Höhere Mathematik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 9

Fassen Sie Ihre Lösungen in der ZIP-Datei *Name_S9.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite h bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle n, um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)dx$$

auf einen Fehler von maximal 10^{-5} genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel ?

Aufgabe 2 (40 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2)dx$$

manuell mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, $(j = 0, ..., 4)$ (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die T_{j0} komplett mit allen Summanden auf soweit nötig, also z.B.

$$T_{20} = h_2 \left(\frac{\cos(...) + \cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + \cos(...) \right),$$

aber

$$T_{40} = h_4 \left(\frac{\cos(...) + \cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + ... + \cos(...) \right).$$

Aufgabe 3 (40 Minuten):

Implementieren Sie die Romberg-Extrapolation in einer Python Funktion `[T] = Name_S9_Aufg3(f, a, b, m)`, welches Ihnen das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

für eine vorgegebene Funktion f und ein gegebenes m auf dem Intervall $[a, b]$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, $(j = 0, ..., m)$ berechnet und anschliessend extrapoliert. Der letzte (genaueste) Wert wird als T zurückgegeben. Überprüfen Sie damit Ihre Resultate der Aufgabe 2.

Achtung: m definiert die Anzahl T_{j0} für die erste Spalte des Romberg-Algorithmus, während $n_j = 2^j$ die Anzahl der Summanden in der summierten Trapezregel bestimmt:

$$T_{j0} = h_j \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j - 1} f(x_i) \right) \text{ für } h_j = \frac{b-a}{2^j},\ n_j = 2^j \text{ und } j = 0, ..., m.$$

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Wie gross ist die Schrittweite h bzw. die Anzahl benötigter Subintervalle n, um das Integral

$$I = \int_1^2 \ln(x^2)dx$$

auf einen Fehler von maximal 10^{-5} genau berechnen zu können für die summierten Rechtecksregel, die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel ?

$f(x) = \ln(x^2)$ $\quad f'(x) = \frac{2}{x}$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \leftarrow$ zu bestimmen $\quad h^2 = \frac{1}{n^2}$ $\quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}$

$$\left| \int_1^2 \ln(x^2)dx - h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(x_i^2 + \frac{2}{n}\right) \right| \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{24} \cdot \max_{x\in[a,b]} \left| -\frac{2}{x^2} \right| \overset{!}{\leq} 10^{-5}$$

$$\shortparallel$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - Rf(h) \right|$$

$$\frac{1}{24n^2} \cdot (2) \leq 10^{-5} \quad | \cdot n^2 \; / : 10^{-5}$$

$$\frac{1}{12 \cdot 10^{-5}} \leq n^2 \qquad n \geq 92$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - Tf(h) \right| \leq \frac{1}{12n^2} \cdot \max_{x\in[a,b]} \left| -\frac{2}{x^2} \right| \overset{!}{\leq} 10^{-5}$$

$$\frac{1}{12n^2} \cdot 2 \leq 10^{-5} \quad | \cdot n^2 \; / : 10^{-5}$$

$$\sqrt{\frac{1}{24 \cdot 10^{-5}}} \leq n \Rightarrow n \geq 65$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - Sf(h) \right| \leq \frac{\frac{1}{n^4}}{2880} \cdot \max_{x\in[a,b]} \left| -\frac{2}{x^2} \right| \overset{!}{\leq} 10^{-5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{5660 \cdot 10^{-5}}} \leq n \Rightarrow n \geq 2$$

Aufgabe 2 (40 Minuten):

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \cos(x^2)dx$$

manuell mit der Trapezregel $Tf(h)$ für die Schrittweiten $h_j = \frac{b-a}{2^j}$, $(j = 0, ..., 4)$ (Achtung: die erste Spalte enthält also fünf Werte) und extrapolieren Sie diese mittels Romberg-Extrapolation so weit wie möglich. Schreiben Sie die Summen für die T_{j0} komplett mit allen Summanden auf soweit nötig, also z.B.

$$T_{20} = h_2 \left(\frac{\cos(...) + \cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + \cos(...) \right),$$

aber

$$T_{40} = h_4 \left(\frac{\cos(...) + \cos(...)}{2} + \cos(...) + \cos(...) + ... + \cos(...) \right).$$

$j=0 \quad h=\frac{\pi}{2^0} \quad n=2^0 \qquad T_{00} = \pi \cdot \left(\frac{\cos(\pi)+\cos(0)}{2}\right) = 0$

$j=1 \quad h=\frac{\pi}{2^1} \quad n=2^1 \qquad T_{10} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\cos(\pi)+\cos(0)}{2} + \sum_{i=1}^{1} \cos(x_i)\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$j=2 \quad h=\frac{\pi}{2^2} \quad n=2^2 \qquad T_{20} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\cos(\pi)+\cos(0)}{2} + \sum_{i=1}^{2} \cos(x_i)\right) =$

$j=3 \quad h=\frac{\pi}{2^3} \quad n=2^3 \qquad T_{30} = \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{\cos(\pi)+\cos(0)}{2} + \sum_{i=1}^{2} \cos(x_i)\right) =$

$j=4 \quad h=\frac{\pi}{2^4} \quad n=2^4 \qquad T_{40} = \frac{\pi}{16} \left(\frac{\cos(\pi)+\cos(0)}{2} \quad \sum_{i=1}^{4} \cos(x_i)\right) =$