Fourier 级数

一、计算 Fourier 系数 / Fourier 级数展开

① $\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = a_0$ $\quad \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx = a_n$

$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx = b_n$ （肌肉记忆）

② 奇函数 → 正弦级数，只算 $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx$

$a_0 = a_n = 0$.

偶函数 → 余弦级数，只算 $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$

$b_n = 0$ $\qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos nx\,dx$

③ 常用定积分结果. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = 0$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$ $\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx\,dx = 0$

$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$

④ 掌握常用收敛判别法: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$.

(i). Dini - Lipschitz 判别法推论: (局部性)

若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处两侧的拟单侧导数存在. 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$.

(ii). Dirichlet - Jordan 判别法: (全局性)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段单调有界. 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[a,b]$ 上每点 x 点态收敛于 $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$

(iii). Fourier 级数一致收敛判别：（经可证）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上按段光滑，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$

二. (类)卷积核相关.

① Dirichlet 核. 定义： $K_m(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 0 \\ m+\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$

作用: $S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_m(t)\, dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

$$\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cdot)(x+t)\cdot K_m(t)\, dt} \rightarrow \text{卷积算子}$$

② Fejér 核. 定义: $F_m(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\frac{m}{2}x}{m\sin^2\frac{1}{2}x}, & x \neq 0 \\ \frac{m}{2}, & x = 0 \end{cases}$

作用: $\sigma_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_m(t)\, dt = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_n(x)$

③ 熟悉几个结果: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)\, dx = 1, \ \forall m \in \mathbb{N}^+$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_m(x)\, dx = 1, \ \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

$$\frac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\cos kx$$

$$\frac{\sin^2\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\tfrac{1}{2})x$$

三. 推导 Fourier 级数收敛条件过程中引入/得到的结论:

① Riemann引理：

区间$E \supseteq \mathbb{R}$，$f(x)$在$\mathbb{R}$上绝对可积，$g(x)$周期为T且在任意$\mathbb{R}$内闭区间上Riemann可积，则有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_E f(y)\, g(\lambda y)\, dx = \frac{1}{T} \int_E f(y)\, dy \int_0^T g(y)\, dy$$

② Dirichlet引理：设$\psi(x)$在$[0,\delta]$上单调，则

$$\lim_{p \to +\infty} \int_0^{\delta} \frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u} \sin pu \, du = 0$$

③ 经过Dirichlet核作用后，$f(x)$的Fourier级数在x处是否收敛于某个$\sigma(x)$就等价于极限

$$\lim_{u \to 0+} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u) - 2\sigma(x)] \frac{\sin (m+\frac{1}{2}) u}{2 \sin \frac{1}{2} u} du$$

是否存在。

④ Dini条件：$\dfrac{f(x+u) + f(x-u) - 2\sigma(x)}{u}$关于$u$在$[0,\delta]$上可积或绝对可积，这要求至少$\sigma(x) = \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$

于是要使得$\dfrac{f(x+u) + f(x-u) - f(x+) - f(x-)}{u}$在$[0,\delta]$上可积，这只要要求$u \to 0+$时上式有界

⑤ 积分号内的形式上等价无穷小替换

$\psi(x)$可积$[0,\delta]$，则

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^{\delta} \psi(x) \frac{\sin (m+\frac{1}{2}) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx = \lim_{m \to +\infty} \int_0^{\delta} \psi(x) \frac{\sin (m+\frac{1}{2}) x}{x} dx$$

四、Fourier级数的分析性质：

① $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

则有：$\lim_{n\to+\infty}a_n=0$，$\lim_{n\to+\infty}b_n=0$（Riemann引理）。

② Fourier级数逐项积分：$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积（只有有限间断点）。

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则有 $\forall x,c\in[-\pi,\pi]$（$x>c$）。

$$\int_c^x f(t)\,dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}\,dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,dt$$

③ $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是某个在$[-\pi,\pi]$上的可积函数$f(x)$的Fourier级数 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

④ Fourier级数的逐项微分：$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续且除有限个点外均可导，$f'(x)$可积，且$f(-\pi)=f(\pi)$。

则 $f'(x)\sim\frac{d}{dx}\left(\frac{a_0}{2}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx)$$

⑤ Bessel不等式：$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$