

# Микроэкономика-I

---

Павел Андреянов, PhD

19 января 2022 г.

# Кривая Энгеля

---

Если взять две кривые доход-потребление:  $x^*(I), y^*(I)$ , то получится параметрически заданная кривая в пространстве товаров  $(x, y)$ .

Вот эта кривая и называется кривой Энгеля.

Кобб Дуглас

---

## Definition 1

Полезностью **Кобб-Дугласа** называется:

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Вспомним, что монотонные преобразования полезности не меняют поведение потребителя. Тогда можно применить логарифм и получить:

$$U(x, y) = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Заметим, что эта функция вогнута!!!

Выпишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y - \lambda(px + qy - I).$$

Заметим, что я выставляю знак минус так, чтобы у множителя Лагранжа была интерпретация теневой цены выхода за бюджетное ограничение. Это нам пригодится в следующей лекции, а сейчас просто постарайтесь запомнить.

Бездумно выпишем три уравнения:

$$\mathcal{L}'_x = \alpha/x - \lambda p = 0$$

$$\mathcal{L}'_y = (1 - \alpha)/y - \lambda q = 0$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - qy = 0$$

Легко видеть, что они эквивалентны

$$\alpha - \lambda px = 0$$

$$(1 - \alpha) - \lambda qy = 0$$

$$px + qy - I = 0$$

Обозначим доли бюджета потраченные на  $x$  и  $y$  как  $s_x = px$  и  $s_y = qy$  соответственно, и умножим последнее уравнение на  $\lambda$ .

Тогда уравнения становятся еще проще:

$$\alpha = \lambda s_x$$

$$(1 - \alpha) = \lambda s_y$$

$$\lambda s_x + \lambda s_y = \lambda I$$

Эту систему можно уже решить в уме.

Получается, что теневая цена равна  $\lambda = 1/I$ , а доли бюджета потраченные на каждый товар постоянны и равны  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ .

Это интуитивно?



Пусть полезность имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \alpha \log x + \beta \log y + \gamma \log z$$

а цены равны  $p, q, r$  соответственно.

Спрос на каждый товар в Кобб-Дугласе описывается следующими уравнениями:

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{I}{p}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{I}{q}, \quad z^* = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{I}{r}$$

Такое лучше запомнить наизусть. Также, постарайтесь ответить, являются ли такие товары нормальными, комплементами или субститутами.

Напомним, что косвенная полезность чувствительна к монотонным преобразованиям, поэтому тут важно какая именно спецификация была изначально дана в задаче.

Для простоты давайте считать, что это спецификация в логарифмах.

Сосчитаем логарифм спроса на первый товар:

$$\log x^* = \log \alpha - \log(\alpha + \beta + \gamma) + \log I - \log p$$

Аналогично считается логарифм спроса на другие товары. Теперь надо просто подставить их в полезность.

Косвенная полезность в Кобб-Дугласе (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, r, I) = (\alpha + \beta + \gamma) \log I - \alpha \log p - \beta \log q - \gamma \log r + C$$

Константы  $C$  можно, как правило, не выписывать так как они исчезнут при первой же попытке продифференцировать.

Эта формула нам будет очень полезна в будущем...

Леонтьев

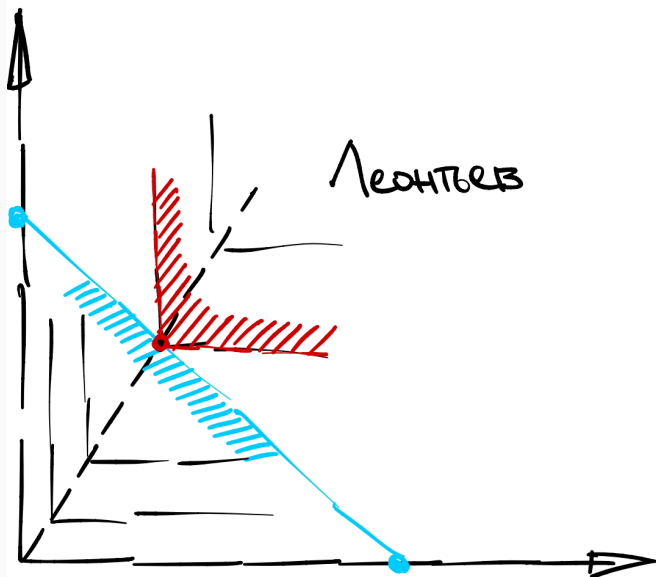
---

## Definition 2

Полезностью **Леонтьева** называется:

$$U(x, y) = \min(x/a, y/b)$$

Интерпретация полезности такая, что для извлечения одной единицы полезности необходимо ровно  $a$  и  $b$  единиц потребительских товаров. Иногда такая полезность называется **совершенные complements**.



Поскольку задача не гладкая, то геометрический метод проще и быстрее. Решение лежит в пересечении кривой Энгеля и бюджетной линии.

Соответственно, достаточно решить систему уравнений:

$$px + qy = I, \quad bx = ay$$

Кривая Энгеля здесь это множество точек, от которых отложены уголки.

Пусть полезность имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \min(x/a, y/b, z/c)$$

а цены равны  $p, q, r$  соответственно.

Спрос на каждый товар в Леонтьеве описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{ap}{ap + bq + cr} \frac{I}{p}, \\y^* &= \frac{bq}{ap + bq + cr} \frac{I}{q}, \\z^* &= \frac{cr}{ap + bq + cr} \frac{I}{r}.\end{aligned}$$

Все товары в функции Леонтьева являются нормальными, а также попарно являются (строго) комплементами.



Заметим, что в оптимуме полезности в обеих позициях аргумента - одинаковые. То есть, косвенная полезность равна одновременно левому и правому аргументу.

Косвенная полезность в Леонтьеве (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, I) = \frac{I}{ap + bq + cr}$$

Это тоже очень полезная формула.

Квазилинейная

---

Пожалуй, третья самая важная полезность имеет следующий вид:

## Definition 3

**Квазилинейной полезностью** называется:

$$U(x, y) = f(x) + ky,$$

где  $f$  - вогнутая функция.

Интерпретация последней координаты - это деньги на счету. То есть, вам не обязательно тратить весь бюджет как раньше и остаток средств на счету конвертируется в утилы по курсу  $1:k$ .

Выпишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = f(x) + ky - \lambda(px + y - I).$$

Легко, правда?

Обратите внимание, что цена денег равна единице.

Сейчас мы попробуем найти внутреннее решение.

$$\mathcal{L}'_x = f'_x - \lambda p = 0$$

$$\mathcal{L}'_y = k - \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - y = 0$$

Легко видеть, что они эквивалентны

$$k = \lambda$$

$$x = (f')^{-1}(\lambda p)$$

$$px + y = I$$

Сейчас мы попробуем найти внутреннее решение.

$$\mathcal{L}'_x = f'_x - \lambda p = 0$$

$$\mathcal{L}'_y = k - \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - y = 0$$

Легко видеть, что они эквивалентны

$$k = \lambda$$

$$x = (f')^{-1}(\lambda p)$$

$$px + y = I$$

Однако, эта система не всегда имеет решение в  $\mathbb{R}_+^2$ . легко видеть, что спрос на товар  $x$  никак не зависит от бюджета, а стало быть, при достаточно маленьком бюджете, спрос на товар  $y$  упрется в ноль.

Мы оказались в ситуации о которой я предупреждал. Условия первого порядка указали на точку, которая может оказаться вне допустимой области. Если это так, это значит что решение не внутреннее а краевое. В таком случае, мы заменяем условие первого порядка  $x = (f')^{-1}(\lambda p)$  на краевое условие  $y = 0$ , или, эквивалентно  $x = I/p$ .

В этой задаче есть два взаимоисключающих режима: внутреннее решение и краевое решение. Но вместо перебора случаев, можно записать ответ в компактной форме, если проявить немного смекалки.

Спрос на каждый товар в квазилинейной полезности описывается следующими уравнениями:

$$x^* = \min(I/p, (f')^{-1}(kp)),$$
$$y^* = \max(0, I - px^*).$$

Все товары в квазилинейной полезности являются нормальными, а деньги (переменная  $y$ ) являются универсальным компонентом.



Поскольку в задаче два режима, скорее всего ответ будет иметь форму максимума или минимума из двух выражений. Если бы ограничения не было, решение было бы всегда внутреннее а полезность равна

$$f((f')^{-1}(kp)) + I - p(f')^{-1}(kp).$$

Когда ограничение активно, оно мешает нам достигнуть этой полезности и мы получаем вместо нее

$$f(I/p) + 0.$$

Линейная

---

Простая с виду, но очень неудобная на практике:

## Definition 4

**Линейной полезностью** называется:

$$U(x, y) = x/a + y/b,$$

интерпретируется как способность извлекать одну и ту же полезность из разных источников. Конкретно, вы можете получить одну единицу полезности либо из  $a$  единиц товара  $x$ , либо из  $b$  единиц товара  $y$ .

Это значит, что  $x, y$  обладают высокой взаимозаменяемостью, либо, вообще представляют собой один и тот же товар в пачках/таре разного размера. Такая полезность еще часто называется **совершенные субституты**.

Решение в этой задаче не похоже на предыдущие, оно вообще всегда крайнее.

Почему так? Посмотрим внимательно на бюджетное ограничение:

$$B(x, y) = px + qy - I \leq 0$$

оно показывает, что вы можете менять товары  $x, y$  по курсу  $\frac{1}{p}$  к  $\frac{1}{q}$ . А в полезности вы можете менять товары по курсу  $a:b$ . За исключением редкого случая когда эти курсы совпадают:

$$ap = bq,$$

вам выгодно менять один товар на другой до упора.

Осталось понять, каким будет краевое решение...

Интуитивно понятно, что вы будете тратить все на  $x$  когда его вес в полезности относительно большой а его цена относительно маленькая. То есть, когда  $ap$  относительно маленький.

Относительно чего? Конечно же, относительно  $bq$ .

Осталось понять, каким будет краевое решение...

Интуитивно понятно, что вы будете тратить все на  $x$  когда его вес в полезности относительно большой а его цена относительно маленькая. То есть, когда  $ap$  относительно маленький.

Относительно чего? Конечно же, относительно  $bq$ .

Спрос на каждый товар описывается так:

если  $ap < bq$ , то  $x^* = I/p, y^* = 0$

если  $ap > bq$ , то  $x^* = 0, y^* = I/q$

Все товары в линейной полезности нормальные и являются попарно субститутами.

Мы знаем, что решение либо в одном углу, либо в другом. Соответственно, ответ это наибольшая из двух полезностей этих кандидатов, то есть,

$$V(p, q, I) = I \cdot \max\left(\frac{1}{ap}, \frac{1}{bq}\right).$$

Пользуясь тем, что максимум коммутирует с монотонно возрастающими преобразованиями

$$\varphi'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \max(\varphi(x), \varphi(y)) = \varphi(\max(x, y))$$

и с монотонно убывающими преобразованиями, в некотором смысле, тоже

$$\psi'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \max(\psi(x), \psi(y)) = \psi(\min(x, y))$$

можно вывести следующее красивое свойство...

Косвенная полезность в линейной полезности (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, I) = I / \min(ap, bq),$$

Это тоже лучше запомнить наизусть.



Конец

---