UNIVERSIDAD EAFIT

Análisis Numérico

Parcial 2 - Semestre 01 / 2021

Juan Manuel Young Hoyos

201810117010

1. (10 pts.) Dadas cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si son Verdadera, V, o Falsa, F

(2 pts.) F Para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución única, se deben cumplir cada uno de los criterios indicados en clase.

(2 pts.) F La existencia y unicidad de un sistema de ecuaciones lineales depende única y exclusivamente del valor de la solución.

(2 pts.) F La singularidad de un sistema de ecuaciones lineales implica que existe solución, independientemente del vector de términos independientes, **b**.

(2 pts.) F La factorización **LU** se emplea cuando se requiere cambiar de vector de términos independientes.

(2 pts.) F El número de condición es una medida de qué tan alejado está una matriz de ser no singular.

2.a. (10 pts.) Muestre que la siguiente matriz es singular:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} =?$$

Convertimos la matriz en una matriz triangular. Si en un determinante a una fila o columna se le suma otra paralela multiplicada por un número no nulo, el determinante no varía. El determinante de la matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$F_2 - 1.F_1 \rightarrow F_2$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$F_3 - 1.F_1 \rightarrow F_3$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$F_3 - 2.F_2 \rightarrow F_3$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$El\ determinante\ de\ la\ matriz\ es\ cero, la\ matriz\ es\ no\ invertible.$$

2.b. (10 pts.) si $\boldsymbol{b} = [2 \quad 4 \quad 6]^T$, ¿cuántas soluciones tiene el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$? Justifique su respuesta con los elementos teóricos vistos en clase.

3. Considere el sistema

$$\begin{gathered} ax_1 - 5x_2 + 2x_3 = 19 \\ 3x_1 + bx_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + cx_3 = 9 \end{gathered}$$

3.a. (10 pts.) Describa todos los valores de a, b y c que permitirán usar el método de Jacobi para aproximar la solución de este sistema. Justifique su respuesta con los elementos teóricos vistos en clase.

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a & -5 & 2 \\ 3 & b & -1 \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A = D - L - U$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{k+1} = D^{-1}b + D^{-1}(L + U)X_k$$

$$D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{a} \\ -\frac{1}{b} \\ \frac{9}{c} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{a} & -\frac{2}{a} \\ -\frac{3}{b} & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{2}{c} & -\frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \\ x_{3_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{a} \\ -\frac{1}{b} \\ \frac{9}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{a} & -\frac{2}{a} \\ -\frac{3}{b} & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{2}{c} & -\frac{1}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ x_{3_k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1_{k+1}} \\ x_{2_{k+1}} \\ x_{3_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{a} & \frac{5}{a} & -\frac{2}{a} \\ -\frac{3}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{2}{c} & -\frac{1}{c} & \frac{9}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_k} \\ x_{2_k} \\ x_{3_k} \end{pmatrix}$$

3.b (10 pts.) Describa todos los valores de a, b y c que garantizarán la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss – Seidel. Justifique su respuesta con los elementos teóricos vistos en clase.

Tiempo de duración 120 minutos.

Entrega a través de Interactiva de un archivo en PDF con las respuestas y el soporte de estas.

¡¡¡ÉXITOS!!!