Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

12 января 2022 г.

Программа

Программа модуля

- Теория Потребителя
  - Модель: товары $x, y \to$ полезность $U(x, y)$
  - Максимизация полезности
  - Предпочтения, спрос, эластичность...
  - CV, EV
- Теория Производителя
  - Модель: ресурсы $x, y \to$ производство $F(x, y)$
  - Максимизация прибыли (минимизация издержек)
  - Технологии, предложение, эластичность...
- Частичное равновесие
  - налоги, DWL

Сквозная идиома: **Конкурентный рынок** для x, y, то есть товары и ресурсы покупаются по стабильным рыночным ценам $px + qy$. Модели ценообразования - темы следующих модулей.

Большой упор будет на **эластичность** и **калибровку**.

Люди и материалы

Лектор: Павел Андреянов (pandreyanov@gmail.com/hse.ru)

Семинаристы: Даша, Яна

Ассистенты: Лука, Настя, Саша, Антон

Учебники:

- Вэриан (V), Промежуточный уровень
- Бусыгин, Желободько, Цыплаков том I,II
- Ехил Рени (JR)

Прочие ресурсы:

- телеграм
- офис аурз
- консультации и тестовые контрольные
- `pandreyanov.github.io/pashas_micro_one_lectures`

План на первую половину лекции (2 часа)

Мы поговорим подробно о первых двух моделях (полезность и предпочтения) и, вскользь о третьей модели (выбор). Большой упор будет сделан на понятия непрерывности и выпуклости.

Затем, мы попробуем отождествить некоторые из этих моделей между собой. В частности, будет обсуждена относительно простая прямая связь между полезностью и предпочтениями.

Вершиной этого блока будет обратная связь между предпочтениями и полезностью, так называемая, Теорема Дебре. После нее надо сделать перерыв.

Модели потребителя

Модели потребителя

Три конкурирующих модели поведения потребителя:

- полезность (классика)
- предпочтения (нео классика)
- выбор

Различия между ними скорее философские.

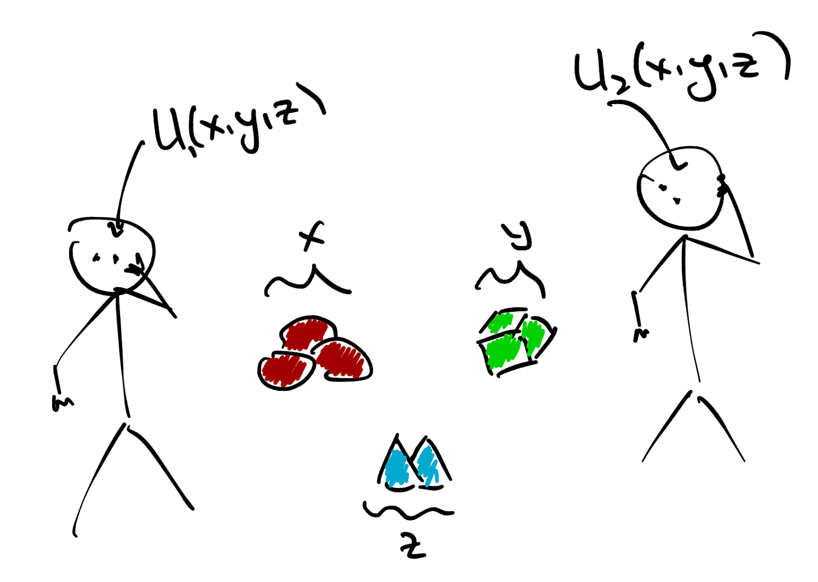
Полезность

В модели полезности (классика) у каждого агента в голове зашита функция полезности, которая переводит любой **портфель** потребительских товаров в вещественное число, с мистической единицей измерения «утили».

- 3 куба, 1 круг = 8 утилей
- 12 конусов = 60 утилей
- 1 конус, 4 круга = 3 утиля

Агенты сравнивают утили и принимают экономические решения дабы их максимизировать. Это самая старая модель, поэтому мы будем называть ее **классической**.

Полезность



Полезность

Полезность определена с точностью до монотонного преобразования. Это серьезная проблема, это значит, что модель невозможно толком откалибровать.

Действительно, все ниже перечисленные полезности неразличимы с точки зрения эконометриста.

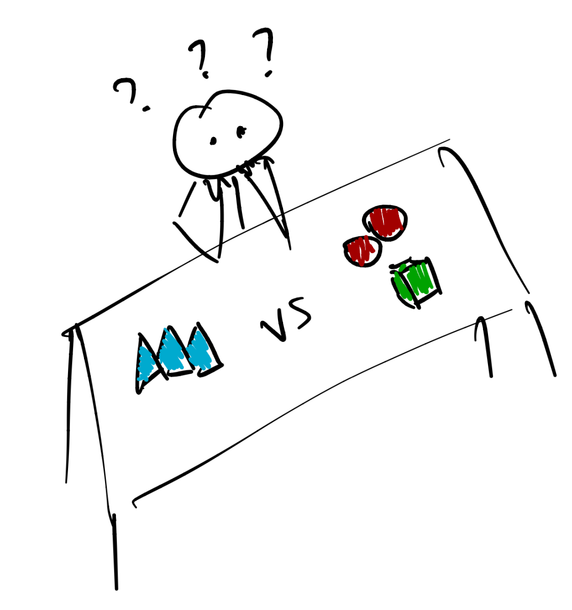
- $x^2 y^3$
- $2 \log x + 3 \log y$
- $2 \log x + 3 \log y + 1$
- $5(2 \log x + 3 \log y) + 1$

Необходимо либо мыслить в терминах классов эквивалентности полезностей, либо придумывать что то более подходящее.

Предпочтения

В (нео классической) модели предпочтений, от агентов требуется, казалось бы, меньше. Они должны в моменте сравнить два портфеля и назвать лучший. Другими словами, они должны озвучить предпочтения.

Предпочтения



Предпочтения

Однако, этот минимализм обманчив. Чтобы оставаться экономическим агентом, они должны помнить все свои выборы, это матрица $n \times n$, где n это число возможных портфелей...

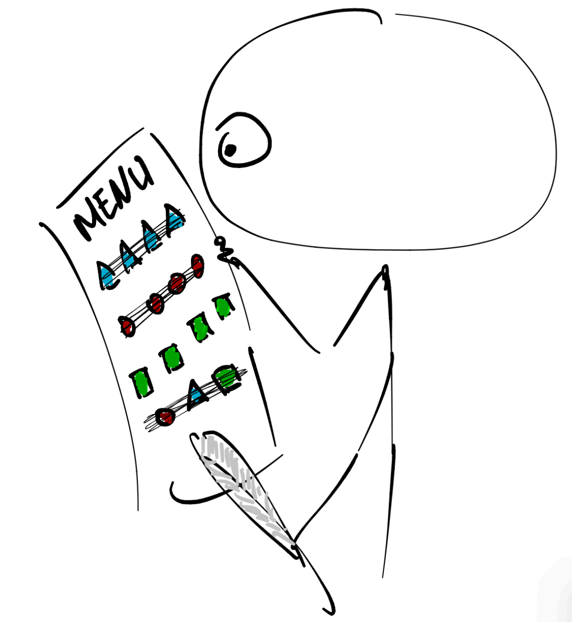
... так уж это проще чем функция? Непонятно

Выбор

В модели выбора, от агентов требуется принимать решения максимально приближенные к реальности. Вам предлагают меню из: мясо+брокколи+сок, рыба+пиво, рыба+мясо, пиво+сок, брокколи+сок...

И вы просто вычеркиваете то, что вам точно не нравится.

Выбор



Полезность

Полезность

Модель полезности обладает высоким уровнем абстракции

- начнем с одного агента
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}^n_+$
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z...$
- соответствующие цены обозначаются $p, q, y...$
- полезность обозначается $U(x, y, z, \ldots)$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$

Множество альтернатив будет, как правило, зависеть от цен и, может быть, еще от чего то, например бюджета.

Полезность

Таким образом, мы может сформулировать модель потребителя как как абстрактную оптимизационную задачу, скажем, для трех товаров:

$$U(x, y, z, \ldots) \to \max_{(x,y,z,\ldots)\in X}$$

Формально **классическая (утилитарная) модель** это пара: множество альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$ и полезность $U : X \to \mathbb{R}$.

Никаких дополнительных аксиом не требуется.

Пример 1

У Пети есть 100 рублей. Он может купить яблоки по цене 20 рублей за штуку либо груши по цене 50 рублей за штуку. Петя получает полезность 2 за каждое яблоко и 3 за каждую грушу, но не получает никакой полезности за оставшиеся деньги.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{N}_+^2 : 20x + 50y \leqslant 100\}$
- $U(x, y) = 2x + 3y$

Пример 2

У Кати есть 24 часа в сутки, из которых она должна как минимум 8 часов поспать, а оставшиеся часы входят в полезность вида Коб-Дуглас с одинаковыми весами, то есть, учеба и вечеринки в полезности умножаются под корнем.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}_+^3 : x + y + z \leqslant 24\}$
- $U(x, y, z) = \mathbb{I}(x \geqslant 8) \cdot y^{1/2} z^{1/2}$

Пример 3

У Саши есть 10,000,000 рублей, которые он может вложить в биткойн по курсу 1,000,000:1 или этериум по курсу 1,000,000:2. Саша ожидает, что через год рубль подешевеет на 10%, биткойн подорожает на 50% а этериум подорожает на 100%.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}_+^3 : x + 10^6(y + 2z) \leqslant 10^7\}$
- $U(x, y, z) = .9x + 1.5y + 2z$

Свойства полезности

Непрерывность

Мы начнем с двух эквивалентных определений непрерывности.

Definition 1

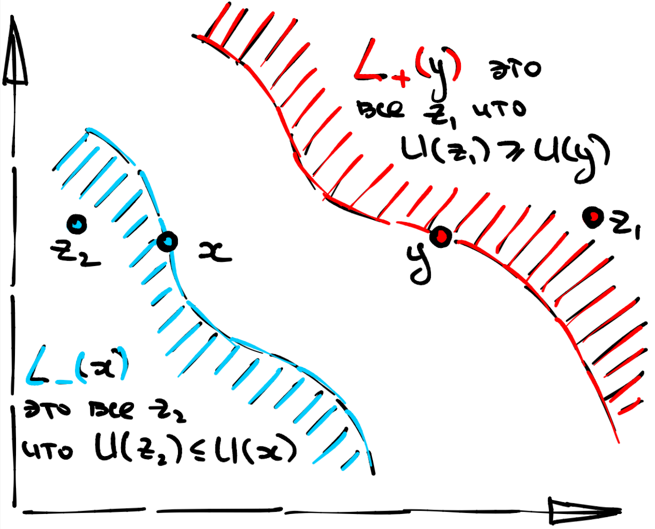
Полезность U **непрерывна** в X, если для любого $x \in X$ множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ замкнуты, где

$$L_+(x) = \{y \in X : U(y) \geqslant U(x)\}$$
$$L_-(x) = \{y \in X : U(y) \leqslant U(x)\}$$

Описанные выше множества $L_+(x)$ (или $L_-(x)$) это подмножества допустимых альтернатив, которые не хуже (или не лучше) чем сам x.

Их часто называют **Лебеговыми множествами**.

Непрерывность



Непрерывность

Эквивалентное (но только в Евклидовых пространствах) определение непрерывности можно дать на более знакомом вам с курса мат. анализа языке эпсилон-дельта.

Definition 2

Полезность U **непрерывна** в X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такой что для любых $x, y \in X$:

$$||x - y|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||U(x) - U(y)|| < \varepsilon.$$

Оно абсолютно бесполезно.

Вогнутость

Следующее важное определение это вогнутость.

Definition 3

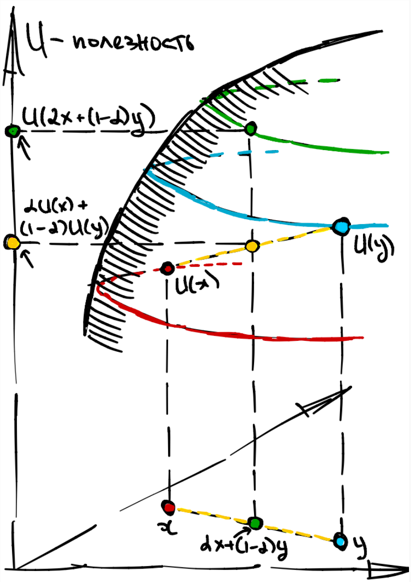
Полезность U **вогнута** если для любых $x, y \in X$:

$$\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$$

Грубо говоря, если вы возьмете две точки на поверхности, соответствующая вогнутой полезности, то соединяющая их хорда пройдет "под"поверхностью.

Другими словами, полезность в усредненной точке меньше чем усредненная полезность.

Вогнутость



Квази вогнутость

Далее идет определение квази вогнутости.

Definition 4

Полезность U **квази-вогнута** в X, если $\forall x \in X$ множество $L_+(x)$ выпукло, то есть, оно содержит все свои хорды.

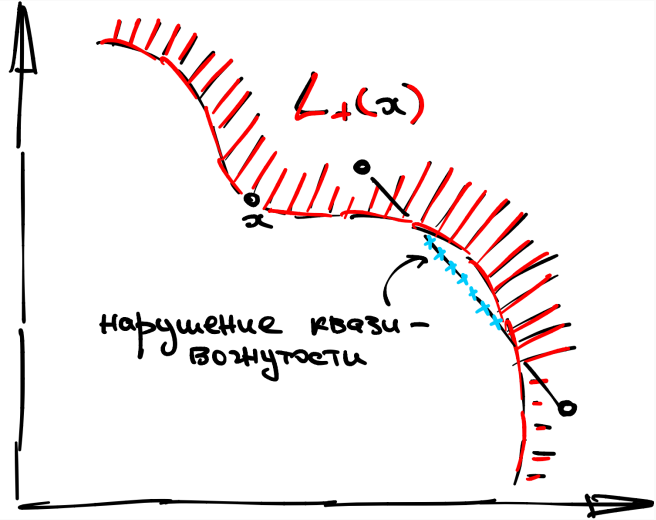
И почти (но не совсем) эквивалентное ему

Definition 5

Полезность U **квази-вогнута** в X если для любых $x, y \in X$ их линейная комбинация не хуже чем худшая из двух:

$$\forall \alpha \in (0,1) : U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \min(U(x), U(y))$$

Квази вогнутость



Вогнутость против квази вогнутости

Lemma 6

Из вогнутости следует квази-вогнутость, но не наоборот.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (1): &\quad U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \\ (2): &\quad \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \geqslant \min(U(x), U(y)) \\ (1),(2) \quad \Rightarrow &\quad U(\alpha x + (1-\alpha)y)) \geqslant \min(U(x), U(y)) \end{aligned}$$

P.S. Иногда я буду делать приставку "строго", это значит что либо множество строго выпукло, либо неравенство строгое. Смотрите на контекст.

Критика классической модели

Неоднозначность полезности

Для любого строго монотонного преобразования φ, две полезности: $U(x)$ и $\varphi(U(x))$ производят идентичное поведение у потребителей.

Довольно легко генерировать примеры идентичных функций используя такие монотонные преобразования как $\varphi(z) = z + c, cz, \log z$.

$$x^2 y^3,$$

$$2\log x + 3\log y,$$

$$2\log x + 3\log y + 1,$$

$$2(2\log x + 3\log y) + 1.$$

Все выше перечисленные полезности эквивалентны.

Неоднозначность вогнутости

Вогнутость легко ломается при монотонных преобразованиях

Lemma 7

Если $U(x)$ вогнута, то $\varphi(U(x))$ квази-вогнута для любого строго монотонного преобразования φ.

Чтобы придумать доказательство, достаточно знать следующие свойства монотонных преобразований:

$$\begin{aligned} U(x) \leqslant U(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \leqslant \varphi(U(y)) \\ U(x) \geqslant U(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(U(x)) \geqslant \varphi(U(y)) \\ \min(\varphi(U(x)), \varphi(U(y))) &= \varphi(\min(U(x), U(y))) \end{aligned}$$

Попробуйте теперь написать доказательство самостоятельно.

Неоднозначность вогнутости

В отличие от вогнутости, квази вогнутость сохраняется при монотонных преобразованиях.

Это верно хотя бы потому, что одно из двух определений вообще никак не опирается на форму полезности, а только на форму Лебеговых множеств.

Lemma 8

Если $U(x)$ квази-вогнута, то $\varphi(U(x))$ тоже квази-вогнута для любого строго монотонного преобразования φ.

Это делает ее гораздо более удобной чем просто вогнутость.

Предпочтения

Предпочтения

Модель предпочтений еще более абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}^n_+$
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z\ldots$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}^n_+$

Однако вместо полезности $U : X \to \mathbb{R}$ у агента в голове зашито бинарное предпочтение $\succcurlyeq : X^2 \to \{0, 1\}$. Что это значит?

Предпочтения

Проще всего визуализировать бинарное отношение на множестве альтернатив малой размерности, например 3.

$\succcurlyeq$	x	y	z
x	1	1	0
y	0	1	1
z	0	1	0

$x \succcurlyeq y$ означает что $(x, y) \mapsto 1$.

$x \preccurlyeq y$ означает что $(y, x) \mapsto 1$.

Формально, бинарное отношение это любое расположение ноликов и единичек внутри матрицы.

Предпочтения

Для простоты, вводятся дополнительные обозначения:

$x \sim y$ означает что $x \succcurlyeq y$ и $x \preccurlyeq y$.

$x \succ y$ означает что $x \succcurlyeq y$ но не $x \sim y$.

$x \prec y$ означает что $x \preccurlyeq y$ но не $x \sim y$.

Получаются пять интуитивных отношений сильного, слабого предпочтений и безразличия.

Однако, какие попало матрицы писать не стоит.

Предпочтения

Поскольку у бинарного отношения есть экономическая интерпретация, это накладывает на него определенные ограничения, называемые **аксиомами рациональности**.

Definition 9

Предпочтения $\succcurlyeq$ **рациональны**, если

- для любых $x, y \in X$, хотя бы $x \succcurlyeq y$ либо $y \succcurlyeq x$.
- для любой $x \in X$, всегда верно что $x \sim x$
- для любых $x, y, z \in X$:

$$x \succcurlyeq y, y \succcurlyeq z \quad \Rightarrow \quad x \succcurlyeq z$$

Последнее свойство - самое важное и называется **транзитивностью**.

Предпочтения

Рациональность накладывают структуру на то как может заполняться матрица.

$\succcurlyeq$	x	y	z
x	$*$	$*$	$*$
y	0	$*$	1
z	0	1	$*$

Попробуйте до-заполнить следующую матрицу так, чтобы предпочтения были рациональными.

Свойства предпочтений

Предпочтения

Практически копипастой мы определяем непрерывность предпочтений.

Definition 10

Предпочтения $\succcurlyeq$ **непрерывны** в X, если для любого $x \in X$ множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ замкнуты, где

$$L_+(x) = \{y \in X : U(y) \geqslant X\}, \quad L_-(x) = \{y \in X : U(y) \leqslant X\}$$

И совершенно аналогично мы переносим квази-вогнутость в мир предпочтений...

... однако, вопреки логике, термин квази-ВОГНутости полезности превращается в ВЫПУклость предпочтений.

Definition 11

Предпочтения $\succcurlyeq$ **выпуклы** в X, если $\forall x \in X$ множество $L_{+}(x)$ выпукло, то есть, оно содержит все свои хорды.

Парадокс в том, что вогнутые полезности квази-вогнуты, которые, в свою очередь, ассоциированы с выпуклыми предпочтениями.

А выпуклые полезности (которые еще надо отыскать) с выпуклыми предпочтениями вообще никак не связаны и даже прямо противоположны им.

Выбор

Выбор

Модель выбора максимально абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в $\mathbb{R}_+^n$
- категории, а также координаты обозначаются x, y, z...
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Вместо полезности $U : X \to \mathbb{R}$...

или бинарного предпочтения $\succcurlyeq: X^2 \to \{0, 1\}$...

у агента в голове зашито отображение $C : 2^X \to 2^X$.

Что это значит?

Выбор

Это значит, что агент отображает подмножества в подмножества. Аксиомы выбора следущие:

- $C(Y) \neq \emptyset$
- $C(Y) \subset Y$

Для любого непустого меню $Y \subset X$. Есть еще третья аксиома.

Выбор

Это значит, что агент отображает подмножества в подмножества. Так же как и с предпочтениями, есть несколько естественных технических ограничений:

- $C(Z) \neq \emptyset$
- $C(Z) \subset Z$

Для любого непустого меню $Z \subset X$.

Есть еще третья, самая важная аксиома.

Выбор

Слабой аксиомой выбора (WARP) называется следующее.

Definition 12

Рассмотрим любые два портфеля $x, y \in X$ и два меню $Z, Z' \subset X$, таких что x, y содержатся в обоих меню.

Невозможно, чтобы в первом меню Z: x был выбран в присутствие y, а во втором меню Z': y был выбран в присутствие x, но сам x, при этом, выбран не был.

Интуитивно, это означает, что при работе с несколькими меню вы не можете выразить свое предпочтение (или полезность) таким образом, чтобы оно противоречило само себе.

В домашке про это будет задачка.

Прямая связь

Прямая связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванная полезность. Как вывести из нее модель предпочтений?

Definition 13

Будем говорить, что U **представляет** $\succcurlyeq$, если

$$U(x) \geqslant U(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succcurlyeq y.$$

Это определение должно быть понятно на интуитивном уровне.

Также должно быть понятно, что если предпочтения представлены U то они будут обязательно рациональны, поскольку это просто свойства вещественных чисел.

Обратная связь

Обратная связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванные рациональные предпочтения. Можно ли восстановить по ним хотя бы одну непротиворечивую полезность?

Оказывается, что в простых случаях, действительно, можно.

Lemma 14

Если X конечно, то для любых рациональных предпочтений $\succcurlyeq$ существует полезность U, представляющая $\succcurlyeq$.

Это легко доказать алгоритмически.

Обратная связь

В случае когда пространство альтернатив достаточно мощное, нам придется потребовать непрерывность предпочтений.

Theorem 15 (Дебре)

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ связно и сепарабельно, то для любых рациональных и непрерывных предпочтений $\succcurlyeq$ существует непрерывная полезность U, представляющая $\succcurlyeq$.

Связность и сепарабельность скучные технические условия. По настоящему важной здесь является именно непрерывность.

Однако, не стоит забывать, что, если предпосылки теоремы не выполнены, это еще не значит что полезности нет. К примеру, дискретные пространства вовсе не связны.

Перед тем как уйти на перерыв

Заключение

Мы продемонстрировали, что из любой полезности можно вывести рациональные предпочтения, а из любых непрерывных и рациональных предпочтений - непрерывную полезность.

Получается, что полезности и предпочтения это, по большому счету, одно и то же. Вернее, предпочтения эти и есть тот самый класс эквивалентности полезностей, который надо себе воображать.

Заключение

Выбор представителя внутри класса эквивалентности - дело вкуса. Как только вы видите ту или иную полезность можно спокойно применять к ним монотонные преобразования. В частности, у вас может быть больше развита техника работы с полезностью $2\log x + 3\log y$ чем с полезностью $x^2 y^3$.

Более того, удачно наложив монотонное преобразование, можно случайно сделать функцию вогнутой, хотя она была изначально всего лишь квази-вогнута.