

数字信号处理课程设计



题目： FIR 等波纹滤波器优化设计

学生姓名： 杨朝辉 学号： PB17071433

起始日期： 2019/10/20

结题日期： 2019/12/20

摘要 本课题设计利用最优化等纹波设计理论实现了数字低通 FIR 滤波器程序的构建、优化与测试，并通过与窗函数法和 IIR 滤波器在实际和理论中的对比与分析，探讨了等纹最优 FIR 滤波器的阶数、幅频、衰减等频域特性参数的具体关系。

关键字 FIR, Remez 交换, Chebyshev 等纹逼近, 数字低通

目录

一、线性相位响应 FIR-Filter 最优化理论.....	4
1.1 Chebyshev 等纹波逼近准则	4
1.2 交错定理.....	5
二、等纹最优化 FIR 滤波器实现.....	6
2.1 滤波器技术指标.....	6
2.2 Remez 交换算法	7
2.3 具体实现架构.....	9
三、程序的优化与测试.....	9
3.1 最优化等纹滤波器频率特性.....	9
3.2 与 Matlab 内置 remez/remezord 函数比较.....	12
3.3 与窗函数设计方法的比较.....	13
3.4 与 IIR 椭圆滤波器的比较.....	14
四、讨论.....	15
4.1 线性相位 FIR-Filter 设计方法比较.....	15
4.2 一些设计技巧结论.....	15
参考文献.....	17

一、线性相位响应 FIR-Filter 最优化理论

1.1 Chebyshev 等纹波逼近准则

各种设计 FIR 滤波器的方法，如窗函数、频率抽样、傅里叶变换等，都有着不同的理论依据和实现手段，同时也存在各自的限制。如窗函数方法虽然简单，却不能够精确控制通/阻带截至频率，且在过渡带处的肩峰波纹较大，频率抽样法同样存在此类缺陷。

一种比较独特且性能良好应用广泛的 FIR 滤波器设计方案称为等纹滤波器最优化设计法，又称 Chebyshev 逼近法。等波纹 FIR-Filter 最优法以 Chebyshev 一致逼近问题为依据，在设计线性相位响应的 FIR 滤波器中，将理想频率响应 $H_d(\omega)$ 和实际所设计的频率响应 $H(\omega)$ 之间的加权误差最小化，克服了窗函数设计法和频率采样法不能精确控制 ω_s 和 ω_p 的值的缺点，同时使得最大纹波峰值最小化，并在整个通带和阻带上均匀分布。

一般地，线性相位响应滤波器的频率响应表达式可以表示为

$$H(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$$

其中

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha_n \cos(\omega n)$$

为 r 个余弦函数的线性组合， $Q(\omega)$ 为与 n 无关而仅与 ω 有关的简单余弦函数。

定义加权逼近误差函数

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega) [H_d(\omega) - H(\omega)] \\ &= \widehat{W}(\omega) [\widehat{H}_d(\omega) - P(\omega)] \end{aligned}$$

其中

$$\widehat{H}_d(\omega) = \frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)}, \quad \widehat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega)$$

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1}, & \text{in passband} \\ 1, & \text{in stopband} \end{cases}$$

$W(\omega)$ 是为要求不同频段的加权误差最大值相等考虑而引入的权函数，则加权误差最大值最小化准则要求

$$P(\omega) = \arg \min \{ \max [|E(\omega)|] \}$$

其中 ω 遍及通带和阻带（不包括过渡带），此时所求 $H(\omega)$ 是为理想滤波器的一致逼近。

1.2 交错定理

Parks 和 McClellan 在 1972 年提出的交错定理为解决上述一致逼近问题提出了解决方案，其大致内容如下：

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha_n \cos(\omega n)$$

是 $\widehat{H}_d(\omega)$ 的唯一且最佳的 Chebyshev 逼近的充要条件为，误差函数 $E(\omega)$ 在频带上至少有 $r+1$ 个极值点，且交错分布，即

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$|E(\omega)| = \max \{ E(\omega) \}$$

同时，通过分析可知， $E(\omega)$ 在截至频率处取得极值，且 $P(\omega)$ 之

多有 r 个极值点，如此把握了误差函数的极值点特性便使得设计函数 $P(\omega)$ 的求解大为方便。

二、等纹最优化 FIR 滤波器实现

2.1 滤波器技术指标

拟设计低通 FIR 等纹最优化滤波器，指定截止频率 ω_p 和 ω_s ，及通带和阻带衰减 δ_1 、 δ_2 ，求出满足其要求的阶数较低的系统冲激响应 $h(n)$ 。

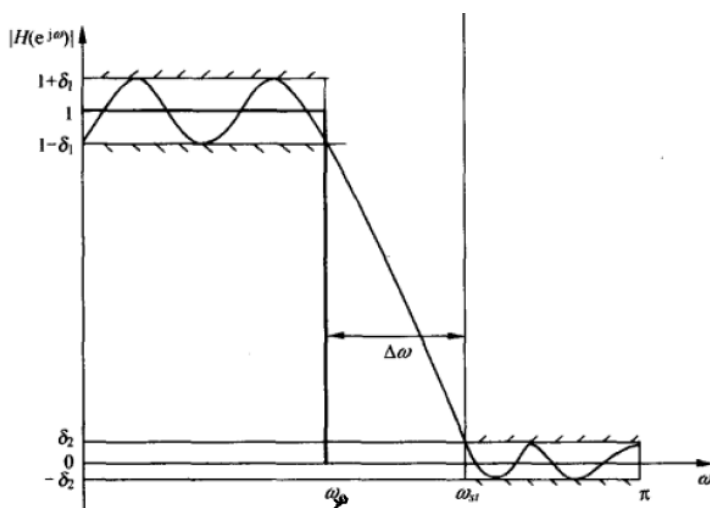


图 1：低通等纹滤波器幅频响应

实际中，通常指定通带、阻带衰减为 α_p 、 α_s （分贝值），其与幅度 δ_1 、 δ_2 转换关系可表述为

$$\delta_1 = \frac{10^{|\alpha_p|/20} - 1}{10^{|\alpha_p|/20} + 1}$$

$$\delta_2 = 10^{-|\alpha_s|/20}$$

则指标 α_p 、 α_s 用以指定权函数 $W(\omega)$ 的分段函数值。

阶数 N 并不直接指定，而是通过上述其他指标来求得满足要求的

较低阶数的滤波器，Kaiser 曾给出一个简单的近似公式

$$\hat{N} = \frac{-20\lg(\sqrt{\delta_1\delta_2}) - 13}{14.6(\omega_s - \omega_p)/2\pi} + 1$$

而本次设计中采用另一个更为准确的公式（由 Hermann 等于 1973 年提出）

$$\hat{N} = \frac{D_\infty(\delta_1, \delta_2) - g(\delta_1, \delta_2)(\Delta f)^2}{\Delta f} + 1$$

来估计滤波器长度，其中

$$\Delta f = (\omega_s - \omega_p)/2\pi$$

$$g(\delta_1, \delta_2) = 11.012 + 0.51244\lg\frac{\delta_1}{\delta_2}$$

$$D_\infty(\delta_1, \delta_2) = (0.005309\lg^2\delta_1 + 0.07114\lg\delta_1 - 0.4761)\lg\delta_2 \\ - (0.00266\lg^2\delta_1 + 0.59411\lg\delta_1 + 0.4278)$$

若所得到的 δ 大于指定 δ （即 δ_2 ），可通过增加长度 N 来满足旁瓣水平要求。

2.2 Remez 交换算法

采用 Remez 交换迭代算法，减少矩阵运算的时空资源的开销，同时通过不断迭代提高结果精度。具体言之，首次迭代时选择认定的等间隔的初始极值点进行计算，得出 $E(\omega)$ 极值点及极值，再利用所得极值点代入迭代，直至不再求出。当然其中会利用 Lagrange 插值公式以减少矩阵运算开销。

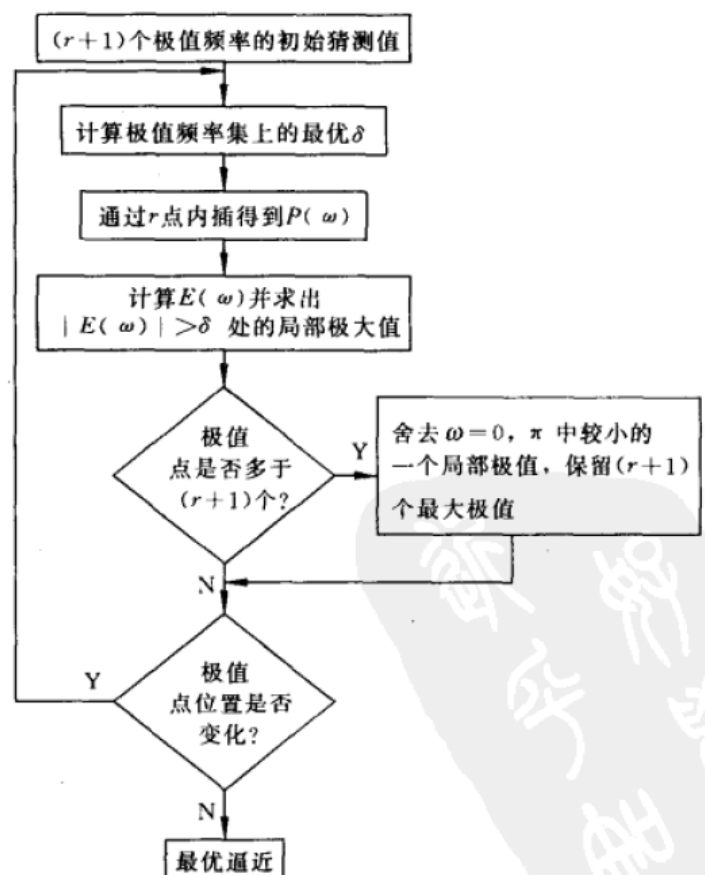


图 2: Remez 交换迭代算法流程图

对于上述流程图中的最有逼近判别条件，也可令表述为当迭代 δ 至与前一次 δ 相等时，迭代终止，得到最优逼近。这是由于每次迭代得到的新交错点组频率都是 $E(\omega)$ 的局部极值点频率， δ 会递增直至收敛于自身的上界。

求出 $P(\omega)$ 后边能够求得各余弦项系数 α_n ，进而得到滤波器冲激响应。当然其实不必求得系数 α_n ，也可以直接确定 $h(n)$ 。事实上，对 $H(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$ ，取其在 $\omega = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ 的抽样值，根据频率采样公式便能够直接得到 $h(n)$ 。

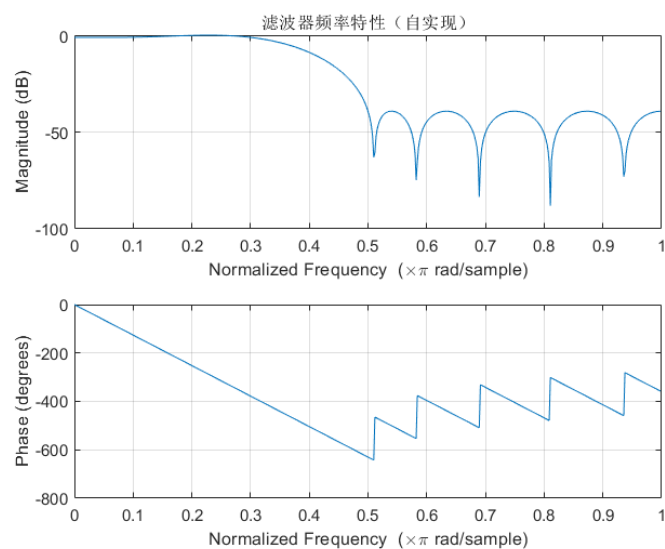
2.3 具体实现架构

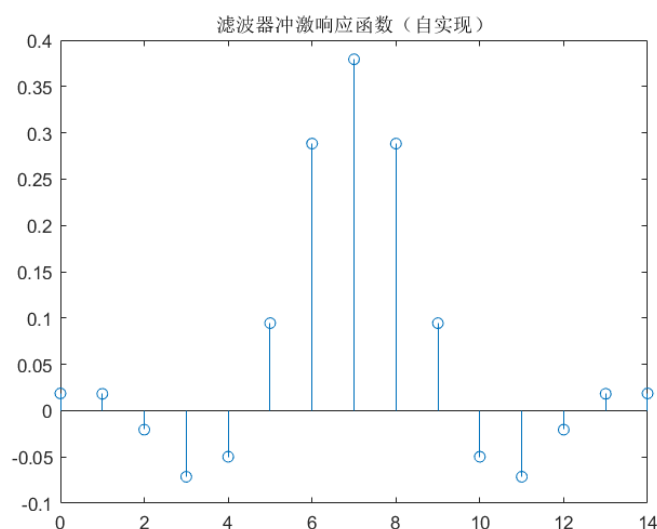
该设计采用上述 Remez 交换迭代算法，程序采用 Matlab 语言，实现了根据传入的低通滤波器技术指标迭代计算处最优逼近的滤波器时域冲激响应及其阶数。

三、程序的优化与测试

3.1 最优化等纹滤波器频率特性

指标要求以 $\omega_p = 0.3\pi$ 、 $\omega_s = 0.5\pi$ 、通带阻带衰减分别为 $\alpha_p = 1\text{dB}$ 、 $\alpha_s = 40\text{dB}$ 为例，利用 Remez 算法自实现的 FIR 滤波器频率特性和冲激响应时域特性如下，





可见其确实满足等纹要求和衰减要求，且所得阶数 $N = 15$ 。

另外，我们对相同阶数等纹滤波器的过渡带宽与幅度误差关系进行研究，根据下图特性关系，有理由得出“相同阶数下过渡带越窄幅度误差愈小”的结论，当然从 Kaiser 给出的滤波器阶数理论估值公式同样能得出相应的结论。

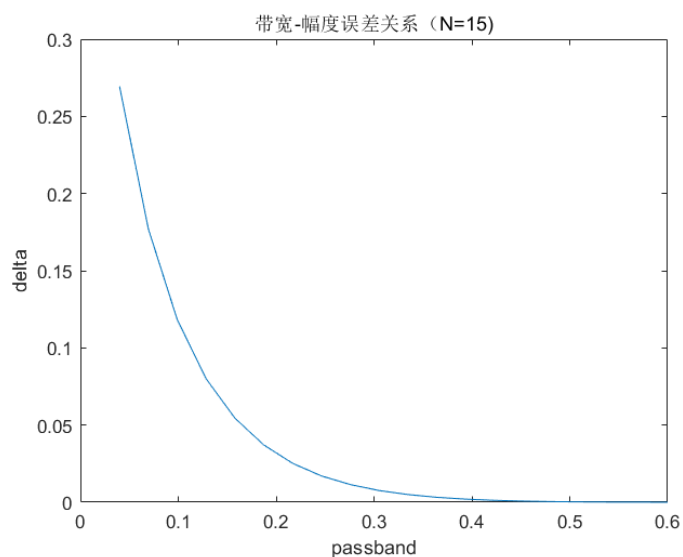


图 3：带宽 - 幅度误差关系图

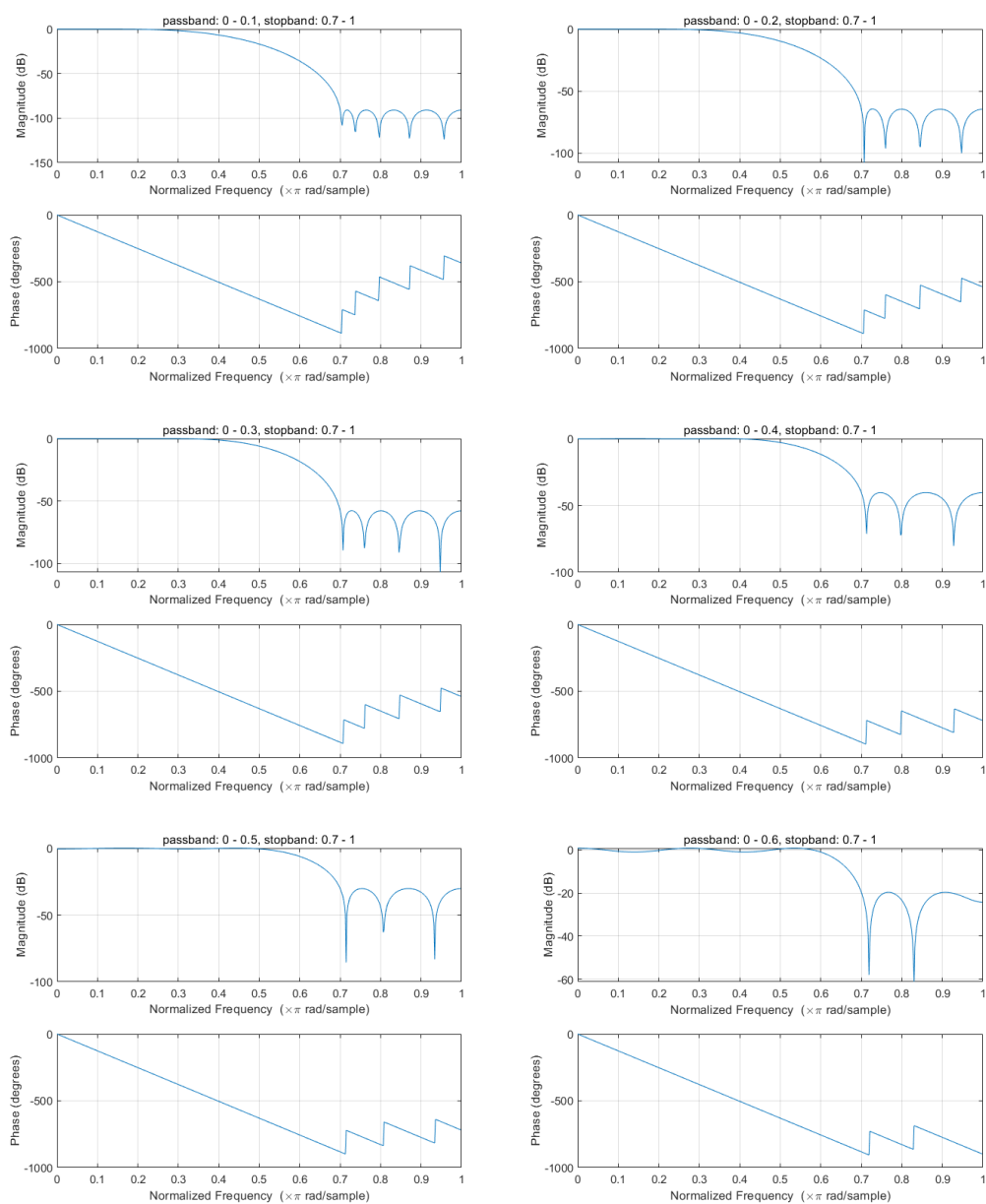


图 4：不同过渡带宽的 15 阶等纹滤波器频率特性

再者，我们研究相同过渡带宽即相同截至频率下不同阶数与幅度误差的关系，结果特性见下图，

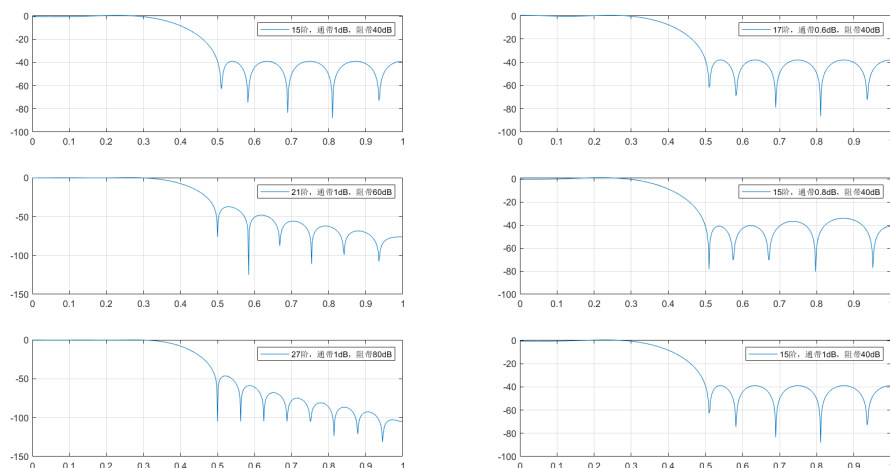
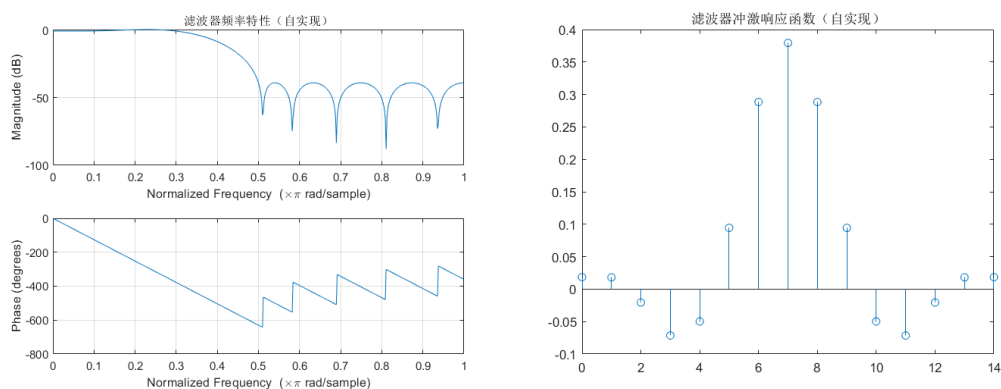


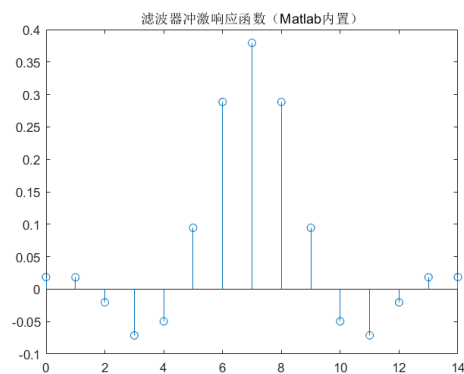
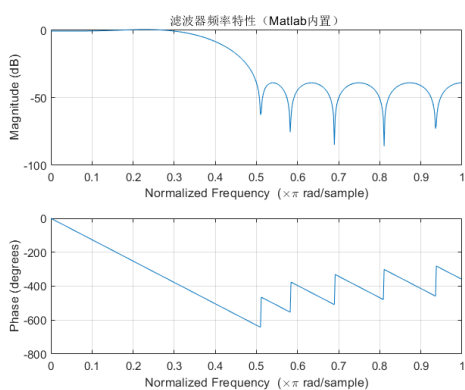
图 5: $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.5\pi$ 恒定下不同幅度误差指标的滤波特性

经分析可知，指标要求越高，滤波器阶数越高，通带和阻带的纹波越多，旁瓣也越窄，且滤波特性越好。

3.2 与 Matlab 内置 remez/remezord 函数比较

仍以上述指标要求为例，以下为利用自实现的 Remez 算法于 Matlab 内置 remezord 和 remez 函数得到等纹滤波器的结果比较，





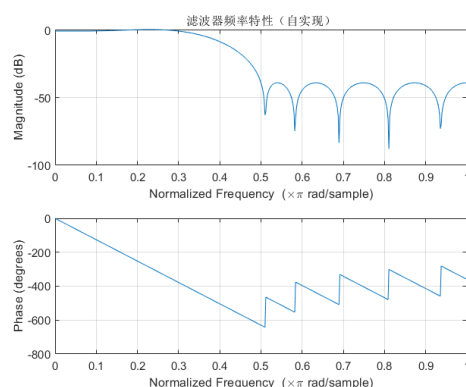
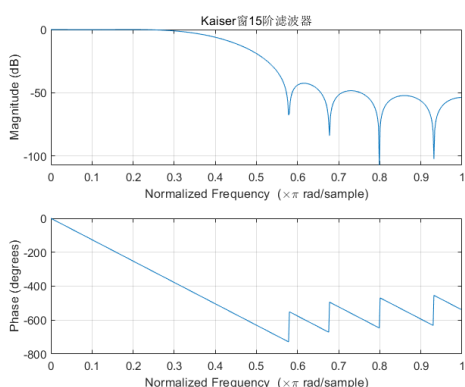
两者几乎完全相同。事实上，这两者所得滤波器阶数均为 $N = 15$ ，且时域冲激响应同为

$$h(n) = \{0.0186, 0.0182, -0.0206, -0.0714, -0.0498, \\ 0.0945, 0.2883, 0.3794, 0.2883, 0.0945, \\ -0.0498, -0.0714, -0.0206, 0.0182, 0.0186\}$$

可见此次滤波器设计效果良好。

3.3 与窗函数设计方法的比较

同样上述技术指标，与性能较优的相同阶数的 Kaiser 窗滤波器特性比较（取 3dB 截至频率 $\omega_c = 0.4\pi$ ，由于阻带衰减要求取 $\beta = 3.4$ ），

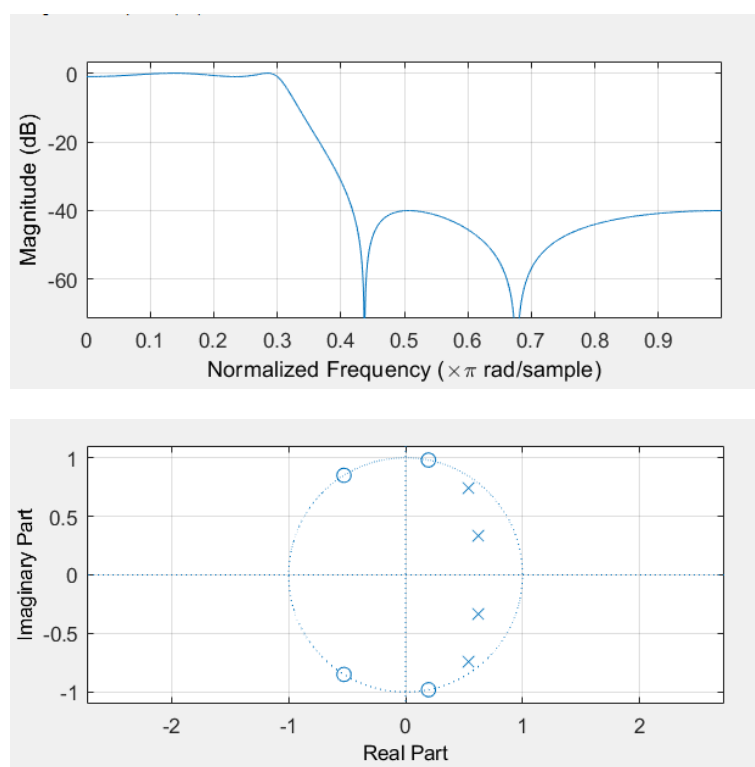


通过比较可知，最优化设计方法相比窗函数法，通带、阻带中靠近过渡带的肩峰波纹较小，且过渡带宽较窄。事实上，最优化滤波器的纹

波在阻带、通带均匀分布，在频带内的滤波效果更为均一化。上图表明窗函数滤波器通带和阻带幅度误差较小，但等纹滤波器幅度误差更为均一。特别地，上图中等纹滤波器过渡带宽 $\Delta\omega \approx 0.2\pi$ ，窗函数法 $\Delta\omega \approx 0.27\pi$ 。

3.4 与 IIR 椭圆滤波器的比较

设计得相同幅度误差和过渡带宽的 IIR 椭圆滤波器，其幅频特性与零、极点特性如下，



可见所得 IIR 滤波器延迟单元数量为 4，相较前述 FIR 等纹滤波器阶数 15 较小，则椭圆滤波器能够以较低的阶数获得较窄的过渡带宽，但是它在通带和阻带上都有非等纹波动。

四、讨论

4.1 线性相位 FIR-Filter 设计方法比较

实际应用当中窗函数方法较先得到了普及，后来频率采样方法和 Chebyshev 逼近法相继提出，同样得到广泛应用。窗函数法的优点已不必赘述，但其主要缺陷是缺乏对关键频率点的精确控制。频率采样方法对其做了一些改进，实际当中又能够利用 FFT 来进行快速的离散傅里叶变换提升设计速度。

Chebyshev 等纹逼近方法则对滤波器的技术指标提供了总控制，通过指定 ω_p 、 ω_s 、 δ_1 、 δ_2 等目标参数，估计长度 N ，而后迭代计算利用 δ_2 来优化滤波器。从原理上，这种方法将逼近误差较为均匀地分散到阻带和通带上，在最大旁瓣最小化的意义上，所得滤波器结构堪称最佳。

4.2 一些设计技巧结论

实际设计过程中需要权衡内在程序的简洁性和高效性，不得不掌握一些技巧，

- 1) 迭代取密集频率点组以求得极值时，一般取点数 $M = 16N$ 或更大。
- 2) 理论分析中利用插值函数计算 $P(\omega)$ 以减少矩阵运算，而实际程序设计中出于模块化考虑，插值运算多次执行回调函数，对于 Matlab 一类的解释型语言来说，效率反而不佳；相反，此

时直接采用矩阵运算求解系数不失为一种简洁却高效的方法。

- 3) 交换迭代终止的判别条件可做等价描述, 如等价于 δ_2 值不再改变或极值点不再变化, 具体设计中便于简化计算。

参考文献

- [1] 程佩青. 数字信号处理教程(第四版)[M]. 清华大学出版社, 2015.
- [2] John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis. 方艳梅 等译. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Application (Fourth Edition) [M]. 电子工业出版社, 2014.