

# Микроэкономика-I

---

Павел Андреянов, PhD

19 января 2022 г.

Кобб Дуглас

---

## Definition 1

Полезностью Кобб-Дугласа называется:

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Вспомним, что монотонные преобразования полезности не меняют поведение потребителя. Тогда можно применить логарифм и получить:

$$U(x, y) = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Заметим, что эта функция вогнута!!!

Выпишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y - \lambda(px + qy - I).$$

Заметим, что я выставляю знак минус так, чтобы у множителя Лагранжа была интерпретация теневой цены выхода за бюджетное ограничение. Это нам пригодится в следующей лекции, а сейчас просто постарайтесь запомнить.

Бездумно выпишем три уравнения:

$$\mathcal{L}'_x = \alpha/x - \lambda p = 0$$

$$\mathcal{L}'_y = (1 - \alpha)/y - \lambda q = 0$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = I - px - qy = 0$$

Легко видеть, что они эквивалентны

$$\alpha - \lambda px = 0$$

$$(1 - \alpha) - \lambda qy = 0$$

$$px + qy - I = 0$$

Обозначим доли бюджета потраченные на  $x$  и  $y$  как  $s_x = px$  и  $s_y = qy$  соответственно, и умножим последнее уравнение на  $\lambda$ .

Тогда уравнения становятся еще проще:

$$\alpha = \lambda s_x$$

$$(1 - \alpha) = \lambda s_y$$

$$\lambda s_x + \lambda s_y = \lambda I$$

Эту систему можно уже решить в уме.

Получается, что теневая цена равна  $\lambda = 1/I$ , а доли бюджета потраченные на каждый товар постоянны и равны  $\alpha$  и  $1 - \alpha$ .

Это интуитивно?

Пусть полезность имеет следующий вид:

$$U(x, y, z) = \alpha \log x + \beta \log y + \gamma \log z$$

а цены равны  $p, q, r$  соответственно.

Спрос на каждый товар в Кобб-Дугласе описывается следующими уравнениями:

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{I}{p}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{I}{q}, \quad z^* = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \frac{I}{r}$$

Такое лучше запомнить наизусть. Также, постарайтесь ответить, являются ли такие товары нормальными, комплементарными или субститутами.

Напомним, что косвенная полезность чувствительна к монотонным преобразованиям, поэтому тут важно какая именно спецификация была изначально дана в задаче.

Для простоты давайте считать, что это спецификация в логарифмах.

Сосчитаем логарифм спроса на первый товар:

$$\log x^* = \log \alpha - \log(\alpha + \beta + \gamma) + \log I - \log p$$

Аналогично считается логарифм спроса на другие товары. Теперь надо просто подставить их в полезность.



Косвенная полезность в Кобб-Дугласе (с точностью до преобразования) имеет вид

$$V(p, q, r, I) = (\alpha + \beta + \gamma) \log I - \alpha \log p - \beta \log q - \gamma \log r + C$$

Константы  $C$  можно, как правило, не выписывать так как они исчезнут при первой же попытке продифференцировать.

Конец

---