# 자기 상관

# (Autocorrelation)

## - 계량 경제학 관점

## ◦ 자기 상관의 본질

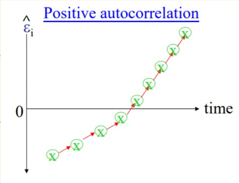
- 시계열 자료(Time-Series-data)를 다루는 경우, 항상 연속되는 오차항들이 서로 상관되어 있을 가능성 존재.

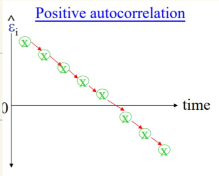
- 어떤 특정 시점에서 해당 시점의 오차항은 해당 시점의 충격뿐 아니라 과거로부터의 충격으로 부터 이전된 영향들도 포함.

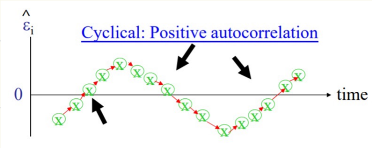
- 이러한 이전된 영향으로 인해, 해당시점의 충격은 과거의 충격과 상관될 것이며, 이러한 상황으로 오차항들 상관 有 ⇒ 자기 상관 존재!

- 양(positive)의 자기 상관과 음(negative)의 자기 상관이 존재할 수 있음.

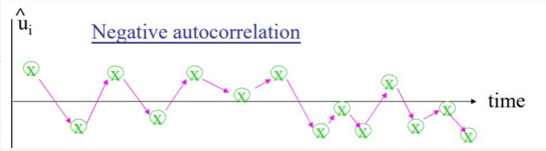
① 양의 자기상관 : 현재의 오차항이 과거의 오차항과 같은 부호를 가지려는 경향성이 있음

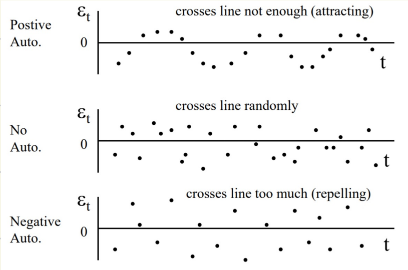


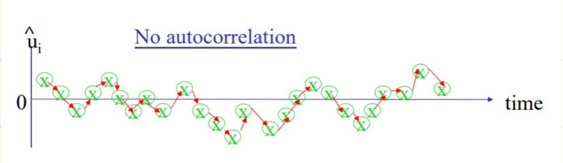




② 음의 자기 상관 : 현재의 오차항이 과거와 다른 부호를 가지려는 경향




③ 무 자기상관 : 현재의 오차항이 과거와는 무관하게 나타남.



- 표본의 무작위성 (randomness)은 서로 다른 관측치에 대한 오차항들이 상관되어 있지 말아야 함 의미.
  But, 자기 상관은 이러한 무작위성이 위반됨을 의미함.
- 경제 시계열 모형의 오차항에 존재하는 자기상관 (Autocorrelation)은 거의 대부분 체계적 패턴
- 유효성 (efficiency, accurate estimation/prediction) 위해서는 모든 체계적 정보가 회귀모형에 체화 되어 있어야 한다.

• 단순 선형 회귀 모형

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$$

- zero mean : $E(\varepsilon_t) = 0$
- homoskedasticity : $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$
- nonautocorrelation : $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s$

→ autocorrelation (serial correlation) : $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) \neq 0, \quad t \neq s$

⇓

특정 값에 편중해 추정X

모수에 최대한 가까이 추정.

- 최소 제곱 추정량은 여전히 선형 불편 추정량이나, 유효추정량은 아님!
- 표준 오차를 계산하기 위한 통상의 공식 정확 X, 신뢰구간 & 가설 검정 잘못하게 됨.

## • HAC 표준오차.

- Heterskedastisty and Autocorrelation Consistent 표준오차는 Newey-West 표준오차라고도 하여, 오차항의 분산과 공분산에 대한 가정이 충족되지 않는 경우, 잘못 계산되는 표준오차 값을 대체할 수 있는 값을 계산해줌.

- 이분산성과 자기상관이 동시에 존재하는 경우에도 적용가능.

- 자기 상관의 구조가 불분명하여 일반 최소 제곱의 추정이 적절하지 않은 경우 적용 가능

## • 자기회귀 모형 (Autoregressive Model)

$\Rightarrow y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$

- 1차 자기회귀 모형 : $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$

- 2차 : $\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + v_t$

- 3차 〃 : $\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \rho_3\varepsilon_{t-3} + v_t$

$\downarrow$

A "new" shock to the level of economic variable

- 오차항이 1차 자기회귀 모형 따름 가정 → AR(1) : $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$

Autocorrelation coefficient

$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$ $\qquad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ , where $-1 < \rho < 1$

The random component in time period t

↳ carryover from the random error in the previous period.

$\rightarrow E(v_t) = 0, \quad Var(v_t) = \sigma_v^2, \quad Cov(v_t, v_s) = 0, \ t \neq s$

$E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}, \quad Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \sigma_\varepsilon^2\rho^k, \quad corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \rho^k \quad (k>0)$

$\rightarrow \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ 에서 $\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + v_{t-1}$ 대입 : $\varepsilon_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + v_t + \rho v_{t-1}$

$\therefore \varepsilon_t = v_t + \rho v_{t-1} + \rho^2 v_{t-2} + \rho^3 v_{t-3} + \cdots$

- AR(1) 하의 일반최소 제곱 추정량

- AR(1) : $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ - ①

$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$ - ②

에러를 한 시차 늦추기.

$\rightarrow \varepsilon_t = y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t \rightarrow \varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1}$ - ③

①을 ②에 대입 : $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$

③ 대입 : $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \rho(y_{t-1} - \beta_1 - \beta_2 X_{t-1}) + v_t$

$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + v_t$

$y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + v_t \qquad t = 2, 3, \cdots, T$

* 최소 제곱법으로 이 모형을 추정함에 있어의 문제.

1. 변환된 변수들을 만들어냄에 있어 시차 (lagged) 변수를 사용함으로써 관측치 하나를 날려버리게 되어 (T-1)개의 관측치만으로 모형 추정.

2. $\rho$ 값 모름. 추정 위한 방법 찾아야 한다.

## ∘ 첫번째 관측치의 복구

- $y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_1 + \varepsilon_1$ 을 추정치에 넣기.

  단, $y_1^* = y_1$, $X_{11}^* = 1$, $X_{21}^* = X_1$

- But, 이렇게 첫번째 관측치를 복구했을 때 문제점

  ① 최소제곱법은 best linear Unbiased Estimation X

  ② Efficiency X : 첫 번째 관측치와 관련된 오차항의 분산 ≠ 다른 오차항의 분산

  ⇒ 등분산성 X

- 첫번째 관측치는 원래 모형에 적합되어야 한다.

  다른 관측치 오차들의 분산

  $$y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_1 + \varepsilon_1, \quad Var(\varepsilon_1) = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_v^2}{(1-\rho^2)}$$

  → 변형된 변수들을 이용한 추정에 위 식 포함시킬 수 있으나, 다른 관측치들과 같은 오차항의 분산을 가질 수 있도록 변형해야함.

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_1 + \varepsilon_1 \rightarrow \sqrt{1-\rho^2}\, y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\,\beta_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,\beta_2 X_1 + \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_1$$

$$\rightarrow \quad y_1^* = \beta_1 X_{11}^* + \beta_2 X_{21}^* + \varepsilon_1^*$$

$$\text{단, } \varepsilon_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\cdot\varepsilon_1, \quad Var(\varepsilon_1^*) = \sigma_v^2$$

∴ 이렇게 변형된 관측치가 다른 (T-1)개의 관측치들에 추가되어

T개의 관측치들을 완전히 복원 가능

• $\rho$의 추정.

: 오차항 $\varepsilon_t$들의 값을 안다면, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$ 추정 가능.

① 최소제곱법 이용해 $y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t$ 추정

② 추정된 값으로 부터 잔차 구함 : $\hat{\varepsilon}_t = y_t - b_1 - b_2 X_t$

③ 최소제곱법 이용해 $\hat{\varepsilon}_t = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1} + v_t$ 추정

④ 최소제곱 추정량 : $\hat{\rho} = \dfrac{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$

• 일반 최소 제곱 추정 (Generalized Least Squares ; GLS)

: 복원된 $t=1$ 관측치와 앞서 추정한 $\hat{\rho}$을 이용하여 $y_t^*$, $X_{1t}^*$, $X_{2t}^*$ $(t=1,2,\cdots,T)$의 값을 계산해

$y_t^* = \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \varepsilon_t^*$ $(t=1,2,\cdots,T)$ 추정 가능 $(\varepsilon_1^* = \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_1,\ \varepsilon_t^* = v_t,\ t\geq 2)$

$\Rightarrow \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ : 일반 최소제곱 추정치

• Prais - Winsten (Cochrance - Orcutt) Estimator

: $\hat{\rho}$의 추정은 efficient 하지 않은 OLS에서 얻어진 잔차로부터 이루어짐 → 개선해야 한다!

$\hat{\varepsilon}_t' = y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_t$ : 앞서 얻은 GLS 추정치로 잔차 다시 계산

$\hat{\varepsilon}_t' = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1}' + v_t$ : 새로운 잔차값 이용해 $\rho$ 다시 추정.

즉, Prais-Winsten (Cochrance Orcutt) 추정은

새로운 $\rho$에 대한 추정치 이용해 다시 GLS 얻는 과정의 반복.

## * 자기 상관의 탐지

- DW 검정 (Durbin - Watson Test)

  - $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho \neq 0$

  - 더빈-왓슨 검정 통계량 (The Durbin-Watson Test Statistic)

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$$