Höhere Mathematik 2, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 5

Fassen Sie Ihre Lösungen zusammen in die ZIP-Datei *Name_S05.zip*. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (40 Minuten):

Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome S_i für $i = 0, 1, 2$ und geben Sie die $S_i(x)$ explizit an.

x_i	4	6	8	10
y_i	6	3	9	0

Scannen Sie ihre manuelle Lösung in die Datei `Name_S5_Aufg1.pdf`.

Aufgabe 2 (60 Minuten):

Implementieren Sie den Algorithmus zur Berechnung der natürlichen kubischen Splinefunktion $S(x)$ gemäss Skript in der Funktion `[yy] = Name_S5_Aufg2(x,y,xx)`. Dabei ist x der Vektor mit den $(n+1)$ gegebenen Stützstellen (aufsteigend sortiert) und y der analoge Vektor mit den bekannten Stützwerten. Der Vektor xx definiert die Werte, für die $yy = S(xx)$ berechnet werden soll. Dabei müssen die Werte von xx innerhalb des Intervals $[x_0, x_n]$ liegen. Ihre Funktion soll zusätzlich $S(x)$ für die durch xx definierten Werte grafisch darstellen. Überprüfen Sie Ihre Funktion anhand Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (20 Minuten):

Erstellen Sie ein Skript `Name_S5_Aufg3.py`, welches Ihnen die folgende Aufgaben löst:

a) Testen Sie Ihre Funktion aus Aufgabe 2 an der Zeitreihe der Bevölkerungszahl (in Mio.) der USA:

t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
p(t)	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505	249.633	281.422	308.745

b) Benutzen Sie mittels `from scipy import interpolate` die folgenden Interpolationsfunktionen von Scipy

- `interpolate.CubicSpline()` (siehe Online-Dokumentation)

um diese Messreihe durch eine natürliche kubische Splinefunktion zu interpolieren und vergleichen Sie das Resultat grafisch mit a).

c) Benutzen Sie die Funktionen

- `numpy.polyfit()`
- `numpy.polyval()`

um die Messdaten durch ein Polynom 11. Grades zu interpolieren. Verschieben Sie dazu die Zeitreihe von 1900 zum Jahr 0, bevor Sie polyfit anwenden (wissen Sie, weshalb?). Vergleichen Sie das Resultat grafisch mit a) und b).

Aufgabe 1 (40 Minuten):

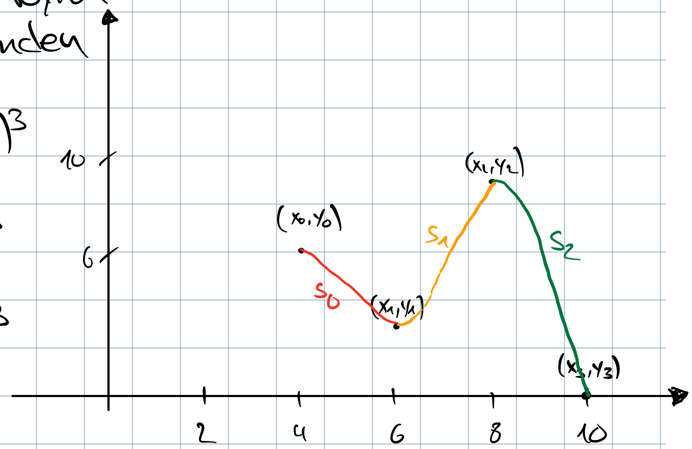
Zu den folgenden Stützpunkten soll die natürliche kubische Splinefunktion bestimmt werden, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i der kubischen Polynome S_i für $i = 0, 1, 2$ und geben Sie die $S_i(x)$ explizit an.

x_i	4	6	8	10
y_i	6	3	9	0

Scannen Sie ihre manuelle Lösung in die Datei `Name_S5_Aufg1.pdf`.

Koeffizienten = kubisches Polynom

3 Intervalle x 4 = 12 Unbekannte zu finden



$$S_0 = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$

$$S_1 = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

$$S_2 = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

1.) $S_0(x_0) = a_0 = y_0$

2.) $S_1(x_1) = a_1 = y_1$

3.) $S_2(x_2) = a_2 = y_2$

4.) $S_2(x_3) = a_2 + b_2(x_3 - x_2) + c_2(x_3 - x_2)^2 + d_2(x_3 - x_2)^3 = y_3$

5.) $S_0(x_1) = S_1(x_1)$

6.) $S_1(x_2) = S_2(x_2)$

7.) $S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \Rightarrow b_0 + 2c_0(x_1 - x_0) + 3d_0(x_1 - x_0)^2 = b_1$

8.) $S_1'(x_2) = S_2'(x_2) \Rightarrow b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) + 3d_1(x_2 - x_1)^2 = b_2$

9.) $S_0''(x_1) = S_1''(x_1) \Rightarrow 2c_0 + 6d_0(x_1 - x_0) = 2c_1$

10.) $S_1''(x_2) = S_2''(x_2) \Rightarrow 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) = 2c_2$

11.) $S_0''(x_0) = 0$

12.) $S_2''(x_3) = 0$

i	0	1	2	3
x_i	4	6	8	10
y_i	6	3	9	0
a_i	6	3	9	·
h_i	2	2	2	·
c_i	0	2.55	-3.45	0
d_i	0.6	-1	0.4	·
b_i	-1.6	0.2	0.8	·

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = 3\,\frac{9-3}{2} - 3\,\frac{3-6}{2}$$

$$3 \cdot 3 + 4.5 = 13.5$$

$$c_2 = 3 \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\frac{y_2-y_1}{h_1} - 3\,\frac{y_1-y_0}{h_0} \\ 3\,\frac{y_3-y_2}{h_2} - 3\,\frac{y_2-y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\frac{9-3}{2} - 3 \cdot \frac{3-6}{2} \\ 3\,\frac{-9}{2} - 3 \cdot \frac{9-3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5 \\ -22.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{2.55} \\ \underline{-3.45} \end{pmatrix}$$

$$S_0(x) = 2 - 1.6x + 0.6x^3$$

$$S_1(x) = 1 + 0.2x + 1.8x^2 - x^3$$

$$S_2(x) = 2 + 0.8x - 1.2x^2 + 0.4x^3$$