VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ OKRAJOVÉ ÚLOHY METODOU KONĚČNÝCH DIFERENCÍ

SEMESTRÁLNY PROJEKT
SEMESTRAL PROJECT

AUTOR PRÁCE Bc. JURAJ REPČÍK
AUTHOR

Brno 2017

OBSAH

ÚVOD

Zadaním úlohy bolo vytvoriť program na počítanie diferenciálnych rovníc (okrajovej úlohy) metódou konečných diferencii. Program dokáže vyhodnotiť výsledok ako vektor hodnôt $\mathbf{x}$ a vektor funkčných hondôt $\mathbf{y(x)}$. Rovnica musí byť druhého rádu a okrajové podmienky sú zadané v všobecnej forme, tzv. Sturmove.

Text je rozdelený do štyroch hlavných kapitol. Prvá sa venuje všeobecnému popisu metódy konečných diferencii, druhá prezentuje program a predstavuje návod na jeho používanie. Tretia kapitola analyzuje vybrané časti zdrojového kódu. V štvrtej kapitole je ukázaný celý zdrojový kód.

1 METÓDA KONEČNÝCH DIFERENCII

V okrajovej úlohe je výsledkom vypočítať priebeh funcie $y(x)$, keď je zadaná diferenciálna rovnica g druhého rádu napríklad v tvare:

$$y'' = g(x, y, y'). \tag{1.1}$$

V tomto projekte je spracované riešenie diferenciálnej rovnice v upravenom tvare:

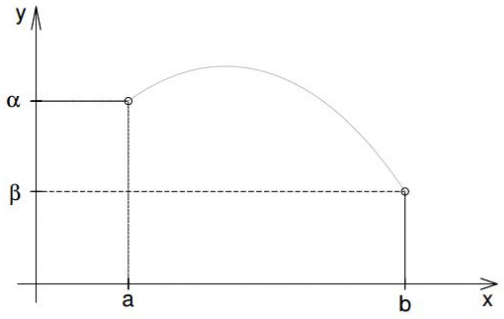
$$b(x) * y'' + c(x) * y' + d(x) * y = f(x). \tag{1.2}$$

S úlohou musia byť zadané okrajové podmienky, ktoré definujú funkčnú hodnotu alebo deriváciu alebo ich lineárnu kombináciu na začiatku a konci intervalu riešenia $< a, b >$.

Ak sú zadané funkčné hodnoty, podmienky sa nazývajú *Dirichletove* [1] a sú zadané v nasledujúcom tvare:

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta. \tag{1.3}$$

Názorná ukážka takéhoto zadania je na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Okrajová úloha, dirichletove podmienky [2]

Okrajové podmienky môžu byť zadané aj vo forme derivácii funkcie y:

$$y'(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta, \tag{1.4}$$

vtedy sa nazývaju *Neumannove*. Všeobecne sa dajú okrajové podmienky definovať ako *Sturmove* nasledujúcim zápisom:

$$\alpha_1 * y(a) + \alpha_2 * y'(a) = \gamma_1, \qquad \beta_1 * y(b) + \beta_2 * y'(b) = \gamma_2, \tag{1.5}$$

kde aspoň jeden koeficient α a aspoň jeden koeficient β musí byť nenulový.

Je zrejmé, že *Sturmove* podmienky zahrňujú aj špeciálne prípady, rovnice 1.3 a 1.4, takže sú všeobecne použiteľné. V programe sa teda budú zadávať koeficienty α_1, α_2, γ_1, β_1, β_2, γ_2 spolu s rozsahom riešenia a a b. Diferenciálna rovnica bude zadaná v tvare 1.2.

Metóda konečných diferencii spočíva v nahradení derivovaných členov diferenciami. Existuje mnoho spôsobov ako sa dá aproximovať diferenciál. V texte [3] sa na strane 59 nachádza prehľadná tabuľka pre derivácie prvého a druhého rádu.

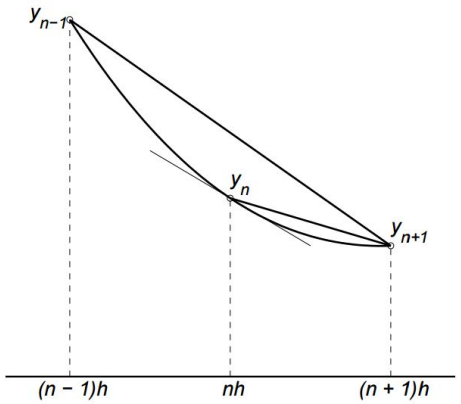
V tomto projekte sú použité nasledovné aproximácie [4]:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 * h} - \frac{h^2}{6} * y'''(\xi) - \cdots \qquad \xi \in (a, b), \tag{1.6}$$

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{2} * y''(\xi) - \cdots \qquad \xi \in (a, b), \tag{1.7}$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} * y^{(4)}(\xi) - \cdots \qquad \xi \in (a, b), \tag{1.8}$$

kde h je krok medzi dvoma bodmi riešenia a zápis y_i je ekvivalentný zápisu $y(x_i)$. Pri výpočte príkladu v programe sa zanedbáva zbytková chybová funkcia, pretože sa so zmenšujúcim krokom h blíži rýchlo nule. Chyba sa teda nebude akumulovať pre $h < 1$. Pre aproximáciu prvého rádu derivácie sa primárne používa rovnica 1.6. Ak sa vyhodnotí že príklad nespĺňa podmienky kovergencie, vyhodnotí sa aj pre aproximáciu 1.7 a ak tá splní podmienky, je použitá na výpočet. Aproximácia 1.6 je graficky znázornená na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Náhrada derivácie diferenciou [4]

Ak nahradíme derivované členy aproximáciami v rovnici 1.2, dostaneme po úprave tento výsledok:

$$b(x_i) * (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + c(x_i) * h * \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} + d(x_i) * y_i + e(x_i) = f(x_i) * h^2. \tag{1.9}$$

Sieť sa vytvorí z intervalu $< a, b >$ a počtu krokov n nasledovne:

$$x_i = a + i * h, \quad i = 0, 1, .., n, \quad h = \frac{b-a}{n}. \tag{1.10}$$

Zo zápisu vyplýva že $x_0 = a$, $x_n = b$.

Na zapísanie rovnice 1.9 do maticeového tvaru pre všetky i, je potrebné zistiť koeficienty k pri y_{i-1}, y_i, y_{i+1}. Prepísaná rovnica vyzerá nasledovne:

$$k_{-1}(x_i, h) * y_{i-1} + k_0(x_i, h) * y_i + k_1(x_i, h) * y_{i+1} = f(x_i) * h^2. \tag{1.11}$$

Pri použití aproximácie 1.6 a 1.8 budú funkcie k_{-1}, k_0, k_1 vyzerať nasledovne:

$$k_{-1} = b(x_i) - c(x_i) * \frac{h}{2} \tag{1.12}$$

$$k_0 = -2b(x_i) + d(x_i) \tag{1.13}$$

$$k_1 = b(x_i) + c(x_i) * \frac{h}{2} \tag{1.14}$$

Z rovníc 1.12, 1.13 a 1.14 sa zostaví matica A (podľa 1.11 a 1.18). Je vidieť že výraz k_0 bude na hlavnej diagonále a výrazy k_1 a k_{-1} na dvoch vedľajších diagonálach. Pre konvergenciu metódy konečných diferencii je potrebné aby matica A bola neostre alebo ostre diagonálne dominantná. Porovnaním funkcii teda získavame podmienky pre zaručenú konvergenciu metódy:

$$|k_0| \geq |k_{-1} + k_1| \tag{1.15}$$

$$| - 2b(x_i) + d(x_i)| \geq |2b(x_i)| \tag{1.16}$$

Ak by bola použitá iná aproximácia derivácie prvého rádu, teda 1.7, vyzerala by podmienka konvergencie takto:

$$| - 2b(x_i) - c(x_i)h + d(x_i)| \geq |2b(x_i) + c(x_i)h| \tag{1.17}$$

Konvergencia metódy teda závisí na koeficientoch v zadanej rovnici (v tvare 1.2). Závisí na znamienkach funkcii v danom intervale a tiež na ich funkčných hodnotách.

Rovnaké tri funkcie koeficientov sú použité v každom riadku matice A, s dosadenými hodnotami ktoré zodpovedajú bodu v sieti.

$$A = \begin{bmatrix} k_{-1}(x_0, h) & k_0(x_0, h) & k_1(x_0, h) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{-1}(x_1, h) & k_0(x_1, h) & k_1(x_1, h) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{-1}(x_{n-1}, h) & k_0(x_{n-1}, h) & k_1(x_{n-1}, h) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k_{-1}(x_n, h) & k_0(x_n, h) & k_1(x_n, h) \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$$A * \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) * h^2 \\ f(x_1) * h^2 \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) * h^2 \\ f(x_n) * h^2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

Ak sa jedná o príklad so zadanými Dirichletovými podmienkami (rovnica 1.3), v sústava sa zjednoduší, lebo riešenie pre $y(x_0) = \alpha$ a $y(x_n) = \beta$ je známe. Po preformulovaní bude sýstava vyzerať takto (pri podmienkach z rovnice 1.3):

$$A_d = \begin{bmatrix} k_0(x_0,h) & k_1(x_0,h) & 0 & \dots & 0 \\ k_{-1}(x_1,h) & k_0(x_1,h) & k_1(x_1,h) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{-1}(x_{n-1},h) & k_0(x_{n-1},h) & k_1(x_{n-1},h) \\ 0 & \dots & 0 & k_{-1}(x_n,h) & k_0(x_n,h) \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

$$A_d * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) * h^2 - k\_1(x_0,h) * \alpha \\ f(x_2) * h^2 \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) * h^2 \\ f(x_{n-1}) * h^2 - k_1(x_n,h) * \beta \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Ak je príklad zadaný so všeobecnými Strumovymi podmienkami (rovnica 1.5), alebo Neumannovými, do sústavy rovníc sa pripíše jedna rovnica naviac pre každú okrajovú podmienku. Rovnica pre začiatočnú podmienku je [1]:

$$\alpha_1 * y_0 + \frac{\alpha_2}{2h} * (-3 * y_0 + 4 * y_1 - y_2) = \gamma_1, \tag{1.22}$$

upravená na:

$$(\alpha_1 - \frac{3\alpha_2}{2h}) * y_0 + \frac{4\alpha_2}{2h} * y_1 - \frac{\alpha_2}{2h} * y_2 = \gamma_1, \tag{1.23}$$

Pre koncovú podmienku platí podobne [1]:

$$\beta_1 * y_n + \frac{\beta_2}{2h} * (3 * y_n - 4 * y_{n-1} + y_{n-2}) = \gamma_2, \tag{1.24}$$

upravená na:

$$(\beta_1 + \frac{3\beta_2}{2h}) * y_n - \frac{4\beta_2}{2h} * y_{n-1} + \frac{\beta_2}{2h} * y_{n-2} = \gamma_2, \tag{1.25}$$

Rovnice 1.23 a 1.25 sa pridajú do sústavy rovníc 1.19. Matica A sa potom jenoduchými riadkovými operáciami upraví na tridiagonálny tvar.

Podmienky riešiteľnosti sústavy rovníc pre metódu konečných diferencii zodpovedajú podmienkam pre riešiteľnosti danej diferenciálnej rovnice v danom intervale.

V prípade že A je diagonálne dominantná alebo neostro diagonálne dominantná, kde aspoň jedna rovnica spĺňa ostrú diagnonálnu dominantnosť, je zaručené že Jacobiho aj Gauss-Seidelova iteračná metóda na riešenie sústav lieárnych rovníc bude konvergovať pre ľubovoľný počiatok [1] a sústava bude mať jedno jednoznačné riešenie.

Iteračná metóda začne s krokom menším ako 1 a vypočíta sa druhá iterácia s polovičným krokom. Absolútne hodnoty bodov y(x) kde je známe riešenie z oboch iterácii sa odčítajú a absolútna hodnota výsledku sa považuje za presnosť výsledku metódy. Ak nie je presnosť v tomto kroku dosiahnutá, vypočíta sa ďalšia iterácia s polovičným krokom od posledne použitého kroku. Dva posledné výpočty sa potom znovu používajú na vyhodnotenie presnosti.

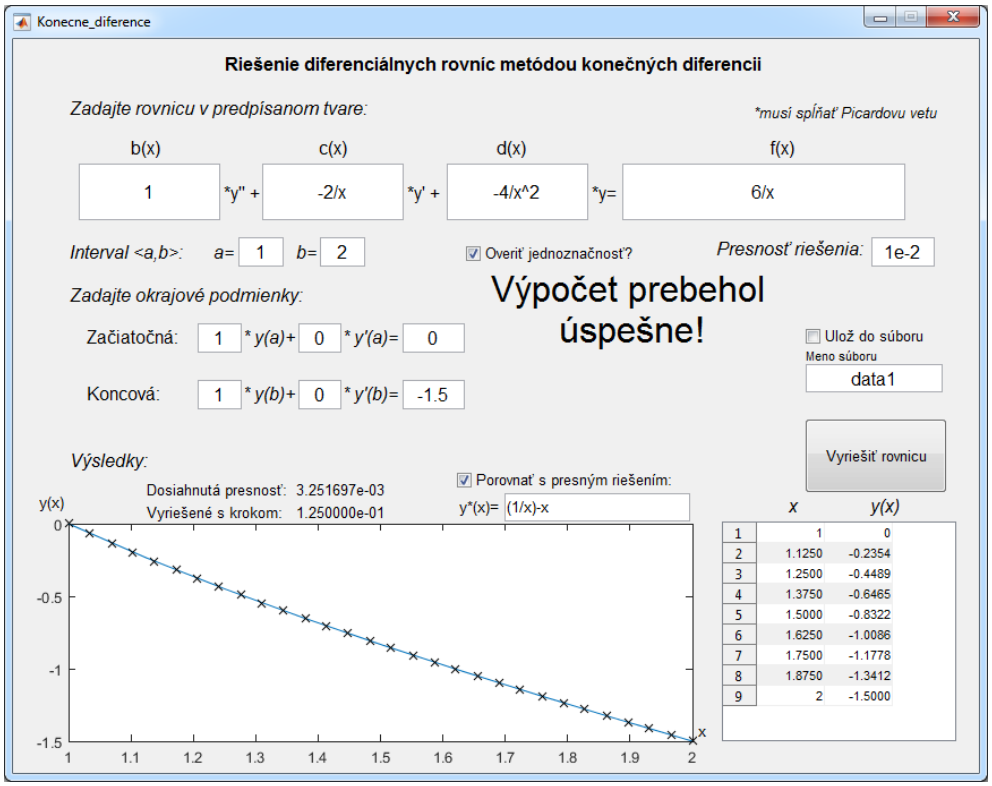
2 POUŽÍVANIE PROGRAMU

Na spustenie programu je nutné mať na počítači nainštalovaná program Matlab vo verzii 2014 alebo vyššiu s nainštalovanou súčasťou Symbolic toolbox a GUI Layout toolbox.

Archív s odovzdaným programom obsahuje súbory:

```
/ ..... Hlavný adresár, odovzdané súbory
├── GaussSeidel.m ..... Gauss-Seidelova iteračná metóda
├── kondiff_calc.m ..... Staršia verzia algoritmu pre kon. diferencie
├── kondiff_calc_v2.m ..... Algorirmus pre konečné diferencie
├── Konecne_diference.fig ..... GUI definície
├── Konecne_diference.m ..... <— hlavný spúšťací súbor, kód k obsluhe GUI
├── over_jednoznacost.m ..... Overenie riesitelnosti matice A
├── over_podmienky.m ..... overenie podmienok konvergencie metódy
├── save_data.m ..... kód na uloženie dát do súboru
└── xx_porovnanie_chyb.m .... skript na zobrazenie chyby posledného výpočtu
```

Program sa spustí pomocou **Konecne_diference.m**. Následne sa objaví grafické prostredie ako na obrázku 2.1 (na obrázku je stav po vypočítaní príkladu). Toto prostredie bude popísané v nasledujúcom texte.



Obr. 2.1: Grafické prostredie programu

Program nemá implementované spoľahlivé overenie jednoznačnosti riešenia, takže

pred počítaním príkladu v tomto programe sa doporučuje si overiť jednoznačnosť riešenia ručne. Inak povedané, príklad s jeho okrajovými podmienkami musí spĺňať Picardovu vetu [7].

Najprv sa v programe vyplnia všetky potrebné vstupy a parametre riešenia. Pri zadávaní funkcii je nutné používať symbol "*****" pri definovaní násobenia. Zápis "2x" by spôsobil chybu, preto je nutné napísať "2*x". Tiež pri zadávaní desatinného čísla sa používa desatinná bodka (tečka) "**.**". Zlomky sa definujú znamienkom lomeno "/". Prirodzený logaritmus je možné napísať ako "**exp(1)**". Podobne fungujé aj určité trigonometrické funkcie.

Rovnica sa zadáva do prostredia v tvare podľa zápisu 1.2. Do políčok sa uvedú koeficienty pri deriváciách funkcie y, pri funkcii y, absolútny člen a funkcia na pravej strane rovnice. Celé funkcie nie je potrebné dávať do zátvoriek.

Číselné hodnoty sú akceptované v desatinnom alebo "exponenciálnom" formáte, napríklad "1.5" a "1e5". Interval riešenia sa zadáva do číselných polí premenných a a b. Číselné pole "presnosť riešenia" udáva najväčší absolútny rozdiel v uzlových bodoch pri zjemňovaní siete na zastavenie výpočtu. Okrajové podmienky je možné zadať vo všeobecnom tvare ako Sturmove. Polia sú tiež číselného charakteru.

Zaškrtávacie políčko "Overiť jednoznačnosť?" slúži na spustenie funkcie *over_jednoznacnost* ktorá vyhodnotí maticu A. Metóda na vyhodnotenie jednoznačnosti nezaručuje istotu že príklad bude jednoznačne riešiteľný aj keď tak vyhodnotí, pretože sa tento fakt overuje numericky, iba v konečnom počte bodov v rozsahu riešenia. Ak funkcia vyhodnotí že príklad nespĺňa dané požiadavky, výpočet neprebehne.

Zaškrtávacie políčko "Ulož do súboru" slúži na uloženie výsledku do súboru *.csv s definovaným menom, ktoré sa vpíše do poľa "Meno súboru".

Posledný prvok na nastavenie programu je porovnanie s presným riešením. Ak je známe presné riešenie diferenciálnej rovnice, užívateľ si môže overiť fungovanie programu napísaním tejto funkcie. Ak je zašktrnuté políčko, tak sa po vypočítaní vykreslí okrem vypočítaného priebehu tiež 30 bodov presného riešenia na grafické porovnanie výsledkov. Presné riešenie sa v programe nikde nevyužíva, iba sa vykresľuje do grafu na názorné grafické porovnanie (v grafe čierne body zobrazené vybolom +).

Výsledné body z iteračného procesu sú vykreslené na grafe lineárne interpolovanými modrými úsečkami. Výsledok je tiež uvedený v tabuľke napravo od grafu.

Keď sú nastavené všetky parametre, kliknutím tlačidla **Vyriešiť rovnicu** sa zaháji výpočet. Veľkým písmom sa zobrazí, či výpočet prebieha a po ukončení sa ukáže správa o úspešnosti alebo neúspešnosti výpočtu.

Po vypočítaní úlohy sa tiež nad grafom funkcie y(x) zobrazí výsledná dosiahnutá presnosť a krok s ktorým je výsldok vypočítaný. Ak užívateľ chce výpočet s nemším

krokom, odporúča sa vypočitať rovnaký príklad s menším číslom presnosti (väčšia presnosť).

2.1 Vzorové príklady

Táto kapitola sa venuje overeniu funkčnosti na príkladoch, ktoré boli vytvorené alebo prevzaté.

2.1.1 Príklad 1

Na účel odtestovania programu bol vytvorený nasledovný príklad:

$$\frac{1}{x}y'' + 4y' - 5y = 5e^{5x}(\frac{5}{x} + 3) + 25e^{5(3-x)}(\frac{1}{x} - 1). \tag{2.1}$$

Dirichletove okrajové podmienky sú:

$$y(1) = y(2) = 22174.87895 \tag{2.2}$$

Presné riešenie tohto príkladu je:

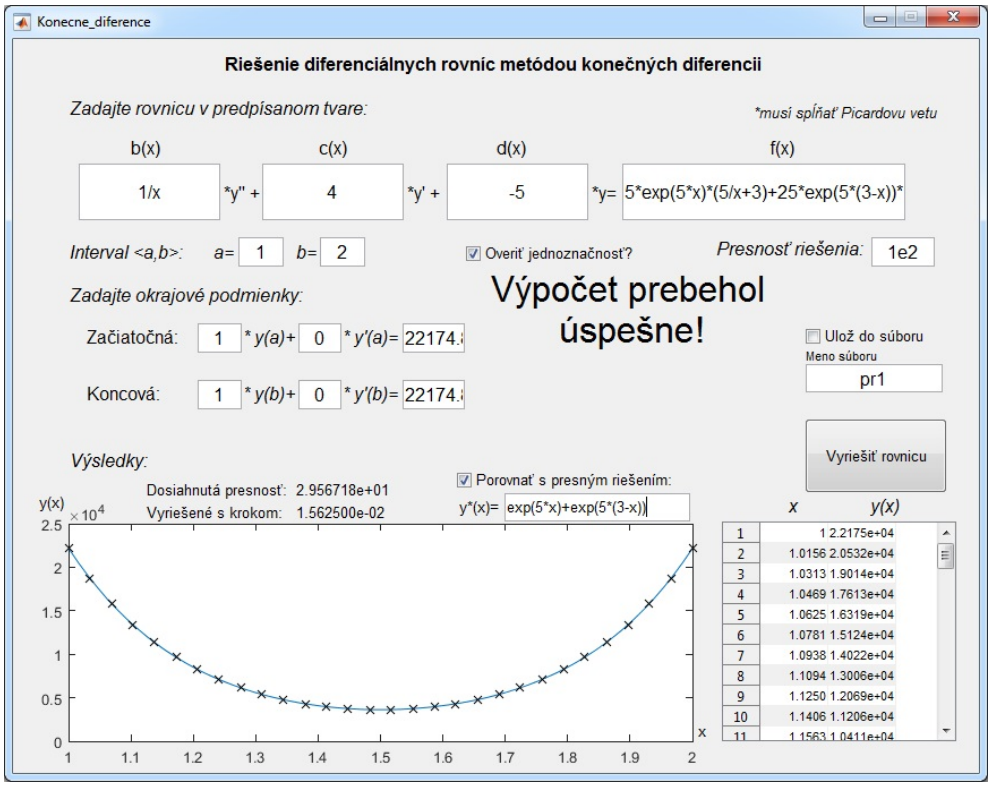
$$y^*(x) = e^{5x} + e^{5(3-x)}. \tag{2.3}$$

Program úspešne vypočítal tento príklad. Naprv overil jednoznačnosť a potom bolo potrebné 5 iterácii na dosiahnutie presnosti 10^2. Program vypisuje na pozadí v Command Window v prostredí Matlab informácie o priebehu, ktoré v tomto prípade ukázali:

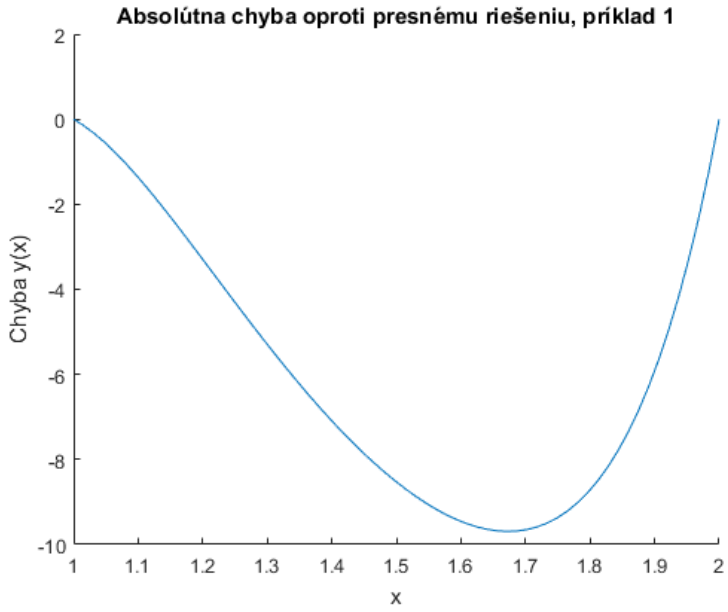
Výpis 2.1: Výpis pri počítaní príkladu 1

```
Diagonalne dominantna
Iteracia kon.diff: 1,velkost matice:     3
Iteracia kon.diff: 2,velkost matice:     7
Iteracia kon.diff: 3,velkost matice:    15
Iteracia kon.diff: 4,velkost matice:    31
Iteracia kon.diff: 5,velkost matice:    63
```

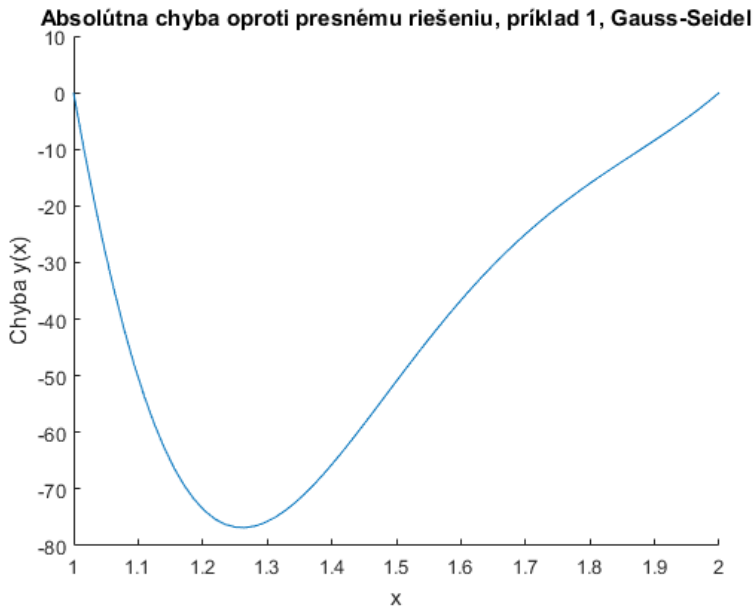
Prostredie programu po vypočítaní je možné vidieť na obrázku 2.2. Ako je spomenuté v kapitole 3, na výpočet sústavy bolo experimentované s dvoma metódami. Chyby pri každej metóde zobrazujú grafy na obr.2.3 a obr.2.4. Na dosiahnutie požadovanej presnosti sa musela vypočítať sústava s 63 rovnicami. Celý výpočet zabral menej ako 5 sekúnd.



Obr. 2.2: Príklad 1, výpočet, metoda 2



Obr. 2.3: Príklad 1, zobrazenie chyby, sústava riešená metódou 2 [9]



Obr. 2.4: Príklad 1, zobrazenie chyby, sústava riešená metódou 1, Gauss-Seidelova iteračná metóda

2.1.2 Príklad 2

V príklade 2 je použitá rovnaká rovnica (rovnica 2.1), avšak okrajové podmienky sú definované inak. Začiatočná podmienka je Sturmova a koncová je ponechaná z prechádzajúceho príkladu.

Príklad bol počítaný s rovnakými nastaveniami ako príklad 1 (obr. 2.2) až na zmenenú okrajovú podmienku.

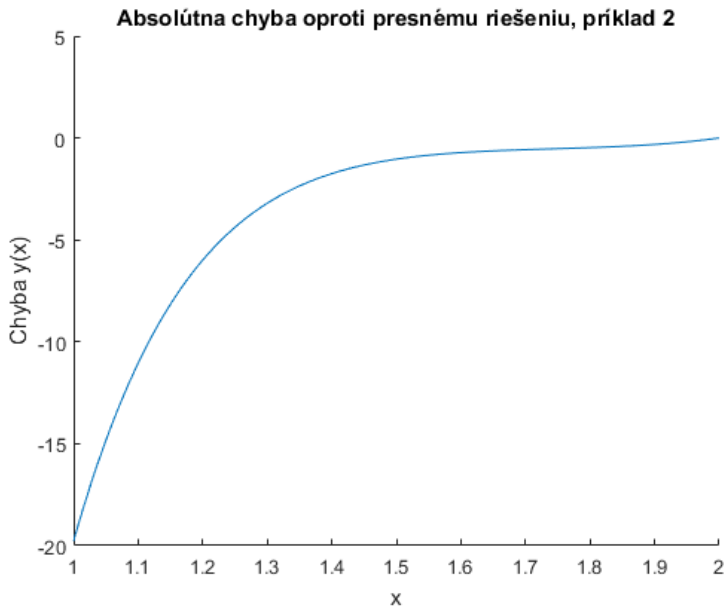
$$4.95y(1) + y'(1) = 375.3876433, \qquad y(2) = 22174.87895 \tag{2.4}$$

Na obrázku 2.5 je zobrazený graf chyby. Je vidieť že porovnaním s obrázkom 2.3 je na začiatku intervalu väčšia, z dôvodu inak definovanej okrajovej podmienky. Chyba stále spadá do zadanej presnosti. Väčšia odchýlka v chyba môže byť spôsobená aj aproximáciou zadania okrajovej podmienky (bola vypočítaná s presného rešenia a výsledok zadaný s dostatočnou presnosťou (r.2.4)). V tomto príklade bolo už potrebné iterovať 7 krát a výsledný počet rovníc bol 257.

2.1.3 Príklad 3

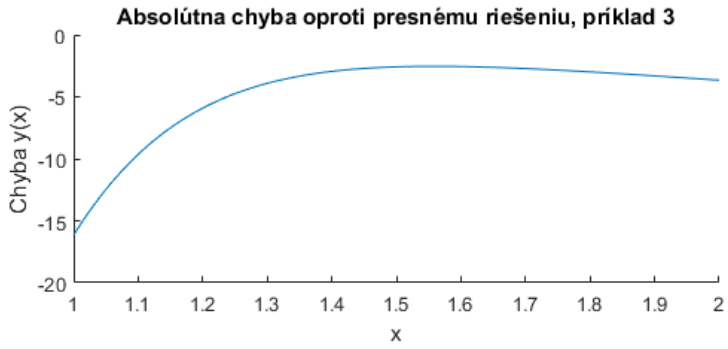
Príkladom 3 bude overený program aj pre Neumannou okrajovú podmienku. Zase použijeme rovnakú rovnicu 2.1. Okrajové podmienky budú tentoraz nasledovné:

$$4.95y(1) + y'(1) = 375.3876433, \qquad 0.1y'(2) = 10939.02632 \tag{2.5}$$



Obr. 2.5: Príklad 2, zobrazenie chyby, sústava riešená metódou 2 [9]

Program vypočítal riešenie pri ôsmej iterácii s počtom rovníc 513. Z dôvodu väčšieho počtu ronvíc je aj riešenie diskterizované na osi x s menším krokom a to približne 0,002. Chyba výpočtu (obr.2.6) bola podobná ako v prechádzajúcom príklade.



Obr. 2.6: Príklad 3, zobrazenie chyby, sústava riešená metódou 2 [9]

2.1.4 Príklad 4

Príklad 4 je prevztý z literatúry, konkrétne z [11]. Táto rovnica sa používa na počítanie prenosu energie alebo iných fyzikálnych veličín procesom vednia a difúzie. Pre 1D prípad je definovaná ako:

$$\epsilon y'' - y' = -1 \tag{2.6}$$

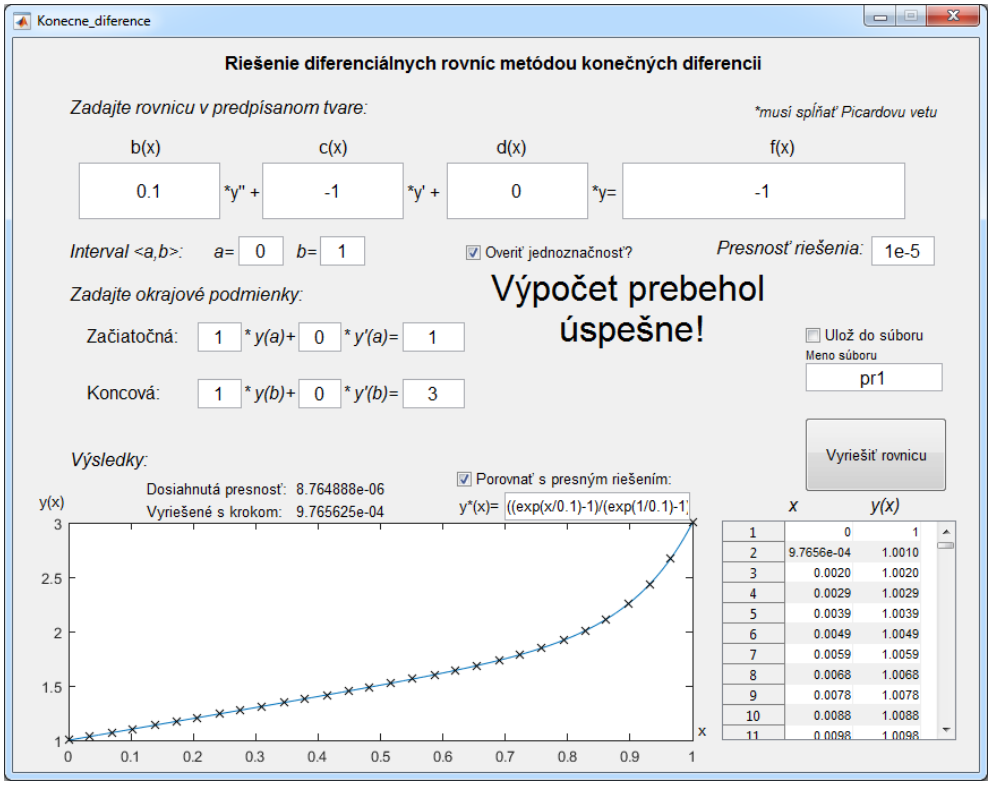
Pre tento príklad budú použité nasledovné okrajové podmienky:

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 3 \tag{2.7}$$

Presné riešenie tejto rovnice je:

$$y(x) = 1 + x + \left(\frac{e^{x/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1}\right) \tag{2.8}$$

Na výpočet bude použitá konštanta $\epsilon = 0,1$. Presnosť je nastavená na 10^{-5}. Obrázok 2.7 zobrazuje grafické prostredie programu po vypočítaní príkladu. Výpočet trval asi 5 sekúnd. Z výpisu 2.2 je vidieť že bolo počítaných až 1023 rovníc. Výsledný krok je zobrazený nad grafom: $h = 9,77 * 10^{-4}$. Chyba výpočtu (rozdiel s presného riešenia a riešenia metódy konečných diferencii) je zobrazený na obr.2.8.

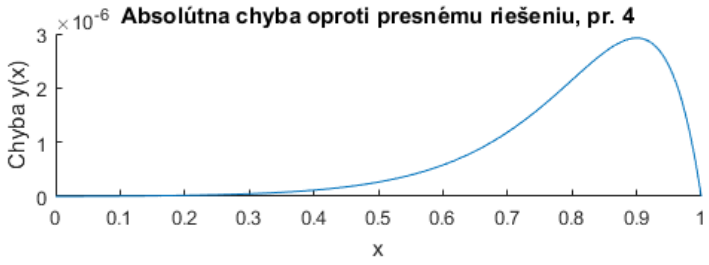


Obr. 2.7: Príklad 4, výpočet, metóda 2

Výpis 2.2: Výpis pri počítaní príkladu 4

```
Neostre diagonalne dominantna
Mininalne jedna ronica ostra, OK
Iteracia kon.diff: 1,velkost matice:      3
Iteracia kon.diff: 2,velkost matice:      7
Iteracia kon.diff: 3,velkost matice:     15
```

```
Iteracia kon.diff: 4,velkost matice:    31
Iteracia kon.diff: 5,velkost matice:    63
Iteracia kon.diff: 6,velkost matice:   127
Iteracia kon.diff: 7,velkost matice:   255
Iteracia kon.diff: 8,velkost matice:   511
Iteracia kon.diff: 9,velkost matice:  1023
```



Obr. 2.8: Príklad 4, zobrazenie chyby, sústava riešená metódou 2 [9]

Vo výpise 2.3 je vidieť ako vyzerá výstupný dátový súbor programu.

Výpis 2.3: Výstrižok z uložených dát príkladu 4, pr4.csv

```
x;y
0.0000000e+00;1.0000000e+00
9.7656250e-04;1.0009770e+00
1.9531250e-03;1.0019540e+00
...
9.9804688e-01;2.9787041e+00
9.9902344e-01;2.9893048e+00
1.0000000e+00;3.0000000e+00
```

2.1.5 Príklad 5

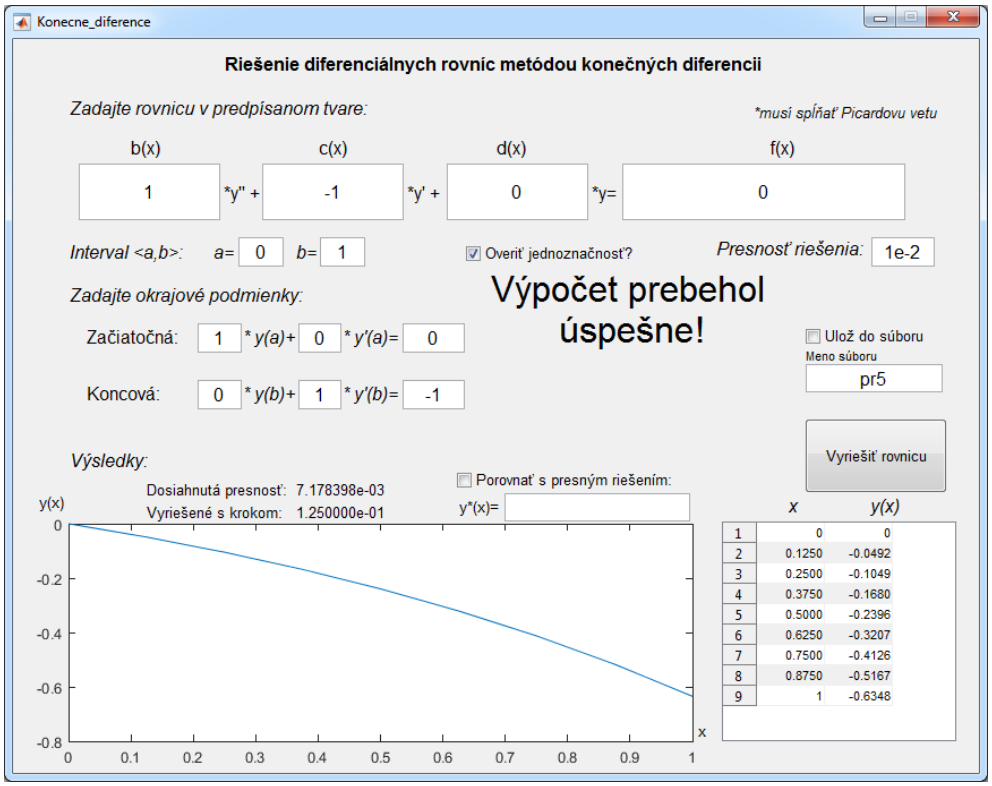
Príklad 5 je prevzatý z materiálov Stanford Univerzity [10]. Príklad je zadaný ako:

$$y'' - y' = 0, \tag{2.9}$$

s okrajovými podmienkami(Dirichletova a Neumannova):

$$y(0) = 0, \qquad y'(1) = -1 \tag{2.10}$$

Tento príklad je riešený s presnosťou iba 10^{-2}. Už po dvoch iteráciách sa dosiahla presnosť $7,17 * 10^{-3}$, takže výpopčet sa zastavil s 8 rovnicami ako je vidieť na obr.2.9. Matica A bola správne vyhodnotená ako neostre diagonálne dominantná s minimálne jednou rovnicou splňujúcou vyššie uvedenú podmienku.



Obr. 2.9: Príklad 5, výpočet, metoda 2

3 ANALÝZA ZDROJOVÉHO KÓDU

V tejto kapitole budú rozobraté niektoré časti zdrojového kódu, ktoré si žiadajú dodatočné vysletlenie. Väčšina kódu je komentovaná v nasledujúcej kapitole. V tejto kapitole tiež uvediem hodnoty niektoých premenných pre príklad 1.

3.1 Okrajové podmienky, 2 typy

Pre okrajové podmienky v kóde existujú dva prípady. Kód bol vytvorený iba pre Dirichletove podmienky a potom upravený aby podporoval aj všeobecné Sturmove. Preto sú použité premenné a_dirichlet a b_dirichlet, ktoré rozlišujú tieto dva prípady. Ak je podmienka dirichletova, používa sa funkčná hodnota v premennej ya alebo yb. Inak sa používajú premenné s názvami alfa, beta a pre pravé strany $a\_RHS = \gamma_1$ a $b\_RHS = \gamma_2$. Zápis Sturmovych podmienok zodpovedá rovnici 1.5.

Výpis 3.1: Kód určujúci podmienky, vo funkcii kondiff_calc_v2

```
a = podm_a(1);
a_alfa1 = podm_a(2);
a_alfa2 = podm_a(3);
if (a_alfa2 == 0)
    if (a_alfa1 == 0)
        msg='Zle zadané okraj. podm.';
        xres = 0;
        yres = 0;
        presnost_out = Inf;
        krok_out = Inf;
        return;
    end
    %podmienka nie je derivacia,
    %podmienka je dirichletova
    a_dirichlet = 1;
    ya=podm_a(4)/a_alfa1;
else
    a_dirichlet = 0;
    a_RHS = podm_a(4);
end
```

3.2 Koeficienty k

Koeficienty funkcie sú vyjadrené pomocou funkcie coeffs a uložené do premennej c. Koeficienty zodpovedajú koeficientom k_{-1}, k_0, k_1 z rovnice 1.11.

Výpis 3.2: Koeficienty (pre príklad 1), vo funkcii kondiff_calc_v2

```
[c ref] = coeffs(difeq,[y_ip y_i y_in]);
----------------------výstup--------------------------
>>c=  [ 2*h + 1/x, - 5*h^2 - 2/x, 1/x - 2*h, 2*x]
>>ref=[      y_ip,           y_i,      y_in,    1]
```

3.3 Funkcia over jednoznačnosť

Jednoznačnosť riešenia úlohy sa overuje iba na 100 bodoch v rozsahu a do b, čo nie je ideálne riešenie, kvôli možným hodnotám medzi bodami tejto siete ktoré nemusia spĺňať podmienky neostrej dominantnosti. Preto je odporúčané si overiť jednoznačnosť úlohy pred použitím programu.

Výpis 3.3: Overovacia stiet, vo funkcii over_jednoznacost

```
x_span = linspace(a,b,n);
%krok eval
c_notH = subs(koeficienty,h,(b-a)/(n+1));
diag_max = max(abs(eval(subs(c_notH(2),x_span))));
sum_tri_max = max(abs(eval(subs(c_notH(1),x_span)+abs(subs(
    c_notH(3),x_span)))));
```

3.4 Metódy riešenia sústavy rovníc

Pri tvorbe programu som porovnával dve metódy riešenia sústavy rovníc. Prvá (metóda 1) bola Gauss-Seidelova. V druhej metóde (metóda 2) je použitá funkcia mldivide. V dokumentácii k tejto funkcii [9] je uvedené že sa pre tridiagonálne matice používa solver, ktorý je optimalizovaný pre tento problém. Funkcia mldivide tiež funguje lepšie a rýchlejšie ako výpočet pomocou inverznaj matice ($Y = A^{-1} * F$), pretože inverzá matica je tu tvorená LU rozkladom (alebo LUL pre riedke matice) [8]. Pri metóde 2 je výpočet nastavený na 32 platných čísel a sleduje sa, či je tento predpoklad splnený pomocou čítania posledného varovania.

Výpis 3.4: Metoda 2, vo funkcii kondiff_calc_v2

```
%metoda 2
Y1 = eval(vpa(mldivide(A,F'),32));
```

Metóda 1 používa Gauss-Seidelovu iteračnú metódu. Nastavenie presnosti výpočtu musí byť rádovo rozdielne (väčšia presnosť ako požadovaný výsledok) aby sa dala správne vydhonotiť presnosť algoritmu konečných diferencii. Experimentálne bolo zistené, že deliteľ 200 je optinálny pre nastavenie presnosti. Táto metóda vykazovala oveľa horšie výsledky (niekedy aj >100x dlhší čas výpočtu) pre sústavy s počtom rovníc viac ako 64. Vo všeobecnosti bola metóda 1 vždy pomalšia ako metóda 2 (aj pre malý počet rovníc). Z tohto dôvodu bolo rozhodnuté ponechať vo finálnej verzii metódu 2 pre výpočet sústavy lineárnych rovníc.

Príklad 1 v sekcii 2.1.1 bol riešený s oboma metódami.

Výpis 3.5: Metoda 2, vo funkcii kondiff_calc_v2

```
%metoda 1
max_it_SG = 3000;
[Y1, successSG] = GaussSeidel(A,F',presnost/200,...
  max_it_SG,start_ya,start_yb);
```

3.5 Funkcia over podmienky

Táto funkcia má implementované podmienky konvergencie metódy na základe vstupných koeficientov. Sú tu naprogramované podmienky z rovníc 1.16 a 1.17. Vo funkcii je vuyžitá inverzia podmienky a tesuje sa či nerovnosť neplatí. Ako výstup funkcie, sa vyhodnotí použiteľnosť dvoch spomínaných aproximácii a či je zadaný príklad riešiteľný metódou konečných diferencii.

Výpis 3.6: Metoda 2, vo funkcii kondiff_calc_v2

```
function [ok_subs_center, ok_subs_pos] = over_podmienky(...
    b,c,d,start,stop,n)
```

4 ZDROJOVÝ KÓD

Program začína stlačením tlačítka "Vyrieš rovnicu".

Výpis 4.1: Zdrojový kód spustený po stlačení tlačidla

```
function solve_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.busy,'String','Čakajte prosím... Výpočet prebieha');
guidata(hObject,handles);
drawnow();
%extrahovat data z GIU
inputy = strcat('(',get(handles.inputy,'String'),')');
inputyd = strcat('(',get(handles.inputyd,'String'),')');
inputydd = strcat('(',get(handles.inputydd,'String'),')');
inputRHS = strcat('(',get(handles.inputRHS,'String'),')');
a = str2double(get(handles.a,'String'));
b = str2double(get(handles.b,'String'));
a_RHS = str2double(get(handles.ya,'String'));
b_RHS = str2double(get(handles.yb,'String'));
a_alfa1 = str2double(get(handles.a_alfa1,'String'));
a_alfa2 = str2double(get(handles.a_alfa2,'String'));
b_beta1 = str2double(get(handles.b_beta1,'String'));
b_beta2 = str2double(get(handles.b_beta2,'String'));
presnost = str2double(get(handles.presnost,'String'));
over_jednoznacost = (get(handles.jednoznacnost,'Value'));
%% overit ci su vstupy platne
if a>=b
    msg = 'a je vačšie alebo rovné b, obrátť podmienky';
    set(handles.busy,'String',msg);
    guidata(hObject,handles);
    return;
end
if (strcmp(inputydd,'(0)'))
    msg = 'Druhá derivácia musí buťnenulová!';
    set(handles.busy,'String',msg);
    guidata(hObject,handles);
    return;
end
if presnost==0
    msg = 'Presnosťmusí byť>0!';
    set(handles.busy,'String',msg);
    guidata(hObject,handles);
    return;
```

```
end
[ok_subs_center, ok_subs_pos] = over_podmienky(...
    inputydd,inputyd,inputy,a,b,100);
%% definovat substituce, rovnice
syms x y_ip y_i y_in h
%subsitucie * h^2
subs_y = '(y_i*h^2)';
if (ok_subs_center)
    subs_yd = '(((y_ip-y_in)/2)*h)';
else
    if (ok_subs_pos)
        subs_yd = '((y_ip-y_i)*h)';
    else
       msg = 'Rovnica sa nedá riešit touto metódou!';
       set(handles.busy,'String',msg);
       guidata(hObject,handles);
       return;
    end
end
subs_ydd = '(y_ip-2*y_i+y_in)';

%vytvorit lavu stranu rovnice
LHS = strcat('(',inputy,')*',subs_y,'+(',inputyd,')*'...
    ,subs_yd,'+(',inputydd,')*',subs_ydd);
difeq = eval(LHS);
difeq = expand(difeq);

%vytvorit pravu stranu rovnice
RHS = eval(strcat(inputRHS,'*h^2'));

%% vypocet metody, predat data funkcii
max_iter = 30; %obmedzenie itracii konecnych diferencii

%stara verzia, dokaze iba derichletove podmienky
%[xres, yres, presnost_out, krok_out, msg] = kondiff_calc...
%    (difeq,RHS,a,b,a_RHS,b_RHS,presnost,max_iter);

%nova verzia, dokaze vseobecne sturmove podmienky
podm_a = [a a_alfa1 a_alfa2 a_RHS];
podm_b = [b b_beta1 b_beta2 b_RHS];
[xres, yres, presnost_out, krok_out, msg] = kondiff_calc_v2...
```

```
    (difeq,RHS,podm_a,podm_b,presnost,max_iter,over_jednoznacost
        );
%vypis s akym krokom bolo vyriesene, a s akou presnostou
set(handles.krok_out,'String',sprintf('%e',krok_out));
set(handles.presnost_out,'String',sprintf('%e',presnost_out));

%porovnanie s presnym riesenim, vykresli sa 30 bodov
axes(handles.plot);
if (get(handles.exact,'Value'))
    xpres = linspace(a,b,30);
    %presne riesenie napisane v GUI
    syms x;
    fexact = eval(get(handles.Fexact,'String'));
    for t=1:30
        y_presne(t) = eval(subs(fexact,x,xpres(t)));
    end
    plot(xres,yres,xpres,y_presne,'kx');
    %debug, na vypis chyb.
    save('aktualny_vypocet','xres','yres','presnost_out','fexact
        ');
else %ak nebolo zvolene porovnanie s presnym riesenim,
    %vykresli sa iba graf funkcie y
    plot(xres,yres);
end
%nastav status spravu
set(handles.busy,'String',msg);
%nastav data do tabulky
set(handles.table,'Data',[xres yres]);

%uloz ak bolo zvolene ulozenie tak uloz do suboru
if (get(handles.save,'Value'))
    filename = strcat(get(handles.filename,'String'),'.csv');
    save_data(xres,yres,filename);
end
guidata(hObject,handles);
```

Výpis 4.2: Funkcia kondiff_calc_v2

```
function [xres, yres, presnost_out, krok_out, msg]...
  = kondiff_calc_v2(difeq,RHS,podm_a,podm_b,presnost,...
  max_iter,over_jednoznacost)
%% logika na podmienky, dirichlet alebo obecne
```

```
a = podm_a(1);
a_alfa1 = podm_a(2);
a_alfa2 = podm_a(3);
if (a_alfa2 == 0)
    if (a_alfa1 == 0)
        msg='Zle zadané okraj. podm.';
        xres = 0;
        yres = 0;
        presnost_out = Inf;
        krok_out = Inf;
        return;
    end
    %podmienka nie je derivacia,
    %podmienka je dirichletova
    a_dirichlet = 1;
    ya=podm_a(4)/a_alfa1;
else
    a_dirichlet = 0;
    a_RHS = podm_a(4);
end
b = podm_b(1);
b_beta1 = podm_b(2);
b_beta2 = podm_b(3);
if (b_beta2 == 0)
    if (b_beta1 == 0)
        msg='Zle zadané okraj. podm.';
        xres = 0;
        yres = 0;
        presnost_out = Inf;
        krok_out = Inf;
        return;
    end
    b_dirichlet = 1;
    yb=podm_b(4)/b_beta1;
else
    b_dirichlet = 0;
    b_RHS = podm_b(4);
end
%% krok site, krok vzdy mensi ako 1
if ((b-a)>=2)
    %ak je rozsah vacsi ako 2 tak krok 0.5
```

```
    krok_start = 0.5;
else
    %ak je rozsah maly <2, krok stvrtina rozsahu
    krok_start = (b-a)/4;
end
%% extrahovanie koeficientov pre maticu
syms x y_ip y_i y_in h
%extrahovanie funkcii koeficientov pri
%yi+1. yi, yi-1 do vektrou c
[c ref] = coeffs(difeq,[y_ip y_i y_in]);
%c(1) je koeficient pri y_i+1
%c(2) je koeficient pri y_i
%c(3) je koeficient pri y_i-1
%koeficieny su funkcie h a x

%% jednoznacost?
if (over_jednoznacost)
    %overenie jednoznacnosti riessenia. Ci matica bude
    %diagonalne dominantna. overenie je iba na kontrolu
    %uzivatlskeho zadania. Uzivatel si MUSI overit
    %jednoznacnost riesenia. Tato funkcia nezarucuje
    %100% istotu ze sustava je riesitelna ak vyhodnoti
    %ze je riesitelna!
    if (over_jednoznacnost(c,a,b,100)==0)
        xres = 0;
        yres = 0;
        presnost_out = Inf;
        krok_out = Inf;
        msg = 'Nedá sa rozhodnúť jednoznačnosť riesenia!';
        return;
    end
end
%% samotny algoritmus na metodu.
krok_actual = krok_start;
for q=1:max_iter
    %subituce kroku
    c_actual = subs(c,h,krok_actual);%k-1,k1,k+1
    c_actual = eval(c_actual);
    RHS_actual = subs(RHS,h,krok_actual);%prava strana
    RHS_actual = eval(RHS_actual);
    %vyrvorenie site
```

```
xh = a+krok_actual : krok_actual : b-krok_actual;
n = length(xh); %pocet rovnic
%vutvor tridiag maticu A
diagn(1:n-1)= eval(subs(c_actual(3),x,xh(2:n)));
diagp(1:n-1)= eval(subs(c_actual(1),x,xh(1:n-1)));
diaghl (1:n)= eval(subs(c_actual(2),x,xh));
A = diag(diagn,-1) + diag(diaghl) + diag(diagp,1);
%prava strana, tiez dosadit sit
F(1:n) = eval(subs(RHS_actual,x,xh));
if (a_dirichlet == 1) %zaciatocna podm dirichletova
    F(1) = F(1) - eval(subs(c_actual(3),x,xh(1)))*ya;
else %nie dirichletova
    %pridat stlpec do matice A ako prvy, hodnota y(a)
    %sa bude pocitat v sustave
    A_a = zeros(n,1); %stlpec
    A_a(1) = eval(subs(c_actual(3),x,xh(1)));
    A = [A_a A]; %pridanie do matice
    %ROVNICA (1.16)
    %pridat dalsiu rovnicu do sustavy na zaciatok
    %a_RHS=gamma1, a_alfa1, a_alfa2 su k dispozicii
    %rovnica  (a_alfa1 - 3*a_alfa2/(2*h))*y_0 +
    %(4*a_alfa2/(2*h))*y_1 + (-a_alfa2/(2*h))*y_2= a_RHS
    a_LHS = zeros(1,n+1);
    a_LHS(1) = (a_alfa1 - 3*a_alfa2/(2*krok_actual));
    a_LHS(2) = (4*a_alfa2/(2*krok_actual));
    a_LHS(3) = (-a_alfa2/(2*krok_actual));

    %rovnica nastavena, teraz maticova uprava
    %aby bola A tridiagonalna po pripojeni a_LHS
    %na prvy riadok. cize vynulovat prvok a_LHS(3)
    factor_to_tridiag = -a_LHS(3)/A(1,3);
    %prvy riadok A sa vynasobi faktorom a pricita k a_LHS
    a_LHS = a_LHS + (factor_to_tridiag.*A(1,:));
    %to iste na pravej strane
    a_RHS_actual = a_RHS + (factor_to_tridiag*F(1));

    %rovnica je teraz pripravena na spojenie s A
    A = [a_LHS;A];
    F = [a_RHS_actual,F];

    %inkrementuj n lebo som pridal novu rovnicu,
```

```
    %riesenie bude aj pre zaciatocny bod y(a)
    xh = [a xh];
    n=n+1;
end

if (b_dirichlet == 1) %podobne ako so zaciatocnou
    F(n) = F(n) - eval(subs(c_actual(1),x,xh(n)))*yb;
else
    %pridat stlpec do matice A, pre koncovy bod yb
    A_b = zeros(n,1);
    A_b(n) = eval(subs(c_actual(1),x,xh(n)));
    A = [A A_b];
    %rovnica  (b_beta2/(2*h))*y_inn + (-4*b_beta2/(2*h))
    %*y_in + (b_beta1 + 3*b_beta2/(2*h))*y_i = b_RHS
    b_LHS = zeros(1,n+1);
    b_LHS(n+1) = (b_beta1 + 3*b_beta2/(2*krok_actual));
    b_LHS(n)   = (-4*b_beta2/(2*krok_actual));
    b_LHS(n-1) = (b_beta2/(2*krok_actual));

    %rovnica nastavena, teraz maticova uprava aby bola
    %A tridiagonalna po pripojeni b_LHS na posledny riadok.
    factor_to_tridiag = -b_LHS(n-1)/A(n,n-1);
    %posledny riadok A sa vynasobi faktorom a pricita k
       b_LHS
    b_LHS = b_LHS + (factor_to_tridiag.*A(n,:));
    %to iste na pravej strane
    b_RHS_actual = b_RHS + (factor_to_tridiag*F(n));
    %rovnica je teraz pripravena na spojenie s A
    A = [A;b_LHS];
    F = [F, b_RHS_actual];
    %riesenie bude aj pre koncovy bod: y(b)
    xh = [xh b];
    n=n+1;
end

%debug, vypis cislo iteracie a velkost matice
fprintf(1,'Iteracia kon. diff:%2d, velkost matice: %5d\n',q,n
   );

%DVE METODY RIESENIA SUSTAVY
metoda = 2;
```

```
if metoda ==1
    %#1 Gauss-Seidelova metoda
    if (a_dirichlet==1)&&(b_dirichlet==1)
        start_ya = ya;start_yb = yb;
    else
        start_ya = 0;start_yb = 0;
    end
    %disp('Cas Gauss-Sidel:'); tic
    max_it_SG = 3000;
    [Y1, successSG] = GaussSeidel(A,F',presnost/100,...
        max_it_SG,start_ya,start_yb);
    %toc
    if (successSG ==0)
      %popisane nizsie
        if (b_dirichlet == 0)b = [];yb = [];end
        if (a_dirichlet == 0)a = [];ya = [];end
        xres = [a xh b]';
        yres = [ya Y1' yb]';
        presnost_out = max(abs(abs(Y0) - abs(Y1(2:2:n))));
        krok_out = krok_actual;
        msg = ...
         sprintf('Gauss-Seidel nekonverguje po %d iter.!'
            ...
         ,max_it_SG);
       return;
    end
else
    %#2 Matlab metoda
    %disp('Cas matlab /:');tic;
    Y1 = eval(vpa(mldivide(A,F'),32));
    %toc;
    [msg,msgid]=lastwarn;
    if strcmp(msgid,'MATLAB:nearlySingularMatrix')
        xres = [a xh b]';
        yres = [ya Y1' yb]';
        if q>1
            presnost_out = max(abs(abs(Y0) - abs(Y1(2:2:n))
               ));
        else
            presnost_out = presnost;
        end
```

```
            krok_out = krok_actual;
            msg = ...
            sprintf('Vypocet nedosiahol presnost!');
            warning('Vypocet skoncil');%na vymazanie chyby
            return;
        end
    end
if (q==max_iter)
    msg = sprintf('Presnosť nedosiahnutá po %d iteráciách!',q);
    presnost_out = max(abs(abs(Y0) - abs(Y1(2:2:n))));
    krok_out = krok_actual;
    if (b_dirichlet == 0)
       b = [];
       yb = [];
    end
    if (a_dirichlet == 0)
       a = [];
       ya = [];
    end
    xres = [a xh b]';
    yres = [ya Y1' yb]';
    return;
end

if (q>1) %vzdy sa musia vykonat aspon 2 iteracie,
   %aby bolo ako vyhodnotit presnost; vyhodnotenie
   %Y0 je minuly vypocet, Y1 je aktualny
   %porovnanie v uzlovych bodoch, absolutna hodnota.
   if (a_dirichlet == 1)
        presnost_out = max(abs(abs(Y0) - abs(Y1(2:2:n))));
   else
        presnost_out = max(abs(abs(Y0) - abs(Y1(1:2:n))));
   end
   if (presnost > presnost_out)
       krok_out = krok_actual;
        if (b_dirichlet == 0)
            %bod b a riesenie je vo vektore xh a Y1,
            %takze sa nepridava z okrajovych podmienok
            b = [];
            yb = [];
        end
```

```
        if (a_dirichlet == 0)
            %bod a a riesenie je vo vektore xh a Y1,
            %takze sa nepridava z okrajovych podmienok
            a = [];
            ya = [];
        end
        xres = [a xh b]';
        yres = [ya Y1' yb]';
        msg = 'Vypocet prebehol uspesne!';
        return;
    end %presnost
end %q>1
%polovicny krok a opakuj vypocet
krok_actual = krok_actual/2;
Y0 = Y1; %aktualny vypocet kopia do minuleho
end %iteracie koecnych diferencii
end %function
```

Výpis 4.3: Funkcia GaussSeidel

```
function [Y, success] = GaussSeidel(A,b,presnost,max_it,ya,yb)
n = length(b);
%tu bude vysledok, ako zaciatocna
%hodnota je priamka prepojujuca okrajove podm
%ak nie su dirichletove, vstup je 0,0
Y = linspace(ya,yb,n)';
chyba = 1e10*ones(n,1);

%% Ay=f riesim y
it = 0; %pocitadlo iteracii
while max(chyba) > presnost %opakuj pokial nebude dost presne
    it = it + 1; %na zastavenie nekonecnej slucky
    if (it > max_it)
        success = 0;
        return;
    end
    Xold = Y;  % ulozit hodnoty aby sa dala porovnat chyba
    for i = 1:n  %vsetky rovnice
        j = 1:n; % pocitat cez vsetky stlpce
        j(i) = [];  % okrem stlpca i
        Xtemp = Y;  % kopia
        Xtemp(i) = [];  % nepocita sa s xi
```

```
        Y(i) = (b(i) - sum(A(i,j) * Xtemp)) / A(i,i);
        %v dalsej iteracii pouzije vysledky z
        %predchadzajucej pre uz vypocitane Y
    end
    chyba = abs(abs(Y) - abs(Xold));
end
success = 1; %konvergovalo s menej ako max_it iteraciami
end
```

Výpis 4.4: Funkcia save_data

```
function save_data(xres,yres,file_name)
    fileID = fopen(file_name,'w');
    fprintf(fileID,'x;y\n');
    fprintf(fileID,'%.7e;%.7e\r\n',[xres yres]');
    fclose(fileID);
    %type(file_name)
end
```

Výpis 4.5: Funkcia over_podmienky

```
function [ok_subs_center, ok_subs_pos] = over_podmienky(...
    b,c,d,start,stop,n)
x_span = linspace(start,stop,n);
h = x_span(2)-x_span(1);
syms x
bx = eval(b);
cx = eval(c);
dx = eval(d);
%podmienka pre subs_yd center = '(((y_ip-y_in)/2)*h)';
pml_c = abs(eval(subs(2*bx+cx*h-dx,x,x_span)));%p minus l
p_c = abs(eval(subs(2*bx+cx*h,x,x_span)));%p
%figure(1);plot(x_span,pml_c,x_span,p_c);title('center');

%podmienka pre subs_yd positive = '((y_ip-y_i)*h)';
pml_p = abs(eval(subs(2*bx-dx,x,x_span)));
p_p = abs(eval(subs(2*bx,x,x_span)));
%figure(2);plot(x_span,pml_p,x_span,p_p);title('positive');

ok_subs_pos = 1; %prepokladam ze splnene
ok_subs_center = 1;
for i=1:n %ak nastane podmienka, nastavi do 0
   if (pml_c(i) < p_c(i))
```

```
        ok_subs_center = 0;
    end
    if (pml_p(i) < p_p(i))
        ok_subs_pos = 0;
    end
end
end
```

ZÁVER

V tomto projekte bol vytvorený funkčný program na počítanie okrajovej úlohy metódou konečných direfencii, ktorý funguje do druhého rádu v 1D prípade. Zadaný príklad na vypočítanie má vplyv na rýchlosť výpočtu. Pre niektoré príklady, prostredie Matlab ukázalo chybu out of memory už pri počítaní približne 8000 rovníc. Tento fakt zamozrejme závisí aj na parametroch počítača a architektúre procesora.

Projekt by mohol byť vylepšený o mnoho funkcii, ako napríklad optimalizácie overenie jednoznačnosti, pridanie možnosti riešenia rovníc až do 3 rádu (aproximácie v kapitole 2.3.2 v publikácii [11]), prípadne riešenie parciálnych rovníc, a tak ďalej.

LITERATÚRA

[1] Jaromír Baštinec, Michal Novák : Moderní numerické metody, FEKT VUT Brno

[2] Irena Růžičková, Rudolf Hlavička : Numerické metody, FSI VUT Brno

[3] MÍKA, Stanislav, Petr PŘIKRYL a Marek BRANDNER. *Speciální numerické metody: numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice* [online]. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006 [cit. 2017-05-01]. Texty z aplikované matematiky. ISBN 80-868-4313-0. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~mika/SNM2/SNM2.pdf>

[4] Germund Dahlquist, Ake Bjorck : Numerical Mathematics and Scientific Computation, Linköping, Sweden, 2007

[5] Babuška, I. – Práger, M. – Vitásek. E.: Numerical Processes in Differential Equations. Praha, SNTL; London, Interscience 1966

[6] Vitásek, E.: Numerické metody. Praha, SNTL 1987.

[7] GUTERMUTH Denise. *Picard's Existence and Uniqueness Theorem* [online]. 2011 [cit. 2017-05-02]. Dostupné z: <https://embedded.eecs.berkeley.edu/eecsx44/lectures/Spring2013/Picard.pdf>

[8] Inv, Matrix inverse. *MathWorks* [online]. [cit. 2017-05-02]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/inv.html>

[9] Mldivide, Solve systems of linear equations Ax = B for x. *MathWorks* [online]. [cit. 2017-05-02]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/mldivide.html>

[10] *Numerical solution of boundary value problems* [online]. In: . Stanford, USA, 2002 [cit. 2017-05-02]. Dostupné z: <https://web.stanford.edu/~fringer/teaching/numerical_methods_02/handouts/lecture9.pdf>

[11] ZHILIN, Li, Qiao ZHONGHUA a Tang TAO. *Numerical Solutions of Partial Differential Equations - An Introduction to Finite Difference and Finite Element Methods* [online]. 2011 [cit. 2017-05-02]. Dostupné z: <http://www4.ncsu.edu/~zhilin/TEACHING/MA587/fd_fem.pdf>

[12] Gauss Seidel Method. *MathWorks* [online]. [cit. 2017-05-02]. Dostupné z:<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32051-gauss-seidel-method>