

МФТИ  
Алгоритмы и структуры данных III, осень 2023  
Программа экзамена

1. Полиномиальное хеширование. Вероятность коллизии на словах длины  $n$  (б/д).
2. Алгоритм Рабина — Карпа.
3. Префикс-функция: определение, алгоритм нахождения за  $O(|s|)$  и применение для нахождения вхождений шаблона в текст.
4. Зет-функция: определение, алгоритм нахождения за  $O(|s|)$  и применение для нахождения вхождений шаблона в текст.
5. Бор. Построение бора по набору слов.
6. Способы хранения бора: преимущества и недостатки.
7. Хранение множества слов/чисел с помощью бора. Добавление и проверка наличия. Опционально: удаление.
8. Алгоритм Ахо — Корасик: определение суффиксных ссылок (`link`) и переходов по буквам (`go`).
9. Алгоритм Ахо — Корасик: реализация, корректность, асимптотика.
10. Подсчёт числа вхождений словарных слов в текст с помощью алгоритма Ахо — Корасик.
11. Сжатые суффиксные ссылки. Перечисление всех вхождений словарных слов в текст с помощью алгоритма Ахо — Корасик.
12. Определение суффиксного массива и массива `lcp`.
13. Алгоритм построения суффиксного массива строки длины  $n$  за  $O(n \log n)$ .
14. Алгоритм Касаи нахождения массива `lcp` по построенному суффиксному массиву длины  $n$  за  $O(n)$ .
15. Проверка равенства подстрок в строке: ответ на запрос за  $O(1)$  с помощью `sparse table` и суффиксного массива.
16. Детерминированный конечный автомат. Принимаемые слова, распознаваемый язык. Суффиксный автомат строки  $s$ : определение.
17. Правый контекст слова относительно языка. Эквивалентность слов.
18. Утверждение об устройстве классов эквивалентности (относительно языка, состоящего из всех суффиксов  $s$ ).
19. Суффиксный автомат: обозначения  $[x]$ , `longest( $C$ )`, `len( $C$ )`, `link( $C$ )`.
20. Критерий того, что  $u = \text{longest}([u])$ .
21. Суффиксный автомат: устройство рёбер, ведущих в вершину  $v$ .
22. Алгоритм построения суффиксного автомата: характеристика новых классов при дописывании символа  $c$ , потенциальные кандидаты в `longest`.
23. Алгоритм построения суффиксного автомата. Случай 1: появление символа  $c$ , которого не было в строке. Изменение множества рёбер, проставление суффиксных ссылок.
24. Алгоритм построения суффиксного автомата. Случай 2: новый класс не появляется. Изменение множества рёбер, проставление суффиксных ссылок.
25. Алгоритм построения суффиксного автомата. Случай 3: появляется новый класс. Изменение множества рёбер, проставление суффиксных ссылок.
26. Количество вершин и рёбер в суффиксном автомате.
27. Алгоритм построения суффиксного автомата: асимптотика.
28. Алгоритм построения суффиксного массива за линейное время.
29. Перемножение двух многочленов за  $O(n \log n)$  с использованием быстрого преобразования Фурье как чёрного ящика.
30. Быстрое преобразование Фурье: рекурсивный алгоритм.
31. Быстрое преобразование Фурье: обратное преобразование.
32. Быстрое преобразование Фурье: разворачивание рекурсии (преобразование бабочки).
33. Задача о вхождении шаблона в текст с  $k$  ошибками.

34. Нахождение обратного к многочлену по модулю  $x^M$ .
35. Деление многочленов за  $O(n \log n)$ , где  $n$  — максимальная из степеней.
36. Задача multipoint evaluation. Решение с помощью быстрого преобразования Фурье.
37. Задача интерполяции. Решение с помощью быстрого преобразования Фурье.
38. Нахождение  $n$ -го члена линейной рекуррентности  $s$ -го порядка за  $O(s \log s \log n)$ .
39. Алгоритм Тонелли — Шенкса извлечения квадратного корня в  $\mathbb{Z}_p$ .
40. Проверка числа на простоту. Тест Ферма.
41. Проверка числа на простоту. Тест Миллера — Рабина.
42. Факторизация числа. Ро-алгоритм Полларда (б/д).
43. Примитив точки, вектора, прямой. Построение прямой по двум точкам. Нормальный и направляющий векторы прямой.
44. Скалярное и «векторное» произведения векторов: формулы и свойства (б/д). Площадь многоугольника.
45. Расстояние от точки до прямой, проекция. Пересечение двух прямых.
46. Примитив окружности. Пересечение прямой и окружности. Пересечение двух окружностей.
47. Триангуляции многоугольника. Диагональ, ухо. Лемма о двух ушах.
48. Алгоритм триангуляции многоугольника за  $O(n^2)$ , где  $n$  — число вершин.
49. Выпуклая оболочка конечного множества точек: определение. Построение выпуклой оболочки заворачиванием подарка за  $O(nh)$ .
50. Построение выпуклой оболочки сортировкой точек по полярному углу за  $O(n \log n)$ .
51. Построение выпуклой оболочки сортировкой точек по координатам за  $O(n \log n)$ .
52. Динамическая выпуклая оболочка: вставка точек за  $O^*(\log n)$ .
53. Максимум скалярного произведения с фиксированным вектором, нахождение за  $O(\log n)$ .
54. Диаметр конечного множества точек за  $O(n \log n)$ .
55. Характеризация выпуклой оболочки как множества всех выпуклых комбинаций.
56. Сумма Минковского: определение и доказательство того, что сумма Минковского двух выпуклых многоугольников — выпуклый многоугольник.
57. Нахождение суммы Минковского двух выпуклых многоугольников за линейное время.
58. Проверка принадлежности точки многоугольнику: решение с помощью суммы ориентированных углов.
59. Проверка принадлежности точки многоугольнику: решение с горизонтальным лучом. Модификации: случайный луч, луч, заведомо не содержащий вершин многоугольника.
60. Представление полуплоскостей. Характеризация множеств, являющихся пересечениями множества полуплоскостей. Введение bounding box'a.
61. Пересечение полуплоскостей: алгоритм за  $O(n^2)$ .
62. Пересечение полуплоскостей: алгоритм за  $O(n \log n)$  (б/д).
63. Геометрия в  $\mathbb{R}^3$ . Скалярное, векторное, смешанное произведение: формулы и свойства (б/д).
64. Построение выпуклой оболочки в  $\mathbb{R}^3$  заворачиванием подарка за  $O(nh)$ .
65. Построение выпуклой оболочки в  $\mathbb{R}^3$  за  $O(n \log n)$  в среднем (б/д).
66. Post office problem: постановка. Определение диаграммы Вороного. Вид каждой ячейки диаграммы.
67. Связность диаграммы Вороного. Число вершин и рёбер в диаграмме.
68. Критерий того, что точка является вершиной диаграммы Вороного. Критерий того, что серединный перпендикуляр к  $p_i p_j$  участвует в диаграмме Вороного.
69. Алгоритм Форчуна построения диаграммы Вороного. Хранение элементов береговой линии. Виды событий. Асимптотика.
70. Определение триангуляции. Мотивировка: моделирование ландшафта.
71. Определение графа Делоне, его свойство (он является плоским) (б/д). Критерий того, что три сайта являются вершинами одной грани графа Делоне (б/д). Критерий того, что два сайта соединены ребром в графе Делоне (б/д). Вид любой грани графа Делоне (б/д). Определение триангуляции

Делоне.

72. Флип ребра. Нелегальное ребро, критерий легальности в терминах окружности (б/д).
73. Легальная триангуляция, легализация триангуляции. Критерий триангуляции Делоне (б/д).
74. Максимизация минимального угла в триангуляции Делоне.
75. Алгоритм построения триангуляции Делоне.
76. Сведение задачи построения триангуляции Делоне к задаче нахождения выпуклой оболочки множества в  $\mathbb{R}^3$ .