Аналогичным образом, если $\alpha = infX$, то, согласно определению 5, во-первых, число ограничивает снизу множество X, а во-вторых, любое число уже не ограничивает снизу это множество, ибо число $\alpha' > \alpha$ является наибольшим среди всех таких чисел. Это означает, что для любого $\alpha' > \alpha$ найдется такой $x \in X$, что $x < \alpha'$. Следовательно, определение 5 можно перефразировать следующим образом.

Определение $5'$**.** *Число α называется нижней гранью множества X, если:*

1^0) $\forall\ x \in X : x \geq \alpha$;

2^0) $\forall\ \alpha' > \alpha\ \exists\ x \in X : x < \alpha'$.

Условие 2^0) эквивалентно условию

$2'$) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in X : x < \alpha + \varepsilon$.

Для того, чтобы убедиться в эквивалентности условий 2^0) и $2'$), достаточно взять $\alpha' = \alpha + \varepsilon$.

Сделаем несколько очевидных замечаний. Если непустое множество $X \subset \mathbf{R}$ имеет верхнюю грань $\beta \in \mathbf{R}$ (имеет нижнюю грань $\alpha \in \mathbf{R}$), то оно ограничено сверху (снизу). Это следует из условия 1^0 определения $4'$ (определения $5'$).

Если $\beta = supX$ $(\alpha = infX)$ и число b (число a) ограничивает сверху (снизу) множество X, то $\beta \leq b$ (соответственно $a \leq \alpha$). Это следует из того, что верхняя (нижняя) грань множества является наименьшим (наибольшим) числом среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) данное множество.

Если в множестве существует наибольшее (наименьшее) число, то оно является верхней (нижней) гранью этого множества. Вчастности, такая ситуация имеет место для конечных множеств: любое конечное чисел имеет наибольшее и наименьшие числа, а потому нижнюю и верхнюю грани. В принципе их можно найти простым перебором всех чисел из данного множества, так как оно конечно. Однако, вообще говоря, только в принципе, а не на практике: если в данном конечном множестве, заданном какими-то свойствами его элементов, будет «достаточно много» элементов, то перебрать из все будет, возможно, не под силу даже сверхмощной современной вычислительной машине.

Приведем примеры, иллюстрирующие понятие верхней и нижней граней множества.

Множество всех положительных действительных чисел (обозначим его R_+) ограничено снизу числом нуль, ибо для любого $x \in R_+$ имеет место x > 0; более того, $infR_+ = 0$. Множество R_+ не ограничено сверху, так как нет числа, которое бо граничивало сверху все положительные числа.

Если $X = [a, b]$ — отрезок, то $infX = a$, $supX = b$. Если — интервал, то также $infX = a$, $supX = b$. Если, наконец, множество X состоит из двух точек a и b, $a \leq b$, т. е. $X = \{a\} \cup \{b\}$, то снова $infX = a$, $supX = b$. Эти примеры показывают, в частности, что верхняя (нижняя) грань множества может как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему.

Если $\xi = A|B$ — сечение в области действительных чисел (см. п. 2.5), то

$$\xi = supA = infB. \qquad (3.1)$$

Выясним теперь вопрос: всегда ли у числового множества существует его верхняя (нижняя) грань? Если множество не ограничено сверху (снизу), то не существует чисел, которые бы ограничивали его сверху (снизу). Следовательно, не существует среди них и наименьшего (наибольшего). Таким образом, если множество не ограничено сверху (снизу), то у него нет верхней (нижней) грани. В этом случае ответ на поставленный вопрос получился совсем просто. Если же множество ограничено сверху (снизу), то ответ дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое числовое множество имеет верхнюю грань, а всякое граниченное снизу непустое числовое множество имеет нижнюю грань.*

Доказательство. Пусть X — ограниченное сверху непустое числовое множество. Обозначим через Y множество всех чисел, ограничивающих сверху множество X. Множество X ограничено сверху, поэтому множество Y не пусто. Каждый элемент $y \in Y$ ограничивает сверху множество X, т. е. для любого элемента $x \in X$ выполняется неравенство $y \leq y$. Элементы x и y являются произвольными элементами соответственно множеств X и Y, поэтому, в силу свойства непрерывности действительных чисел (см. свойство V в п. 2.1), существует такое число β, что для любых $x \in X$ и $y \leq y$ имеет место неравенсто

$$\text{x} \leq \beta \leq y. \qquad (3.2)$$