

Лекция 14.

Трудноразрешимые задачи

Даниил Михайлович Берлизов

Старший преподаватель Кафедры вычислительных систем СибГУТИ

E-mail: sillyhat34@gmail.com

Курс «Структуры и алгоритмы обработки данных»
Весенний семестр, 2021 г.

Полиномиальные алгоритмы

- **Полиномиальный алгоритм** (polynomial algorithm) — это алгоритм, вычислительная сложность которого принадлежит классу $O(n^k)$, где k — константа
- Алгоритмы с полиномиальной сложностью считаются «быстрыми» и применимыми на практике
- Примеры полиномиальных алгоритмов:
 - Сортировка выбором — $O(n^2)$
 - Бинарный поиск — $O(\log_2 n)$
 - Алгоритм Крускала — $O(|E| \log |V|)$

Легко разрешимые задачи

- **Легко разрешимая задача** (простая задача, tractable problem) — задача, решаемая алгоритмом с полиномиальной сложностью
- **Примеры:**
 - Задача сортировки
 - Задача поиска экстремального элемента в массиве
 - Поиск кратчайшего пути во взвешенном графе
 - Построение остовного дерева минимальной стоимости

Трудноразрешимые задачи

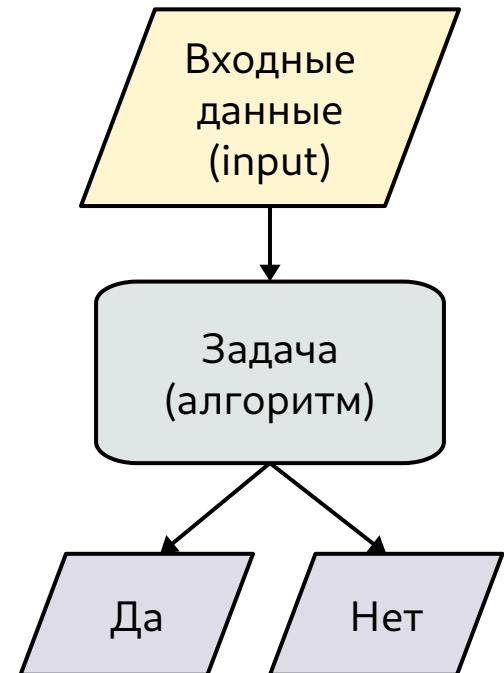
- Трудноразрешимая задача (intractable problem) — задача, для которой нет известных алгоритмов решения с полиномиальной сложностью

- М. Гэри, Д. Джонсон. **Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.** — М.: Мир, 1982
- Michael R. Garey, David S. Johnson. **Computers and intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.** — New York: Freeman, 1979
- Christos H. Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. **Combinatorial optimization: algorithms and complexity.** — Prentice-Hall, 1998



Теория вычислительной сложности

- **Теория вычислительной сложности** (computational complexity theory) — раздел теоретической информатики, посвящённый анализу вычислительной сложности алгоритмов
- Центральным объектом теории являются задачи **принятия решения**
- **Задача принятия решения** (задача распознавания, decision problem)
 - это задача, решение которой есть ответ: «да» или «нет»



Задача принятия решения

- Примеры:
 - По заданному графу определить, является ли он связным
 - Определить, является ли заданное число простым
- Многие задачи могут быть переформулированы как задачи принятия решения
- Задачи принятия решения разбиты на классы сложности

Класс сложности P

- **Класс сложности P** (polynomial) — это множество задач принятия решения, решаемых за полиномиальное время (для которых известны алгоритмы с полиномиальной трудоёмкостью)
- **Представители класса P:**
 - Задача сортировки
 - Задача обхода графа в глубину
 - Задача поиска экстремального элемента в массиве
 - Задача построения остовного дерева минимальной стоимости

Классы сложности

- Все ли задачи принятия решения являются полиномиально разрешимыми (принадлежат классу P)?
- Ответ: **нет**
- Существуют задачи, которые не могут быть решены никаким алгоритмом — **неразрешимые задачи**
- **Задача останова** (halting problem, A. M. Turing, 1939):
 - **Дано** описание алгоритма и его начальные входные данные
 - **Требуется** определить, сможет ли выполнение алгоритма с этими данными когда-либо завершиться
- Проблема останова неразрешима на машине Тьюринга

Трудноразрешимые задачи

- Имеется большое количество задач, для которых не найден полиномиальный алгоритм и не доказана невозможность его существования

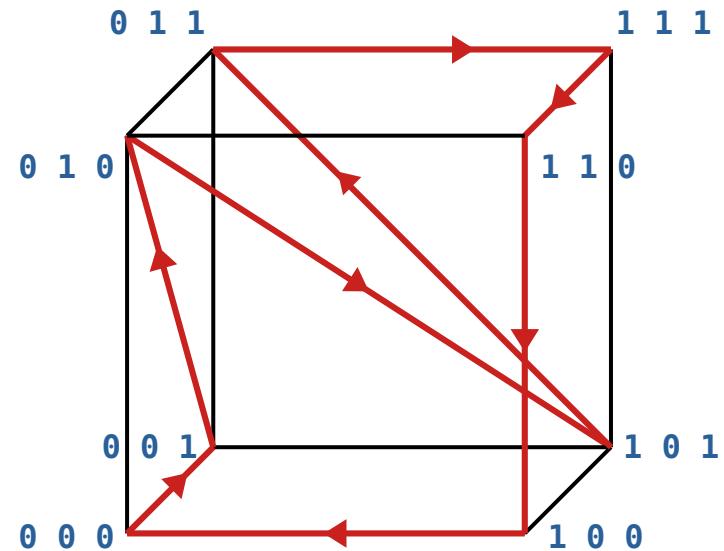
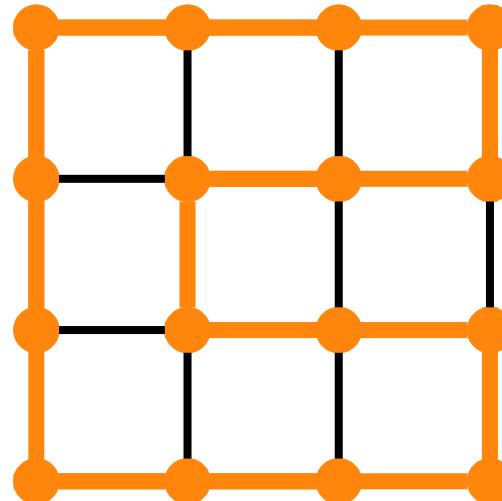
М. Гэри, Д. Джонсон. **Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.** — М.: Мир, 1982. — 416 с.



Трудноразрешимые задачи

Гамильтонов цикл (Hamiltonian cycle problem, HCP)

- Определить, имеется ли в заданном графе гамильтонов цикл — цикл, включающий в себя каждую вершину ровно один раз



Трудноразрешимые задачи

Задача коммивояжёра (travelling salesman problem)

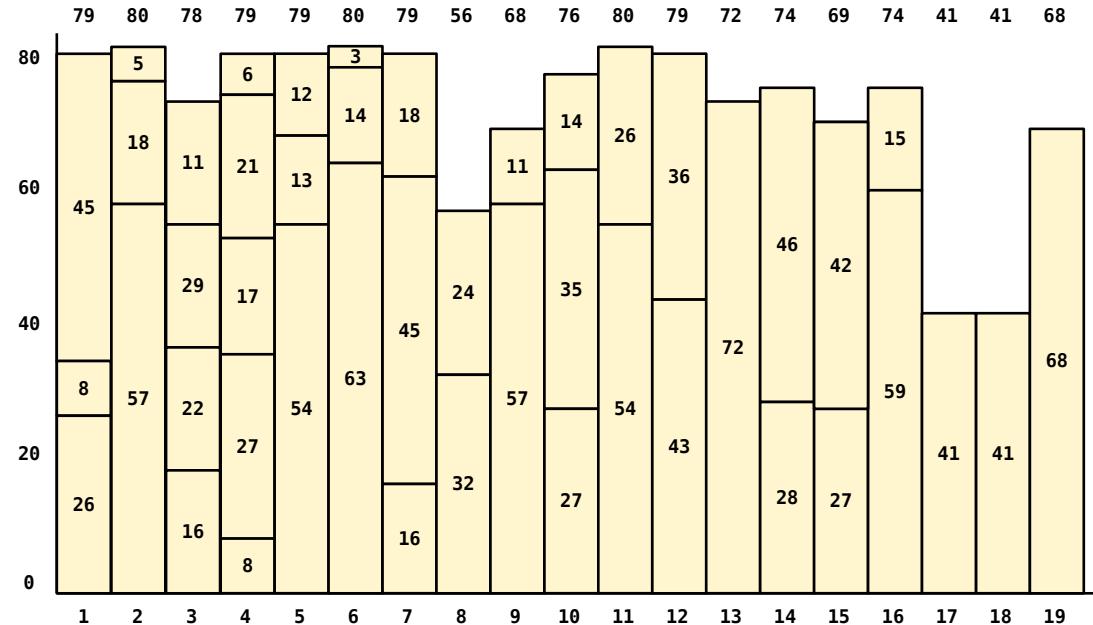
- Найти кратчайший путь (цикл) между заданными *n* городами
- Через каждый город путь должен проходить один раз



Трудноразрешимые задачи

Задача упаковки корзин (bin packing problem, BPP)

- Даны p предметов и их размеры
- Требуется разместить эти предметы в наименьшее количество корзин предопределённого объёма



Класс сложности NP

- **Класс сложности NP** (non-deterministic polynomial) — это множество задач принятия решения, решаемых недетерминированным полиномиальным алгоритмом
- **Структура недетерминированных полиномиальных алгоритмов:**
 - Шаг 1. Недетерминированным алгоритмом с полиномиальной сложностью формируется возможное решение S экземпляра I задачи (для заданных входных данных)
 - Шаг 2. Полиномиальным алгоритмом проверяется, является ли S корректным решением экземпляра I

Класс сложности NP

- **Класс сложности NP** (non-deterministic polynomial) — это множество задач принятия решения, решаемых недетерминированным полиномиальным алгоритмом
- **Представители класса NP:**
 - Задача поиска гамильтонова цикла
 - Задача коммивояжёра
 - Задача о рюкзаке
 - Задача упаковки корзин
 - ...

Класс сложности NP

- Так как для любой задачи из класса P решение строится за полиномиальное время, то

$$P \subseteq NP$$

- **Пример недетерминированного полиномиального алгоритма для решения задачи сортировки:**
 - Шаг 1. Формируем случайную перестановку элементов массива
 - Шаг 2. Проверяем, является ли массив упорядоченным
- Шаги выполняются, пока не будет получено корректное решение

Класс сложности NP

Недетерминированный полиномиальный алгоритм для решения задачи коммивояжёра

- Шаг 1. Формируем случайную последовательность из n городов (каждый раз будет получаться новая)
- Шаг 2. Вычисляем длину пути



Класс сложности NP

- Открытая проблема:

$$P = NP?$$

- Вопрос поставлен независимо Л. Левиным (СССР, 1971) и С. Куком (США, 1971)
- Проблема равенства классов P и NP является одной из семи задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил [премию в миллион долларов](#)
- Многие математики считают, что эти классы не равны
 - Согласно опросу (2002 г., 100 учёных): 61 человек — «не равны», 9 — «равны», 22 затруднились ответить и ещё 8 считают, что гипотеза не выводима из текущей системы аксиом и, таким образом, не может быть доказана или опровергнута

Сводимость задач

- Задача принятия решения T_1 называется **полиномиально приводимой** (polynomially reducible) к задаче принятия решения T_2 , если имеется функция t , которая преобразует экземпляры T_1 в экземпляры T_2 так, что:
 - t отображает все экземпляры T_1 с положительными ответами в экземпляры T_2 с положительными ответами и все экземпляры T_1 с отрицательными ответами в экземпляры T_2 с отрицательными ответами
 - t выполняется (вычислима) алгоритмом с полиномиальной трудоёмкостью

Сводимость задач

- **Следствие:**
 - Если задача T_1 полиномиально приводима к задаче T_2 , которая является полиномиально разрешимой, то задача T_1 также может быть решена за полиномиальное время

NP-полные задачи

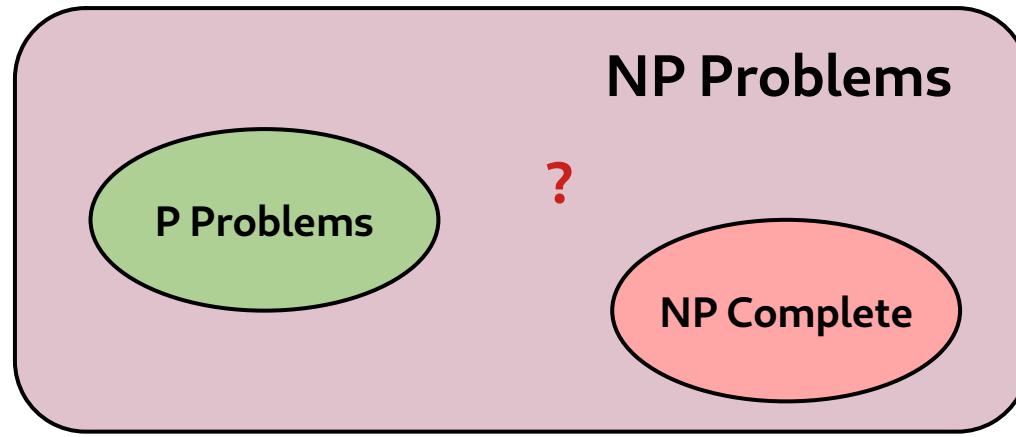
- Задача T принятия решения является **NP-полной** (NP-complete), если:
 - Она принадлежит классу NP
 - Любая задача в NP полиномиально приводима к задаче T
- NP-полные задачи образуют класс NPC
- **Примеры NP-полных задач:**
 - Задача поиска гамильтонова цикла
 - Задача коммивояжёра

NP-полные задачи

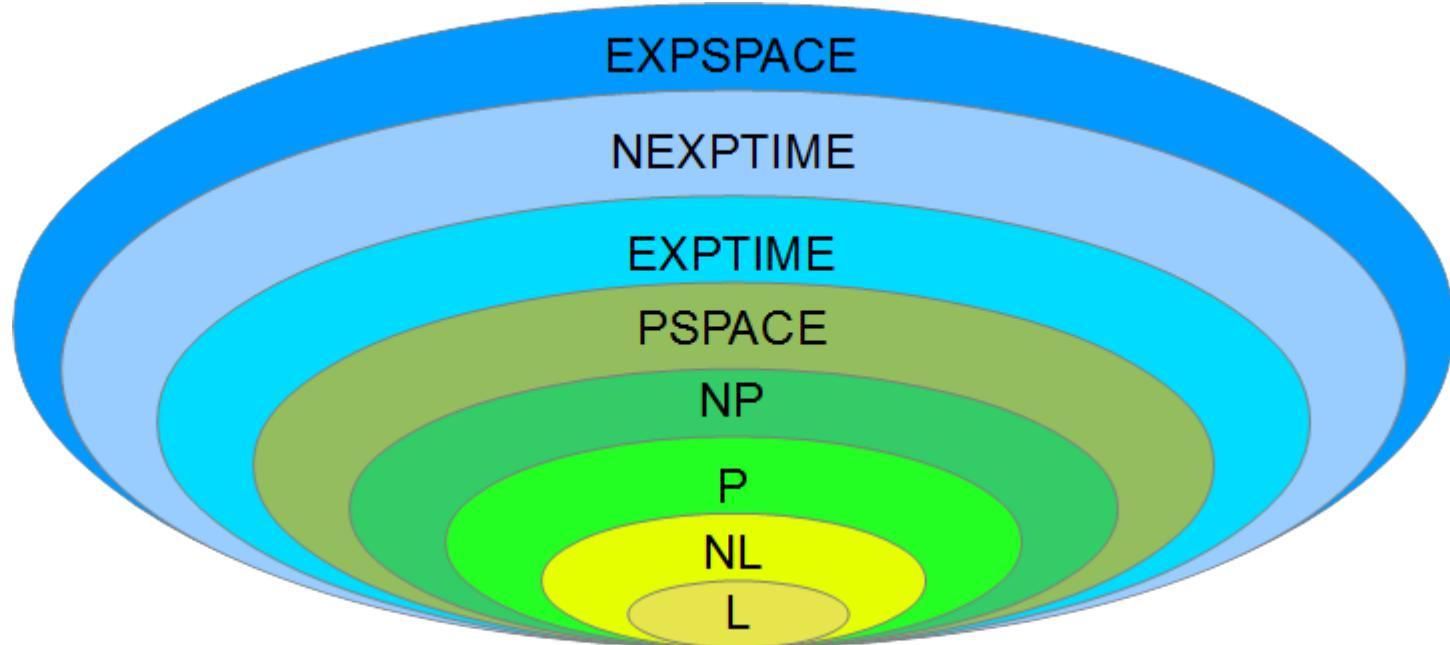
- Доказательство NP-полноты задачи:
 1. Показываем, что задача принадлежит классу NP (проверка произвольного решения выполняется за полиномиальное время)
 2. Показываем, что какая-либо NP-полнная задача приводится к данной

[List of NP-complete problems](#)

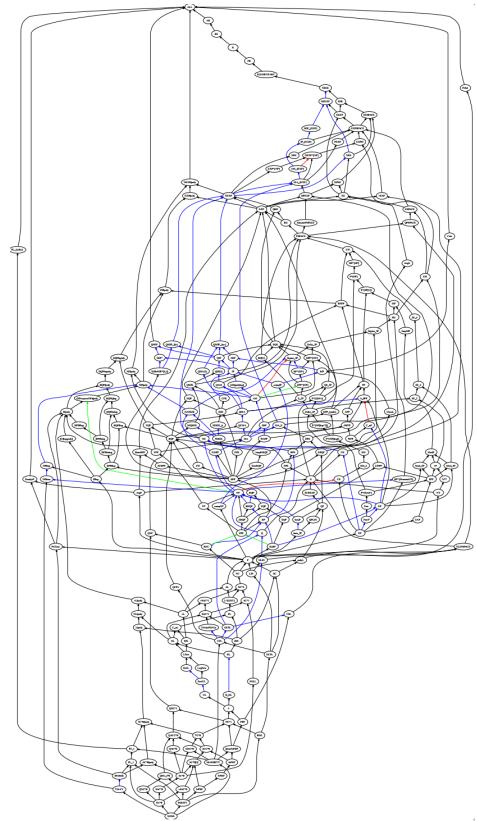
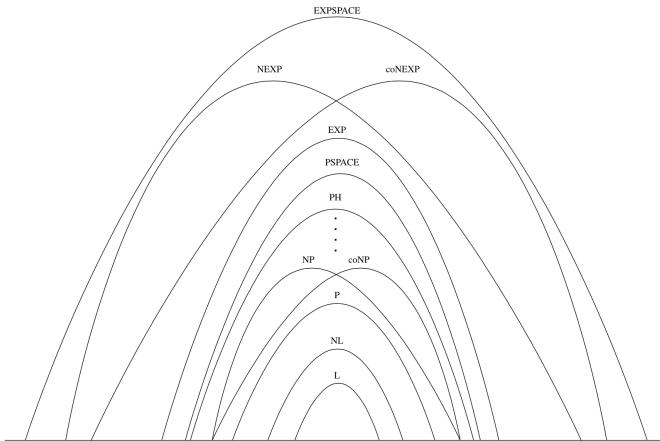
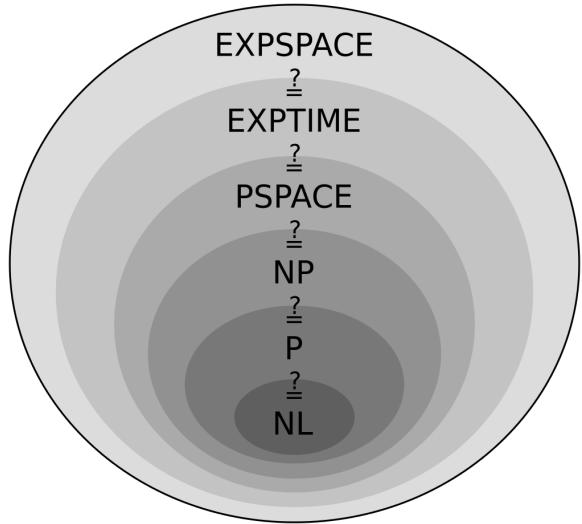
Complexity Zoo



Complexity Zoo



Complexity Zoo



Решение трудноразрешимых задач

Задача упаковки корзин (bin packing problem, BPP)

- Даны p предметов и их размеры
- Требуется разместить эти предметы в наименьшее количество корзин предопределённого объёма
- Эвристические алгоритмы решения:
 - FFD — First Fit Decreasing
 - BFD — Best Fit Decreasing
 - ...

Домашнее чтение

- [CLRS, С. 1085] Глава 3. «NP-полнота»
- [Levitin, С. 417] «P, NP и NP-полные задачи»



31 ДЕКАБРЯ 1999

ご清聴ありがとうございました!

Даниил Михайлович Берлизов

Старший преподаватель Кафедры вычислительных систем СибГУТИ

E-mail: sillyhat34@gmail.com

Курс «Структуры и алгоритмы обработки данных»
Весенний семестр, 2021 г.