Übungsserie 11

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie ihre manuellen Lösungen für die Aufgaben 1 und 2 in die Datei *Name_ S11_Aufg1.pdf* resp. *Name_ S11_Aufg2.pdf* und fassen Sie diese mit Ihrem Python -Skript *Name_S11_Aufg3.py* in eine ZIP-Datei *Name_S11.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 45 Minuten):

a) Zeichnen Sie den Zeiger der komplexen Zahl $z = 3 - 11i$ und berechnen Sie sowohl die Exponentialform als auch die trigonometrische Form von z und der konjugierten Zahl z^*.

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = 4[\cos(-40°) + i \cdot \sin(-40°)] + 2e^{i\,30°} - 3 + 1.5i$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30° + i \cdot \sin 30°)$$

den folgenden Ausdruck

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2}.$$

d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}\,i)^3$$

unter Verwendung der Exponentialform.

Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten):

Lösen Sie die algebraische Gleichung

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

mit Hilfe einer geeigneten Substitution und zeichnen Sie die Lösungen in der Gaussschen Zahlenebene ein.

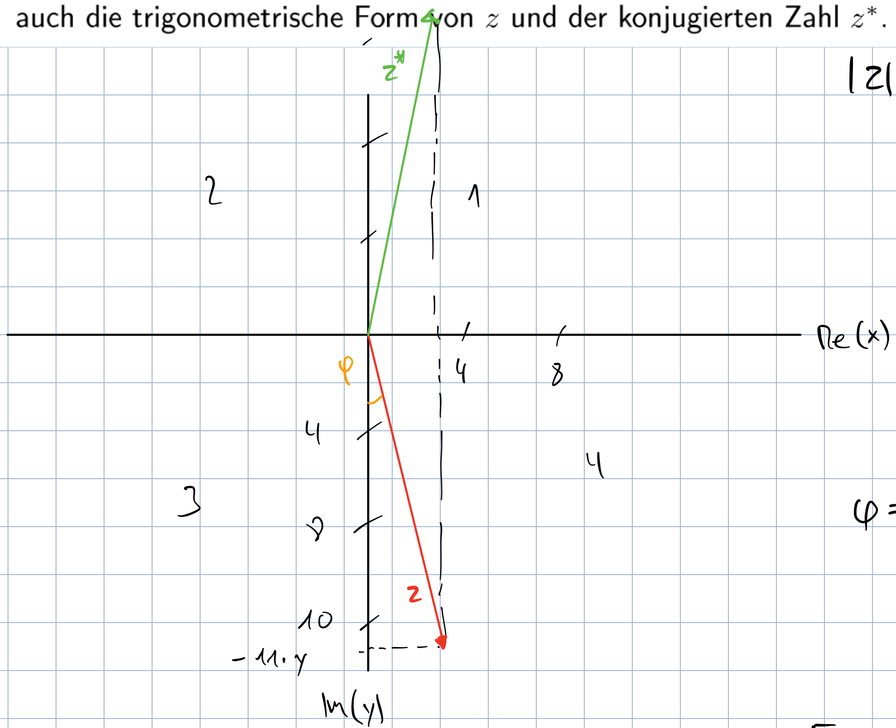
Aufgabe 3 (ca. 45 Minuten):

"Normale" geometrische Objekte wie ein Kreis oder eine Kugel haben ganzzahlige Dimensionen (z.B. hat der Kreis die Dimension 2, die Kugel die Dimension 3). Fraktale Objekte hingegen haben keine ganzzahlige Dimension sondern eben gebrochene (fraktale) Dimensionen und weisen einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit auf. Wie kann man nun solche selbstähnlichen Objekte wie z.B. eine Wolke, die Verästelungen eines Farnes oder eine Küstenlinie mathematisch beschreiben? Hier kommen die komplexen Zahlen ins Spiel und ihre Darstellung in der komplexen Zahlenebene.

Betrachten wir z.B. die einfache Iteration

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

a) Zeichnen Sie den Zeiger der komplexen Zahl $z = 3 - 11i$ und berechnen Sie sowohl die Exponentialform als auch die trigonometrische Form von z und der konjugierten Zahl z^*.



$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 121} = \sqrt{130}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{11}{3}\right) + 2\pi$

trigonometrische Form:

$z = r\,(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

$3 - 11i = \sqrt{130}\,(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

$\Rightarrow$ gemäss Papula : 4 Quadrant

also:

$z = \sqrt{130}\,(\cos(\arctan(\varphi) + 2\pi) + i \sin(\arctan(\varphi) + 2\pi))$

Exponentialform:

$z = r \cdot e^{i\varphi}$

$z = \sqrt{130} \cdot e^{i \cdot \arctan(\frac{11}{3}) + 2\pi}$

$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi \Rightarrow -1 \cdot \arctan\left(\frac{11}{3}\right) + 2\pi$

$z^* = (3 - 11i)^* = 3 + 11i$

trigonometrische Form: $\sqrt{130}\,\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{11}{3}\right)\right) + i \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{11}{3}\right)\right)\right)$

Exponentialform: $\sqrt{130} \cdot e^{i \arctan(\frac{11}{3})}$

b) Wie lautet die komplexe Zahl $z = 4[\cos(-40^\circ) + i \cdot \sin(-40^\circ)] + 2e^{i\,30^\circ} - 3 + 1.5i$ in der Normalform? Geben Sie auch z^* an.

$z = \underbrace{4\,(\cos(-40^\circ) + i \cdot \sin(-40^\circ))} + 2e^{i \cdot 30^\circ} - 3 + 1.5i$

$\underbrace{4\cos(-40^\circ)}_{x} + \underbrace{4 \cdot i \cdot \sin(-40^\circ)}_{y} + \underbrace{2\cos(30^\circ)}_{x} + i \cdot \underbrace{2\sin(30^\circ)}_{y} - 3 + 1.5i$

$(3.064 - 2.57i) + \sqrt{3} + i - 3 + 1.5i$

$$(4.7961 - 1.57i) - (3 + 1.5i) = 1.7961 + 3.07i$$

$$z^* = 1.7961 - 3.07i$$

c) Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}, \quad z_2 = 2\mathrm{e}^{-i\pi/3}, \quad z_3 = 4(\cos 30° + i \cdot \sin 30°)$$

den folgenden Ausdruck

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2}.$$

$i^2 = -1$

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+i+2i^2}{1+2i-2i-4i^2} = \underbrace{\frac{2-2}{1+4}}_{\to 0} + i\underbrace{\frac{5}{5}}_{\to 1} = i$$

$$z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$z_3 = 4(\cos(30°) + i \cdot \sin(30°)) = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0.5 z_2} \quad \frac{-i \cdot 4e^{i\frac{\pi}{6}}}{0.5 \cdot 2e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{-4ie^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}} = -4ie^{i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = -4ie^{i\frac{\pi}{2}}$$

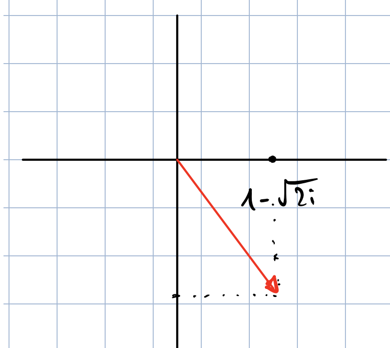
$$-4ie^{i\frac{\pi}{2}} = -4i\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\to 1}\right) = -4\underbrace{i \cdot i}_{-1} = \underline{\underline{4}}$$

d) Berechnen Sie die Potenz

$$(1 - \sqrt{2}\,i)^3$$

unter Verwendung der Exponentialform.

$$(1 - \sqrt{2}i)^3 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$



$$\varphi = \arctan(\sqrt{2}) + 2\pi$$

$$\sqrt{3} \cdot e^{-i(\arctan(\sqrt{2}) + 2\pi)} = \sqrt{3} \cdot \left(e^{-i\arctan(\sqrt{2}) - i2\pi}\right)$$

$$= \sqrt{3} \cdot \left(e^{-i\arctan(\sqrt{2})} \cdot \underbrace{e^{-i2\pi}}_{1}\right) = \sqrt{3}\, e^{-i\arctan(\sqrt{2})}$$

$$\left(\sqrt{3}\, e^{-i\arctan(\sqrt{2})}\right)^3 = (\sqrt{3})^3 \cdot \left(e^{-i\arctan(\sqrt{2})}\right)^3$$

$$= (\sqrt{3})^3 \cdot e^{-3i\arctan(\sqrt{2})} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot e^{-3i\arctan(\sqrt{2})}$$

$$= 3^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-3i\arctan(\sqrt{2})} = \underline{\underline{3\sqrt{3} \cdot e^{-3i\arctan(\sqrt{2})}}}$$

Aufgabe 2 (ca. 30 Minuten):

Lösen Sie die algebraische Gleichung

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

mit Hilfe einer geeigneten Substitution und zeichnen Sie die Lösungen in der Gaussschen Zahlenebene ein.

$z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \qquad u = z^2$

$u^2 + 4u + 16 = 0$

$au^2 + bu + c = 0 \qquad u_1 = z^2 \begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \end{smallmatrix}$

$u_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad u_2 = z^2 \begin{smallmatrix} z_3 \\ z_4 \end{smallmatrix}$

$u_1 = \dfrac{-4 + \sqrt{16 - 64}}{2} \qquad u_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{16 - 64}}{2}$

$\dfrac{-4 + \sqrt{-48}}{2} \qquad \dfrac{-4 - \sqrt{-48}}{2} \qquad \dfrac{-4 + \sqrt{(-1) \cdot 48}}{2} = \dfrac{-4 + i\sqrt{48}}{2}$

$\sqrt{-48} = \sqrt{(-1) \cdot 48} \qquad \dfrac{-4 + i \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\overset{-2}{\cancel{-4}} + i \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$= \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{48}$

$= i$

$i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1} \qquad z_1 = \sqrt{2i\sqrt{3} - 2}$

$u_1 = -2 + 2\sqrt{3}i \qquad z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i \qquad z_1 = -\sqrt{2i\sqrt{3} - 2}$

$u_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

$z_1 \Rightarrow 2i\sqrt{3} - 2 = (a + ib)^2 = (1 + i\sqrt{3})^2$

$z_1 = (1 + i\sqrt{3}) \qquad = a^2 + 2abi - b^2$

$z_2 = -(1 + i\sqrt{3}) \qquad = 2\underset{1}{a}\underset{\sqrt{3}}{b}i + (a^2 - b^2)$

$u_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ $\qquad -2-2\sqrt{3}i = (a+ib)^2$

Aufgabe 3 (ca. 45 Minuten):

"Normale" geometrische Objekte wie ein Kreis oder eine Kugel haben ganzzahlige Dimensionen (z.B. hat der Kreis die Dimension 2, die Kugel die Dimension 3). Fraktale Objekte hingegen haben keine ganzzahlige Dimension sondern eben gebrochene (fraktale) Dimensionen und weisen einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit auf. Wie kann man nun solche selbstähnlichen Objekte wie z.B. eine Wolke, die Verästelungen eines Farnes oder eine Küstenlinie mathematisch beschreiben? Hier kommen die komplexen Zahlen ins Spiel und ihre Darstellung in der komplexen Zahlenebene.

Betrachten wir z.B. die einfache Iteration

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Dabei sind z und c komplexe Zahlen. Der komplexen Zahl $c = x + iy$ wird in der komplexen Zahlenebene der Pixel mit den Koordinaten (x, y) zugeordnet. Erreicht nun für den Startwert $z_0 = 0$ die Iteration z_n nach einer gewissen Anzahl Iterationen n eine vorgegebene Abbruchbedingung (z.B. $\mid z_n \mid > 2$), wird dem Pixel (x, y) der Farbwert n zugeordnet, andernfalls erhält er die Farbe 0 (Schwarz). Macht man das nun für alle Punkte (Pixel) der komplexen Zahlenbene, erhält man die sogn. Mandelbrotmenge. Erzeugen Sie diese Menge, indem Sie das auf Moodle verfügbare Gerüst vervollständigen für $x \in [-2, 0.7]$ und $y \in [-1.4, 1.4]$ und plotten Sie diese Menge als Bild. Erzeugen Sie 2-3 zusätzliche Bilder, indem Sie in Details der Mandelbrotmenge an geeigneten Stellen weiter hinein zoomen (d.h. indem sie ein Subintervall für x und y betrachten). Lesen Sie die zusätzlichen Informationen auf https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge nach und betrachten Sie den Film https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Fractal-zoom-1-15-rupture.ogv.

Dabei sind z und c komplexe Zahlen. Der komplexen Zahl $c = x + iy$ wird in der komplexen Zahlenebene der Pixel mit den Koordinaten (x, y) zugeordnet. Erreicht nun für den Startwert $z_0 = 0$ die Iteration z_n nach einer gewissen Anzahl Iterationen n eine vorgegebene Abbruchbedingung (z.B. $\mid z_n \mid > 2$), wird dem Pixel (x, y) der Farbwert n zugeordnet, andernfalls erhält er die Farbe 0 (Schwarz). Macht man das nun für alle Punkte (Pixel) der komplexen Zahlenbene, erhält man die sogn. Mandelbrotmenge. Erzeugen Sie diese Menge, indem Sie das auf Moodle verfügbare Gerüst vervollständigen für $x \in [-2, 0.7]$ und $y \in [-1.4, 1.4]$ und plotten Sie diese Menge als Bild. Erzeugen Sie 2-3 zusätzliche Bilder, indem Sie in Details der Mandelbrotmenge an geeigneten Stellen weiter hinein zoomen (d.h. indem sie ein Subintervall für x und y betrachten). Lesen Sie die zusätzlichen Informationen auf https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge nach und betrachten Sie den Film https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Fractal-zoom-1-15-rupture.ogv.