ДЗ 1. Вероятностные распределения

Шубин Никита СКБ172

Дополнительное ДЗ в следствии неудачи с оценкой логарифмического распределения.

1 Описание основных характеристик.

1.1 Геометрическое распределение.

Определяет количество испытаний до первого успеха в серии независимых одинаковых испытаний.

Функция вероятности:

$f(x) = q^n * \ p, n \geq 0$, если n – число неудач до первого успеха. Далее, Сл. 1

$f(x) = q^{n-1} * \ p, n \geq 1$, если n – номер первого успеха. Далее, Сл. 2

Функция распределения:

$$p_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kq^k \, p \qquad \text{Сл. 1}$$

$$p_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} \, p \quad \text{Сл. 2}$$

Математическое ожидание:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \ p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq^k}{dq} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = \ p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)$$
$$= p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Дисперсия:

$$M\xi(\xi-1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} = pq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2q^k}{dq^2} = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)$$
$$= pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$$

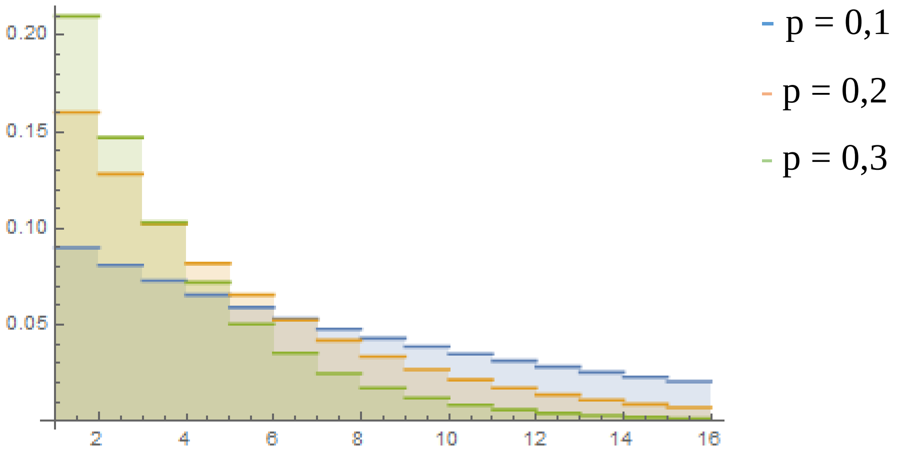
Найдем дисперсию:

$$D\xi = M\xi(\xi-1) + M\xi - (M\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q-1+p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Производящая и характеристическая функция:

$$\Phi_\xi(x) = \frac{p}{1-qe^{it}}$$

Гистограмма вероятностей геометрического распределения:



2. Примеры событий, которые могут быть описаны данными случайными величинами.

2.1 Геометрическое распределение.

Типичная интерпретация представляет класс задач связанных с серией испытаний, в которых с определенной вероятностью p может быть достигнут успех, и случайная величина ξ, равная количеству испытаний до первого успеха будет распределена геометрически.

Нетипичная интерпретация:

Два орудия залпом, но при независимой наводке, стреляют в цель до первого попадания хотя бы одним орудием. Вероятность попадания в цель первым орудием при одном выстреле равна 0,2, вторым – 0,3. В этой задаче ξ, значение, равное количеству выстрелов до первого попадания так же будет иметь геометрическое распределение.

Основные соотношения:

1) Геометрическое распределение является частным случаем отрицательного биномиального распределения при k = 1, то есть при достижении первого успеха в серии испытаний Бернулли. Geom(p) ≡ NB(1, p)

2) Если $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ независимы и $\xi_i \sim \mathrm{Geom}(\mathrm{p}), \mathrm{i} = 1, \ldots \mathrm{n}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim N\mathrm{B}(\mathrm{n}, \mathrm{p})$$

3. Моделирование случайной величины.

Моделирование геометрического распределения.

Смоделируем случайную величину имеющую геометрическое распределение через моделирование испытаний Бернулли с вероятностью успеха p до первого успеха с подсчетом числа неудач.

Алгоритм GeomB (Geometric Bernoully)
Моделирование геометрического распределения Geom(p) через испытания Бернулли

Входные данные: p.
Результат: ξ.

1. (*Инициализация*) $i \leftarrow k \leftarrow 0$;

2. (*Моделирование числа неудач*) While $i = 0$ do $\Big(\mathrm{Get}(\alpha)$; If $\alpha < p$ then $i \leftarrow 1$ else $k \leftarrow k + 1\Big)$;

3. (*Завершение*) $\xi \leftarrow k$; STOP.

Случайная величина с геометрическим распределением с параметром p — это случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром -ln(1 — p), округленная вниз до ближайшего целого.

Пускай W — случайная величина, распределенная экспоненциально с параметром -ln(1 — p). Тогда:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lfloor W \rfloor = k) &= \mathbb{P}(W \geq k) \cdot \mathbb{P}(W < k+1 | W \geq k) \\
&= \mathbb{P}(W \geq k) \cdot (1 - \mathbb{P}(W \geq k+1 | W \geq k)) \\
&= \mathbb{P}(W \geq k) \cdot (1 - \mathbb{P}(W \geq 1)) \\
&= e^{-\lambda k} \cdot (1 - e^{-\lambda}) \\
&= e^{\ln(1-p)k} \cdot (1 - e^{\ln(1-p)}) \\
&= (1-p)^k \cdot p
\end{aligned}
$$

Код на Python:

```
from random import random, randint
from math import e, log, exp
import matplotlib.pyplot as plt
def U(a, b):
    return a + random() * (b-a)

__x1 = 7.69711747013104972
__A = 3.9496598225815571993e-3
__sW = list(None for i in range(257))
__sH = list(None for i in range(256))

def setupExpTables():
    """coordinates of the implicit rectangle in base layer"""
    __sH[0] = e**(-__x1)
    __sW[0] = __A / __sH[0]
    """implicit value for the top layer"""
    __sW[256] = 0
    for i in range(1, 256):
        """such x_i that f(x_i) = y_{i-1}"""
        __sW[i] = -log(__sH[i - 1])
        __sH[i] = __sH[i - 1] + (__A / __sW[i])

def ExpZiggurat():
    itr = 0
    while itr <= 10^10:
        __sId = randint(0, 255)
        __x = U(0, __sW[__sId])
        if (__x < __sW[__sId + 1]):
            return __x
        if __sId == 0:
            return __x1 + ExpZiggurat()
        if U(__sH[__sId - 1], __sH[__sId]) < e**(-__x):
            return __x
    else:
        return None


def Exponential(rate):
    return ExpZiggurat() / rate


def Geometric(p):
    rate = -log(1 - p)
    return round(Exponential(rate))
```

Гистограмма распределения:

```
setupExpTables()
"""file = open("Geom.txt", "w")
for i in range(10000):
    file.write(str(Geometric(0.3)) + " ")
file.close()"""
file = open("Geom.txt", "r")
data1 = file.read()
data1 = "".join(data1)
data1 = list(map(float, data1.split()))

plt.figure(figsize = (20, 8))
plt.subplot(1,2,1).hist(data1, bins = 50)
plt.show()
```

Результат выполнения: