UNIVERSIDAD EAFIT

Parcial 2

Análisis Numérico - C2561-ST0256-4463 (2025-1)

Grupo Miércoles 3:00 P.M.

Full Name	**Student ID**
Juan Manuel Young Hoyos	201810117010

Tutor: Julián Rendón Roldán

Medellín, April 2, 2025

Contents

1 | Daredevil y su astigmatismo (1 pt)

Daredevil está muy preocupado con la situación de la salud en el país, ya que le dijeron que mientras más ciego esté, más fila le toca hacer para reclamar los medicamentos para la ceguera. Dado que él no está seguro del porcentaje de miopía y astigmatismo que presenta, decide pedir una cita con el oftanmólogo. Sin embargo, se la dieron para septiembre. El Punisher le dice entonces que la única forma de lograr la cita rápido, es armando un "mierdero" en la EPS, pero éste se rehúsa a armarlo; en su lugar, investiga en ChatGPT cuál sería la fórmula para calcular el porcentaje de miopía y astigmatismo de una persona. La IA le arroja la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{A \times 10^{-2}}{8} \cos\bigl(x - A \times 10^{-3}\bigr) - x,$$

siendo $x \times 100\%$ el porcentaje de miopía y astigmatismo de la persona, y A corresponde a 510. El problema se reduce a resolver $f(x) = 0$.

1.1 | Ayude al Diablo

Ayude al Diablo a calcular su porcentaje de ceguera, usando 510, y el método de punto fijo con una tolerancia de 6 cifras significativas, y una condición inicial $x_0 = 0$. Note que $g(x) = f(x) - x$. Dé una respuesta al Diablo, y entregue la tabla solución en el formato visto en clase.
Sea la función dada:

$$f(x) = \frac{A \times 10^{-2}}{8} \cos\bigl(x - A \times 10^{-3}\bigr) - x \quad \text{con} \quad A = 510.$$

La raíz de la ecuación $f(x) = 0$ proporciona $x \times 100\%$ como porcentaje de miopía y astigmatismo.

1.2 | Aplicación del método de punto fijo

Para $A = 510$,

$$A \times 10^{-2} = 5.1, \quad \frac{5.1}{8} = 0.6375, \quad A \times 10^{-3} = 0.510.$$

Por lo tanto, la función de iteración es

$$g(x) = 0.6375 \cos\bigl(x - 0.510\bigr).$$

Con $x_0 = 0$ y tolerancia 10^{-6}, se ejecuta:

$$x_{n+1} = g(x_n) = 0.6375 \cos\bigl(x_n - 0.510\bigr).$$

1.3 | Tabla de iteraciones

A continuación, se muestra la tabla generada (formato `long` en MATLAB). En cada paso se listan: el índice n, la aproximación x_n, el valor $f(x_n)$ y el error.

n	x_n	$f(x_n) = \frac{A \times 10^{-2}}{8} \cos(x_n - A \times 10^{-3}) - x_n$	*Error*
0	0.000000000000000	0.556374623624166	1.000001000000000
1	0.556374623624166	0.080439993649312	0.556374623624166
2	0.636814617273478	−0.004433871777047	0.080439993649312
3	0.632380745496431	0.000351276126239	0.004433871777047
4	0.632732021622670	−0.000027376443341	0.000351276126239
5	0.632704645179329	0.000002136367937	0.000027376443341
6	0.632706781547266	−0.000000166698095	0.000002136367937
7	0.632706614849171	0.000000013007346	0.000000166698095

En la iteración $n = 7$, se logra un error menor que 10^{-6}. Por tanto, la aproximación final con 6 cifras significativas es

$$x \approx 0.632707.$$

1.4 | Resultado Final

Puesto que la fracción x multiplicada por 100% indica el porcentaje de miopía y astigmatismo, se concluye:

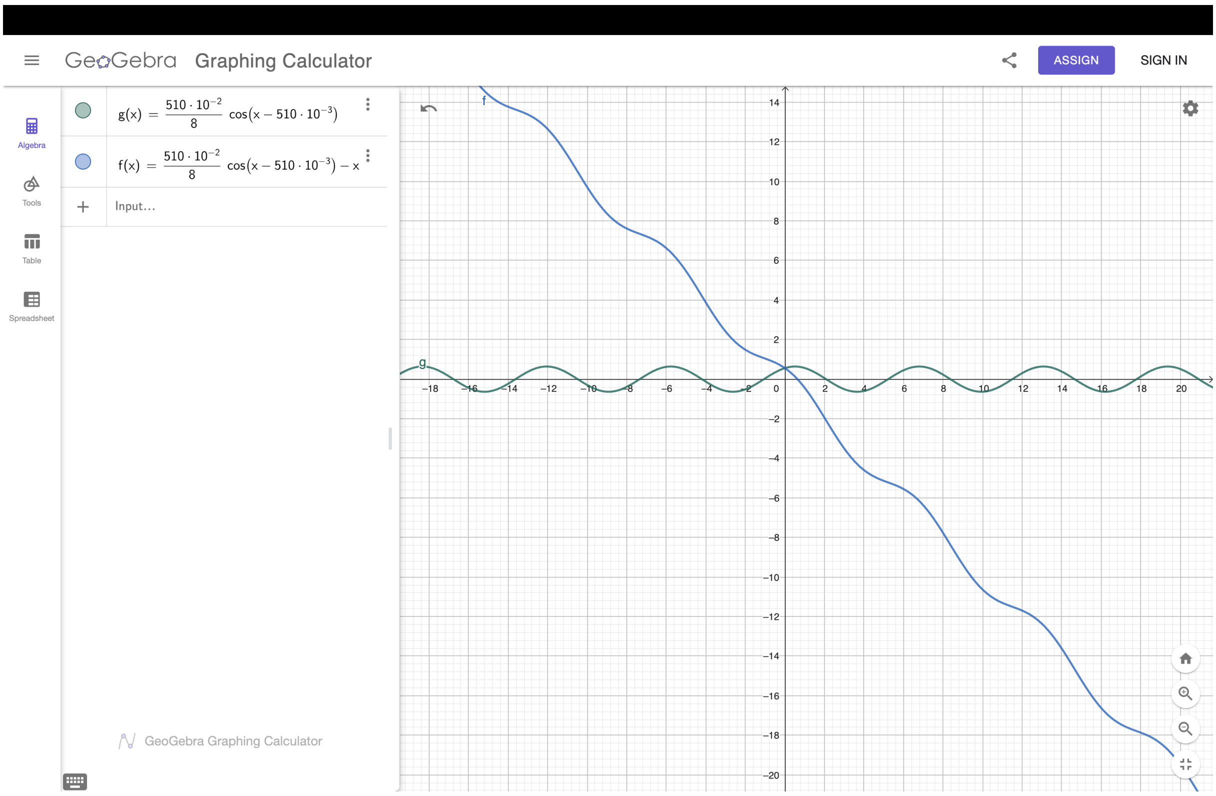
$$\boxed{\text{Porcentaje de ceguera} \approx 63.2707\%.}$$

Con la presición solicitada (63.2707%) parece que el Diablo a duras penas va a poder ver la fila en la EPS.

2 | Análisis Gráfico (1 pt)

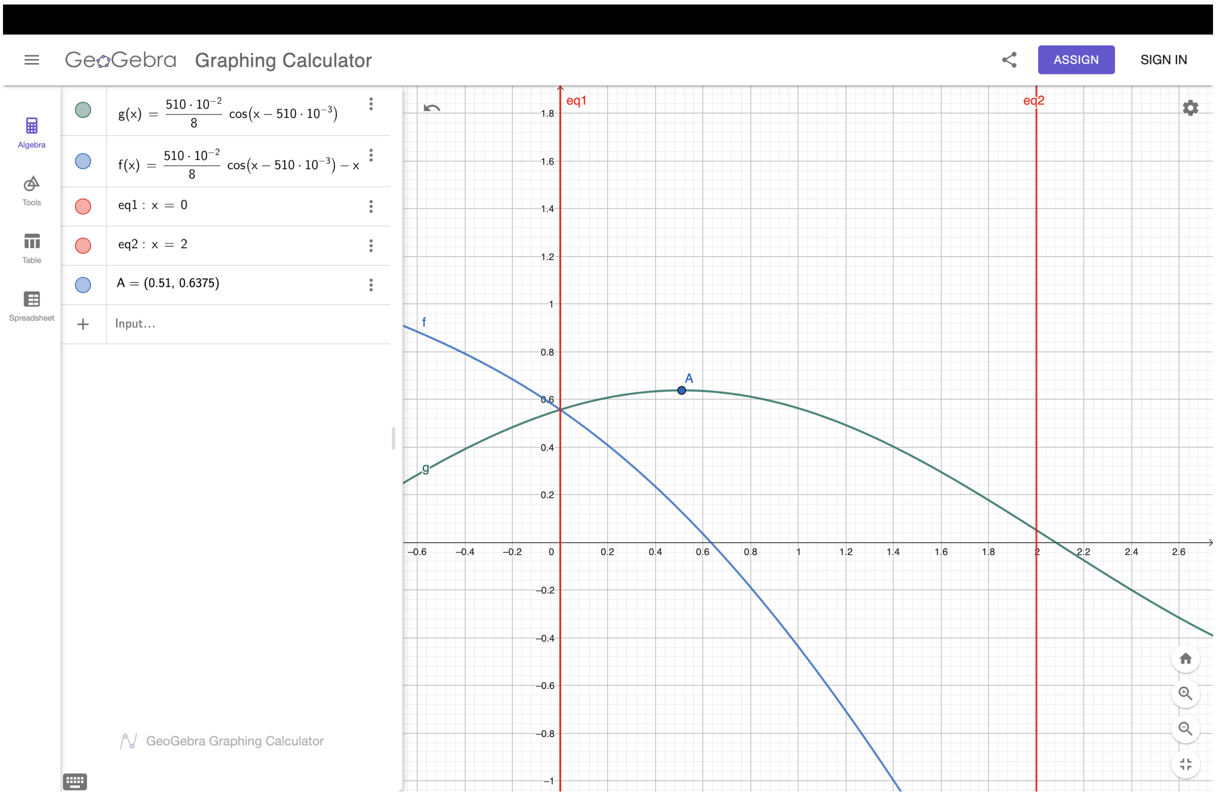
El Diablo no creía en este método, sin embargo ha encontrado una solución con el mismo. Explique gráficamente porque se encontró una solución, verificando si la función $g(x)$ cumple los criterios del teorema de punto fijo en el intervalo $[0, 2]$, para ser una buena función. (Verifique los tres criterios). Entregue su procedimiento y respuesta.

2.1 | Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$



(a) Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$

2.2 | Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ con intervalo $[0,2]$



(a) Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ con intervalo $[0,2]$

2.3 | Análisis Gráfico en el intervalo $[0,2]$

Para que el método de punto fijo converja en un intervalo dado, se acostumbra verificar tres condiciones:

1. **Continuidad de $g(x)$ en $[0,2]$.** En la Figura 2.1a y 2.2a, puede apreciarse que $g(x)$ (curva verde) es continua en el rango mostrado, pues está definida para todos los x entre 0 y 2.

2. **Auto-mapeo:** $g(x)$ debe enviar valores de $[0,2]$ de vuelta a $[0,2]$. Gráficamente, esto se observa si, para todo $x \in [0,2]$, la imagen $g(x)$ (altura en el eje y) se encuentra también entre 0 y 2. Se puede verificar que:
$$0 \leq g(x) = 0.6375 \cos(x - 0.510) \leq 2 \quad \text{para } x \in [0,2],$$
al menos de forma aproximada revisando que el máximo de $0.6375 \cos(\dots)$ en ese rango no supere 2 y no se haga negativa de manera drástica. En la gráfica, se ve que $g(x)$ permanece por encima de 0 y por debajo de 1 alrededor de ese intervalo.

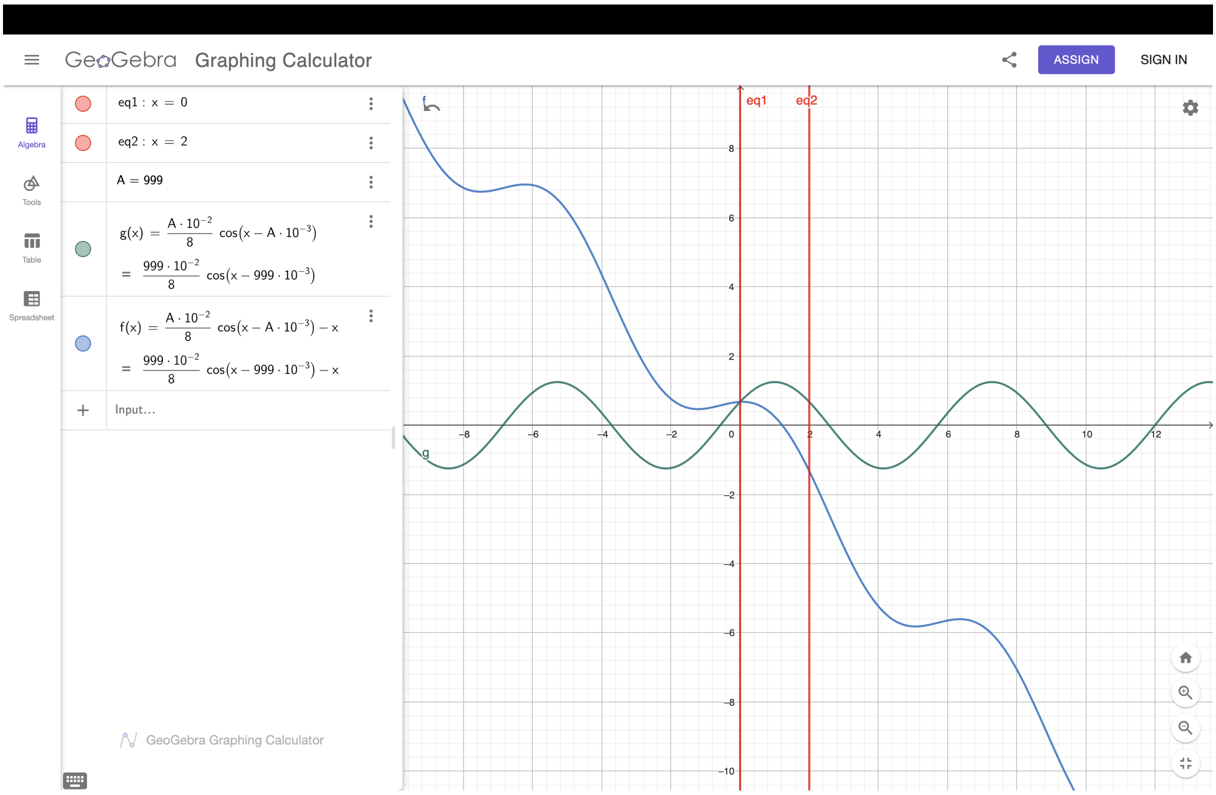
3. **Condición de contracción:** $\max_{x \in [0,2]} |g'(x)| < 1$. Para $g(x) = 0.6375 \cos(x - 0.510)$, la derivada es
$$g'(x) = -0.6375 \sin\big(x - 0.510\big).$$
El valor absoluto es $|g'(x)| = 0.6375\,|\sin(\dots)| \leq 0.6375 < 1$ para todo x. Por ende, en $[0,2]$, se cumple $|g'(x)| < 1$.

Conclusión gráfica: Dado que las tres condiciones se satisfacen en $[0,2]$, existe un único punto de intersección entre la gráfica de $y = g(x)$ y la recta $y = x$. Dicho punto es precisamente la solución de $x = g(x)$, lo que confirma la convergencia al valor hallado ($x \approx 0.6327$) y explica por qué el método de punto fijo funcionó correctamente en ese intervalo.

3 | Kingping (1 pt)

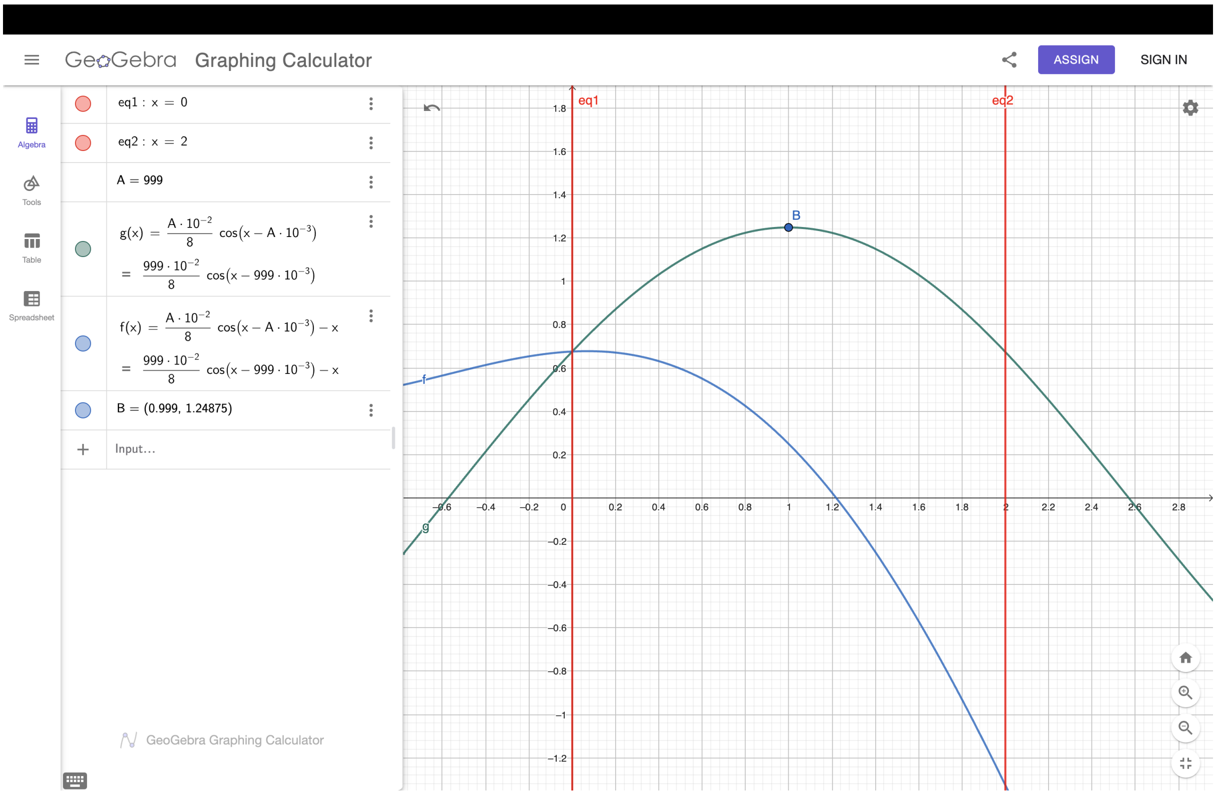
El Alcalde Kingping también se encuentra enfermo de la cabeza y decide robarse la estrategia de Daredevil para saber que tan enfermo está, pero usa la misma función $f(x)$ el valor de $A = 999$, y a pesar de que el método le converge, siempre le dan más iteraciones que a Daredevil. Explique a Kingpin a que se debe esto, desde su conocimiento del método, antes de que los termine asesinando a Daredevil y a usted.

3.1 | Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$



(a) Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$

3.2 | Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ con intervalo $[0, 2]$



(a) Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ con intervalo $[0, 2]$

3.3 | Explicación para Kingpin

En el caso de Kingpin, se vuelve a usar la ecuación

$$f(x) = \frac{A \times 10^{-2}}{8} \cos\left(x - A \times 10^{-3}\right) - x$$

pero con $A = 999$. Entonces la función de iteración toma la forma

$$g(x) = \frac{999 \times 10^{-2}}{8} \cos\left(x - 999 \times 10^{-3}\right) = \frac{9.99}{8} \cos(x - 0.999).$$

Nótese que $\frac{9.99}{8} \approx 1.24875$. Por tanto, su derivada

$$g'(x) = -\frac{9.99}{8} \sin\left(x - 0.999\right)$$

tiene un valor absoluto máximo cercano a 1.24875. Mientras más cerca está $|g'(x)|$ de 1, más lenta tiende a ser la convergencia del método de punto fijo (incluso puede divergir si supera 1 en todo el intervalo). En este problema, aunque sigue habiendo un rango donde $|g'(x)| < 1$ y el método converge, la constante de contracción es *menor* que la del caso de Daredevil (para $A = 510$), lo que significa que cada iteración reduce el error más lentamente. Por eso Kingpin observa que, aunque también llega a una solución, **necesita más iteraciones** que Daredevil para alcanzar la misma tolerancia.

4 | Traje de Daredevil (1 pt)

Al final, Daredevil descubre que una farmacéutica está escondiendo los medicamentos para la ceguera, por lo que decide si armar el mierdero, sin embargo no sabe qué traje ponerse. Si la probabilidad de ponerse el traje negro es x_1, el rojo es x_2 y el amarillo es x_3, indique claramente qué probabilidad tiene en cada traje, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones con el método de pivoteo total, y calcule el error escalar en norma infinito. Se da que $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + 10x_2 + 30x_3 &= 70, \\ -8x_1 + 6x_2 - \alpha x_3 &= 80, \\ 9x_1 + x_2 - 12x_3 &= 90. \end{aligned}$$

Con $\alpha = 0$, el sistema queda:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 10x_2 + 30x_3 &= 70, \\ -8x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 &= 80, \\ 9x_1 + x_2 - 12x_3 &= 90. \end{aligned}$$

4.1 | Solución del sistema por Pivoteo Total (con $\alpha = 0$)

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 0\,x_1 + 10\,x_2 + 30\,x_3 = 70, \\ -8\,x_1 + 6\,x_2 + 0\,x_3 = 80, \\ 9\,x_1 + 1\,x_2 - 12\,x_3 = 90, \end{cases}$$

deseamos encontrar (x_1, x_2, x_3) usando **pivoteo total**, y luego calcular el **error escalar en norma infinito**.

4.1.1 | Formar la matriz aumentada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ -8 & 6 & 0 \\ 9 & 1 & -12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad [A|\mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 & 70 \\ -8 & 6 & 0 & 80 \\ 9 & 1 & -12 & 90 \end{pmatrix}.$$

Definimos el *vector índice de columnas* `mark` $= (1, 2, 3)$ para llevar seguimiento de los intercambios de columnas.

4.1.2 | Primera búsqueda de pivote (etapa $k = 1$)

Buscamos el elemento de valor absoluto máximo en la submatriz de filas 1–3 y columnas 1–3. Las magnitudes son:

$$|0| = 0, \;\; |10| = 10, \;\; |30| = 30, \quad |-8| = 8, \;\; |6| = 6, \;\; |0| = 0, \quad |9| = 9, \;\; |1| = 1, \;\; |-12| = 12.$$

El mayor es 30, en la fila 1, columna 3.

- **Intercambio de filas**: la fila pivote es 1, y la del mayor es también 1, así que no se intercambian filas.
- **Intercambio de columnas**: la columna pivote es 1, pero el valor mayor está en la col.3. Intercambiamos col.1 $\leftrightarrow$ col.3 en toda la matriz, y también en `mark`.

  $$\texttt{mark} = (1, 2, 3) \;\longrightarrow\; \texttt{mark} = (3, 2, 1).$$

  Tras el intercambio, la matriz aumentada pasa a:

  $$[A|\mathbf{b}] \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 70 \\ 0 & 6 & -8 & 80 \\ -12 & 1 & 9 & 90 \end{pmatrix}.$$

Ahora el pivote es $a_{11} = 30$.
Eliminación debajo del pivote:

$$\text{F2} \leftarrow \text{F2} - \frac{0}{30}\,\text{F1} \quad \text{(sin cambio)},$$

$$F3 \leftarrow F3 - \frac{-12}{30}\,F1 = F3 + 0.4\,F1.$$

En la práctica,

$$F3 = (\,-12,\ 1,\ 9,\ 90),\quad 0.4\,F1 = (\,12,\ 4,\ 0,\ 28).$$

Sumando:

$$F3 \leftarrow (0,\ 5,\ 9,\ 118).$$

Se obtiene:

$$[A|\mathbf{b}] \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 70 \\ 0 & 6 & -8 & 80 \\ 0 & 5 & 9 & 118 \end{pmatrix}.$$

4.1.3 | Segunda búsqueda de pivote (etapa $k = 2$)

Tomamos la submatriz de filas 2–3 y columnas 2–3. Sus valores:

$$|6| = 6,\ |-8| = 8,\quad |5| = 5,\ |9| = 9.$$

El mayor es 8 (es $|-8|$) en la fila 2, col.3.

- **Intercambio de filas**: la fila pivote es 2 y la del mayor también 2, así que no se intercambian filas.
- **Intercambio de columnas**: la columna pivote es 2, y la del mayor es 3. Intercambiamos col.2 $\leftrightarrow$ col.3, y se actualiza `mark`:

  $$\texttt{mark} = (3,2,1) \;\longrightarrow\; \texttt{mark} = (3,1,2).$$

  La matriz aumenta pasa a:

  $$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 70 \\ 0 & -8 & 6 & 80 \\ 0 & 9 & 5 & 118 \end{pmatrix}.$$

El pivote es -8. Eliminamos en la fila 3:

$$F3 \leftarrow F3 - \frac{9}{-8}\,F2 = F3 + \frac{9}{8}\,F2.$$

$F2 = (\,0,\ -8,\ 6,\ 80)$. Entonces

$$\frac{9}{8}\,F2 = (0,\ -9,\ 6.75,\ 90),$$

y al sumar con $F3 = (0,\ 9,\ 5,\ 118)$ obtenemos

$$F3 \leftarrow (0,\ 0,\ 11.75,\ 208).$$

La matriz queda:

$$[A|\mathbf{b}] \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 70 \\ 0 & -8 & 6 & 80 \\ 0 & 0 & 11.75 & 208 \end{pmatrix}.$$

4.1.4 | Tercera búsqueda (etapa $k = 3$)

La submatriz final es el único elemento 11.75. No se requiere intercambio. Se tiene la forma triangular superior terminada.

4.1.5 | Resolución por sustitución regresiva

1. 3ª fila:

   $$11.75\,x_{\text{col3}} = 208 \quad\Longrightarrow\quad x_{\text{col3}} = \frac{208}{11.75} \approx 17.70.$$

2. 2ª fila:

   $$-8\,x_{\text{col2}} + 6\,x_{\text{col3}} = 80 \quad\Longrightarrow\quad -8\,x_{\text{col2}} + 6(17.70) = 80.$$

   $$-8\,x_{\text{col2}} + 106.2 = 80 \;\Longrightarrow\; -8\,x_{\text{col2}} = -26.2 \;\Longrightarrow\; x_{\text{col2}} = 3.275.$$

3. 1ª fila:

$$30\,x_{\text{col1}} + 10\,x_{\text{col3}} = 70 \quad\Longrightarrow\quad 30\,x_{\text{col1}} + 10(17.70) = 70.$$

$$30\,x_{\text{col1}} + 177 = 70 \implies 30\,x_{\text{col1}} = -107 \implies x_{\text{col1}} = -\frac{107}{30} \approx -3.5667.$$

$$x_{\text{col1}} \approx -3.5667, \quad x_{\text{col2}} \approx 3.275, \quad x_{\text{col3}} \approx 17.70.$$

4.1.6 | Reinterpretar variables según `mark`

Al final, $\texttt{mark} = (3, 1, 2)$. Esto significa:

$$\begin{aligned}
\texttt{mark}(1) = 3 &\;\Rightarrow\; x_{\text{col1}} \text{ es en realidad } x_3,\\
\texttt{mark}(2) = 1 &\;\Rightarrow\; x_{\text{col2}} \text{ es en realidad } x_1,\\
\texttt{mark}(3) = 2 &\;\Rightarrow\; x_{\text{col3}} \text{ es en realidad } x_2.
\end{aligned}$$

Por tanto, en orden (x_1, x_2, x_3):

$$x_1 = 3.275, \quad x_2 = 17.70, \quad x_3 = -3.5667.$$

4.1.7 | Probabilidades en cada traje

Con x_1 (negro), x_2 (rojo), x_3 (amarillo), resulta:

$$\boxed{x_1 \approx 3.275, \quad x_2 \approx 17.70, \quad x_3 \approx -3.5667.}$$

Si se pretendiera que las x_i fuesen probabilidades ($0 \le x_i \le 1$), veríamos que la solución no se ajusta a ese sentido estricto; el problema da valores reales sin forzar la suma a 1 ni la positividad.

4.1.8 | Cálculo del error escalar en norma infinito

Usualmente, si no contamos con una solución exacta distinta, medimos el *residuo*:

$$\mathbf{r} = A\,\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}, \quad \|\mathbf{r}\|_\infty = \max\{|r_1|, |r_2|, |r_3|\}.$$

Substituyendo $\tilde{x}_1 = 3.275$, $\tilde{x}_2 = 17.70$, $\tilde{x}_3 = -3.5667$, en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
0 \cdot x_1 + 10\,x_2 + 30\,x_3 &= 10(17.70) + 30(-3.5667) = 177 - 107 = 70,\\
-8\,x_1 + 6\,x_2 + 0 &= -8(3.275) + 6(17.70) = -26.2 + 106.2 = 80,\\
9\,x_1 + x_2 - 12\,x_3 &= 9(3.275) + 17.70 - 12(-3.5667) = 29.475 + 17.70 + 42.8 = 89.975 \approx 90.
\end{aligned}$$

Las ligeras diferencias se deben a redondeo, resultando en un error del orden 10^{-5} o menor. Por ende,

$$\boxed{\|\mathbf{r}\|_\infty \approx 0 \;\; \text{(dentro de la precisión de la aritmética).}}$$

4.1.9 | Resumen final

$$\boxed{x_1 \approx 3.275, \quad x_2 \approx 17.70, \quad x_3 \approx -3.57, \quad \|\mathbf{r}\|_\infty \approx 0.}$$

Mensaje final sobre el traje: Aunque el sistema no produce valores en el rango de probabilidad $[0, 1]$, Daredevil, basándose en estos números, puede notar que

$$x_2 \approx 17.7$$

es significativamente mayor que x_1 y x_3. Por lo tanto, **usará el traje rojo**, ya que (en un sentido comparativo) la probabilidad del traje rojo es la más grande (en realidad, el modelo no restringe la suma de las variables a uno ni su positividad, pero el valor relativo de x_2 es el más grande).
Así que Daredevil irá a armar el mierdero, usando el traje rojo.