Übungsserie 2

Erstellen Sie für ihre manuelle Lösung für die Aufgabe 1 eine PDF-Datei *Name_S2_Aufg1.pdf* und fassen Sie diese mit Ihren Python-Skripts zu den Aufgaben 2 und 3 in einer ZIP-Datei *Name_S2.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 20 Minuten):

Die Jacobi-Matrix $Df(x_1,...,x_n)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ für einen gegebenen Vektor ist gemäss Skript

$$Df(x_1,...,x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,...,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,...,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_1,...,x_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie manuell die Jacobi-Matrizen für die folgenden Funktionen und Vektoren:

a) $f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 5x_1x_2 \\ x_1^2x_2^2 + x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \ln(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \\ \exp(x_2^2 + x_3^2) + x_1^2 \\ \frac{1}{(x_3^2+x_1^2)} + x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (ca. 60 Minuten):

Arbeiten Sie das Jupiter Notebook `symbolisch_rechnen.ipynb` durch, um zu sehen, wie Sie Ableitungen und die Jacobi-Matrix mit Python berechnen lassen können.

Erstellen Sie anschliessend ein Skript *Name_S2_Aufg2.py*, welches Ihnen die Jacobi-Matrizen aus Aufgabe 1 berechnet und überprüfen Sie damit deren Richtigkeit.

Aufgabe 3 (ca. 40 Minuten):

Linearisieren Sie mit einem Skript *Name_S2_Aufg3.py* die folgende Funktion

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 - x_3^2 - 13 \\ \ln\frac{x_2}{4} + e^{0.5x_3-1} - 1 \\ (x_2-3)^2 - x_3^3 + 7 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1.5, 3, 2.5)^T$.

Aufgabe 1 (ca. 20 Minuten):

Die Jacobi-Matrix $Df(x_1, ..., x_n)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ für einen gegebenen Vektor ist gemäss Skript

$$Df(x_1, ..., x_n) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_1, ..., x_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie manuell die Jacobi-Matrizen für die folgenden Funktionen und Vektoren:

a) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5x_1x_2 \\ x_1^2x_2^2 + x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Linearisierung:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(0)}) + \boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^{(0)}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(0)})$$

$$Df(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\delta x_1} & \frac{\partial f_1}{\delta x_2} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 & 5x_1 \\ 2x_1x_2^2 + 1 & 2x_1^2x_2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \ln(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 \\ \exp(x_2^2 + x_3^2) + x_1^2 \\ \frac{1}{(x_3^2 + x_1^2)} + x_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$Df(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2e^{x_2^2+x_3^2} & 2x_3e^{x_2^2+x_3^2} \\ -\frac{2}{(x_3^2+x_1^2)^2} & 2x_2 & -\frac{2}{(x_3^2+x_1^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 6 \\ 2 & 4e^{13} & 6e^{13} \\ -\frac{2}{100} & 4 & -\frac{2}{100} \end{pmatrix}$$