



哈爾濱工業大學

## 随机过程实验

实验题目 隐马模型

学 号 1190200122

姓 名 袁野

指导教师 范晓鹏

日 期 2021 年 11 月 13 日

## 一、 实验目的

通过编程练习并理解马尔可夫模型

## 二、 实验内容

### 1、 马尔科夫链的生成（隐状态）

假设晴天和雨天的初始概率分别为 0.6 和 0.4，如果前一天是晴天，则第二天晴天和雨天概率仍然是 0.6 和 0.4，如果前一天是雨天，则第二天晴天和雨天概率分别为 0.3 和 0.7。

1.1 试写出天气（晴天、雨天）的状态转移矩阵。

1.2 根据初始概率和状态转移矩阵，随机生成 20 天的天气序列。（用 1 表示晴天，2 表示雨天）。

### 2、 马尔科夫链的生成（显状态）

一个朋友每天根据天气{天晴，下雨}按以下概率决定当天的活动{公园散步, 购物, 清理房间}中的一种

```
emission_probability = {  
    'Sunny' : {'walk': 0.6, 'shop': 0.3, 'clean': 0.1},  
    'Rainy' : {'walk': 0.1, 'shop': 0.4, 'clean': 0.5},  
}
```

2.1 请按照问题一生成的天气序列，以及以上概率，来生成这位朋友这 20 天的活动序列（用 1 表示散步，2 表示购物，3 表示清理）。

### 3、 隐马尔科夫模型

问题二中的朋友每天在朋友圈发布当天的活动

3.1 假设他连续三天发布的活动状态分别是 1 2 3，请计算这三天天气序列为 1 2 2 的概率。

3.2 假设他连续二十天发布的状态是 2 1 3 2 3 2 2 3 3 1 2 1 1 1 2 3 3 3 3 2，请推测这 20 天的天气。

## 三、 实验过程

### 1、 马尔科夫链的生成（隐状态）

1.1

$$P\{X_{n+1} = 1|X_n = 1\} = 0.6$$

$$P\{X_{n+1} = 2|X_n = 1\} = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P\{X_{n+1} = 1|X_n = 2\} = 0.3$$

$$P\{X_{n+1} = 2|X_n = 2\} = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$\text{因此转移矩阵为 } T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

### 1.2

用 `numpy.random.rand()` 生成一个 $[0,1)$ 的随机数，如果该数字小于0.6，则第一天为晴天，否则为阴天，然后再用同样的方式生成一个随机数，根据该数字的取值范围以及当天天气情况来判断下一天的天气情况。

以上代码为 3.1\_2.py

### 2、马尔科夫链的生成（显状态）

根据 1 生成的天气序列中每一天的天气，生成随机数来决定当天其进行的活动。

以上代码为 3.1\_2.py

### 3、隐马尔科夫模型

#### 3.1

我们设  $W$  为这三天的天气序列， $A$  为这三天的活动序列，其中  $W_k = [1,2,2]$ ,  $A_t = [1,2,2]$ , 根据贝叶斯公式则有

$$P(W_k|A_t) = \frac{P(A_t|W_k) * P(W_k)}{\sum_i P(A_t|W_i) * P(W_i)}$$

其中

$$P(A_i|W_j) = \prod_{k=1}^3 P(A_{i,k}|W_{j,k})$$

$$P(W_i) = Initial\_P_{W_1} * \prod_{k=2}^3 P(W_{i,k}|W_{i,k-1})$$

根据上述公式，我们枚举所有的天气序列 $W_i$ 并计算答案即可。

以上代码为 3.3.1.py

#### 3.2

该问题可用维特比算法求解。其中天气序列为状态序列，是未知的，活动序列为观测序列，是已知的。

在该问题中，任意一天的天气只依赖于前一天的天气，与其他天的天气和观测无关，而每一天的活动也仅与当天的天气有关。

我们设  $f_{i,j}$  为第 1 天到第  $i-1$  天天气全部确定后第  $i$  天时天气状态为  $j$  的最大概率，则有

$$f_{i,j} = \max_{k=1,2} [f_{i-1,k} * P(W_i = j|W_{i-1} = k)] * P(A_i|W_i = j)$$
$$yesterday_{i,j} = \operatorname{argmax}_{k=1,2} \{f_{i-1,k} * P(W_i = j|W_{i-1} = k)\}$$

我们去最后一天最大概率最大的天气为当天的天气，然后根据  $yesterday_i$  的指针倒着还原所有的天气即可。

以上代码为 3.3.2.py

## 四、实验结果

1、 马尔科夫链的生成（隐状态）

```
[[0.6 0.4]
 [0.3 0.7]]
The weather is :
[0, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2]
```

2、 马尔科夫链的生成（显状态）

```
The activities are:
[3, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 2]
```

3、 隐马尔科夫模型

```
D:\soft\anaconda3\envs\Lab3\python.exe D:/github/School_Pro/计算建模/Lab3/3.3.1.py
0.4589327991258423
```

```
D:\soft\anaconda3\envs\Lab3\python.exe D:/github/School_Pro/计算建模/Lab3/3.3.2.py
[1 1 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2]
```

## 五、 心得体会

对马尔科夫链的生成、马尔可夫模型以及其状态的转移有了更清晰的认识，对于一些概率的计算更加熟练。