Numerico_02_Raices

September 14, 2017

#
Universidad EAFIT
##
Procesos Numéricos
#
Unidad 2: Solución Numérica de Ecuaciones de Una Variable

0.0.1 Docente

0.0.2 Carlos Alberto Álvarez Henao, I.C. PhD.

0.1 Objetivos:

- Definir métodos numéricos para la solución de ecuaciones de una variable utilizando argumentos matemáticos y computacionales.
- Determinar las raíces de una Ecuación No Lineal dada, empleando los métodos numéricos de manera eficiente y analizando los problemas de convergencia que puedan presentarse.

0.2 Definición

Dada una ecuación no lineal, f, buscamos el valor de x tal que:

$$f(x) = 0$$

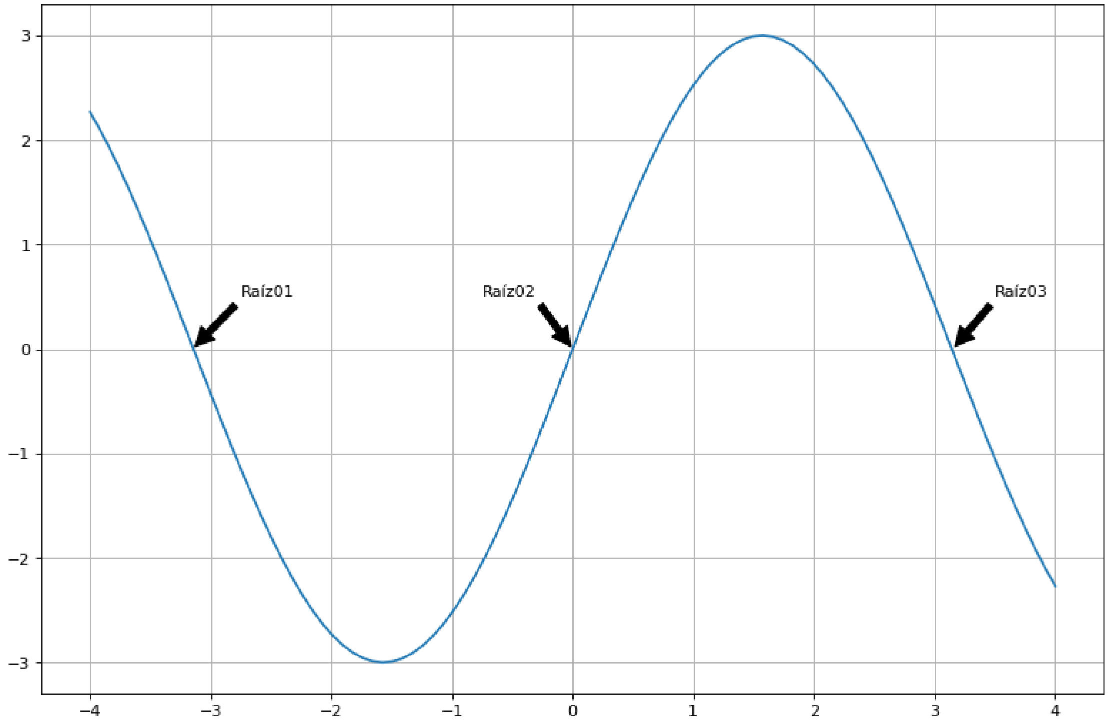
con $f : [a, b] \rightarrow \Re$

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [2]:
```
#import pylab
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy

x = numpy.linspace(-4,4,100) # 100 linearly spaced numbers
#y = numpy.sin(x)/x # computing the values of sin(x)/x
y = numpy.sin(x) # computing the values of sin(x)
fig = plt.figure(figsize=(12, 8), dpi= 80, facecolor='w', edgecolor='k')
ax = fig.add_subplot(111)
```

```
# compose plot
plt.plot(x,3*y) # 2*sin(x)/x and 3*sin(x)/x
ax.annotate('Raíz01', xy=(-3.15, 0), xytext=(-2.75, 0.5),arrowprops=dict(facecolor='blac
ax.annotate('Raíz02', xy=(0, 0), xytext=(-0.75, 0.5),arrowprops=dict(facecolor='black',
ax.annotate('Raíz03', xy=(3.15, 0), xytext=(3.5, 0.5),arrowprops=dict(facecolor='black',
plt.grid(True)
plt.show() # show the plot
```



Para hallar las raíces de una ecuación no lineal se requiere conocer:

- Número de raíces de la ecuación
- Información preliminar: dominio, rango, continuidad, derivadas, intervalos de crecimiento, tipos de raíces...
- Seleccionar un algoritmo conociendo sus limitaciones y dándole una aproximación inicial.

0.2.1 Solución de Ecuaciones No Lineales

- Un sistema de ecuaciones lineales tiene solución única si la matriz de coeficientes es no singular.
- La existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones no-lineales es mucho más complicado, difícil de determinar y con una mayor variedad de comportamientos.
- Para un sistema de ecuaciones lineales existen tres posibilidades: única, infinitas o ninguna solución.

- Una ecuación no-lineal puede tener cualquier número de posibles soluciones.
- Una ecuación no-lineal puede tener múltiples raíces, donde tanto la función como su derivada son iguales a cero. $f(x) = 0$ y $f'(x) = 0$.
- En $1D$, esta propiedad significa que la curva tiene una tangente horizontal en el eje x.
- Si $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, entonces se dice que se tiene una raíz simple.
- El mismo concepto de condicionamiento visto en el capítulo anterior puede aplicarse.

0.2.2 Tazas de convergencia y métodos iterativos

- Muchas ecuaciones no-lineales no pueden resolverse aún con un número muy grande de iteraciones.
- El costo total de resolver un problema no-lineal depende del costo por iteración y del número de iteraciones requeridas para la convergencia.
- Para comparar la efectividad de los métodos iterativos se necesita caracterizar su taza de convergencia.
- error en la iteración k:

$$e_k = x_k \breve{\ } x$$

x_k: es la solución aproximada en la iteración k y x es la solución *"verdadera"*.
Un método se dice que converge con taza de convergencia r si:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r} = C$$

- Para alguna constante $C \neq 0$
- si $r = 1$ y $C < 1$, la tasa de convergencia es lineal;
- si $r > 1$, la tasa de convergencia es superlineal;
- si $r = 2$, la tasa de convergencia es cuadrática.

0.2.3 Criterios de Aproximación

Supongamos que la función f es continua en alguna vecindad de α que contiene a la sucesión x_{nn}, $n = 0, 1, 2, ...$, y que es tal que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) = 0$$

y así, dado cualquier número positivo ϵ, llamado **tolerancia**, existe $N \in N = 0, 1, 2, \ldots$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $|f(x_n)| < \epsilon$

- Dado un número pequeño $\epsilon > 0$ llamado tolerancia se puede escoger como aproximación a la raíz α al término x_N de la sucesión mencionada, donde N es el menor entero no-negativo que satisface uno de los siguientes criterios:

$$|f(x)| < \epsilon$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{x_n} < \epsilon$$

0.2.4 Existencia de Raíces

El Objetivo de algunos de los métodos para determinar raices de una función no lineal es encontrar un intervalo que contenga al menos una raíz, y se basa en el **teorema del Valor Intermedio**:

- **Teorema del Valor Intermedio:** Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un número c en el intervalo (a, b) tal que $f(c) = k$

Otros teoremas del Cálculo que nos servirán para nuestro propósito en el capítulo son:

- **Existencia de Raíces:** Sea f una función de variable y valor real definida en $[a, b]$. Si se cumple que:

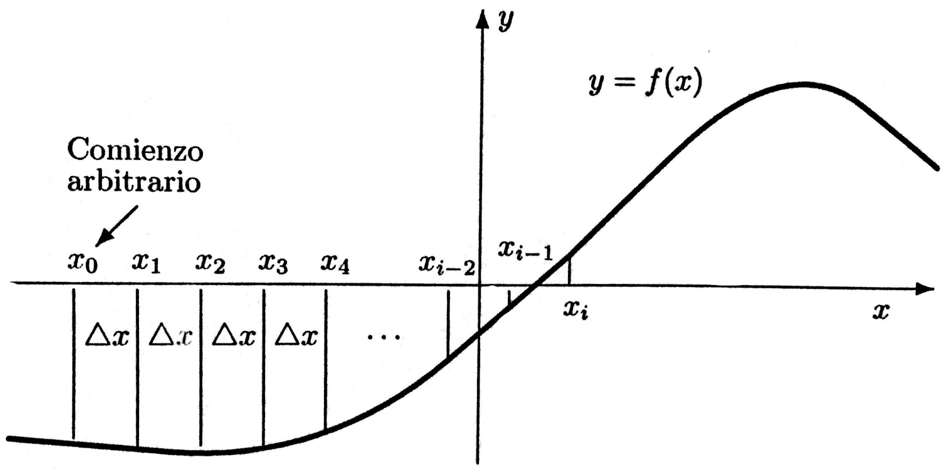
1. f es continua en el intervalo $[a, b]$
2. $f(a) \times f(b) < 0$

entonces existe algún x_m en $[a, b]$ que es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

- **Existencia de una única raíz:** Sea f una función de variable y valor real definida en $[a, b]$. Si se cumple que:

1. f es continua en el intervalo $[a, b]$
2. $f(a) \times f(b) < 0$
3. f es diferenciable en (a, b) y $f'(x)$ no cambia de signo para todo $x \in [a, b]$

entonces existe un único x_m en $[a, b]$ que es raíz de la ecuación $f(x) = 0$.



BusquedaIncremental_Pacho01.png

0.2.5 Funciones con várias raíces:

Las funciones no lineales pueden tener ninguna, una o varias raíces en un intervalo dado, y es necesario localizar cada una de ellas.

- La posible existencia de raíces múltiples complica el problema.
- En la vecindad de la raíz, tanto la función como su derivada se acercan a cero.
- Las ecuaciones con un número par de raíces múltiples son tangentes al eje x y no lo cruzan.
- Las ecuaciones con un número impar de raíces múltiples cruzan al eje x en un punto de inflexión.
- En caso de raíces múltiples, al no haber cambio de signo, los métodos cerrados no son confiables.

0.3 Método de las Búsquedas Incrementales:

La búsqueda consiste en empezar en un extremo del intervalo de interés y evaluar la función con pequeños incrementos a lo largo del intervalo. - Si la longitud del incremento no es lo suficientemente pequeña, algunas raíces pueden pasar inadvertidas.

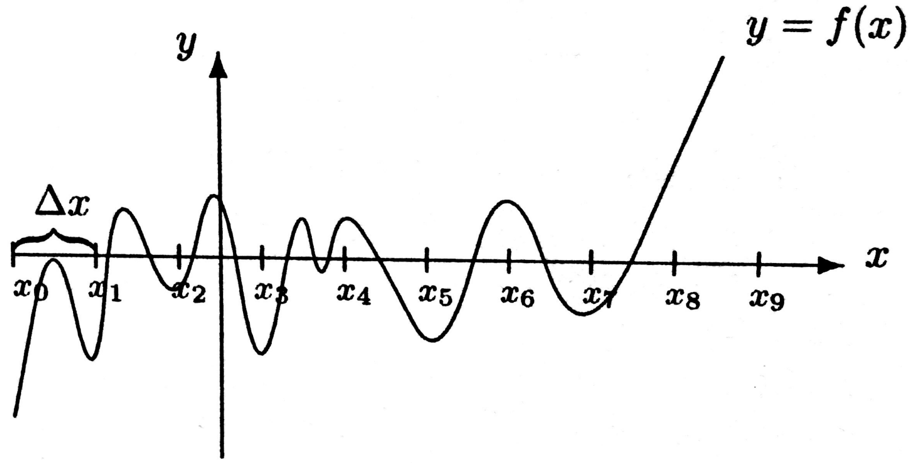
Tomado de: *Correa Zabala, Francisco*. Métodos Numéricos, Universidad EAFIT. 2013

Si se detecta que una función f es continua en un intervalo $[a, b]$ y que en dicho intervalo se presenta un cambio de signo en los valores de $f(a)$ y $f(b)$, se concluye que existe al menos una raíz en ese intervalo (pueden ser varias).

A continuación se propone una opción de cómo podría ser un método que sirva como apoyo inicial a los métodos numéricos para encontrar raíces de forma aproximada en un intervalo dado.

0.3.1 Método de Búsquedas Incrementales

1. Verificar la continidad de f en $[a, b]$ empleando argumentos teóricos.



BusquedaIncremental01.jpg

2. Elegir un valor de partida, x_0, y un Δx que exprese el tamaño del intervalo que deseamos encontrar.

3. Generar una sucesión de valores $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tal que $x_n = x_{n-1} + \Delta x$

4. Hallar el valor de $f(x_n)$ en cada x_n generado.

5. Determinar los signos de $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$

6. Suspender el proceso cuando se presente un cambio de signo en $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$ o cuando se llegue a un límite de iteraciones sin encontrar dicho cambio.

0.3.2 Estrcutura algoritmo

La estructura de un algoritmo que implemente el método anterior, deberá considerar:

- Datos Iniciales
- Iniciacilización del ciclo
- Ciclo
- Verificación de fin de ciclo

Tomado de: *Correa Zabala, Francisco*. Métodos Numéricos, Universidad EAFIT. 2013
Analizando la figura anterior se observa:

- La función f asociada a la ecuación $f(x) = 0$ es continua
- En $[x_0, x_1]$ se presenta una ambiguedad en el sentido de que visualmente no es posible determinar si la curva corta el eje x una vez, dos veces o ninguna. Además el método no detectaría un intervalo válido, porque los signos de la evaluación en x_0 y x_1 son iguales.
- En los intervalos $[x_1, x_2]$ y $[x_2, x_3]$ hay dos raíces y el método no las percibe porque no hay cambio de signo en los extremos de los intervalos.

- En $[x_3, x_4]$ hay tres raíces. El método solo consigue determinar que existe al menos una, porque hay cambio de signo en los extremos, pero no establece cuántas.
- En cada uno de los intervalos $[x_4, x_5]$, $[x_5, x_6]$, $[x_6, x_7]$ y $[x_7, x_8]$ existe una sola raíz y el método consigue detectar su presencia.

In [ ]:
```
import numpy as np                  # import the array library
import matplotlib.pyplot as plt   # import plotting library
```

In [ ]:
```
# Exact Solution Plot:

dt = 0.01

def f(x):
    return np.exp(3*x - 12.0) + x * np.cos(3*x) - x**2 + 4

x = np.arange(-2.0, 5.2, dt)

plt.xlabel (r"x")
plt.ylabel (r'$f(x)$')
plt.title (r'$x$ vs $f(x)$')

plt.plot(x, f(x))
plt.grid(True)
plt.show()
```

0.4 Métodos por intervalos o cerrados

Se caracterizan porque para su ejecución requieren un intervalo que contenga al menos una raíz y en su aplicación se reduce continuamente de tamaño el intervalo manteniendo la raíz en su interior.

0.4.1 Método de la Bisección

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, y $f(a) \times f(b) < 0$. Por el *Teorema del Valor Intermedio* para funciones continuas, existe al menos un $\alpha \in (a, b)$, tal que $f(\alpha) = 0$.

Este método consiste en dividir sucesivamente el intervalo $[a, b]$, por la mitad, hasta que la longitud del subintervalo que contiene a la raíz α sea menor que alguna tolerancia especificada ϵ.

Tomado de: Aprende en Línea - UdeA

Algoritmo: Método de Bisección

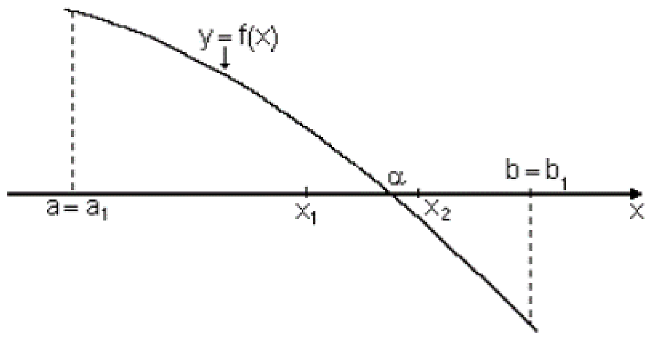
Diagrama de flujo: Método de Bisección

Realizado en el software pseint

Ventajas:

- Siempre converge.
- Útil como aproximación inicial de otros métodos.

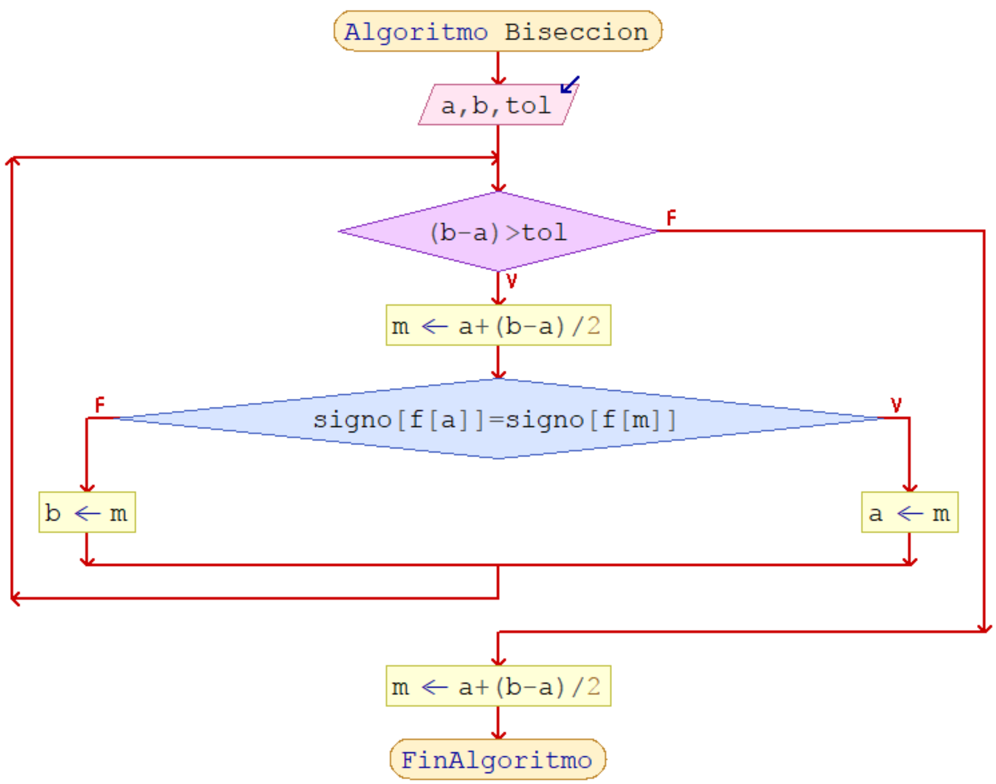
Desventajas:



Biseccion.png

```
Mientras ((b-a) > tol) haga
    m ← a + (b - a)/2
    Si signo(f(a)) = signo(f(m)) entonces
        a ← m
    Sino
        b ← m
    Fin Si
Fin Mientras
m ← a + (b - a)/2
```

Biseccion_Algoritmo.PNG



Biseccion_dflujo.png

- No tiene en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n, solo tiene en cuenta el signo de $f(x)$.
- Método linealmente convergente, $r = 1$, $C = 0.5$

Criterios de paro y estimación del error:

- Repetir el método para obtener una aproximación más exacta de la raíz.
- Finalizar el cálculo cuando el error se encuentre por debajo de algún nivel prefijado:

$$\epsilon_a = \frac{|x_r^{(i)} - x_r^{(i-1)}|}{x_r^{(i)}} \times 100\% \leq Tol$$

- donde:
- i: iteracion actual
- $i - 1$: iteración anterior
- Cada vez se encuentra una aproximación a la raíz cuando se usan bisecciones como:

$$x_r = \frac{|x_u - x_l|}{2}$$

- La raíz verdadera se halla en algún lugar dentro del intervalo:

$$\frac{|x_u - x_l|}{2} = \frac{\Delta x}{2}$$

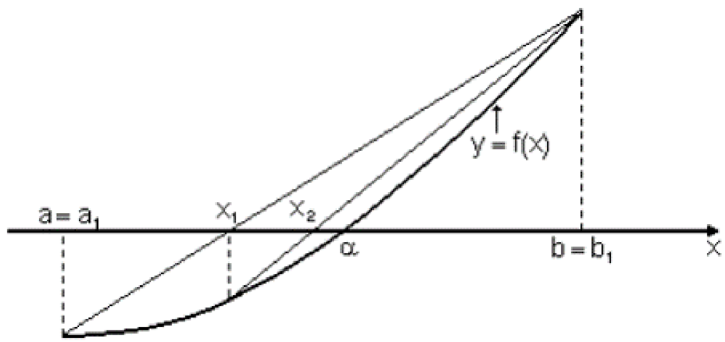
- La raíz debe situarse en $\pm\Delta x/2$, debido a que:

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{|x_r^{(i)} - x_r^{(i-1)}|}{2}$$

- La ecuación anterior proporciona un límite superior exacto sobre el error real.
- Aunque este método es el más lento, la claridad en el análisis del error lo hace muy atractivo para aplicaciones en ingeniería.
- Otra ventaja del método de Bisección es que el número de iteraciones requerido para obtener un cierto error absoluto se puede calcular $a\breve{}priori$, es decir.
- Al momento de empezar las iteraciones, el error absoluto es:

$$E_a^{(0)} = |x_u^{(0)} - x_l^{(0)}| = \Delta x^{(0)}$$

- Después de la primera iteración, el error es:



Regula_Falsi.png

$$E_a^{(1)} = \frac{\Delta x^{(0)}}{2}$$

- El error absoluto correspondiente a la última iteració sería:

$$E_a^{(n)} = \frac{\Delta x^{(0)}}{2^n}$$

0.4.2 Regula Falsi (Falsa Posición)

- Consideremos una función f continua en un intervalo $[a, b]$, y tal que $f(a) \times f(b) < 0$.
- Este método es similar al método de **Bisección** en el sentido de que se generan subintervalos $[a_n, b_n]$, que encierran a la raíz α, pero esta vez x_n no es el punto medio de $[a_n, b_n]$, sino el punto de intersección de la recta que pasa por los puntos $(a_n, f(a_n)), (b_n, f(b_n))$, con el eje x, al que le llamaremos *punto intermedio*, x_m.

La determinación del punto intermedio se da de la siguiente manera:

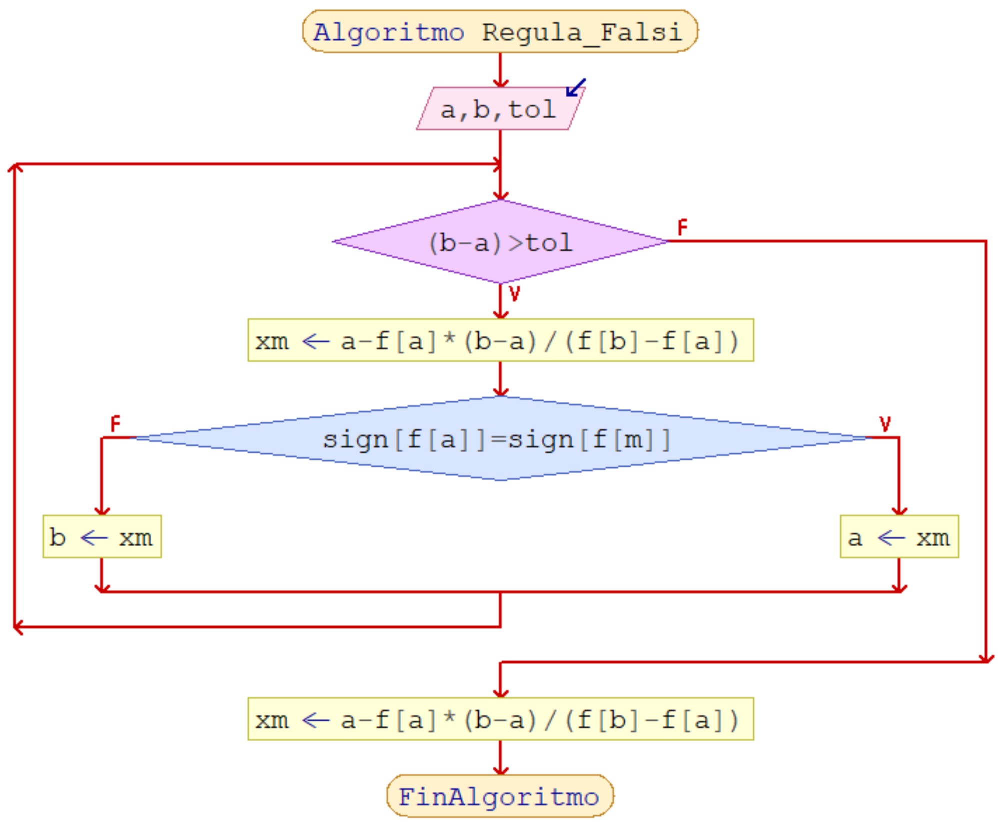
- Se halla la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ mediante la expresión:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}(x - a)$$

- Como los extremos estan en lados opuestos, se garantiza que la recta toca en algún punto el eje x. La coordenada de este punto es $y = (x_m, 0)$. Reemplazando este valor en la ecuación de la recta hallada, y despejando para x_m:

$$x_m = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

- Con este punto, se determina el valor de $f(m)$ y su signo, y al igual que con el método de Bisección, se compara con el signo de $f(a)$ y $f(b)$ para reemplazar uno de los dos extremos, a o b por un nuevo valor de x_m.



RegulaFalsi_dflujo.png

- Se repite el proceso hata alcanzar la tolerancia indicada.

Diagrama de flujo: Método de Regula Falsi
Realizado en el software pseint

0.5 Métodos Abiertos

- A diferencia de los *métodos cerrados*, calculan en cada iteración una aproxmación a la raíz, sin necesidad de verificar lo que sucede dentro de un intervalo.
- Al igual que los *métodos cerrados*, los *métodos abiertos* generan una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que se espera converjan a la raíz.
- Los *métodos abiertos* no necesariamente converjen en muchos casos, sin embargo, si lo logran hacer, son mucho más eficientes que los métodos cerrados.

0.5.1 Método de Punto Fijo

Dada una ecuación $f(x) = 0$, se puede transformar, en otra equivalente del tipo $x = g(x)$ para alguna función g. En este caso se tiene que: α es raíz de $f(x) = 0$, entonces $f(\alpha) = 0$, entonces $\alpha = g(\alpha)$, entonces α es raíz de $x = g(x)$.

Definición: Un número α tal que $\alpha = g(\alpha)$ se dice un punto fijo de la función g.

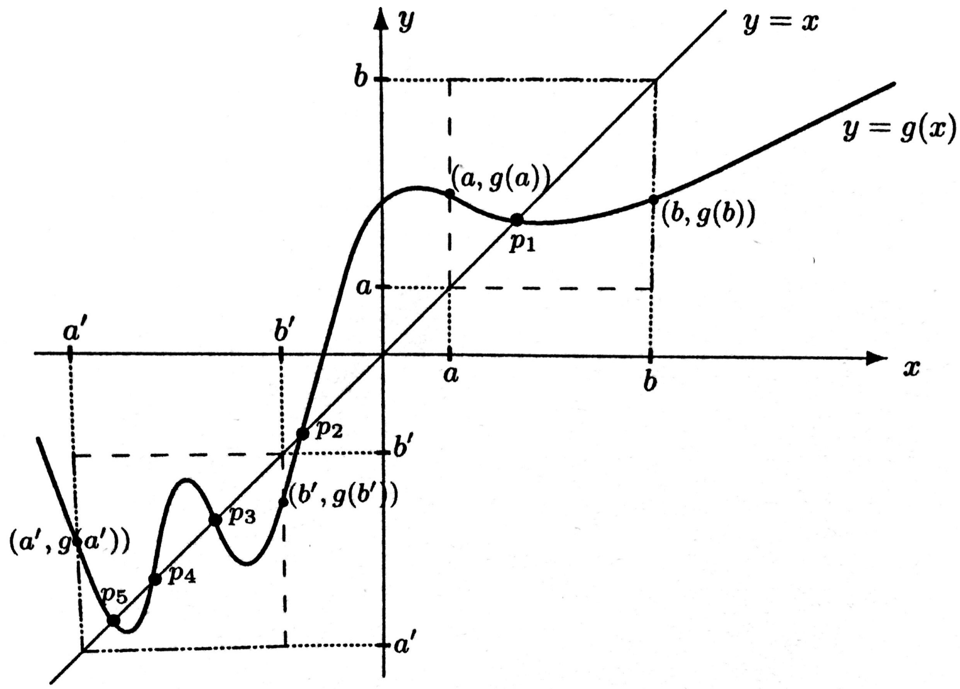
Teorema de punto fijo: Si g es una función continua en $[a, b]$, y $g(x) \in [a, b] \vee x \in [a, b]$, entonces g tiene por lo menos un punto fijo en $[a, b]$. Si además, $g'(x)$ existe $\vee x \in (a, b)$, y $|g'(x)| \leq K < 1 \vee x \in (a, b)$, K constante, entonces g tiene un único punto fijo $x \in [a, b]$, y se tiene la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida mediante la fórmula de iteración:

$$x_n = g(x_{n-1}), n = 1, 2, 3, \ldots$$

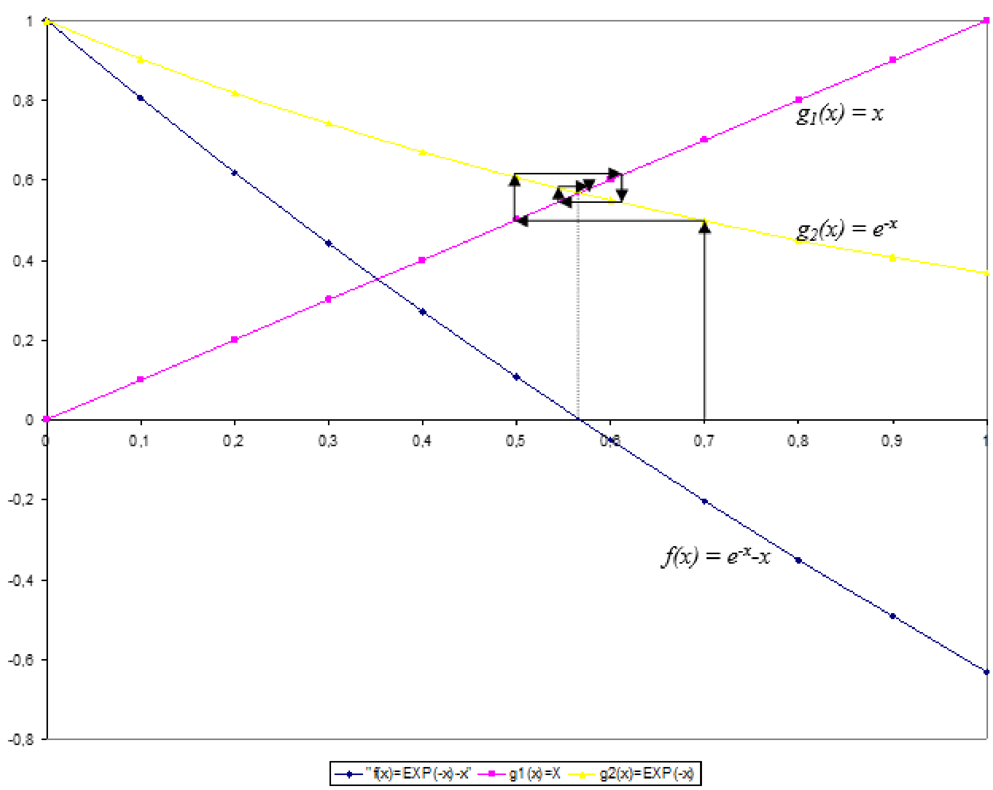
- El comportamiento de los esquemas de punto fijo puede variar ampliamente desde la divergencia, lenta convergencia, a la rápida convergencia.
- La vía más simple (aunque no más general) de caracterizar el comportamiento de la iteración de punto fijo es considerar la derivada de g en una solución $\hat{x}$.
- Si $\hat{x} = g(\hat{x})$ y $|g'(\hat{x})| < 1$, entonces el esquema es localmente convergente. Es decir, existe un intervalo conteniendo $\hat{x}$ tal que el correspondiente esquema iterativo es convergente si comienza dentro del intervalo.

0.5.2 Ejemplo: Algunos esquemas de Punto Fijo:

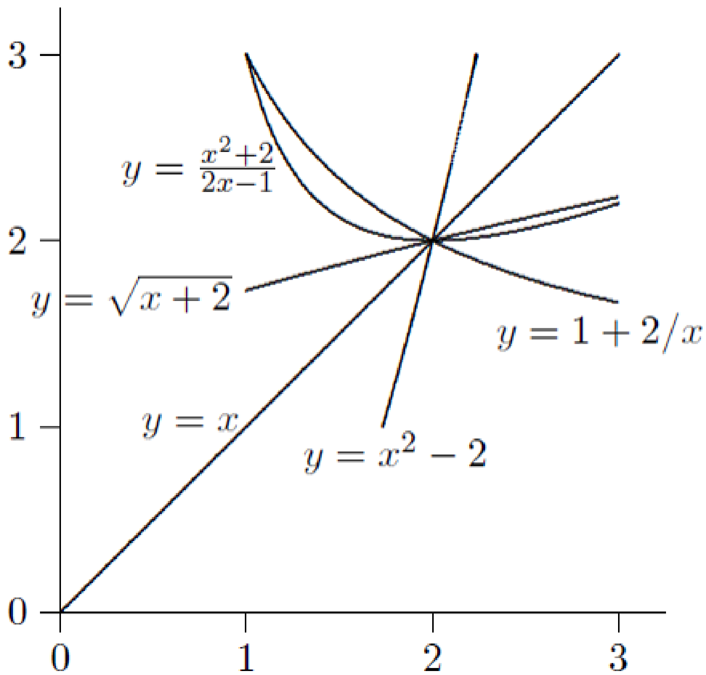
Tomado de: Michael T. Heath: Scientific Computing: An Introductory Survey



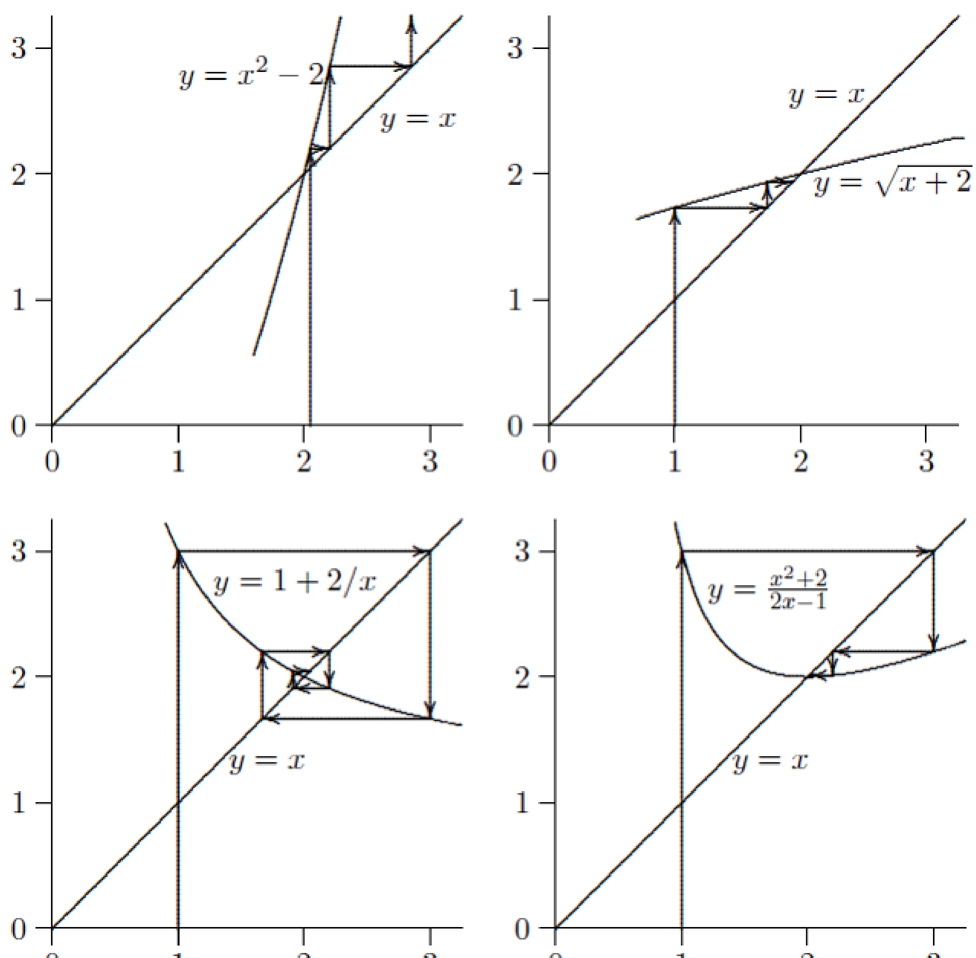
puntofijo_libro2_1.jpg



PuntoFijo.PNG

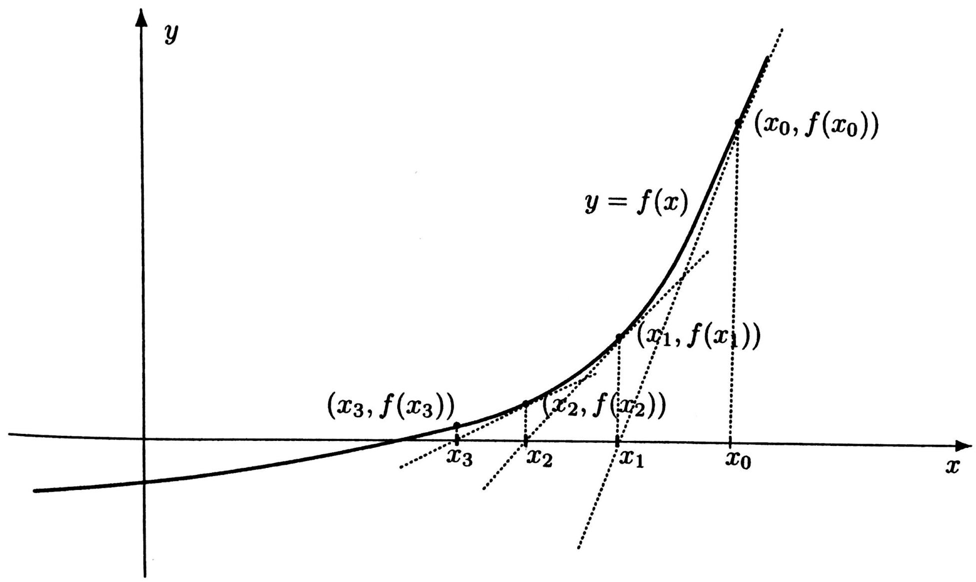


PuntoFijo01.PNG



Tomado de:

Michael T. Heath: Scientific Computing: An Introductory Survey



Newton.jpg

0.5.3 Método de Newton Raphson

- Es uno de los métodos más usados en aplicaciones prácticas debido a su rapidéz y efectividad.
- Para un correcto análisis se presentarán tres acercamientos al método desde puntos de vista diferentes:
- Geométrico
- como Punto Fijo
- Analítico

Aproximación Geométrica:

- Conocido también como el método de las tangentes.
- Como se presenta en la siguiente figura:

Los valores de $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se obtienen como el punto de corte con el eje x de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ en los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ...,$(x_n, f(x_n))$.

La ecuación de la recta tangente tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, está dada por la expresión:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sustituyendo en esta ecuación la coordenada del punto intersección de la recta tangente $(x_1, 0)$ y despejando para x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Continuando de forma recursiva para cada uno de los puntos x_i:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Aproximación como Punto Fijo De la ecuación anterior, se puede observar que tiene la forma de punto fijo: $x = g(x)$.

Aproximación Analítica: Aproximando la función f por *series de Taylor*:

Sea $f \in C^2[a,b]$, $\hat{x} \in [a,b]$ y $x_v \in [a,b]$ tal que $f(x_v) = 0$ y $\hat{x}$ es un valor muy cercano a x_v, entonces, el polinomio de *Taylor* con dos términos para aproximar $f(x)$ alrededor de $\hat{x} \in [a,b]$ es:

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \hat{x})^2$$

donde, ξ es un valor que está entre x y $\hat{x}$.

Si $\hat{x}$ es muy cercano a x, es decir, $|x - \hat{x}| \approx 0$ entonces $|x - \hat{x}|^2$ es aún más cercano a 0 y si $|f''(\xi)|$ también es pequeño, la ecuación anterior se reduce a:

$$0 \approx f(\hat{x}) + f'(\hat{x})(x - \hat{x})$$

despejando x y generando la sucesión de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

0.5.4 Análisis de Convergencia del Método de *Newton Raphson*

Actividad para ser realizada por el estudiante.

0.5.5 Método de la Secante

La mayor limitante que tiene el método de *Newton* es la evaluación explícita de la derivada y cuando ella es cero, o muy cercana a cero, en la raíz.

Recordando que la derivada se define como:

$$f'(x_n) = \lim_{x \to x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}$$

Aproximando el valor límite evaluando en algún punto x_{n-1},

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

y sustituyendo la derivada en el denominador de la ecuación de iteración en el método de *Newton*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Consideraciones al Método de la Secante:

- se requieren dos valores iniciales: x_0 y x_1.
- A partir de estos dos valores se obtiene x_2 y así sucesivamente
- El método de la Secante es muy similar al método de la Regula Falsi

Presentación Geométrica del Método de la Secante: Supongamos conocidos los valores x_0 y x_1, con estos valores se tienen sus respectivas coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. Con estos puntos se puede determinar la ecuación de la línea recta:

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

el valor x_2 es el punto de intersección de la recta secante generada con los puntos x_0 y x_1 y el eje x, y tiene por coordenadas $(x_2, 0)$. Reemplazando este punto en la ecuación anterior se obtiene:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

siguiendo el mismo razonamiento, se obtiene la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

0.5.6 Método para calcular raíces múltiples y en Polinomios

Definición: Se dice que x_v es una raíz de multiplicidad m de f si y sólo si $f(x)$ puede escribirse como:

$$f(x) = (x - x_v)^m q(x)$$

en donde $q(x_v) \neq 0$. Si $m = 1$ se llama raíz simple.

Teorema: Sea $f \in C^m[a, b]$. La función f tiene una raíz de multiplicidad m en x_v si y solo si $0 = f(x_v) = f'(x_v) = f''(x_v) = \ldots = f^{(m-1)}(x_v)$ pero $f^m(x_v) \neq 0$

El método para hallar las raíces múltiples se desprende del método de $Newton - Raphson$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

0.5.7 Método de Horner...

0.5.8 Análisis Comparativo de la convergencia local de los métodos vistos:

Definición: Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que geneara algún método para el cálculo de raíces que convergen a x_v y sea $E_a = |x_n - x_v|$ el error en la etapa n del método. Si existen constantes positivas λ y α, tales que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^{\alpha}} = \lambda$$

entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x_v con orden α y una constante de error asintótico λ.

Para efectos del análisis, una sucesión converge a x_v con orden α y una constante de error asintótico λ, si el error se comporta de tal manera que se cumple la siguiente relación:

$$E_{n+1} \approx \lambda E_n^{\alpha}$$

Bisección:

$$E_{n+1} = \frac{1}{2}E_n$$

Punto Fijo:

$$|E_{n+1}| \leq k \times E_n$$

- Si $k > 1/2$ Punto fijo es más lento que Bisección.
- Si $k = 1/2$, la velocidad de convergencia es la misma en ambos métodos.
- Si $k < 1/2$ la velocidad de convergencia del método de Punto Fijo es mayor que la de Bisección.

Newton - Raphson:

$$E_{n+1} \approx k \times E_n^2$$

Secante:

$$|E_{n+1}| \approx k \times E_n^{1.62}$$

```
In [ ]:
```