Домашнее задание №1 по курсу математической статистики.

Шубин Н. В. СКБ 172

Выбранные распределения:

- Логарифмическое распределение.
- Распределение Эрланга

[Логарифмическое распределение] =

$$p(x) = \frac{-p^x}{\mathrm{x}\ln(q)}, \qquad \text{где } \begin{matrix} x \in \mathbb{N}, \\ 0 < p < 1, \\ q = 1 - p. \end{matrix}$$

[Распределение Эрланга] =

$$f(x) = \frac{\lambda^m \, x^{m-1}}{(m-1)! \, e^{-\lambda x}}, \qquad \text{где } \begin{matrix} x, \lambda \in \mathbb{R}, \\ x, \lambda > 0, \\ m \in \mathbb{N}. \end{matrix}$$

Логарифмическое распределение.

Пусть величина ξ *распределена по следующему закону:* $P_\xi(x) = \frac{-p^x}{\mathrm{x}\ln(q)}$.

Тогда найдем её математическое ожидание и дисперсию:

$$M\xi = \sum_{x=1}^{\infty} x \, \frac{-p^x}{\mathrm{x}\ln(q)} = \sum_{x=1}^{\infty} x \, \frac{-p^x}{\mathrm{x}\ln(1-p)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{-p^x}{\ln(1-p)} =$$

$$= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{x=1}^{\infty} p^x = \boxed{\frac{p}{(p-1)\ln(1-p)}}$$

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - M^2\xi$

$$M\xi^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \, \frac{-p^x}{\mathrm{x}\ln(q)} = \cdots = \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{x=1}^{\infty} x\, p^x =$$

$$= \boxed{\frac{p}{(p-1)^2 \ln(1-p)}}$$

Тогда:

$$D\xi = \frac{p}{(p-1)^2 \ln(1-p)} - \frac{p^2}{(p-1)^2 \ln^2(1-p)} =$$

$$= \boxed{-p \, \frac{p + \ln(1-p)}{(p-1)^2 \ln^2(1-p)}}$$

Производящая и характеристическая функции, для данного распределения, следующие:

$$G(z) = M(z^X) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x)\, z^X = \frac{\ln(1 - p\, e^t)}{\ln(1-p)}$$

$$\phi_X(t) = M(e^{itX}) = \frac{\ln\,(1 - p\, e^{it})}{\ln\,(1-p)}$$

Гистограмма вероятностей, функция распределения.

Для данного распределения докажем следующую полезную теорему.

Т. Пусть случайные величины V и U распределены равномерно, тогда для величины X, заданной следующим образом:

$$X = 1 + \frac{\ln(V)}{\ln\,(1-(1-p)^U)}$$

Верно утверждение, что X распределена логарифмически.

Сразу отметим, что

$$X - 1 \sim Geometric((1-p)^U)$$

Доказательство.

$$P(X = k) = P(X - 1 = k - 1) =$$

$$= \int_0^1 P_{Geom}(X - 1 = k - 1 \mid ((1-p)^w)) * f_{uniform}(w)\, dw =$$

$$= \int_0^1 (1 - (1-p)^w)^{k-1} (1-p)^w\, dw = \{z = (1-p)^w\} =$$

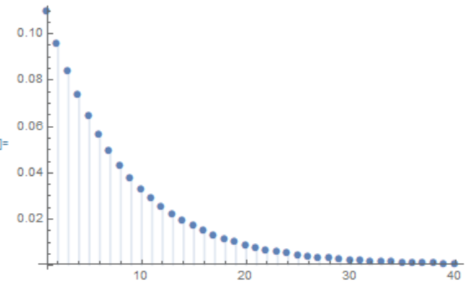
$$= \int_1^{1-p} (1-z)^{k-1}\, z \frac{1}{z \ln(1-p)}\, dz = \frac{1}{\ln(1-p)} \int_1^{1-p} (1-z)^{k-1}\, dz =$$

$$= \frac{(1-z)^k}{\ln(1-p)} \Big|_{1}^{1-p} = \boxed{-\frac{p^k}{\ln(1-p)\, k}}$$

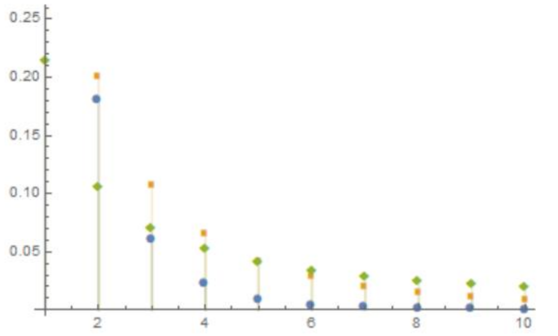
In[51]:=

```
DiscretePlot[Table[PDF[GeometricDistribution[(1 - p) ^ 3], k], {p, {0.5}}] // Evaluate, {k, 40}, PlotMarkers → Automatic, PlotRange → All]
```

Out[51]=

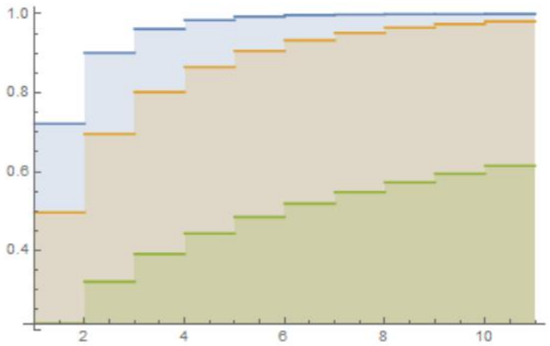


```
DiscretePlot[Table[PDF[LogSeriesDistribution[θ], k], {θ, {0.5, 0.8, 0.99}}] // Evaluate, {k, 10}, PlotMarkers → Automatic]
|график послед··· |табл··· |пл··· |логарифмическое распределение              |вычислить              |маркеры на гр··· |автоматичес
```



Функция распределения:

```
DiscretePlot[Table[CDF[LogSeriesDistribution[θ], k], {θ, {0.5, 0.8, 0.99}}] // Evaluate, {k, 10}, ExtentSize → Right]
|график послед··· |табл··· |ф··· |логарифмическое распределение              |вычислить              |размер прот··· |справа
```



Интерпретации.

Типичная. ---

Известные соотношения.

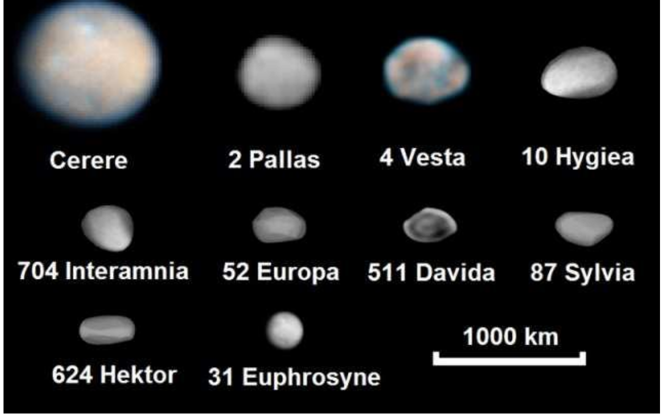
В ходе работы было описано соотношение логарифмического распределения с равномерным и геометрическим.

Пуассоновская сумма независимых логарифмических случайных величин имеет отрицательное биномиальное распределение.

Нетипичная.

Логарифмическое распределение описывает распределение астероидов по размеру в Солнечной системе.

Верно, маленьких астероидов в разы больше, большинство из них ещё не обнаружены. В то время, как найти самые большие астероиды, такие как Церера, Юнона, Веста удалось ещё до создания компьютеров.



Распределение Эрланга.

Пусть случайная величина x имеет следующую плотность: $f(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!e^{-\lambda x}}$

Найдем ее математическое ожидание:

$$Mx = \int_0^\infty \frac{\lambda^m x^m}{(m-1)!\,e^{-\lambda x}}dx = \frac{\lambda^m}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{x^m}{e^{-\lambda x}}dx = \frac{\Gamma(m+1)}{(m-1)!\ \lambda}$$

Также найдем дисперсию:

$$Mx^2 = \int_0^\infty \frac{\lambda^m x^{m+1}}{(m-1)!\,e^{-\lambda x}}dx \ = \frac{\Gamma(m+2)}{(m-1)!\ \lambda^2}$$

$$Dx = Mx^2 - M^2x = \frac{\Gamma(m+2)\,(m-1)! - \Gamma^2(m+1)}{(m-1)!^2\,\lambda^2} =$$

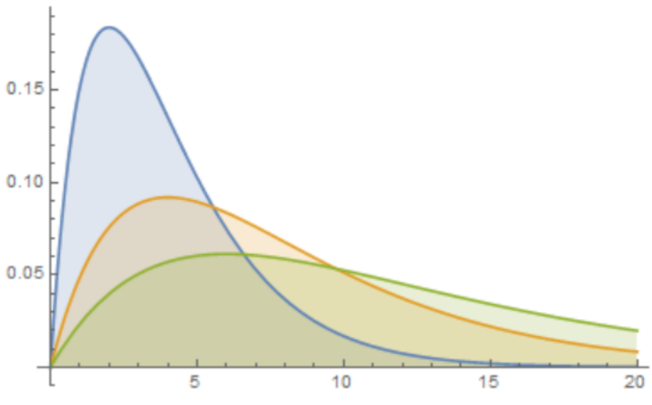
$$= \frac{(m+1)!\,(m-1)! - m!^2}{(m-1)!^2\,\lambda^2} = \frac{(m+1)! - m!\,m}{(m-1)!\,\lambda^2} = \frac{m}{\lambda^2}$$

Характеристическая функция:

$$\phi_x(t) = Me^{itx} = \int_0^\infty e^{itx}\,\frac{\lambda^m\,x^{m-1}}{(m-1)!\,e^{-\lambda x}}\,dx = \frac{e^{\mathrm{itx}}\lambda^m\Gamma(m)(-\lambda\ln(e))^{-m}}{(-1+m)!}$$

График плотностей, функция распределения.

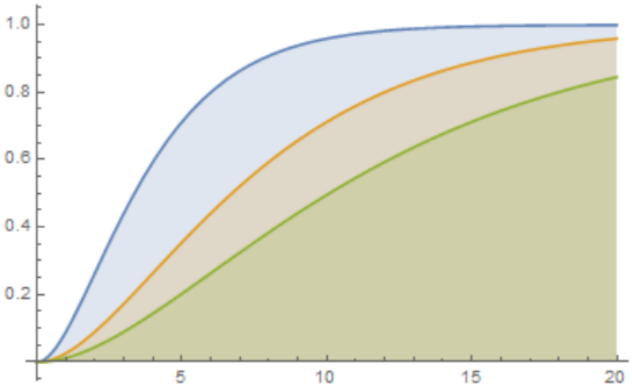
```
Plot[Table[PDF[GammaDistribution[2, β], x], {β, {2, 4, 6}}] // Evaluate, {x, 0, 20}, Filling → Axis]
```



Функция распределения:

$$F_{Gamma(k,\lambda)}(t) = \int_0^t e^{itx}\,\frac{\lambda^m\,x^{m-1}}{(m-1)!\,e^{-\lambda x}}\,dx = \frac{t^m\lambda^m(\Gamma(m)-\Gamma(m-t\lambda))(-t\lambda\ln{(e)})^{-m}}{(-1+m)!}$$

```
Plot[Table[CDF[GammaDistribution[2, α], x], {α, {2, 4, 6}}] // Evaluate, {x, 0, 20}, Filling → Axis]
```
|гра··· |табл··· |ф··· |гамма-распределение |вычислить |заливка |ось

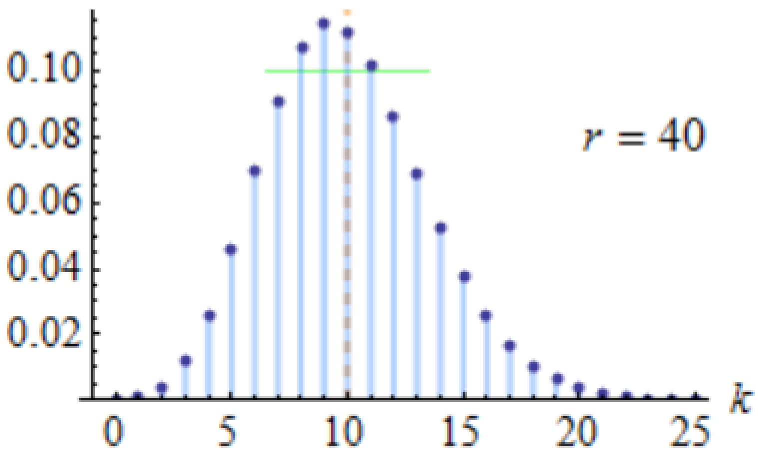


Интерпретации.

Типичная. ---

Известные соотношения.

Фактические является аналогом дискретного отрицательного биномиального распределения.



Нетипичная.

Гамма распределение широко применяется для моделирования сложных потоков событий, сумм временных интервалов между событиями, в экономике, теории массового обслуживания, в логистике, описывает продолжительность жизни в медицине.

Моделирование случайной величины.

Логарифмическое распределение.

Смоделируем случайные величины, распределенные по логарифмическому закону.

Код на Python:

```
from random import random, randint
from math import exp, log
import matplotlib.pyplot as plt

def Unif(a, b):
    return a + random() * (b-a)


def Log(p):
    V = Unif(0,1)
    if V >= p:
        return(1.0)
    U = Unif(0,1)
    y = 1.0 - exp(U / (1.0 / log(1.0 - p)))
    if V > y:
        return(1.0)
    if V <= y * y:
        return round(1.0 + log(V) / log(y))
    return(2.0)

n = 10000
file = open('Distr.txt','w')  #Код для 1 дз
for i in range(n):
    file.write(str(Log(0.8))+' ')
plt.show()
```

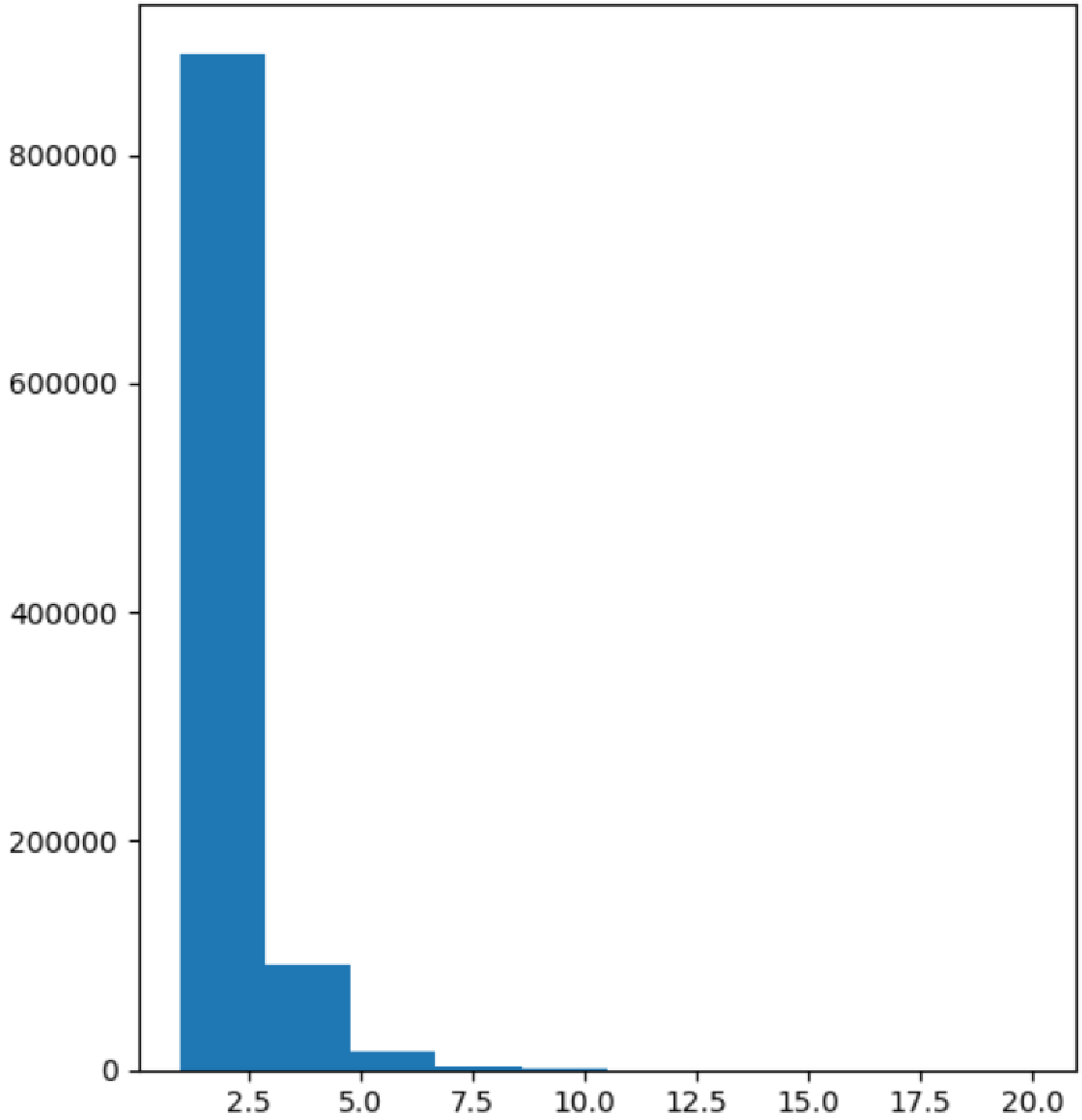
По полученной выборке построим гистограмму.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import time

file = open('LogDist.txt','r')
data1 = file.read()
data1 = ''.join(data1)
data1 = data1.split()
data1 = list(map(float,data1))

current_time = time.time()
plt.figure(figsize = (20,8))
plt.subplot(1,2,1).hist(data1)

plt.show()
print(time.time() - current_time)
```



Распределение Эрланга.

Если сложить две случайные величины с гамма-распределением с параметрами k1 и k2, то получится случайная величина с гамма-распределением и с параметром k1+k2. Еще одно свойство — если theta = k = 1, то легко проверить, что распределение будет экспоненциальным. Поэтому, если k целое — то можно просто просуммировать k случайных величин со стандартным экспоненциальным распределением.

Смоделируем случайные величины, распределенные по закону Эрланга.

Код на Python:

```python
from random import random, randint
from math import e, log
import matplotlib.pyplot as plt

def U(a, b):
    return a + random() * (b-a)

__x1 = 7.69711747013104972
__A = 3.9496598225815571993e-3
__sW = list(None for i in range(257))
__sH = list(None for i in range(256))

def setupExpTables():
    """coordinates of the implicit rectangle in base layer"""
    __sH[0] = e**(-__x1)
    __sW[0] = __A / __sH[0]
    """implicit value for the top layer"""
    __sW[256] = 0
    for i in range(1, 256):
        """such x_i that f(x_i) = y_{i-1}"""
        __sW[i] = -log(__sH[i - 1])
        __sH[i] = __sH[i - 1] + (__A / __sW[i])

def ExpZiggurat():
    itr = 0
    while itr <= 10^10:
        __sId = randint(0, 255)
        __x = U(0, __sW[__sId])
        if (__x < __sW[__sId + 1]):
            return __x
        if __sId == 0:
            return __x1 + ExpZiggurat()
        if U(__sH[__sId - 1], __sH[__sId]) < e**(-__x):
            return __x
    else:
        return None
```

```python
def Exponential(rate):
    return ExpZiggurat() / rate

setupExpTables()

def Erlang(k, T):
    x = 0
    for i in range(k):
        x += Exponential(T)
    return x
```

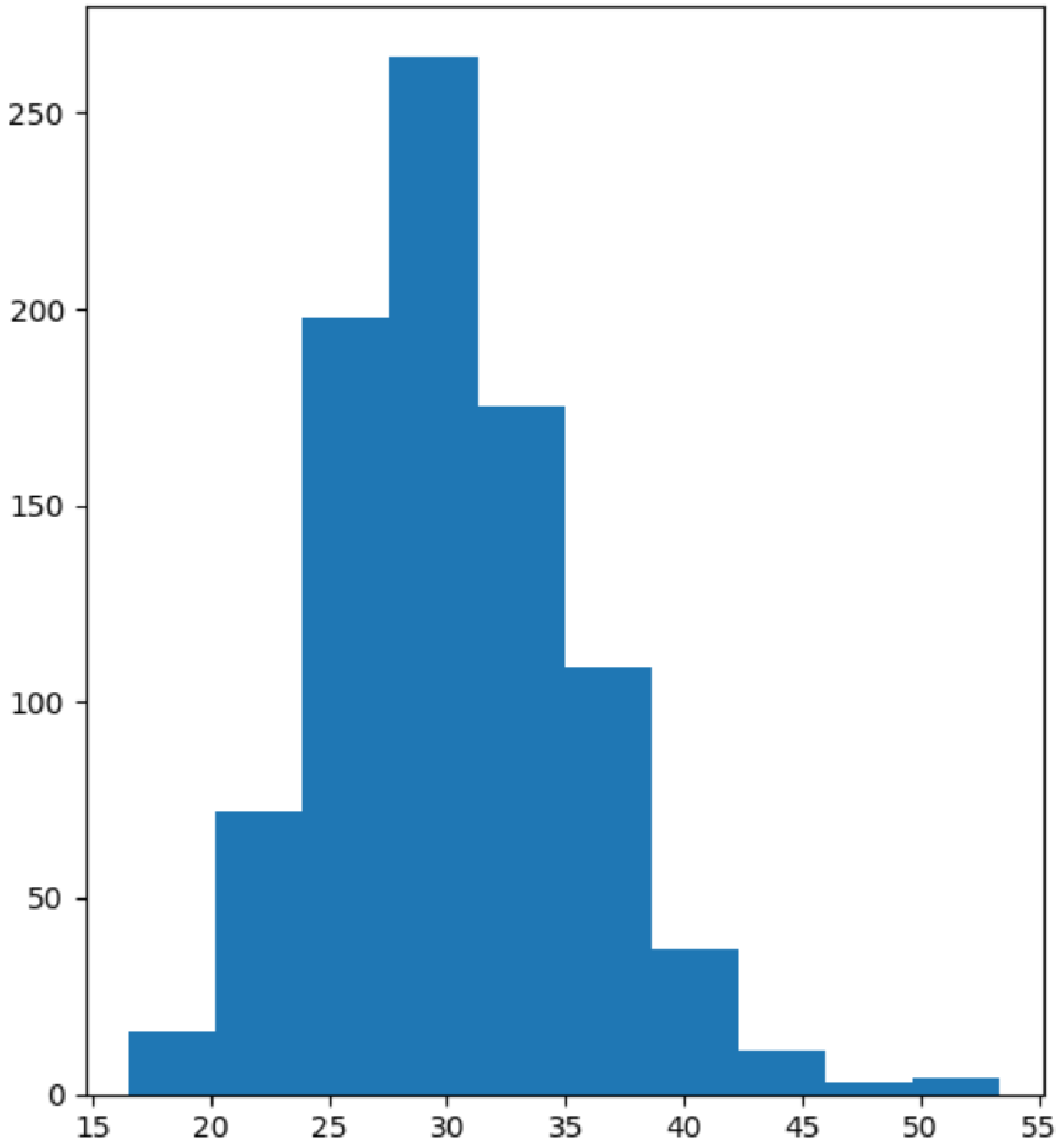
По полученной выборке построим гистограмму.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import time

file = open('ErlDistr.txt','r')
data1 = file.read()
data1 = ''.join(data1)
data1 = data1.split()
data1 = list(map(float,data1))

current_time = time.time()
plt.figure(figsize = (20,8))
plt.subplot(1,2,1).hist(data1)

plt.show()
print(time.time() - current_time)
```


250
200
150
100
50
0
15
20
25
30
35
40
45
50
55