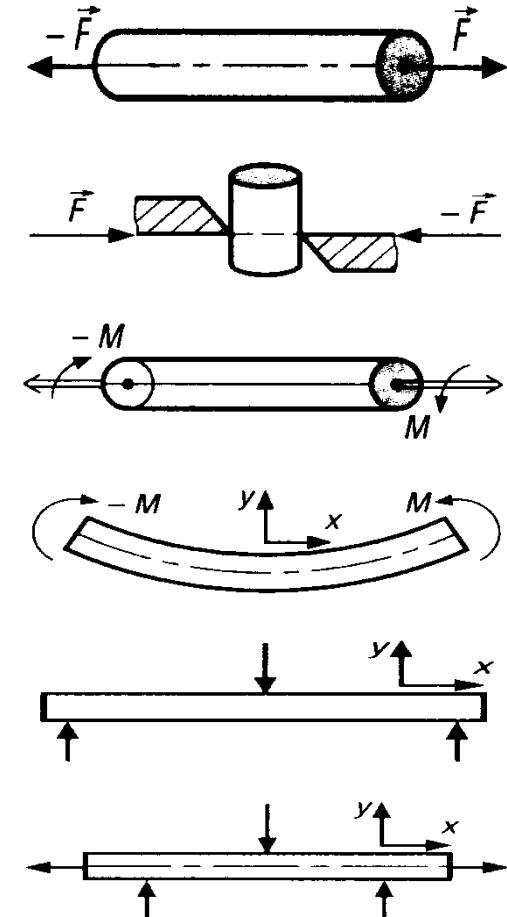
Type de liaisons	Schémas	Réactions d'appuis	Degrés de liberté
Rotule		$H \neq 0, V \neq 0,$ $M = 0$	$u = 0, v = 0, \theta \neq 0$
Appui simple		$V \neq 0, H = 0,$ $M = 0$	$v = 0, u \neq 0, \theta \neq 0$
Encastrement		$V \neq 0, H \neq 0,$ $M \neq 0$	$v = 0, u = 0, \theta = 0$

# *III. Sollicitations Simples*

### III. Nature des sollicitations

Sollicitations simples

Nature des sollicitations	Forces de cohésion
Traction ou Compression	$N$
Cisaillement simple	$T$
Torsion simple	$M_t$
Flexion pure	$M_f$
Flexion simple	$T + M_f$
Flexion composée	$N + T + M_f$

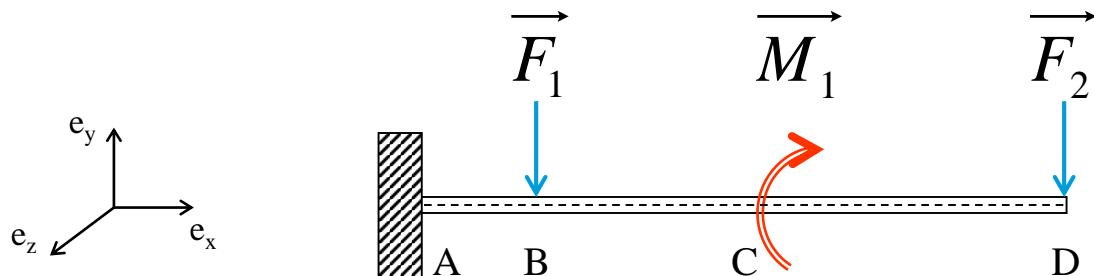


# Nature des Sollicitations (simples)

Nature des sollicitations	Effort Normal	Effort Tranchant	Moment de Torsion	Moment de Flexion	Torseur de cohésion
<b>Traction</b> <b>Compression</b> (N>0) (N<0)	N	T <sub>y</sub> =0 T <sub>z</sub> =0	M <sub>t</sub> =0	M <sub>fy</sub> =0 M <sub>fz</sub> =0	$\{\tau_{Coh}\} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ G & 0 \end{pmatrix}$
<b>Cisaillement simple</b>	N=0	T <sub>y</sub> ou T <sub>z</sub>	M <sub>t</sub> =0	M <sub>fy</sub> =0 M <sub>fz</sub> =0	$\{\tau_{Coh}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{pmatrix}$
<b>Torsion simple</b>	N=0	T <sub>y</sub> =0 T <sub>z</sub> =0	M <sub>t</sub>	M <sub>fy</sub> =0 M <sub>fz</sub> =0	$\{\tau_{Coh}\} = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ G & 0 \end{pmatrix}$
<b>Flexion pure</b>	N=0	T <sub>y</sub> =0 T <sub>z</sub> =0	M <sub>t</sub> =0	M <sub>fy</sub> ou M <sub>fz</sub>	$\{\tau_{Coh}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ G & M_{fz} \end{pmatrix}$

Traction / compression	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} N \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	$N > 0$ traction $N < 0$ compression
Flexion pure	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{f2} \vec{x}_2 + M_{f3} \vec{x}_3 \end{Bmatrix}_G$	
Flexion simple	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{T}_3 \vec{x}_3 \\ M_{f2} \vec{x}_2 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} \vec{T}_2 \vec{x}_2 \\ M_{f3} \vec{x}_3 \end{Bmatrix}_G$	
Cisaillement pur	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} T_2 \vec{x}_2 + T_3 \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	
Torsion pure	$\mathcal{T} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_G$	

## Équations d ' équilibre global



le **Principe Fondamental de la Statique** donne :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}(A, F_i) = \vec{0}$$

$$\underbrace{\vec{R}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\vec{0}}$$

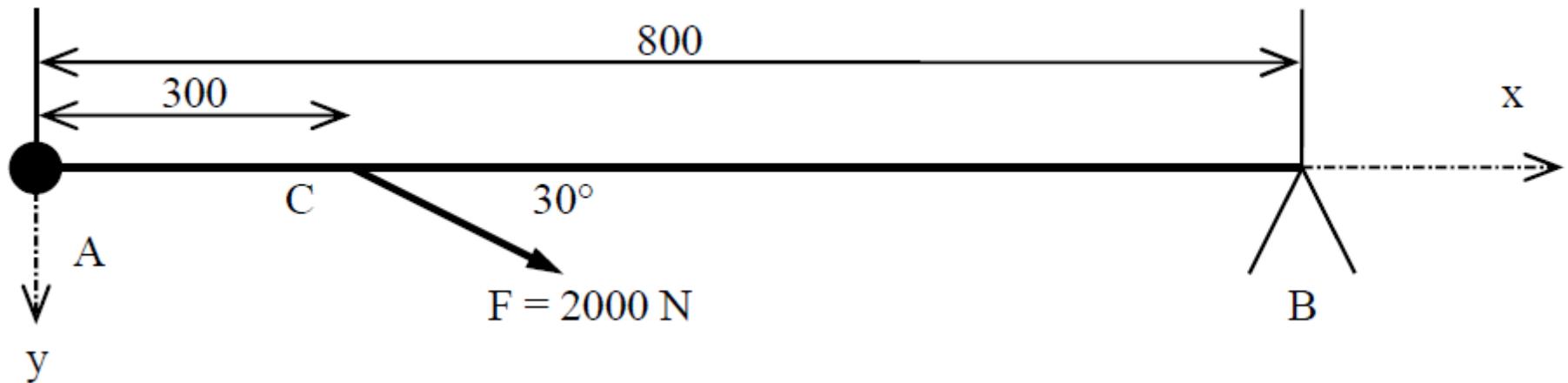
$$\underbrace{\vec{M}_A + \vec{M}_1}_{\vec{0}} + \vec{AB} \wedge \vec{F}_1 + \vec{AD} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0}$$

## *IV. Sollicitations Composées*

# Sollicitations Composées

## Exemple 1: Flexion + Extension.

On se propose d'étudier une poutre de section rectangulaire (12x36), sollicitée dans les conditions ci-dessous :



- On isole la poutre, bilan des actions extérieures, P.F.S., afin de connaître les actions extérieures, ici on a :

$$\begin{cases} A_X + P \cdot \cos 30 = 0 \\ A_Y + B + P \cdot \sin 30 = 0 \\ 800 \cdot B + 300 \cdot P \cdot \sin 30 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_X = -375N \\ A_Y = -1732N \\ B = -625N \end{cases}$$

- On recherche le torseur de cohésion, à savoir :

\* tronçon BC.

$$\{coh\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -375 & 0 \\ 0 & 375 \cdot (x - 800) \end{Bmatrix}_G$$

\* tronçon AC.

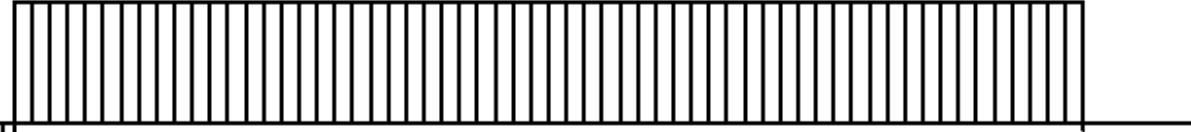
$$\{coh\}_G = \begin{Bmatrix} 1732 & 0 \\ 625 & 0 \\ 0 & 625 \cdot x \end{Bmatrix}_G$$

On est bien en présence d'une sollicitation d'extension et de flexion simple.

On obtient les diagrammes suivants :



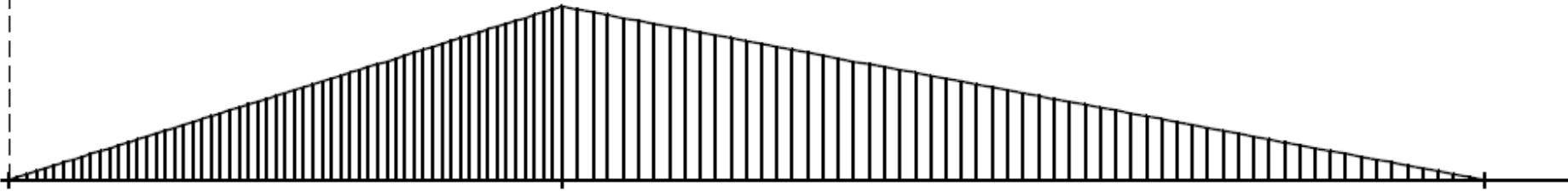
Effort normal : max  $N = 173.20$  daN



Effort tranchant : max  $TY = 62.50$  daN



Moment fléchissant : max  $MFZ = 18750.00$  daN.m



On trouve que la section la plus sollicitée se situe à l'abscisse  $x = 300$ .

- On recherche alors les contraintes séparément, à savoir :

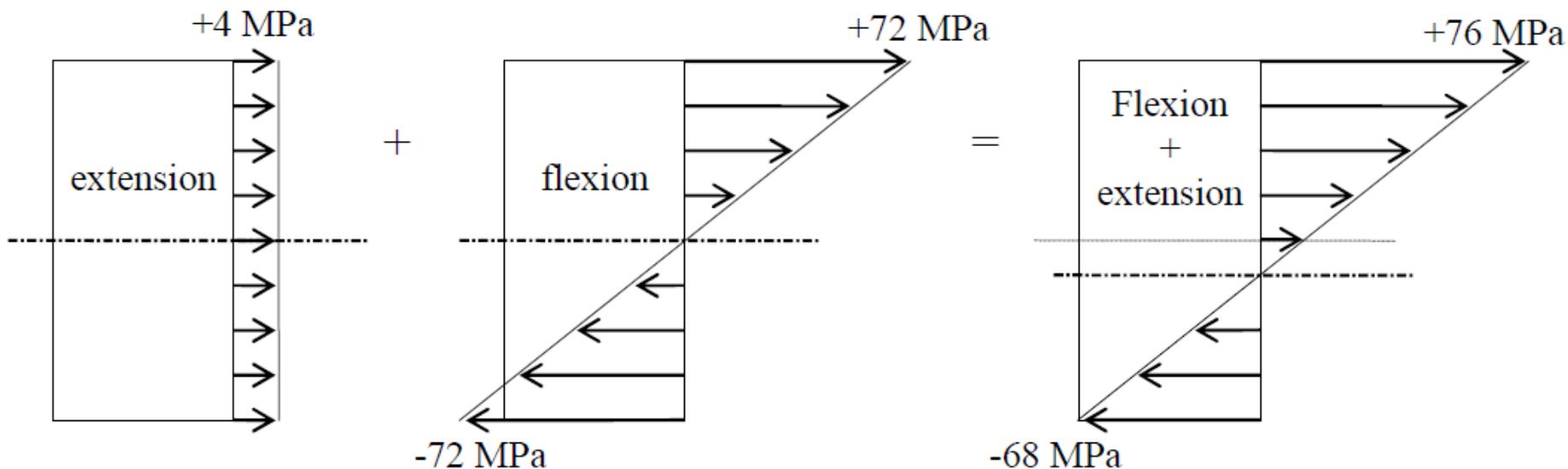
- \* contrainte d'extension.

$$\sigma_{ext} = \frac{N}{S} = 4. MPa$$

- \* contrainte de flexion.

$$\sigma_{flex} = \frac{Mf}{I_G} \cdot \rho = \frac{12. Mf}{b \cdot h^3} \cdot \frac{h}{2} = 72. MPa$$

On procède ensuite à la superposition en additionnant les contraintes.

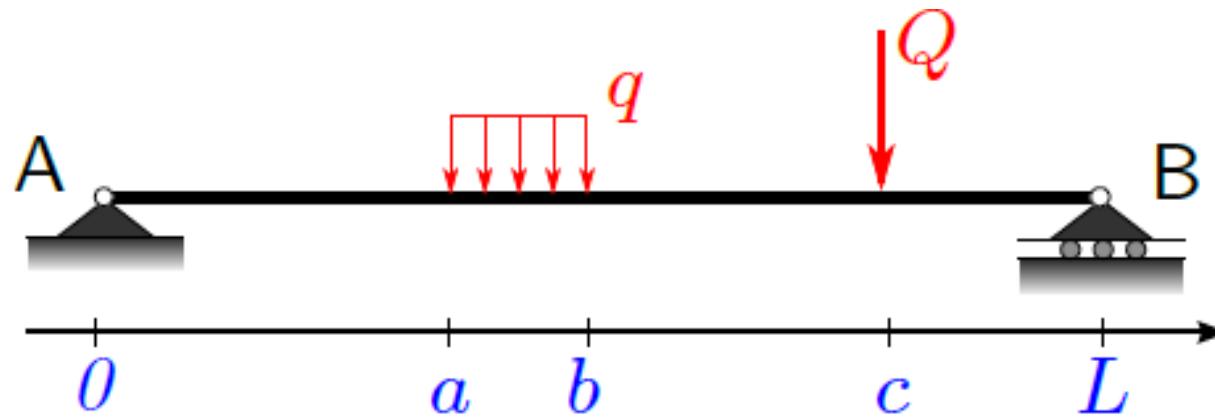


On observe dans la superposition un décalage de la fibre neutre.

# Sollicitations Composées

## Exemple 2

Soit une poutre droite de longueur  $L$  soumise à deux sollicitations : une charge répartie  $q$  et une charge ponctuelle telles qu'indiqué à la figure 6.9. Soit une poutre droite de longueur  $L$  soumise à deux sollicitations : une charge répartie  $q$  et une charge ponctuelle telles qu'indiqué à la figure ci-dessous



1. Écriture de l'équilibre global Le système est isostatique. Les réactions de liaisons sont notées et représentées sur la figure 6.10.

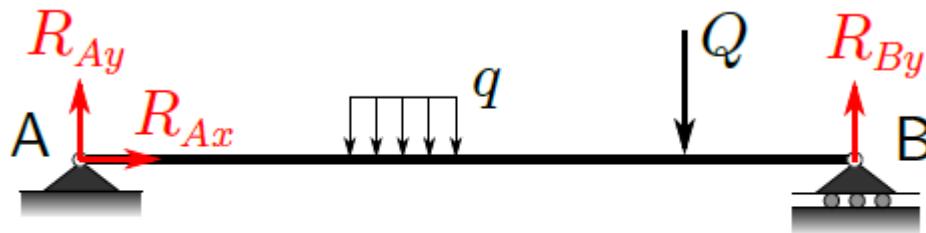


FIGURE 6.10 – Réactions d'appui

Les équations d'équilibre fournissent (le moment est écrit en A) :

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) - Q + R_{By} = 0 \\ - \int_a^b q x dx - Qc + R_{By}L = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Notons que  $\int_a^b qx \, dx$  peut-être évaluée directement en considérant l'ensemble de la charge  $q(b-a)$  concentrée sur le bras de levier moyen  $(a+b)/2$  ce qui donne un moment  $q(b-a)(a+b)/2 = q(b^2 - a^2)/2 = \int_a^b qx \, dx$ .

Au final, les réactions aux appuis sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_{Ax} & = & 0 \\ R_{Ay} = Q(1 - \frac{c}{L}) + q(b-a)(1 - \frac{b+a}{2L}) & = & 0 \\ R_{By} = \frac{Qc}{L} + q(b-a)\frac{b+a}{2L} & = & 0 \end{array} \right. \quad (6.19)$$

**2. Écriture des équilibres locaux** Il faut distinguer les équilibres des différents tronçons :  $[0, a]$ ,  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  et  $[c, L]$ .  
 $s \in [0, a]$  (figure 6.11) :

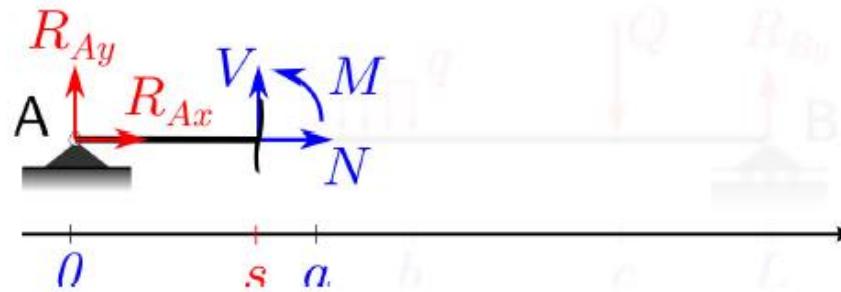


FIGURE 6.11 – Équilibre d'un tronçon de  $[0, a]$

$$\begin{cases} N &= 0 \\ -R_{Ay} + V &= 0 \\ M + Vs &= 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

ou encore :

pour  $x \in [0, a]$ ,

$$\begin{cases} N(s) &= 0 \\ V(s) &= -Q\left(1 - \frac{c}{L}\right) - q(b-a)\left(1 - \frac{b+a}{2L}\right) \\ M(s) &= Q\left(1 - \frac{c}{L}\right)s + q(b-a)\left(1 - \frac{b+a}{2L}\right)s \end{cases} \quad (6.21)$$

$s \in [a, b]$  (figure 6.12) :

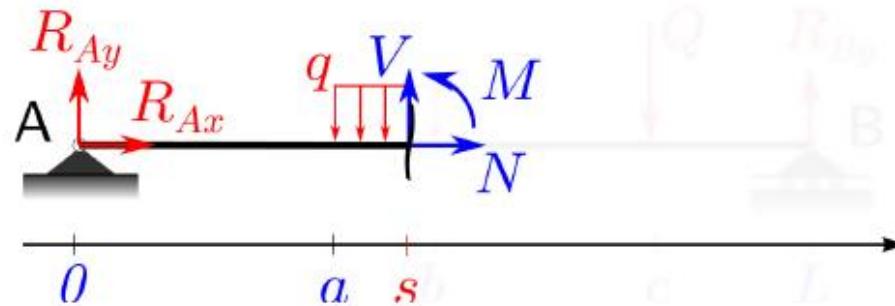


FIGURE 6.12 – Équilibre d'un tronçon de  $[a, b]$

$$\begin{cases} N &= 0 \\ R_{Ay} - q(s-a) + V &= 0 \\ -\int_a^s qxdx + Vs + M &= 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

ou encore :

<p style="margin: 0;">pour <math>x \in [a, b]</math>,</p>	$\begin{cases} N(s) &= 0 \\ V(s) &= -R_{Ay} + q(s-a) \\ M(s) &= R_{Ay}s - q(s-a)s + q(s^2 - a^2)/2 \end{cases} \quad (6.23)$
---	--

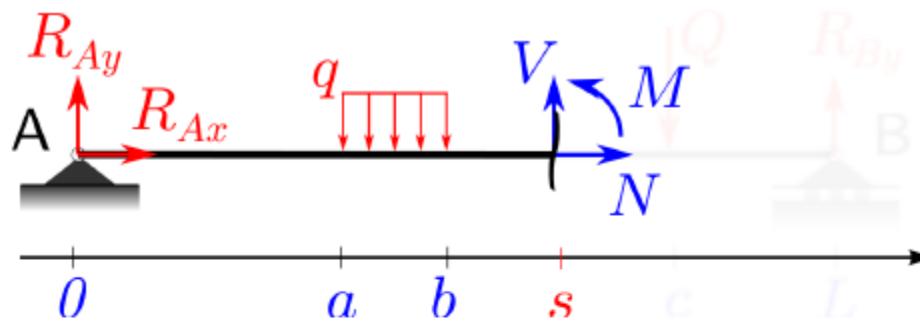


FIGURE 6.13 – Équilibre d'un tronçon de  $[b, c]$

$s \in [b, c]$  (figure 6.13) :

$$\begin{cases} N &= 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) + V &= 0 \\ -q(b^2 - a^2)/2 + Vs + M &= 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

ou encore :

Pour  $s \in [b, c]$ ,

$$\begin{cases} N(s) &= 0 \\ V(s) &= -R_{Ay} + q(b-a) \\ M(s) &= q(b^2 - a^2)/2 + R_{Ay}s - q(b-a)s \end{cases} \quad (6.25)$$

$s \in [c, L]$  (figure 6.14) :

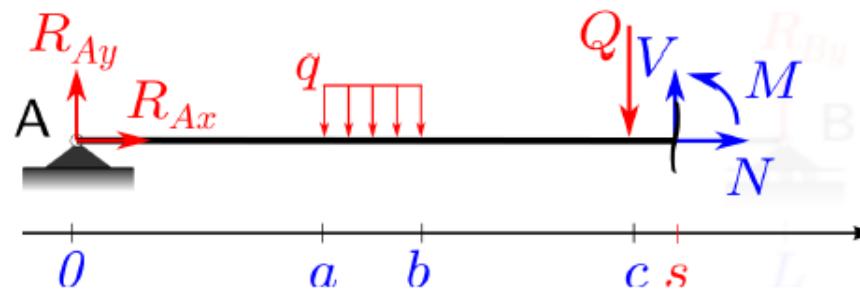


FIGURE 6.14 – Équilibre d'un tronçon de  $[c, L]$

$$\begin{cases} N &= 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) - Q + V &= 0 \\ -q(b^2 - a^2)/2 - Qc + Vs + M &= 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

ou encore :

Pour  $x \in [c, L]$ ,

$$\begin{cases} N(s) &= 0 \\ V(s) &= -R_{Ay} + q(b-a) + Q \\ M(s) &= q(b^2 - a^2)/2 - Q(s-c) + R_{Ay}s - q(b-a)s \end{cases} \quad (6.27)$$

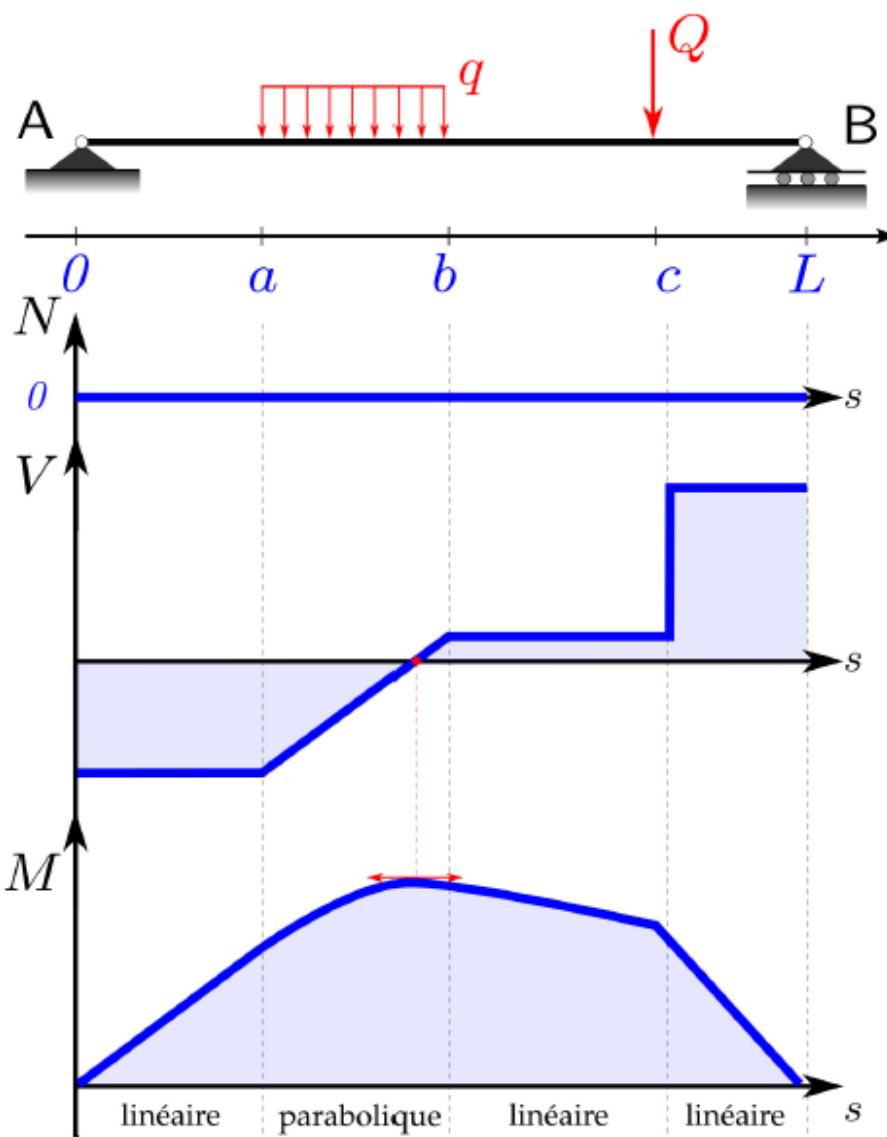


FIGURE 6.15 – Exemple de diagramme des efforts intérieurs pour des valeurs de chargement données  $q$  et  $Q$

## *V. Systèmes hyperstatiques*

Voici trois poutres qui ne diffèrent que par leurs appuis.

Elles sont de longueur L et chargées à une distance l de leur encastrement.



Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} - F = 0 \\ M_{Az} - Fl = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

**3 équations indépendantes linéaires, 3 inconnues :**

**les réactions d'appui peuvent être calculés.**



Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \\ M_{Az} + R_{By}L - Fl = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

**3 équations indépendantes linéaires, 4 inconnues :  
il manque une équation pour calculer les réactions d'appuis.**



Principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \\ M_{Az} + R_{By}L - Fl = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

**3 équations indépendantes linéaires, 5 inconnues :**

**il manque deux équations pour calculer les réactions d'appuis.**

# Isostaticité – Hyperstaticité

Dans le cas plan, on a au plus trois équations d'équilibre.

1. Si les actions de liaison introduisent 3 inconnues, le problème est statiquement déterminé (possible, n'admettant qu'une solution) ou **isostatique**.
2. Si les actions de liaison introduisent plus de 3 inconnues, le problème est statiquement indéterminé ou **hyperstatique**. Il faudra introduire de nouvelles équations issues de la RDM.
3. Si les actions de liaison introduisent moins de 3 inconnues, le problème est **hypostatique**. La structure est alors appelée **mécanisme** et n'est pas stable.

Le degrés d'hyperstatisme d'un système est une grandeur qui traduit la redondance mécanique de ce système. Cette grandeur influe non seulement sur le comportement structurel, mais aussi sur son calcul comme cela apparaît clairement dans la définition d'isostatisme :

Un système est dit isostatique si le principe fondamental de la dynamique suffit à déterminer toutes les inconnues de liaison du mécanisme.

# Degré d'hyperstaticité

**n** inconnues de réaction



$(p - n)$  est le degré d'hyperstaticité

**p** équations d'équilibre

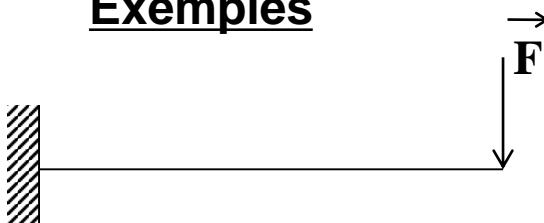


$(p - n) > 0$  : hypostatique

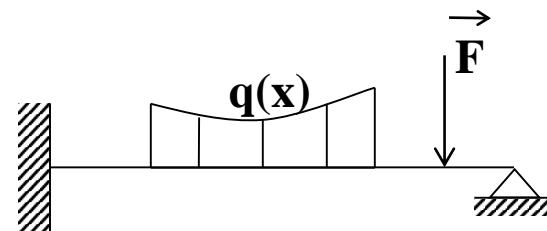
$(p - n) = 0$  : isostatique

$(p - n) < 0$  : hyperstatique

## Exemples



Structure isostatique

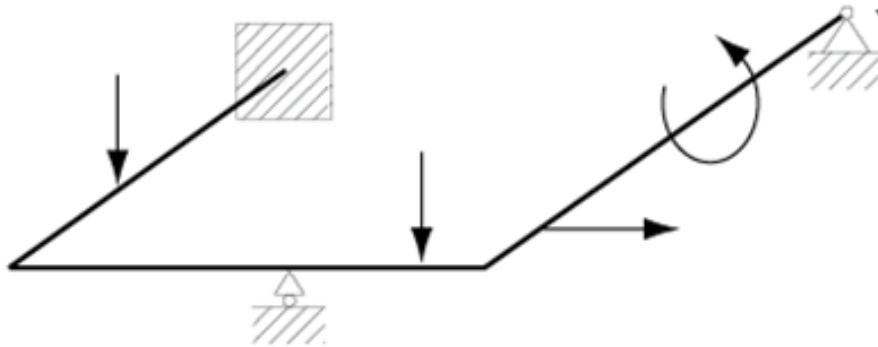


Structure hyperstatique

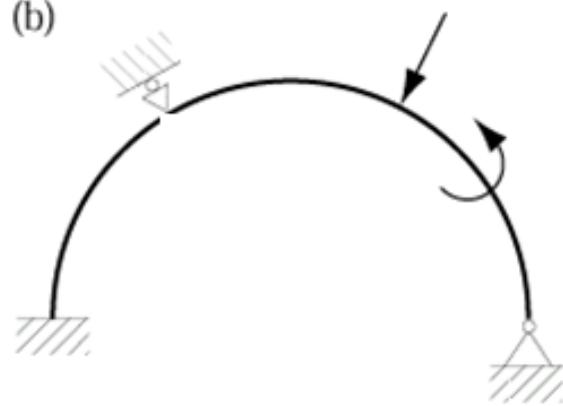
A chaque discontinuité: coupe pas assez  
d'éq pour résoudre → Théorèmes  
énergétiques

## Exemples: système *hyperstatique extérieurement*

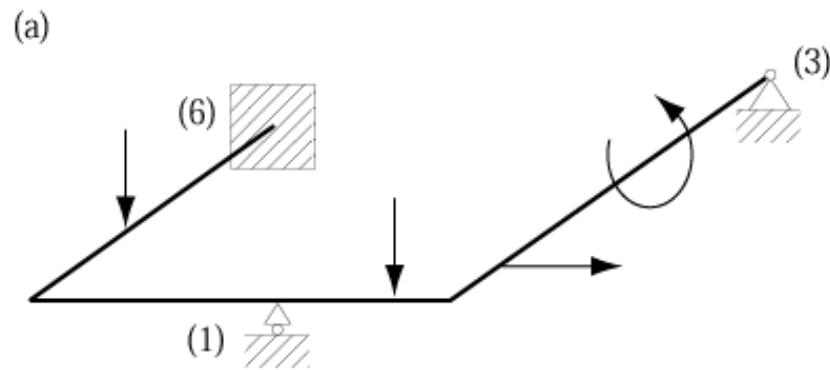
(a)



(b)

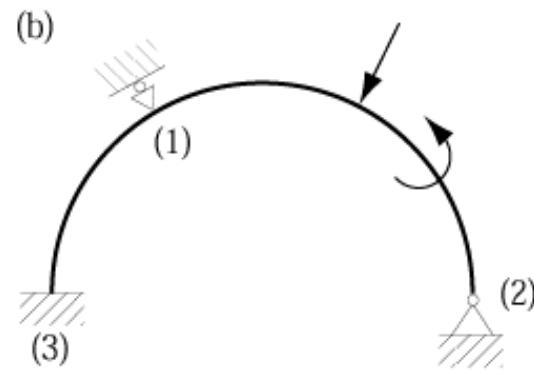


## Exemples: système *hyperstatique extérieurement*



$$k = p - 6 = 4$$

$$(p = 6+1+3)$$



$$k = p - 3 = 3$$

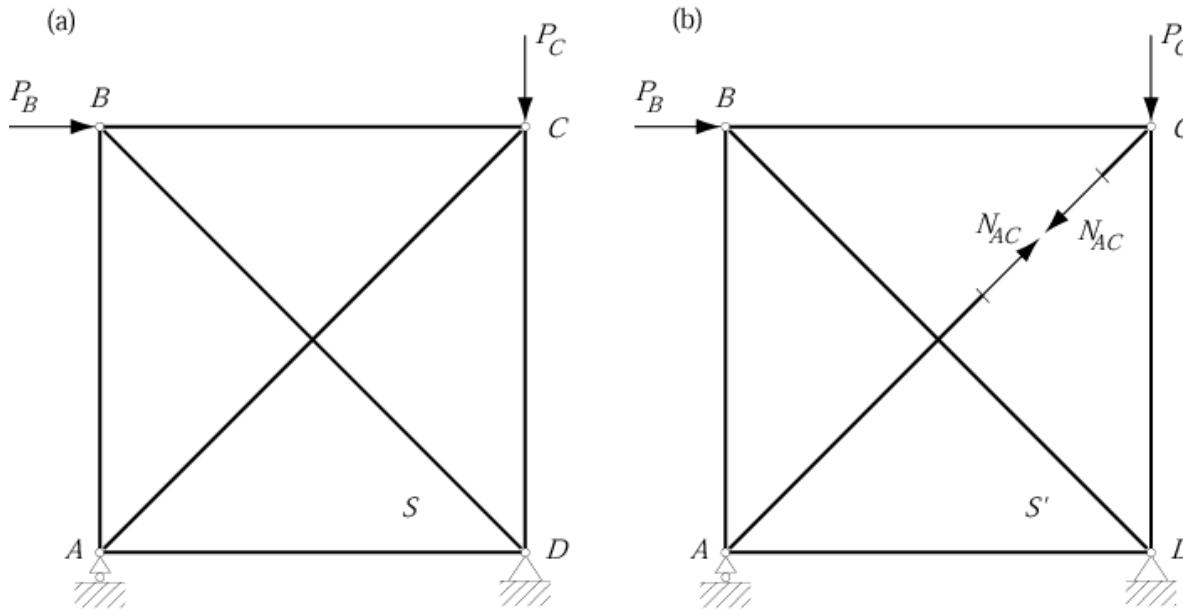
$$(p = 3+1+2)$$

## système *hyperstatique intérieurement*

un système est *hyperstatique intérieurement* quand  
la connaissance de toutes les réactions extérieures n'est pas suffisante  
pour calculer les *efforts intérieurs*.

## système *hyperstatique intérieurement*

### *système plan de barres articulées en treillis*

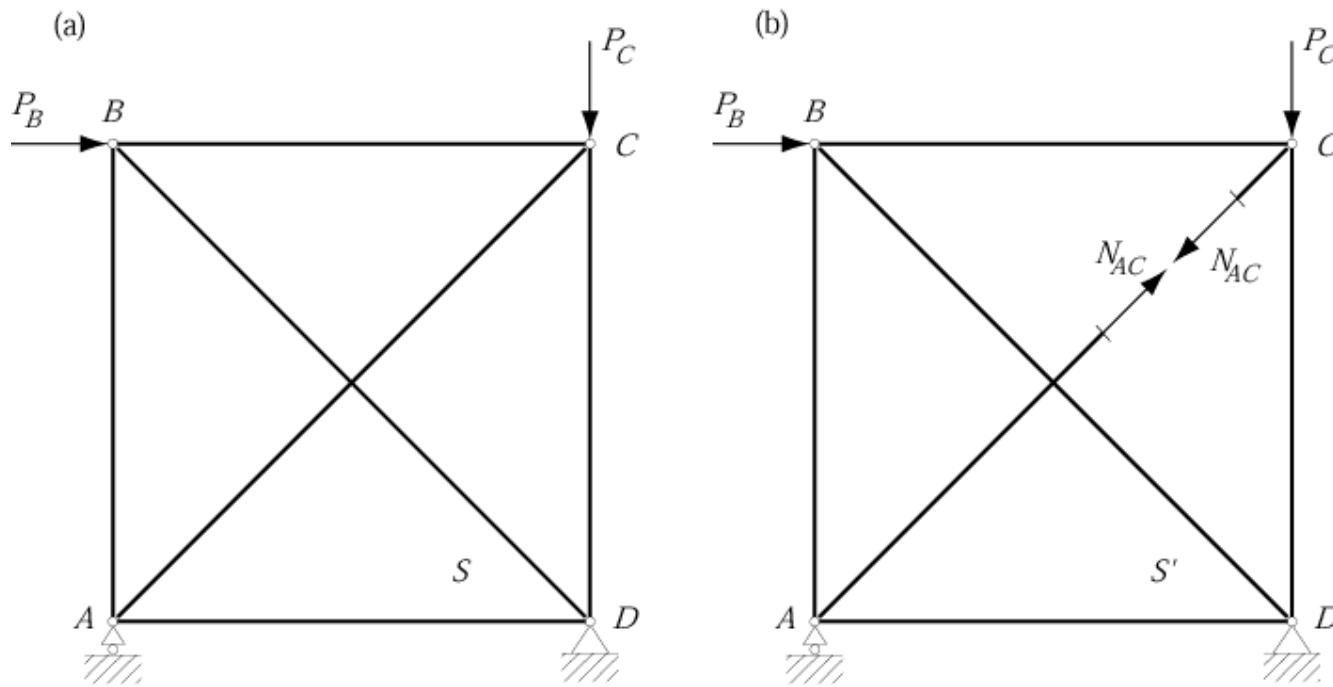


Un telle structure est hyperstatique intérieurement d'ordre

$$k = m + p - 2n,$$

- $m$  désigne le nombre de barres,
- $p$  est le nombre de liaisons extérieures
- $n$  dénote le nombre total de nœuds.

*système plan de barres articulées en treillis* : on obtient un système isostatique fondamental  $S'$  du système donné  $S$ , en remplaçant les  $k$  liaisons intérieures surabondantes par des forces hyperstatiques inconnues  $R_1, R_2, \dots, R_k$  choisies parmi les efforts intérieurs.



**Exemple :**  $\text{ordre } k = 6 + 3 - 2(4) = 1$

# VI. Applications

# Torseur de cohésion - application

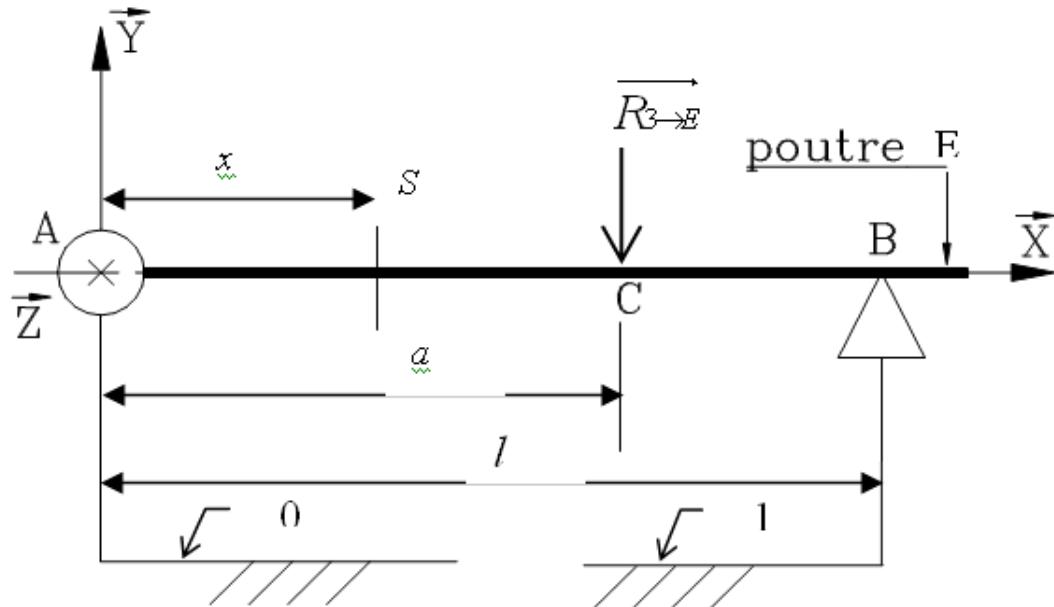
## Exemple 1

Soit une poutre cylindrique, de 200 mm de long et de 5 mm de diamètre, soumise à une action mécanique modélisable par un glisseur avec :

$\overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}}$  d'intensité 100daN.

$$\overrightarrow{AC} = a \vec{x}; a = 150 \text{ mm}$$

$$\overrightarrow{AB} = l \vec{x}; l = 200 \text{ mm}$$



*L'étude s'effectuera dans le plan de symétrie (x,y)*

## Détermination des actions en A et B

Isolement de la poutre (E)

(E) est soumis à 3 actions mécaniques :  $\{T_{0 \rightarrow E}\}, \{T_{1 \rightarrow E}\}, \{T_{3 \rightarrow E}\}$

$$\{T_{0 \rightarrow E}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow E}} \\ M_{A0 \rightarrow E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{0 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \{T_{1 \rightarrow E}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} \\ M_{B1 \rightarrow E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \{T_{3 \rightarrow E}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} \\ M_{C3 \rightarrow E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Écriture des torseurs au point A

$$\begin{aligned} \{T_{0 \rightarrow E}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow E}} \\ M_{A0 \rightarrow E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{0 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} & \{T_{1 \rightarrow E}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} \\ M_{A1 \rightarrow E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & l \cdot Y_{1 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ \{T_{3 \rightarrow E}\} &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} \\ M_{A3 \rightarrow E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & -a \cdot 100 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned}$$

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux charges.

Pour  $0 < x < c$

$$\text{Équilibre de E1} \quad {}_G\{T_{coh}\} = {}_G\{\bar{R}\} - {}_G\{\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E1}}\} = - {}_G\{\overrightarrow{R_{0 \rightarrow E}}\} = - {}_G\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & -25x \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = {}_G\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -25 & 0 \\ 0 & 25x \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_{G0 \rightarrow E}} = \overrightarrow{M_{A0 \rightarrow E}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R_{0 \rightarrow E}} = 0 + \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -25x \end{vmatrix}$$

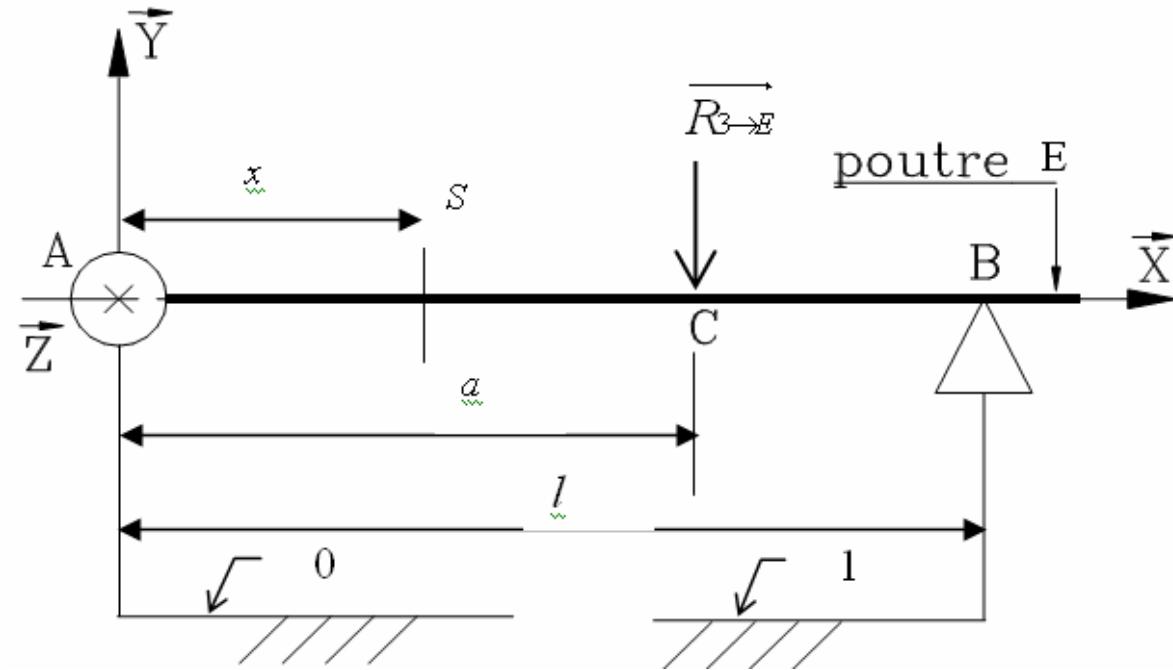
Pour  $c < x < b$

$$\text{Équilibre de E2} \quad {}_G\{T_{coh}\} = {}_G\{\bar{R}\} - {}_G\{\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E2}}\} = {}_G\{\overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}}\} = {}_G\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 75 & 0 \\ 0 & 75(l-x) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_{G1 \rightarrow E}} = \overrightarrow{M_{B1 \rightarrow E}} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} = 0 + \begin{vmatrix} l-x & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75(l-x) \end{vmatrix}$$

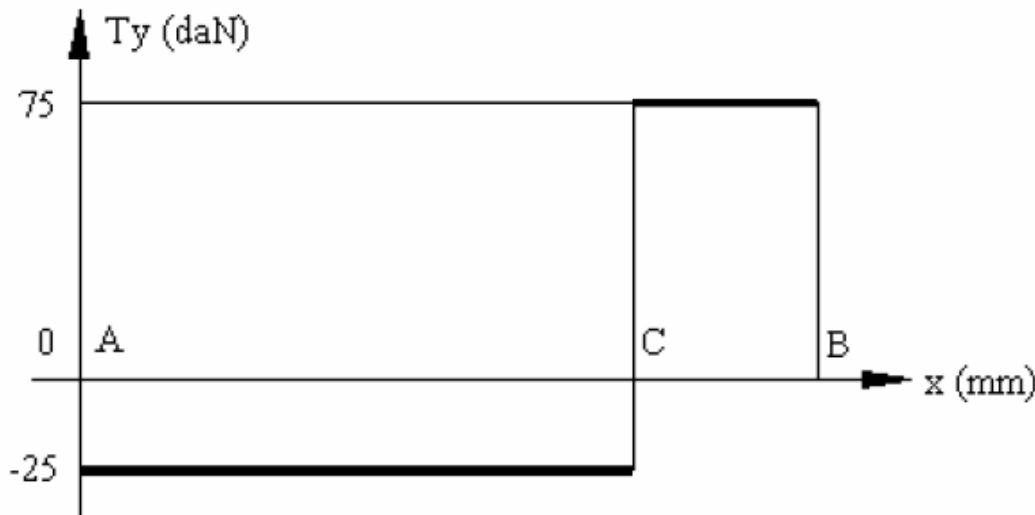
## Courbes des efforts intérieurs

On représente la variation des efforts intérieurs à l'aide de courbes qui visualisent immédiatement les zones dangereuses de la poutre.

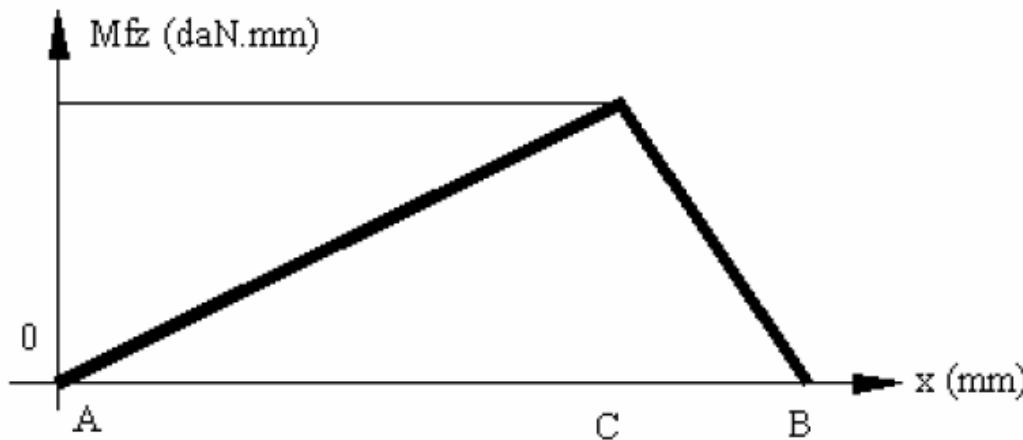


Sollicitation	$A < x < C$	$C < x < B$
$N$	0	0
$T_y$	-25	75
$T_z$	0	0
$M_t$	0	0
$M_{fy}$	0	0
$M_{fz}$	$25x$	$75(l-x)$

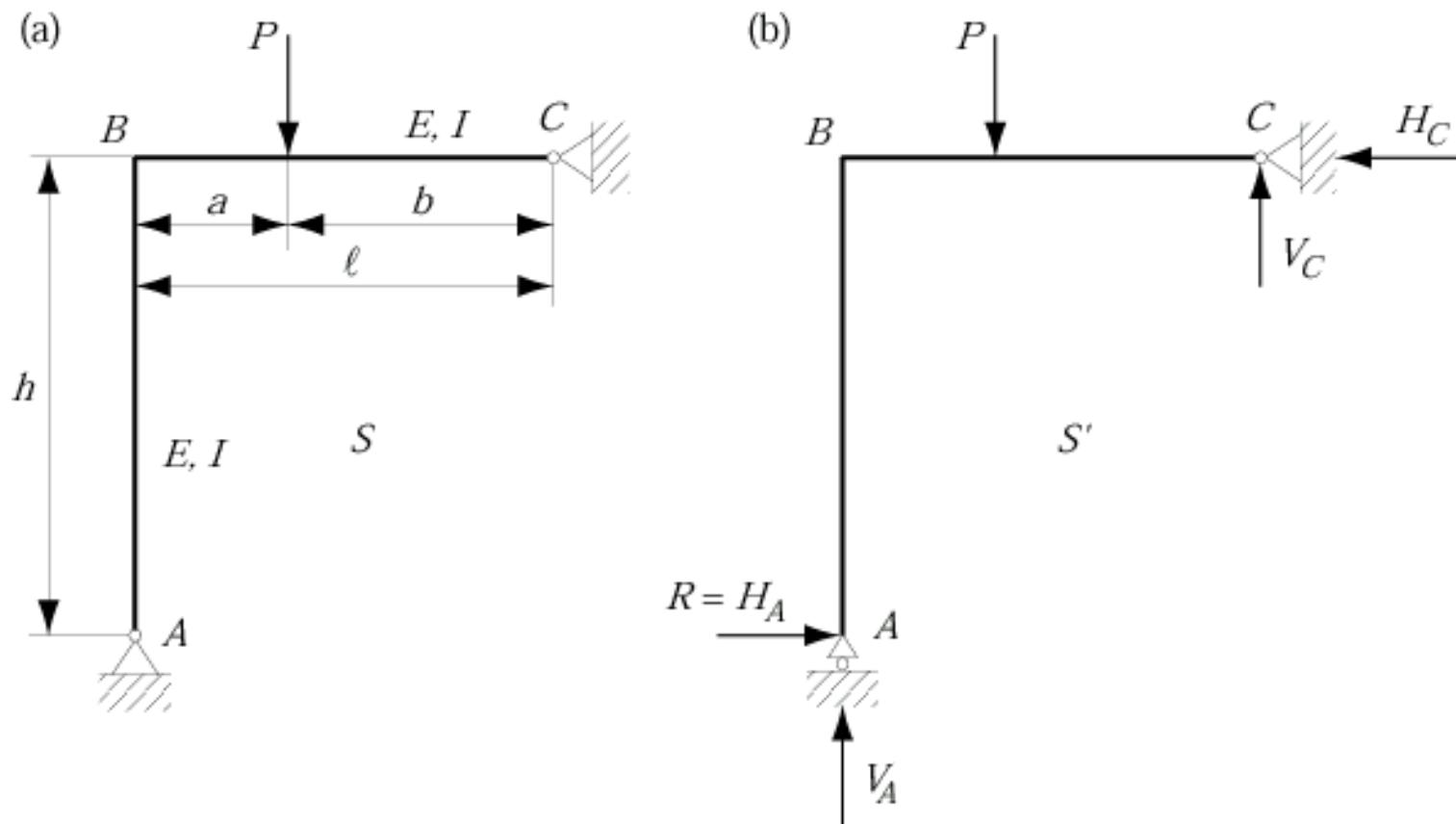
*Effort tranchant*



*Moment de flexion*



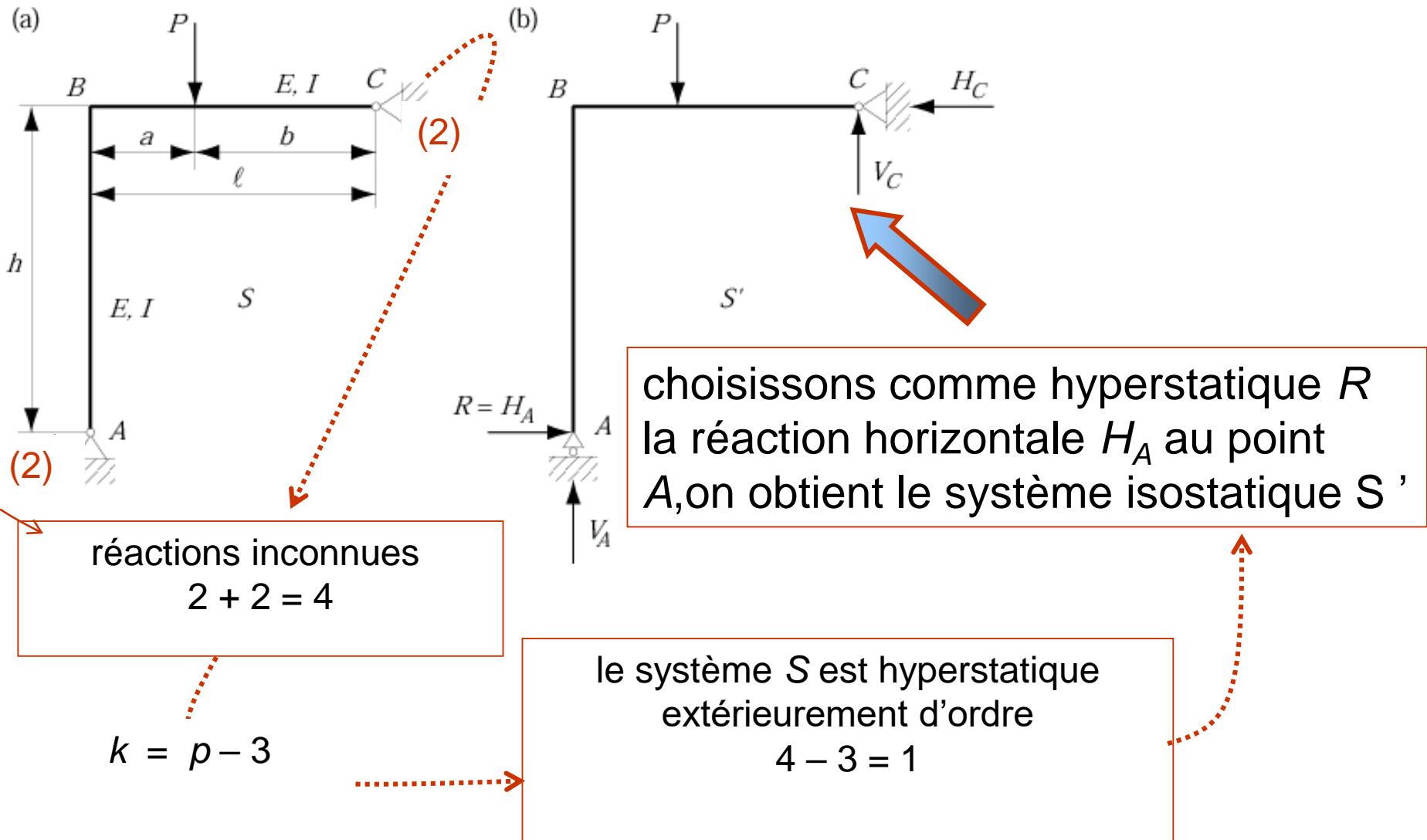
# systèmes hyperstatiques - application



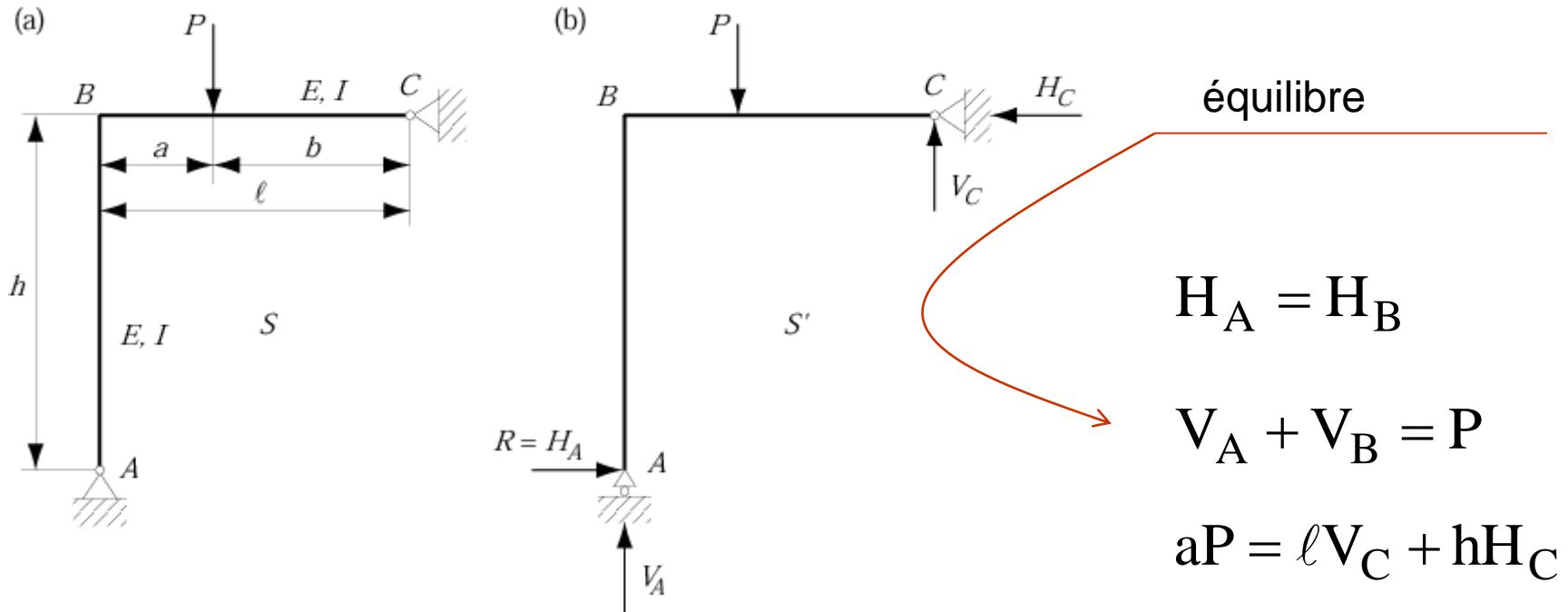
Calculer

1. Les réactions aux points  $A$  et  $C$  du système  $S$
2. Déformation du système

Calculer les réactions aux points A et C du système S

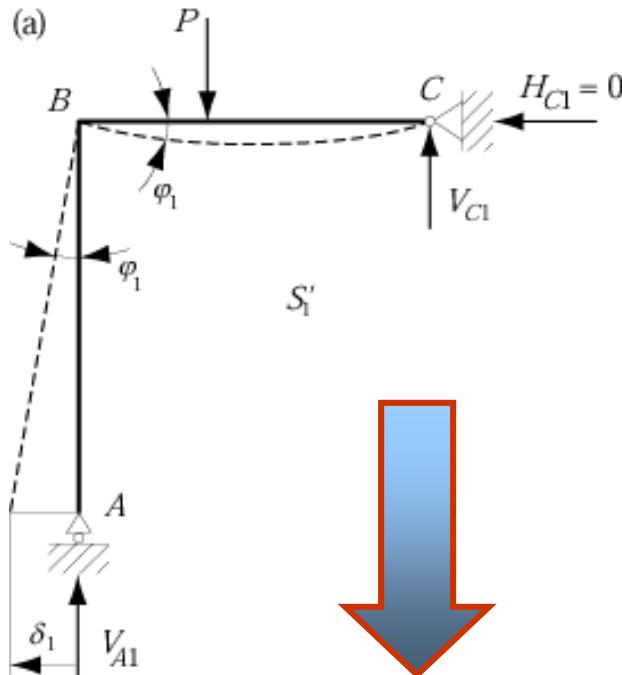


Calculer les réactions aux points A et C du système S



La quatrième équation nécessaire pour déterminer les réactions est donnée par la condition que le déplacement horizontal  $d$  du point A est nul dans le système  $S'$ .

## Déformation du système : deux étapes

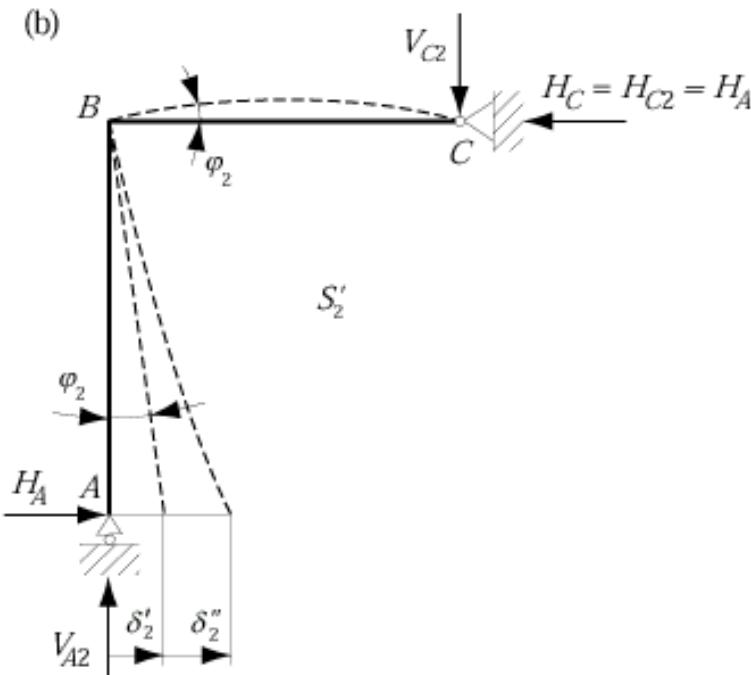


équilibre

$$V_{A1} = P \frac{b}{\ell}$$

$$V_{C1} = P \frac{a}{\ell}$$

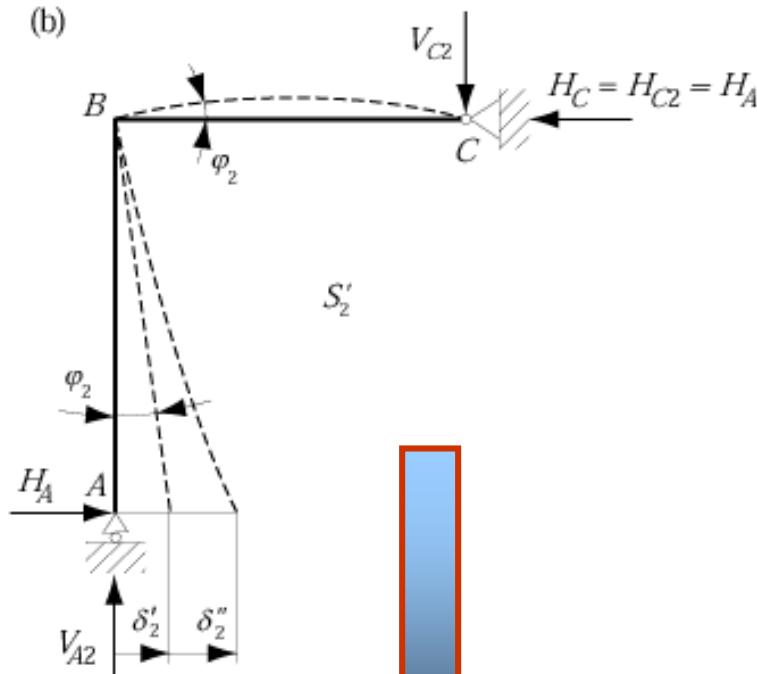
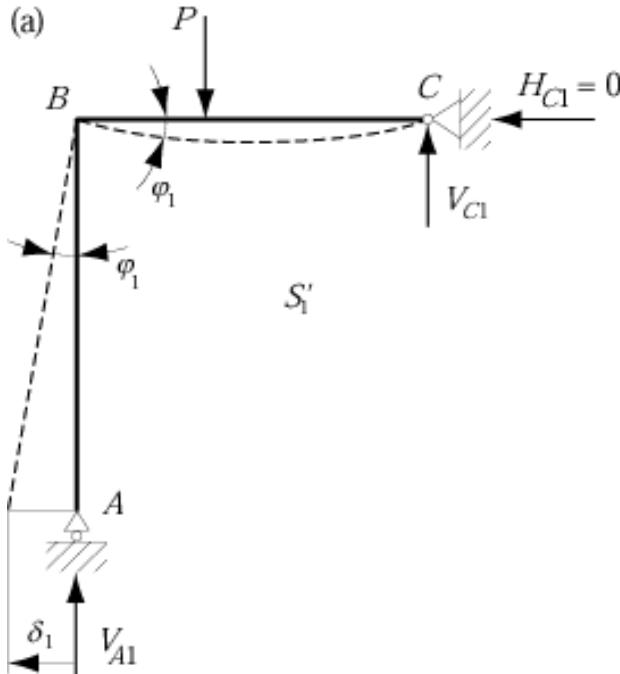
$$H_{C1} = 0$$



déplacement

$$\delta_1 = h\varphi_1 = h \frac{ab(\ell+b)}{6\ell EI} P$$

## Déformation du système : deux étapes



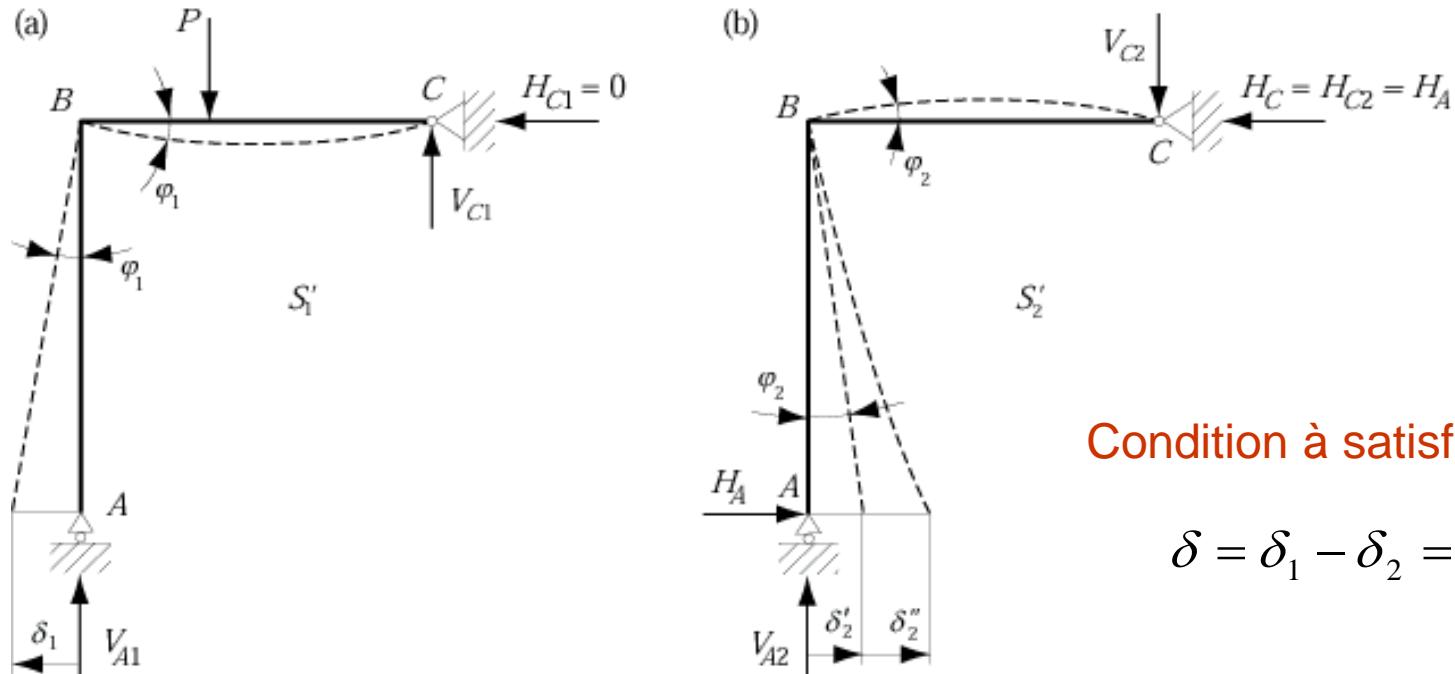
équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{A2} = V_{C2} = H_A \frac{h}{\ell} \\ H_{C2} = H_C = H_A \end{array} \right.$$

déplacement

$$\delta_2 = \delta_2' + \delta_2'' = h\varphi_2 + \delta_2'' = \frac{h^2\ell}{3EI}H_A + \frac{h^3}{3EI}H_A = \frac{H_A h^2}{3EI}(\ell + h)$$

## Déformation du système : compatibilité



Condition à satisfaire

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = 0$$

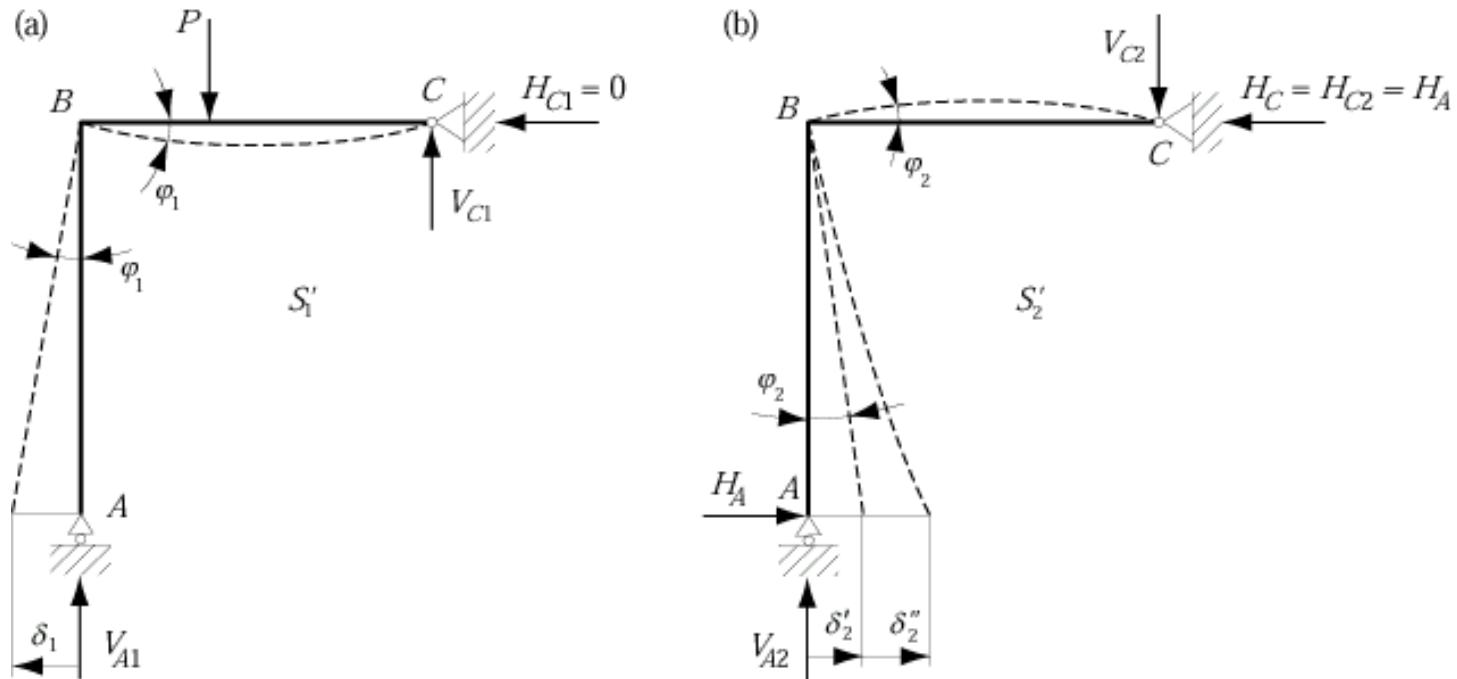
$$\delta_1 = h\varphi_1 = h \frac{ab(\ell+b)}{6\ell EI} P$$

$$\delta_2 = \delta_2' + \delta_2'' = h\varphi_2 + \delta_2'' = \frac{h^2\ell}{3EI} H_A + \frac{h^3}{3EI} H_A = \frac{H_A h^2}{3EI} (\ell + h)$$

$$H_A = \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2\xi(1+\xi)} P$$

avec       $\alpha = a/\ell$   
 $\beta = b/\ell$   
 $\xi = h/\ell$

## Déformation du système : compatibilité



$$V_A + V_B = P$$

$$H_A = \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2\xi(1+\xi)} P$$

$$H_A = H_B$$

$$aP = \ell V_A + h H_C$$

$$H_A = H_B = \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2\xi(1+\xi)} P$$

$$V_C = P \frac{a}{\ell} - H_C \frac{h}{\ell} = \alpha \left( 1 - \frac{\beta(1+\beta)}{2(1+\xi)} \right) P$$

$$V_A = P - V_C = \left( (1-\alpha) + \frac{\alpha\beta(1+\beta)}{2(1+\xi)} \right) P$$

# Chap. 2:

# Calcul des structures

# Plan de Chapitre 2

*I. THÉORÈMES ÉNERGÉTIQUES*

*II. MÉTHODE DE FORCES*

*III. MÉTHODE DES TROIS MOMENTS*

*IV. MÉTHODE DE DÉPLACEMENT*

*V. APPLICATIONS*

*VI. ANNEXES : FORMULAIRES*

# I. Théorèmes Énergétiques

*Démarches*

# Théorèmes Énergétiques

## I. Définition

## II. Énergie de déformation

## III. Théorèmes énergétiques

- 1 Réciprocité des Chargements
- 2 Formule de Maxwell - Betti
- 3 Théorème de Castigliano
- 4 Formule de Ménabréa

## Applications



CARLO ALBERTO CASTIGLIANO

8/11/1847 – 25/10/1884



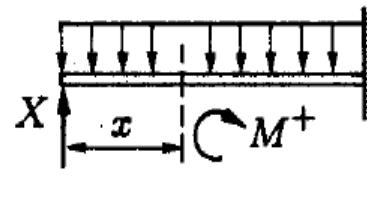
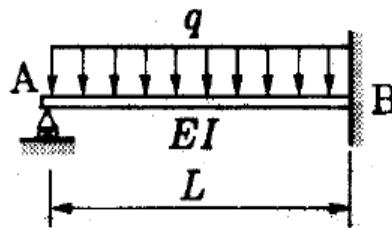
LUIGI FEDERICO MENABREA

4/09/1809 – 25/05/1896



# Intro aux systèmes hyperstatiques

## ■ illustration sur un système 1x hyperstatique



[Frey, 2000, Vol. 2]

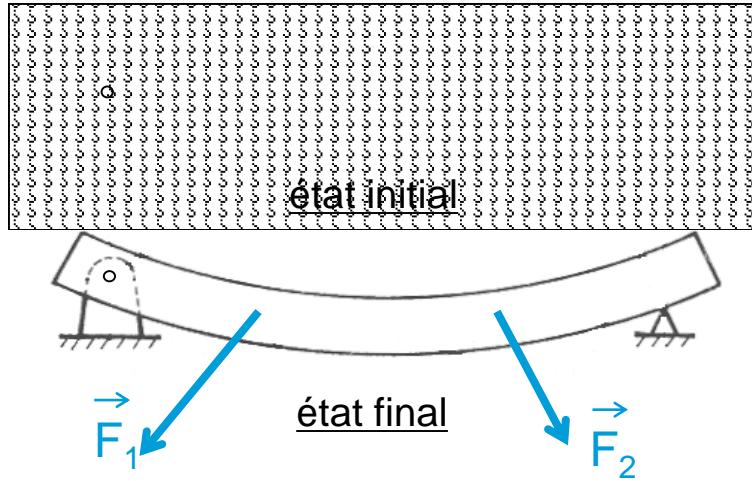
- (a)  $\equiv$  (b)
- (b) = superposition charge répartie + réaction

flèche due à  $q$      $\delta_A = \frac{L}{4EI} \frac{qL^3}{2}$

flèche due à  $X_A$      $\delta_A = -\frac{L}{3EI} X_A L^2$

$$X_A = 3 \frac{qL}{8}$$

## I. Définition



déformation élastique de la poutre

Théorème de  
l'énergie cinétique



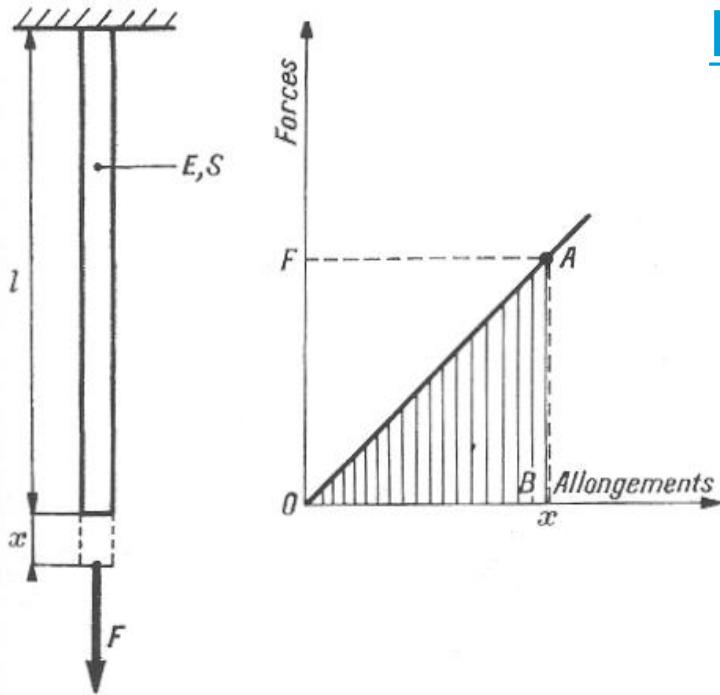
travail des forces  
extérieures  
 $W_{\text{ext}}$

+ travail des forces  
intérieures  
 $W_{\text{int}}$

$$= 0$$

Énergie de déformation :  $W_d = -W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$

# App : cas d' une sollicitation de traction



## Hypothèses :

- effort de traction variable
- proportionnalité entre l' effort et l' allongement

Aire du  
triangle OAB

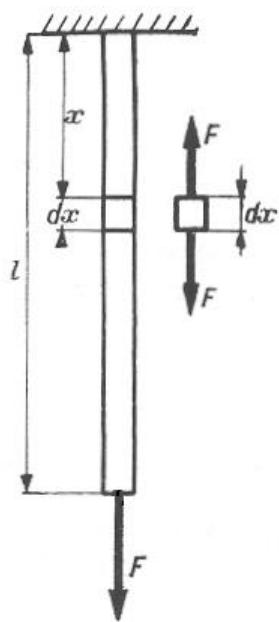


$$W_{ext} = \frac{1}{2} F \cdot x$$



Travail de  
l' effort  
de traction

## - Équilibre d'un tronçon de longueur $dx$



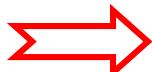
Soit  $\Delta(dx)$ , allongement du tronçon  $dx$

Loi de Hooke

$$\Delta(dx) = \frac{F dx}{ES}$$

Énergie de déformation élémentaire

$$dW_d = \frac{1}{2} F \times \Delta(dx)$$



$$dW_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES} dx \quad \text{soit}$$

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2}{ES} dx$$

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F}{S} \cdot \frac{F}{ES} \cdot S dx$$

## II. Énergie de déformation

D ' une manière générale



$$W_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{struct} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} S dx$$

Effort normal : traction/compression

$$W_d = \frac{1}{2} \int_{struct} \frac{N^2}{ES} dx$$

Effort tranchant :  $T_y$  ou  $T_z$

$$W_d = \frac{1}{2} \int_{struct} \frac{T_y^2}{\mu S} dx$$

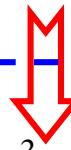
Moment de torsion :  $M_x$

$$W_d = \frac{1}{2} \int_{struct} \frac{M_x^2}{\mu I_0} dx$$

Moment fléchissant :  $M_y$  ou  $M_z$

$$W_d = \frac{1}{2} \int_{struct} \frac{M_z^2}{EI_z} dx$$

effort normal + effort tranchant + moment fléchissant + moment de torsion



$$W_d = \frac{1}{2E} \int \frac{N^2}{S} dx + \frac{1}{2\mu} \int \frac{T_y^2}{S} dx + \frac{1}{2E} \int \frac{M_z^2}{I_z} dx + \frac{1}{2\mu} \int \frac{M_x^2}{I_0} dx$$



*L'énergie potentielle élastique est l'opposée du travail des efforts intérieurs.*

*Elle correspond en statique au travail des forces extérieures agissant sur la structure.*



$$E_{def}(\text{structure}) = \int_{\text{ligne moyenne}} dE_{def}$$



*Remarque : le caractère extensif de l'énergie de déformation associé à l'indépendance des sollicitations due au choix du centre de surface G et des directions principales permet d'additionner les contributions de chaque sollicitation.*

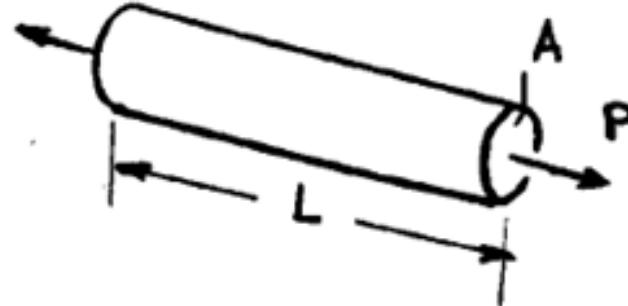
$$E_d(\text{structure}) = E_d(\text{traction}) + E_d(\text{cisalement}) + E_d(\text{torsion}) + E_d(\text{flexion})$$

# Cas pratiques

## Barreau en traction

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_0^L \frac{1}{2E} \left( \frac{P}{A} \right)^2 A dx$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$$



Si la section est constante       $U = \frac{P^2 L}{2AE}$

## Torsion d'un arbre circulaire

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{(T r/J)^2}{2G} dV$$

$$U = \int_0^L \left[ \frac{T^2}{2GJ^2} \int_A r^2 dA \right] dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$



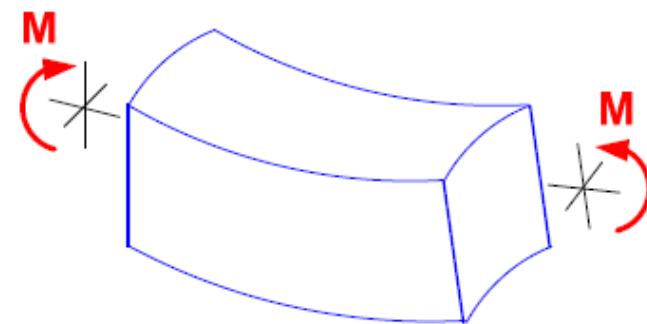
Si la section est constante       $U = \frac{T^2 L}{2GJ}$

# Cas pratiques (suite)

## Flexion

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{(M y/I)^2}{2E} dV$$

$$U = \int_0^L \left[ \frac{M^2}{2EI^2} \int_A y^2 dA \right] dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

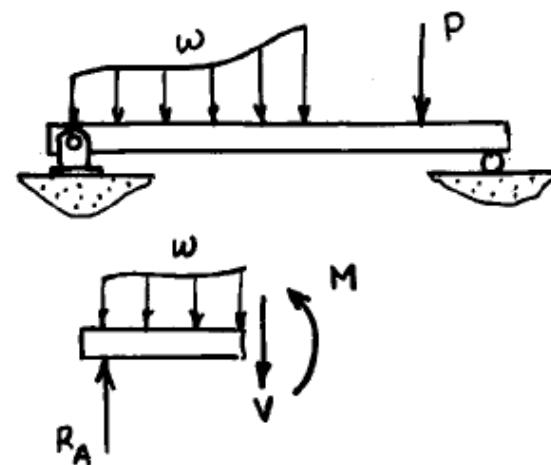


## Effort tranchant

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{(VQ/It)^2}{2G} dV$$

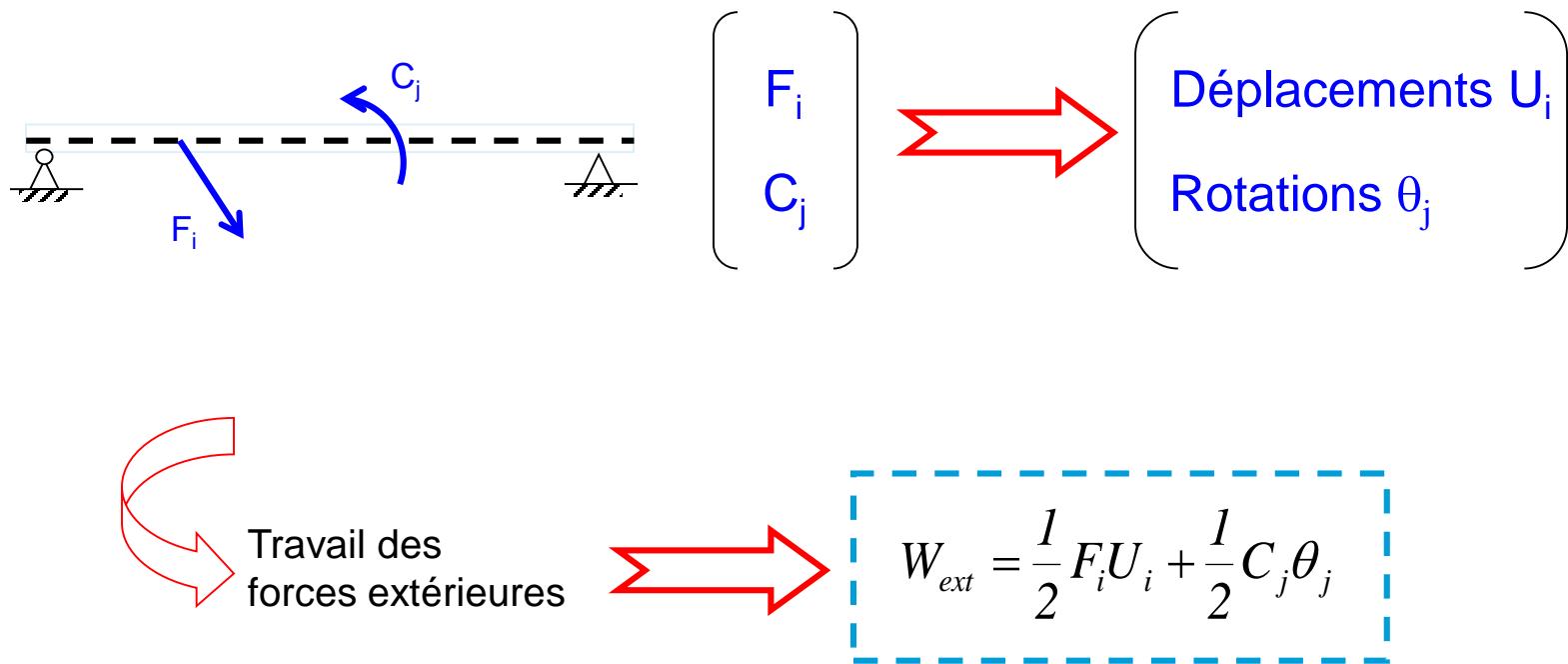
$$U = \int_0^L \left[ \frac{V^2}{2GI^2} \left( \int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \right) \right] dx = \int_0^L \frac{fV^2}{2GA} dx$$

$$f = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \quad \text{est appelé facteur de forme}$$

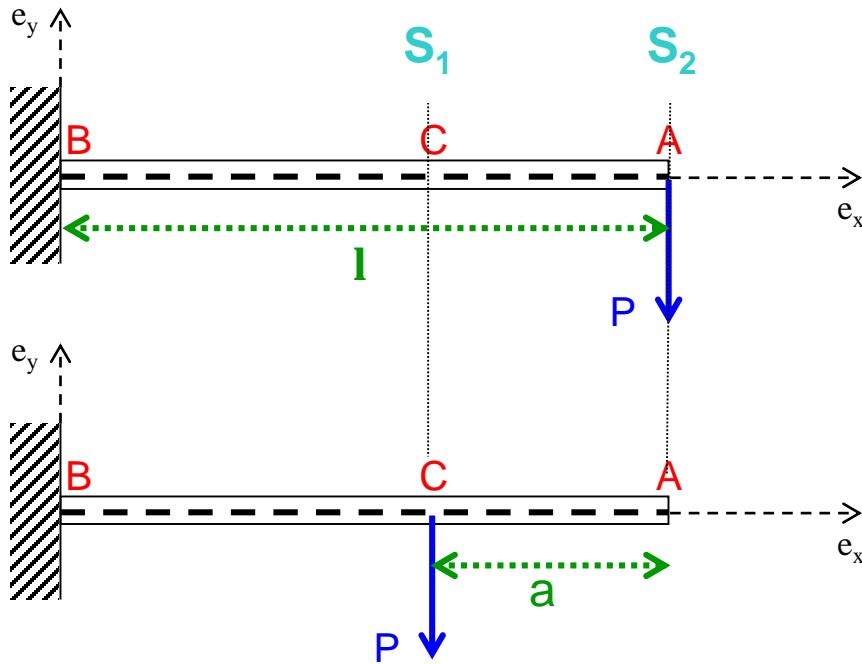


### III. Théorèmes énergétiques

#### 1. Théorème de Clapeyron



## 2. Théorème de réciprocité de Maxwell - Betti



$$y_C = \frac{P}{6EI} (2l + a)(l - a)^2$$



$$y_A = \frac{P}{6EI} (2l + a)(l - a)^2$$

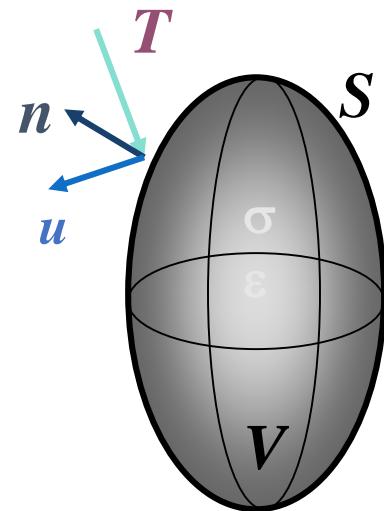
Flèche dans la  
section  $S_1$   
due à la charge P  
en  $S_2$



Flèche dans la  
section  $S_2$   
due à la charge P  
en  $S_1$

## 2. Théorème de réciprocité de Maxwell - Betti

Statique et Forces de Volume négligeables  $\vec{\gamma} = \mathbf{0}$  et  $\vec{X} = \mathbf{0}$



$$W = \frac{1}{2} \int \text{Tr}(\bar{\sigma} \bar{\varepsilon}) dV = \frac{1}{2} \int \vec{T} \cdot \vec{u} dS$$

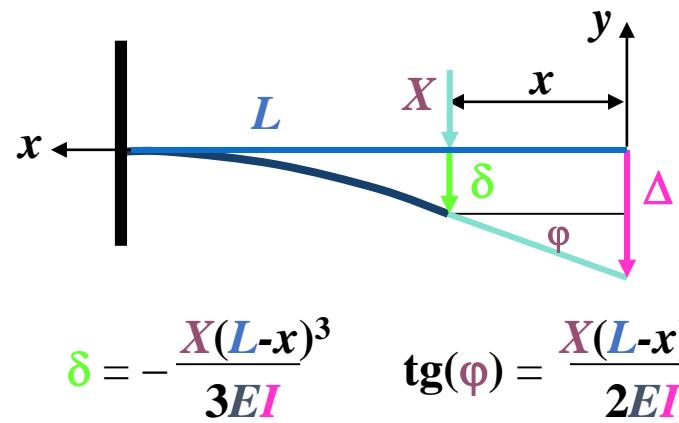
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \frac{\partial W}{\partial \vec{T}}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = \frac{\partial W}{\partial \vec{u}}$$

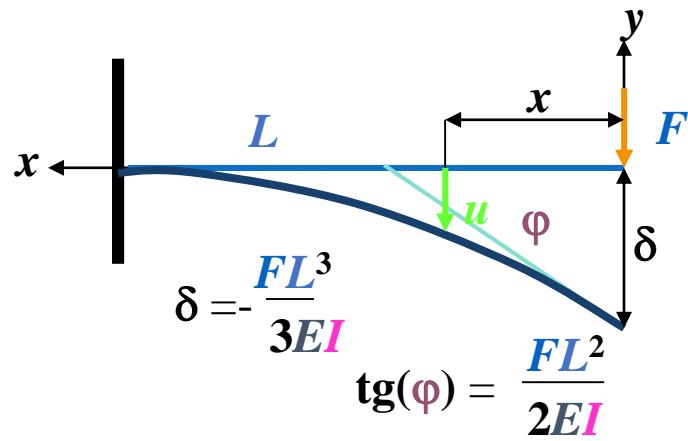
Réciprocité  $\vec{T}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{T}_2 \cdot \vec{u}_1$

# App4: application de Maxwell - Betti

## Poutre Console



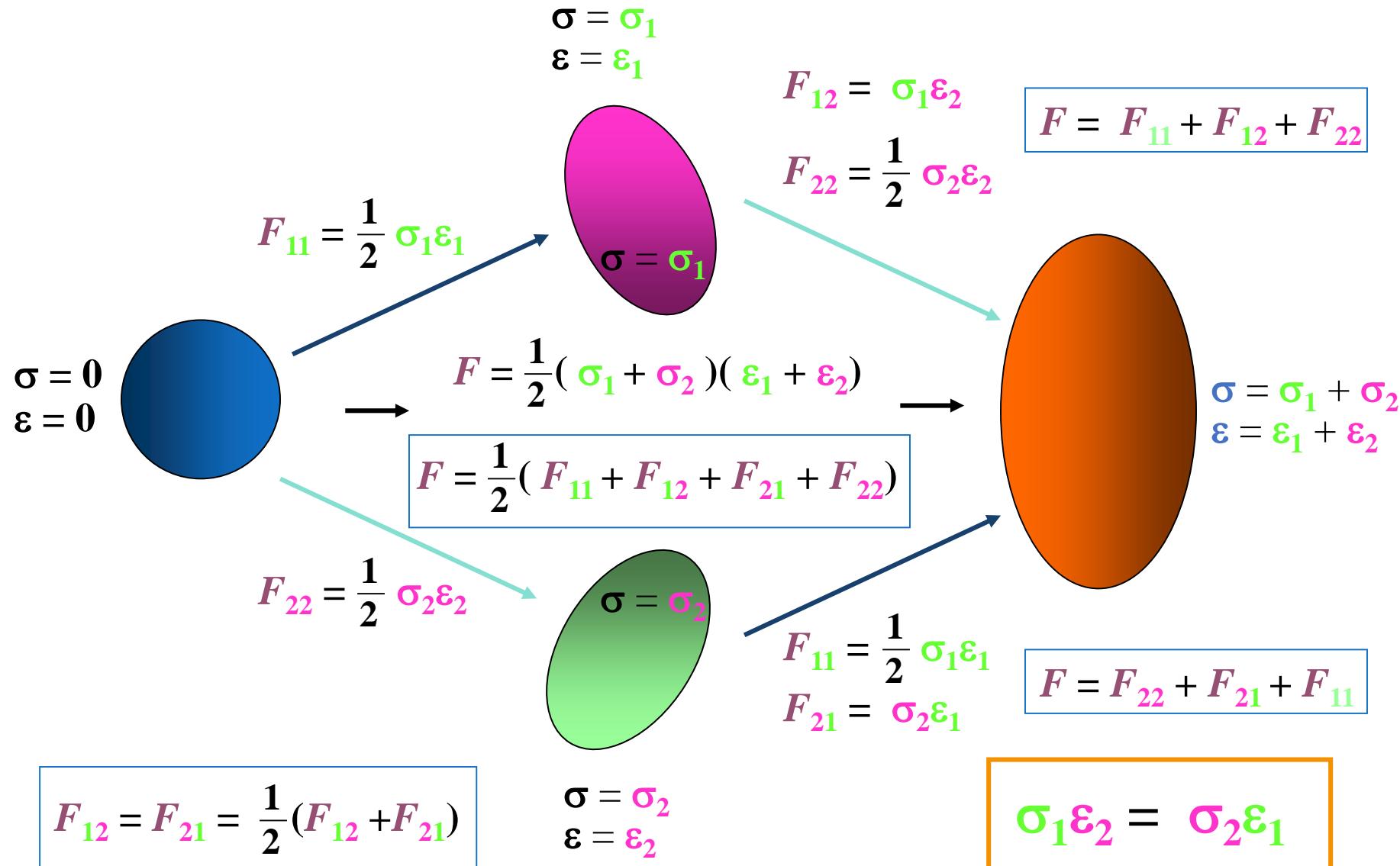
$$Xu = F\Delta$$



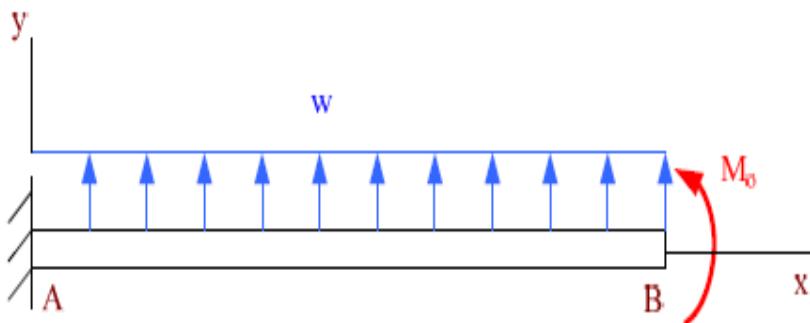
$$\Delta = \delta - \operatorname{tg}(\varphi)x = \frac{X}{6EI}(-x^3 + 3Lx^2 - 2L^3)$$

$$u = \frac{F\Delta}{X} = \frac{F}{6EI}(-x^3 + 3Lx^2 - 2L^3)$$

## 2. Réciprocité des Chargements



# Exemple sur le théorème de réciprocité



Connaissant la flèche due à M<sub>o</sub>, trouvez la rotation au point B due à w

$$v_{M_o} = \frac{M_o x^2}{2EI}$$

Travail fourni par une force élémentaire wdx lorsque le moment M<sub>o</sub> est appliqué

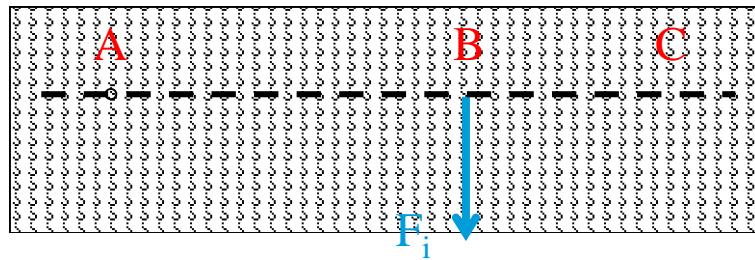
$$du = v_{M_o} (wdx)$$

En appliquant le théorème de réciprocité

$$M_o \theta_{Bw} = \int_0^L v_{M_o} (wdx) = \int_0^L \frac{M_o x^2}{2EI} wdx = \frac{M_o w L^3}{6EI} \quad \rightarrow \quad \theta_{Bw} = \frac{w L^3}{6EI}$$

### 3. Théorème de Castigliano

**Théorème :** le déplacement du point d'application d'une force dans sa direction (ou la rotation d'un couple) est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force (ou à ce couple) :



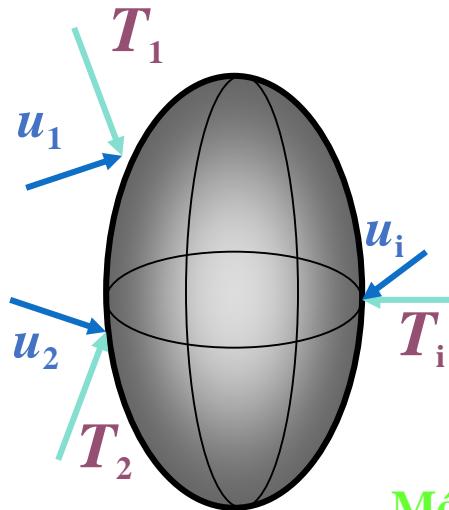
$$\frac{\partial W_d}{\partial F_i} = U_B$$



*Le théorème de Castigliano permet de calculer directement un déplacement seulement lorsque sa direction est connue. Dans un cas général, il donne seulement la projection du vecteur déplacement sur la droite d'action de l'effort  $F$  appliqué au point A.*

### 3 .Théorème de Castigliano

Statique et Forces de Volume négligeables    $\vec{g} = \mathbf{0}$  et    $\vec{X} = \mathbf{0}$



$$W(\vec{T}_1, \vec{T}_2, \dots, \vec{T}_i, \dots) = \frac{1}{2} S_i \vec{T}_i \vec{u}_i \quad \vec{u}_i = \frac{\partial W}{\partial \vec{T}_i}$$

Méthode des charges fictives

$$\vec{u}_k(\vec{T}_i) = \left. \frac{\partial W(\vec{T}_1, \dots, \vec{T}_j, \dots, \vec{T}_i, \dots)}{\partial \vec{T}_k} \right|_{\vec{T}_j = \mathbf{0} \forall j \neq i}$$

Déplacement  $\vec{u}_k$  de la charge fictive  $\vec{T}_k$  sous l'action de la **seule** force réelle  $\vec{T}_i$

# Exemple sur le théorème de Castigliano

Déterminer la flèche au point B

En ajoutant une force P au point B et en appliquant Castigliano

$$R = wL + P$$

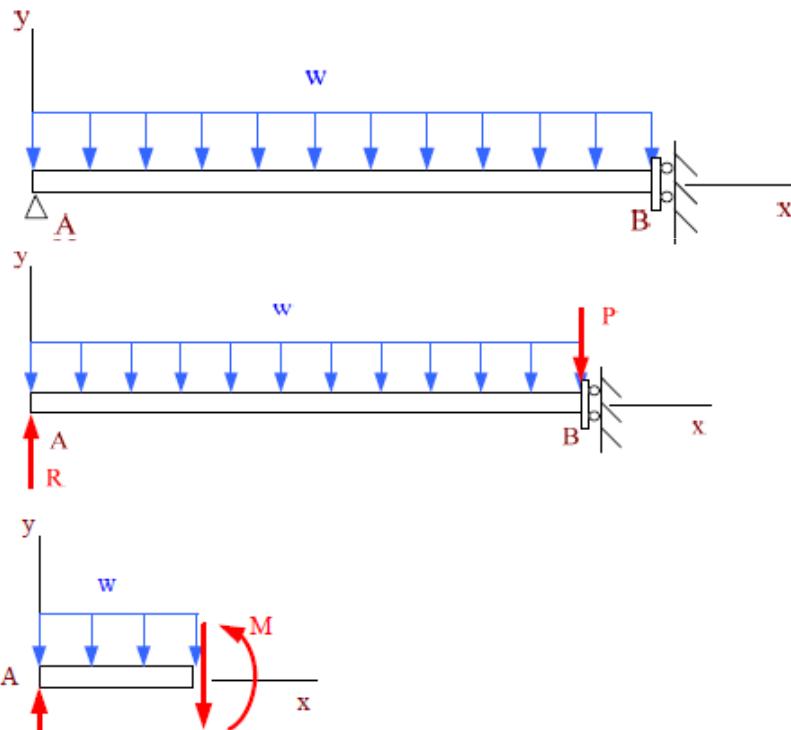
$$M = Rx - \frac{wx^2}{2} = (wL + P)x - \frac{wx^2}{2}$$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ (wL + P)x^2 - \frac{wx^3}{2} \right] dx$$

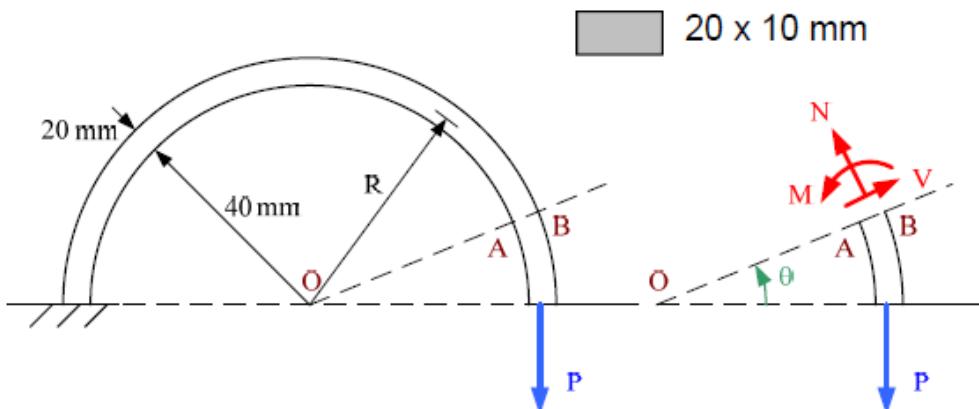
$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \left[ (wL + P) \frac{L^3}{3} - \frac{wL^4}{8} \right]$$

En mettant  $P=0$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_B = \frac{5wL^4}{24EI} \end{array} \right.$$



# Exemple sur le théorème de Castigliano



DCL et équilibre

$$N = P \cos \theta$$

$$V = P \sin \theta$$

$$M = PR(1 - \cos \theta)$$

Déterminer le déplacement vertical au point d'application de la charge  $P=5 \text{ kN}$

$$\text{En appliquant Castigliano } v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx + \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{fV^2}{2GA} dx$$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_0^L \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} dx + \int_0^L \frac{fV}{GA} \frac{\partial V}{\partial P} dx \quad \left( \text{avec } f = \frac{6}{5} \right)$$

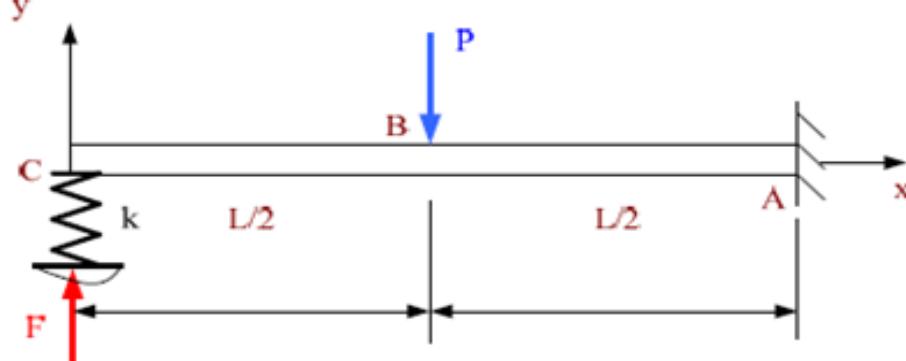
En remplaçant  $dx$  par  $Rd\theta$

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PR^3}{EI} \int_0^\pi (1 - \cos \theta)^2 d\theta + \frac{PR}{EA} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta + \frac{6PR}{5GA} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta$$

$$v_B = \frac{3\pi PR^3}{2EI} + \frac{\pi PR}{2EA} + \frac{3\pi PR}{5GA} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour l'acier } E=210 \text{ GPa, } \nu=0.3 \\ I=6667 \text{ mm}^4, A=200 \text{ mm}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_B=2,25 \text{ mm} \\ v_B=2,21 \text{ mm sans } V \end{array}$$

# Structures Hyperstatique (Théorème de Castigliano)

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux structures hyperstatiques telles que



Et par analogie

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i (= 0)$$

Déterminer la force dans le ressort

DCL et équilibre

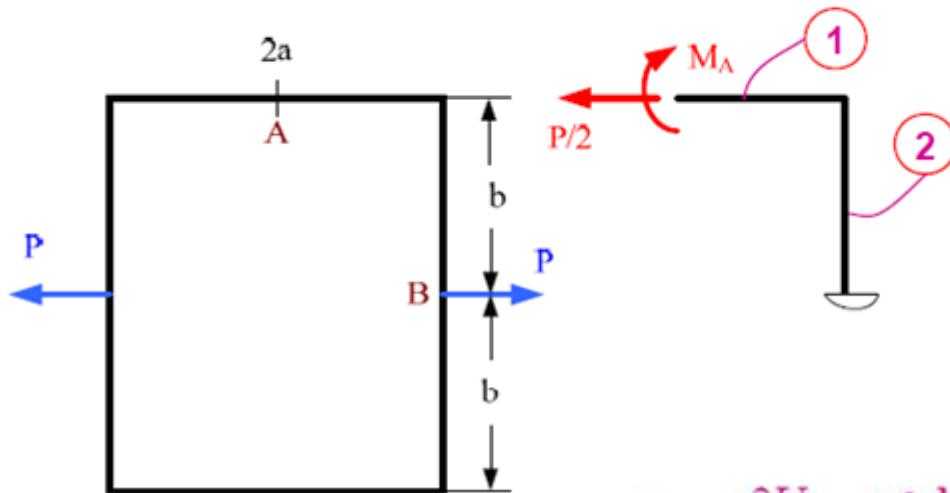
$$\begin{cases} M_1 = Fx & 0 \leq x \leq L/2 \\ M_2 = Fx - P(x - L/2) & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (Fx)x dx + \frac{1}{EI} \int_{L/2}^L (Fx - P(x - L/2))x dx = -\frac{F}{k}$$

→  $F = \frac{5P}{16(1 + 3EI/kL^3)}$

# Structures Hyperstatique (Théorème de Castigliano)

Déterminer le déplacement horizontal au point B



DCL et équilibre

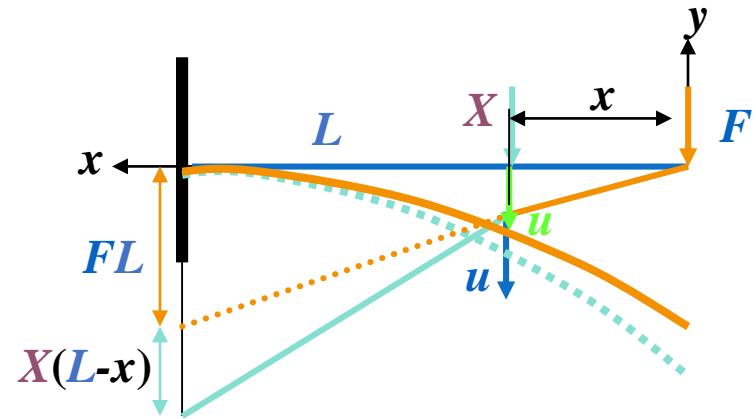
$$\left\{ \begin{array}{ll} M_1 = -M_A & 0 \leq x \leq a \\ M_2 = -M_A + P x / 2 & 0 \leq x \leq b \end{array} \right.$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a M_A dx + \frac{1}{EI} \int_0^b (M_A - P x / 2) dx$$

$$\theta_A = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = Pb^2 / 4(a+b)$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P/2} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P/2} dx = \frac{1}{EI} \int_0^b (M_A - P x / 2) x dx \quad \rightarrow \quad \delta_A = Pb^3 (4a+b) / 12 EI (a+b)$$

## App : Poutre Console



$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^x F^2 x^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_x^L (Fx + X(L-x))^2 dx$$

$$u = \frac{1}{2EI} \frac{\partial W}{\partial X} \Big|_{X=0} = \frac{-2}{EI} \int_x^L (Fx + X(L-x))(L-x) dx$$

$$u = \frac{1}{2EI} \frac{\partial W}{\partial X} \Big|_{X=0} = \frac{F}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2 - 2L^3)$$

## 4. Théorème de Ménabréa

Théorème : la dérivée partielle de l' énergie de déformation par rapport à chacune des inconnues surabondantes est **nulle**, à condition que **les points d' application des forces ne bougent pas** ( $U_i = 0$ ) ou que les sections ne tournent pas ( $q_i = 0$ )

Structure hyperstatique  
d ' inconnues surabondantes  $R_i$



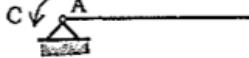
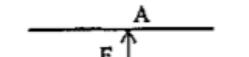
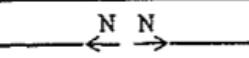
$$W_d = f(R_i)$$



*Il y a autant d'équations que d'inconnues hyperstatiques.*

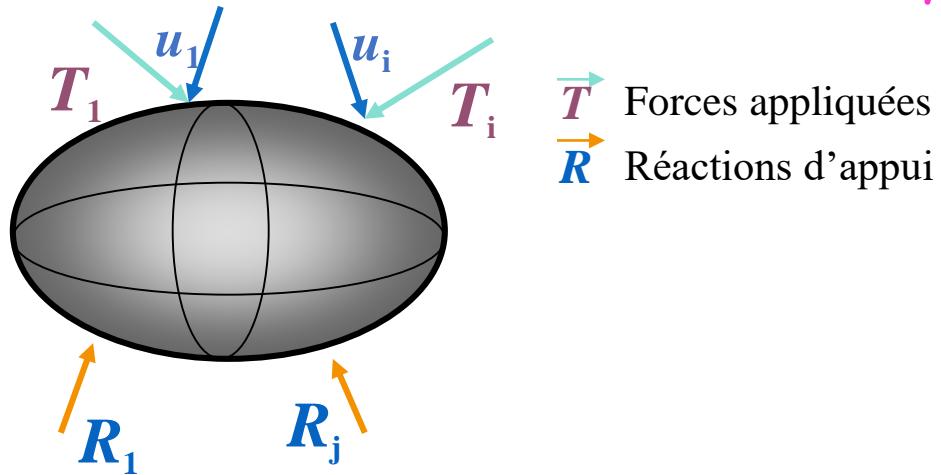


$$\frac{\partial W_d}{\partial R_i} = 0$$

Hyperstatique	Isostatique associé	Inconnue hyperstatique	condition cinématique	Ménabréa
		C	$\omega_A = 0$	$\frac{\partial W_d}{\partial C} = 0$
		F	$u_A = 0$	$\frac{\partial W_d}{\partial F} = 0$
		N	$u_A^+ = u_A^-$	$\frac{\partial W_d}{\partial N} = 0$

## 4. Théorème de Ménabréa

Statique et Forces de Volume négligeables  $\vec{\gamma} = \mathbf{0}$  et  $\vec{X} = \mathbf{0}$



### Système Hyperstatique

$\Sigma(\text{forces})=\mathbf{0}$  et  $\Sigma(\text{moments})=\mathbf{0}$  ne suffisent pas  
à exprimer tous les  $\vec{R}$  en fonction des  $\vec{T}$

$$W = f(\vec{T}_1, \dots, \vec{T}_i, \dots, \vec{R}_1, \dots, \vec{R}_j) \quad \vec{u}_i = \frac{\partial W}{\partial \vec{T}_i} \quad \vec{o} = \frac{\partial W}{\partial \vec{R}_j}$$

## App : Suspension articulée

$$X + 2R \cos \alpha = P$$

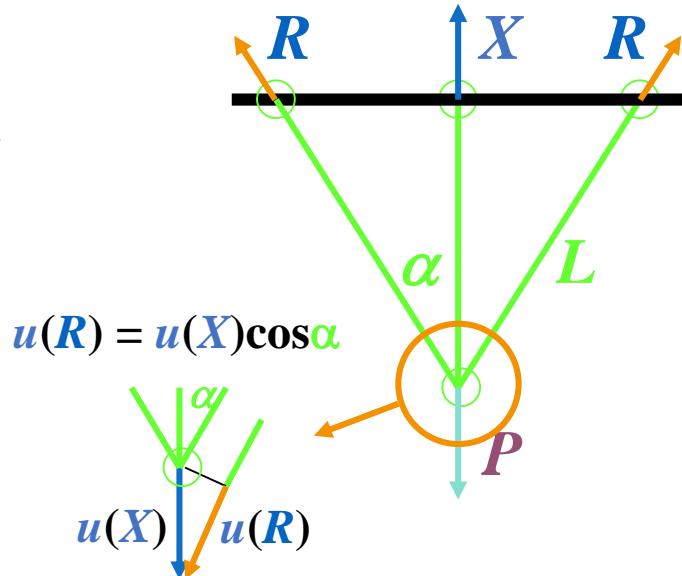
$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$u(X) = \frac{L}{ES} X \cos \alpha$$

$$u(R) = \frac{L}{ES} \frac{P-X}{2 \cos \alpha}$$

$$X = \frac{P}{1+2\cos^3 \alpha}$$



Symétrie

$\Sigma(\text{forces horizontales})=0$  et  $\Sigma(\text{moments})=0$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \vec{F} \cdot \vec{u}$$

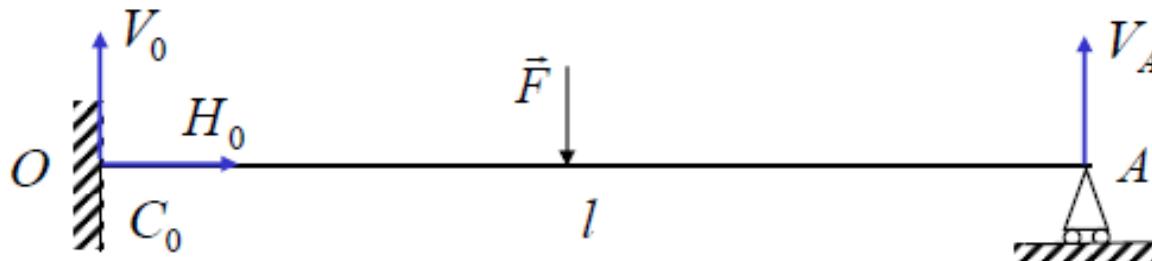
$$2W = Xu(X) + 2Ru(R)$$

$$2W = \frac{L}{ES} (X^2 \cos \alpha + 2 \frac{(P-X)^2}{4 \cos^2 \alpha})$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{P}{1+2\cos^3 \alpha}$$

# App1: Théorème de Castigliano/Ménabréa

## Exemple



$$\vec{M}^t \neq 0$$

## 1) Degrés d'hyperstaticité h

Il y a 4 inconnues :  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $H_0$  et  $C_0$ .

3 équations d'équilibre :  $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$      $\sum \vec{F}_z = \vec{0}$      $\sum \vec{M} / O = 0$

$\Rightarrow$  Degrés d'hyperstatisme :  $h=4-3=1$

$\Rightarrow$  1 seule liaison surabondante.

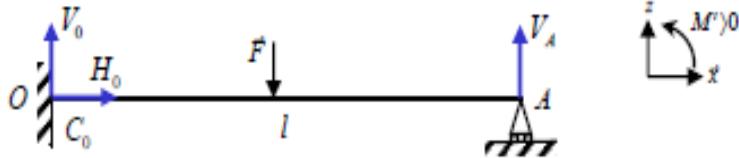
## 2) Equations d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow H_O = 0 \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow V_O + F + V_A = 0 \\ \sum M^t / O = 0 \Rightarrow -\frac{Fl}{2} - V_A l + C_O = 0 \end{array} \right.$$

## 3) Choix de l'inconnue hyperstatique

On choisit  $V_A$  comme inconnue hyperstatique  $\Rightarrow$  On exprimera tout ( $M$ ,  $N$ ,  $T$ ) en fonction des efforts extérieurs et de  $V_A$

## Exemple (suite)



### 4) Expression de M(x) en fonction des efforts extérieurs et des inconnues hyperstatiques

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$\begin{cases} T(x) = V_1 + F \\ T(x) = V_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(x) = -V_1(l-x) - F(\frac{l}{2}-x) \\ M(x) = -V_1(l-x) \end{cases}$$

- On recherche une 4<sup>ème</sup> équation en appliquant le théorème de Castigliano :  $\frac{\partial U}{\partial V_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_1} dx$

Donc,  $\frac{\partial M}{\partial V_1} = -(l-x) \quad \forall x$

- La 4<sup>ème</sup> équation s'écrit :  $\int_0^{\frac{l}{2}} [V_1(l-x) + F(\frac{l}{2}-x)](l-x)dx + \int_{\frac{l}{2}}^l V_1(l-x)(l-x)dx = 0$

- Équation du 1<sup>er</sup> degré en  $V_1$ . On trouve :

$$V_1 = \frac{-5}{16}F$$

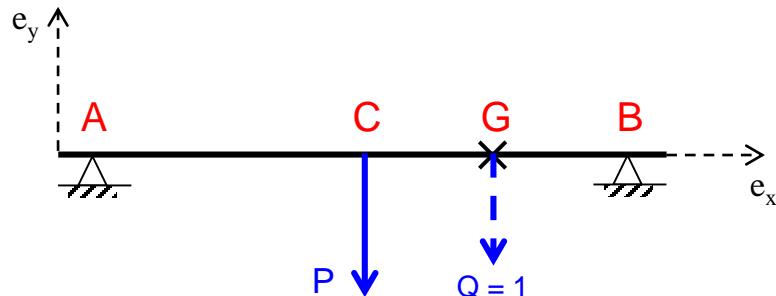
- En remplaçant dans les équations d'équilibre, il vient :

$$V_0 = \frac{-11}{16}F$$

$$C_0 = \frac{3}{16}F$$

## 5. Calcul du déplacement d'un point non chargé

Poutre sur 2 appuis



Flèche en G ?

- détermination de l' équation de la déformée
- charge **fictive unitaire Q** travaillant dans le déplacement  $U_y(G)$



Théorème de  
CASTIGLIANO

$$\left( \frac{\partial W_d}{\partial Q} \right)_{Q=0} = U_y(G)$$

# I. Théorèmes Énergétiques

*Applications*

## II. Méthode des forces

*Démarche*

# Introduction

La méthode des forces est basée sur le théorème de Castigliano et s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites.

On obtient un système d'équations dont la dimension est le degré d'hyperstaticité du problème étudié.

# Démarche de la méthode des forces :

- ❖ Définir une structure isostatique associée en libérant des liaisons
- ❖ Mettre en place les inconnues hyperstatiques associées ( $X_i$ )
- ❖ Tracer, dans la structure isostatique, les diagrammes des efforts intérieurs en fonctions des forces appliquées (connues) et des inconnues hyperstatiques.
- ❖ Calculer les « déplacements » (déplacements, rotations)
- ❖ Rétablir les conditions réelles de liaison.

## Démarche de la méthode des forces :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité  $d = n$
- Ecrire les  $n$  équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants  $M_0$  du système isostatique due aux charges extérieures ( $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ )
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec  $X_i=1$  et les autres inconnus nuls.
- On calcule tous les coefficients  $\delta_{ij}$  et  $\delta_{i0}$  à l'aide des diagrammes.

# Démarche de la méthode des forces :

- Résolution du système d'équations canoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{array} \right.$$

- Correction des épures unitaires  $m_i^* = m_i X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).  
 $m_1^* = m_1 X_1 ; m_2^* = m_2 X_2 ; \dots ; m_n^* = m_n X_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées  $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \cdots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants  
 $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$

# Décomposition du problème :

Soit une structure hyperstatique d'ordre N, sollicitée par un chargement extérieur.

**Le problème hyperstatique, noté Pb, peut se décomposer en :**

1. Un problème isostatique obtenu à partir du problème initial, en enlevant les liaisons qui rendent le problème hyperstatique et en conservant le chargement extérieur. Ce problème sera noté :  $Pb_0$
2. N problèmes correspondant aux inconnues hyperstatiques  $X_i$  ( $i = 1; n$ ) obtenus à partir du problème isostatique chargé uniquement avec les inconnues hyperstatiques. Ces problèmes seront notés  $Pb_i$  ( $i = 1; n$ ). Les  $X_i$  peuvent être des forces ou des moments.

# Décomposition du problème :

On peut noter :

$$Pb = Pb_0 + \sum_{i=1}^n Pb_i$$

ou encore

$$Pb = Pb_0 + \sum_{i=1}^n X_i \overline{Pb_i}$$

où le problème  $\overline{Pb_i}$  est le problème correspondant au  $Pb_i$  mais avec une charge (ou un moment) unitaire.

Pour toute variable  $\Delta$ , on notera  $\Delta_0$  la valeur de cette variable dans le problème  $Pb_0$  et  $\overline{\Delta_i}$ , sa valeur dans le problème  $\overline{Pb_i}$  et on a donc :

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta_i}$$

$\Delta$  peut être une réaction d'appui, un moment fléchissant, etc ...

# Calcul de l'énergie interne :

L'expression de l'énergie interne peut être plus ou moins complexe en fonction de la dimension de l'espace et des hypothèses sur l'énergie.

**Cas général :** On ne néglige pas l'énergie due à l'effort normal ni à l'effort tranchant, on se place dans l'espace à 3 dimensions :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{V_z^2}{GA'_z} + \frac{M_x^2}{GI_0} + \frac{M_y^2}{EI_{Gy}} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} \right) ds$$

où  $s$  désigne l'abscisse curviligne de la poutre.

**Cas bidimensionnel :** On se place dans un espace à 2 dimensions mais on ne négligé aucune énergie.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( \frac{N^2}{EA} + \frac{V_y^2}{GA'_y} + \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} \right) ds$$

**Cas bidimensionnel à flexion dominante :** On néglige les énergies dues aux efforts tranchant et normal, seul le terme en moment fléchissant subsiste.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_z^2}{EI_{Gz}} ds$$

# Calcul des inconnues hyperstatiques.

- 1. Résolution des problèmes associés :** Il faut premièrement résoudre le problème isostatique associé ainsi que les problèmes associés à chaque inconnue hyperstatique. Il faudra notamment, tracer les diagrammes des projections locales du torseur des efforts intérieurs à prendre en compte dans l'énergie.
- 2. Application du théorème de Castigliano.** Si les liaisons sont rigides, alors les déplacements associés à chaque projection des actions hyperstatiques sont nuls.

Suivant les hypothèses faites et la dimension de l'espace considéré, l'énergie est la somme de  $m$  termes provenant des types de sollicitations  $\Delta_j$  affectés des caractéristiques de raideur  $\lambda_j$  correspondantes.

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 = N & \lambda_1 = EA \\ \Delta_2 = V_y & \lambda_2 = GA'_y \\ \Delta_3 = V_z & \lambda_3 = GA'_z \\ \Delta_4 = M_x & \lambda_4 = EI_0 \\ \Delta_5 = M_y & \lambda_5 = EI_{Gy} \\ \Delta_6 = M_z & \lambda_6 = EI_{GZ} \end{array}$$

Dans le cas général, on a :  $m = 6$ ,

$$W_e = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_j^2}{2\lambda_j} ds$$

avec

$$\Delta_j = \Delta_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\Delta_{ji}}$$

Les intégrales pouvant être calculées séparément et on peut poser :

$$S_{ik} = \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{jk}} ds$$

et

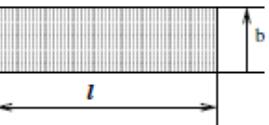
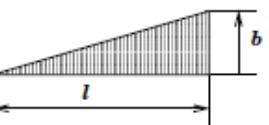
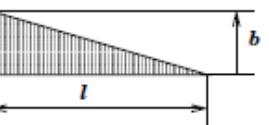
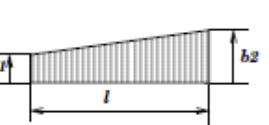
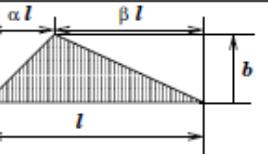
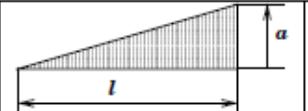
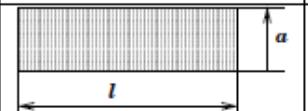
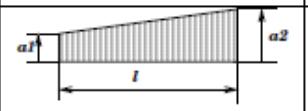
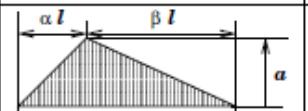
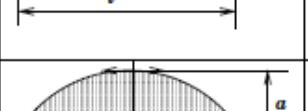
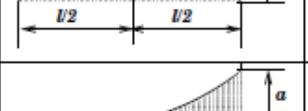
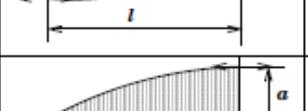
$$U_k = - \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0} \Delta_{jk}}{\lambda_j} ds$$

$U_k$  est homogène à un déplacement si  $X_k$  est un effort et à une rotation si  $X_k$  est un moment.  $S_{ik}$  est une souplesse

on a donc :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots etc... & S_{1n} \\ S_{12} & S_{22} & \dots etc... & S_{2n} \\ & \dots etc... & & \\ S_{1n} & S_{2n} & \dots etc... & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots etc... \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots etc... \\ U_n \end{bmatrix}$$

TABLE 1. Valeurs de  $\int_0^l M_a M_b dx$

$x$					
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{6}$	$\frac{al}{6} (b_1 + 2b_2)$	$\frac{abl}{6} (1 + \alpha)$
	$abl$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{2}$	$\frac{al}{2} (b_1 + b_2)$	$\frac{abl}{2}$
	$\frac{bl}{2} (a_1 + a_2)$	$\frac{bl}{6} (a_1 + 2a_2)$	$\frac{bl}{6} (2a_1 + a_2)$	$\frac{l}{6} [2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2]$	$\frac{bl}{6} [(1 + \beta)a_1 + (1 + \alpha)a_2]$
	$\frac{abl}{2}$	$\frac{abl}{6} (1 + \alpha)$	$\frac{abl}{6} (1 + \beta)$	$\frac{al}{6} [(1 + \beta)b_1 + (1 + \alpha)b_2]$	$\frac{abl}{3}$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{3}$	$\frac{al}{3} (b_1 + b_2)$	$\frac{abl}{3} (1 + \alpha\beta)$
	$\frac{abl}{3}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{abl}{12}$	$\frac{al}{12} (b_1 + 3b_2)$	$\frac{abl}{12} (1 + \alpha + \alpha^2)$
	$\frac{2abl}{3}$	$\frac{5abl}{12}$	$\frac{abl}{4}$	$\frac{al}{12} (3b_1 + 5b_2)$	$\frac{abl}{12} (5 - \beta - \beta^2)$

## II. Méthode des forces

*Applications*

### III. LA MÉTHODE DES TROIS MOMENTS

*Démarche*

## **Définition**

La méthode des trois moments s'applique aux systèmes dits poutres continues. On suppose que l'effet de l'effort tranchant est négligé

## ***Principe de la méthode des trois moments :***

Cette méthode consiste à déterminer les moments fléchissant dans le cas des poutres continues. C'est-à-dire des poutres qui reposent sur plus de deux appuis.

# *Le degré d'hyperstaticité*

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.

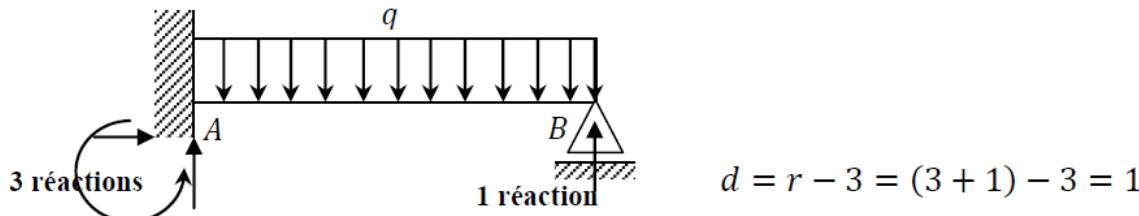
$D = r - 3$  avec  $r$ : le nombre de liaisons (réactions)

Ou bien :

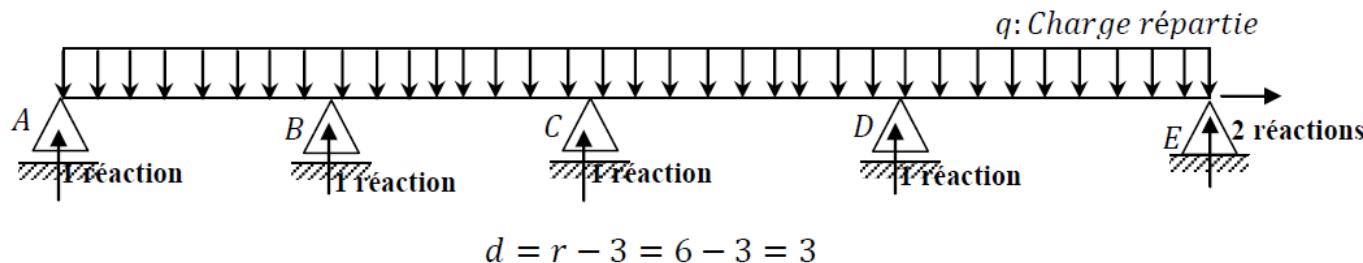
$D = a - 2$  avec  $a$ : le nombre d'appuis

Ou bien :

Le degré d'hyperstaticité est égal au nombre des appuis intermédiaires.



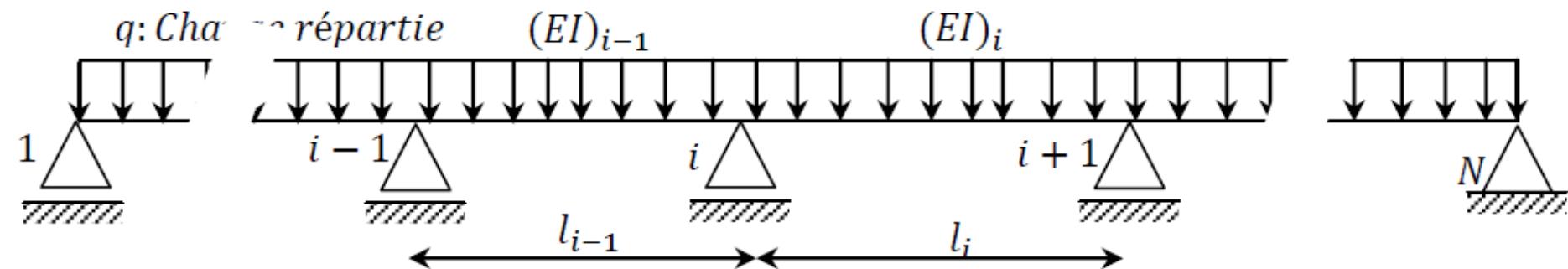
**Figure 2.1.** : Poutre sur 2 appuis (1 Encastrement et 1 simple)



**Figure 2.2.** : Poutre sur 5 appuis (1 double et 4 simples)

## *Calcul des moments fléchissant dans les appuis :*

- Considérons l'exemple de la figure 2.3. Le degré d'hyperstaicité de cette poutre est égal à  $N-2$  où  $N$  représente le nombre d'appuis
- Prenons pour inconnues hyperstatiques les moments fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire. Pour ce faire, on procède à des coupures de manière à supprimer la liaison de moment au niveau de chaque appui.
- Dans chaque appui nous avons deux rotations (une à gauche et l'autre à droite).
- Pour une poutre de  $N-1$  travées, on numérote les appuis de 1 à  $N$ . La travée  $l_i$  est comprise entre les appuis  $(i)$  et  $(i+1)$ , avec une rigidité  $EI_i$ .



**Figure 2.3. : Poutre continue sur  $N$  appuis**

Une poutre continue comportant  $N-1$  travées peut être décomposée en  $N-1$  poutres isostatiques sur lesquelles s'appliquent les mêmes charges que sur la poutre continue avec en plus les moments aux appuis.

Nous obtenons alors pour la travée  $i-1$  et  $i$ :

- $M_{i-1}$  : désigne le moment sur l'appui  $A_{i-1}$
- $M_i$  : désigne le moment sur l'appui  $A_i$
- $M_{i+1}$  : désigne le moment sur l'appui  $A_{i+1}$

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = 0$$

On a deux types de rotations :

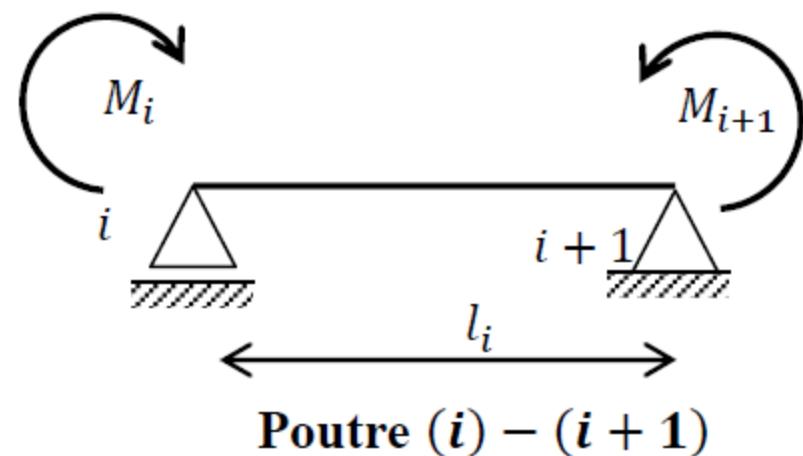
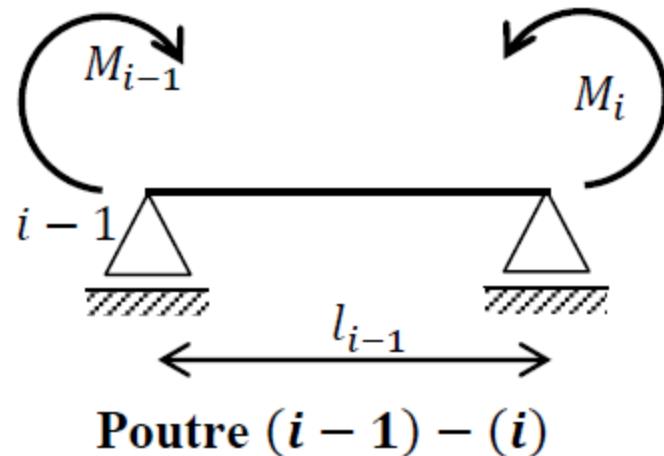
- Rotation due aux charges extérieures  $(\varphi_{ig} + \varphi_{id})$
- Rotation due aux moments fléchissants  $(\overline{\varphi_{ig}} + \overline{\varphi_{id}})$

$$\sum \text{des rotations au niveau du point } (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi_{ig}} + \overline{\varphi_{id}}) = 0$$

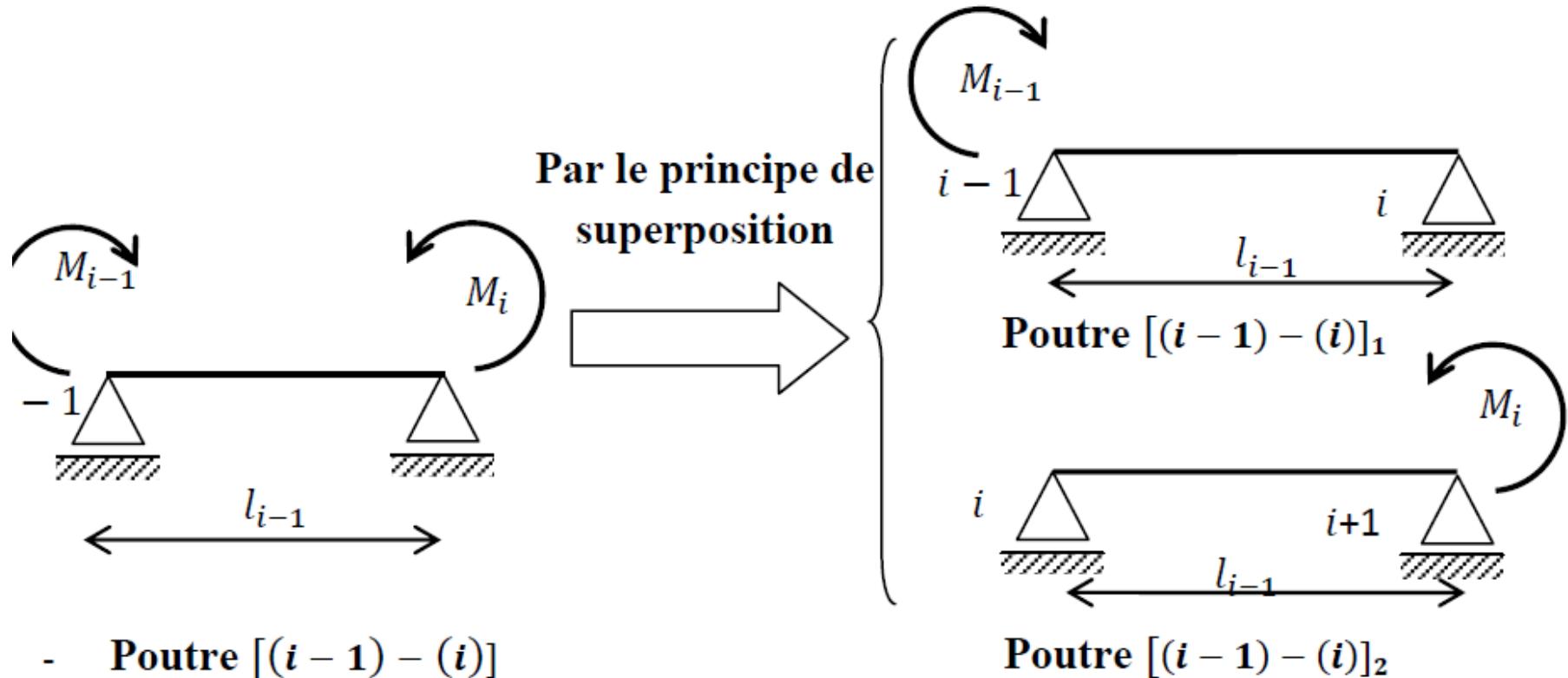
## A- Rotations dues aux moments fléchissants ( $\overline{\varphi_{ig}} + \overline{\varphi_{id}}$ )

Les déformations en général et spécifiquement les rotations dues aux moments fléchissants peuvent être évaluée par l'une des méthodes analytiques connues comme par App : la méthode de CASTIGLIANO ou Maxwell-Mohr et aussi la méthode graphique de VERETCHAGUINE.

Ici le calcul des rotations est effectué par la méthode de Mohr.



## A1. Poutre $(i-1) - (i)$



$$\overline{\varphi_{ig}} = \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1}$$

## A1. Poutre ( $i$ ) - ( $i+1$ )

De la même pour la poutre ( $i$ ) - ( $i + 1$ )

$$\overline{\varphi_{id}} = \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i$$

$$\sum Rotations/point (i) = (\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + (\overline{\varphi_{ig}} + \overline{\varphi_{id}}) = 0 \quad (2.3)$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} \frac{M_i}{(EI)_i} l_i + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

$$(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) + \frac{1}{6} \frac{M_{i-1}}{(EI)_{i-1}} l_{i-1} + \frac{1}{3} M_i \left( \frac{l_{i-1}}{(EI)_{i-1}} + \frac{l_i}{(EI)_i} \right) + \frac{1}{6} \frac{M_{i+1}}{(EI)_i} l_i = 0$$

*Cette équation est appelée méthode des trois moments (dite aussi méthode des rotations).*

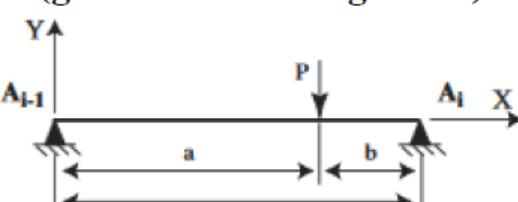
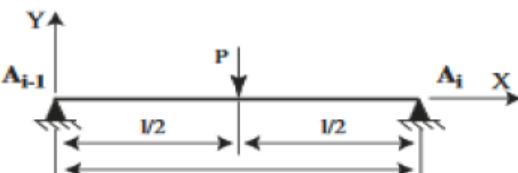
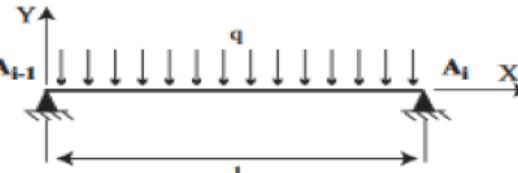
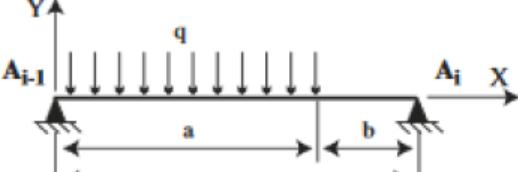
*Elle permet de calculer les moments aux appuis intermédiaires des poutres continues.*

*Si toutes les travées de la poutre ont la même rigidité la relation devient*

$$M_{i-1}l_{i-1} + 2(l_{i-1} + l_i)M_i + M_{i+1}l_i = -6EI(\varphi_{ig} + \varphi_{id}) \quad (2.4)$$

## B- Rotations dues aux charges extérieures ( $\varphi_{ig} + \varphi_{id}$ )

Le tableau suivant résume les valeurs des rotations au niveau des appuis pour différentes charges extérieures :

Schéma statique (géométrie et chargement)	$-6EI\varphi_{i-1}$	$-6EI\varphi_i$
	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$	$-\frac{Pab(a+l)}{l}$
	$-\frac{3}{8}Pl^2$	$-\frac{3}{8}Pl^2$
	$-\frac{1}{24}ql^3$	$-\frac{1}{24}ql^3$
	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$	$-\frac{1}{24l}qa^2(2l-a)^2$

### III. LA MÉTHODE DES TROIS MOMENTS

*Applications*

## *VI. MÉTHODE DE DÉPLACEMENT*

*Démarche*

## Définition

La méthode des déplacements ou des déformations est une des méthodes les plus utilisées pour le calcul des systèmes hyperstatiques. Les déformations (rotations et translations) sont les inconnues.

### Nombr e d'inconnues de la méthode :

Le nombre d'inconnues de la méthode des déplacements est égal au nombre de rotations des nœuds  $N_r$  et le nombre de translations  $N_t$  du portique ( $N = (N_r + N_t)$ ).

- **Nombre de rotations  $N_r$**  : le nombre de rotations d'un portique est égal aux nombre de nœuds intermédiaires rigides ( $N_r$ = nœuds intermédiaires rigides).
- **Nombre de translations  $N_t$**  : le nombre de translations possibles du portique :

$$N_t = 2n - (b + l) \quad (4.1)$$

Avec :

$n$  : Nombre total de nœuds (nœuds et appuis).

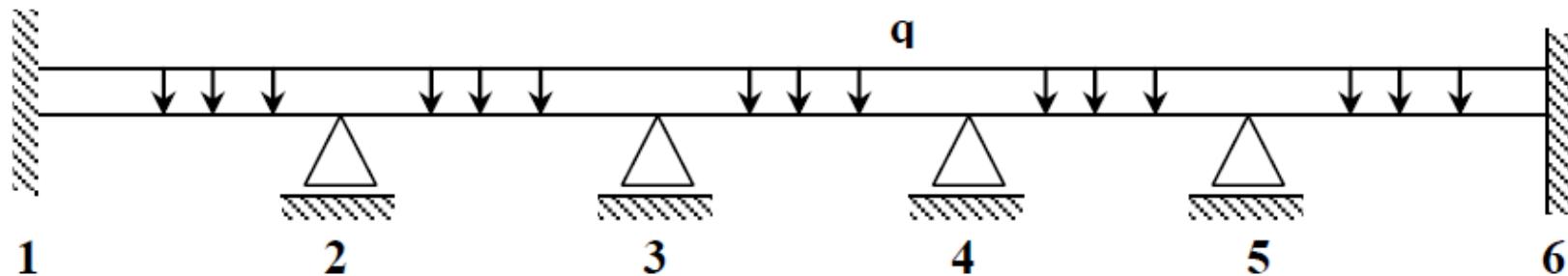
$b$  : Nombre de barres.

$l$  : Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

## *Intérêt de la méthode des déplacements :*

*On réduit considérablement avec cette méthode le nombre des inconnues surabondantes et elle permet de déterminer la matrice de rigidité unique du système.*

**Exemple 1 :**



**Figure 4.1. : Poutre hyperstatique**

Dans la Figure 4.1, la méthode des trois moments nous donne 6 équations à 6 inconnues ; alors que la méthode des déplacements nous donne seulement 4 inconnues (car les rotations aux nœuds 1 et 6 sont nuls)

## Exemple 2 :

Dans cet exemple (figure 4.2) nous avons 3 inconnues par liaison encastrée ; ce qui fait en tout 9 inconnues.

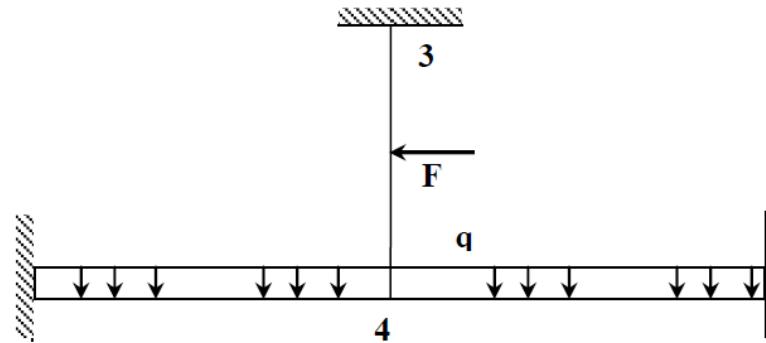


Figure 4.2. : Système hyperstatique

La statique nous donne trois équations (une équation de moment et 2 équations de projection de toutes les forces appliquées).

Le degré d'hyperstaticité est ( $9 - 3 = 6$  fois hyperstatique).

Puisque ce système est une structure non déplaçable ( $N_t = 2n - (b + l) = 2.4 - (3 + 6) = -1$ ) alors nous avons seulement une seule inconnue puisque nous avons un seul nœud intermédiaire (le nœud 4). Donc l'inconnue  $Z_1$  c'est la rotation au nœud 4.

## *Intérêt de la méthode des déplacements :*

La méthode des déplacements est utilisée pour le calcul des structures constituées de barres droites encastrées dans les noeuds.

Globalement, le principe de la méthode est décrit par les trois étapes suivantes :

- a. On détermine le système de base en bloquant (enca斯特ments spéciaux) tous les noeuds intermédiaires de la structure réelle dans le cas d'une structure non déplaçable.

Si le système est déplaçable, on bloque aussi les noeuds intermédiaires (enca斯特ments spéciaux) et en bloque aussi les translations à l'aide de butée (Figure 4.3b).

Chaque élément de la structure travaille seul comme le modèle bi-encastré ou encastré-articulé.

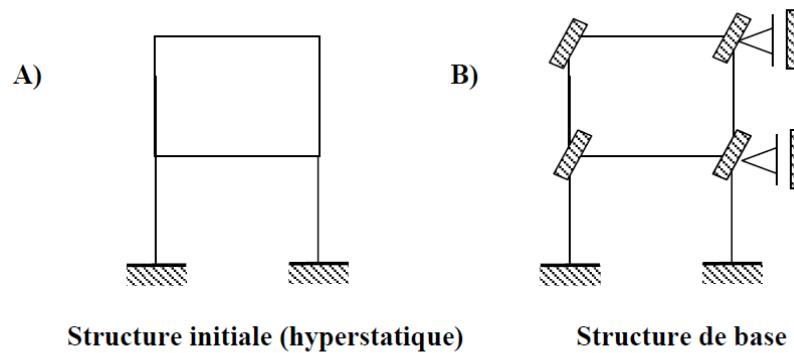
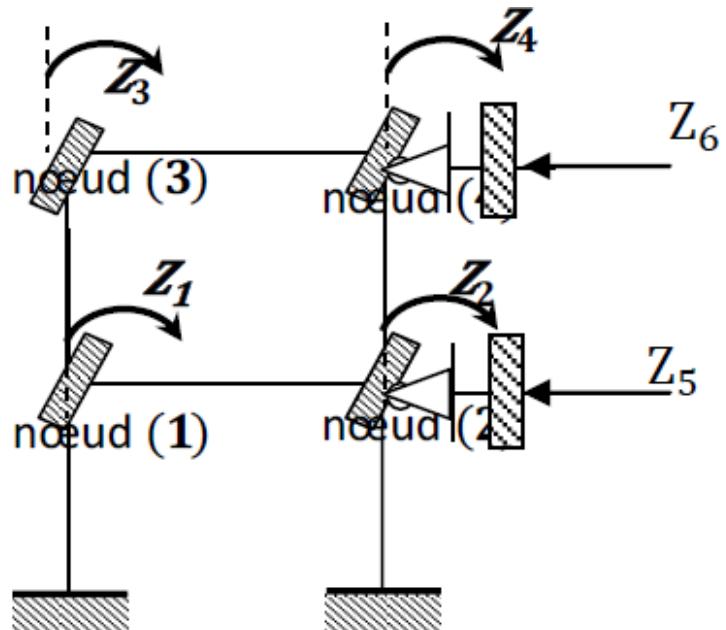


Figure 4.3. : Portique hyperstatique

b. Afin d'obtenir un système équivalent à la structure initiale, on applique des déplacements (inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (Figure 4.3C).

C)



**Figure 4.3. : Portique hyperstatique**

Les inconnues du problème dans le cas considéré (Figure 4.3C) sont :

$Z_1$  : Rotation du nœud 1.

$Z_2$  : Rotation du nœud 2.

$Z_3$  : Rotation du nœud 3.

$Z_4$  : Rotation du nœud 4.

$Z_5$  : Translation horizontale des nœuds 1 et 2, la variation de longueur de la barre 1-2 étant négligée.

$Z_6$  : Translation horizontale des nœuds 3 et 4, la variation de longueur de la barre 3-4 étant négligée.

Pour obtenir les déplacements inconnus ( $Z_1 \dots Z_6$ ) on écrit qu'il y a équilibre des réactions (moments ou forces) apparaissant dans chaque liaison ajoutée sous l'effet des forces extérieures et des déplacements imposés. Soit :

$$Z_1 = \Sigma \text{ des moments réactifs dans l'encastrement (1)} = 0.$$

$$Z_2 = \Sigma \text{ des moments réactifs dans l'encastrement (2)} = 0$$

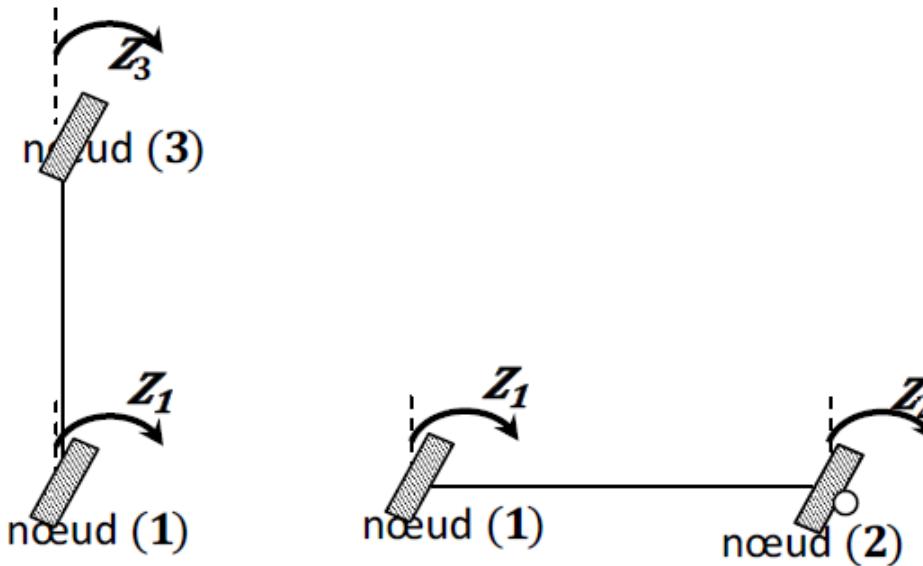
$$Z_3 = \Sigma \text{ des moments réactifs dans l'encastrement (3)} = 0.$$

$$Z_4 = \Sigma \text{ des moments réactifs dans l'encastrement (4)} = 0.$$

$$Z_5 = \Sigma \text{ des réactions horizontales dans la liaison (2)} = 0.$$

$$Z_6 = \Sigma \text{ des réactions horizontales dans la liaison (4)} = 0.$$

App : barre 1-2 et barre 1-3 :



**Figure 4.4.** : Portique de la figure 4.3. (Exemple : barre 1-2 et 1-3)

Pour terminer, on retient que la méthode des déplacements est caractérisée par :

- Le blocage des rotations des nœuds intermédiaires et des translations du portique.
- Donc un seul système de base possible, donc une façon unique de mettre le problème en équations (de ce fait, la méthode est particulièrement indiquée pour le calcul automatique).

## *Les étapes de calcul par la méthode des déplacements :*

L'application de la méthode des déplacements peut se résumer aux étapes élémentaires suivantes :

- Déterminer le nombre d'inconnues ( $N_t$  et  $N_r$ ).
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants  $M_0$  du système isostatique due aux charges extérieures ( $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0$ )
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec  $Z_i=1$  et les autres inconnus nuls.
- On calcule tous les coefficients de réaction ( $r_{ij}, R_{i0}$ ) à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques pour obtenir les déplacements des noeuds.
- Correction des épures unitaires  $m_i^* = m_i X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).  
 $m_1^* = m_1 Z_1 ; m_2^* = m_2 Z_2 ; \dots ; m_n^* = m_n Z_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées  $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants  
 $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$

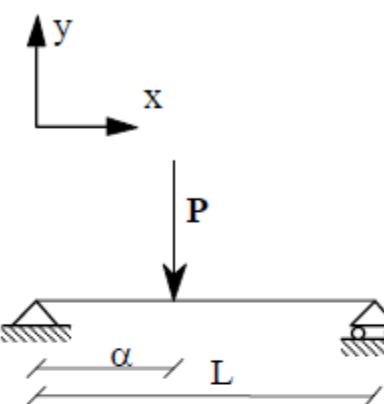
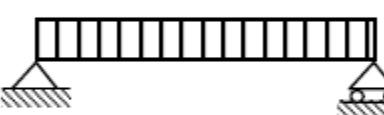
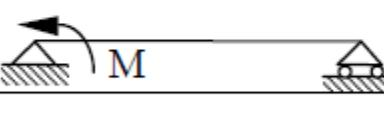
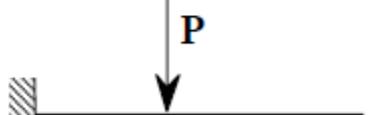
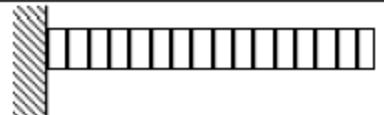
## *VI. MÉTHODE DE DÉPLACEMENT*

*Applications*

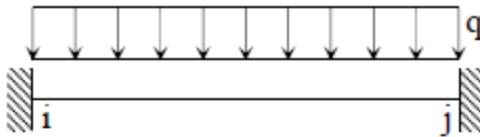
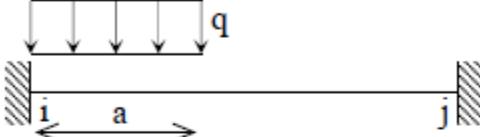
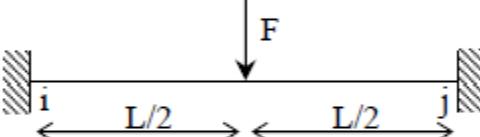
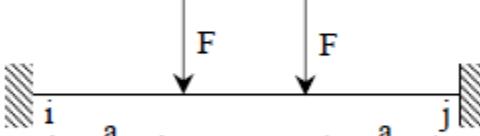
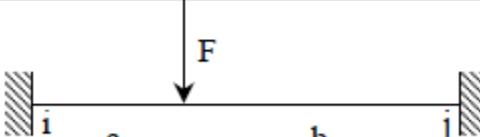
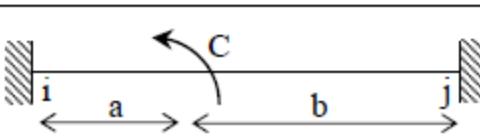
## *Annexes*

## Formulaires

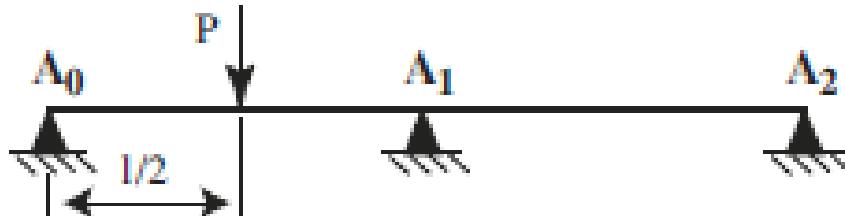
## 7. Formulaire de flèches de poutres isostatiques

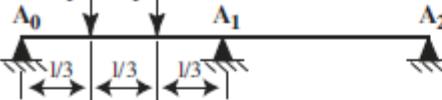
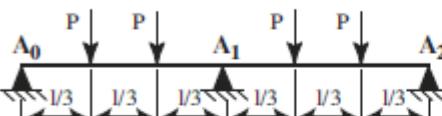
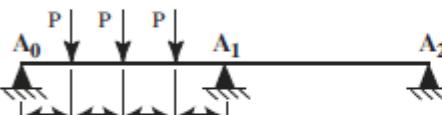
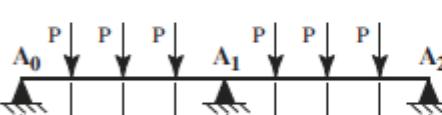
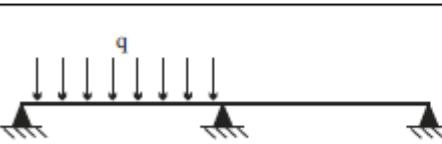
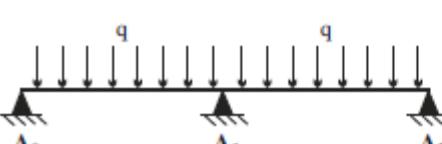
	$0 \leq x \leq \alpha : y(x) = \frac{P(L-\alpha)}{6EI} [x^3 - \alpha(2L-\alpha)x] \quad y'(x) = \frac{P(L-\alpha)}{6EI} [3x^2 - \alpha(2L-\alpha)]$ $\alpha \leq x \leq L : y(x) = \frac{P\alpha}{6EI} [(L-x)^3 - (L-\alpha)(L+\alpha)(L-x)]$ $y'(\alpha) = \frac{P\alpha}{6EI} [-3(L-\alpha)^2 + (L-\alpha)(L+\alpha)]$ $y(\alpha) = -\frac{P\alpha^2(L-\alpha)}{3EI} \quad \text{pour } x=\alpha$ $y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EI} \quad \text{pour } x=\alpha=\frac{L}{2}$
	$y(x) = -\frac{p}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ $y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5pL^4}{384EI} \quad \text{pour } x=\frac{L}{2}$ $y'(\alpha) = -\frac{p}{24EI} (4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$
	$y(x) = \frac{M}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$ $y'(\alpha) = \frac{M}{6EI} (3x^2 - 6Lx + 2L^2)$
	$0 \leq x \leq \alpha : y(x) = \frac{Px^2(x-3\alpha)}{6EI} \quad y'(x) = \frac{Px(x-2\alpha)}{2EI}$ $\alpha \leq x \leq L : y(x) = \frac{P\alpha^2(\alpha-3x)}{6EI}$ $y(L) = -\frac{PL^3}{3EI} \quad \text{pour } x=\alpha=L$
	$y(x) = -\frac{p}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$ $y(L) = -\frac{pL^4}{8EI} \quad \text{pour } x=L$ $y'(\alpha) = -\frac{p}{6EI} (x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x)$

## 8. Formulaire des réactions de liaison de la poutre bi-encastree

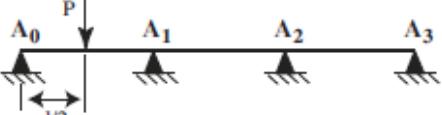
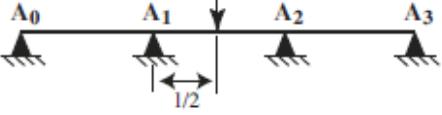
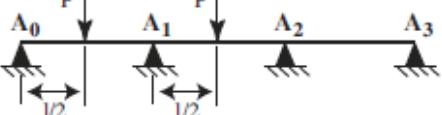
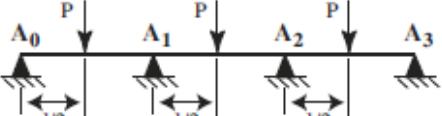
	$T_{ij}^0 = \frac{qL}{2}$ ; $T_{ji}^0 = \frac{qL}{2}$ ; $M_{ij}^0 = \frac{qL^2}{12}$ ; $M_{ji}^0 = -\frac{qL^2}{12}$
	$T_{ij}^0 = \frac{qa^3}{L^2} \left(1 - \frac{a}{2L}\right)$ ; $T_{ji}^0 = qa \left(1 - \frac{a^2}{L^2} + \frac{a^3}{2L^3}\right)$ $M_{ij}^0 = \frac{qa^2}{12L^2} (6L^2 - 8aL + 3a^2)$ ; $M_{ji}^0 = \frac{-qa^3}{12L^2} (4L - 3a)$
	$T_{ij}^0 = \frac{F}{2}$ ; $T_{ji}^0 = \frac{F}{2}$ ; $M_{ij}^0 = \frac{FL}{8}$ ; $M_{ji}^0 = -\frac{FL}{8}$
	$T_{ij}^0 = F$ ; $T_{ji}^0 = F$ ; $M_{ij}^0 = \frac{Fa(L-a)}{L}$ ; $M_{ji}^0 = -\frac{Fa(L-a)}{L}$
	$T_{ij}^0 = \frac{Fb^2}{L^3} (b+3a)$ ; $T_{ji}^0 = \frac{Fa^2}{L^3} (3b+a)$ ; $M_{ij}^0 = \frac{Fab^2}{L^2}$ ; $M_{ji}^0 = -\frac{Fba^2}{L^2}$
	$T_{ij}^0 = \frac{6abC}{L^3}$ ; $T_{ji}^0 = -\frac{6abC}{L^3}$ ; $M_{ij}^0 = \frac{b(2a-b)}{L^2} C$ ; $M_{ji}^0 = \frac{a(2b-a)}{L^2} C$

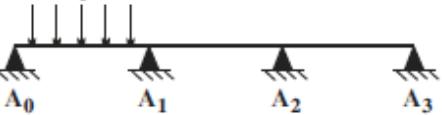
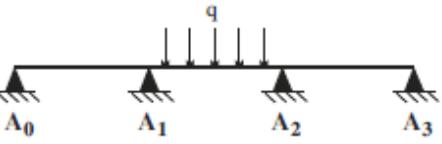
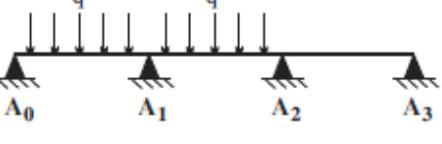
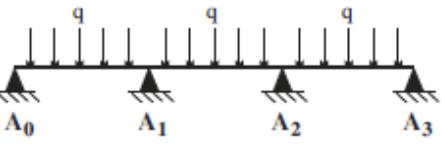
### 5.3.6 Formulaire de la poutre continue à 2 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
 <p>Diagram of a beam <math>A_0A_1A_2</math> with a central load <math>P</math>. The first segment <math>A_0A_1</math> has length <math>l/2</math>. The second segment <math>A_1A_2</math> has length <math>l/2</math>. The total length is <math>l</math>.</p>	$M_1 = -\frac{3}{32}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{13}{32}P \quad Y_{A_1} = \frac{11}{16}P \quad Y_{A_2} = -\frac{3}{32}P$
 <p>Diagram of a beam <math>A_0A_1A_2</math> with two central loads <math>P</math>. The first segment <math>A_0A_1</math> has length <math>l/2</math>. The second segment <math>A_1A_2</math> has length <math>l/2</math>. The total length is <math>l</math>.</p>	$M_1 = -\frac{3}{16}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{5}{16}P \quad Y_{A_1} = \frac{11}{8}P \quad Y_{A_2} = \frac{5}{16}P$

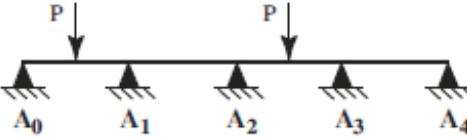
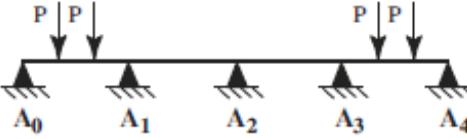
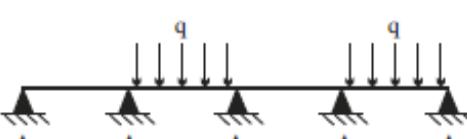
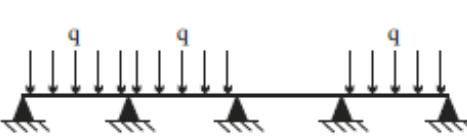
Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\frac{1}{6}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{5}{6}P \quad Y_{A_1} = \frac{8}{6}P \quad Y_{A_2} = -\frac{1}{6}P$
	$M_1 = -\frac{1}{3}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{2}{3}P \quad Y_{A_1} = \frac{8}{3}P \quad Y_{A_2} = \frac{2}{3}P$
	$M_1 = -\frac{15}{64}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{81}{64}P \quad Y_{A_1} = \frac{126}{64}P \quad Y_{A_2} = -\frac{15}{64}P$
	$M_1 = -\frac{15}{32}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{33}{32}P \quad Y_{A_1} = \frac{126}{32}P \quad Y_{A_2} = \frac{33}{32}P$
	$M_1 = -\frac{3}{48}ql^2$ $Y_{A_0} = \frac{7}{16}ql \quad Y_{A_1} = \frac{15}{24}ql \quad Y_{A_2} = -\frac{3}{48}ql$
	$M_1 = -\frac{ql^2}{8}$ $Y_{A_0} = \frac{3}{8}ql \quad Y_{A_1} = \frac{5}{4}ql \quad Y_{A_2} = \frac{3}{8}ql$

### 5.3.7 Formulaire de la poutre continue à 3 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\frac{3}{10}Pl \quad M_2 = \frac{3}{40}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{1}{5}P \quad Y_{A_1} = \frac{47}{40}P$ $Y_{A_2} = -\frac{9}{20}P \quad Y_{A_3} = \frac{3}{40}P$
	$M_1 = -\frac{3}{40}Pl \quad M_2 = -\frac{3}{40}Pl$ $Y_{A_0} = -\frac{3}{40}P \quad Y_{A_1} = \frac{23}{40}P$ $Y_{A_2} = \frac{23}{40}P \quad Y_{A_3} = -\frac{3}{40}P$
	$M_1 = -\frac{3}{10}Pl \quad M_2 = -\frac{1}{20}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{1}{5}P \quad Y_{A_1} = \frac{31}{20}P$ $Y_{A_2} = \frac{3}{10}P \quad Y_{A_3} = -\frac{1}{20}P$
	$M_1 = -\frac{3}{20}Pl \quad M_2 = -\frac{3}{20}Pl$ $Y_{A_0} = \frac{7}{20}P \quad Y_{A_1} = \frac{23}{20}P$ $Y_{A_2} = \frac{23}{20}P \quad Y_{A_3} = \frac{7}{20}P$

Géométrie et chargement	Moment sur appui et réaction d'appui
	$M_1 = -\frac{1}{15}qI^2 \quad M_2 = \frac{1}{60}qI^2$ $Y_{A_0} = \frac{13}{30}qI \quad Y_{A_1} = \frac{13}{20}qI$ $Y_{A_2} = -\frac{1}{10}qI \quad Y_{A_3} = \frac{1}{60}qI$
	$M_1 = -\frac{1}{20}qI^2 \quad M_2 = -\frac{1}{20}qI^2$ $Y_{A_0} = -\frac{1}{20}qI \quad Y_{A_1} = \frac{11}{20}qI$ $Y_{A_2} = \frac{11}{20}qI \quad Y_{A_3} = -\frac{1}{20}qI$
	$M_1 = -\frac{7}{60}qI^2 \quad M_2 = -\frac{1}{30}qI^2$ $Y_{A_0} = \frac{23}{60}qI \quad Y_{A_1} = \frac{18}{15}qI$ $Y_{A_2} = \frac{9}{20}qI \quad Y_{A_3} = -\frac{1}{30}qI$
	$M_1 = -\frac{1}{10}qI^2 \quad M_2 = -\frac{1}{10}qI^2$ $Y_{A_0} = \frac{2}{5}qI \quad Y_{A_1} = \frac{11}{10}qI$ $Y_{A_2} = \frac{11}{10}qI \quad Y_{A_3} = \frac{2}{5}qI$

### 5.3.8 Formulaire de la poutre continue à 4 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui
	$M_1 = -0,080Pl$ $M_2 = -0,054Pl$
	$M_1 = -0,090Pl$ $M_2 = 0,095Pl$ $M_3 = -0,090Pl$
	$M_1 = -0,071ql^2$ $M_2 = 0,036ql^2$ $M_3 = -0,071ql^2$
	$M_1 = -0,054ql^2$ $M_2 = -0,036ql^2$
	$M_1 = -0,121ql^2$ $M_2 = -0,018ql^2$ $M_3 = -0,058ql^2$

### 5.3.9 Formulaire de la poutre continue à 5 travées égales

Géométrie et chargement	Moment sur appui
	$M_1 = -0,106Pl$ $M_2 = 0,048Pl$ $M_3 = -0,088Pl$ $M_4 = -0,072Pl$
	$M_1 = -0,140Pl$ $M_2 = -0,105Pl$ $M_3 = -0,105Pl$ $M_4 = -0,140Pl$
	$M_1 = -0,105ql^2$ $M_2 = -0,079ql^2$ $M_3 = -0,079ql^2$ $M_4 = -0,105ql^2$
	$M_1 = -0,053ql^2$ $M_2 = -0,039ql^2$ $M_3 = -0,039ql^2$ $M_4 = -0,053ql^2$

# Merci de votre attention!

