习题一

1.1 将 n 个球均匀随机地投入 n 个箱子,利用切比雪夫不等式分析，第 1 个箱子中球数大于 $t(>0)$的概率。

1.2 假设 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$的各个维独立地服从标准正太分布，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 L_2 范数下的两个 n 维单位向量。令 $X=\boldsymbol{rx}^{\mathrm{T}}$，$Y=\boldsymbol{ry}^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积。

(1)计算 $\mathrm{E}[X],\mathrm{E}[Y],\mathrm{var}[X],\mathrm{var}[Y]$;

(2)利用柯西-希瓦兹不等式估计 $\mathrm{E}[(X-Y)^2]$的值。

1.2 理解如下的随机算法，完成后面的问题。

输入：$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n \mid s_i\in\boldsymbol{R}\}$

输出：$min(S, k)$—S 中第 k 小的元素

Random_Select(S,k)

1. 从 S 中随机选择一个元素 s；
2. $S_1=\{s_i| s_i\in S, s_i<s\}$, $S_2=\{s_i| s_i\in S, s_i>s\}$;
3. IF $|S_1|=k-1$ THEN 返回 s;
4. ELSE IF $|S_1|>k$ THEN 返回 Random_Select(S_1, k);
5. ELSE 返回 Random_Select(S_2, $k-|S_1|$);

（1）该算法属于哪一类随机算法？

（2）证明：存在常数 $b<1$，使得算法递归过程中所考虑集合的大小的数学期望为 bn。

（3）证明：算法时间复杂度的数学期望为 $O(n)$。

1.3 试设计一个随机算法判定输入的阶分别为 m,n,l 的多项式 $p(x),q(x)$和 $r(x)$是否满足 $p(x)\cdot q(x)=r(x)$。分析随机算法的时间复杂度和获得正确解的概率，判断该随机算法的类别。

1.4. 试设计一个随机算法判定输入的阶分别为$p\times q,q\times r,p\times r$ 的矩阵 A,B 和 C 是否满足 $A\cdot B=C$。分析随机算法的时间复杂度和获得正确解的概率，判断该随机算法的类别。

1.5. 证明：最小割问题的如下随机算法输出最小割的概率为$\Omega(1/n^2)$。（ 提示：将该算法与 9.6 节的算法关联起来。）

输入：一个多重无向连通图 $G=(V,E)$；

输出：G 的一个最小边割。

Random_Mincut

1. 为图 G 的任意边赋予一个随机独立的正权值；
2. 找出 G 的最小生成树 T;
3. 删除 T 中权值最大的一条边得到两棵树 T_1,T_2;
4. 令 T_1 的顶点集为 C，则 T_2 的顶点集为 $V-C$；
5. $cut=\{uv| uv\in E, u\in C, v\in V-C\}$
6. 输出 cut.

1.6.考虑简单连通图$G = (V;E)$上的最大独立子集问题的如下随机算法。

算法：IndependentSet()

输入：$G = (V;E)$

输出：$I\subseteq V$使得$\forall\ uv\in E$均有：$u\in I, v\in I$中至多有一个成立

1. 为V中每个顶点随机分配｛1,2,…,$|V|$｝中唯一标签，不同顶点具有不同标

签；
2. $I \rightarrow \varnothing$, $S \leftarrow V$;
3. while $S \neq \varnothing$ do
4. $u \leftarrow S$中标签最小的顶点
5. $I \leftarrow I \cup \{u\}$
6. 从 S 中删除 u 和 u 的相邻顶点；
7.输出 I

将 IndependentSet 算法输出的集合记为 I。证明：
（1）I 是 $G = (V;E)$的一个独立集；
（2）对$\forall\ u \in V$, $u \in I$ 的概率等于 $1/(d_u+1)$, 其中 d_u 表示 u 在 G 中的度。

1.7.设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是 n 个不同数构成的列表。如果 $i<j$ 且 $a_i>a_j$ 则称 a_i 和 a_j 是倒置的。冒泡排序算法的实质是不断交换列表中相邻的倒置元素，直到列表中没有倒置元素为止。假设冒泡排序算法的输入是一个随机排列，等可能地是 $n!$个排列中的任意一个。确定冒泡排序算法需要交换的倒置元素个数的数学期望。

1.8.有一个函数 $F:\{0,1,\ldots,n-1\}\rightarrow\{0,1,\ldots,m-1\}$，且 $F((x+y) \bmod n) = F(x)+F(y) \mod m$ 对$\forall x,y\in\{0,1,\ldots,n-1\}$成立。设 $F(x)$存储在一个数组中，数组下标表示自变量的值，数组元素的值表示函数值；由于某种意外，数组中 1/5 的函数值被恶意串改。试设计一个随机算法使其对$\forall z\in\{0,1,\ldots,n-1\}$算法能够以大于 1/2 的概率计算出正确的 $F(z)$。如果运行算法 3 次，你应该返回什么样的值，此时算法得到正确 $F(z)$的概率有什么变化？