UNIVERSITE INTERNATIONALE DE CASABLANCA

CPI- PREMIERE ANNEE

HASSAN EL AMRI

ANALYSE

Table des matières

Chapitre 1

TRIGONOMETRIE

1.1 Sinus et Cosinus, Tangente et Cotangente

Tracer un cercle $C(O, 1)$ et définir sur la figure le cosinus et le sinus en tant que coordonnées d'un point du cercle. Le sinus est l'abscisse et le cosinus l'ordonnée. Comme le rayon du cercle est 1, ils sont donc compris entre -1 et 1. Montrer sur la figure la présence d'un triangle rectangle de cotés $(\cos, \sin, 1)$ et en déduire par le théorème de Pythagore (que les jeunes connaissent) que la somme des carrés est égale à 1.

1.2 Quelques exemples

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0	1	2	3	4
$\sqrt{}$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$\frac{\sqrt{}}{2}$= sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Le tableau ci dessus donne les sinus et cosinus des angles classiques connus $(0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$.
La tangente et la cotangente sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{\sin a}{\cos a} \\ \cot a &= \frac{\cos a}{\sin a} \end{aligned}$$

1.3 Cos paire, sin impaire

On montre en utilisant le cercle que

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \qquad (1.1) \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

1.4 Périodicité et autres propriétés

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x \end{aligned} \tag{1.2}$$

et, d'une manière générale, on a

$$\begin{aligned} \forall k &\in \mathbb{Z} \\ \cos(x+2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2k\pi) &= \sin x \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x \tag{1.4}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x \\ \sin(\pi-x) &= \sin x \\ \cos(\pi-x) &= -\cos x \end{aligned}$$

et d'une manière générale on a :

$$\begin{aligned} \forall k &\in \mathbb{Z} \\ \cos(x+(2k+1)\pi) &= -\cos x \\ \sin(x+(2k+1)\pi) &= -\sin x \end{aligned}$$

Exercice 1.4.1. *Ecrire l'équivalent des propriétés ci dessus pour la tangente et la cotangente*

1.5 Propriétés fondamentales

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \tag{1.6}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \tag{1.7}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{1.9}$$

En effet

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

1.6 Somme des angles

On démontre, en utilisant le cercle, que

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned} \tag{1.10}$$

La première se démontre en utilisant les quatre points sur le cercle $E(1,0)$, $A(\cos a, \sin a)$, $B(\cos b, \sin b)$, $D(\cos(a-b), \sin(a-b))$ et en remarquant l'égalité $d(A,B) = d(E,D)$.

La deuxième se démontre en se ramenant aux cos : $\sin(a-b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a-b)) = \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)) = \cos(c-b)$, avec $c = \frac{\pi}{2} - a$.

Exercice 1.6.1. *1. Calculer* $\tan(a-b), \cot(a-b), \cos(a+b), \sin(a+b)$.

2. Calculer $cos(2x)$, $sin(2x)$, $\tan(2x)$ *et* $\cot(2x)$

3. Calculer $cos(3x)$, $sin(3x)$, $\tan(3x)$ *et* $\cot(3x)$

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}) \tag{1.11}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}) \tag{1.12}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2}) \tag{1.13}$$

5. Montrer que

$$\begin{aligned} 1 + \cos x &= 2\cos^2 \frac{x}{2} \\ 1 - \cos x &= 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \end{aligned}$$

Solution. 1) Démontrons la relation (1.10) qui est la base de toutes les autres : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

Soit A le point du cercle situé à l'angle a, soit B le point du cercle situé à l'angle b. Soit D le point du cercle situé à l'angle $a-b$ (supposons $a>b$ pour faciliter l'illustration).

Soit E le point du cercle situé à l'angle 0.

On a donc en coordonnées

$$A(\cos a, \sin a),\ \ B(\cos b, \sin b),\ \ E(1,0),\ \ D(\cos(a-b), \sin(a-b)).$$

Sur la figure on voit que les arcs de cercle $arc(E,D)$ et $arc(A,B)$ sont égaux. Et donc

$$d(E,D) = d(A,B).$$

Ceci s'écrit

$$\sqrt{(\cos(a-b)-1)^2+\sin^2(a-b)} = \sqrt{(\cos a-\cos b)^2+(\sin a-\sin b)^2}$$

ou encore

$$\cos^2(a-b)-2\cos(a-b)+1+\sin^2(a-b) = 2-2\cos a\cos b-2\sin a\sin b$$

d'où

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b+\sin a\sin b$$

Toutes les autres formules en découlent en utilisant des relations convenables entre cos et sin. Par exemple

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a-(-b))\\ \sin(a+b) &= \cos(\pi-a-b) = \cos(\pi-a)-b)\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x \qquad (1.14)\\ &= 2\cos^2 x-1\\ &= 1-2\sin^2 x\\ \sin 2x &= 2\cos x\sin x\\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 4\cos^3 x-3\cos x\\ \sin 3x &= -4\sin^3 x+3\sin x\\ \tan 3x &= \frac{\tan^3 x-3\tan x}{3\tan^2 x-1}\end{aligned}$$

4) classique

5) Il suffit de prendre $t=2x$ dans les formules (1.14), on aura alors : $\cos t = 2\cos^2\frac{x}{2}-1$

De même pour les autres formules.

$$\begin{aligned}1+\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}\\ 1-\cos x &= 2s\sin^2\frac{x}{2}\\ \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\end{aligned}$$

■

1.7 sin, cos et tan en fonction $\tan(\frac{x}{2})$

En posant $t = \tan(\frac{x}{2})$

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Pour la première on part du fait que $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sin^2 x(1+\tan^2 x)$
d'où

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

et on on utilise le fait que $\tan x = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Le reste c'est du calcul.

1.8 Equations trigonométriques

$$\cos x = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x = y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \tag{1.16}$$

$$\sin x = \sin y \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi - y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Exercice 1.8.1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes*

1. $\cos x = \frac{1}{2}$
2. $\cos(2x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$
3. $\cos(5x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin(3x) = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
5. $\sin(-x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

Exercice 1.8.2. *Résoudre dans $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}]$ les équations*

1. $\sin(2x + \dfrac{\pi}{3}) = 0$
2. $\cos(4x + \pi) = \cos(x + \dfrac{3\pi}{4})$

Exercice 1.8.3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations*

1. $\cos x = \sin x$
2. $\cos x = -\sin(\frac{x}{2})$
3. $\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

Solution. 1) On sait que $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ et l'équation devient donc

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

facile à résoudre

2) On peut utiliser le fait que $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(\frac{x}{2}) = \sin(-\frac{x}{2})$$

et résoudre comme dans le cours

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(-\frac{x}{2})$$

3) Se ramener à : $\cos = \cos \quad$ ou $\quad \sin = \sin$. Par exemple $\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$ ■

Exercice 1.8.4. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations*

1. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$
2. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$
3. $\cos^2 x = \sin^2 x$

Solution. On résout l'exercice 3 (Baraka). $\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$

Donc $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

c'est à dire $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

■

Exercice 1.8.5. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations*

1. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(3x)$
2. $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$
3. $\sin(2x) - \sin x = 0$
4. $\sin(\sin x) = \frac{1}{2}$

Solution. 1) Le premier exercice se résout comme le 3 de l'exercice précédent. On remplace $\cos^2 x - \sin^2 x$ par $\cos(2x)$ et l'équation devient

$$\cos(2x) = \cos(3x)$$

2) Ici on remplace $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$ et l'équation devient

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

on pose $t = \sin x$ et on obtient l'équation

$$2t^2 + t - 1 = 0, \qquad \Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-1-3}{4} = -1 \\ t_2 &= \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Puis on résout les équations

$$\begin{aligned} \sin x &= -1 \\ \sin x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3) $\sin(2x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} \sin x = 0 \\ ou \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

et on résout ces deux équations (faciles)

Autre méthode directe : On écrit :

$$\sin(2x) = \sin x$$

et donc les solutions sont $2x = x + 2k\pi$ ou $2x = \pi - x + 2k\pi$, c'est à dire $x = 2k\pi$ ou $3x = (2k+1)\pi$

Les solution sont

$$S = \left\{ 2k\pi, \quad (2k+1)\frac{\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4) $\sin(\sin x) = \dfrac{1}{2}$. On pose $t = \sin x$ et on résout

$$\sin t = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

dont les solutions sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Si on n'oublie pas que $t = \sin x \in [-1, 1]$, alors la seule solution qui convient et $\frac{\pi}{6}$.($\simeq 0.523\,60$). Il existe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Alors on termine en résolvant l'équation

$$\sin x = \sin\alpha$$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} t = \alpha + 2k\pi \\ ou \\ t = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

■

Exercice 1.8.6. *Résoudre dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \sin 3x + 1 - \cos 2x - \sin x = 0.$

Solution. On utilise les formules déjà vues

$$\begin{aligned} \sin 3x &= -4\sin^3 x + 3\sin x \\ \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

L'équation devient

$$-4\sin^3 x + 3\sin x + 1 - 1 + 2\sin^2 x - \sin x = 0$$

c'est à dire :

$$4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 2\sin x = 0$$

ou encore

$$(2\sin^2 x - \sin x - 1)\sin x = 0$$

d'où

$$\begin{cases} \sin x = 0 = \sin 0 \\ ou \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

Le reste est du calcul que je ferai après. ■

Chapitre 2

LES FONCTIONS REELLES

2.1 Définitions

Définition 2.1.1. *On appelle fonction réelle toute application f de $\mathbb{R}$ ou d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On écrit*

$$\begin{cases} f : D \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$$

Définition 2.1.2. *L'ensemble des réels (des points) pour lesquels la fonction est définie est appelé DOMAINE DE DEFINITION.*

Exemple 2.1.1. *La fonction $f(x) = x$ est définie pour tout réel. Son domaine de défintion est $D = \mathbb{R}$.*

Exemple 2.1.2. *La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie pour tout réel non nul. Son domaine de défintion est $D = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$*

Exercice 2.1.1. *Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$
2. $f_2(x) = \sqrt{x}$
3. $f_3(x) = \sqrt{|x|}$

2.2 Fonctions paires et impaires

Définition 2.2.1. *Une fonction f définie sur son domaine de définition D qu'on suppose symétrique par rapport à 0 (c'est à dire : $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$) est dite paire si*

$$\forall x \in D, \qquad f(-x) = f(x) \tag{2.1}$$

Exemple 2.2.1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

1. $f(x) = 1$ *est paire.*
2. $f(x) = x^2$ *est paire*

3. $f(x) = |x|$ *est paire*
4. $f(x) = \cos x$ *est paire.*

Définition 2.2.2. *Une fonction f définie sur son domaine de définition D qu'on suppose symétrique par rapport à 0 (c'est à dire : $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$) est dite impaire si*

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x) \tag{2.2}$$

Exemple 2.2.2. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

1. $f(x) = x$ *est impaire.*
2. $f(x) = \sin x$ *est impaire.*

Exercice 2.2.1. *Etudier la parité des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ selon les valeurs de n.*

Exercice 2.2.2. *Donner le domaine de définition et étudier la parité de la fonction définie par $f(x) = \tan x$*

Proposition 2.2.1.
1. *Toute somme finie de fonctions paires est une fonction paire.*
2. *Toute somme finie de fonctions impaires est une fonction impaire.*

Proposition 2.2.2. *Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, alors :*

1. *- Si f et g ont même parité, alors la fonction fg est paire.*
   - Si elles sont de parités opposées, alors la fonction fg est impaire
2. *L'application $\frac{1}{f}$, si elle existe, est de même parité que f*
3. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si f et g sont paires (respectivement impaires), $\alpha f + \beta g$ est paire (respectivement impaire)*
4. *Si f est bijective de D dans D et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire*
5. *Si f est paire alors gof est paire quelle que soit la fonction g*
6. *Si f est impaire, et si g est paire ou impaire, alors gof a la même parité que g.*

Exercice 2.2.3. *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité des fonctions $\frac{1}{f}$ (si elle existe), $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$, fog.*

2.3 Périodicité

Définition 2.3.1. *Une fonction f définie sur D est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que*

$$\forall x \in D \ , \ x + T \in D, \ \text{on a} \ \ f(x+T) = f(x) \tag{2.3}$$

On appelle la ***période*** *de f le plus petit T vérifiant (2.3). On dit que la fonction f est périodique de période T ou encore que la fonction f est $T-$périodique.*

Exemple 2.3.1. *La fonction $f(x) = \sin x$ vérifie $f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, elle est donc périodique de période 2π.*

Elle vérifie aussi $f(x + 4\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Mais on dit que la fonction sin *est périodique de période 2π.*

Proposition 2.3.1. *On a les propriétés suivantes*

1. *Si f et g sont $T-$périodiques, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est $T-$périodique pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
2. *Si f est $T-$ périodique, alors la fonction $\frac{1}{f}$, si elle existe, est $T-$ périodique.*
3. *Si f est $T-$périodique, alors, quelle que soit la fonction g, la fonction gof est $T-$périodique.*

Exercice 2.3.1. *Soit f une fonction périodique de période T. Soit g une fonction périodique de période $2T$. Que peut on dire des fonctions $\alpha f + \beta g$, fg,....*

2.4 Continuité

Soit f une fonction de domaine de définition D. Soit $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x - x_0| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \tag{2.4}$$

La fonction est dite continue si elle est continue en tout point de D.

Exemple 2.4.1. *La fonction $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Et tout polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Continuité en $x_0 = 0$: Soit $\varepsilon > 0$. Pour que $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ il suffit que $|x^2| \leq \varepsilon$ c'est à dire, il suffit que $|x| \leq \sqrt{\varepsilon}$

On prend alors $\eta = \sqrt{\varepsilon}$.

Pour $x_0 \neq 0$, Soit $\varepsilon > 0$. Pour que $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ il suffit que $|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$ ou encore $|x - x_0|\,|x + x_0| \leq \varepsilon$

Puisque x est censé être voisin de x_0 alors on peut supposer que $|x - x_0| \leq 1$ alors $|x| \leq |x_0| + 1$ et donc $|x + x_0| \leq |x| + |x_0| \leq 2\,|x_0| + 1$

Si donc $|x - x_0| \leq \eta$ alors $|x^2 - x_0^2| \leq \eta(2\,|x_0| + 1)$

Et pour que cette quantité soit inférieure à ε, il suffit que $\eta(2\,|x_0| + 1) \leq \varepsilon$, c'est à dire $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1}$

Il suffit donc de choisir η de sorte que $\eta(2\,|x_0| + 1) \leq \varepsilon$.

On prend alors $\eta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2\,|x_0| + 1})$

Et on peut faire le chemin inverse : départ $|x - x_0| \leq \eta$ ⇒...⇒....⇒...⇒....⇒... arrivée $|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$, ie, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Théorème 2.4.1. *1) Soient f et g deux fonctions continues en un point x_0 et λ un nombre réel. Alors les fonctions*

$$f + g, \quad \lambda f, \quad fg$$

sont continues en x_0.

2) Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.

Exercice 2.4.1. *Etudier la continuité des fonctions suivantes :*

1) $f(x) = \frac{1}{x}$, *au point* $x_0 = 3$;

2) $g(x) = x^2 + 2$ *au point* $x_0 = 1$;

3) $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$ *au point* $x_0 = 2$.

Solution. 1) $f(3) = \frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon > 0$, on part de : $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x-3}{3x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3|\left|\frac{1}{3x}\right| < \varepsilon$ (*)

Comme x est censé être voisin de 3 alors on peut supposer que $2 < x < 4$ et donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ou encore $\left|\frac{1}{3x}\right| < \frac{1}{6}$

Alors, en revenant à (*) pour que $|x-3|\left|\frac{1}{3x}\right| < \varepsilon$ il suffit que $|x-3|\frac{1}{6} < \varepsilon$ c'est à dire $|x-3| < 6\varepsilon$

On prend alors $\eta = 6\varepsilon$.

Attention!! Comme on a supposé $|x-3| < 1$

Il faut prendre $\eta = \min(6\varepsilon, 1)$

La fonction f est donc continue au point $x_0 = 3$.

....

2) $g(1) = 3$. Soit $\varepsilon > 0$, on part de : $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 + 2 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1|\,|x+1| < \varepsilon$ (*)

Comme x est censé être voisin de 1 alors on peut supposer que $0 < x < 2 \Leftrightarrow 1 < x+1 < 3 \Rightarrow |x+1| < 3$

On revient à (*) : Pour que $|x^2 + 2 - 3| < \varepsilon$ il suffit que $|x-1|.3 < \varepsilon$ c'est à dire il suffit que $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$

Le réel η recherché est donc $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Attention!! Comme on a supposé $|x-1| < 1$

Il faut prendre $\eta = \min(\frac{\varepsilon}{3}, 1)$

La fonction g est donc continue au point $x_0 = 1$.

..........................;

3) Ici $h(2) = 4$. Soit $\varepsilon > 0$, on part de : $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{x-1} - 4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+2-4x+4}{x-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-3x+6}{x-1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2|\frac{3}{|x-1|} < \varepsilon$ (*)

Comme x est censé être voisin de 2 alors on peut supposer que $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$ (ie $1.5 < x < 2.5$) et donc $\frac{1}{2} < x-1 < \frac{3}{2}$

En valeur absolue $\frac{1}{2} < |x-1| < \frac{3}{2}$. On inverse $\frac{2}{3} < \frac{1}{|x-1|} < 2$ et donc $2 < \frac{3}{|x-1|} < 6$

On revient à (*) : Pour que $\left|\dfrac{x+2}{x-1}-4\right|<\varepsilon$ il suffit que $|x-2|.6<\varepsilon$ *ie* $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{6}$
et le réel η recherché n'est autre que $\eta=\dfrac{\varepsilon}{6}$.
Attention!! Comme on a supposé $|x-1|<\dfrac{3}{2}$
Il faut prendre $\eta=\min(\frac{\varepsilon}{6},\frac{3}{2})$.
La fonction h est donc continue au point $x_0=2$. ■

2.5 Limites

On appelle intervalle pointé de centre x_0 toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme

$$I' =]x_0-h,x_0+h[\ -\{x_0\}=\ ]x_0-h,x_0[\ \cup\ ]x_0,x_0+h[\quad \text{avec } h>0$$

Exercice 2.5.1. *Montrer que*

$$I'=\{x\in\mathbb{R}\ \textit{tel que}\quad 0<|x-x_0|<h\}$$

Définition 2.5.1. *Soit f une fonction définie sur I'. On dit que f tend vers une limite l lorsque x tend vers x_0 si*

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta>0\quad \textit{tel que}\quad |x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

On écrit

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f=l$$

Exemple 2.5.1. *Soit f définie par*

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ \ x<3\\ 2(5-x) & si\ \ x>3\end{cases}$$

La fonction f n'est pas définie en $x_0=3$. Mais on peut montrer que $\lim\limits_{x\to3}f(x)=4$.

Exemple 2.5.2. *Montrer que $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$*

Définition 2.5.2 (Prolongement par continuité)**.** *Soit f une fonction continue sur $I'=]a,x_0[\cup]x_0,b[$. Supposons que f admet une limite l au point x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$.*

On définit une fonction g de la manière suivante

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & si\ \ x\neq x_0\\ l & si\ \ x=x_0\end{cases}$$

Alors la fonction g est continue sur $]a,b[$.

La fonction g s'appelle prolongement par continuité de f.

Exercice 2.5.2. *Donner les prolongements par continuité des fonctions suivantes aux points de discontinuité*

$$\begin{array}{lllll}
1) & f_1(x) & = & \dfrac{x^2-a^2}{x-a} \quad , & x_0 = a \\
2) & f_2(x) & = & \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} \quad , & x_0 = \dfrac{1}{2} \\
3) & f_3(x) & = & \dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1} \quad , & x_0 = -1 \\
4) & f_4(x) & = & \dfrac{\sin x}{x} \quad , & x_0 = 0 \\
5) & f_5(x) & = & \dfrac{\sin 4x}{\sin x} \quad , & x_0 = 0 \\
6) & f_6(x) & = & \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x} \quad , & x_0 = \dfrac{\pi}{4}
\end{array}$$

Solution. 1) Pour $x \neq a$, on a : $f_1(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a$. Quand x tend vers a cette quantité tend vers $2a$. La limite de f_1 ne peut être que $l = 2a$.

$$g(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x \neq a \\ 2a & \text{si } x = a \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on part de $|f_1(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow |x+a-2a| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon$
Et il suffit alors de prendre $\eta = \varepsilon$.

....

2) Pour $x \neq \dfrac{1}{2}$ on a : $f_2(x) = \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} = 3x+4$. Quand x tend vers $\dfrac{1}{2}$ cette quantité tend vers $\dfrac{11}{2}$. La limite de f_2 ne peut être que $l = \dfrac{11}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on part de $|f_2(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|3x+4-\dfrac{11}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|3x-\dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 3\left|x-\dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x-\dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et il suffit alors de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

....

3)

....

4)

....

5)

....

6) Pour $x \neq \dfrac{\pi}{4}$, on a : $f_6(x) = \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ On peut poser $t = x - \dfrac{\pi}{4}$ (c'est à dire $x = t + \dfrac{\pi}{4}$) et calculer la limite quand t tend vers 0 de la fonction

$$g(t) = \frac{1-\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})}{1-\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})}$$

$$g(t)=\frac{1-\sqrt{2}\cos(t+\dfrac{\pi}{4})}{1-\sqrt{2}\sin(t+\dfrac{\pi}{4})}=\frac{1-\sqrt{2}\left(\cos t\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin t\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\left(\sin t\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos t\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}=\frac{1-\cos t+\sin t}{1-\sin t-\cos t}$$

Rappel : $\forall z\in\mathbb{R}$ on a $\cos 2z=1-2\sin^2 z$, et $\sin 2z=2\sin z\cos z$. Donc si on prend $y=2z$ on obtient

$$\cos y=1-2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

d'où

$$1-\cos y=2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$$

et aussi

$$\sin y=2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1-\cos t+\sin t}{1-\sin t-\cos t}=\frac{2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)+2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)-2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\left(\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\left(\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Quand t tend vers 0 cette quantité tend vers -1. La limite de g ne peut donc être que $l=-1$. ∎

2.6 Opérations sur les limites

Théorème 2.6.1. *Soient f et g deux fonctions ayant chacune une limite en un point x_0. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $f+g)$, λf et fg ont une limite en x_0 et on a :*

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)=\lim_{x\to x_0}f+\lim_{x\to x_0}g,\qquad \lim_{x\to x_0}(\lambda f)=\lambda\lim_{x\to x_0}f\qquad,\ \lim_{x\to x_0}(fg)=(\lim_{x\to x_0}f)(\lim_{x\to x_0}g)$$

Si de plus $\lim\limits_{x\to x_0}g\neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ ont une limite en x_0 et on a :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}g},\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f}{\lim\limits_{x\to x_0}g},$$

2.7 Limite infinie et à l'infinie

Définition 2.7.1. *1) On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on écrit*

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \qquad 0 < |x - x_0| < \beta \Rightarrow f(x) > \alpha$$

On écrit : $$\lim_{x \to x_0} f = +\infty$$

2) On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \qquad x > \beta \Rightarrow |f(x) - l| < \alpha$$

On note

$$\lim_{x \to +\infty} f = l$$

Exercice 2.7.1. *1) Ecrire de même pour une fonction f qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0,*
2) Ecrire de même pour une fonction f qui tend vers l quand x tend vers $-\infty$.

2.8 Tableau des opérations sur les limites

Dans le tableau ci dessous x_0 peut être un point réel, $+\infty$ ou $-\infty$.
1) Addition et multiplication

$\lim_{x\to x_0} f$	$\lim_{x\to x_0} g$	$\lim_{x\to x_0} (f+g)$	$\lim_{x\to x_0} fg$
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ avec signe de l
$l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ avec signe de $-l$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	On ne peut rien dire	$-\infty$
0	$+$ ou $-\infty$	$+$ ou $-\infty$	On ne peut rien dire

2) Quotient

$\lim_{x\to x_0} \lvert g\rvert$	$\lim_{x\to x_0} \left\lvert \frac{1}{g} \right\rvert$
0 **	$+\infty$
$+\infty$	0

$\lim_{x\to x_0} \lvert f\rvert$	$\lim_{x\to x_0} \lvert g\rvert$	$\lim_{x\to x_0} \left\lvert \frac{f}{g} \right\rvert$
$l \neq 0$	0 **	$+\infty$
0	0	on ne peut rien dire
l	$+\infty$	0
$-\infty$	l **	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	on ne peut rien dire

** Attention : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, puisque $\sin x$ est borné entre -1 et $+1$, alors que le dénominateur croît indéfiniment vers $+\infty$.

Mais on ne peut pas parler de limite de son inverse $g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ en $+\infty$ puisque cette fonction n'est pas définie et donc non continue sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$.

Pour $x = k\pi$, $\sin x = 0$

Exercice 2.8.1. *On définit la fonction partie entière de x par : Si $n \leq x < n+1$ on pose :*

$$E(x) = n \tag{2.5}$$

1. *Montrer que la fonction $g(x) = x - E(x)$ est périodiqe de période $T = 1$.*
2. *Montrer que la fonction $h(x) = (-1)^{E(x)}$ est périodiqe et donner sa période.*
3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = (-1)^{E(x)}(x - E(x))$$

   (a) *Montrer que f est périodique et donner sa période.*
   (b) *Que peut on dire des points $M(x, f(x))$ et $M'(x+2, f(x+2))$?*
   (c) *Etudier la continuité de f et faire sa représentation graphique.*

Exercice 2.8.2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x+1) = f(x) + 1$$
2. *Que peut on dire des points $M(x, f(x))$ et $M'(x+1, f(x+1))$?*
3. *Etudier la continuité de f et faire sa représentation graphique.*

Exercice 2.8.3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

1. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x+1) = f(x) + 1$$
2. *Que peut on dire des points $M(x, f(x))$ et $M'(x+1, f(x+1))$?*
3. *Etudier la continuité de f et faire sa représentation graphique.*

Exercice 2.8.4. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = 2x^2 - x + 1 + \frac{a}{x} \ , \qquad (a \in \mathbb{R})$$

1. *Etudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.*
2. *Etudier la limite de f quand x tend vers 0.*

Exercice 2.8.5. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x} \ , \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

1. *Etudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.*
2. *Etudier la limite de f quand x tend vers 0.*

Exercice 2.8.6. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}\ , \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

1. *Etudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.*
2. *Etudier la limite de f quand x tend vers 1.*
3. *Peut on trouver un prolongement de f au point 1?*

Exercice 2.8.7. *Etudier les limites suivantes*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{x - \frac{\pi}{2}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan x + \sin x}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$

Exercice 2.8.8. *Soit f la fonction définie par*

$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$$

1. *Donner le domaine de définition de f*
2. *Simplifier $f(x)$ (Indication : Calculer $f^2(x)$)*

Exercice 2.8.9. *Résoudre dans $\mathbb{R}$:*

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2}$$

Exercice 2.8.10. *Etudier les limites des fonctions suivantes*

1. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$ *quand x tend vers 2, vers -5, vers $+\infty$, vers $-\infty$*

2. $\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2(x+5)}$ *quand* x *tend vers* 2, *vers* -5, *vers* $+\infty$, *vers* $-\infty$
3. $\dfrac{8x^3-27}{4x^2-9}$ *quand* x *tend vers* $\dfrac{3}{2}$, *vers* $-\dfrac{3}{2}$, *vers* $+\infty$, *vers* $-\infty$
4. $(x-2)(1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2})$ *quand* x *tend vers* 2, *vers* $+\infty$, *vers* $-\infty$
5. $\dfrac{x^2-1}{|x-2|}$ *quand* x *tend vers* 1, *vers* $+\infty$, *vers* $-\infty$
6. $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{ax}{(x^2-1)^2}$ *quand* x *tend vers* 1, *(discuter suivant les valeurs de* a*)*
7. $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{a}{x^3-1}$ *quand* x *tend vers* 1, *(discuter suivant les valeurs de* a*)*

2.9 Dérivabilité d'une fonction réelle

Définition 2.9.1. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* $[a,b]$, *soit* $x_0 \in]a,b[$. *On dit que la fonction* f *est différentiable au point* x_0 *s'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *et une fonction* $\alpha : h \to \alpha(h)$ *définie sur un intervalle* I *de centre* 0 *tels que :*

$$\forall h \in I,\ \ f(x_0+h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h \tag{2.6}$$

avec

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$$

L'application

$$h \to lh$$

est appelée fonction linéaire tangente de la fonction f *au point* x_0. *On la note* df_{x_0}.

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \ df_{x_0}(h) = lh$$

Théorème 2.9.1 (et définition)**.** *Si* f *est différentiable en* x_0 *alors la fonction*

$$h \to \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h *tend vers* 0. *Cette limite est le coefficient de la différentielle de* f *en* x_0.*Cette limite s'appelle dérivée de* f *au point* x_0, *et on dit que* f *est dérivable au point* x_0, *et on écrit* $f'(x_0) = l$. *La fonction*

$$\begin{cases} f' :]a,b[\to \mathbb{R} \\ \quad x \to f'(x) \end{cases}$$

est appelée fonction dérivée de f. *Ou plus simplement la dérivée de* f. *On écrit alors :*

$$\forall h \in I,\ \ f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha(h)h \tag{2.7}$$

Définition 2.9.2. *La fonction*

$$\begin{cases} f' :]a,b[\to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{cases}$$

est appelée fonction dérivée de f. Ou plus simplement la dérivée de f.

Théorème 2.9.2. *Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en ce point.*

La réciproque est fausse. Une fonction continue en un point x_0 n'est pas forcément dérivable en ce point.

Démonstration. $\forall h \in I$ on a $f(x_0+h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)h$
Posons $h = x - x_0$ alors $f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + \alpha(x-x_0)(x-x_0)$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. d'où la continuité.

Contre exemple : étudier la limite du rapport $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ pour la fonction $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$. ■

Exercice 2.9.1. *Calculer les dérivées des fonctions* $f_1(x) = c$, $f_2(x) = ax + b$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^n$, $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$

Pour la fonction $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$ on écrit :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x_0+h} - \dfrac{1}{x_0}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(x_0+h)\,x_0}}{h} = \frac{-1}{(x_0+h)\,x_0} \to \frac{-1}{x_0^2}$$

donc

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$$

ou encore

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}\ ,\ \ \forall x \neq 0$$

Théorème 2.9.3. *Soient f et g deux fonctions dérivables dans $]a,b[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :*

$$\begin{array}{rcll}
(f+g)'(x) &=& f'(x) + g'(x) & \\
(\lambda f)'(x) &=& \lambda f'(x) & \\
(fg)'(x) &=& f'(x); g(x) + f(x)g'(x) & \\
(\dfrac{1}{g})'(x) &=& -\dfrac{1}{(g'(x))^2} & \quad si\ g'(x) \neq 0 \\
(\dfrac{f}{g})'(x) &=& \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g'(x))^2} & \quad si\ g'(x) \neq 0
\end{array}$$

Démonstration. On démontre la 3ème identité, en utilisant (2.7) :

$$\begin{array}{rcl}
(fg)(x_0+h) &=& f(x_0+h)f(x_0+h) \\
&=& (f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha(h)h)\,(g(x_0) + g'(x_0)h + \beta(h)h) \\
&=& f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0))h + h(......) \\
&=& f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0))h + h\varphi(h)
\end{array}$$

d'où on tire : $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$. ceci étant vrai pour tout $x_0 \in]a, b[$ donc c'est vrai pour tout $x \in]a, b[$.

$$\begin{aligned}(\frac{1}{g})(x_0+h) &= \frac{1}{g(x_0+h)} = \frac{1}{g(x_0)+g'(x_0)h+\beta(h)h} \\ &= \frac{1}{g(x_0)}\frac{1}{1+\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}h+\dfrac{\beta(h)}{g(x_0)}h}\end{aligned}$$

Rappel

$$\text{Pour tout réel } q \text{ tel que } |q| < 1 \text{ on a : } \quad \frac{1}{1+q} = 1 - q + q\alpha(q) \text{ avec } \alpha(q) \to 0$$

On suppose que h est très petit on applique cette formule pour

$$q = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}h + \frac{\beta(h)}{g(x_0)}h$$

$$(\frac{1}{g})(x_0+h) = \frac{1}{g(x_0)}\left(1 - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}h + \varphi(h)h\right)$$

avec $\varphi(h) \to 0$ quand $h \to 0$. Il reste alors

$$(\frac{1}{g})(x_0+h) = \frac{1}{g(x_0)} - \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}h + \psi(h)h$$

avec $\psi(h) \to 0$ quand $h \to 0$, et on conclut que

$$(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

■

Théorème 2.9.4 (Exercice)**.** *Si f est une fonction dérivable sur $]a, b[$ et g dérivable en tout point de $f(\ ]a, b[)$ alors gof est dérivable sur $]a, b[$ et on a*

$$(gof)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

Exercice 2.9.2. *Calculer les dérivées des fonctions 1)* $\cos$, *2)* $\sin$, *3)* $\tan$, *4)* $\sin(x^2)$

Solution. 1) Pour $f(x) = \sin x$ (On utilise la formule : $\sin a - \sin b = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$)

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} \\ &= \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x_0+\frac{h}{2})}{h} \\ &= \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos(x_0+\frac{h}{2}) \ \to \ \cos x_0\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$$

La dérivée du sin est cos

2) Pour $f(x) = \cos x$ (On utilise la formule : $\cos a - \cos b = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$)

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h}\\ &= \frac{-2\sin(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \quad \to \sin x_0\end{aligned}$$

La dérivée du cos est $-\sin$.

3) Utiliser $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ et les formules de dérivabilité des quotients ci dessus.

4) Utiliser gof : $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$. ■

Exercice 2.9.3. *Soit f une fonction dérivable et en tout point de $]a,b[$. On suppose que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$.*

Posons $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Calculer la dérivée de la fonction fg et en déduire d'une manière directe la dérivée de $\dfrac{1}{f}$.

Théorème 2.9.5. *Soit une fonction*

$$f : \ ]a,b[\ \to \ ]c,d[$$

qu'on suppose dérivable en tout point de $]a,b[$ (avec $f'(x) \neq 0$ $\forall x$) et ***bijective de*** *$]a,b[$ dans $]c,d[$. La fonction réciproque*

$$f^{-1} : \ ]c,d[\ \to \ ]a,b[$$

existe et est dérivable en tout point de $]c,d[$ et on a $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Démonstration. On a $(fof^{-1})(y) = y$ donc $(fof^{-1})'(y) = 1$. On applique la formule donnant gof et on obtient $f'(f^{-1}(y)).(f^{-1})'(y) = 1$. Donc

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

■

Exercice 2.9.4. *Existence et calcul des dérivées des fonctions suivantes*

1) $f(x) = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$, *2)* $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, *3)* $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin x + +1}{2\sin^2 x - 1}$, *4)* $f(x) = \tan^3 x - 4\tan^2 x + 5\tan x - 1$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}}$, *6)* $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x^2+1}$, *7)* $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, *8)* $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$,

9) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}}$, *10)* $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Exercice 2.9.5. *Soit* $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Développer la fonction* f *pour l'écrire sous la forme d'un polynôme*
2. *Calculer la dérivée de la fonction* f *de deux manières différentes*
3. *Calculer les sommes*

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + kC_n^k + ... + nC_n^n \\ S_2 & = & 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + ... + k(k-1)C_n^k + ... + n(n-1)C_n^n \\ S_3 & = & 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + 4^2C_n^4 + ... + k^2C_n^k + ... + n^2C_n^n \end{array}$$

2.9.1 Equation de la tangente

Définition 2.9.3. *Soit* f *une fonction dérivable en un point* x_0. *On appelle tangente de* f *au point* x_0 *la droite passant par le point* $(x_0, f(x_0))$ *et de coefficient directeur* $f'(x_0)$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple 2.9.1. *1) Tangente de* $f(x) = x^2$ *au point* $x_0 = 0$, *puis* $x_0 = 1$.
2) sin, cos, tan *aux points usuels* $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Exemple 2.9.2. *Pour la fonction* $f(x) = \sin x$, *la tangente au point* $x_0 = \frac{\pi}{4}$ *est la droite d'équation :* $y = \frac{\sqrt{2}}{2} * (1 + x - \frac{\pi}{4})$

Chapitre 3

NOTIONS DE LOGIQUE

3.1 Axiome

Définition 3.1.1. *Un* ***axiome*** *est un énoncé supposé vrai a priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.*

Exemple 3.1.1. *Euclide a énoncé cinq axiomes "les cinq postulats d'Euclide" qui lui ont servi à construite la géométrie euclidienne. Le 5ème axiome dit que :*

Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite.

Exemple 3.1.2. *Les cinq axiomes de Peano constituent la base des entiers naturels. Le 5ème axiome dit que :*

Si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est un

*Cet axiome s'appelle "**l'axiome d'induction**" ou "**l'axiome de récurrence**"*

3.2 Proposition (Assertion, affirmation)

Définition 3.2.1. *Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux. 'Tout nombre premier est impair', 'tout carré de réel est un réel positif', la capitale de France est Nouakchout' sont des propositions. La pemière est fausse, la deuxième est vraie la troisième est fausse (malheureusement).*

Proposition, en mathématique veut dire qu'on propose quelque chose, mais celà reste à démontrer.

3.3 Théorème

Définition 3.3.1. *Un théorème est une proposition vraie.*

Remarque. Par abus de langage, le mot proposition désigne un théorème intermédiaire ou de moindre importance. Et on reserve le mot théorème aux grands résultats (Théorème de Pythagore, théorème de Thales, théorème de Gauss, théorème de Fermat ...) ■

3.4 Corollaire

Définition 3.4.1. *Un corollaire est un théorème qui découle directement d'un autre théorème.*

3.5 Lemme

Définition 3.5.1. *Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.*

3.6 Conjecture

Définition 3.6.1. *Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans qu'on arrive à la démontrer.*

Exemple 3.6.1.

1. *Conjecture de Fermat : Fermat a énoncé une conjecture vers les années 1660. Elle dit :*

   $$\begin{aligned} \textit{Si } n \textit{ est un entier naturel } n &\geq 3, \textit{ il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls } x, y \textit{ et } z \textit{ tels que} \\ x^n + y^n &= z^n \end{aligned}$$

   Ce résultat a été démontré en 1994 (plus de 300 ans de recherche) par le mathématicien Britanique Andrew Wiles. Depuis cette date le résultat s'appelle ***théorème de Fermat-Wiles.***

2. *Conjecture de Bertrand : Enoncé en 1845. Elle dit que*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ p \in \mathbb{N},\ \ \textit{nombre premier tel que } n < p < 2n.$$

   Conjecture dont on ne savait pas si elle était vraie ou fausse. En 1850 Tchebychev a démontré qu'elle était vraie. Paul Erdos en donna une démonstration très simple en 1932.

3.7 Définition

Définition 3.7.1. *Une définition est un énoncé (comme celui ci) dans lequel on décrit les particularités d'un objet.*

3.8 Equivalence logique

Définition 3.8.1. *Deux propositions sont équivalentes si elles sont simultanément vraies et simultanément fausses. On construit la table de vérité comme suit*

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3.9 Négation d'une proposition

Soit P une proposition. On définit sa **négation** $\bar{P}$ ou $nonP$, ou $7P$ par sa table de vérité

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exercice 3.9.1. *La négation des propositions "Le chat est blanc", "f est la fonction nulle", "$x \geq 0$", "Il fait froid".*

3.10 Les connecteurs logiques "ET" et "OU"

Définition 3.10.1. *Soient P et Q deux propositions. On définit les propositions "P ou Q", notée $P \vee Q$, et "P et Q", notée $P \wedge Q$, par les tables de vérité ci dessous*

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarque. - $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses
- $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies ■

Théorème 3.10.1. *Soit P une proposition, alors*

$$P \wedge P \Leftrightarrow P \quad et \qquad P \vee P \Leftrightarrow P$$

Démonstration. Il suffit de voir les tables de vérité :

P	P	$P \wedge P$
V	V	V
F	F	F

P	P	$P \vee P$
V	V	V
F	F	F

■

Théorème 3.10.2. *Soient P et Q deux propositions. Alors*

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$$
$$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$$

On le voit clairement sur les tables de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Exercice 3.10.1. *Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que "**ou**" et "**et**" sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un par rapport à l'autre.*

$$\begin{cases} \textit{Commutativité :} \ P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P \quad , \quad P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \\ \textit{Associativité :} \ (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \quad , \ (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \\ \textit{Distributivité} \ \ (P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad , \quad (P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \end{cases}$$

Solution. La table de vérités. On le fait ci dessous pour la première équivalence de distributivité. Comparer les valeurs logiques des colonnes 5 et 8.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

■

Exercice 3.10.2. *Donner la négation des propositions suivantes "Tu racontes cette histoire à Ahmed et Aicha", "Tu racontes cette histoire à Ahmed ou à Aicha"*

3.11 Implication logique

Définition 3.11.1. *Soient P et Q deux propositions. On définit l'implication logique $P \Rightarrow Q$ par sa table de vérité suivante :*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque. "Faux $\Rightarrow$ Faux" est une proposition vraie. Exemple :

$$3 > 7 \quad \text{faux}$$

En ajoutant 8 aux deux membres , on obtient

$$11 > 15 \quad \text{faux}$$

"Faux $\Rightarrow$ Vrai" est une proposition vraie. Exemple :

$$\begin{cases} 3 = 4 \\ 2 = 1 \end{cases} \quad \text{faux}$$

En ajoutant les deux identités membre à membre, on obtient

$$5 = 5 \quad \text{vrai}$$

■

Théorème 3.11.1. *Soient P et Q deux propositions. Alors on a*

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\bar{P} \vee Q)$$

Démonstration. La table de vérité le montre bien

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

■

Théorème 3.11.2 (Transitivité de l'implication)**.** *Soient P, Q et R trois propositions. Alors*

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\ ) \;\Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

3.12 Négation, Contraposée et Réciproque d'une implication

Théorème 3.12.1 (Négation d'une implication)**.** *Soient P et Q deux propositions. Alors on a*

$$\overline{P \Rightarrow Q} \;\Leftrightarrow\; P \wedge \bar{Q}$$

Théorème 3.12.2 (Contraposée d'une implication)**.** *Soient P et Q deux propositions. La contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est l'implication $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$. On a :*

$$(P \Rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

Définition 3.12.1 (La réciproque d'une implication)**.** *Soient P et Q deux propositions. La réciproque de l'implication $(P \Rightarrow Q)$ est l'implication $(Q \Rightarrow P)$.*

3.13 Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Soit E un ensemble. La proposition "Quel que soit x élément de E on a ....", "Pour tout élément de E, on a ...", s'écrit "$\forall x \in E$, on a ..."

La proposition "Il existe un élément x dans E vérifiant ...", s'écrit "$\exists x \in E$ tel que ..."

La proposition "Il existe **un et un seul** élément x dans E vérifiant ...", s'écrit "$\exists! x \in E$ tel que ..."

Définition 3.13.1. - *$\forall$ s'appelle le quantificateur universel.*

- *$\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.*

Exercice 3.13.1. *Ecrire avec les quantificateurs les propositions suivantes :*

1. *f est la fonction nulle.*
2. *Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois.*
3. *f est l'identité de $\mathbb{R}$.*
4. *Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.*
5. *f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.*
6. *L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.*
7. *Pour tout point M du plan P, M est sur le cercle C de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω est R.*

Théorème 3.13.1. *Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité dépendent des éléments x de E. Alors on a :*

1. $\overline{(\forall x \in E, P(x))} \;\Leftrightarrow\; \left(\exists x \in E, \overline{P(x)}\right)$
2. $\overline{(\exists x \in E, P(x))} \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x \in E, \overline{P(x)}\right)$

Exemple 3.13.1. *Soit f une fonction*

$$(f \text{ est continue en } x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \;/\; \forall x \in D_f,\;\; (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

Sa négation s'écrit :

$$(f \text{ est non continue en } x_0) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 \;/\; \exists x \in D_f,\;\; (|x - x_0| < \eta \;\text{ et }\; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon))$$

Théorème 3.13.2. *Soient E un ensemble et $P(x), Q(x)$ deux propositions dont les valeurs de vérité dépendent des éléments x de E. Alors on a :*

1. $(\forall x \in E,\; P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow\; (\forall x \in E,\; P(x)) \wedge (\forall x \in E,\; Q(x))$
2. $(\forall x \in E,\; P(x)) \vee (\forall x \in E,\; Q(x)) \;\Rightarrow\; (\forall x \in E,\; P(x) \vee Q(x))$ *Réciproque fausse.*
3. $(\exists x \in E,\; P(x) \wedge Q(x)) \;\Rightarrow\; (\exists x \in E,\; P(x)) \wedge (\exists x \in E,\; Q(x))$ *Réciproque fausse.*
4. $(\exists x \in E,\; P(x) \vee Q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists x \in E,\; P(x)) \vee (\exists x \in E,\; Q(x))$

Remarque. On peut permuter les quantificateurs de même nature. Mais on peut pas permuter des quantificateurs différents.

$$(\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\,,\quad x^m \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N},\quad x^m \in \mathbb{R})$$

$$\left(\forall m \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}\,,\quad \sqrt{m} = x\right) \text{ non équivalent à } \left(\exists x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N},\;\; \sqrt{m} = x\right)$$

La première proposition est vraie alors que la deuxième est fausse. ■

Remarque. Les propositions suivantes ne sont pas équivalentes

P : $(\exists x \in \mathbb{R}/ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/ \sin x = 0)$

Q : $(\exists x \in \mathbb{R}/ \cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0)$ ■

Exercice 3.13.2. *Soit f et g deux fonctions réelles*

1. *Ecrire en utilisant les quantificateurs logiques et les implications la proposition suivante : " f est une fonction monotone sur $\mathbb{R}$."*
2. *Ecrire en utilisant les quantificateurs logiques et les implications la proposition suivante : "La fonction produit fg est une fonction nulle"*

Solution. 1) f est monotone sur $\mathbb{R}$, veut dire que f est soit croissante, soit décroissante. Ceci s'écrit

$$\big(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (a\leq b\Rightarrow f(a)\leq f(b))\ \big)\ \ \mathbf{ou}\ \ \big(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\ ,\quad (a\leq b\Rightarrow f(a)\geq f(b))\ \big)$$

et non pas

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (\ a\leq b\Rightarrow (f(a)\leq f(b)\ \ \mathbf{ou}\quad f(a)\geq f(b)))$$

2) "La fonction produit fg est une fonction nulle" $\Leftrightarrow$ $(\forall x\in\mathbb{R},\ (fg)(x)=0)\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)g(x)=0)\Leftrightarrow$ $(\forall x\in\mathbb{R},\ (f(x)=0\ \ \mathbf{ou}\ \ g(x)=0))$ ∎

Remarque. On ne peut pas distribuer $\forall$ sur **et**. On ne peut pas distribuer $\exists$ sur **ou**.

P : $\forall n\in\mathbb{N}$, (n est pair **ou** n est impair) Proposition VRAIE

Q : ($\forall n\in\mathbb{N}$, n est pair) **ou** ($\forall n\in\mathbb{N}$, n est impair) Proposition FAUSSE

P veut dire que tout entier naturel est soit pair soit impair. (Et elle a raison de le dire)

Q veut dire que les entiers naturels sont tous pairs ou tous impairs. (Et c'est faux bien sûr) ∎

Chapitre 4

LES GRANDS TYPES DE RAISONNEMENT

4.1 Le raisonnement déductif

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant

Lorsque P est une proposition vraie, et $(P \Rightarrow Q)$ est une proposition vraie alors Q est une proposition v

4.2 Le raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que sa négation $\bar{P}$ est vraie. Et à partir de là on montre qu'on obtient une proposition Q fausse.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{P} \Rightarrow Q$
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F

Le seul cas où avec un raisonnement mathématique suivi juste, c'est à dire $\overline{P} \Rightarrow Q$ est vraie, et le résultat obtenu Q est faux est dans la 3ème ligne. $\overline{P}$ est donc faux et alors P est vrai.

Quand $\left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)$ est une proposition vraie, et Q une proposition fausse alors on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple 4.2.1. *$\sqrt{2}$ est irrationnel : La proposition est $P : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*
Supposons $\overline{P}$:$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ vraie
Faisons un raisonnement mathématique sans faute $\overline{P} \Rightarrow .. \Rightarrow .. \Rightarrow .. \Rightarrow ..Q$ où on trouvera une proposition Q fausse.
$\overline{P} \Rightarrow Q_1 : \left(\exists p, q \text{ premiers entre eux tels que } \quad \frac{p}{q} = \sqrt{2}\right)$

$Q_1 \Rightarrow Q_2$: $\left(\exists p, q \text{ premiers entre eux tels que } \dfrac{p^2}{q^2} = 2\right)$
$Q_2 \Rightarrow Q_3$: $(\exists p, q \text{ premiers entre eux tels que } p^2 = 2q^2)$
$Q_3 \Rightarrow Q_4$: $(\exists p, q \text{ premiers entre eux, } \exists r \in \mathbb{N}, \text{ tels que } p^2 = 2q^2 \text{ et } p = 2r)$
$Q_4 \Rightarrow Q_5$: $(\exists p, q \text{ premiers entre eux, } \exists r \in \mathbb{N}, \text{ tels que } 4r^2 = 2q^2 \text{ et } p = 2r)$
$Q_5 \Rightarrow Q_6$: $(\exists p, q \text{ premiers entre eux, } \exists r \in \mathbb{N}, \text{ tels que } 2r^2 = q^2 \text{ et } p = 2r)$
$Q_6 \Rightarrow Q_7$: $(\exists p, q \text{ premiers entre eux, } \exists r \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N} \text{ tels que } 2r^2 = q^2 \text{ et } p = 2r \text{ et } q = 2s)$
$Q_7 \Rightarrow Q_8$: *"Les nombres p et q sont premiers entre eux et pairs"*
$Q = Q_8$ *est une proposition fausse.*
Récapitulons : $\overline{P}$ *vraie,* $(\overline{P} \Rightarrow Q)$ *vraie mais* Q *est fausse. Donc* $\overline{P}$ *est fausse, ie,* P *est vraie.*

4.3 Le raisonnement par contraposée

Le schéma est simple :

> Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est une proposition vraie, il faut et il suffit de montrer que la proposition $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ est vraie.

4.4 Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence intervient quand il s'agit de démontrer qu'un résultat est vrai pour tout entier naturel. Une proposition dont la véracité dépend des entiers naturels n se note P_n.

Exemple 4.4.1. $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, \;\; 2^n + 1$ *est impair.*

Exemple 4.4.2. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=0,n} i$

$P_n : \forall n \in \mathbb{N}, \;\; S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

4.4.1 Le principe du raisonnement par récurrence

Pour montrer, par récurrence,qu'un résultat est vrai on procède comme suit :

1. La proposition est vraie pour un entier $n_0 \in \mathbb{N}$,(en général $n_0 = 0$ *ou* 1 ...). On écrit P_{n_0} est vraie
2. Si la proposition est vraie pour un certain n alors elle est vraie pour son successeur $n+1$. On écrit $(P_n \Rightarrow P_{n+1})$ est vraie
3. Conclusion
$$\forall n \geq n_0, \quad P_n \text{ est vraie}$$

Démonstration. (du deuxième exemple ci dessus).
On suit le principe énoncé

1. Il est clair que pour $n = 0$ on a d'une part $S_0 = 0.$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$
P_0 est donc vraie.

2. Supposons que P_n est vraie, c'est à dire $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

   Montrons qu'alors P_{n+1} est vraie, $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   On a $S_{n+1} = 0+1+2+3+...+n+(n+1) = (0+1+2+3+...+n)+(n+1) = S_n+(n+1)$
   On utilise le fait que P_n est vraie, et on écrit alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

3. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

■

Exercice 4.4.1. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum\limits_{i=0,n} i^2$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 4.4.2. *Trouver et (prouver) une formule semblable pour* $Q_n = \sum\limits_{i=0,n} i^4$

Exercice 4.4.3. *Démontrer par récurrence la formule*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 4.4.4. *Montrer par récurrence que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = n^2$$

Exercice 4.4.5. *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ 3n^2 + 3n + 6$ *est un multiple de* 6.

Exercice 4.4.6. *Soit* $x \geq 0\forall$. *Démontrer par récurrence que*

Exercice 4.4.7. *Pour choisir un ministre parmi trois candidats A,B,C, un roi oriental les a soumis à une épreuve : sur la tête de chacun d'eux on place une boule qu'il ne voit pas, mais il voit la boule placée sur la tête des deux autres. Les candidats savent que les boules sont choisies parmi cinq boules, 3 noirs et 2 blanches. Le premier qui dira la couleur de la boule qu'il a sur sa tête sera ministre ; s'il se trompe il aura la tête tranchée. L'un d'eux, A, qui voit une boule noire sur la tête de chacun des deux autres, affirme avec sûreté, voyant que les autres ne disent rien :"J'AI UNE BOULE NOIRE". Expliciter son raisonnement.*

Exercice 4.4.8. *Trois jeunes gens Halima, Hamid et Said ont prononcé les phrases suivantes :*
Halima : "J'ai 22 ans ; j'ai 2 ans de moins que Hamid ; j'ai un an de plus que Said".
Hamid : "Je ne suis pas le plus jeune ; Said et moi avons 3 ans d'écart".
Said : "Je suis plus jeune que Halima ; Halima a 23 ans ; Hamid a 3 ans de plus que Halima".
Peut on déterminer l'âge de ces jeunes sachant qu'une et une seule assertion de chacun des 3 est fausse ?

Chapitre 5

LES SUITES NUMERIQUES

5.1 Définitions et propriétés

Définition 5.1.1. *On appelle suite numérique toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note*

$$\begin{cases} u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \to u(n) \end{cases}$$

On note u_n et on parle de suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement de suite $u_n = ...$

Exemple 5.1.1. *- La suite $u_n = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite dite constante*
- La suite définie par $v_n = 2n + 4$ est une suite numérique.

Définition 5.1.2. *On appelle suite récurrente d'ordre 1 toute suite telle que le terme u_n dépend du terme précédent, c'est à dire u_{n-1} :*

$$\begin{cases} u_n = f(u_{n-1}) \quad \forall n \geq 1 \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

On appelle suite récurrente d'ordre $p \geq 1$ toute suite telle que le terme u_n dépend des p termes précédents, c'est à dire u_{n-1}, u_{n-2}, ... , u_{n-p}.

$$\begin{cases} u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, ..., u_{n-p}) \quad \forall n \geq p \\ u_0, u_1, ..., u_{p-1} \quad \text{donnés} \end{cases}$$

Exemple 5.1.2. *1) $u_n = 2u_{n-1} + 3$ est une suite récurrente d'ordre 1, avec u_0 donné.*
2) $v_n = v_{n-1} - v_{n-2}^2$ est une suite récurrente d'ordre 2, avec v_0 et v_1 donnés.
3) $w_n = nw_{n-1} + w_{n-2}$ est une suite récurrente d'ordre 2, avec w_0 et w_1 donnés.

5.2 Suites convergentes

5.2.1 Limites finies

Définition 5.2.1. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l \in \mathbb{R}$, et on note*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l$$

si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \ , \ |u_n - l| < \varepsilon$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, et que la suite est convergente.

Exemple 5.2.1. - *La suite $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.*
- *La suite $u_n = 3$ tend vers 3.*

Définition 5.2.2. *Un suite est dite divergente si elle n'est pas convergente.*

Exemple 5.2.2. - *La suite définie par son terme général $u_n = n$ est divergente.*
- *La suite définie par son terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.*

Théorème 5.2.1. *Si une suite converge alors sa limite est unique.*

Démonstration. (exercice) ■
Remarque. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$,
2. $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,
3. $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

■

Définition 5.2.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

1. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si, il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$$

2. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si, il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n$$

3. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq C$$

Théorème 5.2.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. (exo) ■
Remarque. La réciproque est fausse. En effet, la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente. ■

Proposition 5.2.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes, telles que*

$$\lim u_n = l \quad \text{et } \lim v_n = l'$$

alors :

1. *La suite* $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et on a :*

$$\lim(u_n + v_n) = l + l'$$

2. *La suite* $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et on a :*

$$\lim(u_n v_n) = ll'$$

3. *Si de plus* $l' \neq 0$, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, *alors la suite* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et on a :*

$$\lim(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{l}{l'}$$

Démonstration. (exo) ■

5.2.2 Limites infinies

Définition 5.2.4. *Une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$, *on note* $\lim u_n = +\infty$, *si*

$$\forall M > 0, \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \qquad (n \geq n_M) \Rightarrow u_n > M$$

Définition 5.2.5. *Une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$, *on note* $\lim u_n = -\infty$, *si*

$$\forall M > 0, \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \qquad (n \geq n_M) \Rightarrow u_n < -M$$

5.2.3 Règles de calculs des limites des suites numériques

Propriété 5.2.1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques telles que* $\lim u_n = l_1$ *et* $\lim v_n = l_2$ *avec* $-\infty \leq l_1, \, l_2 \leq +\infty$

$\lim u_n$ / $\lim v_n$	$-\infty$	l_1	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
l_2	$-\infty$	$l_1 + l_2$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Tableau de $\lim(u_n + v_n)$

$\lim u_n$ / $\lim v_n$	$-\infty$	l_1	0	l_1	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
l_2	$+\infty$	$l_1 l_2$	0	$l_1 l_2$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
l_2	$-\infty$	$l_1 l_2$	0	$l_1 l_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Tableau de $\lim(u_n v_n)$

Les signes ? indiquent que la forme est indéterminée. Il faut faire une étude plus approfondie.

Exercice 5.2.1. *Dresser des tableaux semblables pour les suites* $(u_n - v_n)$ *et* $\frac{u_n}{v_n}$.

5.3 Suites monotones

Définition 5.3.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.*

1. *$(u_n)_n$ est dite croissante si*
$$\forall n, \ \ u_{n+1} \geq u_n$$
2. *Elle est dite décroissante si*
$$\forall n, \ \ u_{n+1} \leq u_n$$
3. *Elle est dite constante si*
$$\forall n, \ \ u_{n+1} = u_n.$$

Théorème 5.3.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.*

1. *Si $(u_n)_n$ est croissante (à partir d'un certain rang) et majorée alors elle convergente.*
2. *Si $(u_n)_n$ est décroissante (à partir d'un certain rang) et minorée alors elle convergente.*

Démonstration. (exo pour l'instant) ■

Exercice 5.3.1. *Etudier la convergence de la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 1}{2} \quad \textit{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

5.4 Suites adjacentes

Définition 5.4.1. *Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante et vérifient*
$$\lim(u_n - v_n) = 0$$

Exemple 5.4.1. *Les suites $u_n = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$ sont adjacentes. u_n est croissante et v_n décroissante. De plus $u_n - v_n = -\dfrac{2}{n} \to 0$.*

Proposition 5.4.1. *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

5.5 Suites arithmétiques

Définition 5.5.1. *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique si*

$$\exists r \in \mathbb{R}, \quad \textit{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé la raison de la suite.

Exemple 5.5.1. *1) Toute suite constante est une suite arithmétique de raison* $r = 0$.

2) La suite $u_n = n$ *est une suite arithmétique de raison* $r = 1$: $u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1$

3) La suite $u_n = n - 1$ *est une suite arithmétique de raison* $r = -1$.

Proposition 5.5.1. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite arithmétique de raison* r. *Alors :*

1. *La suite* $(u_{n+1} - u_n)_n$ *est constante égale à* r,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
3. *Si on pose* $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ *alors*

$$S_n = \frac{(2u_0 + nr)(n + 1)}{2}$$

Démonstration. (exos) ■

5.6 Suites géométriques

Définition 5.6.1. *On dit qu'une suite* $(u_n)_n$ *est une suite géométrique si*

$$\exists q \in \mathbb{R}, \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

q *est appelé la raison de la suite.*

Exemple 5.6.1. *1) Toute suite constante est une suite géométrique de raison* $q = 1$.

2) La suite $u_n = 2^n$ *est une suite géométrique de raison* $q = 2$: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$

3) La suite $u_n = 2^{-n}$ *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{2}$: $u_{n+1} = 2^{-n-1} = 2^{-1} \times 2^{-n} = \frac{1}{2}u_n$

Proposition 5.6.1. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite géométrique de raison* q. *Alors :*

1. *La suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ *est constante égale à* q,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n$
3. *Si on pose* $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, *on a :*

$$\begin{cases} S_n = (n + 1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Exercice 5.6.1. *Etudier les suites suivantes : arithmétiques ? géométriques ?, ni l'un ni l'autre, donner le premier terme de la suite.*

1. $u_{n+1} = u_n + 2, \ \ u_0 = -5$
2. $u_n = n - 5$
3. $u_n = \dfrac{2n + 1}{3n - 5}$

4. $u_n = \dfrac{-4n^2+3n+3}{n^2-n+4}$
5. $u_n = 2n - \sqrt{'n^2-3n+1}$
6. $u_n = \dfrac{4^n-3^n}{4^n+2^n}$
7. $u_n = \dfrac{1}{3^n}$
8. $u_n = 2\dfrac{5^{2n+1}}{7^{3n+3}}$

Exercice 5.6.2. *Soit u_n la suite définie par*

$$\textit{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1. *Démontrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$
2. *En déduire la limite de la suite u_n.*

Exercice 5.6.3. *Soit u_n la suite définie $u_{n+1} = \dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$, $u_0 \geq 1$ donné.*

1. $u_0 \geq 1$
   (a) *Justifier que la suite u_n est bien définie et montrer que $u_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *Etudier le sens de variation de u_n (croissante ? décroissante ? ....)*
   (c) *Etudier le cas où $u_0 = 1$*
2. $u_0 > 1$
   (a) *On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$, montrer que la suite v_n est bien définie (ie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$)*
   (b) *Montrer que la suite v_n est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$*
   (c) *Calculer v_n et u_n en fonction de n (et u_0)*

Exercice 5.6.4. *Soit u_n la suite définie $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$, $u_0 \geq 1$ donné.*

1. *Que peut on dire de la suite si $u_0 = -1$?*
2. *On suppose dans la suite de l'exo que $u_0 \neq -1$*
   (a) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$. $u_n \neq -1$*
   (b) *On pose $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+1}$. Montrer que la suite v_n est une suite géométrique*
   (c) *Calculer v_n puis u_n en fonction de v_0 et de n*
   (d) *En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$*

3. *Pour quelles valeurs de* u_0 *peut-on définir une suite vérifiant pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Exercice 5.6.5. *Soit la suite* $(u_n)_n$ *définie par :* $u_1 = 2$ *et pour* $n \geq 1$ $u_{n+1} = 3u_n - 2$. *On considère une suite* v_n, *définie pour* $n \geq 1$, *par* $v_n = u_n + b$ $(b \in \mathbb{R})$.

1. *Déterminer* b *pour que la suite* $(v_n)_n$ *soit une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.*
2. *Ecrire* v_n *en fonction de* n
3. *En déduire* u_n *en fonction* n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 + nx \leq (1+x)^n$$

Exercice 5.6.6 (Suites arithmético-géométriques)**.** *Soit pour tout* $n \geq 1$, $u_n = au_{n-1} + b$, *avec* u_0 *donné ; et* a *et* b *deux réels donnés.*

1. *Trouver un réel* α *tel que la suite* v_n *définie par*

$$v_n = u_n - \alpha$$

   soit une suite géométrique. Donner sa raison q *et son premier terme* v_0 *en fonction des données* (u_0, a, b)
2. *En déduire* u_n *en fonction des données* (u_0, a, b) *et* n.
3. *Calculer la somme* $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ *en fonction des données* (u_0, a, b) *et de* n.

Exercice 5.6.7. *Soit* u_n *la suite définie par* $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$

Montrer que $\lim u_n = +\infty$

Chapitre 6

LES FONCTIONS USUELLES

6.1 La fonction logarithme

On considère la fonction
$$\begin{cases} f\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{t} \end{cases}$$
L'aire comprise entre l'axe des x, la courbe et les deux verticales $x=1$ et $x=b$ est donnée par
$$h(b)=\int_1^b \frac{1}{t}dt$$

Proposition 6.1.1. *La fonction h vérifie :*

1. $h(1)=0$,
2. *Pour tout réel* $a>0$, *on a :* $\quad h(\frac{1}{a})=-h(a)$,
3. *Pour tous réels* $a>0$ *et* $b>0$, *on a :* $\quad h(ab)=h(a)+h(b)$.

Exercice 6.1.1. *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\forall a>0$, *on a :* $h(a^n)=nh(a)$

Exercice 6.1.2. *Montrer que* $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\forall a>0$, *on a :* $h(a^r)=rh(a)$

Exercice 6.1.3. *Montrer que* $\forall r\in\mathbb{R}$, $\forall a>0$, *on a :* $h(a^r)=rh(a)$

Solution. Posons $I_n=[n,n+1]$. Montrer que
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{N-1}\geq h(N)\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{N}$$
Il est clair que
$$[1,+\infty[=I_1\cup I_2\cup ...\cup I_n\cup ...$$
et
$$h(N)=\int_1^N \frac{1}{t}dt=\int_1^2\frac{1}{t}dt+\int_2^3\frac{1}{t}dt+...+\int_{N-1}^N\frac{1}{t}dt$$
on utilise la fait que
$$\frac{1}{n}\geq\int_n^{n+1}\frac{1}{t}dt\geq\frac{1}{n+1}\quad \text{pour}\ \ n=1,2,....,N-1$$
■

6.1.1 Etude de la fonction h

Domaine de définition

La fonction h est définie pour tout $x > 0$.

$$D_h =]0, +\infty[$$

Limite aux bornes

Limit à l'infinie : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \exists n \in \mathbb{N}$, tel que $x \geq 2^n$, donc $h(x) \geq h(2^n) = nh(2) \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Limite quand x tend vers 0^+
On pose $x = \dfrac{1}{t}$ et alors $h(x) = h(\dfrac{1}{t}) = -h(t) \to -\infty$

Etude du sens de variation

La dérivée de h est donnée par (par définition)

$$h'(x) = \frac{1}{x} > 0, \qquad \forall x > 0$$

h est une fonction strictement croissante.
h est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.2. *On a l'inégalité suivante :*

$$h(x) \leq x - 1 \leq x, \qquad \forall x > 0$$

Démonstration. On considère la fonction $f(x) = x - h(x)$
Domaine de définition $D_f =]0, +\infty[$
Sens de variation de la fonction f : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} \begin{cases} > 0 & \text{pour } x > 1 \\ = 0 & \text{pour } x = 1 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 \\ < 0 & \text{pour } x < 1 \end{cases}$$

Le minimum de la fonction f étant 1 atteint pour $x = 1$ alors $\forall x > 0,\ f(x) > 1$, c'est à dire $h(x) \leq x - 1 \leq x$. ∎

Démonstration. On a l'inégalité suivante :

$$\frac{h(x)}{x} \leq 2\frac{\sqrt{x} - 1}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}, \qquad \forall x > 0$$

On utilise le fait que $h(x) \leq x - 1$, en prenant $\sqrt{x}$ à la place de x on obtient

$$h(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$$

ou encore puisque $h(\sqrt{x}) = h(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}h(x)$

$$\frac{1}{2}h(x) \leq \sqrt{x} - 1$$

c'est à dire

$$\frac{h(x)}{x} \leq 2\frac{\sqrt{x}-1}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}, \qquad \forall x > 0$$

■

Asymptotes

Puisque $\lim_{x\to 0} h(x) = -\infty$, alors la droite $x = 0$ est une asymptote verticale.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}, = 0$, alors la courbe de h a une direction parabolique suivant l'axe des x.

Définition 6.1.1. *On appelle fonction logarithme népérien la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par :*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Théorème 6.1.1. *La fonction* ln *vérifie*

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\forall x, y \in\ ]0, +\infty[$,
3. $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in\ ]0, +\infty[$.
4. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
5. *elle est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$*, négative à gauche de* 1 *et positive à droite de* 1.
6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

Exercice 6.1.4. *Soit* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable telle que* $u(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ *et* $f(x) = \ln(u(x))$

Montrer que f *est dérivable et on a :*

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

6.2 Fonction exponentielle

La fonction

$$\begin{array}{rcl} \ln & : &]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x & \to & \ln x \end{array}$$

est une bijection. Elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Définition 6.2.1. *La fonction exponentielle, notée* $\exp(x)$ *ou* e^x*, est la fonction réciproque de la fonction* $\ln(x)$.

$$\begin{array}{rcl} \exp & : & \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ x & \to & \exp(x) = e^x \end{array}$$

Théorème 6.2.1. *La fonction* exp *vérifie*

1. $\exp(0) = 1$ *et* $\exp(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(x + y) = \exp(x). \exp(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,
3. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
4. $(\exp)'(x) = \exp(x)$ *(Sa dérivée est elle même),*
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty,$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$

Démonstration.

1. Puisque $\ln 1 = 0$ alors la réciproque donne $\exp(0) = 1$
1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, puisque ln est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe $z, t \in]0, +\infty[$ tels que $x = \ln z$ et $y = \ln t$
   De plus $x + y = \ln z + \ln t = \ln zt$
   ou encore $\exp(x + y) = zt = \exp(x) \exp(y)$
2. Il suffit de prendre dans le point 2) $y = -x$. $\exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$
   comme $\exp(x - x) = \exp(0) = 1$ alors $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
3. Si on note le ln par h l'exp sera notée h^{-1}. On applique la définition de la dérivée de la fonction réciproque et on obtient :

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{h^{-1}(x)}} = h^{-1}(x)$$

■

Exercice 6.2.1. *Soit* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable et* $f(x) = \exp(u(x))$
Montrer que f *est dérivable et on a :*

$$f'(x) = u'(x) \exp(x)$$

6.3 Fonctions trigonométriques

6.3.1 La fonction sin

Nous avons déjà donné la définition du sinus d'un nombre réel. Et nous savons aussi que

$$\begin{array}{rcl} \sin(x + 2\pi) & = & \sin x \\ \sin(-x) & = & -\sin x \end{array}$$

On voit sur la figure que lorsque x parcourt l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ le sin parcourt l'intervalle $[-1,1]$. Que la fonction sin est strictement croissante dans cet intervalle. On peut énoncer le

Théorème 6.3.1. *La fonction* sin *définie par*

$$\begin{array}{rcl} \sin & : & [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]. \\ x & \to & \sin x \end{array}$$

est une bijection. Sa dérivée est $\sin'(x) = \cos x$

6.3.2 La fonction cos

Théorème 6.3.2. *La fonction* cos *définie par*

$$\begin{array}{rcl} \sin & : & [0,\pi] \to [-1,1]. \\ x & \to & \cos x \end{array}$$

est une bijection. Sa dérivée est $\cos'(x) = -\sin x$

6.3.3 La fonction tan

La fonction tangente définie au chapitre 1 par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \notin \left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle vérifie :

$$\begin{array}{rcl} \tan(x+\pi) & = & \tan x \\ \tan(-x) & = & -\tan x \end{array}$$

On l'étudie alors sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}[$

La dérivée de la fonction tan s'obtient en dérivant $\dfrac{\sin}{\cos}$:

$$\begin{array}{rcl} \tan' x & = & \dfrac{\sin'(x)\cos x - \cos'(x)\sin x}{\cos^2 x} \\ & = & \dfrac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \\ & = & 1+\tan^2 x \\ & = & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{array}$$

La fonction tan est donc strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

Limites aux bornes : $\tan 0 = 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \text{"}\frac{1}{0^+}\text{"} = +\infty$$

La verticale $x \to \frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale.

Proposition 6.3.1. *La fonction* tan *définie par*

$$\begin{array}{rcl} \tan & : &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \\ x & \to & \tan x \end{array}$$

est une bijection.

6.3.4 La fonction arcsin

Comme la fonction sin est une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-1, 1]$, alors elle admet une fonction réciproque. On la note $\arcsin(x)$.

Définition 6.3.1. *La fonction* arcsin *est la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} \arcsin & : & [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \to & y = \arcsin(x) \end{array}$$

telle que $\sin y = x$.

Elle vérifie

$$\begin{array}{rcl} \sin(\arcsin(x)) & = & x \\ \arcsin(\sin(x)) & = & x \end{array}$$

Domaine de défintion et d'étude

Comme $\sin(\arcsin(-x)) = -x = -\arcsin(\sin(x))$
alors la fonction arcsin est impaire. Il suffit alors de l'étudier sur l'intervalle $[0, 1]$.
Aux bornes $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Sens de variation

Posons $f(x) = \sin x$. Alors $\arcsin(x) = f^{-1}(x)$
et

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1})'(x) & = & \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} \\ & = & \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \\ & = & \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} \\ & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction arcsin est donc strictement croissante dans $[0, 1]$.

6.3.5 La fonction arccos

Comme la fonction cos est une bijection entre $[0, \pi]$ et $[-1, 1]$, alors elle admet une fonction réciproque. On la note $\arccos(x)$.

Définition 6.3.2. *La fonction* arccos *est la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} \cos & : & [-1,1] \to [0,\pi] \\ x & \to & y = \arccos x \end{array}$$

telle que $\cos y = x$.

Elle vérifie

$$\begin{array}{rcl} \cos(\arccos(x)) & = & x \\ \arccos(\cos(x)) & = & x \end{array}$$

Domaine de défintion et d'étude

Aux bornes $\arcsin(-1) = \pi$, $\arcsin(1) = 0$

Sens de variation

Posons $f(x) = \cos x$. Alors $\arccos(x) = f^{-1}(x)$
et

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1})'(x) & = & \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{-\sin(f^{-1}(x))} \\ & = & -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} \\ & = & -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}} \\ & = & \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction arccos est donc strictement décroissante dans $[-1, 1]$.

Exercice 6.3.1. *Montrer que*

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

6.3.6 La fonction arctan

Comme la fonction tan est une bijection entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque. On la note $\arccos(x)$.

Définition 6.3.3. *La fonction* arctan *est la fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} \arctan & : & \mathbb{R} \to]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\\ x & \to & y = \arctan x \end{array}$$

telle que $\tan y = x$.

Elle vérifie

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \\ \arctan(\tan(x)) &= x \end{aligned}$$

Domaine de défintion et d'étude

La fonction arctan est impaire.
On l'étudie dans $[0, +\infty[$.
$\arctan 0 = 0$
$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
La droite horizontale $y = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe.

Sens de variation

Posons $f(x) = \tan x$. Alors $\arctan(x) = f^{-1}(x)$
et

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(1 + \tan^2(f^{-1}(x)))} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + [\tan(\arctan(x))]^2} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

La fonction arctan est donc strictement croissante dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.3.2. *Pour* $x \neq 0$, *calculer* $\arctan(\frac{1}{x})$ *en fonction de* $\arctan x$

Solution. On suppose pour simplifier que $x > 0$. Posons $y = \arctan(x)$. On sait que $\tan(\dfrac{\pi}{2} - y) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-y)}{\cos(\frac{\pi}{2}-y)} = \frac{\cos(y)}{\cos(y)} = \dfrac{1}{\tan y} = \dfrac{1}{x}$

Donc $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - y = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$ ou encore

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

■

Chapitre 7

Equations différentielles

7.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

7.1.1 Généralités

Définition 7.1.1. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \tag{7.1}$$

où $a(x), b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions, avec a n'étant pas la fonction nulle.

Définition 7.1.2. *I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel les fonctions $a(x), b(x)$ et $c(x)$ sont définies, une fonction f est dite solution de cette équation sur I lorsque f est définie et dérivable sur I et :*

$$\forall x \in I, \quad a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$

Exemple 7.1.1. *La fonction $f(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{2})$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + xy = 0$*

Définition 7.1.3. *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre* ***homogène*** *toute équation du type*

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \tag{7.2}$$

Proposition 7.1.1. *L'ensemble H des solutions sur un intervalle I d'une équation homogène est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}(I, \mathbb{R})$.*

Le sous espace H est de dimension 1.

Démonstration. 1) La fonction nulle est solution : $0 \in H$,
2) $\forall f, g \in H$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in H$, en effet
$f \in H \Leftrightarrow a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0$
$g \in H \Leftrightarrow a(x)g'(x) + b(x)g(x) = 0$

D'où en multipliant la première identité par α, et la deuxième par β et en ajoutant membre à membre on obtient :

$$\alpha\left[a(x)f'(x) + b(x)f(x)\right] + \beta\left[a(x)g'(x) + b(x)g(x)\right] = 0$$

c'est à dire
$$a(x)\left(\alpha f'(x)+\beta g'(x)\right)+b(x)\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)=0$$
ou encore
$$a(x)\left(\alpha f+\beta g\right)'(x)+b(x)\left(\alpha f+\beta g\right)(x)=0$$
qui que veut dire que $\alpha f+\beta g\in H$.

$\dim(H)=1$

Soient $f,g\in H$, montrons que $f=\lambda g$.

On suppose (pour simplifier l'écriture) que g ne s'annule pas.
$$\begin{array}{rcl} af'+bf & = & 0 \quad \forall x\in I \\ ag'+bg & = & 0 \quad \forall x\in I \end{array}$$
d'où
$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$$
et encore
$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0$$
c'est à dire
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=0$$
et donc
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lambda \text{ cte}$$
d'où
$$f=\lambda g$$
■

7.1.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène

On suppose que les fonctions a et b sont définies et continues sur un intervalle I. Comme on suppose que a ne s'annule pas sur cet intervalle.
$$(H) \quad a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$$
L'équation s'écrit
$$y'(x)=\omega(x)y(x)\ , \qquad \text{avec} \qquad \omega(x)=-\frac{b(x)}{a(x)}$$

Soit $G(x)$ une primitive de la fonction $\omega(x)$. Alors la fonction $\exp(G(x))$ est solution de (H). Comme le sous espace des solutions est de dimension 1 alors la solution générale de l'équation homogène (H) est de la forme :
$$y(x)=k\exp(G(x)), \quad \text{avec } k \text{ constante} \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7.1.2. *1) Pour a et b constantes, $\omega = -\dfrac{b}{a}$ constante. Donc $G(x) = \omega x$ et*

$$y(x) = k\exp(-\frac{b}{a}x)$$

2) $a(x) = x$, $b(x) = 1$, alors $\omega = -\dfrac{1}{x}$. Un primitive de ω est donné par $G(x) = -\ln x$ et donc

$$y(x) = k\exp(-\ln x) = \frac{k}{x}$$

7.1.3 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E) \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

Etape 1 : On résout l'équation homogène associée

$$(H) \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

par la méthode déjà présentée pour obtenir sa solution qu'on note $y_h(x)$

Etape 2 : Première méthode : Solution particulière

On cherche une solution particulière $y_p(x)$ (si on arrive à la remarquer facilement).

Alors la solution de notre équation (E) est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Etape 2 : Deuxième méthode : Variation de la constante

La solution du problème homogène est de la forme

$$y_h(x) = k\exp(G(x))$$

Alors la technique consiste à faire varier la constante k et écrire

$$y(x) = k(x)\exp(G(x))$$

et remplacer dans l'équation (E) : $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ pour obtenir :

$$a(x)\left(k'(x) + k(x)G'(x)\right)\exp(G(x)) + b(x)k(x)\exp(G(x)) = c(x)$$

Comme $G'(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$ alors il reste $a(x)k'(x)\exp(G(x)) - b(x)k(x)\exp(G(x)) + b(x)k(x)\exp(G(x)) = c(x)$

c'est à dire

$$\begin{aligned} a(x)k'(x)\exp(G(x)) &= c(x) \\ k'(x) &= \frac{c(x)}{a(x)}\exp(-G(x)) \end{aligned}$$

et on cherche une primitive $K(x)$ de la fonction $\dfrac{c(x)}{a(x)}\exp(-G(x))$

Alors la fonction solution générale s'écrit

$$y(x) = (K(x) + \lambda)\exp(G(x)) \tag{7.3}$$

7.1.4 Equations avec condition initiale

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ce problème s'appelle EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE DU PREMIER ORDRE AVEC CONDITION INITIALE ou PROBLEME DE CAUCHY.

La donnée de la condition initiale nous permet de déterminer la constante λ de la solution générale.

On écrit $y(x_0) = (K(x_0) + \lambda)\exp(G(x_0)) = y_0$ et on en tire la valeur réelle de λ.

Exemple 7.1.3. *Résoudre*

$$\begin{cases} y' + xy = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1) $a(x) = 1$, $b(x) = x$, $c(x) = x$ *donc*

$$G(x) = \int(-x)dx = -\frac{x^2}{2} \quad (\textit{une primitive quelconque de} -\frac{b}{a})$$

$K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} \exp(-G(x))dx = \int x\exp(\frac{x^2}{2})dx = \exp(\frac{x^2}{2})$ *(une primitive quelconque de* $x\exp(\frac{x^2}{2})$*)*

On remplace dans (7.3) et on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= (\exp(\frac{x^2}{2}) + \lambda)\exp(-\frac{x^2}{2}) \\ &= 1 + \lambda\exp(-\frac{x^2}{2}) \end{aligned}$$

Puis on utilise la condition initiale $y(0) = 0 = 1 + \lambda\exp(0) = 1 + \lambda$

D'où $\lambda = -1$ *et donc*

La solution s'écrit alors

$$y(x) = 1 - \exp(-\frac{x^2}{2})$$

Exercice 7.1.1. *Résoudre les équations suivantes*

1. $y' + y = 2\sin x$ *(Chercher une solution particulière sous la forme* $\alpha\cos x + \beta\sin x$*)*
2. $y' + y = x^2$ *(Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du 2ème degré))*
3. $y' + y = 3x^2 + x - 4$
4. $y' - \frac{3}{x}y = x$
5. $xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 2$
6. $y' + y = xe^x$ *(Chercher une solution particulière sous la forme* $(c_1x + c_0)e^x$*)*

7. $y' - y = xe^x$ *(Chercher une solution particulière sous la forme* $(c_2x^2 + c_1x + c_0)e^x$*)*
8. $xy' + y = xe^x$
9. $y' + \sin(x)y = 2\sin x$
10. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *sur l'intervalle* $]0, 1[$
11. $(1 + x^2)y' + 4x = 0$
12. $y' + ay = t^n e^{bt}$ *(avec a et b des constantes. Etudier les cas $a \neq -b$ et $a = -b$)*

Solution. Des exercices sont du même genre, on va donc donner juste des indications pour certaisn

1. $y' + y = \sin x$.

   Etape 1 : La solution y_h du problème homogène (c'est à dire sans second membre) $y' + y = 0$ est donnée par
   $$y_h(x) = ke^{-x}, \quad k \text{ constante}$$
   Etape 2 : On utilise les deux méthodes.

   (a) On peut chercher la solution particulière sous la forme du second membre, c'est à dire de la forme $y_p(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$
   On remplace dans l'équation $y_p' + y_p = \sin x$ devient
   $$-\alpha\sin x + \beta\cos x + \alpha\cos x + \beta\sin x = \sin x$$
   c'est à dire
   $$(\beta - \alpha)\sin x + (\beta + \alpha)\cos x = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   D'où $\begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \beta + \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \beta = -\alpha \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$
   La solution particulière est donc $y_p(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2}$
   et la solution du problème générale est $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ c'est à dire
   $$y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + ke^{-x}\ , \quad k \text{ constante}$$

   (b) Par la méthode de la variation de la constante. Posons alors
   $$y(x) = k(x)e^{-x} \tag{7.4}$$
   donc $y'(x) = (k'(x) - k(x))\, e^{-x}$. On remplace dans l'équation et on obtient
   $$k'(x) = \sin x . e^x$$
   et donc (exercice)
   $$k(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x + c, \ c \text{ constante}$$
   On remplace dans (7.4) et on obtient
   $$y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + ce^{-x}, \quad c \text{ constante}$$

2. $y' + y = x^2$ (Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du 2ème degré)
3. $y' + y = 3x^2 + x - 4$ (Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du 2ème degré)
4. $y' - \dfrac{3}{x}y = x$. Il faut préciser que $a(x) = 1$, $b(x) = -\dfrac{3}{x}$ et $c(x) = x$
   Il faut donc travailler dans un intervalle où toutes ces fonctions sont continues, c'est à dire, $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.
   Etape 1 : Problème homogène $y_h' - \dfrac{3}{x}y_h = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y_h'}{y_h} = \dfrac{3}{x}$ et donc $\ln|y_h| = 3\ln|x| + c$, c'est à dire$y_h(x) = kx^3$
   Etape 2 : On fait varier la constante k et on cherche la solution générale sous la forme
   $$y(x) = k(x)x^3$$
   On remplace $y' = k'x^3 + 3kx^2$ dans l'équation et on obtient
   $$k'x^3 + 3kx^2 - 3kx^2 = x$$
   c'est à dire
   $$k' = \frac{1}{x^2}$$
   d'où
   $$k(x) = -\frac{1}{x^2} + c$$
   et enfin
   $$y(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + c\right)x^3 = -x + cx^3$$
5. $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 2$, $a(x) = x, b(x) = 2, c(x) = 4x^2$
   Etape 1 : Problème Homogène $xy_h' + 2y_h = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y_h'}{y_h} = -\dfrac{2}{x} \Leftrightarrow \ln|y_h| = -2\ln|x| + c = \ln\dfrac{1}{x^2} + c \Leftrightarrow y_h(x) = \dfrac{k}{x^2}$
   Etape 2 : On fait varier k et on écrit
   $$y(x) = \frac{k(x)}{x^2}$$
   $$y'(x) = \frac{k'x^2 - 2xk}{x^4} = \frac{k'}{x^2} - \frac{2k}{x^3}$$
   d'où
   $$y(x) = \frac{x^4 + c}{x^2} = x^2 + \frac{c}{x^2} \quad \text{c constante}$$
   La constante c s'obtient ici puisque on connait une condition initiale $y(1) = 2$, c'st à dire $1^2 + \dfrac{c}{1^2} = 2$, donc $c = 1$. La solution de l'équation différentielle est donc
   $$y(x) = \frac{x^4 + c}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

6. $y' + y = xe^x$
   Etape 1 : Elle donne $y_h(x) = ke^{-x}$
   Etape 2 : Variation de la constante : $y(x) = k(x)e^{-x}$
   $y' = (k' - k)e^{-x}$ d'où $y' + y = k'e^{-x} = xe^x \Leftrightarrow k'(x) = xe^{2x}$ et on cherche une primitive de la fonction xe^{2x} par partie on trouve $(\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{2x} + c$
   Ce qui donne

$$\begin{aligned} y(x) &= \left((\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{2x} + c \right) e^{-x} \\ &= (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})e^{x} + ce^{-x} \quad \text{c constante} \end{aligned}$$

7. $y' - y = xe^x$
   Etape 1 : $y_h(x) = ke^x$
   Etape 2 :

   (a) Par recherche de solution particulière. Comme le second membre contient e^x on cherche une solution particulière sous la forme $P_2(x)e^x$, c'est à dire

$$y_p(x) = \left(c_2x^2 + c_1x + c_0\right) e^x$$

$$y_p' = \left(2c_2x + c_1 + c_2x^2 + c_1x + c_0\right) e^x$$

$$\begin{aligned} y_p' - y_p &= xe^x \Leftrightarrow \left(2c_2x + c_1\right) e^x = xe^x \\ &\Leftrightarrow 2c_2x + c_1 = x \end{aligned}$$

   ce qui donne

$$c_1 = 0 \text{ et } c_2 = \frac{1}{2}$$

   et la solution générale est donc

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= ke^x + (\frac{1}{2}x^2 + c_0)e^x \\ &= (\frac{1}{2}x^2 + C)e^x \end{aligned}$$

   (b) Par variatiton de la constante. On cherche y sous la forme

$$y(x) = k(x)e^x$$

$$y' = (k' + k)e^x$$

   On remplace dans l'équation,

$$y' - y = xe^x \Leftrightarrow (k' + k)e^x - ke^x = xe^x$$

d'où

$$k'(x) = x$$

d'où

$$k(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

et la solution y est donc

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) e^x$$

8. $xy' + y = xe^x$

   Etape 1 : $xy'_h + y_h = 0$ donne d'où

   $$y_h(x) = \frac{k}{x}$$

   Etape 2 : Variation de la constante,

   $$y(x) = \frac{k(x)}{x}$$

   $$y' = \frac{xk' - k}{x^2} = \frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2}$$

   $$\begin{aligned} xy' + y &= xe^x \\ x\left(\frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2}\right) + \frac{k(x)}{x} &= xe^x \end{aligned}$$

   D'où

   $$k'(x) = xe^x$$

   On intégre par parties

   $$k(x) = (x-1)e^x + c$$

   et donc

   $$\begin{aligned} y(x) &= \frac{k(x)}{x} = \frac{(x-1)e^x + c}{x} \\ &= (1 - \frac{1}{x})e^x + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

9. $y' + \sin(x)y = 2\sin x$

   Etape 1 : Homogène, $y' + \sin(x)y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y'_h}{y_h} = -\sin x \Leftrightarrow \ln y_h = \cos x + c \Leftrightarrow y_h = ke^{\cos x}$.

   Etape 2 : Solution particulière : On remarque facilement que la fonction constante $y_p(x) = 2$ est une solution.
   Et donc la solution générale est $y(x) = 2 + ke^{\cos x}$, k constante quelqconque.
   Etape 2 (Par variation de la constante) : $y(x) = k(x)e^{\cos x}$.

   $$y' = (k' - k\sin x)e^{\cos x}$$

$$\begin{aligned} y' + \sin(x)y &= 2\sin x \\ (k' - k\sin x)e^{\cos x} + k\sin x e^{-\cos x} &= 2\sin x \\ k'e^{\cos x} &= 2\sin x \\ k'(x) &= 2\sin x e^{-\cos x} \end{aligned}$$

On voit que le deuxième terme est presque de la forme $2u'e^u$. D'où

$$k(x) = 2e^{-\cos x} + c$$

et donc

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(2e^{-\cos x} + c\right)e^{\cos x} \\ &= 2 + ce^{\cos x} \end{aligned}$$

10. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $]0,1[$
Etape 1 : Le problème homogène a pour solution

$$y_h(x) = kx \ k \text{ constante}$$

Etape 2 : Par variation de la constante, on cherche la solution y sous la forme

$$y(x) = k(x)x$$

$$y' = xk' + k$$

$y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow xk' + k - k = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow k'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
D'où

$$k(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

et la solution générale est donc

$$y(x) = x\arcsin x + cx, \quad \text{c constante}$$

11. $(1+x^2)y' + 4x = 0 \Leftrightarrow y'(x) = \dfrac{-4x}{1+x^2} = -2\dfrac{2x}{1+x^2} = -2\dfrac{u'}{u}$ (avec $u = 1+x^2$)
D'où

$$y(x) = -2\ln(1+x^2) + c$$

12. $y' + ay = t^n e^{bt}$
Etape 1 : Sans second membre $y_h' + ay_h = 0$ donne

$$y_h(t) = ke^{-at}$$

Etape 2 : On fait varier la constante

$$y(t) = k(t)e^{-at}$$

D'où
$$y' = (k' - ak)e^{-at}$$
et on remplace dans l'équation
$$\begin{aligned} y' + ay &= t^n e^{bt} \\ (k' - ak)e^{-at} + ak(t)e^{-at} &= t^n e^{bt} \end{aligned}$$
donne
$$k'e^{-at} = t^n e^{bt}$$
c'est à dire :
$$k'(t) = t^n e^{(a+b)t}$$
Cas $a + b = 0$ (ie $a = -b$)
$$k'(t) = t^n$$
d'où
$$k(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + c$$
et donc la solution est
$$\begin{aligned} y(t) &= k(t)e^{-at} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} t^{n+1} + c \right) e^{-at} \end{aligned}$$
Cas $a + b \neq 0$ (ie $a \neq -b$)
$$k'(t) = t^n e^{(a+b)t}$$
et par des calculs (.....) on peut montrer que $k(t)$ peut s'écrire sous la forme
$$k(t) = P_n(t)e^{(a+b)t} + c$$
où P_n est un polynome de degré n.

■

7.2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Ce sont des équations de la forme
$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

7.2.1 EDL du second ordre homogènes à coefficients constants

Il s'agit des équations de la forme

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7.5}$$

Si on considère que la solution est de la forme$y(x) = e^{\lambda x}$ alors en remplaçant

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

dans (7.5) on obtient

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

C'est le polynôme caractéristique de l'équation. On résout cette équation algèbrique pour obtenir les deux racines λ_1 et λ_2.

Etude des cas ;

Cas où les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et distinctes :
Dans ce cas toutes les solutions de l'équation homogène (7.5) sont de la forme

$$y(x) = Ce^{\lambda_1 x} + De^{\lambda_2 x}$$

Cas où les racines λ_1 et λ_2 sont réelles et identiques (racine double $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$) :
Dans ce cas toutes les solutions de l'équation homogène (7.5) sont de la forme

$$y(x) = (Cx + D)e^{\lambda x}$$

Cas où les racines λ_1 et λ_2 sont complexes (donc conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$) :
Dans ce cas toutes les solutions de l'équation homogène (7.5) sont de la forme

$$y(x) = (C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x))\, e^{\alpha x}$$

7.2.2 EDL du second ordre à coefficients constants avec second membre

Soit à résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = d(x)$$

Etape 1 : On résout le problème (homogène) pour obtenir $y_h(x)$.
Etape 2 : On cherche une solution particulière y_p et on écrit alors

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

La solution particulière est en général difficile à trouver. Selon la forme de second membre on peut imaginer sa forme.

Cas où le second membre est un polynôme

Si le second membre est un polynôme P_n de degré $n \in \mathbb{N}$, on cherche la solution sous la forme d'un polynôme de degré $n, n+1$ ou $n+2$. Voir les détails ci dessous

1. $c \neq 0$, alors $y_p(x) = Q_n(x)$ de degré n
2. $c = 0$ et $b \neq 0$, alors $y_p(x) = Q_{n+1}(x)$ de degré $n+1$
3. $c = b = 0$, alors $y_p(x) = Q_{n+2}(x)$ de degré $n+2$

Exemple 7.2.1. *Résoudre*

Cas où le second membre est de la forme $De^{\alpha x}$ (D et α constantes)

Là aussi on a trois cas possibles pour la solution particulière

1. α non racine du polynôme caractéristique, alors
$$y_p(x) = \frac{D}{a\alpha^2 + b\alpha + c} e^{\alpha x}$$
2. α racine simple du polynôme caractéristique, alors
$$y_p(x) = \frac{D}{2a\alpha + b} x e^{\alpha x}$$
3. α racine double du polynôme caractéristique, alors
$$y_p(x) = \frac{D}{2a} x^2 e^{\alpha x}$$

Exercice 7.2.1. *Résoudre*

$$\begin{aligned} y'' + 4y' &= x^2 - 2x \\ y'' - 6y' + 9y &= 5e^{3x} \end{aligned}$$

Cas où le second membre est de la forme $P_n(x)e^{\alpha x}$ (P_n polynôme de degré n)

1. α non racine du polynôme caractéristique, alors $y_p(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}$
2. α racine simple du polynôme caractéristique, alors $y_p(x) = Q_{n+1}(x)e^{\alpha x}$
3. α racine double du polynôme caractéristique, alors $y_p(x) = Q_{n+2}(x)e^{\alpha x}$.

Cas où le second membre est de la forme $e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

1. $\alpha + i\omega$ non racine du polynôme caractéristique, alors
$$y_p(x) = e^{\alpha x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x)e^{\alpha x}$$
2. $\alpha + i\omega$ racine du polynôme caractéristique, alors
$$y_p(x) = xe^{\alpha x}(C\cos\omega x + D\sin\omega x)e^{\alpha x}$$

Exercice 7.2.2. *Résoudre :*

1. $y" - 4y = x^2 - 2x$
2. $y" + y' + y = x^2 + x + 1;$
3. $y" + 4y = e^x \sin^2 x;$
4. $y" + 3y = cos^3 x;$
5. $y" + y' - 2y = e^x + 3e^{2x};$
6. $y" - 2y' + 2y = \sin x + \cos x.e^x + x^2$
7. $y" - y' = (x+1)e^x$
8. $y" - 3y\prime + 2y = e^x + \cos x$

7.2.3 Méthode de la variation des constantes

La solution du problème homogène $ay" + by' + cy = 0$ est (on le rappelle ici de la forme, en posant $\Delta = b^2 - 4ac$)

$$y_h(x) = \begin{cases} Ce^{\lambda_1 x} + De^{\lambda_2 x}, & \text{si } \Delta > 0 \\ (Cx + D)e^{\lambda x}, & \text{si } \Delta = 0 \\ (C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x))\, e^{\alpha x} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Dans les trois cas on considère les constantes C et D comme des fonctions. On cherche alors la solution du problème générale sous la forme

$$y(x) = \begin{cases} C(x)e^{\lambda_1 x} + D(x)e^{\lambda_2 x}, & \text{si } \Delta > 0 \\ (C(x)x + D(x))e^{\lambda x}, & \text{si } \Delta = 0 \\ (C(x)\cos(\beta x) + D(x)\sin(\beta x))\, e^{\alpha x} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

Etudions le premier cas, $\Delta > 0$.
$y(x) = C(x)e^{\lambda_1 x} + D(x)e^{\lambda_2 x}$,
$y'(x) = (C'(x) + \lambda_1 C(x))\, e^{\lambda_1 x} + (D'(x) + \lambda_2 D(x))\, e^{\lambda_2 x}$
$y"(x) = (C"(x) + 2\lambda_1 C'(x) + \lambda_1^2 C(x))\, e^{\lambda_1 x} + (D"(x) + 2\lambda_2 D'(x) + \lambda_2^2 D(x))\, e^{\lambda_2 x}$
$ay" + by' + cy = d(x)$ devient

$$\begin{aligned} & a\left(C"(x) + 2\lambda_1 C'(x) + \lambda_1^2 C(x)\right) e^{\lambda_1 x} + a\left(D"(x) + 2\lambda_2 D'(x) + \lambda_2^2 D(x)\right) e^{\lambda_2 x} \\ & +b\left(C'(x) + \lambda_1 C(x)\right) e^{\lambda_1 x} + b\left(D'(x) + \lambda_2 D(x)\right) e^{\lambda_2 x} \\ & +cC(x)e^{\lambda_1 x} + cD(x)e^{\lambda_2 x} \\ = & \; d(x) \end{aligned}$$

c'est à dire $aC"e^{\lambda_1 x} + aD"e^{\lambda_2 x} + \lambda_1(a+b)C'e^{\lambda_1 x} + \lambda_2(a+b)D'e^{\lambda_2 x} + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)C(x)e^{\lambda_1 x} + (a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)D(x)e^{\lambda_2 x} = d(x)$
$(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) = 0$ et $(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) = 0$
Il reste

$$aC"e^{\lambda_1 x} + aD"e^{\lambda_2 x} + \lambda_1(a+b)C'e^{\lambda_1 x} + \lambda_2(a+b)D'e^{\lambda_2 x} = d(x)$$

Chapitre 8

Calcul des primitives

8.1 Définition et propriétés

Définition 8.1.1. *Soit f une fonction. On dit qu'une fonction F est une primitive de f si la fonction F est dérivable et sa dérivée est la fonction f*

$$F'(x) = f(x)$$

8.2 Primitives des fonctions usuelles

Exemple 8.2.1. *$f(x) = a$ constante admet pout primitives les fonctions $F(x) = ax + c$*

Exemple 8.2.2. *$f(x) = x^r$ admet pour primitive $F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$, pour tour $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$.*

f	$x^r,\ r \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
F	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\ln x + c$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
	$\mathbb{R}$	$x > 0$		

Exercice 8.2.1. *Calculer les primitives des fonction suivantes et donner les domaines de définition*

1. $f_1(x) = \cos^2(x)$
2. $f_2(x) = \sin^2(x)$
3. $f_3(x) = \cos^3(x)$
4. $f_4(x) = \sin^3(x)$
5. $f_5(x) = \tan x$
6. $f_6(x) = \sin^4 x \cos x$
7. $f_7(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{x^n + 1}}$

Chapitre 9

Calcul intégral

9.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 9.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intevalle $[a,b]$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$, l'aire comprise entre la courbe de la fonction f, l'axe des x et les deux verticales $x=a$ et $x=b$. On la note*

$$\int_a^b f(x)dx$$

9.2 Propriétés

On rappelle ici, sans démonstration, les propriétés les plus utilisées de l'intégrale.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. Linéarité. Si f et g sont deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intevalle $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b \lambda f(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

3. **Relation de Chasles :** Si de plus $c \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. **Intégration par parties :**

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

avec :

$$[U(x)]_a^b = U(b) - U(a)$$

5. **Changement de variable :** Soient I un intervalle et

$$\begin{cases} u : I \to [a,b] \\ t \to u(t) \end{cases}$$

une fonction **dérivable et bijective**. Alors si on pose $x = u(t)$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)dt$$

Théorème 9.2.1. *Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann, qu'on suppose positive pour simplifier. On suppose que f admet une primitive F, $(F'x) = f(x))$ alors*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Démonstration. Posons $G(x) = \int_a^x f(t)dt$

$$\begin{aligned} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} M_h &= \sup\{f(t), \quad t \in [x, x+h]\} \\ m_h &= \inf\{f(t), \quad t \in [x, x+h]\} \end{aligned}$$

alors

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} \in [m_h, M_h]$$

Et quand h tend vers 0, M_h et m_h tendent tous les deux vers $f(x)$, et $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h}$ tend vers $G'(x)$.

D'où $G'(x) = f(x)$ et encore $G(x) = F(x) + cte$. $G(a) = 0 = F(a) + cte$, donc $cte = -F(a)$ ∎

Exercice 9.2.1. *Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x t \sin t dt$.*

Exercice 9.2.2. *Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.*

Exercice 9.2.3. *Soit u_n la suite définie par*

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. *En écrivant $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \cos x dx$, pour $n > 1$, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.*

2. En déduire $u_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx$,

Exercice 9.2.4. *Calculer l'aire du cercle* $C(O, r)$ *de centre* O *et de rayon* r.

Exercice 9.2.5. *Calculer l'aire* $A(\lambda)$ *de l'ensemble des points* $M(x, y)$ *tels que :*

$$\begin{cases} x \in [1, \lambda], \quad \lambda > 0 \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

lorsque x *varie de* 1 *à* λ.

Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$, *et* $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

Exercice 9.2.6. *Calculer l'aire de l'ensemble des points* $M(x, y)$ *tels que :*

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leq y \leq \sin x - \sin^2 x \end{cases}$$

Exercice 9.2.7. *Même question avec :*

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x - \sin x \leq y \leq x \end{cases}$$