



École Hassania des Travaux Publics

Cours :

Calcul des structures

Deuxième Année Génie Civil
(2GC3)

A.U. : 2013/14

Pr. Mustapha RGUIG

Table des matières

1 Généralités et rappels	3
1.1 Rappel du théorème de CASTIGLIANO	3
1.2 Rappel du théorème de MÉNABRÉA	3
1.3 Exercices	4
2 Calcul des poutres continues	16
2.1 Rappel du théorème des travaux virtuels	16
2.2 Méthode des trois moments (Méthode de CLAPEYRON)	17
2.2.1 Coefficients de souplesse d'une travée	17
2.2.2 Equation des trois moments (CLAPEYRON)	19
2.3 exercices	22
2.4 Equation des cinq moments (Poutres continues aux appuis élastiques)	31
2.5 Exercices	33
2.6 Méthode des foyers	37
2.6.1 Foyers de gauche	37
2.6.2 Foyers de droite	39
2.6.3 Calcul des moments sur les appuis à l'aide des foyers .	40
2.7 Exercices	42
3 Calcul des lignes d'influence	55
3.1 Définition	55
3.2 Lignes d'influence d'une poutre isostatique	56
3.3 Exploitation des lignes d'influence	57
3.3.1 Charges localisées	57
3.3.2 Charges réparties	58
3.4 Exercices	59
4 Calcul des ossatures	71
4.1 Méthode des rotations - Ossatures rigides (à noeuds fixes) . . .	71
4.1.1 Convention de signes des moments fléchissants	71

TABLE DES MATIÈRES

2

4.1.2	Convention de CROSS	72
4.1.3	Relation entre couples transmis par les noeuds et les déformations	72
4.1.4	Cas d'une poutre articulée à une extrémité	75
4.1.5	Déplacement d'appui	76
4.2	Exercices	77
4.3	Ossatures souples (à noeuds mobiles)	91
4.3.1	Rotations inconnues d'une ossature	91
4.3.2	Groupe I d'équations	92
4.3.3	Groupe II d'équations	93
4.3.4	Calcul d'une ossature à noeuds mobiles	93
4.4	Exercices	94
A	Compléments du cours	111
A.1	Intégrales de MOHR	111
A.2	Rotations des poutres	113
A.3	Formulaire des moments	119

Chapitre 1

Généralités et rappels

1.1 Rappel du théorème de CASTIGLIANO

L'énoncé du théorème de CASTIGLIANO est le suivant :

- La projection du déplacement du point d'application d'une force sur la direction de cette force est égale à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force.
- Le vecteur rotation du point d'application d'un couple quelconque, projeté sur l'axe de ce couple, est égal à la dérivée partielle, par rapport au moment de ce couple, de l'énergie de déformation.

Il est traduit par les deux formules :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial P} = \delta} \quad (1.1)$$

où U est l'énergie de déformation du système étudié, δ est le déplacement du point d'application de l'effort extérieur P suivant la direction de P .

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial M} = \theta} \quad (1.2)$$

où θ est la rotation du système suivant l'axe d'application du couple M .

1.2 Rappel du théorème de MÉNABRÉA

Le théorème de MÉNABRÉA, appelé aussi **Théorème du travail minimum**, est un cas particulier du théorème de CASTIGLIANO, son énoncé est

le suivant :

- Les valeurs que prennent les réactions hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes, ou les efforts hyperstatiques correspondant aux barres surabondantes, rendent stationnaire l'énergie interne.

Ce théorème est traduit par les deux formules suivantes :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0} \quad (1.3)$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial R_i} = 0} \quad (1.4)$$

où les X_i sont les efforts hyperstatiques inconnus dans les barres surabondantes et les R_i sont les réactions hyperstatiques inconnues au niveau des liaisons surabondantes.

1.3 Exercices

♦ Exercice 1 :

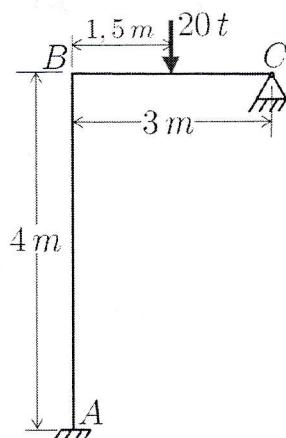


FIGURE 1.1 – Schéma de l'exercice 1

- Déterminer le degré d'hyperstaticité du système

2. Résoudre le système en déterminant les réactions d'appuis
3. Tracer le DMF (Diagramme des Moments Fléchissants)

⇒ **Solution 1 :**

1. Les inconnues du système sont : H_A, V_A, M_A, H_C, V_C .
Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \sum F_H = 0 \\ \sum F_V = 0 \\ \sum M_{pt} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

On a donc 3 équations à 5 inconnues, d'où le système est hyperstatique de degré 2.

2. Soient H_C et V_C les inconnues hyperstatiques du problème.
En appliquant le principe de superposition, on obtient trois systèmes isostatiques comme schématisé sur la figure (1.2).

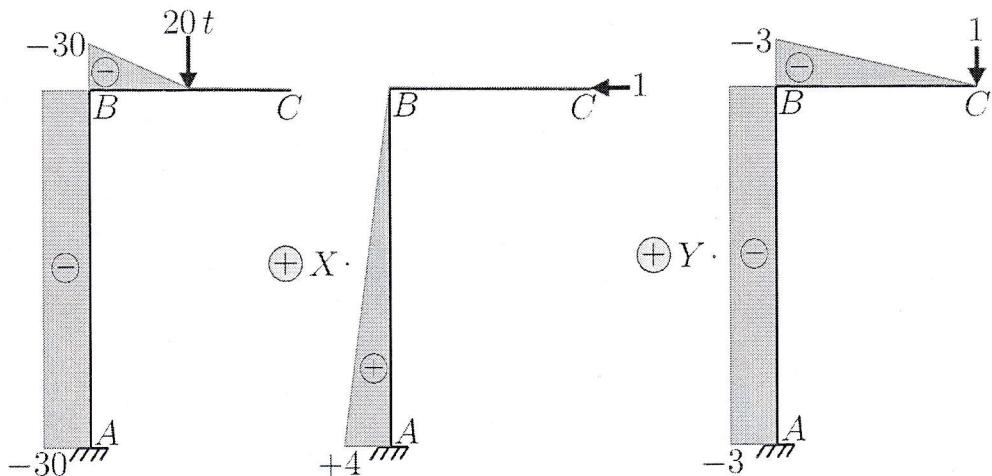


FIGURE 1.2 – Décomposition des efforts et DMF correspondants

En négligeant l'effet de l'effort normal par rapport au moment fléchissant, l'énergie potentielle de déformation du système s'écrit :

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (1.6)$$

$$= \int \frac{(M^\circ + XM' + YM'')^2}{2EI} dx \quad (1.7)$$

En appliquant le théorème de MÉNABRÉA, avec $EI = cte$, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \int (M^\circ + XM' + YM'') M' dx = 0 \\ \int (M^\circ + XM' + YM'') M'' dx = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X \int M'^2 dx + Y \int M'M'' dx = - \int M^\circ M' dx \\ X \int M'M'' dx + Y \int M''^2 dx = - \int M^\circ M'' dx \end{cases} \quad (1.10)$$

Le système (1.10) représente les équations canoniques de la méthode des forces.

Ce système peut être écrit sous la forme symbolique suivante :

$$\begin{cases} \delta_{11}X + \delta_{12}Y = -\delta_{1P} \\ \delta_{21}X + \delta_{22}Y = -\delta_{2P} \end{cases} \quad (1.11)$$

Remarque : Pour un système hyperstatique de degré 3, dont les inconnues hyperstatiques sont X , Y et Z , le système des équations canoniques s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \delta_{11}X + \delta_{12}Y + \delta_{13}Z = -\delta_{1P} \\ \delta_{21}X + \delta_{22}Y + \delta_{23}Z = -\delta_{2P} \\ \delta_{31}X + \delta_{32}Y + \delta_{33}Z = -\delta_{3P} \end{cases} \quad (1.12)$$

Le système (1.11) est un système de 2 équations à 2 inconnues qu'on peut résoudre en calculant les intégrales, puisqu'on a les équations de $M(x)$, ou en utilisant les intégrales de MOHR (méthode graphique).

Calculons les termes du système en utilisant les diagrammes de la figure (1.2) :

$$\delta_{11} = \int M'^2 dx = \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \right) \cdot 4 = 21.33 \quad (1.13)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int M' M'' dx = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-3) \right) \cdot 4 = -24 \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int M''^2 dx = \left(\frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) \right) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) \cdot 4 \\ &= 45 \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\delta_{1P} = \int M^\circ M' dx = \left(\frac{1}{2} \cdot (-30) \cdot 4 \right) \cdot 4 = -240 \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \delta_{2P} &= \int M^\circ M'' dx \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot (-30) \cdot (2 \cdot (-3) - 1, 5) \right) \cdot 1, 5 + ((-30) \cdot (-3)) \cdot 4 \\ &= 416.25 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Le système devient :

$$\begin{cases} 21.33X - 24Y = 240 \\ -24X + 45Y = -416.25 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = 2.11t \\ Y = -8.125t \end{cases} \quad (1.19)$$

En utilisant les équations d'équilibre statique (formules 1.5) et les schémas de la figure (1.2), on peut donc conclure les valeurs des efforts à l'encastrement A :

$$\begin{cases} H_A = X \\ V_A = 20 + Y \\ M_A = -(-30 + X \cdot 4 + Y \cdot (-3)) \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} H_A = 2.11t \\ V_A = 11.875t \\ M_A = -2.815t.m \end{cases} \quad (1.21)$$

3. En réalisant la superposition des diagrammes élémentaires des moments fléchissants de la figure (1.2) et en remplaçant les valeurs de X et Y, on obtient le DMF final du système (voir figure 1.3).

Dans la figure (1.4), nous présentons le DMF du système sur un axe continu.

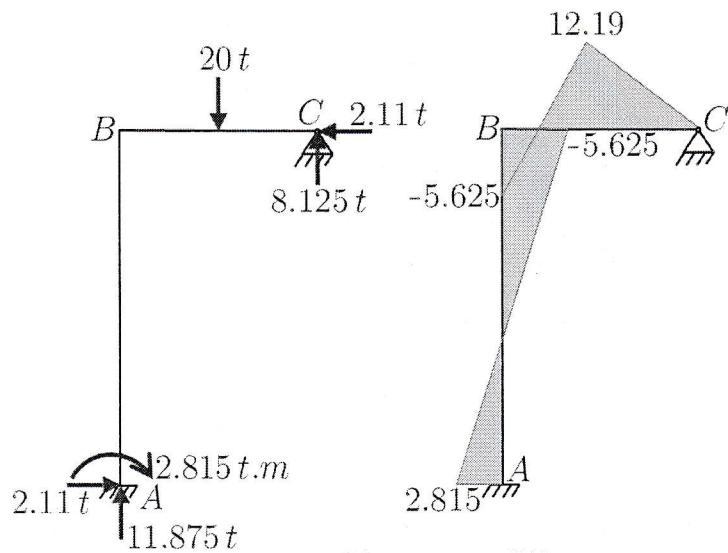


FIGURE 1.3 – Réactions d'appuis et DMF

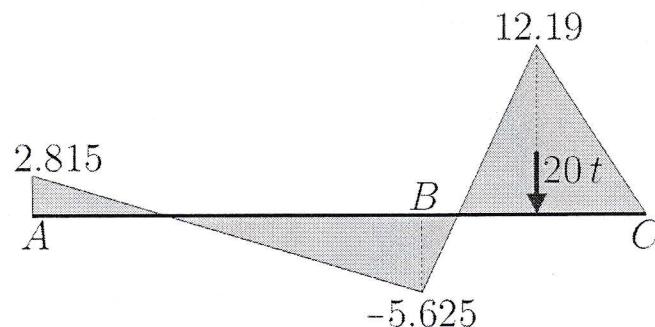


FIGURE 1.4 – DMF sur un axe continu

⇒ Exercice 2 :

Calculer les réactions et les moments d'enca斯特rement du système présenté dans la figure (1.5).

⇒ Solution 2 :

Les inconnues du système sont : H_A , V_A , M_A , H_B , V_B et M_B . Soit un nombre d'inconnues de 6.

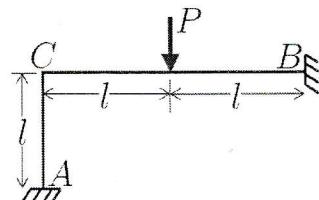


FIGURE 1.5 – Schéma de l'exercice 2

Puisqu'on a 3 équations d'équilibre, le système est donc hyperstatique de degré 3.

Soient H_A , V_A et M_A les inconnues hyperstatiques du problème.

Décomposons le système en 4 systèmes isostatiques simples comme présenté dans la figure (1.6).

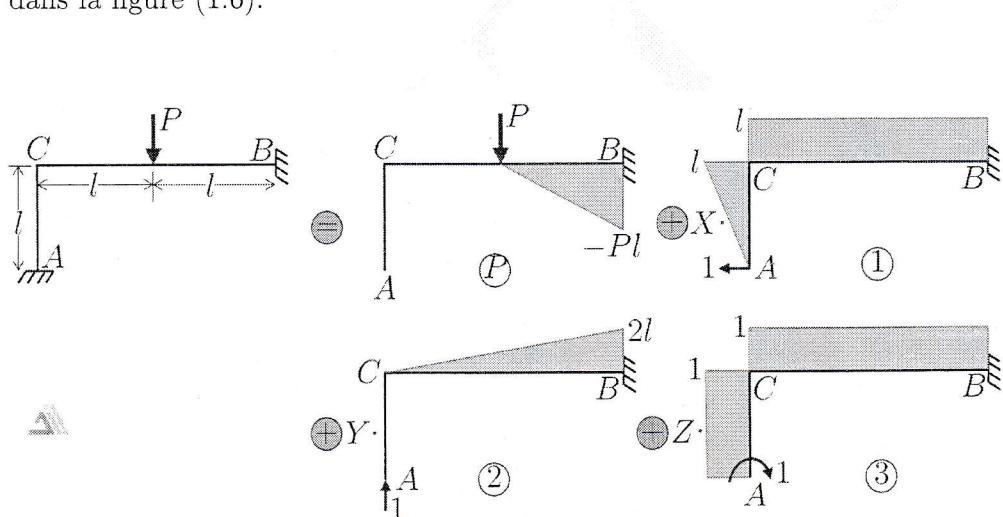


FIGURE 1.6 – Décomposition des efforts et DMF correspondants

Le théorème d'énergie potentielle de déformation s'écrit :

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \int \frac{(M_0 + XM_1 + YM_2 + ZM_3)^2}{2EI} dx \quad (1.22)$$

En appliquant le théorème de MÉNABRÉA, avec $EI = cte$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial U}{\partial X} & = & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial Y} & = & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial Z} & = & 0 \end{array} \right. \quad (1.23)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \int(M_0 + XM_1 + YM_2 + ZM_3)M_1 dx = 0 \\ \int(M_0 + XM_1 + YM_2 + ZM_3)M_2 dx = 0 \\ \int(M_0 + XM_1 + YM_2 + ZM_3)M_3 dx = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X \int M_1^2 dx + Y \int M_1 M_2 dx + Z \int M_1 M_3 dx = - \int M_0 M_1 dx \\ X \int M_1 M_2 dx + Y \int M_2^2 dx + Z \int M_2 M_3 dx = - \int M_0 M_2 dx \\ X \int M_1 M_3 dx + Y \int M_2 M_3 dx + Z \int M_3^2 dx = - \int M_0 M_3 dx \end{cases} \quad (1.25)$$

Le système (1.25) représente les équations canoniques de la méthode des forces.

Ce système peut être écrit sous la forme symbolique suivante :

$$\begin{cases} \delta_{11}X + \delta_{12}Y + \delta_{13}Z = -\delta_{1P} \\ \delta_{21}X + \delta_{22}Y + \delta_{23}Z = -\delta_{2P} \\ \delta_{31}X + \delta_{32}Y + \delta_{33}Z = -\delta_{3P} \end{cases} \quad (1.26)$$

Calculons les termes du système en utilisant les diagrammes de la figure (1.6) (utiliser les intégrales de MOHR par exemple) :

$$\delta_{11} = \int M_1^2 dx = \frac{1}{3}.l.l.l + l.l.(2l) = \frac{7l^3}{3} \quad (1.27)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int M_1 M_2 dx = \frac{1}{2}.l.(2l).(2l) = 2l^3 \quad (1.28)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \int M_1 M_3 dx = \frac{1}{2}.l.1.l + l.1.(2l) = \frac{5l^2}{2} \quad (1.29)$$

$$\delta_{22} = \int M_2^2 dx = \frac{1}{3}.(2l).(2l).(2l) = \frac{8l^3}{3} \quad (1.30)$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int M_2 M_3 dx = \frac{1}{2}.(2l).1.(2l) = 2l^2 \quad (1.31)$$

$$\delta_{33} = \int M_3^2 dx = 1.1.l + 1.1.(2l) = 3l \quad (1.32)$$

$$\delta_{1P} = \int M_0 M_1 dx = \frac{1}{2}.(-Pl).l.l = -\frac{Pl^3}{2} \quad (1.33)$$

$$\delta_{2P} = \int M_0 M_2 dx = \frac{1}{6}.(-Pl).(2.(2l)+l).l = \frac{-5Pl^3}{6} \quad (1.34)$$

$$\delta_{3P} = \int M_0 M_3 dx = \frac{1}{2}.(-Pl).1.l = \frac{-Pl^2}{2} \quad (1.35)$$

Le système devient :

$$\begin{cases} \frac{7l}{3}X + 2lY + \frac{5}{2}Z = \frac{Pl}{2} \\ 2lX + \frac{8l}{3}Y + 2Z = \frac{5Pl}{6} \\ \frac{5l}{2}X + 2lY + 3Z = \frac{Pl}{2} \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = H_A = -\frac{P}{4} \\ Y = V_A = \frac{7P}{16} \\ Z = M_A = \frac{Pl}{12} \end{cases} \quad (1.37)$$

Nous présentons ces efforts dans la figure (1.7).

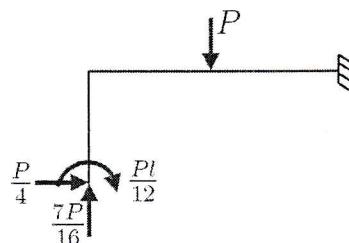


FIGURE 1.7 – Présentation des inconnues hyperstatiques

❖ Exercice 3 :

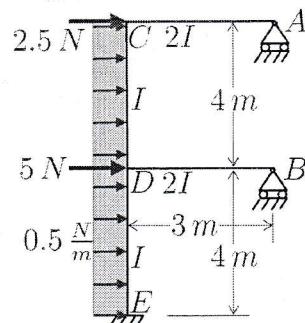


FIGURE 1.8 – Schéma de l'exercice 3

Calculer les moments aux nœuds du système présenté dans la figure (1.8). On prend $EI = 1$.

⇒ Solution 3 :

On a 5 inconnues, donc le système est hyperstatique de degré 2.
Soient les réactions d'appuis V_A et V_B les inconnues hyperstatiques du problème.

→ Première décomposition : (figure 1.9)

Dans cette première décomposition, le système est équivalent à 4 systèmes isostatiques (voir figure 1.9).

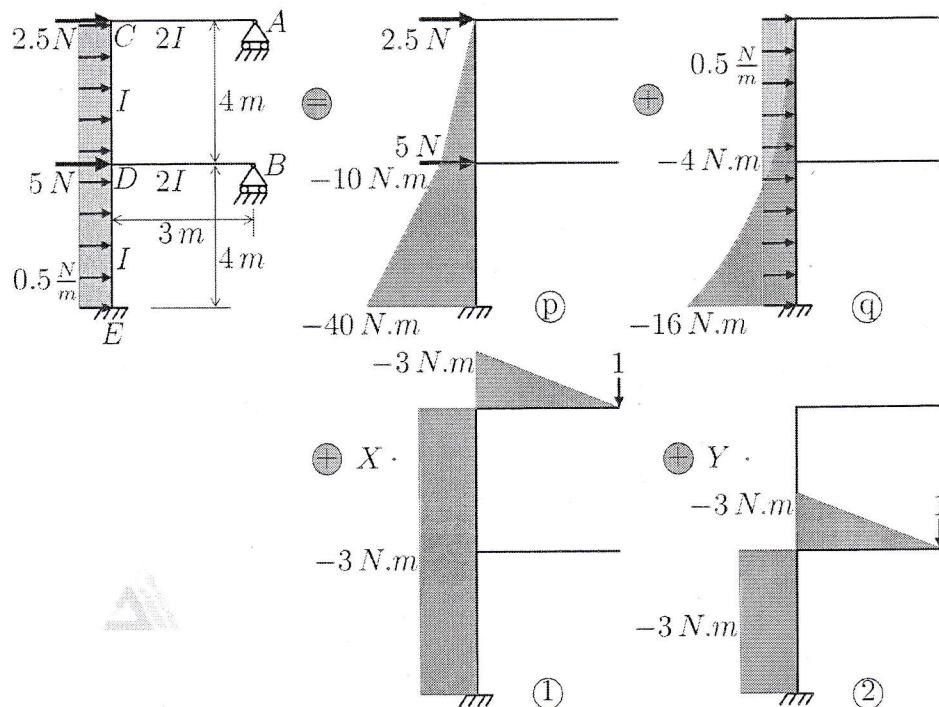


FIGURE 1.9 – Première décomposition des efforts de l'exercice 3

En appliquant le théorème de MÉNABRÉA, on obtient le système des équations canoniques qui a la forme :

$$\begin{cases} \delta_{11}X + \delta_{12}Y = -\delta_{1p} - \delta_{1q} \\ \delta_{21}X + \delta_{22}Y = -\delta_{2p} - \delta_{2q} \end{cases} \quad (1.38)$$

Calculons les termes du système :

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot (-3) \cdot 8 = \frac{153}{2} = 76.5 \quad (1.39)$$

avec $\frac{1}{2}$ est dû à l'inertie $2I$ de la barre horizontale.

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{EI} dx = (-3) \cdot (-3) \cdot 4 = 36 \quad (1.40)$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot (-3) \cdot 4 = \frac{81}{2} = 40.5 \quad (1.41)$$

$$\delta_{1p} = \int \frac{M_{0p} M_1}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot (-10) \cdot (-3) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-10 - 40) \cdot 4 = 360 \quad (1.42)$$

$$\delta_{1q} = \int \frac{M_{0q} M_1}{EI} dx = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-16) \cdot 8 = 128 \quad (1.43)$$

$$\delta_{2p} = \int \frac{M_{0p} M_2}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-10 - 40) \cdot 4 = 300 \quad (1.44)$$

$$\delta_{2q} = \int \frac{M_{0q} M_2}{EI} dx = \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-16) \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 4 = 112 \quad (1.45)$$

Le système (1.38) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{153}{2}X + 36Y = -488 \\ 36X + \frac{81}{2}Y = -412 \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = -2.737 \\ Y = -7.74 \end{cases} \quad (1.47)$$

→ Deuxième décomposition : (figure 1.10)

Dans cette deuxième décomposition, le système est équivalent à 5 systèmes isostatiques (voir figure 1.10).

L'enchaînement des calculs est le même. Seuls les termes δ_{1q} et δ_{2q} qui changent :

$$\begin{aligned} \delta_{1q} &= \delta_{1q_1} + \delta_{1q_2} \\ &= \int \frac{M_{0q_1} M_1}{EI} dx + \int \frac{M_{0q_2} M_1}{EI} dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-12 - 4) \cdot 4 \\ &= 128 \end{aligned} \quad (1.48)$$

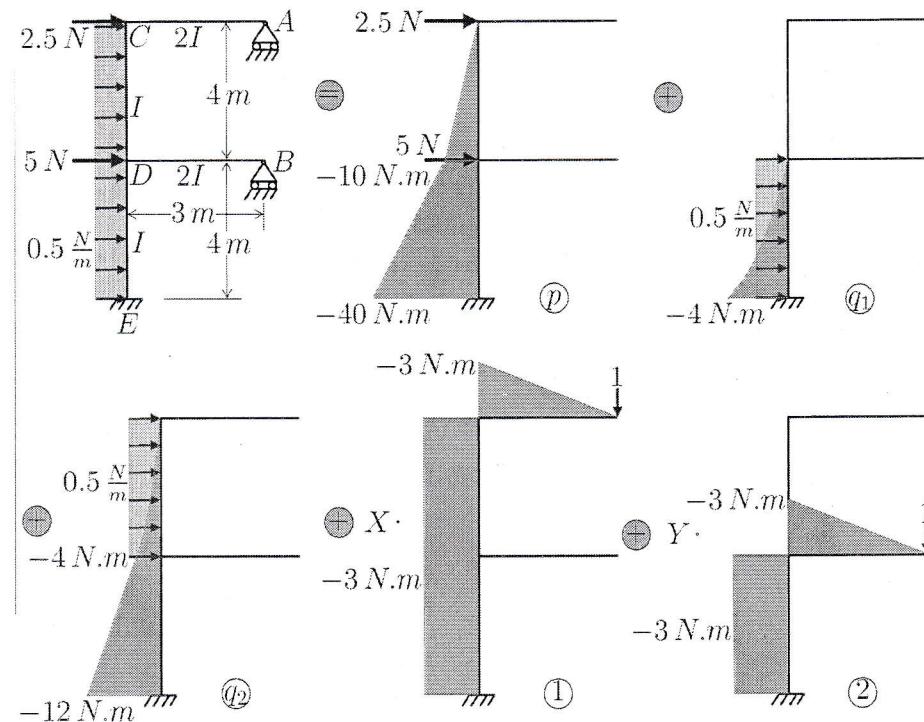


FIGURE 1.10 – Deuxième décomposition des efforts de l'exercice 3

$$\begin{aligned}
 \delta_{2q} &= \delta_{2q_1} + \delta_{2q_2} \\
 &= \int \frac{M_{0q_1} M_2}{EI} dx + \int \frac{M_{0q_2} M_2}{EI} dx \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-12 - 4) \cdot 4 \\
 &= 112
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Le système des équations canoniques devient le même.

Sur la figure (1.11), nous présentons le DMF du système.

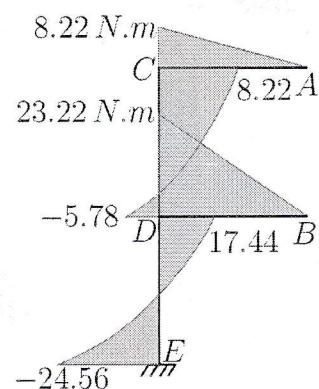


FIGURE 1.11 – DMF du système

Annexe A

Compléments du cours

A.1 Intégrales de MOHR

Les valeurs paramétriques des intégrales de MOHR, qui ont la forme de l'équation (A.1), sont données dans le tableau (A.1) :

$$I = \frac{1}{L} \int_0^L M(x)m(x) dx \quad (A.1)$$

★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
★	*	○
►	►	►

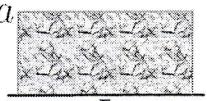
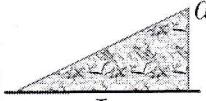
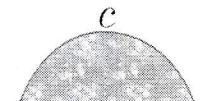
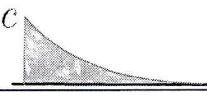
$I = \frac{1}{L} \int_0^L M(x)m(x) dx$			
$m(x)$	a 	a 	a 
c 	ac	$\frac{1}{2}ac$	$\frac{1}{2}c(a + b)$
	$\frac{1}{2}ac$	$\frac{1}{6}ac$	$\frac{1}{6}c(2a + b)$
	$\frac{1}{2}ac$	$\frac{1}{3}ac$	$\frac{1}{6}c(a + 2b)$
	$\frac{1}{2}a(c + d)$	$\frac{1}{6}a(c + 2d)$	$\frac{1}{6}(2ac + 2bd + bc + ad)$
	$\frac{2}{3}ac$	$\frac{1}{3}ac$	$\frac{1}{3}c(a + b)$
	$\frac{2}{3}ac$	$\frac{5}{12}ac$	$\frac{1}{12}c(3a + 5b)$
	$\frac{2}{3}ac$	$\frac{1}{4}ac$	$\frac{1}{12}c(5a + 3b)$
	$\frac{1}{3}ac$	$\frac{1}{4}ac$	$\frac{1}{12}c(a + 3b)$
	$\frac{1}{3}ac$	$\frac{1}{12}ac$	$\frac{1}{12}c(3a + b)$

TABLE A.1 – Valeurs des intégrales de MOHR