Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

19 января 2022 г.

Бюджетное ограничение

План

Первая половина лекции посвящена интерпретации Метода Множителей Лагранжа, почему он работает. Формулировки теорем знать не обязательно, но я хочу, чтобы вы знали, что происходит.

Также будут введены термины спроса и косвенной полезности, и некоторые сопутствующие определения и свойства.

Вторая половина лекции посвящена отработке техник поиска спроса и косвенной полезности во всех классических примерах.

Бюджетное ограничение

Бюджетное ограничение

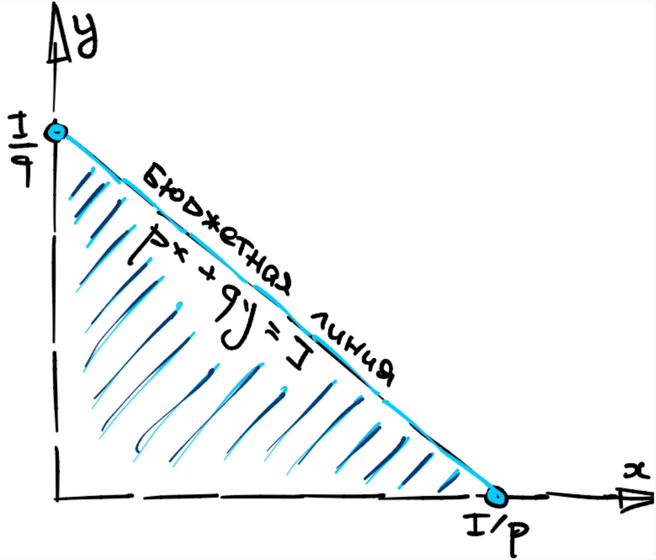
Наиболее часто в нашем курсе будет встречаться линейное бюджетное ограничение:

$$B(x, y) = px + qy - I \leqslant 0$$

где p, q это цены товаров, а I это бюджет.

На прошлой лекции мы уже тренировались его рисовать, опираясь на точки $(p/I, 0)$ и $(0, q/I)$, соответствующие случаю, когда все расходы тратятся на один из двух товаров.

Бюджетное ограничение



Метод Лагранжа

Метод Лагранжа

Запишем нашу оптимизационную задачу в следующем виде:

$$U(x, y) \to \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+} \quad s.t. \quad B(x, y) \leqslant 0$$

Тогда Лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L}(x, y|\lambda) = U(x, y) - \lambda B(x, y)$$

Знак перед множителем Лагранжа важен в доказательствах, но на практике не играет роли и можно ставить любой.

Традиция такова, что λI должен войти с плюсом.

Метод Лагранжа

Далее алгоритм предписывает найти безусловный экстремум Лагранжиана в пространстве (x, y, λ), игнорируя ограничения.

$$\mathcal{L}'_x = 0, \quad \mathcal{L}'_y = 0, \quad \mathcal{L}'_\lambda = 0.$$

Это система из трех уравнений с тремя неизвестными.

Таким образом, задача условной оптимизации сводится к безусловной. Однако, не совсем понятно, почему метод Лагранжа вообще работает и что он находит.

Выпуклая интерпретация ММЛ

Выпуклая интерпретация ММЛ

Если Лагранжиан (квази) вогнутый по товарам x, y то можно применить, так называемый, **Сильный Принцип Лагранжа**:

$$\min_{\lambda \geqslant 0} \max_{x(\lambda), y(\lambda) \geqslant 0} \mathcal{L}(x, y|\lambda) = \max_{x,y \geqslant 0} \min_{\lambda(x,y) \geqslant 0} \mathcal{L}(x, y|\lambda)$$

Справа стоит негладкая задача, эквивалентная условной оптимизации, поскольку $\lambda(x, y)$ выбирается так, чтобы наказать бесконечно отрицательной полезностью в случае выхода за ограничение.

Выпуклая интерпретация ММЛ

Если Лагранжиан (квази) вогнутый по товарам x, y то можно применить, так называемый, **Сильный Принцип Лагранжа**:

$$\min_{\lambda \geqslant 0} \max_{x(\lambda), y(\lambda) \geqslant 0} \mathcal{L}(x, y|\lambda) = \max_{x,y \geqslant 0} \min_{\lambda(x,y) \geqslant 0} \mathcal{L}(x, y|\lambda)$$

Слева стоит гладкая задача, у которой есть один экстремум типа «седло», а значит его можно найти обыкновенными условиями первого порядка:

$$\nabla_{(x,y)}\mathcal{L} = 0, \quad \nabla_{\lambda}\mathcal{L} = 0.$$

В выпуклом случае, координаты решения двух задач, а также, значение целевой функции совпадают. Это называется **Теоремой о Минимаксе**, или **Сильной Дуальностью**.

Невыпуклая интерпретация ММЛ

Невыпуклая интерпретация ММЛ

В общем случае, технология поиска оптимума опирается на, так называемые, **условия Каруш-Кун-Такера**. Основная идея такова, что градиент целевой функции и градиент активного ограничения должны быть параллельны друг другу:

$$\nabla_{(x,y)} U - \lambda \nabla_{(x,y)} B = 0$$

Это называется необходимыми условиями первого порядка. Удивительным образом, это совпадает с поиском седла Лагранжиана. Также, там есть условия невязки, о которых я упомяну чуть позже.

Невыпуклая интерпретация ММЛ

В общем случае, технология поиска оптимума опирается на, так называемые, **условия Каруш-Кун-Такера**.

Основная идея такова, что градиент целевой функции и градиент активного ограничения должны быть параллельны друг другу:

$$\nabla_{(x,y)} U - \lambda \nabla_{(x,y)} B = 0$$

Это называется необходимыми условиями первого порядка, или сокращенно **УПП** (в англ. **FOC**). Удивительным образом, это совпадает с поиском седла Лагранжиана.

Невыпуклая интерпретация ММЛ

Далее надо сделать еще один шаг и проверить достаточные условия второго порядка, или сокращенно **УВП** (в англ. **SOC**):

$$\nabla^2_{(x,y)} U - \lambda \nabla^2_{(x,y)} B \leqslant 0$$

на касательном к ограничении пространстве. Еще более удивительным образом, это совпадает с проверкой (как бы локально) квази вогнутости Лагранжиана в точке.

Угловые решения

Угловые решения

На самом деле, поскольку мы оптимизируем в $\mathbb{R}^n_+$ в Лагранжиан стоило бы добавить еще дополнительные члены, по одному на каждый товар.

$$\mathcal{L}(x, y|\lambda, \ldots) = U(x, y) - \lambda B(x, y) - \ldots$$

Однако, в экономических приложениях, как правило, решение внутреннее. А когда оно не внутреннее, его очень легко отыскать по координатам бюджетного ограничения.

Значение Лагранжиана в оптимуме

Значение Лагранжиана в оптимуме

Вспомним условие невязки из курса мат. анализа:

$$\lambda^* B(x^*, y^*) = 0.$$

Оно означает, что одно из двух обязательно верно: либо множитель Лагранжа равен нулю, либо оптимум достигается на границе бюджетного ограничения.

Это значит, что в оптимуме, значение Лагранжиана совпадает со значением целевой функцией:

$$\mathcal{L}(x^*, y^* | \lambda^*) = U(x^*, y^*) - \lambda B(x^*, y^*)$$

Это нам пригодится, когда мы будем изучать ее.

Интерпретация λ

Интерпретация λ

У множителя λ в Лагранжиане есть особая интерпретация, это теневая цена нарушения ограничения:

$$\mathcal{L} = U(x, y) - \lambda B(x, y), \quad B(x, y) \leqslant 0$$

Если вам очень хочется выйти за ограничение, Лагранж разрешает вам это сделать, то придется дать (кому-то абстрактно) взятку размера λ. Рынок подстроится таким образом, что вы не захотите эту взятку давать.

Кривые спроса

Кривые спроса

Нас будут интересовать координаты оптимума $x^*(p, q, I)$, $y^*(p, q, I)$ в задаче максимизации полезности, при бюджетном ограничении, как функции (кривые) от цен p, q и бюджета I.

Они также называются **функциями (кривыми) спроса**.

Definition 1

Кривые вида **цена-потребление** $x^*(p, \ldots)$, $y^*(q \ldots)$ обычно называются просто кривыми спроса. Кривые вида **доход-потребление** $x^*(I, \ldots)$, $y^*(I, \ldots)$ иногда называются кривыми Энгеля.

Нормальные и инфериорные товары

Нормальные товары

Сфокусируемся на наклонах этих кривых по соответствующим параметрам. Первым мы изучим наклон кривой Энгеля, то есть, кривой доход-потребление.

Definition 2

Нормальными товарами называются товары, кривые спроса которых монотонно возрастают по доходу, то есть:

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} \geqslant 0.$$

Проверка нормальности при аккуратно выведенных кривых спроса - это механическое упражнение в дифференцировании.

Инфериорные товары

Считается, что большая часть товаров - нормальны, однако есть исключения. Например, хлеб, рис, консервы и другие товары первой необходимости иногда интерпретируются как инфериорными по отношению к красному мясу, рыбе, овощам.

Definition 3

Товар у которого нормальность нарушается хотя бы при каких то значениях параметров то есть,

$$\frac{\partial x^*}{\partial I} < 0,$$

называется **инфериорным** (при этих значениях параметров).

Инфериорные товары

Инфериорность, от англ. *inferior*, означает что ваш товар x является худшим по отношению к какому то другому товару y.

Когда бюджет растет, вы тратите большую часть дохода на y, и меньшую на x, да так что в абсолютном значении потребление x уменьшается.

Lemma 4

Все товары не могут быть одновременно инфериорными, хотя бы один точно нормальный.

Для того, чтобы сломать нормальность x, обязательно должен быть хотя бы один не инфериорный товар y, по отношению к которому x будет инфериорным.

Доказательство

Если бюджетное ограничение таково, что оптимум находится внутри, то небольшое изменение параметра I не повлияет на оптимум. Если бюджетное ограничение таково, что оптимум находится на бюджетной линии, то дифференциируя $B(x, y) = 0$ по I мы получаем:

$$p\frac{\partial x^*}{\partial I} + q\frac{\partial y^*}{\partial I} = 1.$$

Поскольку цены неотрицательные, то инфериорность всех товаров означает, что слева стоит отрицательное число, а справа единица. Противоречие.

Субституты и комплементы

Субституты

Мы переходим к анализу наклонов кривых цена-потребление.

Definition 5

Субститутами (substitutes) называются пары товаров, кривые спроса которых монотонно возрастают по ценам друг друга, то есть, x субститут к y, если $\frac{\partial x^*}{\partial \boldsymbol{q}} \geqslant 0$, а y субститут к x, если $\frac{\partial y^*}{\partial \boldsymbol{p}} \geqslant 0$.

Конец