Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

19 января 2022 г.

Кривая Энгеля

Кривая Энгеля

Если взять две кривые доход-потребление: $x^*(I), y^*(I)$, то получится параметрически заданная кривая в пространстве товаров (x, y).

Вот эта кривая и называется кривой Энгеля.

Кобб Дуглас

Кобб Дуглас

Definition 1

Полезностью **Кобб-Дугласа** называется:

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Вспомним, что монотонные преобразования полезности не меняют поведение потребителя. Тогда можно применить логарифм и получить:

$$U(x, y) = \alpha \log x + (1-\alpha) \log y, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Заметим, что эта функция вогнута!!!

Кобб Дуглас

Выпишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \alpha \log x + (1-\alpha) \log y - \lambda(px + qy - I).$$

Заметим, что я выставляю знак минус так, чтобы у множителя Лагранжа была интерпретация теневой цены выхода за бюджетное ограничение. Это нам пригодится в следующей лекции, а сейчас просто постарайтесь запомнить.

Кобб Дуглас

Бездумно выпишем три уравнения:

$\mathcal{L}'_x = \alpha/x - \lambda p = 0$

$\mathcal{L}'_y = (1-\alpha)/y - \lambda q = 0$

$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - qy = 0$

Легко видеть, что они эквивалентны

$\alpha - \lambda px = 0$

$(1-\alpha) - \lambda qy = 0$

$px + qy - I = 0$

Кобб Дуглас

Обозначим доли бюджета потраченные на x и y как $s_x = px$ и $s_y = qy$ соответственно, и умножим последнее уравнение на λ.

Тогда уравнения становятся еще проще:

$\alpha = \lambda s_x$

$(1 - \alpha) = \lambda s_y$

$\lambda s_x + \lambda s_y = \lambda I$

Эту систему можно уже решить в уме.

Получается, что теневая цена равна $\lambda = 1/I$, а доли бюджета потраченные на каждый товар постоянны и равны α и $1 - \alpha$.

Это интуитивно?

Кобб Дуглас

Пусть полезность имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \alpha \log x + \beta \log y + \gamma \log z$$

а цены равны p, q, r соответственно.

Спрос на каждый товар в Кобб-Дугласе описывается следующими уравнениями:

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{I}{p}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{I}{q}, \quad z^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{I}{r}$$

Такое лучше запомнить наизусть. Также, постарайтесь ответить, являются ли такие товары нормальными, комплементами или субститутами.

Кобб Дуглас

Нампомним, что косвенная полезность чувствительна к монотонным преобразованиям, поэтому тут важно какая именно спецификация была изначально дана в задаче.

Для простоты давайте считать, что это спецификация в логарифмах.

Сосчитаем логарифм спроса на первый товар:

$$\log x^* = \log \alpha - \log(\alpha + \beta + \gamma) + \log I - \log p$$

Аналогично считается логарифм спроса на другие товары. Теперь надо просто подставить их в полезность.

Кобб Дуглас

Косвенная полезность в Кобб-Дугласе (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, r, I) = (\alpha + \beta + \gamma)\log I - \alpha \log p - \beta \log q - \gamma \log r + C$$

Константы C можно, как правило, не выписывать так как они исчезнут при первой же попытке продифференцировать.

Эта формула нам будет очень полезна в будущем...

Леонтьев

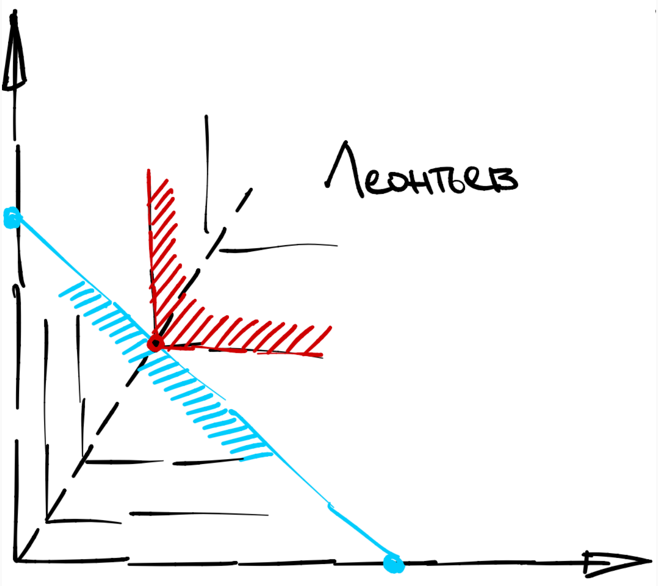
Definition 2

Полезностью **Леонтьева** называется:

$$U(x, y) = \min(x/a, y/b)$$

Интерпретация полезности такая, что для извлечения одной единицы полезности необходимо ровно a и b единиц потребительских товаров. Иногда такая полезность называется **совершенные комплементы**.

Леонтьев



Леонтьев

Поскольку задача не гладкая, то геометрический метод проще и быстрее. Решение лежит в пересечении кривой Энгеля и бюджетной линии.

Соответственно, достаточно решить систему уравнений:

$$px + qy = I, \quad bx = ay$$

Кривая Энгеля здесь это множество точек, от которых отложены уголки.

Пусть полезность имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \min(x/a, y/b, z/c)$$

а цены равны p, q, r соответственно.

Спрос на каждый товар в Леонтьеве описывается следующими уравнениями:

$$x^* = \frac{ap}{ap + bq + cr}\frac{I}{p},$$
$$y^* = \frac{bq}{ap + bq + cr}\frac{I}{q},$$
$$z^* = \frac{cr}{ap + bq + cr}\frac{I}{r}.$$

Все товары в функции Леонтьева являются нормальными, а также попарно являются (строго) комплементами.

Заметим, что в оптимуме полезности в обоих позициях аргумента - одинаковые. То есть, косвенная полезность равна одновременно левому и правому аргументу.

Косвенная полезность в Леонтьеве (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, I) = \frac{I}{ap + bq + cr}$$

Это тоже очень полезная формула.

Квазилинейная

Квазилинейная

Пожалуй, третья самая важная полезность имеет следующий вид:

Definition 3

Квазилинейной полезностью называется:

$$U(x, y) = f(x) + ky,$$

где f - вогнутая функция.

Интерпретация последней координаты - это деньги на счету. То есть, вам не обязательно тратить весь бюджет как раньше и остаток средств на счету конвертируется в утили по курсу 1:k.

Квазилинейная

Выпишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = f(x) + ky - \lambda(px + y - I).$$

Легко, правда?

Обратите внимание, что цена денег равна единице.

Квазилинейная

Сейчас мы попробуем найти внутреннее решение.

$\mathcal{L}'_x = f'_x - \lambda p = 0$

$\mathcal{L}'_y = k - \lambda = 0$

$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - y = 0$

Легко видеть, что они эквивалентны

$k = \lambda$

$x = (f')^{-1}(\lambda p)$

$px + y = I$

Квазилинейная

Сейчас мы попробуем найти внутреннее решение.

$\mathcal{L}'_x = f'_x - \lambda p = 0$

$\mathcal{L}'_y = k - \lambda = 0$

$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - y = 0$

Легко видеть, что они эквивалентны

$k = \lambda$

$x = (f')^{-1}(\lambda p)$

$px + y = I$

Квазилинейная

Однако, эта система не всегда имеет решение в $\mathbb{R}^2_+$. легко видеть, что спрос на товар x никак не зависит от бюджета, а стало быть, при достаточно маленьком бюджете, спрос на товар y упрется в ноль.

Мы оказались в ситуации о которой я предупреждал. Условия первого порядка указали на точку, которая может оказаться вне допустимой области. Если это так, это значит что решение не внутреннее а краевое. В таком случае, мы заменяем условие первого порядка $x = (f')^{-1}(\lambda p)$ на краевое условие $y = 0$, или, эквивалентно $x = I/p$.

Квазилинейная

В этой задаче есть два взаимоисключающих режима: внутреннее решение и краевое решение. Но вместо перебора случаев, можно записать ответ в компактной форме, если проявить немного смекалки.

Спрос на каждый товар в квазилинейной полезности описывается следующими уравнениями:

$$x^* = \min(I/p, (f')^{-1}(kp)),$$
$$y^* = \max(0, I - px^*).$$

Все товары в квазилинейной полезности являются нормальными, а деньги (переменная y) являются универсальным комплементом.

Квазилинейная

Поскольку в задаче два режима, скорее всего ответ будет иметь форму максимума или минимума из двух выражений. Если бы ограничения не было, решение было бы всегда внутреннее а полезность равна

$$f((f')^{-1}(kp)) + I - p(f')^{-1}(kp).$$

Когда ограничение активно, оно мешает нам достигнуть этой полезности и мы получаем вместо нее

$$f(I/p) + 0.$$

Линейная

Линейная

Простая с виду, но очень неудобная на практике:

Definition 4

Линейной полезностью называется:

$$U(x, y) = x/a + y/b,$$

интерпретируется как способность извлекать одну и туже полезность из разных источников. Конкретно, вы можете получить одну единицу полезности либо из a единиц товара x, либо из b единиц товара y.

Это значит, что x, y обладают высокой взаимозаменяемостью, либо, вообще представляют собой один и тот же товар в пачках/таре разного размера. Такая полезность еще часто называется **совершенные субституты**.

Линейная

Решение в этой задаче не похоже на предыдущие, оно вообще всегда краевое.

Почему так? Посмотрим внимательно на бюджетное ограничение:

$$B(x, y) = px + qy - I \leqslant 0$$

оно показывает, что вы можете менять товары x, y по курсу $\frac{1}{p}$ к $\frac{1}{q}$. А в полезности вы можете менять товары по курсу $a{:}b$. За исключением редкого случая когда эти курсы совпадают:

$$ap = bq,$$

вам выгодно менять один товар на другой до упора.

Линейная

Осталось понять, каким будет краевое решение...

Интуитивно понятно, что вы будете тратить все на x когда его вес в полезности относительно большой а его цена относительно маленькая. То есть, когда ap относительно маленький.

Относительно чего? Конечно же, относительно bq.

Линейная

Осталось понять, каким будет краевое решение...

Интуитивно понятно, что вы будете тратить все на x когда его вес в полезности относительно большой а его цена относительно маленькая. То есть, когда ap относительно маленький.

Относительно чего? Конечно же, относительно bq.

Спрос на каждый товар описывается так:

если $ap < bq$, то $x^* = I/p, y^* = 0$

если $ap > bq$, то $x^* = 0, y^* = I/q$

Все товары в линейной полезности нормальные и являются попарно субститутами.

Линейная

Мы знаем, что решение либо в одном углу, либо в другом. Соответственно, ответ это наибольшая из двух полезностей этих кандидатов, то есть,

$$V(p, q, I) = I \cdot \max\left(\frac{1}{ap}, \frac{1}{bq}\right).$$

Пользуясь тем, что максимум коммутирует с монотонно возрастающими преобразованиями

$$\varphi'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \max(\varphi(x), \varphi(x)) = \varphi(\max(x, y))$$

и с монотонно убывающими преобразованиями, в некотором смысле, тоже

$$\psi'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \max(\psi(x), \psi(x)) = \psi(\min(x, y))$$

можно вывести следующее красивое свойство...

Линейная

Косвенная полезность в линейной полезности (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, I) = I / \min(ap, bq),$$

Это тоже лучше запомнить наизусть.

Конец