Übungsserie 1

Erstellen Sie für ihre manuelle Lösung für die Aufgaben 2a) eine PDF-Datei *Name_S1_Aufg2a.pdf* und fassen Sie diese mit Ihren Python-Skripts *Name_S1_Aufg1.py* und *Name_S1_Aufg2b.py* für die Aufgaben 1 und 2b) in einer ZIP-Datei *Name_S1.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 60 Minuten):

Arbeiten Sie das Jupiter Notebook `flaechen.ipynb` durch, um zu sehen, wie Sie Flächen mit Python darstellen können. Weiterführende Informationen bietet Ihnen zum Beispiel auch das Tutorial

https://matplotlib.org/mpl_toolkits/mplot3d/tutorial.html an.

Schreiben Sie ein Skript *Name_S1_Aufg1.py*, welches Ihnen jede der folgenden Funktionen in a) und b)

- einmal dreidimensional mit `plot_wireframe()` darstellt
- einmal dreidimensional mit `plot_surface()` und passender Colormap darstellt
- einmal in zwei Dimensionen mit den Höhenlinien darstellt

Versehen Sie jede Abbildung mit passenden Achsenbeschriftungen und einem Titel.

a) Die Funktion $W = W(v_0, \alpha) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ beschreibt die Wurfweite W eines Körpers, der mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ unter einem Winkel α gegen die Horziontal abgeworfen wird. Nehme Sie für die Erdbeschleunigung $g = 9.81\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$ an. Für die Anfangsgeschwindigkeit soll gelten $v_0 \in [0, 100]$. Wählen Sie selbst einen vernünftigen Definitionsbereich für α. Bei welchem Winkel α erreicht W für gegebens v_0 sein Maximum? Schreiben Sie dies als Kommentar in Ihr Skript.

b) Die Zustandsgleichung $pV = RT$ für 1 Mol (entspricht $6.022 \cdot 10^{23}$ Molekülen) eines idealen Gases beschreibt den Zusammenhang zwischen den Grössen p (Druck, in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$), V (Volumen in m^3) und T (absolute Temperatur in Kelvin) des Gases, wobei die Gaskonstante $R = 8.31.....$ (in $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}}$) ist. Daraus ergeben sich die folgenden Abhängigkeiten. Stellen Sie jede der drei Funktionen dar innerhalb der angegebenen Defintionsbereiche für p, V und T.

- $p = p(V, T) = \frac{RT}{V}$ für $V \in [0, 0.2]$, $T \in [0, 1e4]$
- $V = V(p, T) = \frac{RT}{p}$ für $p \in [1e4, 1e5]$, $T \in [0, 1e4]$
- $T = T(p, V) = \frac{pV}{R}$ für $p \in [1e4, 1e6]$, $V \in [0, 10]$

Aufgabe 2 (ca. 60 Minuten):

Die Auslenkung $w = w(x, t)$ einer schwingenden Welle (z.B. einer Saite, einer Schall- oder Lichtwelle) in einer räumlichen Dimension wird in Abhängigkeit der Ortskoordinate x und der Zeitkoordinate t durch die eindimensionale Wellengleichgung beschrieben

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Dabei ist c die (konstante) Geschwindigkeit der Welle und $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$ bzw. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$.

a) Zeigen Sie durch manuelles partielles Ableiten, dass die folgenden Funktionen die Wellengleichung erfüllen:

a1) $w(x,t) = \sin(x+ct)$ a2) $v(x,t) = \sin(x+ct) + \cos(2x+2ct)$

b) Schreiben Sie ein Skript *Name_S1_Aufg2b.py*, welches Ihnen die Funktionen $w(x,t)$ und $v(x,t)$ dreidimensional mittels `plot_wireframe()` darstellt (für $c = 1$).

a1) $w(x,t) = \sin(x+ct)$

$u = \sin(x) \quad v = x+ct$
$u' = \cos(x) \quad v' = 1$

$w_x = \cos(x+ct)$

$u = \sin(x) \quad v = x+ct$
$u' = \cos(x) \quad v' = c$

$w_t = c \cdot \cos(x+ct)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) \text{ bzw. } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot c \cdot \cos(x+ct) = c^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cos(x+ct)$$

$$c \cdot \cos(x+ct) \frac{\partial}{\partial t} = c^2 \cdot \cos(x+ct) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$c \cdot c \cdot -\sin(x+ct) + \cos(x+ct) = c^2 \cdot -\sin(x+ct) + \cos(x+ct)$$

$$c^2 \cdot -\sin(x+ct) + \cos(x+ct) = c^2 \cdot -\sin(x+ct) + \cos(x+ct) \checkmark$$

a2) $v(x,t) = \sin(x+ct) + \cos(2x+2ct)$

$u = \sin(x) \quad v = x+ct \quad u_1 = \cos(x) \quad v_1 = 2x+2ct$
$u' = \cos(x) \quad v' = 1 \quad u_1' = -\sin(x) \quad v_1' = 2$

$v_x = \cos(x+ct) - 2\sin(2x+2ct)$

$v_t = c \cdot \cos(x+ct) - 2c\sin(2x+2ct)$

$$c \cdot \cos(x+ct) - 2c \cdot \sin(2x+2ct) \frac{\partial}{\partial t} = \cos(x+ct) - 2\sin(2x+2ct) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$c \cdot c \cdot -\sin(x+ct) - 2c \cdot 2c \cdot \cos(2x+2ct) = c^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

$$-c^2(\sin(x+ct) + 4\cos(2x+2ct)) = c^2 \cdot \left(\cos(x+ct) - 2\sin(2x+2ct)\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$-c^2(\sin(x+ct) + 4\cos(2x+2ct)) = c^2 \cdot (-\sin(x+ct) - 4\cos(2x+2ct))$$

$$-c^2(\sin(x+ct) + 4\cos(2x+2ct)) = -c^2 \cdot (\sin(x+ct) + 4\cos(2x+2ct)) \checkmark$$