Aufgabe 1

a) $\quad \text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \quad = \quad 3 \cdot 20001 \quad = 60003$

b) $\quad \dfrac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A) \cdot \dfrac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} = \text{cond}_\infty(A) \cdot \dfrac{\varepsilon}{1} = \dfrac{1}{100}$

$\varepsilon = \dfrac{0.01}{60003} = 1.67 \cdot 10^{-7}$

c)

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-9} & 0 & 10^{-9} \end{pmatrix} \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1.67 \cdot 10^{-7} \end{matrix}\right| \bigg) = \begin{pmatrix} -0.997 \\ 1 \\ 0.998 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-9} & 0 & 10^{-9} \end{pmatrix} \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right| \bigg) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dfrac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 3.33 \cdot 10^{-3}$

d) $\quad \dfrac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \dfrac{\text{cond}_\infty(A)}{1 - \text{cond}_\infty(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|}} \cdot \left(\overbrace{\dfrac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}}^{3 \cdot 10^{-7}} + \dfrac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right)$

$= 0.0161$