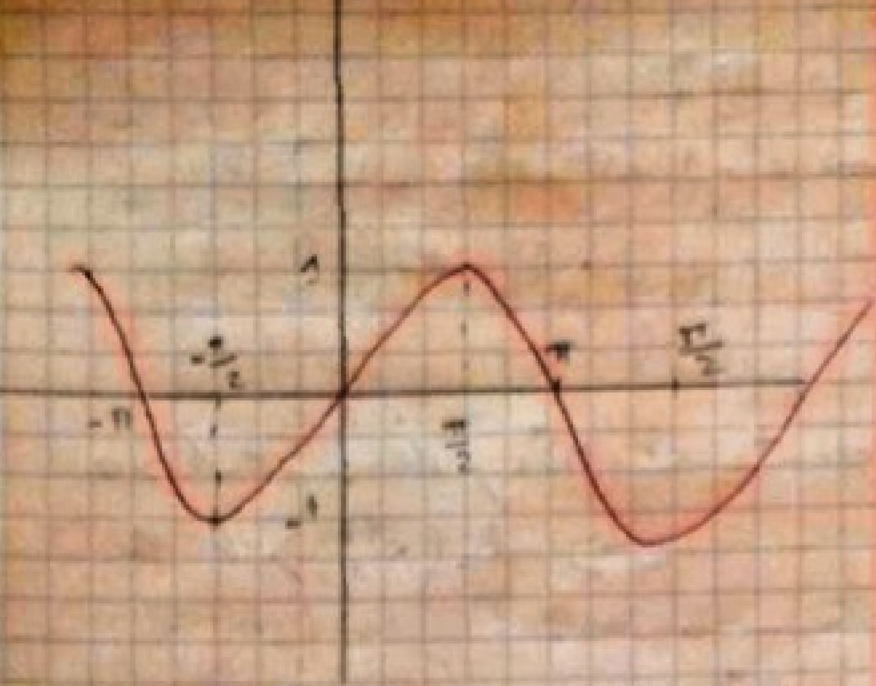
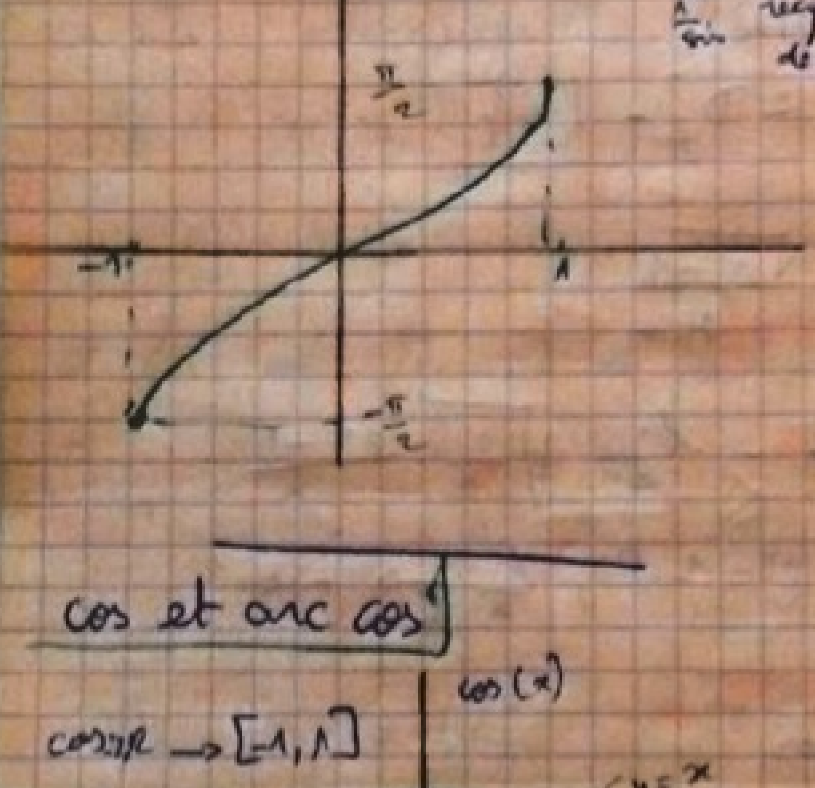
$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



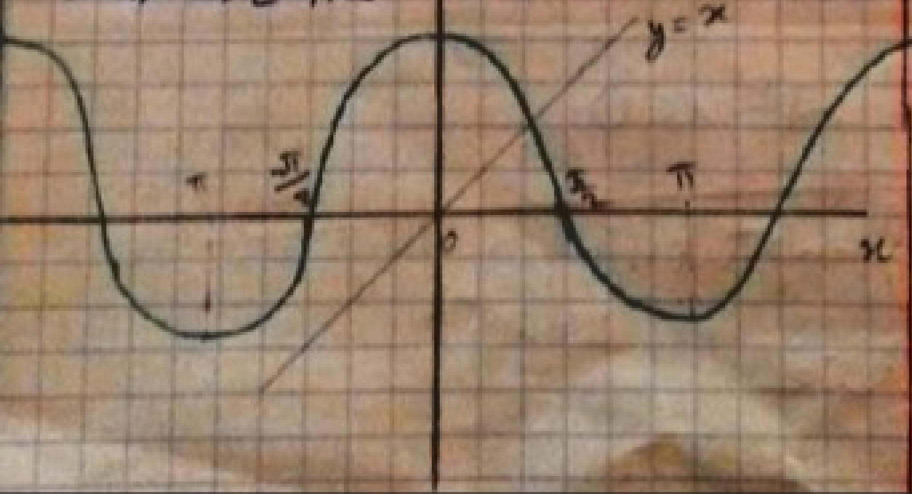
$\arcsin : [-1, 1] \to [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, arcsin $\sin^{-1} = f^{o}$ $\neq \frac{1}{\sin}$ réciproque de sin



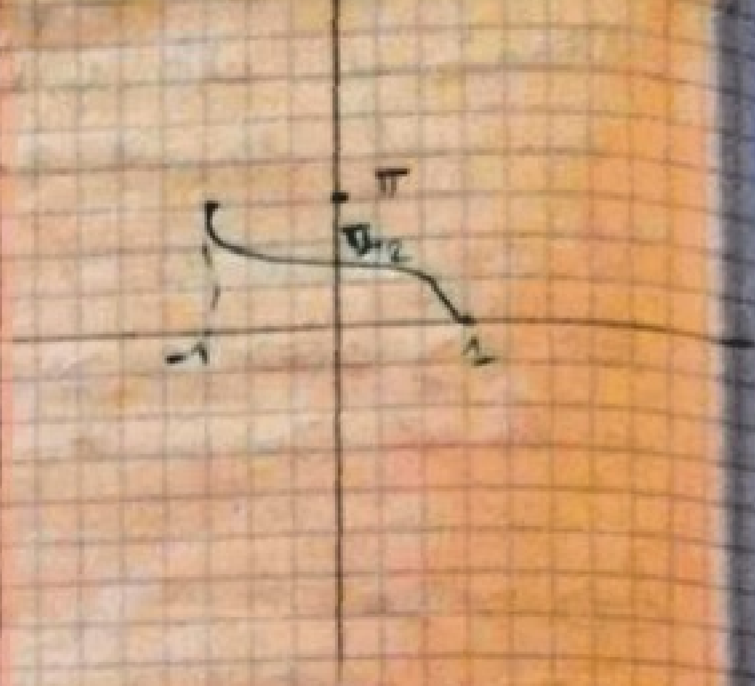
cos et arc cos

$\cos(x)$

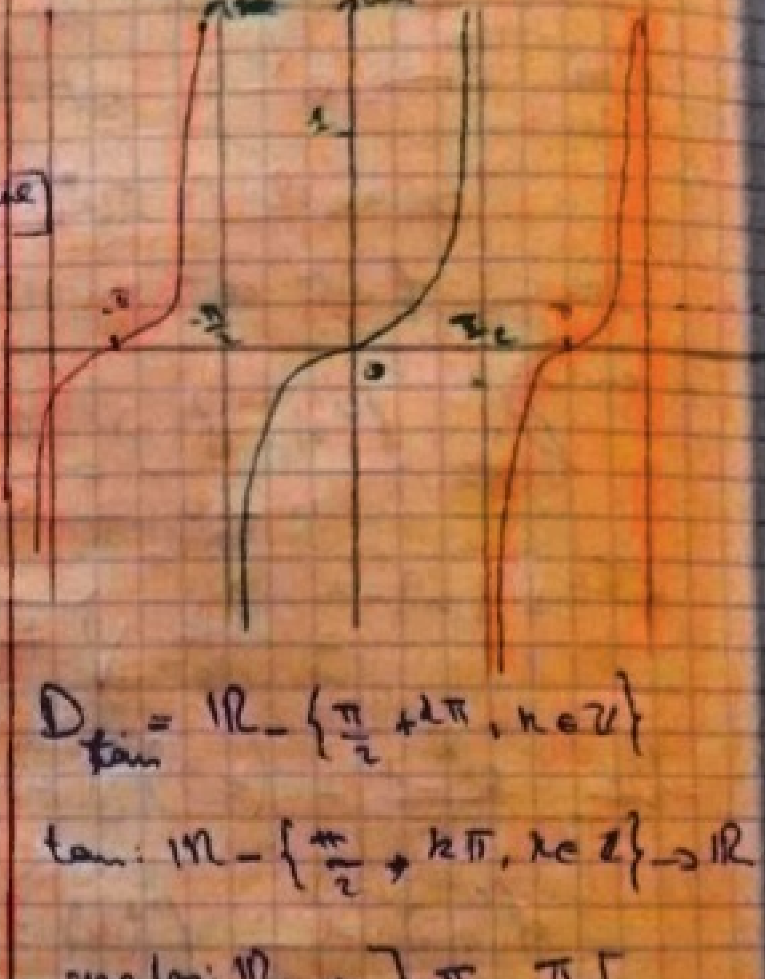
$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



$\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$



tan et arctan



$D_{\tan} = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

$\text{arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $D_g = \mathbb{R}^*$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$(f \circ h)'(x) = h'(x) \times f'(h(x)) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2+1}$$

$f = \arctan \quad h(x) = \frac{1}{x}$

Suites extraites

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite

Une suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme

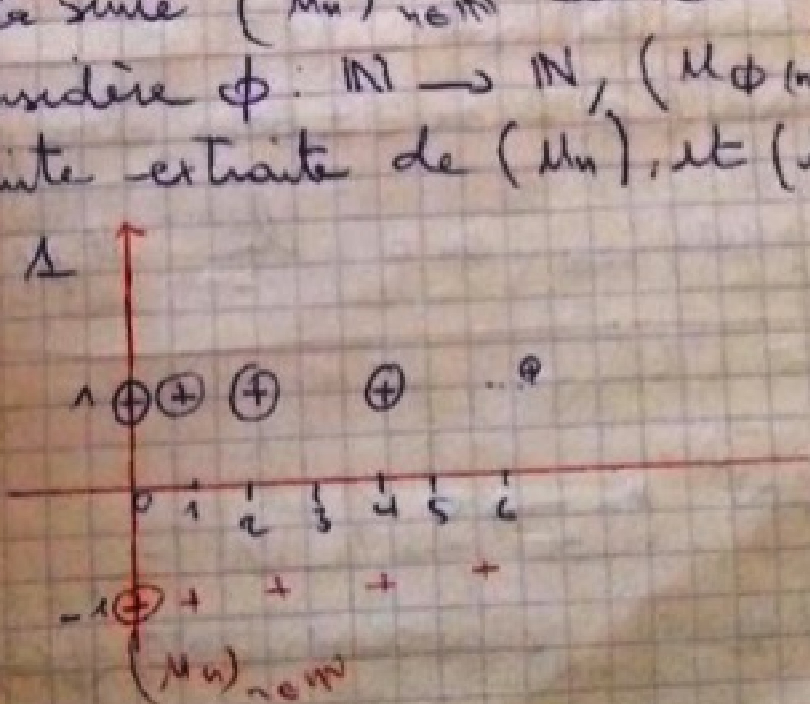
$(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante

Exemple :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n =$

Si on considère $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est $\phi \nearrow$

donc une suite extraite de (u_n), et $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $= 1$



$\forall n \in \mathbb{N}$

$\phi(n) = 2n$

- Mq ue (V_n) est décroissante

$$V_{n+1} - V_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} < 0$$

Alors (V_n) est décroissante

calculer $\lim_{+\infty} S_{2n} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$= -\frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$$

- d'où $\lim_{+\infty} S_{2n} - S_{2n+1} = 0$
- $(S_{2n}) \nearrow$
- $S_{2n+1} \searrow$

$\Rightarrow (S_{2n})$ et (S_{2n+1}) sont adjacentes

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) CV vers la même limite $l \in \mathbb{R}$

Conclusion

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow l$ et $l \in \mathbb{R}$

Théorème de Bolzano - Weierstrass :

$\boxed{\text{Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente}}$

Exemple. $U_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|(-1)^n| \leq 1$ bornée

- $((-1)^{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante $= 1$

elle est donc CV.

- $((-1)^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (-1)_{n \in \mathbb{N}}$ est CV

- la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : $\forall n$ $|\sin n| \leq 1$

elle admet donc une suite qui converge.

vérification.

$\forall n > 0, \; u_{\phi(n)} = u_{n^2} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Corollaire

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite
Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suite convergeant vers deux limites distinctes, alors (u_n) diverge.

exemple.

$u_n = (-1)^n$

$\left.\begin{array}{l} \forall k \in n \,/\, u_{2k} = 1 \longrightarrow 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}, u_{2k+1} = -1 \longrightarrow -1 \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n)$ n'a pas de limite

Théorème

si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ ou $l = \pm\infty$, alors $u_n \to l$

exemple.

Etudions la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Mq (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent vers la même limite

(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont-elle adjacents?

Il faut montrer que

$w_n = S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n}$

$V_n = S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$

Mq W_n est croissante.

$w_{n+1} - W_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n} = \frac{2n+2-2n}{(2n+2)(2n)} = \frac{2}{4(n^2+n)} > 0$

alors W_n est croissante

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin(\phi(n)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (\sin(\phi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donc CV.

$(\mathrm{Arccos}(x))'$

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\mathrm{Arccos}(x))}$$

$\sin^2($ Arccos sin x

Suite récurrentes:

Une suite récurrente est une suite dont le terme u_{n+1} dépend du terme u_n. exemples:

- suites arithmétiques: $u_{n+1} = u_n + r \quad r \in \mathbb{R}$
- Suites géométique: $u_{n+1} = q \cdot u_n, \ q \in \mathbb{R}$
- Suite récurrente définie par une fonction, exemple: $u_{n+1} = e^{u_n}$

1 - Suite récurrente définie par une fonction

Soit: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Une suite récurrente est définie par:

- son premier terme u_0
- et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \geq 0$$

Exemple: $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ et $u_0 = 2$.

et $\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

d'où: $u_1 = f(u_0) = 1 + \sqrt{2}$

$u_2 = f(u_1) = 1 + \sqrt{u_1} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

$u_3 = f(u_2) = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$. ...

$n=0$, $u_{\phi(0)} = u_0 = (-1)^0 = 1$

$n=1$, $u_{\phi(1)} = u_2 = (-1)^2 = 1$

$\vdots$

$n=k$, $u_{\phi(k)} = u_{2k} = (-1)^{2k} = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(k)} = 1$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ alors (v_n) est constante $= 1$

On peut extraire "plein" de suites à partir de la suite $(u_n)_n$

par exemple $(u_{\phi(n)})_n = (w_n)$ / $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$n \longrightarrow 3n$ ou $2n+1$

par exemple $\phi(n) = 2n+1$

$w_0 = u_{\phi(0)} = u_{2\cdot 0+1} = (-1)^1 = -1$

$w_1 = u_{\phi(1)} = u_3 = (-1)^3 = -1$

$w_2 = u_{\phi(2)} = u_5 = -1$

$\vdots$

$w_k = u_{\phi(k)} = u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$

la suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante $= -1$

Proposition — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ ou $= \pm\infty$, alors pour toute suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\lim\limits_{+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

par exemple

$u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(n) = n^2$

Proposition 2.

> si f est une fonction continue, et si la suite (u_n) CV vers l, alors l vérifie $f(l) = l$.

En d'autres termes l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Dém : (u_n) CV vers l : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

$$u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

$u_{n+1} = f(u_n)$

$$\lim f(x) \underset{\uparrow}{=} f(\lim u_n)$$

vrai car f est continue

d'où $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(l)$

$$u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

$f(u_n) = u_{n+1}$

$\Rightarrow \lim(f(u_n)) = \lim(u_{n+1})$

or $\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(l)$

et $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$

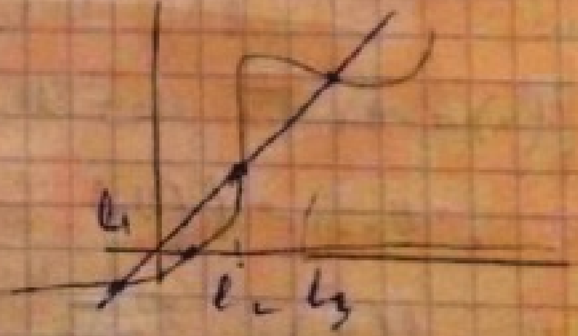
d'où : $f(l) = l$

exemple de f :

si $u_{n+1} = f(u_n)$

Alors si (u_n) CV vers l

alors $l \in \{l_1, l_2, l_3\}$



* Une valeur l vérifiant $f(l) = l$ s'appelle un point fixe de f.

Nous allons étudier deux cas particuliers fondamentaux

1. Cas d'une fonction f croissante :

Proposition 2 :

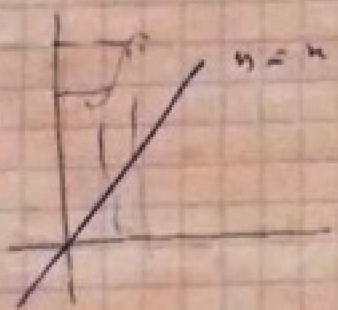
si $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonct° continue et croissante
Alors $\forall u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers l qui vérifie $f(l) = l$ et $l \in [a,b]$

On dit que $[a,b]$ est stable par f ($f([a,b]) \subset [a,b]$)

Dém :

* si $f(u_0) \geq u_0$:

alors $u_1 = f(u_0) \geq u_0$



$n = 1 \quad u_1 \geq u_0$

$u_2 = f(u_1) \geq f(u_0)$ car f est ↗

$u_2 \geq u_1$

supposons que au rang n : $u_n \geq u_{n-1}$.
Alors $f(u_n) \geq f(u_{n-1})$ car f ↗

$u_{n+1} \geq u_n$

d'où par récurrence $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) est ↗

$$\left.\begin{array}{l} u_0 \in [a,b] \\ u_1 = f(u_0) \in [a,b] \\ \text{supposons que } u_n \in [a,b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \in [a,b] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{d'où par récurrence} \\ \forall n \geq 0, \; u_n \in [a,b] \end{array}$$

(u_n) est monotone et CV vers $l \in \mathbb{R}$ / $f(l) = l$.

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 1)(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou 1 ou 2.

d'où $l \in \{-1, 1, 2\}$

or $l \in [0, 2]$ donc $l \in \{1, 2\}$.

Remarque : si $f(u_0) \geq u_0$, Dém. propé $\Rightarrow (u_n) \nearrow$

si par exemple $u_0 = 1,5$. forcément $l \geq 1,5$

or $l \in \{1, 2\}$ d'où $l = 2$

Technique : Etudier la position de f / à $y = x$

c à d étudier $\boxed{x \longmapsto f(x) - x}$ sur $[a, b]$

$f(x) - x = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2)$

x		-1		1		2	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Deux cas particuliers $u_0 = 1$ ou 2

Si $u_0 = 1$
$u_1 = f(u_0) = 1$

on mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ donc $l = 1$

Si $u_0 = 2$ on mq $\forall n \in \mathbb{N}$. $u_n = 2$ donc $l = 2$

donc (u_n) CV (vers $l \in \mathbb{R}$) et prop 1 $\Rightarrow f(l) = l$

Exemple

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) + x$$

et $\begin{cases} u_0 \in [0, 2] \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geqslant 0 \end{cases}$

Etudier la converge de $(u_n)_n$ et calculer sa limite

Solution

On a f est C^0 parce qu'elle est polynomiale

- f croissante

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \left(\frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) + x\right)'$

$$f' = \frac{1}{4} 2x(x - 2) + \frac{1}{4}(x^2 - 1) + 1$$

$$f'(x) = \frac{2x}{4}(x - 2) + \frac{1}{4}(x^2 - 1) + 1$$

$$f'(x) = \frac{2x^2}{4} - x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{4} - x + \frac{3}{4}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 1 - \left(4 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)$$
$$= 1 - \frac{9}{4} < 0$$

$\frac{3x^2}{4} - x + \frac{3}{4}$ est de même signe que $a = \frac{3}{4}$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) > 0$

Alors : f est strictement croissante

$$f([0, 2]) = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset [0, 2]$$

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f(2) = 2$

$f([1,2]) = [1,2] \subset [1,2]$

f est C^0 et f croiss. $\mathbb{R}$ donc sur $[1,2]$

Alors $\forall u_0 \in [1,2]$, (u_n) est monotone et CV vers $l \in [1,2]$, (u_n) est monotone et converge vers $l \in [1,2]$, tq $f(l) = l$

donc $l = 1$ ou $l = 2$

$\forall x \in]1,2[$ on a montré que $f(x) - x < 0$

or $u_0 \in]1,2[$

donc $f(u_0) < u_0$

$\overset{\shortparallel}{u_1} < u_0 \quad (n = 1)$

supposons (rang n) $u_n < u_{n-1}$

montrons que $u_{n+1} < u_n$:

$u_{n+1} = f(u_n) < u_n$

parce que $f(x) - x < 0$, $\forall x \in]1,2[$ et $u_n \in]1,2[$

$\forall n \geq 1$, $u_n < u_{n-1}$ donc $u_n < u_0 < 2$ à montrer

d'où (u_n) est $\searrow$ strictement donc $l < 2$ or $l \in [1,2]$

donc $\underline{l = 1}$

- Par récurrence

Mq $\forall n \geq 0 \quad u_n \in]1,2[$:

$\rightarrow$ Pour $n = 0$, $u_0 \in]1,2[$

supposons que $u_n \in]1,2[$

(Mq $u_{n+1} \in]1,2[$)

on sait que $u_{n+1} = f(u_n)$

or $u_n \in]1,2[$ et $f(]1,2[) \subset]1,2[$

d'où $f(u_n) \in]1,2[$

Donc $u_{n+1} \in]1,2[$

$\Rightarrow \forall n \geq 0 \ u_n \in]1,2[$

3. Cas d'une fonction décroissante

Proposition 3:

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ avec f continue et décroissante

Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors:

$l \in [a,b]$

- La sous suite (u_{2n}) CV vers l / $f \circ f(l) = l$
- La sous suite (u_{2n+1}) CV vers l' / $f \circ f(l') = l'$

$l' \in [a,b]$

Dém:

$$f \searrow \Rightarrow f \circ f \nearrow$$

$$f \ \mathcal{C}^0 \Rightarrow f \circ f \ \mathcal{C}^0$$

$$f(a,b) \subset [a,b] \Rightarrow f(f[a,b]) \subset [a,b]$$

$\Rightarrow [a,b]$ stable par $f \circ f = g$

$\forall n \geq 0$

On a: $u_{2n+1} = f(u_{2n})$

d'où $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n})$

On pose:

$$v_n = u_{2n} \ , \forall n \geq 0$$

$\boxed{\text{d'où } v_{n+1} = g(v_n)}$ $\forall n \geq 0$

d'où : prop 2 $\Rightarrow$ (v_n) est monotone et CV vers $\ell \in [a,b]$ / $g(\ell) = \ell$

donc (U_{2n}) CV vers $\ell \in [a,b]$ t.q. $f \circ f(\ell) = \ell$

* De même on mq (U_{2n+1}) CV vers $\ell' \in [a,b]$

$f \circ f(\ell') = \ell'$

$(g = f \circ f)$

Question : (u_n) CV ?

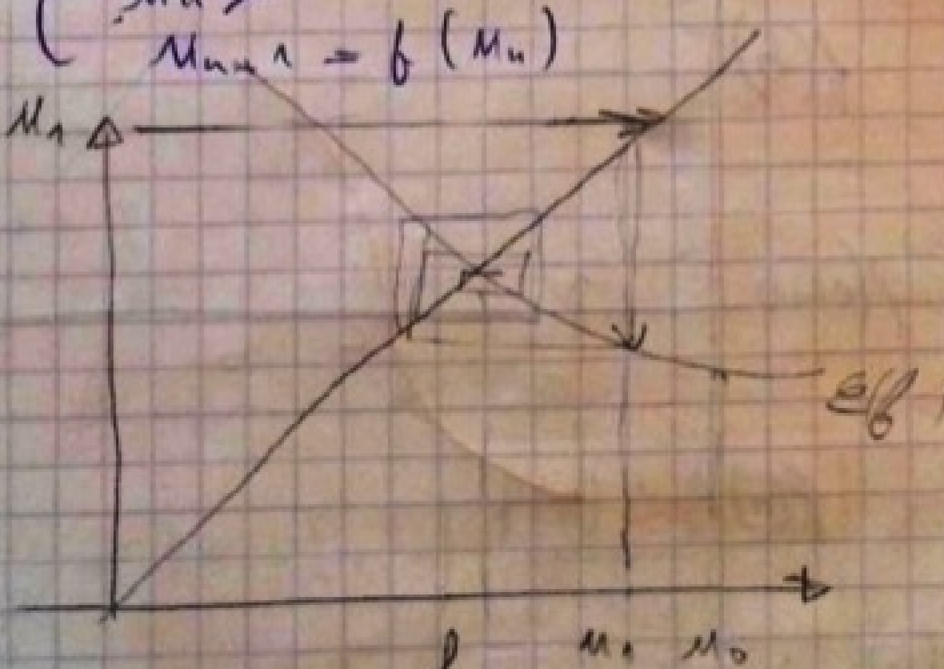
→ Si $\ell = \ell'$, alors Th. $\Rightarrow$ (u_n) CV ?

* Sinon (u_n) DV et n'a pas de limite.

$(\ell \neq \ell')$

Exemple :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{1}{x} \\ u_0 > 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$



étudier $f \circ f$.

étudier la convergence de (u_n) à la maison.

$\overrightarrow{u_n \nearrow \to 1}$ $\quad$ $\overleftarrow{u_n \searrow \to 1}$

* si $u_0 \in [0,1[$:

$f(u_0) \geq u_0 \Rightarrow$ Dem. prop 2 . on mq $(u_n) \nearrow$

On mq $f([0,1]) \subset [0,1]$

$$\begin{cases} f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [\frac{1}{2}, 1] \subset [0,1] \\ f \ \mathcal{C}^0 \text{ et } \nearrow \text{ sur } [0,1] \\ u_0 \in [0,1] \end{cases}$$

prop. 2 $\to$ (u_n) CV vers $l \in [0,1]$

or $l \in \{1,2\}$ donc $l = 1$

* si $u_0 \in]1,2[$:

A faire à la maison.

Exercice d'application

Soit $f:[a,b] \longrightarrow [a,b]$, f $\mathcal{C}^0$ et d^0 sur $[a,b]$

telle que $\forall x\in[a,b]$ $|f'(x)| \leq k < 1$.

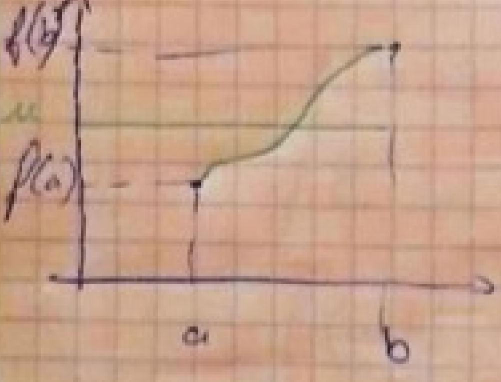
Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \geq 0 \end{cases}$

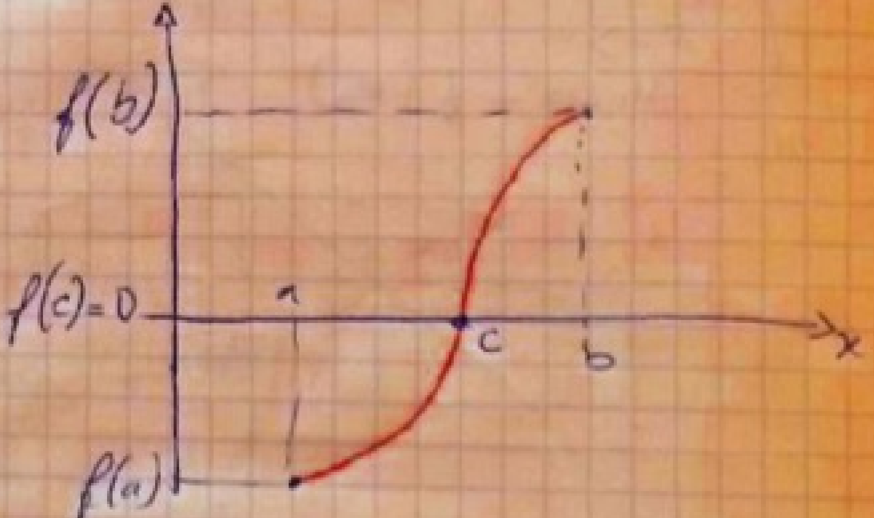
Mq (u_n) CV vers α / $f(\alpha) = \alpha$.

Question préliminaire

Mq l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

Théorème de Bolzano





$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

On pose $g : [a,b] \longrightarrow g([a,b])$

$x \longmapsto f(x) - x$

* g $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$. car f $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ et $x \mapsto x$ $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$

* $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car ~~f $\mathcal{C}^0$ sur~~ $f[a,b] \subset [a,b]$

à d $a \leq f(a) \leq b$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ d'où $g(a) \cdot g(b) \leq 0$

Deux cas

1) $g(a)\, g(b) < 0$

d'après le Th de Bolzano, $\exists \alpha \in]a,b[\ / g(\alpha) = 0$

c à d $\exists \alpha \in]a,b[\ / f(\alpha) = \alpha$

2) si $g(a) \cdot g(b) = 0$

$\Rightarrow g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$

$\Rightarrow f(a) = a$ ou $f(b) = b$

donc $\exists \alpha \in [a,b] \ / f(\alpha) = \alpha$ ($\alpha = a$ ou b)

Conclusion $\exists \alpha \in [a,b] \ / f(\alpha) = \alpha$

$(]a,b[\subset [a,b])$

Unicité de α :

$\forall x \in [a,b]$. $|f'(x)| \leq k$ $(k < 1)$

on a f C^0 et d^0 sur $]a,b[$. (c à d d^0 sur $[a,b]$)

d'après l'IAF

$\forall x, y \in]a,b[, \quad \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq k$

supposons $f(\alpha_1) = \alpha_1$ et $f(\alpha_2) = \alpha_2$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$

et $\alpha_1, \alpha_2 \in]a,b[$

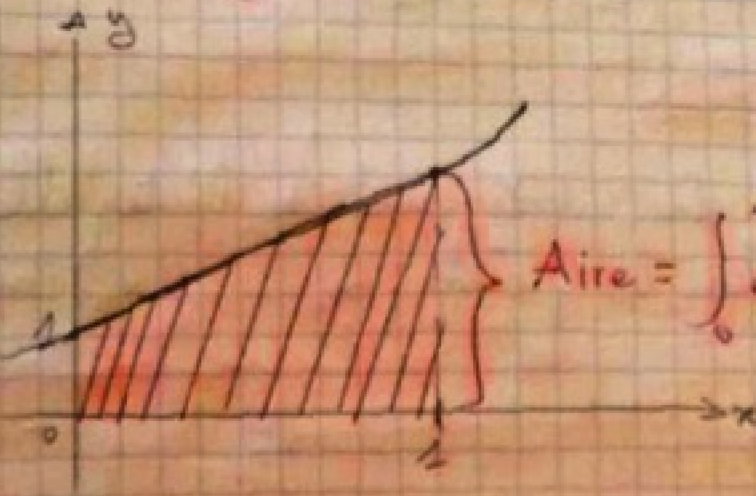
$$\left| \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \leq k < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| = 1 \leq k < 1$$

Absurde ! d'où l'unicité de α.

Intégrales :

Introduction :

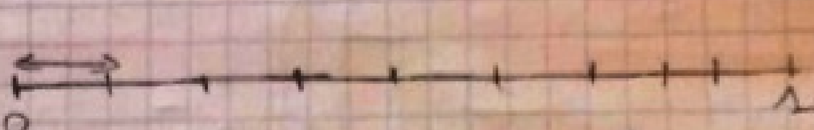


$$\text{Aire} = \int_0^1 e^x\,dx$$

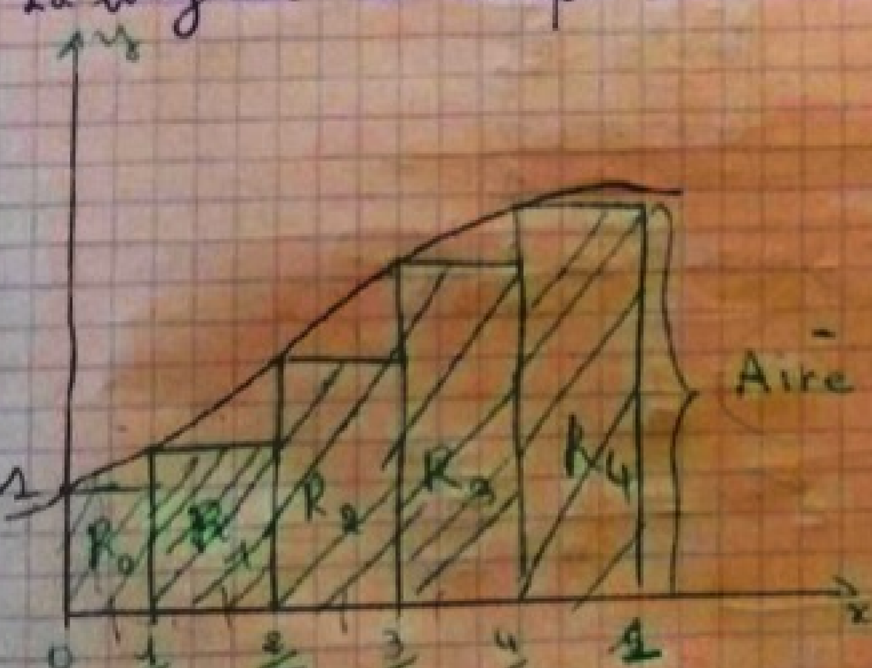
$\int_0^1 e^x dx =$ Aire = surface entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe (Ox)

On approche cette aire par des sommes de rectangles situés sous la courbe.

Pour ce faire on divise l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles par l'exemple $\boxed{n=5}$



La longueur de chaque intervalle $= \frac{1}{5}$



$\bar{\text{Aire}} < \text{Aire}$

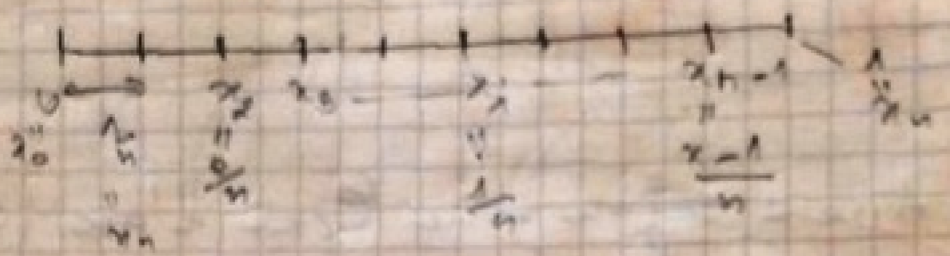
$\bar{\text{Aire}} = \sum_{i=0}^{4} \bar{R_i}$ avec $\bar{R_0} = \frac{1}{5} \times 1$

$\bar{R_1} = \frac{1}{5} \times f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{e^{\frac{1}{5}}}{5}$

$\bar{R}_1 = \frac{1}{5} \times f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{e^{1/5}}{5}$

De façon général

On définit la subdivision de l'intégralle $[0,1]$ en n intervalles les points $(x_0 - - - x_n)$ avec



$\forall i \in \langle 0, n \rangle$, $x_i = \frac{i}{n}$

et la longueur de chaque intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$

$= \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$.

$\bar{A}ire(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{R}_i$, avec $\bar{R}_i = \frac{1}{n} f(x_i)$.

$x_i = \frac{i}{n}$

$\boxed{\bar{A}ire(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} e^{i/n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1}$

$\sum_{i=0}^{n-1} e^{i/n} = \sum_{i=0}^{n-1} (e^{1/n})^i = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$

$Aire < Aire^+(n)$

$Aire^+(n) = \sum_{i=1}^{n} R_i$ avec $R_i^+ = \frac{1}{n} f(x_i) = \frac{1}{n} e^{i/n}$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (e^{1/n}) = \frac{1}{n} e^{1/n} \sum_{i=1}^{n} (e^{1/n})^{i-1}$

$= \frac{1}{n} e^{1/n} \sum_{i=0}^{n-1} (e^{1/n})^i = \frac{1}{n} \cdot e^{1/n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}}$

$$\boxed{Aire^+(n) = \frac{1}{n} \cdot e^{1/n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}}}$$

De m., plus n est grand plus $Aire^+(n)$ s'approche de $Aire = \int_0^1 e^x dx$ } pm

$\underline{Aire^-(n) < Aire < Aire^+(n)}$

$\lim_{n \to +\infty} Aire^-(n) = \lim_{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}}$

$= \lim_{+\infty} (e-1) \cdot \frac{1/n}{e^{1/n}-1}$

$= \lim_{0} (e-1) \frac{x}{\underbrace{e^x-1}_{1}}$

$= e-1$

on prend $I^-(f) = \sup \{ \underbrace{\int_0^1 \phi(x)\,dx \,/\, \phi \text{ en escalier et } \phi < f}_{E} \}$

or $\int_0^1 \phi^-(x)\,dx \in E$, donc :

$$I^-(f) \geq \int_0^1 \phi^-(x)\,dx$$

$$\text{et } I^+(f) \leq \int_0^1 \phi^+(x)\,dx$$

$$\lim \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$$= \lim \frac{2n^2}{6n^2}$$

$$= \lim \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Donc

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_0^1 \phi^+(x)\,dx$$

$$\frac{1}{3} \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \frac{1}{3}$$

Donc $I^-(f) = I^+(f) = \frac{1}{3}$

Alors f est intégrable sur $[0,1]$.

et $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

I_3_ Fonctions continues par morceaux :

Définition :

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe un entier n et une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ vérifiant

Exemple:

* Pour une fonction f en escalier

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \,/\, \phi \text{ en escalier et } \phi \leq f\right\}$$

$I^-(f)$ est atteinte lorsque $\phi = f$.

De même $I^+(f)$ est atteinte lorsque $\phi = f$.

Donc $I^+(f) = I^-(f)$ d'où $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{l'intégrale de Riemann de } f} = I^-(f) = I^+(f)$

* Les fonctions en escalier sont intégrables (au ~~valeur~~ sens de Riemann

* Nous verrons aussi qu'une fonction C^0 est toujours intégrable

Exemple:

$f(x) = e^x$ est-elle intégrable ?

On a déjà défini deux fonctions en escalier ϕ^- et ϕ^+ tels que:

$\forall i \in \langle 1, n \rangle$, $\alpha i = 1/n$

et on a mq. $\text{Aire}^+ = \int_0^1 \phi^+(x)\,dx$

et $\text{Aire}^- = \int_0^1 \phi^-(x)\,dx$

on a :

$$I^+(f) \leq \int_0^1 \phi^+(x)\,dx.$$

$$\text{et } I^-(f) \geq \int_0^1 \phi^-(x)\,dx.$$

Car $I^+(f) = \inf\left\{ \int_0^1 \phi(x)\,dx \,/\, \phi \text{ en escalier et } \phi \geq f \right\}$

d'où

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Aire}^-(n) & \leq & \underbrace{I^-(f)}_{\text{indep. de } n} & \leq & \underbrace{I^+(f)}_{\text{indep. de } n} & \leq & \text{Aire}^+(n). \\ \downarrow_{n \to +\infty} & & & & & & \downarrow_{n \to +\infty} \\ e-1 & \leq & I^-(f) & \leq & I^+(f) & \leq & e-1 \end{array}$$

d'où $I^-(f) = I^+(f) = e - 1$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ est intégrable.

et $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$

Exercice

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2. \\ \text{Mq } f \text{ est intégrable} \end{array}\right\} \text{indice : } \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

I - 2 - Fonction intégrable :

Rappels :

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée si $\exists\, m, M \geq 0 /$
  $\forall x \in [a,b]\,,\ -m \leq f(x) \leq M$

$\Leftrightarrow$ si $\exists M \geq 0 / \forall x \in [a,b]\,,\ -M \leq f(x) \leq M$ ou $|f(x)| \leq M$.

- $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
  $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [a,b]\,,\ f(x) \leq g(x)$

On suppose maintenant que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée

On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \ / \ \phi \text{ en escalier et } \phi \leq f(x) \right\}$$

et

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \ / \ \phi \text{ en escalier et } \phi \geq f(x) \right\}$$

$u_i = e^{i/n} = \left(e^{1/n}\right)^i = q^i \quad i \in \langle 0, n-1 \rangle.$

$$\bar{\text{Aire}}(n) = \frac{1}{n} \times \frac{1-\left(e^{1/n}\right)^n}{1-e^{1/n}}$$

$$\boxed{\bar{\text{Aire}}(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}}}$$

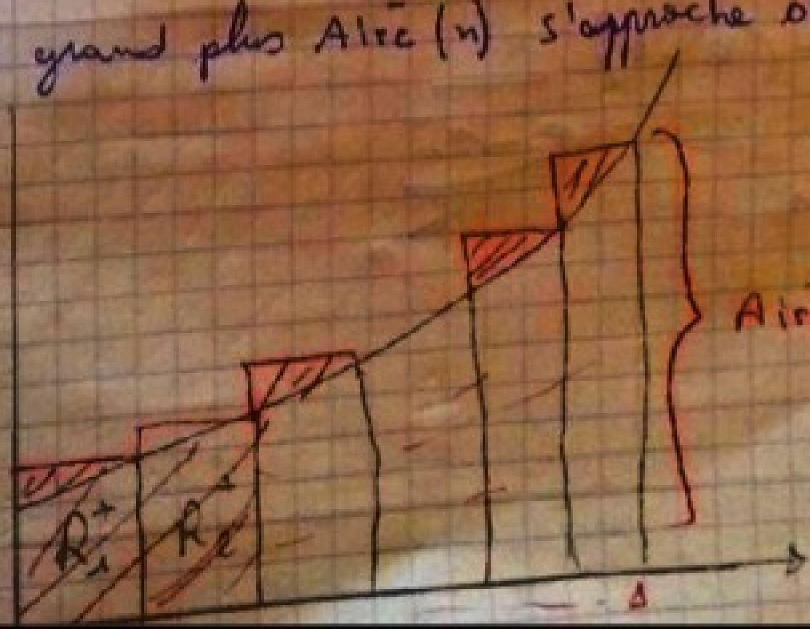
Remarque :

$n = 3$

$n = 12$.

plus n est grand plus $\bar{\text{Aire}}(n)$ s'approche de $\text{Aire} = \int_0^1 e^x dx$

$\text{Aire}^+(n)$:



I - Intégral de Rieman :

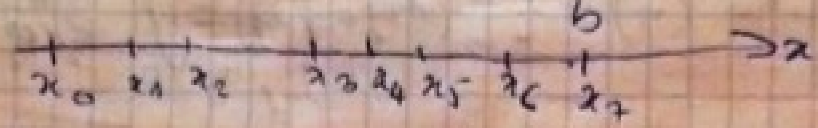
On reprend le raisonnement fait pour $f(x) = e^x$ et on le généralise pour une fonction quelconque.
On remplacera les rectangles par des fonctions en escaliers.

I - 1 - Fonction en escalier :

Définition 1 - Subdivision :

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$
On appelle <u>subdivision</u> de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $S = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ tell que $x_0 = a$ et $x_n = b$; $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Exemple $n = 7$

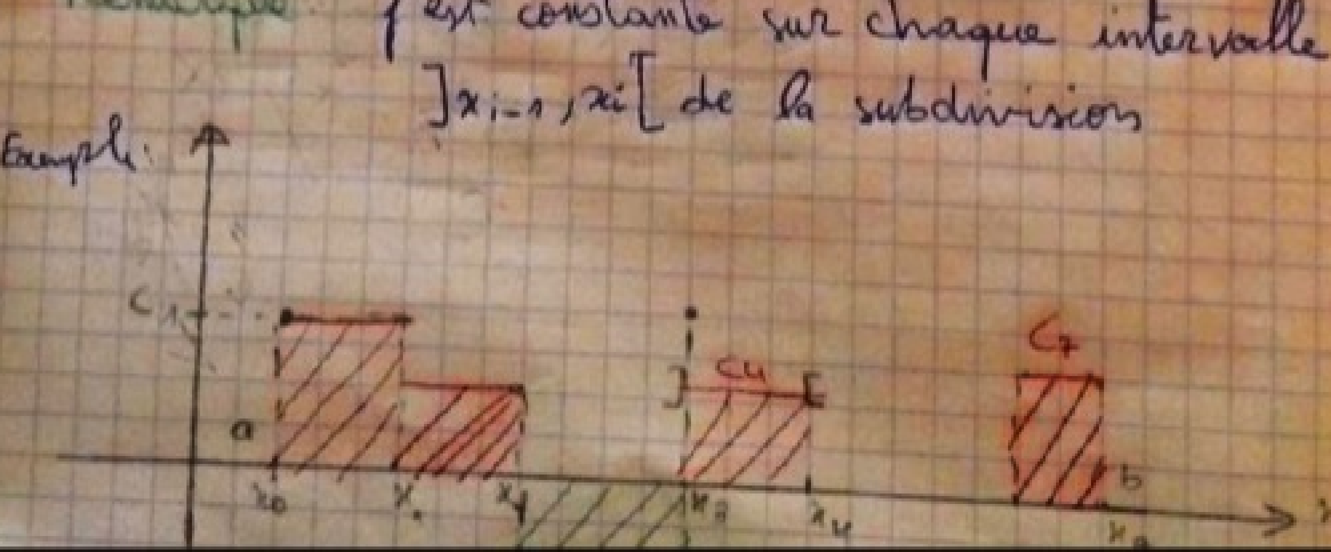


Définition 2. - Fonction en escalier :

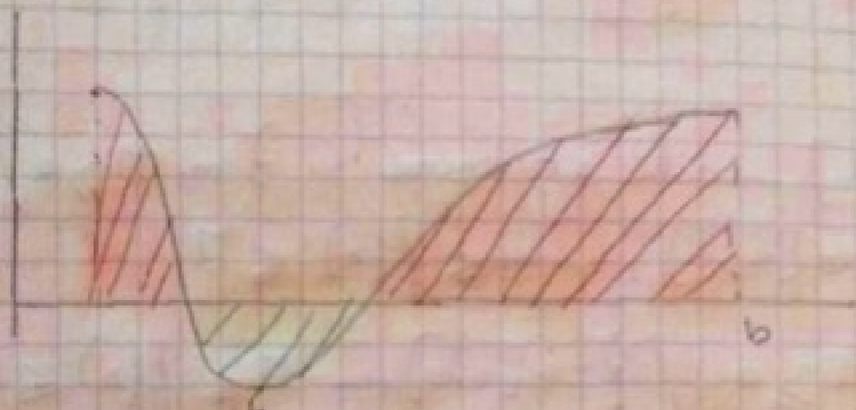
Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une <u>fonction en escalier</u> s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et des réels $c_1, \dots c_n$ / $\forall i \in \langle 1, n \rangle$:
$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$, $f(x) = c_i$.

Remarque : f est constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ de la subdivision

Exemple :



$\left\{ \int_a^b f(x)\,dx = \right.$ //// $-$ ////



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{////} - \text{////}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_1 (x_1 - x_0) + c_2 (x_2 - x_1) + \underbrace{c_3}_{c_3 < 0} (\underbrace{x_3 - x_2}_{> 0}) + \dots + c_n (x_n - x_{n-1})$$

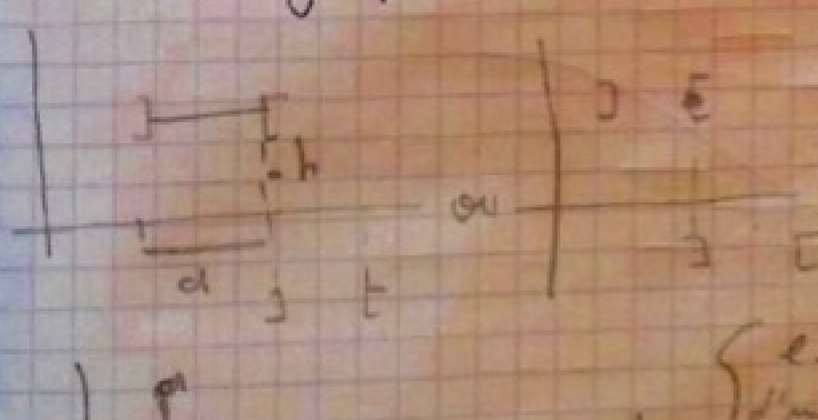
Définition

Pour une fonction en escalier, son intégrale

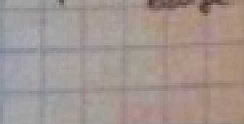
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

Remarque !

La valeur de f aux points x_i n'est pas importante, car l'aire ne change pas



$\Rightarrow$ même aire



base est un point : $d =$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'intégral} \\ \text{d'une fonction en un} \\ \text{point est nulle.} \end{array} \right.$

$$x_i = \frac{i}{n}$$

$$f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^n$$

la subdivision de : $[0,1]$ $\varphi = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{i}{n} \dots \frac{n-1}{n}, 1\right)$

$$\forall x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \quad \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leq x^2 \leq \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$x_n = 1$

$$\text{Aire}^-(n) = \int_0^1 \phi^-(x)\,dx = \sum c_i \cdot (\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\frac{1}{n}})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

et on a : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}}$ donnée (peut être démontrée par récurrence

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

$N = n - 1$

$$\text{Aire}^-(n) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n)\,(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)\,(2n-1)}{n^2}$$

$$\text{Aire}^+(n) = \int_0^1 \phi^+(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n(n+1)(2n+1)$

Proposition : il est visible que :

$$\boxed{I^-(f) \leq I^+(f)}.$$

Définition !!

Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable (au sens de Riemann) si $I^-(f) = I^+(f)$.

On appelle alors ce nombre l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et on le note :

$$\int_a^b f(x)\,dx \left(= I^-(f) = I^+(f)\right).$$

$$\Longleftrightarrow$$

La borne sup des "vert" est égale à la borne inf des "rouges".

Sachant qu'une borne sup ou inf n'est pas forcément atteinte (cela ressemble à une limite).

Pour la compréhension de la théorie :

$$f^+ > f^-$$

mais $\lim\limits_{+\infty} f^+ = \lim\limits_{-\infty} f^-$.

* $\lim_{+\infty} \text{Aire}^+(n) = \lim_{+\infty} \underbrace{\frac{1/n}{e^{1/n}-1}}_{\to 1} \cdot (e-1)\, \underbrace{e^{1/n}}_{\to 1}$

$= e - 1$

d'où $\underbrace{\text{Aire}^-(n)}_{\downarrow} < \text{Aire} < \underbrace{\text{Aire}^+(n)}_{\downarrow}$

$e-1 \leq \text{Aire} \leq e-1$

d'où $\text{Aire} = e-1$

or. $\int_0^1 e^x dx = \left(e^x\right)_0^1 = e-1$

donc $\boxed{\lim_{+\infty} \text{Aire}^+(n) = \lim_{+\infty} \text{Aire}^-(n) = \int_0^1 e^x dx}$

Exercice : Calculer $\text{Aire}^-(n)$ et $\text{Aire}^+(n)$
pour $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$

autre méthode :

$$g'(x) = f'(x) - 1, \forall x \in [a,b]$$

on a : $\forall x \in [a,b]$ $-1 < f'(x) < 1$

d'où $g'(x) < 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{d'où } g \text{ est strictement monotone} \\ \text{or } g \text{ est } \mathcal{C}^0 \end{array}\right\}$ donc g est bijective

donc la solution de $g(x) = 0$ et unique

$\Leftrightarrow$ la solution de $f(x) = x$ est unique.