$n=10$

$eps = 5 \cdot 10^{-10}$

10 Stellen

$\overbrace{1.000\ldots0}$

$0.000\ldots05$

$1.000\ldots0\boxed{5}$

wird abgerundet, da ausserhalb der Maschinengenauigkeit

Höhere Mathematik 1, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 3

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie Ihre Lösung zu den Aufgaben 1 und 2 und 3a in die Dateien *Name_S3_Aufg1.pdf* resp. *Name_S3_Aufg2.pdf* resp. *Name_S3_Aufg3a.pdf* und fassen Sie diese zusammen mit den Python Skripten *Name_S3_Aufg3b.py* und *Name_S3_Aufg4.py* in eine ZIP-Datei *Name_S3.zip* zusammen. Laden Sie dieses File vor der nächsten Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch. Die Python Skripte müssen ausführbar sein.

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positve Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, wegen Rundung $1 + x$ nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B. $\sqrt{x}$ oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie eps, nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< eps$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, , $n \in \mathbb{N}$) einer rellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n?

a.) $f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad$ z.B. $n=10$

b.) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

Konditionszahl: $k(x) = \left|\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}\right|$

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

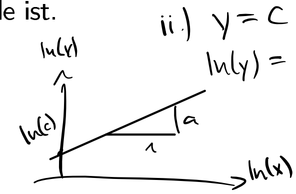
(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = ...$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{2^{5x}})^2$



ii.) $y = c \cdot a^x \mid \ln$

$\ln(y) = \ln(c \cdot x^a) = \ln(c) + \ln(x^a)$

$= \ln(c) + a \cdot \ln(x)$

y-Achsen Abschnitt

Steigung

b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für $0 < x \leq 100$.

doppeltlogarithmisch (loglog) geplotet, erhalten wir eine Gerade

$f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \underbrace{\frac{5}{\sqrt[3]{2}}}_{c} \cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}}_{a}$

Aufgabe 1 (ca. 20 Min.):

Betrachten Sie einen vereinfachten Rechner, der im Dezimalsystem arbeitet mit einer zehnstelligen Gleitpunktarithmetik (also $n = 10$ für die Mantisse) und einem beliebig grossen Exponenten. Erklären Sie anhand einer kurzen konkreten Berechnung, weshalb für eine positve Zahl $x \neq 0$, die kleiner als die Maschinengenauigkeit eps ist, wegen Rundung $1 + x$ nicht mehr korrekt berechnet werden kann, wohingegen es keine Probleme bereitet, z.B. $\sqrt{x}$ oder $x/10^9$ richtig zu berechnen.

Tipp: Berechnen Sie eps, nehmen Sie für x eine konkrete Zahl $< eps$ an, berechnen Sie die obigen Grössen und normieren Sie sie wie in Kap. 2 des Skriptes.

$n=10$

$eps = 5 \cdot 10^{-10}$

$$\overbrace{1.000\ldots0}^{10 \text{ Stellen}}$$
$$\frac{0.000\ldots05}{1.000\ldots0\boxed{5}}$$

wird abgerundet, da ausserhalb der Maschinengenauigkeit

$$Eps = \boxed{5 \cdot 10^{-10}}$$

$$\boxed{0.4 \cdot 10^{-8}}$$

ausserhalb

$$\frac{1.000000000\cancel{0}}{4}$$
$$\overline{0.0000000000004}$$

oder $0.4 \cdot 10^{-8}$ alleine kann wieder Berechnungen mit einer Maschinengenauigkeit von $5 \cdot 10^{-10}$ ausführen

Aufgabe 2 (ca. 20 Min.):

Ist das Potenzieren ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$) bzw. das Wurzelziehen ($f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, , $n \in \mathbb{N}$) einer rellen Zahl x gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie! Was hat das für Auswirkungen auf die Auswertung von Polynomen für grosse n?

a.) $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ z.B. $n=10$

b.) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$

Konditionszahl : $k(x) = \left| \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right|$

Aufgabe 3 (ca. 40 Min.):

a.) $$\frac{n \cdot \cancel{x}^{n-1} \cdot x}{\cancel{x^n}} = \frac{n \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = n \Rightarrow \text{schlecht konditioniert}$$

b.) $$\frac{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \cdot x}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \cancel{x^{\frac{1}{n}}} \cdot \cancel{x^{-1}} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x^{\frac{1}{n}}}} = \underline{\underline{\frac{1}{n}}}$$

Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

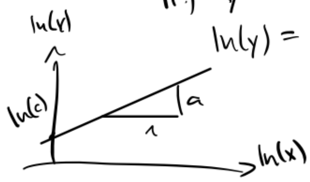
(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

a) Beweisen Sie diese beiden Aussagen zuerst für sich selbst analytisch (Tipp: berechnen Sie $y = \log f(x) = \ldots$). Geben Sie dann den y-Achsenabschnitt und Steigung der untenstehenden Funktionen in dem Koordinatensystem an, in dem der Funktionsgraph eine Gerade ist.

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{25^x})^2$



ii.) $y = c \cdot a^x \quad | \ln$

$\ln(y) = \ln(c \cdot x^a) = \ln(c) + \ln(x^a)$

$= \underbrace{\ln(c)}_{\text{y-Achsen Abschnitt}} + \underbrace{a}_{\text{Steigung}} \cdot \ln(x)$

b) Um das Erstellen solcher Graphiken zu unterstützen, stellt Python die Anweisungen `np.logspace`, `plt.semilogx`, `plt.semilogy` und `plt.loglog` zur Verfügung. Plotten Sie damit die Graphen der obigen Funktionen als Geraden, jeweils für $0 < x \leq 100$.

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \underbrace{\frac{5}{\sqrt[3]{2}}}_{c} \cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}}_{a}$$

doppeltlogarithmisch (loglog) geplotet, erhalten wir eine Gerade

(I) Der Graph einer Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse ist eine Gerade.

$y = c \cdot a^x \quad | \cdot \ln()$

$\ln(y) = \ln(c \cdot a^x)$

$\ln(y) = \ln(c) + \ln(a^x)$

$\ln(y) = \ln(c) + x \cdot \ln(a)$

y-Achsenabschnitt

der x-Achsenabschnitt ist nicht logarithmisch
wir haben aber die Geradenform
$y = a \cdot x + b$ wobei $a = \ln(a)$ und $b = \ln(c)$

(II) Der Graph einer Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^a$ ist eine Gerade, wenn man beide Koordinatenachsen logarithmisch wählt.

$y = c \cdot x^a \quad | \cdot \ln()$

$\ln(y) = \ln(c \cdot x^a)$

$\ln(y) = \ln(c) + \ln(x^a)$

$\ln(y) = \ln(c) + a \cdot \ln(x)$

x- und y-Achsenabschnitt sind logarithmisch
und wir haben die Geradenform
$y = a \cdot x + b$ wobei $\ln(x) = x$

(i) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}}$

(ii) $g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-x/100}$

(iii) $h(x) = (\frac{10^{2x}}{2^{5x}})^2$

$$\text{(i)}\quad f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}} = 5 \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$= \underbrace{\frac{5}{\sqrt[3]{2}}}_{c} \cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}}_{x^a}$$

(i) beide koordinatenachsen müssen logarithmisch sein

$$\text{(ii)}\quad g(x) = 10^5 \cdot (2e)^{-\frac{x}{100}} = \ln(g(x)) = \ln(10^5 \cdot (2e)^{-\frac{x}{100}})$$

$$= \ln(10^5) + \ln((2e)^{-\frac{x}{100}})$$

$$= \ln(10^5) - \frac{x}{100} \cdot \ln(2e)$$

$$c \quad - \quad x \quad \cdot \quad a$$

(ii) die y-Achse muss logarithmisch sein

$$\text{(iii)}\quad h(x) = \left(\frac{10^{2x}}{2^{5x}}\right)^2 = (\underline{5^{2x} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-5x}})^2 = (5^{2x} \cdot 2^{-3x})^2 = 5^{4x} \cdot 2^{-6x}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$5^{4x} \cdot 2^{-6x} \quad | \cdot \ln()$$

$$4x \cdot \ln(5) - \underline{6x} \cdot \ln(2) =$$

$$x^1 \cdot (4 \cdot \ln(5) - 6 \cdot \ln(2))$$

(iii) die y-Achse muss logarithmisch sein

$121 - 220 + 99 = 0$

Aufgabe 4 (ca. 40 Min.):

Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \sqrt{100x^2 - 200x + 99}, \qquad \text{für } x \geq 1.1.$$

a) Für x in der Nähe von 1.1 entsteht bei der numerischen Auswertung von $h(x)$ Auslöschung. Erklären Sie stichwortartig und mit entsprechenden Berechnungen oder einem Plot, warum das so ist.

b) Erstellen Sie für $x \in [1.1,\ 1.3]$ mit einer Auflösung von $\Delta x = 10^{-7}$ einen halblogarithmischen Plot der Kondition von $h(x)$.

c) Auslöschung kann jeweils durch geeignete algebraische Umformungen genau dann vermieden werden, wenn die Kondition an der betreffenden Stelle gut ist. Begründen Sie: Kann die in a) beschriebene Auslöschung vermieden werden? Fügen Sie die Antwort als Kommentar in Ihr Skript ein.

a.) Plot bzw. $100x^2 - 200x + 99 \approx 0$ für $x \Rightarrow 1.1$

b.)

c.) $k(h) = \left| \frac{h'(x)\, x}{h(x)} \right|$

$u = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad v = 100x^2 - 200x + 99$

$u' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad v' = 200x - 200$

$$h(x) = \sqrt{100x^2 - 200x + 99}$$
$$= (100x^2 - 200x + 99)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (100x^2 - 200x + 99)^{-\frac{1}{2}} \cdot 200x - 200$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \cdot (200x - 200)$$

$$\frac{200x - 200}{2\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} = \frac{100x - 100}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}}$$

$$h'(x) = \frac{100(x-1)}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}}$$

$$\left| \frac{\frac{100x - 100}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \cdot x}{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}} \right| = \left| \frac{100x^2 - 100x}{\cancel{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{100x^2 - 200x + 99}}}{1} \right|$$

$$K(x) = 100x^2 - 100x$$
$$= 100 \cdot (x^2 - x)$$

$$100 \cdot \left(\frac{121}{100} - 1.1\right) = 11$$

die Konditionszahl an der Stelle $x = 1.1$ ist 11 also nicht gut konditioniert

Was passiert aber, wenn x und c entgegengesetzte Vorzeichen haben und betragsmässig fast gleich gross sind? Dann wird $|x + c|$ sehr klein und somit K sehr gross, die Addition (bzw. Subtraktion) ist dann schlecht konditioniert.