

Übungsserie 3

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

$$n=10$$

$$\epsilon_{ps} = 5 \cdot 10^{-10}$$

10 Stellen

$$\begin{array}{r} 1.000 \dots 0 \\ 0.000 \dots 05 \\ \hline 1.000 \dots 05 \end{array}$$

wird abgerundet, da ausserhalb der Maschinengenauigkeit

Scannen Sie Ihre Lösung zu den Aufgaben 1 und 2 und 3a in die Dateien `Name_S3_Aufg1.pdf` resp. `Name_S3_Aufg2.pdf` resp. `Name_S3_Aufg3a.pdf` und fassen Sie diese zusammen mit den Python Skripten `Name_S3_Aufg3b.py` und `Name_S3_Aufg4.py` in eine ZIP-Datei `Name_S3.zip` zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch. Die Python Skripte müssen ausführbar sein.

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positive Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit ϵ_{ps} ist, wegen Rundung $1 + x$ nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B. \sqrt{x} oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie ϵ_{ps} , nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< \epsilon_{ps}$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$) einer reellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n ?

a.) $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ z.B. $n=10$
 b.) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$
 Konditionszahl: $k(x) = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

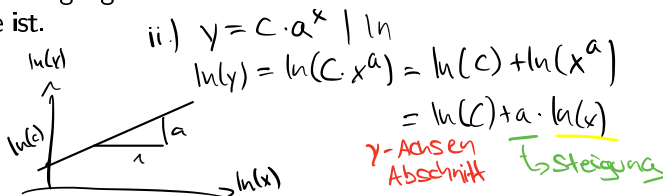
(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = \dots$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2$



b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für $0 < x \leq 100$.

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

doppeltlogarithmisch (loglog) geplotet, erhalten wir eine Gerade

$$= \frac{5}{2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positive Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit ϵ_{ps} ist, wegen Rundung $1 + x$ nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B. \sqrt{x} oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie ϵ_{ps} , nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< \epsilon_{ps}$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

$$n=10$$

$$\epsilon_{ps} = 5 \cdot 10^{-10}$$

10 Stellen

$$\begin{array}{r} 1.000 \dots 0 \\ 0.000 \dots 05 \\ \hline 1.000 \dots 05 \end{array}$$

wird abgerundet, da ausserhalb der Maschinengenauigkeit

$$\epsilon_{ps} = \boxed{5 \cdot 10^{-10}}$$

$$\boxed{0.4 \cdot 10^{-8}}$$

ausserhalb

$$\begin{array}{r} 1.0000000000 \\ \hline 0.0000000004 \end{array}$$

oder $0.4 \cdot 10^{-8}$ alleine kann wieder Berechnungen mit einer Maschinengenauigkeit von $5 \cdot 10^{-10}$ ausführen

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$) einer reellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n ?

a) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ z.B. $n=10$

b) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

konditionszahl: $k(x) = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

a.)
$$\frac{n \cdot x^{n-1} \cdot x}{x^n} = \frac{n \cdot x}{x} = n \Rightarrow \text{Schlecht konditioniert}$$

b.)
$$\frac{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \cdot x}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \cancel{x^{\frac{1}{n}}} \cdot \cancel{x^{-1}} \cdot x}{\cancel{x^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n}$$

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

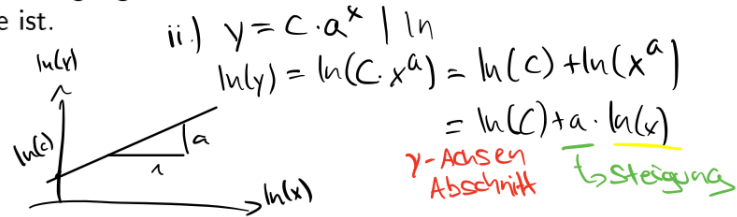
(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = \dots$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der entstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2$



b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für $0 < x \leq 100$.

doppelt logarithmisch (loglog) geplottet, erhalten wir eine Gerade

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

$$y = c \cdot a^x \quad | \cdot \ln()$$

$$\ln(y) = \ln(c \cdot a^x)$$

$$\ln(y) = \ln(c) + \ln(a^x)$$

$$\ln(y) = \ln(c) + x \cdot \ln(a)$$

y-Achsenabschnitt

der x-Achsenabschnitt ist nicht logarithmisch
 wir haben aber die Geradenform
 $y = a \cdot x + b$ wobei $a = \ln(a)$ und $b = \ln(c)$

(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

$$y = c \cdot x^a \quad | \cdot \ln()$$

$$\ln(y) = \ln(c \cdot x^a)$$

$$\ln(y) = \ln(c) + \ln(x^a)$$

$$\ln(y) = \ln(c) + a \cdot \ln(x)$$

x- und y-Achsenabschnitt sind logarithmisch
 und wir haben die Geradenform
 $y = a \cdot x + b$ wobei $\ln(x) = x$

$$(i) f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$$

$$(ii) g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$$

$$(iii) h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2$$

$$(i) f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = 5 \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

C x^a

(i) beide Koordinatenachsen müssen logarithmisch sein

$$(ii) g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-\frac{x}{100}} = \ln(g(x)) = \ln(10^5 \cdot (2e)^{-\frac{x}{100}})$$

$$= \ln(10^5) + \ln((2e)^{-\frac{x}{100}})$$

$$= \ln(10^5) - \frac{x}{100} \cdot \ln(2e)$$

C - x · a

(ii) die y-Achse muss logarithmisch sein

$$(iii) h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2 = (5^{2x} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-5x})^2 = (5^{2x} \cdot 2^{-3x})^2 = 5^{4x} \cdot 2^{-6x}$$

$5^{4x} \cdot 2^{-6x} \mid \cdot \ln()$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$4x \cdot \ln(5) - \underline{6x} \cdot \ln(2) =$$

$$x^1 \cdot (4 \cdot \ln(5) - 6 \cdot \ln(2))$$

(iii) die y-Achse muss logarithmisch sein

$$121 - 220 + 99 = 0$$

Aufgabe 4 (ca. 40 Min.):

Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \sqrt{100x^2 - 200x + 99}, \quad \text{für } x \geq 1.1.$$

- a) Für x in der Nähe von 1.1 entsteht bei der numerischen Auswertung von $h(x)$ Auslöschung. Erklären Sie stichwortartig und mit entsprechenden Berechnungen oder einem Plot, warum das so ist.
- b) Erstellen Sie für $x \in [1.1, 1.3]$ mit einer Auflösung von $\Delta x = 10^{-7}$ einen halblogarithmischen Plot der Kondition von $h(x)$.
- c) Auslöschung kann jeweils durch geeignete algebraische Umformungen genau dann vermieden werden, wenn die Kondition an der betreffenden Stelle gut ist. Begründen Sie: Kann die in a) beschriebene Auslöschung vermieden werden? Fügen Sie die Antwort als Kommentar in Ihr Skript ein.

a.) Plot bzw. $100x^2 - 200x + 99 \approx 0$ für $x \approx 1.1$

b.)

c.) $k(h) = \left| \frac{h'(x) \cdot x}{h(x)} \right|$

$h(x) = \sqrt{100x^2 - 200x + 99}$
 $= (100x^2 - 200x + 99)^{\frac{1}{2}}$

$u = x^{\frac{1}{2}} \quad v = 100x^2 - 200x + 99$
 $u' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \quad v' = 200x - 200$

$$\frac{1}{2} \cdot (100x^2 - 200x + 99)^{-\frac{1}{2}} \cdot (200x - 200)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \cdot (200x - 200)$$

$$\frac{200x - 200}{2\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} = \frac{100x - 100}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}}$$

$$h'(x) = \frac{100(x - 1)}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}}$$

$$\frac{100x - 100}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \cdot x$$

$$\sqrt{100x^2 - 200x + 99}$$

$$= \left| \frac{100x^2 - 100x}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \cdot \frac{1}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \right|$$

$$k(x) = \left| \frac{100x^2 - 100x}{100x^2 - 200x + 99} \right|$$

Was passiert aber, wenn x und c entgegengesetzte Vorzeichen haben und betragsmässig fast gleich gross sind? Dann wird $|x+c|$ sehr klein und somit K sehr gross, die Addition (bzw. Subtraktion) ist dann schlecht konditioniert.

die Konditionszahl in der Nähe von $x=1.1$ wird also riesig

bspw. $x=1.11 \Rightarrow k = \underline{\underline{58.1429}}$