

1 下一代矩阵

1.1 模型案例

我们通过一个实例来看, 模型如下所示:

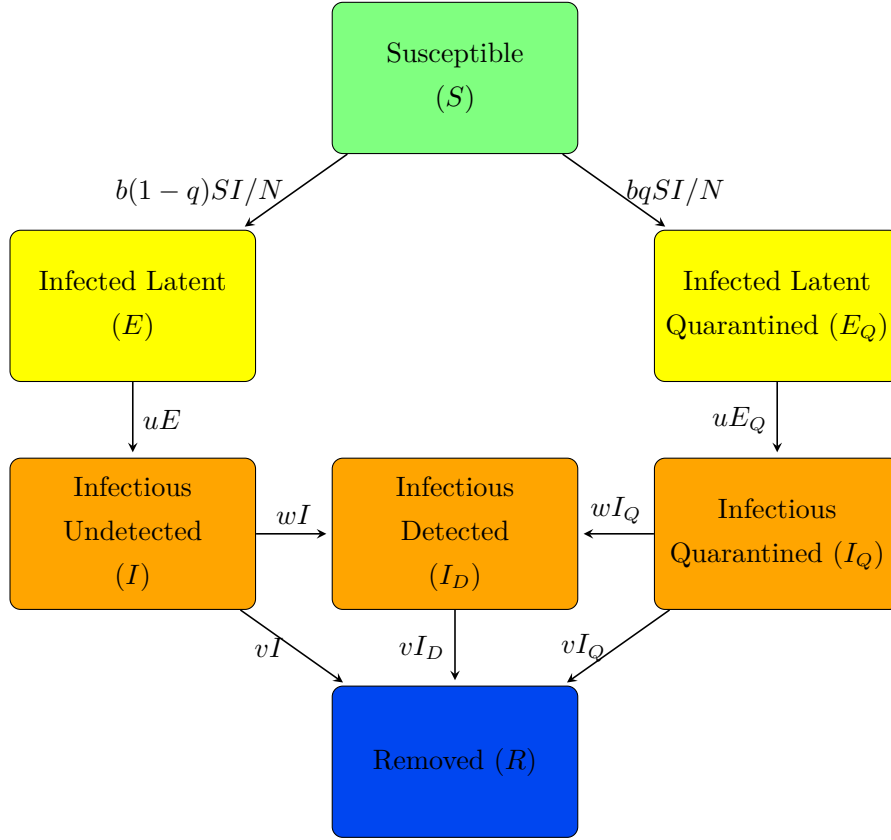


图 1: 传染病改良 $SEIR$ 模型

模型的方程如下所示:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -bS\frac{I}{N} \\ \frac{dE}{dt} = b(1-q)S\frac{I}{N} - uE \\ \frac{dE_Q}{dt} = bqS\frac{I}{N} - uE_Q \\ \frac{dI}{dt} = uE - (v+w)I \\ \frac{dI_Q}{dt} = uE_Q - (v+w)I_Q \\ \frac{dI_D}{dt} = w(I + I_Q) - vI_D \\ \frac{dR}{dt} = v(I + I_Q + I_D) \end{cases}$$

其中, S 为易感者, E 为潜伏期感染者, E_Q 为隔离潜伏期感染者, I 为未检测到的感染者, I_Q 为隔离感染者, I_D 为检测到的感染者, R 为康复者。各个参数的含义如下: b 感染率, q 隔离率, u 潜伏期转为感染者的速率, v 感染者转为康复者的速率, w 感染者转为死亡者的速率。

1.2 感染相关的仓室确定

什么是感染相关的仓室? 感染相关仓室是指那些与感染者直接相关的仓室, 这些仓室的状态变化会影响感染发生率。根据原文献, 感染相关仓室包括所有被感染的个体所处的仓室, 除了那些在感染过程中但已经不再能传播疾病 (比如永久隔离、治愈后免疫、死亡等)。有如下的判别依据:

- (1) 携带病原体: 仓室中的个体必须是已经感染了病原体的状态 (因此排除了易感者 S 和康复者 R 等)

- (2) 能够传播疾病或能够转化为具有传播能力的仓室：也就是说，这些仓室要么直接具有传染性，要么会变成具有传染性的仓室 (例如潜伏期仓室虽然不传染，但会变成传染性仓室)
- (3) 参与传播动力学：也就是说，这些仓室的状态变化会影响感染发生率 (比如传染性仓室的大小会影响易感者的感染风险).

根据第一条，可以直接排除仓室 S 和仓室 R ，剩下的仓室为： E 、 E_Q 、 I 、 I_Q 、 I_D ，随后根据第二条可以得：仓室 E 和 E_Q 虽然不直接传染，但它们会转化为传染性仓室 I 和 I_Q ，因此也属于感染相关仓室。仓室 I 、 I_Q 和 I_D 都是直接具有传染性的仓室，但是隔离使 I_Q 其传播能力为零，而 I_D 这个仓室不传播且不转化为传播源。

在保守计算下，我们通常仍然将其视为感染相关仓室，但由于其传播系数为零，所以其传播贡献为零。同时为了简便计算，最后感染相关仓室为 E 、 E_Q 、 I 。

1.3 感染相关仓室的分解

感染相关仓室确定了，接下来计算系统的无病平衡点，令感染相关仓室的状态为 $E = E_Q = I = 0$ ，可解得易感者 $S = N$ ，其中 N 为总人口数。感染相关仓室的方程为：

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b(1-q)S\frac{I}{N} - uE \\ \frac{dE_Q}{dt} = bqS\frac{I}{N} - uE_Q \\ \frac{dI}{dt} = uE - (v+w)I \end{cases}$$

在无病平衡点处 ($S = N$, $E = E_Q = I = 0$)，方程可以简化为：

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = b(1-q)I - uE \\ \frac{dE_Q}{dt} = bqI - uE_Q \\ \frac{dI}{dt} = uE - (v+w)I \end{cases}$$

方程组右侧可分解为 F (新感染) 和 V (转移：包括移入该仓室的和从该仓室移除的) 两部分 ($F - V$)，注意到 I 是没有新感染的，那么有：

$$F = \begin{bmatrix} b(1-q)I \\ bqI \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} uE \\ uE_Q \\ -uE + (v+w)I \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.4 计算雅可比矩阵

在无病平衡点处计算雅可比矩阵

$$F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b(1-q) \\ 0 & 0 & bq \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ -u & 0 & v+w \end{bmatrix} \quad (2)$$

随后求转移矩阵 V 的逆 V^{-1} ，那么有：

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ \frac{1}{v+w} & 0 & -\frac{1}{v+w} \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.5 计算下一代矩阵

下一代矩阵 $K = FV^{-1}$ ：

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b(1-q) \\ 0 & 0 & bq \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ \frac{1}{v+w} & 0 & -\frac{1}{v+w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b(1-q)}{v+w} & 0 & \frac{b(1-q)}{v+w} \\ \frac{bq}{v+w} & 0 & \frac{bq}{v+w} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

1.6 计算 K 的谱半径

谱半径是矩阵的最大特征值的绝对值。对于矩阵 K ，我们可以通过计算其特征值来找到谱半径。特征值 λ 满足以下方程：

$$\det(K - \lambda I) = 0 \quad (5)$$

其中 I 是单位矩阵。对于矩阵 K ，我们可以计算其特征值：

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{b(1-q)}{v+w} - \lambda & 0 & \frac{b(1-q)}{v+w} \\ \frac{bq}{v+w} & -\lambda & \frac{bq}{v+w} \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (6)$$

通过计算行列式，我们可以得到特征值的方程。计算行列式后，我们得到：

$$\left(\frac{b(1-q)}{v+w} - \lambda \right) (-\lambda)(-\lambda) - \frac{bq}{v+w} \left(\frac{b(1-q)}{v+w} \right) = 0 \quad (7)$$

解这个方程，我们可以得到特征值：

$$\lambda_1 = \frac{b(1-q)}{v+w}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad (8)$$

因此，谱半径为：

$$\rho(K) = \max \left\{ \left| \frac{b(1-q)}{v+w} \right|, 0, 0 \right\} = \frac{b(1-q)}{v+w} \quad (9)$$

1.7 简单例子

再举一个较为简单的例子，这是一个关于登革热媒介-宿主模型，这个模型结合了宿主的 SIS 模型和媒介 (SI) 模型。四个仓室分别对应染病的宿主 I 、染病的媒介 V 、易感的宿主 S 和易感的媒介 M 。宿主通过接触染病的媒介而被感染，媒介反过来又通过接触染病的宿主而被感染，感染率分别为 $\beta_s SV$ 和 $\beta_m MI$ 。模型如下所示：

$$\begin{cases} \dot{I} = \beta_s SV - (b + \gamma)I \\ \dot{V} = \beta_m MI - cV \\ \dot{S} = b - bS + \gamma I - \beta_s SV \\ \dot{M} = c - cM - \beta_m MI \end{cases}$$

其中 $b > 0$ 是宿主的出生率和死亡率， $c > 0$ 是媒介的出生率和死亡率，因此，无病平衡点为 $x_0 = (0, 0, 1, 1)^T$ 。

易得 S 和 M 都是易感，而剩下的仓室 I 和 V 就是感染相关仓室。

$$\begin{cases} \dot{I} = \beta_s SV - (b + \gamma)I \\ \dot{V} = \beta_m MI - cV \end{cases}$$

从而方程右侧可分解为 $(\mathcal{F} - \mathcal{V})$ ：

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_s SV \\ \beta_m MI \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (b + \gamma)I \\ cV \end{bmatrix} \quad (10)$$

下面计算 F 和 V ：

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta_s \\ \beta_m & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} (b + \gamma)I & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (11)$$

最后计算基本再生数为

$$R_0 = \sqrt{\frac{\beta_s \beta_m}{c(b + \gamma)}}$$