Part Ⅰ 上册中可能用到的定义、定理

单调有界收敛定理、闭区间套定理、子列方法

B-W定理（在些反证法中）有限覆盖定理

等价量、极值定理、介值定理、Rolle、Lagrange

一致连续、导数定义、L'Hospital法则（$\frac{0}{0}$ $\frac{*}{\infty}$）

Stolz定理 Taylor公式 基本积分表

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}+\cdots+\frac{f^{n}(x_0)(x-x_0)^{n}}{n!}+r_{n+1}(x)$$

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{n+1}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\exists\theta\in(x,x_0)\text{或}(x_0,x))$$

Lagrange

$$r_{n+1}(x)=o((x-x_0)^{n}).$$

$$r_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\,dt\quad(\text{积分})$$

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n}(x-x_0)}{n!}$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0-\theta x+\theta x_0)^{n}(x-x_0)}{n!}$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^{n}(x-x_0)^{n+1}}{n!}\quad(\text{Cauchy})$$

Part 2. 常用做题技巧:

拟合法 (即作差估计, 有时要寻找归一化条件).

定积分的估计: ① 扩大/缩小积分区间 (当内部恒号时)

② 若被积 $f(x)$ 恒 >1 或恒 <1, 则可考虑多乘一个 f.

③ 取被积变量的最值点.

④ 绝对可积性.

两边夹法则及其推广形式.

Laplace方法 (局部性原理、分段估计)

构造等比数列 $|q|<1$, 从而 $q^n \to 0$ $(n \to +\infty)$

$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

当 $f \in R[a,b]$ 时可考虑用可积准则进行估计.

有时可对积分进行拆分. $\int_a^b = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i}$ (如: 定积分连续性)

N-L公式: $f(a)=0$ $\quad f(b) = f(b) - f(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

(用于建立 f, f', f'' 之间互化, 多用于积分估计)

Lagrange中值, Taylor公式 → 关注特殊点 (通常作为积分限、展开中心、代入点)

出现比值形式时刻留意是否可 L'Hospital

分步取极限

闭区间上的有界变差函数/振幅不可无限小的区间长和可以任意小的函数 可积.

若 $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i > nt$, 则 $\exists \varepsilon_j$, $\varepsilon_j > t$.

若 $f\in R[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续

总是将 $\sin f(x)$ 的形式化为最简，即令 $u=f(x)$

有时估计积分时，可考虑分步积分法，来达到"降阶"

（通常是 $\sin nx\,dx=\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'dx$，即对三角积分）

被积区间变换：平移，伸缩，反对称，轴对称

可以简化问题，显化性质

递归问题有时可考虑反复分步积分

第一积分中值定理：是把非负的给里面，$\xi\in\underbrace{(a,b)}_{加强型}$

第二积分中值定理：单调非负 → 有一边；单调 → 有两边　　$\xi\in\underbrace{[a,b]}_{只有闭区间}$

↓

看到单调性，联想到 Bonnet 公式

Cauchy 不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx$$

Hölder 不等式：

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\,dx\le\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

可对反常积分拆分区间讨论

$\int_{1\infty}$ 与 $\int_{2\infty}$ 同敛散 $\Leftarrow$ $\int_{1\infty}=\int_{2\infty}+\int_{3}$ （$\int_3$ 收敛）

三角公式要灵活运用

直出现 $\int_a^b f'(x)\,dx$ 一定考虑 N-L 公式

Riemann 引理及其证明.

难以操作时考虑 ε-N 语言.

充分使用单调性

$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$

加一项减一项 → Lagrange
→ 可积准则

子列方法

Cauchy 准则及其否定

正项级数：比较、Cauchy、D'Alembert 判断

级数 积分 → $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}|\sin x|^{\beta}}\,dx$ 收敛 $(\alpha>\beta>1)$

Abel 变换. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = B_n a_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)B_k$

任意项级数：A-D 判别法、Cauchy 准则 (+Abel 变换)

求和估计：$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

$$\int_1^{+\infty} f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty}\int_i^{i+1} f(x)\,dx \le \sum \int_i^{i+1} f(i+1)\,dx = \sum f(i+1)$$

$$\sum f(i) = \sum \int_i^{i+1} f(i)\,dx \le$$

利用区间可加性拆开.

Cantor 定理 、 类 Heine 定理的证明：一正一反

函数项级一致收敛的必要条件：通项一致 → 0.

优级数判别法、A-D 判别法

与函数序列判别有较大差异

Dini定理及其应用 → 有时做不出来时可考虑

证明：反证法 取 $|f_n(x_n)| \geq \varepsilon_0$（即余项书写）

的 $\{x_n\}$ 由B-W定理取子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛 又由连续

性推矛盾

等度连续 与一致收敛在某些情况下可互推

$\underbrace{1, 2, 3, \cdots, N}_{\text{有限项}}, \underbrace{N+1, \cdots\cdots}_{\text{被控制住}}$ ⟹ 整体可控

（分析中的常用手法）

逐项取极限/连续/求导/积分

都由一致收敛保证 当有些多重极限过程换序

后问题有极大简化时（或已解决）可考虑去证一致性

从而换序

有时可反过来证明不一致收敛 i.e. 假设一致、用上述

逐项定理（或累次极限换序定理）推出与点态收敛相

违背的结果

一个经验：存在性定理 + 刻画性定理会得到一些好

的结果

Weierstrass等一逼近定理有时有奇效（与多项式有关问题）

广义/缺项幂级数的处理 $R \geq \min\{R_1, R_2\}$

换元反解 补全

收敛半径与级数运算关系 $\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right) = \sum c_n$

$\sum a_n + \sum b_n = \sum c_n$

注意到 $(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ （ $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ ）

及 $(1-x)(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$R=1$ 　　收敛

Abel第一定理：$\sum a_n x^n$ 在 $|x_1|$ 处收，在比 x_1 更靠近中心的点必收.

Abel第二定理：即幂级数若收敛则必一致收敛.
从而有相应逐项定理.

$\sum a_n$ 收. $\sum a_n x^n \to$ 求在 $(-1,1)$ 上的 $S(x)$ 则 $\sum a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x)$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$$

$\sum a_n x^n$ 的值能被它在收敛于0的点列上的值唯一确定.

初等函数展开为幂级数

① 变换为已知的

② 逐项积分/微分.（注意 证明收敛域）

③ 待定系数法（Cauchy 乘积）

④ Taylor级数 $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

⑤ 级数的运算.

注意到 Fourier级数 系数 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f(x-\tfrac{\pi}{n})\sin(nx-\pi)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tfrac{\pi}{n})\sin nx\,dx$$ $\longrightarrow$ 求和再时会出现 $(f(x+\Delta x)-f(x))$ 的形式

从而可利用Hölder条件, 中值定理、有界变差 等条件

$f \in R[a,b]$ $T_n(x)$ 为三角多项式. 则.

当 $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 为 f.

均方误差 $\delta_n \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-T_n(x)|^2 dx$ 最小.

(利用三角函数正交. Fourier 系数定义. 配方证明)

$\Downarrow$

顺便可得到 Bessel 不等式. 又由 Weierstrass ~~第二逼近定理~~

可得到 Parseval 等式.

Fourier 级数的推导常常涉及含三角定积分的计算.