Análisis Formal de Conceptos (FCA)

Juan G. Lalinde-Pulido
jlalinde@eafit.edu.co

8 de noviembre de 2024

1. Introducción

El *Análisis Formal de Conceptos* (FCA, por sus siglas en inglés) es una técnica basada en la teoría de conjuntos y las relaciones de orden. Su objetivo principal es identificar una estructura jerárquica de conceptos a partir de una relación binaria entre un conjunto de objetos y un conjunto de atributos.

Un *concepto formal* está compuesto por dos elementos: una *extensión*, que es un conjunto de objetos, y una *intensión*, que es el conjunto de atributos compartidos por esos objetos. La teoría de FCA representa estos conceptos mediante una estructura jerárquica llamada *retículo de conceptos*. El objetivo de este trabajo es identificar una colección de objetos con sus atributos y utilizar FCA para ordenarlos y clasificarlos.

El documento está estructurado de la siguiente manera: En la sección 2 se repasan brevemente los conceptos fundamentales con los cuales se construye el FCA. En la sección 3 describe los látices, también conocidos como retículas. Estas son estructuras algebraicas que permiten construir el FCA. En la sección 4 se presenta como se utilizan los conceptos básicos y los látices para realizar el FCA, y la sección 5 describe la actividad a realizar y los entregables.

2. Conceptos básicos

En esta sección se enuncian los conceptos básico que se utilizan para construir el FCA. Todos los conceptos se trabajan en el curso *CM0246 Estructuras Discretas* y se puede profundizar en ellos en el texto guía[1].

Definición 2.1 (Conjunto Potencia)**.** El **conjunto potencia** del conjunto A es el conjunto de todos los subconjuntos de A, incluyendo al conjunto vacío y al conjunto A mismo. Es decir:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Se puede demostrar que el número de subconjuntos posibles de A, es decir la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$, es $2^{|A|}$, donde $|A|$ es el número de elementos en A.

Definición 2.2 (Producto Cartesiano)**.** El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados donde el primer elemento pertence a A y el segundo pertenece a B. Es decir:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Definición 2.3 (Relación)**.** Sean A y B dos conjuntos. Se dice que R es una relación de A en B si

$$R \subseteq A \times B$$

Nota: Una notación alternativa utilizada para indicar que $(a, b) \in R$ es aRb.

Un caso particular de las *relaciones* es cuando $A = B$, o sea que $R \subseteq A \times A$. En este caso, se definen algunas propiedades que son importantes para caracterizar relaciones de interés:

Reflexiva: Se dice que $R \subseteq A \times A$ es reflexiva si

$$\forall a \in A, (a, a) \in R$$

Simétrica: Se dice que $R \subseteq A \times A$ es simétrica si

$$\forall a_i, a_j \in A, (a_i, a_j) \in R \Rightarrow (a_j, a_i) \in R$$

Antimétrica: Se dice que $R \subseteq A \times A$ es antisimétrica si

$$\forall a_i, a_j \in A, (a_i, a_j) \in R \wedge (a_j, a_i) \in R \Rightarrow a_j = a_j$$

Transitiva: Se dice que $R \subseteq A \times A$ es transitiva si

$$\forall a_i, a_j, a_k \in A, (a_i, a_j) \in R \wedge (a_j, a_k) \in R \Rightarrow (a_i, a_k) \in R$$

Definición 2.4 (Relación de Orden)**.** Sea $R \subseteq A \times A$ una relación sobre A. Se dice que R es una relación de orden si R es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva.*

Definición 2.5 (Relación de orden parcial)**.** Sea $R \subseteq A \times A$ una relación de orden sobre A. Se dice que R es una relación de orden parcial si

$$\exists a_i, a_j \in A, (a_i, a_j) \notin R \wedge (a_j, a_i) \notin R$$

Nota: Se dice que una relación de orden es total si no es una relación de orden parcial.

Definición 2.6 (Relación de Equivalencia)**.** Sea $R \subseteq A \times A$ una relación sobre A. Se dice que R es una relación de equivalencia si R es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva.*

Definición 2.7 (Función)**.** Sea R una relación de A en B. Se dice que R es una función si

$$\begin{aligned}&\text{(i) } \forall a \in A, \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R\\ &\text{(ii) } \forall a \in A, (a, b) \in R \wedge (a, c) \in R \Rightarrow b = c\end{aligned}$$

3. Latices o Retículas

El FCA se basa en la construcción de un látice a partir de objetos y atributos. En esta sección se presentan los conceptos básicos de los látices que se utilizan en FCA.

Definición 3.1 (operación binaria)**.** Una *operación binaria* en un conjunto S es una función $* : S \times S \to S$

Las principales propiedades que puede tener una operación binaria son:

- **Asociativa:** Si $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in S$
- **Identidad:** Si $\exists e \in S$ tal que $e * a = a * e = a, \forall a \in S$
- **Inversa:** $a^{-1} \in S$ es un inverso de a si $a * a^{-1} = e$
- **Conmutativa (*abeliana*):** Si $a * b = b * a, \forall a, b \in S$

Definición 3.2 (estructura algebraica)**.** Una *estructura algebraica* $(S; *_1, \cdots, *_n)$ consiste en un conjunto S y una o más operaciones binarias $*_i$ definidas sobre S.

El *orden* de una estructura algebraica es el número de elementos de S, y se escribe $|S|$.

Definición 3.3 (Operación idempotente)**.** Sea $(S; *)$ una estructura algebraica. Decimos que el operador $*$ es idempotente si $\forall s \in S, s * s = s$

Definición 3.4 (Ley de la absorción)**.** Sea $(S; *_1, *_2)$ una estructura algebraica. Decimos que $*_1, *_2$ cumplen la ley de absorcióin si $\forall s_1, s_2 \in S$:

$$s_1 \wedge (s_1 \vee s_2) = s_1$$
$$s_1 \vee (s_1 \wedge s_2) = s_1$$

Definición 3.5 (Látice)**.** Decimos que una estructura algebraica $(L; \wedge, \vee)$ es un *látice* si $L \neq \phi$, $\wedge$ y $\vee$ son operaciones binarias en L, ambas operaciones $\wedge$ y $\vee$ son *idempotentes*, *conmutativas* y *asociativas*, y cumplen la *ley de la absorción*.

4. Descripción del FCA

El análisis de conceptos formales, FCA por sus siglas en inglés, permite organizar y clasificar conceptos. En FCA, un concepto está compuesto por dos elementos: una *extensión*, que es un conjunto de objetos, y una *intensión*, que es un conjunto de propiedades.

Como el FCA utiliza un *látice*, se debe definir un conjunto de conceptos formales, que se llamará $\mathcal{C}$, y dos operaciones binarias, que se denominarán $\wedge$ y $\vee$, las cuales deben cumplir con todas las propiedades para que $(L; \wedge, \vee)$ sea un látice.

La idea general es la siguiente:

1. Se parte de una colección de objetos cada uno con sus atributos.

2. Se define un *concepto formal* como un par ordenado donde el primer elemento es una colección de objetos que comparten una colección de atributos, y el segundo elemento es la colección de atributos compartidos.

3. Se crea un conjunto de objetos formales, el cual se construye recursivamente a partir de la colección de objetos mediante la aplicación de dos operadores denominados $\wedge$ y $\vee$.

4. Se define una relación de orden parcial entre conceptos formales.

5. Con la relación de orden parcial, se construye el látice $\mathcal{C}$ de conceptos formales

6. Se analiza cada nodo del látice $\mathcal{C}$ asignándole una etiqueta.

7. Se representa gráficamente el látice asignandole a cada nodo su etiqueta.

A continuación se presentan formalmente los pasos.

1. Sea $\mathcal{O}$ una colección de objetos y $\mathcal{A}$ una colección de atributos, entonces la función $f \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es una colección de objetos con sus atributos.

   $$f = \{(o, A), o \in \mathcal{O} \wedge A \subseteq \mathcal{A}\}$$

   o, lo que es lo mismo

   $$f : \mathcal{O} \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$$

   Nota: Es necesario que f se una función porque cada objeto sólo puede tener una colección de atributos.

2. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O} \times \mathcal{A}$. Los $c \in \mathcal{C}$ se denominan conceptos formales.

   Nota: Con el fin de facilitar la visualización, si $O = \{o_1, o_2, \cdots, o_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ y $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, entonces el par $(O, A) \in \mathcal{C}$ se representa también como $(o_1, o_2, \cdots, o_n; a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

3. Sea $\mathcal{C}$ definido de la siguiente manera:

   - Si $f(o) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ entonces $(o; a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathcal{C}$
   - Si $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, entonces $c_1 \wedge c_2 \in \mathcal{C}$ y $c_1 \vee c_2 \in \mathcal{C}$.
     Nota: Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ se describen en las definiciones 4.1 y 4.2 respectivamente.

4. Se define la relación de orden parcial $\leq$ de la siguiente manera: Sean $c_1 = (O_1; A_1)$ y $c_2 = (O_2; A_2)$, entonces

$$c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow O_1 \subseteq O_2 \wedge A_2 \subseteq A_1$$

5. La estructura algebraica $(\mathcal{C}; \wedge, \vee)$ es un látice. Ver la demostración en el teorema 4.1.

6. Para asignar etiquetas basadas en atributos, se siguen estos pasos:

   I Identifique un elemento $(O_m; A_m)$ de $\mathcal{C}$ tal que $\forall (O; A) \in \mathcal{C}, (O_m; A_m) \nleq (O, A)$

   II Asigne a $(O_m; A_m)$ la etiqueta A_m

   III Modifique $\mathcal{C}$ siguiendo estos dos pasos:

      1) Elimine $(O_m; A_m)$ de $\mathcal{C}$
      2) Para todos los demás elementos $(O; A) \in \mathcal{C}$ elimine los atributos A_m para que se convierta en $(O; A - A_m)$

   IV Si $\mathcal{C} \neq \phi$ regrese al paso I.

   Y para asignar etiquetas basadas en los objetos, se siguen estos pasos, partiendo del $\mathcal{C}$ original:

   I Identifique un elemento $(O_m; A_m)$ de $\mathcal{C}$ tal que $\forall (O; A) \in \mathcal{C}, (O; A) \nleq (O_m, A_m)$

   II Asigne a $(O_m; A_m)$ la etiqueta O_m

   III Modifique $\mathcal{C}$ siguiendo estos dos pasos:

      1) Elimine $(O_m; A_m)$ de $\mathcal{C}$
      2) Para todos los demás elementos $(O; A) \in \mathcal{C}$ elimine los objetos O_m para que se convierta en $(O - O_m; A)$

   IV Si $\mathcal{C} \neq \phi$ regrese al paso I.

7. Dado que el látice tiene una relación de orden parcial, la representación tradicional es la siguiente:

   - Hay un nodo mínimo $(O; A)$, el cuál tiene todos los atributos y, normalmente, no tiene ningún objeto. Este nodo se pone en la parte inferior.

- Hay un nodo máximo $(O; A)$, el cuál contiene todos los objetos y, normalmente, no tiene ningún atributo. Este nodo se pone en la parte superior.
- Si $(O_1; A_1) \leq (O_2; A_2)$ entonces $(O_1; A_1)$ se dibuja debajo de $(O_2; A_2)$.

Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ se definen de la siguiente manera:

Definición 4.1 (Operación $\wedge$)**.** Sean $(O_1; A_1), (O_2; A_2) \in \mathcal{C}$ entonces

$$(O_1; A_1) \wedge (O_2; A_2) = (O_1 \cup O_2; A_1 \cap A_2)$$

Definición 4.2 (Operación $\vee$)**.** Sean $(O_1; A_1), (O_2; A_2) \in \mathcal{C}$ entonces

$$(O_1; A_1) \vee (O_2; A_2) = (O_1 \cap O_2; A_1 \cup A_2)$$

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{C} \neq \phi$ el conjunto de conceptos formales construido con las operaciones $\wedge$ y $\vee$ definidas en las definiciones 4.1 y 4.2 respectivamente, entonces $(\mathcal{C}; \wedge, \vee)$ es un látice.*

Demostración. Como $\mathcal{C} \neq \phi$, basta con demostrar que las operaciones $\wedge$ y $\vee$ cumplen con las propiedades de la definición 3.5

- La operación $\wedge$ es idempotente: Sea $(O; A) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(O; A) \wedge (O; A) &= (O \cup O; A \cap A)\\ &= (O; A)\end{aligned}$$

- La operación $\vee$ es idempotente: Sea $(O; A) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(O; A) \vee (O; A) &= (O \cap O; A \cup A)\\ &= (O; A)\end{aligned}$$

- La operación $\wedge$ es conmutativa: Sean $(O_1; A_1), (O_2; A_2) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(O_1; A_1) \wedge (O_2; A_2) &= (O_1 \cup O_2; A_1 \cap A_2)\\ &= (O_2 \cup O_1; A_2 \cap A_1)\\ &= (O_2; A_2) \wedge (O_1; A_1)\end{aligned}$$

- La operación $\vee$ es conmutativa: Sean $(O_1; A_1), (O_2; A_2) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(O_1; A_1) \vee (O_2; A_2) &= (O_1 \cap O_2; A_1 \cup A_2)\\ &= (O_2 \cap O_1; A_2 \cup A_1)\\ &= (O_2; A_2) \vee (O_1; A_1)\end{aligned}$$

- La operación $\wedge$ es asociativa: Sean $(O_1; A_1), (O_2; A_2), (O_3; A_3) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}((O_1; A_1) \wedge (O_2; A_2)) \wedge (O_3; A_3) &= (O_1 \cup O_2; A_1 \cap A_2) \wedge (O_3; A_3)\\ &= (O_1 \cup O_2 \cup O_3; A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ &= (O_1; A_1) \wedge (O_2 \cup O_3; A_2 \cap A_3)\\ &= (O_1; A_1) \wedge ((O_2; A_2) \wedge (O_3; A_3))\end{aligned}$$

- La operación $\vee$ es asociativa: Sean $(O_1; A_1), (O_2, A_2), (O_3, A_3) \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}((O_1; A_1) \vee (O_2; A_2)) \vee (O_3; A_3) &= (O_1 \cap O_2; A_1 \cup A_2) \vee (O_3; A_3)\\ &= (O_1 \cap O_2 \cap O_3; A_1 \cup A_2 \cup A_3)\\ &= (O_1; A_1) \vee (O_2 \cap O_3; A_2 \cup A_3)\\ &= (O_1; A_1) \vee ((O_2; A_2) \vee (O_3; A_3))\end{aligned}$$

- Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ cumplen con la ley de absorcíon. Esta ley exige que dados $(O_1; A_1), (O_2; A_2) \in \mathcal{C}$, entonces $(O_1; A_1) \wedge ((O_1; A_1) \vee (O_2; A_2)) = (O_1; A_1)$ y $(O_1; A_1) \vee ((O_1; A_1) \wedge (O_2; A_2)) = (O_1; A_1)$. Desarrollando estas expresiones se tiene:

$$\begin{aligned}(O_1; A_1) \wedge ((O_1; A_1) \vee (O_2; A_2)) &= (O_1; A_1) \wedge (O_1 \cap O_2; A_1 \cup A_2)\\ &= (O_1 \cup (O_1 \cap O_2); A_1 \cap (A_1 \cup A_2))\end{aligned}$$

  y

$$\begin{aligned}(O_1; A_1) \vee ((O_1; A_1) \wedge (O_2; A_2)) &= (O_1; A_1) \vee (O_1 \cup O_2; A_1 \cap A_2)\\ &= O_1 \cap ((O_1 \cup O_2); A_1 \cup (A_1 \cap A_2))\end{aligned}$$

  Por lo tanto, basta con demostrar que las operaciones de unión $\cup$ e intersección $\cap$ de conjuntos cumplen con la ley de absorción[1].

[1] Tenga presente que en esta demostración los operadores $\wedge$ y $\vee$ son los operadores lógicos y no son los operadores definidos para el látice.

- $A \cup (A \cap B) = A$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (A \cap B) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

- $A \cap (A \cup B) = A$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \end{aligned}$$

Luego la estructura algebraica $(\mathcal{C}; \wedge, \vee)$ es un látice. $\square$

5. Actividades

A continuación, se relacionan las actividades que se deben realizar y el entregable para cada una. Además de este documento, en [2] encuentran información sobre FCA y sus aplicaciones.

Actividad	**Entregable**
Seleccionar un conjunto de objetos con sus atributos	Descripción por extensión del conjunto
Crear el conjunto de conceptos formales $\mathcal{C}$	Descripción de $\mathcal{C}$ por extensión
Definir la relación de orden parcial	Representación gráfica de los nodos del látice. Identificar cada nodo con el elemento de $\mathcal{C}$ que representa.
Asignar las etiquetas a cada nodo	Representación gráfica del látice con la etiqueta de cada nodo

Referencias

[1] Epp, S. S. *Matemáticas discretas con aplicaciones*, cuarta edición ed. CENGAGE Learning, 2012.

[2] Priss, U. Formal Concept Analysis Homepage — upriss.github.io. `https://upriss.github.io/fca/fca.html`. [Accessed 07-11-2024].